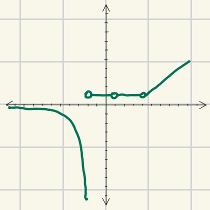
Guia 4

①



② $x=1$
1. $f(1)=1$
2. $\lim_{x\to1} f(x)=1$
3. $\lim_{x\to1} f(x)=1=f(1)=1$

Es continua en $x=1$

$x=2$
1. $f(2)=0$
2. $\lim_{x\to2} f(x)=0$
3. $\lim_{x\to2} f(x)=0=f(2)=0$

Es continua en $x=2$

$x=6$
1. $f(6)=2$
2. $\lim_{x\to6} f(x)=\nexists$

No es continua en $x=6$

$x=-2$
1. $f(-2)=2$
2. $\lim_{x\to-2} f(x)=4$
3. $\lim_{x\to-2} f(x)=4\neq f(-2)=2$

No es continua en $x=-2$

$x=0$
1. $f(0)=\nexists$
2. $\lim_{x\to0} f(x)=\nexists$

No es continua en $x=0$

③ ⓐ $f(x)=(x+2x^3)^4$ en $x=-1$
1. $f(-1)=(-1+2(-1)^3)^4=(-3)^4=81$
2. $\lim_{x\to-1} f(x)=(-1+2(-1)^3)^4=81$
3. $\lim_{x\to-1} f(x)=81=f(-1)=81$

Es continua en $x=-1$

ⓑ $f(t)=\dfrac{t^2}{(t+1)^3}$ en $t=2$
1. $f(2)=\dfrac{4}{(2+1)^3}=\dfrac{4}{21}$
2. $\lim_{t\to2} f(t)=\dfrac{4}{21}$
3. $\lim_{t\to2} f(t)=\dfrac{4}{21}=f(2)=\dfrac{4}{21}$

Es continua en $x=2$

④ $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ es continua en $[-4,4]$

$f(x)$ es continua en este intervalo porque la funcion de la raiz va a estar siempre definida cuando su argumento sea mayor o igual a 0

⑤ ⓐ $f(x)=x^3-4x^2+1$

Un polinomio esta definido para todos los $\mathbb{R}$

ⓑ $f(x)\begin{cases} x^2 & x>2 \\ x & x\leq 2\end{cases}$

1. $f(2)=2$
2. $\lim_{x\to2^+} f(x)=4$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=2$

$\lim_{x\to2} f(x)=\nexists$

No es continua en $x=2$

ⓒ $H(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ 0 & x<0\end{cases}$

1. $f(0)=1$
2. $\lim_{x\to0^+} f(x)=1$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=0$

No es continua en $x=0$

ⓓ $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x\neq 2 \\ 1 & x=2\end{cases}$

1. $f(2)=1$
2. $\lim_{x\to2^+} f(x)=\dfrac{2^2-4}{2-2}=\infty$

$\lim_{x\to2^-} f(x)=\dfrac{2^2-4}{2-2}=-\infty$

$\lim_{x\to2} f(x)=\nexists$

No es continua en $x=2$

ⓔ $f(x)=\begin{cases} x\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$

1. $f(0)=0$
2. $\lim_{x\to0^+} f(x)=\dfrac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=0$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=0$

3. $\lim_{x\to0^-} f(x)=0=f(0)=0$

Es continua en $x=0$

⑥ $f(x)=\begin{cases} x^2-c & x<4 \\ cx+20 & x\geq 4\end{cases}$

$\lim_{x\to4^+} x^2-c=4^2-c$

$\lim_{x\to4^-} cx+20=c4+20$

$16-c=c\cdot4+20$

$-4=5\cdot c$

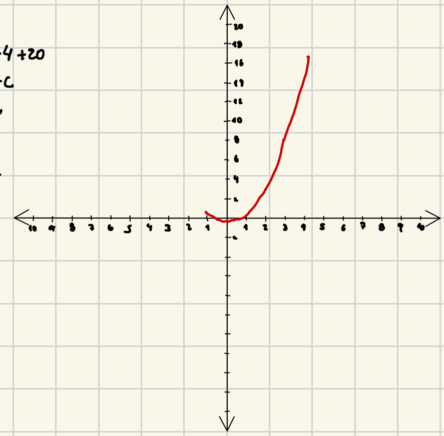
$-\frac{4}{5}=c$

2. $\lim_{x\to4^+} -\frac{4}{5}\cdot4+20=-\frac{16}{5}+20=\frac{84}{5}$

$\lim_{x\to4^-} 4^2+\frac{4}{5}=\frac{16\cdot5}{5}+\frac{4}{5}=\frac{84}{5}$

$\lim_{x\to4} f(x)=\frac{84}{5}$

3. $\lim_{x\to4} f(x)=\frac{84}{5}=f(4)=\frac{84}{5}$



⑦ ⓐ $f(t)=\dfrac{\sqrt[3]{t^3+3t^2+7}}{t+2}$

$\mathrm{Dom}\, f=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq-2\}$

Discontinuidad Esencial

ⓑ $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$

$$\begin{array}{l|l} x^3+0x^2+0x+1 & x+1 \\ \hline -x^3+x^2 & x^2-x+1 \\ 0-x^2+0x & \\ -x^2-x & \\ 0+x+1 & \\ x+1 & \\ 0 & \end{array}$$

$f(x)=x^2-x+1$

$\mathrm{Dom}\, f=\{x\in\mathbb{R}\}$

$f(x)$ ya es continua

ⓒ $f(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$

$f(x)=\dfrac{(x-4)(x-2)}{(x-4)(x-1)}$

$f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

$\mathrm{Dom}\, f=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq1\}$

Discontinuidad esencial

$\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot1\cdot8}}{2}$

$\dfrac{6\pm2}{2}$ $x_1=4$, $x_2=2$

$\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot1\cdot4}}{2}$

$\dfrac{5\pm3}{2}$ $x_1=4$, $x_2=1$

⑧ ⓐ $f(x)=x^3-3x=-1$ en $(0,1)$

$f(x)=x^3-3x+1$

tomamos $[0,1]$

$f(0)=1$

$f(1)=1-3+1=-1$

Sabemos que como $f(x)$ es continua y un extremo del intervalo esta en y+ y el otro en y-, sabemos que corta el eje x al menos una vez.

ⓑ $f(x)=x^5-2x^2-x-3$ en $(-2,3)$

tomamos $[-2,3]$

$f(-2)=(-2)^5-2\cdot(-2)^2-(-2)-3$

$=-32-8+2-3=-41$

$f(3)=3^5-2\cdot3^2-3-3$

$243-18-6=219$

Sabemos que como $f(x)$ es continua y un extremo del intervalo esta en y+ y el otro en y-, sabemos que corta el eje x al menos una vez.

ⓒ $f(x)=x^3+2x=x^2+1$ en $(0,1)$

$f(x)=x^3-x^2+2x-1$

tomamos $[0,1]$

$f(0)=-1$

$f(1)\ 1-1+2-1=1$

Sabemos que como $f(x)$ es continua y un extremo del intervalo esta en y+ y el otro en y-, sabemos que corta el eje x al menos una vez.

⑨ ⓐ $f(x)=\ln(x)-\mathrm{sen}(x)$ en $[1,\pi]$

$f(1)=\ln(1)-\mathrm{sen}(1)=-\mathrm{sen}(1)$

$f(\pi)=\ln(\pi)-\mathrm{sen}(\pi)=\ln(\pi)$

Sabemos que como $f(x)$ es continua y un extremo del intervalo esta en y+ y el otro en y-, sabemos que corta el eje x al menos una vez.

ⓑ $f(x)=2^x+x-2$ en $[0,1]$

$f(0)=1+0-2=-1$

$f(1)=2+1-1=2$

Sabemos que como $f(x)$ es continua y un extremo del intervalo esta en y+ y el otro en y-, sabemos que corta el eje x al menos una vez.

⑩ ⓐ $f(x)=\cos(x)$ en $[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$

$f(-\pi/3)=\frac{1}{2}$

$f(\pi/2)=0$

$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\leq\cos(x)\leq\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Hay maximo y minimo en $[-\pi/3,\pi/2]$

ⓑ $f(x)=\tan(x)$ en $[0,\pi]$

$f(0)=0$

$f(\pi)=\nexists$

ⓒ $f(x)=1-2x^2$ en $[1,3]$

$f(1)=1-2\cdot1^2=-1$

$f(3)=1-2\cdot3^2=-17$

Hay máximo y mínimo entre $[1,3]$

Material Extra

1 a) $f(x) = \dfrac{x}{x+1} \quad x \neq -1$

Disc. esencial $x=-1$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{|x|}} \quad x \neq 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{|x|}} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{|x|}} = \infty$$

Disc. escencial

$x=0$

c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

1. $f(0) = 0$
2. $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$ $\quad \Rightarrow \displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = \nexists$

$\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$

Disc. de salto

$x=1,\ x=-1,\ x=0$

2 a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad \begin{matrix} x \geq -1 \\ x \neq 0 \end{matrix}$

$\text{Dom } f = \{x \geq -1 \wedge x \neq 0\}$

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x < -1 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & -1 \leq x < 0 \wedge x > 0 \\ \dfrac{1}{2} & x = 0 \end{cases}$$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\sqrt{1-x^2}} \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{matrix}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\sqrt{1-x^2}} \overset{LH}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{-2x}{-2\sqrt{1-x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\sqrt{1-x^2}}{\cancel{x}\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{0}} = \sqrt{2}-1$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{0}} = \sqrt{2}-1$$

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{2}-1 & x < -1 \wedge x > 1 \\ 1 & x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\sqrt{1-x^2}} & -1 \leq x \leq 1 \wedge x \neq 0 \end{cases}$$

3) $-(x-1)^4+1 = (x-1)^2+k$ en $x=1$

$\Rightarrow -(1-1)^4+1 = (1-1)^2+k$

$1 = k$

4 a) $f(y) = \dfrac{1}{|x|}$ en $[4,8]$

$f(x)$ es cont. en $[4,8]$ entonces

$f(4) = \frac{1}{4}$

$f(8) = \frac{1}{8}$

max $= \frac{1}{4}$

min $= \frac{1}{8}$

b) $f(x) = x$ en $(0,1)$

$f(x)$ es cont. en $(0,1)$ pero no en $[0,1]$ por lo tanto no cumple