Parte Teorica

① Sea k un cuerpo, V un k-espacio vectorial de dimension finita, y sean $S,T \subset V$ subespacios

ⓐ (4 pts) Definir $S+T$ y probar que es un subespacio

definimos $S+T$ como $\{s_1+t_1, s_2+t_2, \dots, s_n+t_n\}$ con $s_i \in S$ y $t_i \in T$ para $i=1,\dots,n$

ⓘ Contiene el vector 0

Como S y T son subespacios, contienen el vector 0 $\therefore$ $S+T$ tambien

ⓘⓘ Cerradura bajo la suma.

$u = s_1+t_1$ y $v = s_2+t_2$ $\Rightarrow$ $u+v = (s_1+t_1)+(s_2+t_2) = (s_1+s_2)+(t_1+t_2)$, $s_1+s_2 \in S$ y $t_1+t_2 \in T$ $\therefore$ $u+v \in S+T$

ⓘⓘⓘ Cerradura bajo multiplicacion de escalar

$w = s+t$

$\alpha w = \alpha(s+t) = \alpha s + \alpha t$, $\alpha s \in S$ y $\alpha t \in T$ entonces $\alpha s + \alpha t \in S+T$

ⓑ (8pts) Dar una formula para $\dim(S+T)$ y demostrarla

$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S\cap T)$

base de $S\cap T$ $\beta_A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

base de S $\beta_S = \{s_1,\dots,s_m\}$ extendemos bases con β_A

base de T $\beta_T = \{t_1,\dots,t_n\}$

$\beta_S = \{a_1,\dots,a_k,s_1,\dots,s_m\}$, $\beta_T = \{a_1,\dots,a_k,t_1,\dots,t_n\}$ $\Rightarrow$ $s = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1} s_1 + \dots + \alpha_{k+m} s_m$, $t = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_k a_k + \gamma_{k+1} t_1 + \dots + \gamma_{k+n} t_n$

$\Rightarrow v = a_1(\alpha_1+\gamma_1) + \dots + a_k(\alpha_k+\gamma_k) + \alpha_{k+1}s_1 + \dots + \alpha_{k+m}s_m + \gamma_{k+1}t_1 + \dots + \gamma_{k+n}t_n$

$\Rightarrow \beta_{S+T} = \{a_1,\dots,a_k,s_1,\dots,s_m,t_1,\dots,t_n\}$

$\therefore$ $\dim(S) = k+m$, $\dim(T) = k+n$

$\dim(S+T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S\cap T)$

$\dim(S+T) = (k+m) + (k+n) - k$

$\dim(S+T) = k+m+n$

② Sea k un cuerpo y V, W dos k-espacio vectoriales de dimension finita. Sean B_1 y B_2 bases de V y W respectivamente, y $f: V \longrightarrow W$ una transformacion

ⓐ (3 pts) Definir la matriz en las bases B_1, B_2 (denotada $[f]_{B_1,B_2}$)

$\beta_1 = \{v_1,\dots,v_n\}$, $\beta_2 = \{w_1,\dots,w_m\}$

$$[f]_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [f(v_1)]_{\beta_2} & [f(v_2)]_{\beta_2} & \dots & [f(v_n)]_{\beta_2} \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ⓑ (9 pts) Probar que para todo $v \in V$ vale que $[f(v)]_{\beta_2} = [f]_{B_1,B_2}[v]_{B_1}$

$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ $\therefore$ $[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$f(v) = f(c_1v_1 + \dots + c_nv_n)$, por linealidad

$= c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n)$, cada $f(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m$ con $a_{ij} \in k$

$= c_1(a_{11}w_1 + \dots + a_{m1}w_m) + c_2(a_{12}w_1 + \dots + a_{m2}w_m) + \dots + c_n(a_{1n}w_1 + \dots + a_{mn}w_m)$

$= w_1(c_1a_{11} + c_2a_{12} + \dots + c_na_{1n}) + w_2(c_1a_{21} + c_2a_{22} + \dots + c_na_{2n}) + \dots + w_m(c_1a_{m1} + c_2a_{m2} + \dots + c_na_{mn})$

$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j\right) w_i$

$$\therefore [f(v)]_{\beta_2} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}c_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj}c_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \quad \therefore [f(v)]_{\beta_2} = [f]_{\beta_1\beta_2}[v]_{\beta_2}$$

③ Determinar en cada caso si las afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

(3 pts) Sea $V = \{\phi \in (\mathbb{C}^4)^* \mid \phi(i,-i,0,1) = 0\}$. Existe un monomorfismo $T: \mathbb{C}^{2\times 2} \longrightarrow V$

$\dim((\mathbb{C}^4)^*) = \dim(\mathbb{C}^4) = 4 = \dim(\mathbb{C}^{2\times 2})$. Como $\dim(Im(T)) < 4$

$\therefore$ no es posible que exista una inyectividad ya que el $Nu(T) \neq \{0\}$

$\therefore$ no existe un monomorfismo $\therefore$ falso.

ⓑ (3 pts) Sea $T: \mathbb{Q}^6 \longrightarrow \mathbb{Q}^6$ una transformacion lineal tal que $T^4 = 25\,Id$. Entonces T no posee autovalores

Un autovalor λ es un valor tq $T(v) = \lambda v$

$T^4 = T(T(T(T(v)))) = T(T(T(\lambda v)) = T(T(\lambda^2 v)) = T(\lambda^3 v) = \lambda^4 v = 25\,Id(v)$

$\lambda^4 v = 25 v$

$\lambda^4 = 25$

$\lambda = \pm\sqrt[4]{25} = \pm\sqrt{5}$, $\pm\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ $\therefore$ T no tiene autovalores en $\mathbb{Q}$ $\therefore$ Verdadero

Parte Practica

④ (15 pts) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $T: \mathbb{R}^{3\times2} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times2}$ la transformacion lineal tq $T(B) = AB$

ⓐ Probar que $T^2 = Id$. Deducir que si λ es un autovalor, entonces $\lambda = \pm 1$

$$T(T(B)) = T(AB) = A(AB) = A^2 B$$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Id \cdot B = B \therefore T^2 = Id$$

$T(B) = \lambda B \Rightarrow T^2(B) = T(\lambda B) = \lambda T(B) = \lambda^2 B$, dado que $T^2 = Id \Rightarrow \lambda = \pm 1$

ⓑ Hallar los autoespacios asociados a 1 y -1, decidir si T es diagonalizable

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & -f \\ c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = -e \\ c = c \\ e = -a \\ b = -f \\ d = d \\ f = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -e \\ b = -f \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$-\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & -f \\ c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a = -e \\ -b = -f \\ -c = c \\ -d = d \\ -e = -a \\ -f = -b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a = -e & \Rightarrow a = e \\ -b = -f & \Rightarrow b = f \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

⑤ (15 pts) Sea $a \in \mathbb{R}$. Probar que la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ es inversible si y solo si $a \neq 1, -1$

Podemos descomponer la matriz como $M = a Id_6 + N$ siendo N la matriz con los 1 en la otra diagonal
En el ejercicio anterior observamos que $N^2 = Id$ y que sus autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$

$\therefore \det(M) = \det(aI + N)$, como sabemos que N tiene autovalores $\pm 1 \Rightarrow a + \lambda$ es autovalor de $M \therefore a+1$ y $a-1$ son autovalores

$\therefore P_M(\lambda) = (a+\lambda)^3 (a-\lambda)^3 \neq 0 \Rightarrow (a+1)^3 (a-1)^3 \neq 0 \Rightarrow (a+1) \neq 0$ y $(a-1) \neq 0 \Rightarrow a \neq 1, -1 \therefore M$ es invertible si solo si $a \neq 1$ y $a \neq -1$

⑥ Sean $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ el producto interno canonico y $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una transformacion lineal tal que $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo par de vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$

ⓐ (2 pts) Probar que $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$

$$\langle T(v), T(v) \rangle = \langle v, v \rangle$$
$$\|T(v)\|^2 = \|v\|^2$$
$$\|T(v)\| = \|v\|$$

ⓑ (8 pts) Probar que T es un isomorfismo

Sabemos que el espacio de salida y de llegada es $\mathbb{R}^n$ y tienen la misma dimension. Esto tambien implica que el nucleo sea 0 ya que $\langle v, v \rangle > 0$ si $v \neq 0$ $\therefore$ $Nu(T) = \{0\}$ $\therefore$ sabemos que es inyectiva y sobreyectiva porque $Im(T) = \mathbb{R}^n$ $\therefore$ es un isomorfismo.

ⓒ (10 pts) Sea A la matriz de T con respecto a la base canonica. Probar que $A \cdot A^t = Id_n$

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, (w_1, \dots, w_n) \right\rangle$$

$T(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ siendo e_j base canonica de $\mathbb{R}^n$ $\therefore$ $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \cdot (a_{1k} \ a_{2k} \ \dots \ a_{kn}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{ik} = (A \cdot A^t)_{jk} = \delta_{jk} \begin{cases} 0 & si \ j \neq k \\ 1 & si \ j = k \end{cases} = Id$

⑦ Sea V un espacio vectorial de dimension finita y $S, T: V \longrightarrow V$ dos transformaciones lineales

ⓐ (8 pts) Probar que $Im(T) \subset Nu(S)$ si y solo si $S \circ T = 0$

Si $Im(T) \subseteq Nu(S)$, tenemos que probar que $S(T(v)) = 0$ para todo $v \in V$

($\Rightarrow$) Sabemos que todo $v \in V$, $T(v) \in Im(T)$ y como $T(v) \in Nu(S) \Rightarrow S(T(v)) = 0$ $\therefore$ $S \circ T(v) = 0$ $\forall v \in V$

($\Leftarrow$) $S \circ T = 0$, $S(T(v)) = 0$, por definicion $Im(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$, cualquier $w \in Im(T)$, existe un v tq $T(v) = w \Rightarrow S(w) = S(T(v)) = 0$

$\therefore$ $w \in Nu(S) \Rightarrow Im(T) \subseteq Nu(S)$

ⓑ (4 pts) Asumimos que $S \circ T = 0$. Probar que $(S+T)(Nu(S)) \subseteq Im(T)$

Sea $x \in Nu(S)$, $S(x) = 0$. Tenemos que $(S+T)(x) = S(x) + T(x) = 0 + T(x) = T(x)$ por definicion $Im(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ $\therefore$ $(S+T)(Nu(S)) \subseteq Im(T)$

ⓒ (8 pts) Asumimos ahora que $S \circ T = 0$ y que $S+T$ es un monomorfismo. Probar que $Im(T) = Nu(S)$

$Nu(S+T) = \{0\}$ por ser monomorfismo $\therefore$ $Im(S+T) = V$

Tomamos $x \in Nu(S)$, como $(S+T)(w) = x$, $S(w) + T(w) = x$, pero como $x \in Nu(S)$ entonces aplicamos S en ambos lados

$S(S(w)) + S(T(w)) = S(x) = 0$ y como $S \circ T = 0$ $S(S(w)) + 0 = 0 \Rightarrow S(S(w)) = 0 \Rightarrow S(w) \in Nu(S)$

De $S(w) + T(w) = x$ deducimos que $T(w) = x - S(w)$. Si $w \in Nu(S)$ entonces $(S+T)(w) = S(w) + T(w) = 0 + T(w) = T(w)$

y como $(S+T)(w) = x \Rightarrow T(y) = x$ $\therefore$ $x \in Im(T) \Rightarrow$ para cualquier $x \in Nu(S)$ existe un $w \in V$ tq $T(w) = x$ $\therefore$ $Nu(S) \subseteq Im(T)$ y por el inciso ⓐ $(Im(T) \subseteq Nu(S)) \Rightarrow Im(T) = Nu(S)$