Parte teorica

① Sea k un cuerpo y V y W dos k-espacios vectoriales de dimension finita. Sean β_1 y β_2 bases de V y W respectivamente y $f: V \longrightarrow W$ una trans. lineal

ⓐ (3 pts) definir la matriz de f en la bases β_1 y β_2 (dentotada $[f]_{\beta_1\beta_2}$)

Sea $\beta_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $\beta_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$

$$[f]_{\beta_1\beta_2} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [f(v_1)]_{\beta_2} & [f(v_2)]_{\beta_2} & \dots & [f(v_n)] \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ⓑ (9 pts) Probar que para todo $v \in V$ vale que $[f(v)]_{\beta_2} = [f]_{\beta_1\beta_2}[v]_{\beta_2}$

$v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \therefore [v]_{\beta_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

$f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$

$= a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) \implies [f(v)]_{\beta_2} = a_1 [f(v_1)]_{\beta_2} + \dots + a_n [f(v_n)]_{\beta_2} \quad \therefore [f(v)]_{\beta_2} = [f]_{\beta_1\beta_2}[v]_{\beta_1}$

② (12 pts) Sea k un cuerpo y V un k-espacio vectorial de dimension finita. Dada una transformacion lineal $f: V \longrightarrow V$ y $\lambda \in k$, definir que significa que λ sea autovalor de f y probar que λ es un autovalor de f si y solo si λ es una raiz del polinomio caracteristico de f.

Que λ sea un autovalor de f significa que λ es un escalar perteneciente a K tal que $f(v) = \lambda v$

El polinomio caracteristico de f es $P_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_{dv}) = 0$ (siendo A la matriz de f respecto a alguna base)

(=>) Si λ es autovalor de f, existe un v no nulo, perteneciente a V tq $f(v) = \lambda v$. esto se traduce en que $\det(A - \lambda I_{dv}) = 0 \therefore P_f(\lambda) = 0$

(<=) Si $P_f(\lambda) = 0 \implies A - \lambda I_{dv}$ no es invertible $\implies$ existe un vector no nulo $w \in k^n$ tq $(A - \lambda I_{dv}) w = 0 \therefore f(w) = \lambda w$

③ Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada

ⓐ (3 pts) Sea k un cuerpo y $m < n$. Si $A \in k^{m \times n}$, entonces el sistema $Ax = 0$ tiene infinitas soluciones

Sabemos que hay m filas y n columnas $\therefore$ hay m ecuaciones y n incognitas, y como hay mas incognitas que ecuaciones, quedaran variables libres $\therefore$ hay infinitas soluciones al sistema $\therefore$ Verdadero

ⓑ (3 pts) Existe un isomorfo entre $\mathbb{R}^6$ y el subespacio de Matrices $\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies$ que la primera columna de la matriz sea 0 $\therefore$ si eliminamos esta columna nos quedaria una matriz 3×2

$\therefore$ definimos $T: \mathbb{R}^6 \longrightarrow k^{3\times 2}$ y como $\dim(\mathbb{R}^6) = \dim(k^{3\times 2}) = 6$ sabemos que $Im(T) = k^{3\times 2}$ que tiene dim 6

$\therefore$ el nucleo es $\{0\}$ por el teorema de la dimension $\therefore$ al ser inyectiva y sobreyectiva es biyectiva (isomorfismo) $\therefore$ Verdadero.

Parte Practica

④ (15 pts) Sea $T: \mathbb{R}[t]_n \longrightarrow \mathbb{R}[t]_n$ la transformacion lineal tal que $T(p(t)) = t p'(t) - p(1)$. Probar que T es diagonalizable

$T(1) = -1$
$T(x) = x - 1$
$T(x^2) = 2x^2 - 1$
$T(x^3) = 3x^3 - 1$
$\vdots$
$T(x^n) = nx^n - 1$

$$\therefore [T] = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & n \end{pmatrix}$$

Como es una matriz diagonal $\det(T) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \therefore \det(T) \neq 0$ y como tenemo n autovalores λ distintos, tenemos n autovectores para armar una base de T con autovectores $\therefore$ es diagonalizable

⑤ (15 pts) Sea V un F- espacio vectorial de dimension finita y $f, g: V \longrightarrow F$ dos transformaciones lineales tales que para cada $v \in V$, $f(v) = 0$ si solo si $g(v) = 0$. Probar que existe un escalar $c \in F$, $c \neq 0$ tq $f = c \cdot g$

⑥ Sea $V = \mathbb{R}_3[t]$ y $\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la funcion $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3)$ con $p, q \in V$

ⓐ (10 pts) Probar que $\langle , \rangle$ es un producto interno

(i) $\langle p, q \rangle = \langle q, p \rangle$

$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2) + p(3)q(3) = q(0)p(0) + q(1)p(1) + q(2)p(2) + q(3)p(3) = \langle q, p \rangle$

(ii) $\langle \alpha p + s, q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle + \langle s, q \rangle$

$\langle \alpha p + s, q \rangle = (\alpha p + s)(0)\, q(0) + (\alpha p + s)(1)\, q(1) + (\alpha p + s)(2)\, q(2) + (\alpha p + s)(3)\, q(3)$

$= \alpha p(0) q(0) + s(0) q(0) + \alpha p(1) q(1) + s(1) q(1) + \alpha p(2) q(2) + s(2) q(2) + \alpha p(3) q(3) + s(3) q(3)$

$= \alpha p(0) q(0) + \alpha p(1) q(1) + \alpha p(2) q(2) + \alpha p(3) q(3) + s(0) q(0) + s(1) q(1) + s(2) q(2) + s(3) q(3)$

$= \langle \alpha p, q \rangle + \langle s, q \rangle = \alpha \langle p, q \rangle + \langle s, q \rangle$

(iii) $\langle p, p \rangle > 0$ y $\langle p, p \rangle = 0 \iff p = 0$

$\langle p, p \rangle = p^2(0) + p^2(1) + p^2(2) + p^2(3) > 0$ si $p \neq 0$ y $= 0$ si solo si $p = 0$

ⓑ (10 pts) Sea S el subespacio generado por $\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1$, $t^2 - 3t$ y $t + 1$. Hallar la base ortogonal de S y una de $S^\perp$

$a\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1\right) + b(t^2 - 3t) + c(t + 1) = 0$

$a\frac{1}{2}t^2 - a\frac{3}{2}t + a + bt^2 - b3t + ct + c = 0$

$t^2\left(\frac{1}{2}a + b\right) + t\left(-\frac{3}{2}a - 3b + c\right) + (a + c) = 0 \implies \begin{cases} \frac{1}{2}a + b = 0 & \implies b = -\frac{1}{2}a \\ -\frac{3}{2}a - 3b + c = 0 & \implies b = \frac{1}{2}c \\ a + c = 0 & \implies a = -c \end{cases}$

$\frac{3}{2}c - \frac{3}{2}c + c = 0$

$c = 0 \implies a = b = 0$

$\therefore$ son li

S es el generado por $\{\frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + 1, t^2 - 3t, t+1\}$ y el complemento de S esta generado por $\{1, t^3\}$

⑦ ⓐ (5 pts) Sean n un numero impar y $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz antisimetrica, es decir tal que $A^t = -A$ probar que $\det(A) = 0$

Sabemos que $\det(A) = \det(A^t)$ y que $\det(-A) = (-1)^n \det(A)$ $\Rightarrow$ Supongamos que $\det(A) = k$ $\Rightarrow$ $\det(A^t) = \det(-A)$

$k = (-1)^n \det(A)$

$k = -k$ $\therefore$ $k = 0$