Concursul MateInfoUB 2021, secțiunea Informatică

23 Mai 2021

Concursul constă în obținerea unui punctaj cât mai mare prin rezolvarea celor 20 *de probleme propuse. Fiecare problemă are un punctaj corespunzător gradului ei de dificultate. Cel mai probabil, nu veți avea suficient timp să rezolvați toate problemele.*

1 Probleme de dificultate scăzută

1.1 Problema 1

(2 puncte) Care este ultima cifră a celui mai mare număr de 7 cifre, divizibil cu 7, care conține în componența sa doar cifre strict mai mici decât 7?

A. 0
B. 2
C. 3
D. 5
E. 6

1.2 Problema 2

(2 puncte) Care expresie implementează corect $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ pentru toate perechile n, k de numere naturale nenule? ($\lceil a \rceil$ reprezintă partea întreagă superioară a numărului real a, spre exemplu $\lceil 2.8 \rceil = 3$, n **div** k reprezintă câtul împărțirii lui n la k și n **mod** k reprezintă restul împărțirii lui n la k).

A. n **div** k
B. $(n + k)$ **div** k
C. $(n + k - 1)$ **div** k
D. n **div** $(k - 1)$
E. $(n$ **div** $k) + (n$ **mod** $k)$

1.3 Problema 3

(2 puncte) Considerăm următorul cod scris în limbajul C++ / Pascal:

```pascal
Type MyArray = array[0..9999] of Integer;

function f(t : MyArray; n : Integer) : Integer;
var i, s, j : Integer;
begin
  i := 0; s := 0;
  while i < n do begin
        j := i + 1;
        while (j < n) and (t[i] = t[j]) do
          j := j + 1;
        s := s + 1;
        i := j;
  end;
  f := s;
end;
```

```c
int f(int t[10000], int n) {
  int i = 0, s = 0;
  while (i < n) {
    int j = i + 1;
    while (j < n && t[i] == t[j])
      j += 1;
    s += 1;
    i = j;
  }
  return s;
}
```

Definiții: O *subsecvență* a lui `t` este o listă de valori aflate pe poziții consecutive crescătoare, e.g., $[t[3], t[4], t[5]]$. Un *subșir* al lui `t` este o listă de valori aflate pe poziții ordonate crescător (nu neapărat consecutive), e.g., $[t[3], t[5], t[9]]$.

Presupunând că tabloul `t` este format din `n` numere **ordonate crescător**, precizați ce returnează `f(t, n)`:

A. numărul valorilor distincte din tabloul `t`
B. lungimea maximă a unei subsecvenţe din tabloul `t` formată din valori egale
C. numărul subsecvenţelor strict crescătoare din tabloul `t`
D. lungimea maximă a unui subşir din tabloul `t` format din valori egale
E. numărul valorilor care se repetă de cel puțin două ori din tabloul `t`

1.4 Problema 4

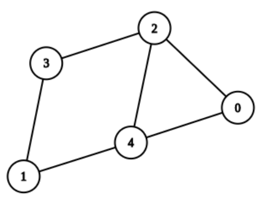
(2 puncte) Într-o sală de conferințe sunt mai multe persoane, fiecare având o rezervă suficient de mare de cărți de vizită. Știind că oricare două persoane pot să facă schimb de cărți de vizită **cel mult o dată** și s-au efectuat 23052021 de schimburi, care este numărul minim de persoane care se pot afla în sală?

A. 4801
B. 4802
C. 4803
D. 6790
E. 6791

1.5 Problema 5

(2 puncte) Pentru un graf G, un *arbore parțial* este un graf conex, fără cicluri, conținând același număr de noduri ca G și doar muchii din G (dar nu neapărat toate).

Numărul de *arbori parțiali* ai grafului de mai jos este egal cu :



A. 12
B. 11
C. 9
D. 15
E. 16

1.6 Problema 6

(2 puncte) Un număr natural se numește *palindrom* dacă se citește la fel de la stânga la dreapta și de la dreapta la stânga. Spre exemplu, 13231 și 2662 sunt *palindromuri*, dar 145 sau 1234322 nu sunt.

Un număr natural se numește *pseudo-palindrom* dacă cifrele sale pot fi reordonate astfel încât să devină *palindrom* (în particular orice *palindrom* este și *pseudo-palindrom*). Spre exemplu, 13321 și 2626 sunt *pseudo-palindromuri*.

Fie X cel mai mare număr *pseudo-palindrom* mai mic sau egal cu 1000465. Care este restul lui X la împărțirea cu 37?

A. 36
B. 4
C. 1
D. 35
E. 25

1.7 Problema 7

(2 puncte) Se dă următoarea adunare $ERAM + MARE = MARET$, unde fiecare majusculă reprezintă o cifră (nu neapărat distinctă de celelalte). Fiind primele cifre ale numerelor, cifrele corespunzătoare lui M și E trebuie să fie diferite de 0. Care este valoarea sumei $M + A + R + E + T$?

A. 21
B. 7
C. 16
D. 18
E. 30

1.8 Problema 8

(2 puncte) Ionel are 10 creioane. Lungimile fiecărui creion sunt:

$$4, 3, 7, 8, 7, 4, 5, 8, 13, 15$$

El își dorește să obțină creioane având doar două lungimi diferite. Pentru a realiza acest lucru, el poate scurta (prin ascuțire) unele creioane.

Care este suma maximă a lungimilor creioanelor pe care o poate obține Ionel, după ce efectuează operațiile?

A. 46
B. 50
C. 54
D. 56
E. 62

1.9 Problema 9

(2 puncte) O mulțime de numere naturale se numește *13-liberă* dacă nu putem obține numărul 13 ca sumă a unor elemente **distincte** din mulțime. Spre exemplu, mulțimea $1, 5, 7, 11$ nu este *13-liberă* fiindcă $1 + 5 + 7 = 13$, dar mulțimea $1, 5, 6$ este *13-liberă* (notați că deși $1 + 6 + 6 = 13$, condiția descrisă nu este încălcată, 6 fiind folosit de două ori).

Care este cardinalul maxim al unei submulțimi *13-libere* a mulțimii $1, 2, 3...10$?

A. 5
B. 4
C. 3
D. 6
E. 8

1.10 Problema 10

(2 puncte) Fie n cel mai mare număr natural **prim** de 5 cifre cu toate cifrele distincte.

Care este restul împărțirii lui n la 37?

A. 27
B. 4
C. 11
D. 15
E. 31

2 Probleme de dificultate medie

2.1 Problema 11

(3 puncte) Vă amintiți de Cristian cel neastâmpărat? Tatăl lui s-a hotărât să îl învețe puțină aritmetică.

El spune că de la un număr natural x se poate ajunge la un număr natural y ($y > x$) trecând prin numerele dintre ele utilizând o secvență de pași. Lungimea fiecărui pas este pozitivă și poate fi egală cu lungimea pasului anterior, mai mare cu 1 sau mai mică cu 1. **Lungimile primului și ultimului pas trebuie să fie egale cu 1.**

Problema dată lui Cristian este de a găsi numărul minim de pași prin care se poate ajunge de la 2021 la 3110. Ce să aleagă Cristian?

A. 64
B. 65
C. 66
D. 67
E. 68

2.2 Problema 12

(3 puncte) Primarul P. are de acoperit un perete lung de 100 m și înalt de 1 m, pe care vrea să îl împânzească cu postere publicitare. În acest sens, a cumpărat 8 postere, de înălțime egală cu 1 m și lățimile (exprimate în metri):

$$12, 27, 13, 25, 26, 38, 28, 38$$

El va trebui să aranjeze posterele de-a lungul peretelui. Posterele nu au voie să se suprapună și nu pot depăși marginile peretelui. Care este aria maximă de perete pe care o poate acoperi folosind posterele cumpărate (exprimată în m^2)?

A. 93
B. 94
C. 95
D. 96
E. 97

2.3 Problema 13

(3 puncte) Considerăm triunghiul infinit de mai jos (imagine disponibilă și aici: `https://i.ibb.co/2jy8qTC/triunghi.png`), format din numere naturale, în care numărul 1 se află la nivelul 1, numerele 2 și 3 se află la nivelul 2, numerele 4, 5 și 6 se află la nivelul 3 și așa mai departe:

```
                        1
                    2       3
                4       5       6
            7       8       9      10
        11      12      13      14      15
    16      17      18      19      20      21
22      22      23      24      25      26      27
.......................................................
```

Pentru un anumit nivel k, vrem să calculăm suma numerelor din **interiorul** tringhiului care se oprește la nivelul k. Spre exemplu, pentru nivelul $k = 5$ numerele din interiorul triunghiului creat sunt 5, 8, 9, și suma lor este 22; iar pentru $k = 7$ numerele din interiorul triunghiului creat sunt 5, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 19 și 20 și suma lor este 135.

Calculați suma numerelor din interiorul triunghiului care se oprește la nivelul $k = 2021$.

A. 2076403516157
B. 2080520640766
C. 2080520640767
D. 2084643884965
E. 2084643884966

2.4 Problema 14

(2 puncte) Fie A o matrice binară cu 50 de linii și 50 de coloane (numerotate de la 1 la 50). Celula de pe rândul i și coloana j conține valoarea 1 dacă și numai dacă numărul $50 \cdot (i-1)+j$ se divide cu 7 **sau** cu 13 (altfel conține valoarea 0). Matricea se poate vizualiza aici: `https://i.ibb.co/k0tKWgT/img-5050.png` (celulele albe reprezintă pozițiile egale cu 0, iar celulele negre pozițiile egale cu 1).

Vrem să plasăm **un singur "domino"** (piesă de mărime 1×2 sau 2×1) în matrice. Domino-ul trebuie să acopere 2 celule vecine (pe orizontală sau verticală) de 0 ale matricei. În câte feluri putem face acest lucru?

A. 1479
B. 1480
C. 1520
D. 2959
E. 3039

2.5 Problema 15

(3 puncte) Considerăm următorul algoritm de acoperire a unei sume de bani, folosind bancnotele disponibile în portofel:

Cât timp suma este neacoperită și avem în portofel o bancnotă de valoare mai mică sau egală cu suma, alegem cea mai mare bancnotă de acest tip, scoatem bancnota din portofel și reducem suma cu valoarea ei.

Dacă algoritmul se încheie cu suma 0, a reușit, altfel a eșuat.

În funcție de configurația de bancnote disponibile și suma de acoperit, e posibil ca acest algoritm să nu găsească o soluție deși ea există. Spre exemplu, dacă avem bancnotele $\{1, 1, 4, 5, 6\}$ și trebuie să acoperim suma $S = 9$, algoritmul va selecta bancnotele $6, 1, 1$, după care se va bloca, fiindcă nu mai poate acoperi suma rămasă (egală cu 1). Totuși, există soluția $\{4, 5\}$ care acoperă complet suma. Numim o astfel de configurație de bancnote disponibile, respectiv sumă de acoperit, un contraexemplu pentru algoritmul descris.

Fie $Smin$ cea mai mică sumă de acoperit care apare într-un contraexemplu construit doar cu tipurile de bancnote românești aflate în circulație, anume: $\{1, 5, 10, 50, 100, 200, 500\}$. Fiecare tip de bancnotă poate fi folosit de oricâte ori (inclusiv deloc). Care este restul lui $Smin$ la împărțirea cu 37?

A. 13
B. 3
C. 8
D. 18
E. 23

2.6 Problema 16

(3 puncte) Câte dreptunghiuri distincte sunt în figura următoare?

```
+------+---+---+---+---+
|      |   |   |   |   |
+--+---+   +---+   |   |
|  |   |   |   |   |   |
+--+---+---+---+---+   |
|  |       |       |   |
+--+---+---+---+---+---+
|      |   |   |       |
+------+---+---+-------+
```

A. 43
B. 44
C. 45
D. 46
E. 47

3 Probleme de dificultate ridicată

3.1 Problema 17

(5 puncte) Pe masă este scrisă ecuația $a + b = c$. După un cutremur masiv, s-au permutat toate cifrele și semnele matematice între ele și s-a obținut o nouă "ecuație" (evident, greșită):

$$129129851 = 29552 + 1177003$$

Care ar fi putut fi valoarea inițială a lui c?

A. 8739191
B. 3001892
C. 3072104
D. 3735094
E. 5790835
F. 7192195
G. 8952530
H. 15038950
I. 15111922
J. 15839920

3.2 Problema 18

(5 puncte) *În această problemă ne vom referi la date calendaristice care țin cont de an, lună, zi, ora și minut.*

Spunem că o astfel de dată este *robustă* dacă putem deduce în mod unic la ce dată validă se referă o mulțime de numere, fără să știm corespondența dintre valori și câmpurile datei.

Spre exemplu, având valorile $\{3, 20, 30, 53, 2021\}$, știm că nu poate fi vorba decât de 30.03.2021 20:53, deci această dată este *robustă*. Pe de altă parte, data 23.05.2021 20:53 nu este *robustă*, deoarece mulțimea $\{5, 20, 23, 53, 2021\}$ poate identifica și alte date (de exemplu, 20.05.2021 23:53).

Câte date între 01.01.2021 00:00 și 31.12.2021 23:59 sunt *robuste*?

O dată este validă dacă ora este în intervalul $[0, 23]$, minutul în $[0, 59]$, luna în $[1, 12]$, ziua în intervalul corespunzator lunii respective conform calendarului anului 2021.

A. 27412
B. 29568
C. 35797
D. 37409
E. 44382
F. 44516
G. 46870
H. 512260
I. 525600
J. 535680

3.3 Problema 19

(5 puncte) Considerăm 7 copii (identificați prin numere de la 1 la 7) și relațiile de prietenie (bidirecționale):

$$\{(1, 2), (4, 5), (4, 6), (6, 7), (7, 2), (4, 2), (3, 1), (5, 6), (4, 3), (3, 2)\}$$

În ziua 0, copilul 5 află de la profesoară un secret (că aceasta vrea să organizeze o onomastică pentru copilul 2 la sfârșitul celei de-a 4-a zi). În fiecare dintre următoarele 4 zile, se întâmplă următorul lucru:

Fiecare copil care știe secretul își alege exact un prieten aleator (echiprobabil din lista lui de prieteni) și îi comunică și lui secretul (se poate întâmpla ca un copil să comunice secretul de mai multe ori aceluiași prieten, în zile diferite).

Astfel, noi copii pot afla secretul, pe care îl vor comunica în continuare începând cu zilele următoare.

Care este probabilitatea pentru copilul 2 să afle secretul cel târziu la sfârșitul celei de-a 4-a zi?

(Alegeți varianta cea mai apropiată de răspunsul real)

A. 0%
B. 26%
C. 32%
D. 44%
E. 58%
F. 68%
G. 76%
H. 85%
I. 94%
J. 100%

3.4 Problema 20

(5 puncte) Compania *Grigorescu: Grile, grătare și grilaje* are 7 angajați. Ziua de mâine are un total de 1440 de minute. Fiecare angajat știe exact câte minute poate lucra mâine. Aceste valori sunt date de șirul:

$$480, 360, 333, 1000, 285, 560, 15$$

Un angajat care poate lucra X minute poate alege orice interval continuu de X minute care începe la minut fix și este inclus complet in cele 1440 de minute ale zilei. Angajații vor să-și coordoneze alegerile astfel încât oricare doi dintre ei să aibă cel puțin un minut comun în program. Câte configurații de alegeri satisfac această cerință? Răspunsul este foarte mare, deci suntem interesați de restul acestui număr la împărțirea cu 1 000 000 007.

O configurație A diferă de o configurație B dacă există cel puțin un angajat care și-a ales un anumit interval în A și un interval diferit în B.

A. 82930407
B. 195773645
C. 231919841
D. 353129100
E. 371820425
F. 469187746
G. 715377483
H. 67843200
I. 802170567
J. 918401827