

Parcial II

1) Halle todas las soluciones de la siguiente ecuación

$$\ln(x-2) + \ln(x+4) = \frac{1}{2} [\ln(200x) - \ln(2x)]$$

$$\ln((x-2) \cdot (x+4)) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{200x}{2x}\right)$$

$$\ln((x-2) \cdot (x+4)) = \frac{1}{2} \ln(100)$$

$$\ln((x-2) \cdot (x+4)) = \ln(10)$$

$$(x-2)(x+4) = 10$$

$$x^2 + x - 2x - 2 = 10$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$x = 4$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-1) \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$x_1 = 3$
 $x_2 = -3$ → No es solución ya que el argumento del ln no puede ser menor a 0.

2) Calcule el siguiente límite, si existe. De no existir explique por qué.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{|x+2|}$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq -2 \\ -(x+2) & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x-2) = -4 //$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 4}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{-(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -2^-} -(x-2) = -(-2-2) = 4 //$$

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \text{no existe}$ ya que el límite por derecha no es igual al límite por izquierda.

3) Considere la función $f(x) = \frac{x^2 + 5x}{50 - 2x^2}$. Determine si existen asíntotas verticales y/o horizontales de f . (Calcule todos los límites involucrados y evalúe la existencia).

Posibles AV: $50 - 2x^2 = 0$

$$-2x^2 = -50$$

$$x = \pm \sqrt{25}$$

$$x = \pm 5$$

$$x^2 + 5x \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$5^2 + 5 \cdot 5 = 50$$

$$x = -5$$

$$(-5)^2 + 5 \cdot (-5) = 0$$

AV: $x = 5$

AH: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5x}{50 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{5}{x}\right)}{x^2 \left(\frac{50}{x^2} - 2\right)} = -\frac{1}{2}$

AH: $-\frac{1}{2}$

4) Analice la continuidad de la siguiente función en el punto $x=0$. En caso de encontrar una discontinuidad clasifíquela.

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ \frac{\sin(2x) + \sin(3x)}{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

1. $f(0) = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x) + \sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{x} \cdot \frac{2}{2} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{x} \cdot \frac{3}{3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot \frac{2}{1} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{3}{1} = 5 //$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0 //$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{no existe}$

$f(x)$ es discontinua en $x=0$. Esta es una discontinuidad de Salto ya que sus límites laterales tienden a valores finitos.

5) Demuestre que la ecuación $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \ln(x+1)$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$. En caso de usar un teorema enuncíelo.

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \ln(x+1)$$

Por el teorema del valor intermedio:

El T.V.I dice que si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$

y N es un valor entre $f(a)$ y $f(b)$, existe un c tal que $f(c) = N$

$$f(a) < f(c) < f(b)$$

tomamos $[0, \frac{\pi}{2}]$

$$f(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln(1) = 1 - 0 = 1 //$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = \sin(\pi) - \ln\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = 0 - \ln\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(c) < f(0)$$

$$-\ln\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) < c < 1$$

Como tenemos un valor negativo y uno positivo, y sabemos que esta función es continua en el intervalo ($\sin(x)$ es continua para $x \in \mathbb{R}$ y \ln es continua en su dominio $x \in \mathbb{R} | x > -1$) si o si cortara el eje x .

6) En cada inciso escriba claramente los reglas de derivación utilizadas.

a) Calcule la derivada de las siguientes funciones

i) $f(x) = \frac{e^{5x^3} (4 \sin(x) + 2)}{x^3 + \pi}$

$$f'(x) = \frac{(e^{5x^3} \cdot 15x^2 \cdot (4 \sin(x) + 2) + e^{5x^3} \cdot 4 \cos(x)) \cdot (x^3 + \pi) - (e^{5x^3} \cdot (4 \sin(x) + 2)) \cdot 3x^2}{(x^3 + \pi)^2}$$

Derivada del producto y derivada de cociente

ii) $g(x) = \cos(x)^{\arctg(x)} = e^{\ln(\cos(x)) \cdot \arctg(x)}$

$$g'(x) = e^{\ln(\cos(x)) \cdot \arctg(x)} \cdot \left(\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) \cdot \arctg(x) + \ln(\cos(x)) \cdot \frac{1}{1+x^2} \right)$$

Regla de la cadena y derivada del producto

$$= e^{\ln(\cos(x)) \cdot \arctg(x)} \cdot \left(\frac{-\sin(x) \cdot \arctg(x)}{\cos(x)} + \frac{\ln(\cos(x))}{1+x^2} \right) //$$

No estoy seguro si están bien

① De la ecuación de la recta tangente al gráfico $f(x) = 2 \tan^2(x - \frac{\pi}{2})$ en $x = \frac{\pi}{4}$

$$y = 2 \tan^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})$$

$$y = 2 \tan^2(-\frac{\pi}{2})$$

$$y = 2(-1)^2$$

$$y = 2$$

punto $\rightarrow (\frac{\pi}{4}, 2)$

$$f'(x) = 4 \tan(x - \frac{\pi}{2}) \cdot \sec^2(x - \frac{\pi}{2})$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = 4 \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) \cdot \sec^2(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2})$$

$$= 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\cos^2(-\frac{\pi}{4})} = \frac{-4}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}$$

$$= \frac{-4}{\frac{2}{2}} = \frac{-8}{1} = -8 //$$

$$t(x) = Ax + B$$

$$2 = -8 \cdot \frac{\pi}{4} + B$$

$$t(x) = -8x + (2 + 2\pi) //$$

$$2 = -2\pi + B$$

$$2 + 2\pi = B$$