Integrales

Integrales Definidas

Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$, decimos que $F: I \to \mathbb{R}$ es una antiderivada o primitiva de f en I si $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

No son únicas!!! Teorema: si $F(x)$ es primitiva de f en I, entonces todas las primitivas tienen la forma de $F(x) + c$ para alguna constante c.

Dado I en $\mathbb{R}$ y $f: I \to \mathbb{R}$ se llama integral indefinida de f. El conjunto de antiderivadas se denota $\int f(x)\, dx = F_1 + c$, $c \in \mathbb{R}$

$\int \longrightarrow$ Integral, $dx \longrightarrow$ diferencial. Denotamos por diferencial de una función F a $d(F(x)) = F'(x)\, dx$.

Método de Sustitucion: Sea $f: (d,e) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g: (a,b) \longrightarrow (d,e)$ y derivable en su dominio, entonces F es primitiva de f en (d,e)

$H(x) = (F \circ g)(x)$ es primitiva de $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ en (a,b), ósea $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = F(g(x)) + c$, $c \in \mathbb{R}$ $\left(\int h(x)\, dx = H(x) + c\right)$

Este teorema nos da un método para calcular la integral indefinidas de la forma de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Hacemos sustitución $u = g(x)$ y $du = d(g(x)) = g'(x)$.

Luego $\int f(\underbrace{g(x)}_{u}) \cdot \underbrace{g'(x)\, dx}_{du} = F(u) + c = F(g(x)) + c$

Método de Integración Por Partes: Si f' y g' son continuas, entonces $\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$.

Para recordarlo si $u = f(x)$, $du = f'(x)$, $v = g(x)$ $dv = g'(x)$ $\Rightarrow$ $\int u\, dv = u \cdot v - \int v\, du$

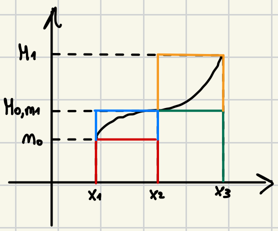
un dia vi una vaca sin cola vestida de uniforme

Integrales Definidas

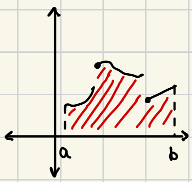
"Area bajo una curva", $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$

Suma de Riemann: Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ se define el area encerrada por la curva $y = f(x)$, el eje "x" y las rectas $x = a$ y $x = b$ por $\lim_{\Delta \to 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta_k \right)$, $\Delta_k = x_{k+1} - x_k$, m_k: min f en $[x_k, x_{k+1}]$. Llamaremos a este numero integral definida de f en $[a,b]$, se denota $\int_a^b f(x)\, dx$.

La definicion de integral definida se puede extender a funciones que toman valores negativos y se puede extender tambien a funciones continuas en $[a,b]$ salvo en un numero finito de discontinuidades



Suma de Riemann a grandes Rasgos



Integral definida

Metodo de sustitucion: Sea $f: [c,d] \to \mathbb{R}$ y $g: [a,b]$ tal que f y g' sean continuas en sus respectivos dominios. Entonces si $u = f(x)$ vale que $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$ $= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = F(u) \Big|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(x)) \Big|_a^b$

Metodo de Integracion por Partes: Sean f y g derivables en (a,b) tal que f' y g' tienen un n° finito de discontinuidades y acotadas, entonces $\int_a^b f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)$

Propiedades

Integrales Indefinidas

- $\int 0\, dx = c$, $c \in \mathbb{R}$
- $\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$ $\forall a \in \mathbb{R}$
- $\int (f+g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Integrales Definidas

- Si $f \geq 0$ la $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0$
- $\int_a^b c f(x)\, dx = c \int_a^b f(x)\, dx$ $\forall c \in \mathbb{R}$
- $\int_a^b (f \pm g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$
- Si $d \in [a,b] \Rightarrow \int_a^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx$
- Si $f \leq g$ en $[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$

Derivadas

$f \rightsquigarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

- Si $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
- $(af)'(x) = a f'(x)$ $\forall a \in \mathbb{R}$
- $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
- $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Integracion de Funciones Racionales

Vamos a suponer que la funcion racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ Satisface lo siguiente: ① El polinomio p es de menor grado que el q ya que si $gr(p) < gr(q)$ tenemos $\frac{p(x)}{q(x)} = Q + \frac{r(x)}{q(x)}$

② El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de q es 1

Teorema: todo polinomio monico se puede escribir como producto de polinomios de grado 1 y/o polinomio de grado 2 sin raices reales. Es decir, si $q(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ entonces $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_n) \cdot \underbrace{(x^2+d_1 x+\beta_1)\dots(x^2+d_\ell x+\beta_\ell)}_{\text{Sin raices reales}}$

CASO 1: q es un producto de polinomios de grado 1. $q(x) = (x-r_1)\cdot \dots \cdot(x-r_k)$ con $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$. En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (una constante para cada $p(x)$ de grado 1) tales que $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \dots + \frac{A_k}{x-r_k}$ luego, todo termino $\frac{A_i}{x-r_i}$ es facil de integrar.

Ejemplo $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}$, $q(x) = (x-3)(x+2)$, debemos encontrar A_1 y A_2 tales que $\frac{7x-1}{x^2-x-6} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+2} = \frac{A_1(x+2)+A_2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{A_1x+2A_1+A_2x-3A_2}{(x-3)(x+2)} = \frac{(A_1+A_2)\cdot x + (2A_1-3A_2)}{(x-3)(x+2)} \Rightarrow$

$\begin{cases} A_1+A_2 = 7 \longrightarrow A_1 = 7-A_2 \\ 2A_1-3A_2 = -1 \end{cases}$ $\Rightarrow 2(7-A_2)-3A_2 = -1 \Rightarrow 14-2A_2-3A_2 = -1 \Rightarrow -5A_2 = -15 \Rightarrow A_2 = 3$

$A_1+3 = 7 \Rightarrow A_1 = 4$

$\Rightarrow \int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{4}{x-3}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx = 4\ln|x-3| + 3\ln|x+2| + C$

CASO 2: q es el producto de polinomios de grado, todos iguales, es decir $q(x) = (x-r)^k$. En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ tales que $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x-r)} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$. Luego cada termino $\frac{A_i}{(x-r)^i}$ es facil de integrar

Ejemplo: $\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}$ tenemos que $p(x) = 1-2x$, $q(x) = (x+2)^3$. Debemos encontrar $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla lo siguiente: $\frac{1-2x}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x+2)^2 + A_2(x+2)+A_3}{(x+2)^3}$

$\frac{A_1(x^2+4x+4)+A_2(x+2)+A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1x^2+A_14x+4A_1+A_2x+2A_2+A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1x^2+(4A_1+A_2)\cdot x+4A_1+2A_2+A_3}{(x+2)^3} \Rightarrow A_1 = 0$, $A_2 = (4A_1+A_2) = -2 \Rightarrow 4\cdot 0 + A_2 = -2 \Rightarrow A_2 = -2$ $\quad A_1 = 0,\ A_2 = -2,\ A_3 = 5$

$A_3 = (4A_1+2A_2+A_3) = 1 \Rightarrow 2\cdot(-2)+A_3 = 1 \Rightarrow A_3 = 5$

$\Rightarrow \int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{0}{x+2}\,dx + \int \frac{-2}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{5}{(x+2)^3}\,dx = -2\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + 5\int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx = -2\int (x+2)^{-2}\,dx + 5\int (x+2)^{-3}\,dx = \frac{-2(x+2)^{-1}}{-1} + \frac{5(x+2)^{-2}}{-2} = \frac{2}{x+2} + \frac{5}{-2(x+2)^2} + C$

CASO 3: q es el producto de polinomios de grado 1 alguno de los cuales se repiten. Es decir $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_{i-1})^{k_i}\dots(x-r_n)^{k_n}$. En este caso aplicamos los procedimientos del caso ① y ②

Ejemplo: $\int \frac{x^3-x+1}{x(x-3)(x-1)^3}\,dx$ tenemos que encontrar $\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-3)} + \frac{A_3}{(x-1)} + \frac{A_4}{(x-1)^2} + \frac{A_5}{(x-1)^3} = A_1(x-3)(x-1)^3 + A_2x(x-1)^3 + A_3x(x-3)(x-1)^2 + A_4x(x-3)(x-1) + A_5x(x-3)$

CASO 4: q es producto de factores $(x-r_i)^{k_i}$ y/o de polinomios de grado 2 sin raices reales y no se repiten. O sea $q(x) = (x-r_1)^{k_1}\dots(x-r_n)^{k_n}\cdot(x^2+d_1x+\beta_1)\dots(x^2+d_mx+\beta_m)$

En este caso $\frac{p}{q}$ se escribe como una suma donde por cada "factor lineal" aparecen tantos terminos como indican los casos ① y ② y para cada "factor cuadratico" aparecen terminos de la forma $\frac{B_k+C}{x^2+d_kx+\beta}$ con B y C constantes a encontrar.

Ejemplo: $\int \frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)}\,dx$, entonces debemos hallar constantes A_1, A_2, A_3, B y C tal que $\frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{(x-2)} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$. Para integrar los terminos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+dx+\beta}$ debemos hallar constantes k_1 y k_2 tal que $\frac{Bx+C}{x^2+dx+\beta} = \underbrace{k_1\frac{2x+d}{x^2+dx+\beta}}_{u = x^2+dx+\beta} + \underbrace{k_2\frac{1}{x^2+dx+\beta}}_{✪}$ ✪ Se debe completar cuadrados y se usa sustitucion para llegar a algo de la forma $\frac{1}{y^2+a^2}$ y luego $\int \frac{1}{y^2+a^2}\,dy = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(y/a)$

Ejemplo: $\int \frac{x-1}{x^2-4x-5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)+1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+5} + \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-4)}{x^2-4x+5}\,dx + \int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-4}{x^2-4x+5} + \int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+5| + \int \frac{1}{(x-2)^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-4x+5| + \int \frac{1}{u^2+1} =$

$u = x-2$

$du = 1\,dx$

$2x-4$ = derivada de denominador

$\frac{1}{2}(2x-4)+1 = x-1$

$\frac{1}{2}\ln|x^2-4x+5| + \operatorname{artg}(x-2)$

Integrales Impropias

Integrales Impropias: Extendemos la definicion de integral para el caso en el que $a, b \notin \mathbb{R}$ o en el que f no este acotada en $[a,b]$

Integral Impropia Tipo I: Funciones continuas y al menos uno de los limites de integracion no es finito

Sea $a \in \mathbb{R}$: • Si f es continua en $[a,\infty)$, definimos $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ si existe y es finito decimos que converge, sino que diverge. (lo mismo para $-\infty$)

• Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ siempre que estas ultimas dos converjan, si una diverge $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Integral Impropia Tipo II: limites de integracion finitos $a, b \in \mathbb{R}$ pero f tiene una asintota vertical en $x = c \in [a,b]$

• Sea f continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$ Definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$

• Sea f continua en $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ Definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$

• Sea $c \in (a,b)$. Si f es continua en $[a,c)$ y $(c,b]$ y las integrales $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ existen y son finitos, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Criterio de Comparacion para Integrales Impropias

Criterio de Comparacion para Integrales Impropias: Criterio para saber si una integral impropia converge o diverge (sin hacer el calculo)

Teorema de Comparacion para Integrales Impropias Tipo I: Sean f y g funciones continuas en $a \in \mathbb{R}$.

• Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,\infty)$. Entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ converge o equivalentemente con la divergencia y con $-\infty$

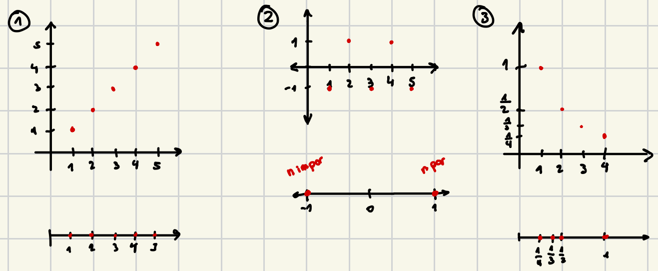
Teorema de Comparacion para Integrales Impropias Tipo II: Sean f, g funciones continuas en $[a,b)$ y talque $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm$

$\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge, o equivalentemente con la divergencia

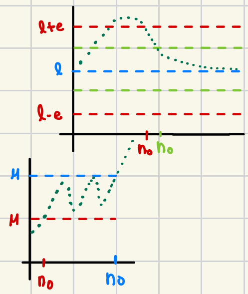
Sucesiones: sucesión infinita de números reales es una función cuyo dominio son los $\mathbb{N}$ y cuya imagen está incluida en $\mathbb{R}$. $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que $1\to a(1)=a_1$, $n\to a(n)=a_n$

notación: $\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$. Ej: $\{1,2,3,4,\dots\}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=n$.

$\{-1,1,-1,1,\dots\}$, $\{(-1)^n\}$, $a_n=(-1)^n$. $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{n},\dots\}$, $\{\frac{1}{n}\}$, $a_n=\frac{1}{n}$



Una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $\ell\in\mathbb{R}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$ ó $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ si los términos a_n se acercan a ℓ tanto como queramos al hacer n infinitamente grande. Esto es $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell \iff \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n-\ell|<\varepsilon\ \ \forall n\geq n_0$



Dada una sucesión $\{a_n\}$ decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ si los términos se hacen arbitrariamente grandes al hacer n grande. Esto es $\forall M>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_n>M\ \ \forall n\geq n_0$. Análogamente $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ si $\forall K<0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_n<K\ \ \forall n\geq n_0$

Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$ y $\ell\in\mathbb{R}$ ($\ell\neq\pm\infty$) decimos que $\{a_n\}$ converge a ℓ. En los demás casos decimos que Diverge

Teorema: Sea $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones convergentes y $c\in\mathbb{R}$. Entonces

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(c\,a_n)=c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_n$
- Si $\lim\limits_{n\to\infty} b_n\neq 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

Teorema (Relación entre límite de funciones y sucesiones)

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$ y $a_n=f(n)$ $\forall n\geq n_0$, para algún $n_0\in\mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$

Teorema del Sandwich para Sucesiones: Si $a_n\leq b_n\leq c_n$ $\forall n\geq n_0$, para algún $n_0\in\mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\ell$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\ell$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una sucesión. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0 \iff \lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ y f una función continua en $x=a$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=f(a)\ \left(=f\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\right)$

Definiciones: decimos que la sucesión $\{a_n\}$ es:

- Creciente si $a_n\leq a_{n+1}$ $\forall n$
- Estrictamente creciente si $a_n<a_{n+1}$ $\forall n$
- Decreciente si $a_n\geq a_{n+1}$ $\forall n$
- Estrictamente decreciente si $a_n>a_{n+1}$ $\forall n$

Si $\{a_n\}$ es creciente o decreciente decimos que es monótona

- Acotada inferiormente si $\exists M_i\in\mathbb{R}$ tal que $M_i\leq a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$
- Acotada superiormente si $\exists M_s\in\mathbb{R}$ tal que $M_s\geq a_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$
- Acotada si existe $M\in\mathbb{R}$ tal que $|a_n|\leq M$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (Las cotas no son únicas)

Axioma de completitud de los números reales

Todo conjunto no vacío de números reales que es acotado superiormente tiene una menor cota superior en $\mathbb{R}$ y todo conjunto no vacío de números reales que es acotado inferiormente tiene una mayor cota inferior en $\mathbb{R}$.

Definición: Sea $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$

Si A es acotado superiormente se llama supremo de A y lo denotamos $Sup(A)$

Si A es acotado inferiormente se llama ínfimo de A y lo denotamos $Inf(A)$.

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ es acotada. (La recíproca no vale)

Teorema: (i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell_1=Sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell_2=Inf(\{a_n\})$

Subsucesiones: Dada una sucesión $\{a_n\}$ podemos extraer de esta otras sucesiones descontando algunos términos (quizás una cantidad infinita). Cada una de estas nuevas sucesiones se llama subsucesión de $\{a_n\}$.

Def: Una subsucesión de una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de la forma $\{a_{n_1},a_{n_2},a_{n_3},\dots\}=\{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ donde los $n_j\in\mathbb{N}$ y cumplen $n_1<n_2<n_3<\dots$

$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,\dots\}$

a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3}

$n_1=1$ $n_2=3$ $n_3=5$

$n_j=2(j-1)+1$ $j\in\mathbb{N}$

$\{a_{n_j}\}=\{b_j\}$

Teorema: toda subsucesión de una sucesión convergente es convergente y además los límites son iguales.

Teorema Bolzano-Weierstrass: Toda sucesión acotada tiene al menos una subsucesión convergente

Series: dada $\{a_n\}$ sucesion de números reales, llamamos serie de términos a_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos la k-esima suma parcial S_k de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como $S_k = a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Luego $\{S_k\}$ es una sucesion de números reales. Si el limite de la sucesión $\{S_k\}$ existe y es finito $\left(\lim_{k\to\infty} S_k = S < \infty\right)$ decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y definimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$

Si el limite de S_k no existe o es $\pm\infty$ decimos que la serie es divergente

Dado $r \in \mathbb{R}$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ se llama serie geométrica

Teorema: (i) Si $|r|<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es convergente y ademas $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ (ii) Si $|r| \geq 1$ la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ es divergente

Obs: $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$

Propiedades de Series Convergentes

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes y $c \in \mathbb{R}$, entonces:
$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ son series convergentes y ademas $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Teorema (Criterio de Divergencia): Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
Equivalentemente, si $\lim a_n \neq 0$ ó $\lim a_n = \nexists$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. (No vale lo reciproco)

Teorema (Criterio de Comparacion para Series): Si $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge. Equivalentemente con la divergencia

Teorema (Criterio de comparacion en el limite): Sean $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ series de terminos positivos. Entonces

(i) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge (o equivalentemente $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge)

(iii) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$, entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ diverge (o equivalentemente $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ converge)

Teorema (Criterio de la Integral para Series): Sea f una funcion continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$ entonces $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{C_1}$ converge $\Longleftrightarrow \underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{C_2}$ converge.

En general, no es cierto $C_1 = C_2$

Decimos que una serie es alternante si sus terminos son positivos y negativos alternadamente

Teorema (Criterio para series alternantes) Si $a_n \geq a_{n+1}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge y por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ tambien converge.

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge y converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

Dem: Se cumple que $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Luego $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Como por hipotesis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, entonces por Teo de comparacion de series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ es convergente. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Teorema (Criterio del Cociente): Sean $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y $r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

(i) Si $r<1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (por lo tanto es convergente)

(ii) Si $r>1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente

(iii) Si $r=1$ no se puede asegurar nada

Teorema (Criterio de la Raiz): Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(i) Si $r<1$, entonces la serie es absolutamente convergente (y por lo tanto convergente)

(ii) Si $r>1$, la serie diverge

(iii) Si $r=1$ no se puede asegurar nada

Algunos Series

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (Serie p) siempre el mismo exponente — converge si $p>1$, diverge si $p \leq 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armonica, serie p con $p=1$) diverge

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ (serie armonica alternada) converge a $\ln(2)$

$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ (serie geometrica) converge si $|r|<1 \longrightarrow \frac{1}{1-r}$; diverge si $|r| \geq 1$

n^{-2}