

# Concursul MateInfoUB 2022, secțiunea Informatică

14 Mai 2022

*Concursul constă în obținerea unui punctaj cât mai mare prin rezolvarea celor 20 de probleme propuse. Fiecare problemă are un punctaj corespunzător gradului ei de dificultate. Cel mai probabil, nu veți avea suficient timp să rezolvați toate problemele.*

## 1 Probleme de dificultate scăzută

### 1.1 Problema 1

(2 puncte) Cel mai mare exponent  $k$  astfel încât  $12^k$  divide numărul  $100!$  este ?

- A. 8
- B. 25
- C. 33
- D. 48
- E. 97

### 1.2 Problema 2

(2 puncte) Considerăm o matrice pătratică  $A$  de dimensiune  $10 \times 10$ , având liniile și coloanele indexate de la 1. Orice element  $A[i][j]$  al matricei este egal cu minimul dintre  $i$  și  $j$  ( $1 \leq i, j \leq 10$ ). Suma tuturor elementelor din matricea  $A$  este egală cu:

- A. 285
- B. 385
- C. 500
- D. 550
- E. 715

### 1.3 Problema 3

(2 puncte) Pentru numărul natural pozitiv  $n$  definim  $f(n)$  astfel:

- $f(1) = 1$
- $f(n) = 1 + f(n/2)$ , dacă  $n$  este par
- $1 + f(3n+1)$ , dacă  $n$  este impar și diferit de 1.

Spre exemplu ,  $f(10) = 1 + f(5) = 1 + 1 + f(16) = 1 + 1 + 1 + f(8) = \dots = 7$ .

Cu cât este egal  $f(2022)$ ?

- A. 64
- B. 128
- C. 256
- D. 512
- E. 1024

#### 1.4 Problema 4

( 2 puncte) Numerele de la 1 la 20.000 sunt scrise în ordine într-o carte cu 100 de foi (200 de pagini), câte 100 pe pagină.

Mai exact, prima foaie, alcătuită din paginile 1 și 2, conține pe prima pagină numerele de la 1 la 100 și pe a doua pagină numerele de la 101 la 200. A doua foaie, compusă din paginile 3 și 4 conține numerele de la 201 la 400 etc.

Cineva dezleagă cartea, amestecă foile și o leagă la loc. Atenție, foile nu sunt rotite sau întoarse ci doar permutate.

Care este probabilitatea, ca numerele de la 1150 la 1250 să fie în continuare consecutive?

- A. 1
- B.  $1/2$
- C.  $1/99$
- D.  $1/100$
- E.  $99/10100$

#### 1.5 Problema 5

(2 puncte) Fie mulțimea de numere reale  $A = \{-3000, 3000, -2000, 2000, -1000, 1000, -13, 13, -7, 7, -5, 5, -1.5, 1.5, -0.75, 0.75, -0.5, 0.5, 0\}$ . Care este numărul de elemente al submulțimii de produs maxim din A?

- A. 9
- B. 13
- C. 14
- D. 15
- E. 18

#### 1.6 Problema 6

(2 puncte) În țara fermecată, există 100 orașe, identificate cu numerele de la 0 la 99 și următoarele drumuri bidirecționale:

- Autostrăzi între orașele (0 și 9), (10 și 19), (20 și 29), ..., (90 și 99), a căror traversare durează 4 ore;
- Drumuri comunale între orașele (0 și 1), (1 și 2), ..., (98 și 99), a căror traversare durează o oră.

Cât durează cel mai rapid traseu de la orașul 12 la orașul 72?

- A. 29
- B. 30
- C. 34
- D. 35

E. 38

### 1.7 Problema 7

(2 puncte) Fie o matrice pătratică de dimensiune 2022 ce conține valori de 1 și 0, astfel încât există exact o valoare egală cu 1 pe fiecare linie și pe fiecare coloană. În matrice este permisă interschimbarea a două valori din celule vecine pe verticală sau pe orizontală (considerăm că două celule sunt vecine dacă au o latură comună). Considerând toate matricele cu o asemenea proprietate, care este numărul minim de interschimbări necesare pentru a aduce toate valorile de 1 pe aceeași linie sau pe aceeași coloană?

- A. 2022
- B. 511566
- C. 510555
- D. 1021110
- E. 1022121

### 1.8 Problema 8

(2 puncte) Ultima cifră a numărului  $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 2022^{2022}$  este:

- A. 0
- B. 1
- C. 3
- D. 5
- E. 9

### 1.9 Problema 9

(2 puncte) Câte numere Fibonacci sunt în intervalul închis  $[1234567890, 9876543210]$ ?

- A. 1
- B. 2
- C. 4
- D. 8
- E. 16

### 1.10 Problema 10

(2 puncte) Fie graful neorientat  $G$  dat prin mulțimea nodurilor  $V=1, 2, \dots, 1000$  și mulțimea muchiilor  $E = (i, j) \mid i+j \text{ este număr prim}, 1 \leq i, j \leq 1000$ . Care este numărul ciclurilor distincte de lungime 3 din graful  $G$ ? (Considerăm ca două cicluri sunt distincte dacă ele diferă prin cel puțin o muchie.)

- A. 0
- B. 1
- C. 27
- D. 64
- E. 125

## 2 Probleme de dificultate medie

### 2.1 Problema 11

(3 puncte) În orașul Netville sunt 14052022 case, identificate prin numerele naturale  $1, 2, \dots, 14052022$ . În majoritatea caselor locuiesc studenți (sau viitori studenți) ai Facultății de Matematică și Informatică, care s-au gândit să creeze o rețea de calculatoare folosind următoarea regulă: casa cu numărul  $h$  ( $2 \leq h \leq 14052022$ ) va fi interconectată cu toate casele al căror număr  $d$  este un divizor al lui  $h$  ( $1 \leq d < h$ ). De exemplu, casa cu numărul 10 va fi interconectată cu casele cu numerele 1, 2, 5, 20, 30, ..., 14052020. Numărul de conexiuni care trebuie realizate între toate cele 14052022 case este egal cu:

- A. 233442104
- B. 226416093
- C. 219390082
- D. 205338061
- E. 248511938

### 2.2 Problema 12

(3 puncte) Alex joacă un joc. Inițial, acesta se află lipit cu spatele de perete. La fiecare pas poate să facă un salt în față sau în spate de lungime egală cu  $2^k$  unități, unde  $k > 0$ . Pentru a evita accidente, Alex nu va efectua saltul în spate dacă poziția rezultată va fi mai mică decât 0. Care este numărul minim de salturi necesare lui Alex pentru a ajunge la poziția 1340291?

- A. 7
- B. 8
- C. 9
- D. 10
- E. 11

### 2.3 Problema 13

(3 puncte) Care este numărul minim de pătrate perfecte necesar astfel încât suma acestora să fie 2022? De exemplu:

- $2 = 1^2 + 1^2$ , deci răspunsul pentru 2 este 2.
- $10 = 3^2 + 1^2$ , deci răspunsul pentru 10 este tot 2.
- $100 = 10^2$ , deci răspunsul pentru 100 este 1.
- $18 = 3^2 + 3^2$ , deci răspunsul pentru 18 este 2.

- A. 2
- B. 3
- C. 4
- D. 5
- E. 6

### 2.4 Problema 14

(2 puncte) Pe masă se află 3 zaruri. Pe fiecare dintre cele 6 fețe ale zarurilor e inscripționată câte o cifră:  $Z_1$ : [1, 3, 2, 4, 5, 7]

$Z_2$ : [1,7, 6,2, 1, 5]  
 $Z_3$ : [7,9,8, 2, 4, 21]

Spunem că un număr de 3 cifre se poate forma folosind zarurile dacă putem aranja cele 3 zaruri pe masă astfel încât fețele de sus să descrie acel număr. De exemplu, putem forma numărul 562 folosind zarurile  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  (în această ordine). Câte numere distincte de 3 cifre se pot forma cu cele 3 zaruri?

- A. 125
- B. 317
- C. 499
- D. 521
- E. 729

## 2.5 Problema 15

(3 puncte) Pentru care din următoarele valori ale lui  $n$  există o alegere de semne plus/minus astfel încât expresia  $1 \pm 2 \pm 3 \pm 4 \pm \dots \pm n$  să ia valoarea 0?

- A. 2021
- B. 2022
- C. 2023
- D. 2025
- E. 2026

## 2.6 Problema 16

Se consideră funcția:

```
int h(int a, int b, int k) {  
    if (a <= 0) {  
        if (k == 1)  
            return a + b;  
        else  
            return b;  
    } else {  
        return h(a - b, b, k + 1);  
    }  
}
```

Care va fi valoarea expresiei  $h(14052022, 23, 0)$ ?

- A. 14
- B. 23
- C. 2022
- D. 610957
- E. 14051999

### 3 Probleme de dificultate ridicată

#### 3.1 Problema 17

(5 puncte) Considerăm funcția:

```
const int kLim = 1000000;
void fun(int a, int b, int c) {
    if (a > kLim || b > kLim || c > kLim) {
        return;
    }
    if (a != c && b != c) {
        cout << c << "\n";
    }
    fun(a + 1, b, c + b);
    fun(a, b + 1, c + a);
}
```

Care dintre următoarele numere va fi afișat la un moment dat ca urmare a apelului 'fun(0, 0, 0)'?

- A. 361
- B. 5051
- C. 1787
- D. 53411
- E. 41

#### 3.2 Problema 18

(5 puncte) Avem 10 bețe de lungimile: 3, 4, 5, 8, 10, 12, 14, 32, 57, 64.

Vrem să folosim unele dintre aceste bețe (posibil toate) pentru a construi conturul unui triunghi (punând bețele cap la cap). Pentru fiecare latură a triunghiului, putem folosi unul sau mai multe bețe. Triunghiul trebuie să aibă aria strict pozitivă.

Câte arii distincte posibile poate avea un asemenea triunghi?

- A. 8193
- B. 22
- C. 55558
- D. 11495
- E. 105693
- F. 234126
- G. 17293
- H. 16639
- I. 132
- J. 49763

#### 3.3 Problema 19

(5 puncte) Fie  $S$  suma tuturor elementelor tuturor submulțimilor cu 617 elemente ale mulțimii  $\{1, 2, 3, \dots, 1234\}$ . Câte cifre are  $S$ ?

- A. 325
- B. 376
- C. 392
- D. 404
- E. 415
- F. 427
- G. 440
- H. 455
- I. 467
- J. 489

### 3.4 Problema 20

(5 puncte) Alex are vedenii. Cum stă pe facebook să citească update-uri de la prieteni în loc să învețe pentru examenul de mâine, acesta începe să vadă cuvântul "picat" printre postări. Dat fiind un șir de caractere  $s$  format din literele mici ale alfabetului englez (fără diacritice) și semne de punctuație reprezentând o postare, o apariție a cuvântului "picat" este determinată de numerele  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ , astfel încât:

- $s[a_1] = ' p'$
- $s[a_2] = ' i'$
- $s[a_3] = ' c'$
- $s[a_4] = ' a'$
- $s[a_5] = ' t'$

Două apariții se consideră diferite dacă cel puțin unul dintre numerele  $a_1, a_2, a_3, a_4$  sau  $a_5$  este diferit în cele două apariții. Alex tocmai a citit următoarea postare:

*azi am putut in sfarsit ca din intamplare sa vizitez muzeul cunoscut al satului: cand am pasit acolo am simtit ca totul este minunat.*

Câte aparitii ale cuvântului "picat" există în această postare?

- A. 665
- B. 714
- C. 1923
- D. 2154
- E. 1315
- F. 1276
- G. 956
- H. 1672
- I. 1024
- J. 1948