23/08/2024

Parciales: 1^{er} p. Viernes 27/9
2^{do} p. Viernes 15/11
Recup: Viernes 22/11

Regularidad
Aprobar c/ parcial o respectivo recuperatorio una nota ≥ 4

Promocion
Aprobar c/parcial o respectivo recuperatorio con nota ≥ 6 y promedio de ambas notas ≥ 7

Unidad 1: Integrales

Dada f, encontrar F tq $F'(x) = f(x)$

- Sabemos dada F encontrar F'
- Queremos, dada $f = F'$ encontrar F

Def: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una funcion. Decimos que $F: I \to \mathbb{R}$ es una antiderivada o primitiva de f en I si $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Obs: Las primitivas NO son unicas. En efecto si $f(x) = x$ entonces $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ y $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 8$ son primitivas de f, ya que $F_1'(x) = x$ y $F_2'(x) = x$

Teorema: Si F es primitiva de f en I, entonces todas las primitivas de f en I es la forma $F(x)+c$ para alguna constante c.

Recordamos

$f \rightsquigarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Propiedades

① Si $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
② $(af)'(x) = af'(x)$ $\forall a \in \mathbb{R}$
③ $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
④ $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
⑤ $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Def: Dado I en $\mathbb{R}$ y $f: I \to \mathbb{R}$, se llama ~~integral~~ integral indefinida de f el conjunto de todas las antiderivadas y se denota $\int f(x)\, dx = F_1 + C$, $c \in \mathbb{R}$

Obs: ① El simbolo $\int$ se llama integral y dx se llama diferencial (de x)

Ademas, denotamos por diferencial de una funcion F a $d(F(x)) = F'(x)\, dx$

② En la definicion de integral indefinida podriamos usar otra letra Ej: $\int f(y)\, dy$

Ejemplos

① $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$ ya que $\left(\frac{x^2}{2} + c\right)' = x$

$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$ si $n \neq -1$, ya que $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = \frac{n+1}{n+1} x^{n+1-1} + 0 = x^n$

② $\int xz\, dx = z\frac{x^2}{2} + c$
$\int xz\, dz = x\frac{z^2}{2} + c$
$c \in \mathbb{R}$

Algunas propiedades de la integral indefinida

① $\int 0\, dx = c$, $c \in \mathbb{R}$
② $\int a f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$ $\forall a \in \mathbb{R}$
③ $\int (f \pm g)(x)\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Teorema (Metodo de sustitucion): Sea $f: (d,e) \to \mathbb{R}$ y $g: (a,b) \to (d,e)$ y derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d,e).
$H(x) = (F \circ g)(x)$ es primitiva de $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ en (a,b). O sea,
$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$, $c \in \mathbb{R}$ $\left(\int h(x)\, dx = H(x) + c\right)$

Dem: Basta verificar que $H'(x) = h(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Por la regla de la cadena
$H'(x) = (F \circ g)'(x) \overset{R.C}{=} F'(g(x)) \cdot g'(x) \overset{F \text{ es primitiva de } f}{=} f(g(x)) \cdot g'(x) = h(x)$

Obs: El teorema nos brinda un metodo para calcular la integral indefinida de funciones de la forma de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. En efecto si hacemos la sustitucion $u = g(x)$ y $du = d(g(x)) = g'(x)\, dx$. Luego $\int f(\underbrace{g(x)}_{u}) \cdot \underbrace{g'(x)\, dx}_{du} = \int f(u)\, du$
$= F(u) + c = F(g(x)) + C$

Ejemplos:

① $\int \operatorname{sen}(x^2)\, 2x\, dx$ Sea $u = x^2$ $du = 2\, dx$
$\int \operatorname{sen}(u)\, du = -\cos(u) + c = -\cos(x^2) + c$

Teorema (Metodo de Integracion por Partes): Si f' y g' son continuas, entonces
$\int f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$ (★)

Dem: Por la regla de derivacion de un producto de funciones tenemos $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ o equivalentemente $f(x) \cdot g'(x) = (f \cdot g)'(x) - f'(x) g(x)$. Luego integrando ambos lados tenemos
$\int f(x) \cdot g'(x) = \int (f \cdot g)'(x)\, dx - \int f'(x) g(x)\, dx$
$= (f \cdot g)(x) - \int f'(x) g(x)\, dx$

Obs: la ecuacion (★) se llama formula de integracion por partes. Para recordarla
Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces $du = f'(x)\, dx$ y $dv = g'(x)\, dx$
Luego ★ queda $\int u\, dv = uv - \int v\, du$

Ejemplos

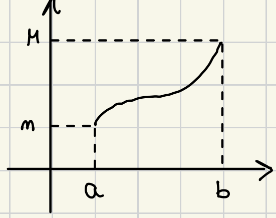
① $\int x e^x\, dx$ Si $u = x$, $du = 1\, dx$; $dv = e^x\, dx$, $v = e^x$, con lo cual $\int x e^x = x e^x - \int e^x\, dx = x e^x - e^x + c$
$c \in \mathbb{R}$

② $\int x \operatorname{sen}(x)$ Si $u = x$, $du = 1\, dx$; $dv = \operatorname{sen}(x)$, $v = -\cos(x)$
$\int x \operatorname{sen}(x) = x \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x))\, dx =$
$-x\cos(x) + \int \cos(x)\, dx = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + c$
$c \in \mathbb{R}$

Integral definida

Area bajo una curva $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcion continua y tq $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$

¿Cual es el valor del area A que se encuentra sobre el intervalo $[a,b]$ y debajo de la grafica de f?



1^{er} Aprox. Sea m min de f en $[a,b]$
M max de f en $[a,b]$

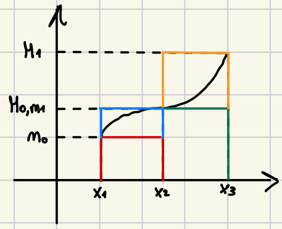
Entonces $m(b-a)\leq A\leq M(b-a)$

2^{da} Aprox: Partimos $[a,b]$ como $[a,x_1]\cup[x_1,b]$, con $x_1\in(a,b)$

$[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]$

Sea $m_k=\min f$ en $[x_k,x_{k+1}]$
$M_k=\max f$ en $[x_k,x_{k+1}]$ $\quad k\in\{0,1\}$

$\underline{m_0(x_1-x_0)}+\underline{m_1(x_2-x_1)}\leq A\leq \underline{M_0(x_1-x_0)}+\underline{M_1(x_2-x_1)}$



De manera general, tomamos $a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x_n=b$ particion de $[a,b]$

Si $m_k=\min f$ en $[x_k,x_{k+1}]$
$M_k=\max f$ en $[x_k,x_{k+1}]$ $\quad k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

$\Delta_k=x_{k+1}-x_k$ y Δ el mayor de todos los Δ_k entonces vale lo siguiente

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta_k}_{\text{suma inferior}}\leq A\leq\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta_k}_{\text{suma superior}}$$

Def: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y tq $f(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$ se define el area encerrada por la curva $y=f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$ por

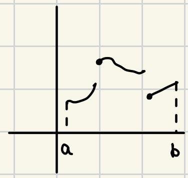
$$\lim_{\Delta\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta_k\right)$$

Llamaremos a este numero integral definida de f en $[a,b]$ y se denota $\int_a^b f(x)\,dx$

Obs: Se puede probar que tomar el limite de las sumas superiores coincide con tomar el limite de las sumas inferiores

② La def de integral definida se puede extender a funciones que tomen valores negativos

③ Tambien se puede extender la definicion a funciones continuas en $[a,b]$ salvo en un numero finito de puntos y siempre que f este acotada en $[a,b]$



Algunas propiedades de la integral definida

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones acotados y continuas salvo a la suma en una cantidad finita de puntos. Entonces Valen

① Si $f\geq 0$ la $[a,b]\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$

② $\int_a^b c f(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx$

③ $\int_a^b (f\pm g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

④ Si $d\in[a,b]\Rightarrow\int_a^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$

⑤ Si $f\leq g$ en $[a,b]\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$

28/08/24

Observacion: Si f es acotada y con un n° finito de discontinuidades en $[a,b]$, tambien podemos aplicar (ii) del TFC en cada sub intervalo donde f es continua gracias al siguiente teorema

Teorema: Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ con f continua y g tal que $g(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$ salvo un $c\in[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$

Ejemplo: Apliquemos la regla de Barrow a $f(x)=\begin{cases}x+2 & 0\leq x<1\\ x^2-1 & 1\leq x\leq 2\end{cases}$

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$

Teorema Metodo de sustitucion (I. definidas)

Sea $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ y $g:[a,b]\to[c,d]$ tal que f y g' sean continuas en sus respectivos dominios. Entonces si $u=g(x)$ vale que

$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)}f(u)\,du$. En particular si F es primitiva de f tenemos que $\int_a^b f(g(x))g'(x)=F(g(x))$

Ejemplo

$\int_0^2 2x\cdot\operatorname{sen}(x^2)\,dx$ $\quad u=x^2$, $du=2x\,dx$

$$\int_0^2 2x\cdot\operatorname{sen}(x^2)\,dx=\int_0^4\operatorname{sen}(u)\,du=-\cos(u)\Big|_0^4=-\cos(x^2)\Big|_0^2=-\cos(2)+\cos(0)=\cos(2)+1$$

Teorema de integracion por partes (I. definida)

Sea f y g derivables en (a,b) tal que f' y g' tienen a lo sumo un n° finito de discontinuidades y acotados entonces $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)$

Ejemplo:

$$\int_1^e\ln(x)\,dx=\int_1^e\ln(x)\,1\,dx=\ln(x)\cdot x\Big|_1^e-\int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx=e-0-x\Big|_1^e=e-(e-1)=1$$

ARCO ENTRE GRAFICOS DE FUNCIONES

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es no negativa, acotada y con un n° finito de discontinuidades hemos definido el area bajo el grafico de f y arriba de $[a,b]$ como

$A=\int_a^b f(x)\,dx$

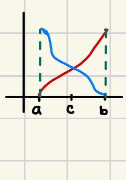
- Si $f(x)\geq g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$ es razonable definir el area entre los graficos de f y g como:

$A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$ ya que $f(x)-g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$

$A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx=\int_a^b f(x)-\int_a^b g(x)\,dx$

TEOREMA: Sea f y g funciones acotadas con un n° finito de discontinuidades tal que $f(x)\geq g(x)$. Entonces, el area entre las graficas de f y g es $A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$ (Notar que $f(x)-g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$)

Obs: En el caso que los graficos se crucen, calcular el area por partes



$$A=\int_a^c f(x)-g(x)\,dx+\int_c^b f(x)-g(x)\,dx$$

30/08/24

Integracion de funciones racionales usando fracciones simples

• Queremos integrar funciones que son cocientes de polinomios osea $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ Ej: $\int \frac{1}{x-2}dx = \ln|x-2|+c_{//}$

$\int \frac{1}{(x+3)^3}dx = \frac{(x+3)^{-2}}{-2}+c_{//}$

Vamos a suponer que la funcion racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ satisface lo siguiente

① El grado del polinomio p es menor al grado del polinomio q ya que si $gr(x)>gr(q)$ tenemos $\frac{p(x)}{q(x)} = Q + \frac{r(x)}{q(x)}$

② El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de q es 1 ya que si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{a_n x^n + a_{n+1}x^{n-1}+\dots+a_0} = \frac{p(x)}{a_n\underbrace{\left(x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x^{n-1}+\dots+\frac{a_0}{a_n}\right)}_{\tilde{q}(x)}} = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$

Ejemplo:

$$\int\frac{x+1}{3x^2+1}dx = \int\frac{x+1}{3(x^2+\frac{1}{3})}dx = \int\frac{\frac{1}{3}(x+1)}{x^2+\frac{1}{3}}dx = \int\frac{\frac{1}{3}(x+1)}{x^2+\frac{1}{3}}dx = \int\frac{\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}{x^2+\frac{1}{3}}dx$$

Teorema:

Todo polinomio monico se puede escribir como producto de polinomios de grado 1 y/o polinomio de grado 2 sin raices reales (en el ② q es un polinomio monico)

Es decir, si $q(x) = x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\dots+a_1\cdot x + a_0$ entonces $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_n)\cdot\underbrace{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_\ell x+\beta_\ell)}_{\text{Sin raices reales}}$

Ejemplos

$x^3+2x^2+(-3x) = x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x-3)$

$x^2-2x+1 = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$

$3x^3+3x = 3x\underbrace{(x^2+1)}_{x^2+\alpha_1 x+\beta_1}$

$\alpha_1 = 0$

$\beta_1 = 1$

CASO 1: q es un producto de polinomios de grado 1 y todos distintos es decir $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_n)$ con $r_i \neq r_j$ si $i\neq j$.

En este caso buscamos constantes $A_1,\dots,A_k$ (una constante para cada p(x) de grado 1) tales que: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1}+\frac{A_2}{x-r_2}+\dots+\frac{A_n}{x-r_n}$ luego, todo termino $\frac{A_i}{x-r_i}$ es facil de integrar

Ejemplo: $\int\frac{7x-1}{x^2-x-6}dx$ tenemos $p(x)=7x-1$, $q(x)=x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ debemos hallar A_1 y A_2 tales que $\frac{7x-1}{x^2-x-6} = \frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x+2} = \frac{A_1(x+2)+A_2(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

igualamos los coeficientes de los numeradores obtenemos lo siguiente: $7 = A_1+A_2$ y $-1 = 2A_1-3A_2 \Rightarrow A_1 = 7-A_2 \Rightarrow -1 = 2(7-A_2)-3A_2 = 14-2A_2-3A_2 = -1 = 14-5A_2 \Rightarrow 5A_2 = 15 \Rightarrow A_2 = 3$

$\Rightarrow 7 = A_1+3 \Rightarrow A_1 = 4 \therefore \frac{4(x+2)+3(x-3)}{(x-3)(x+2)}$ Luego, $\int\frac{7x-1}{x^2-x-6}dx = \int\frac{4}{x-3}+\frac{3}{x+2}dx = \int\frac{4}{x-3}dx+\int\frac{3}{x+2}dx = 4\int\frac{1}{x-3}dx+3\int\frac{1}{x+2}dx = 4\ln|x-3|+3\ln|x+2|+c_{//}$

CASO 2: q es el producto de polinomios de grado 1, todos iguales, es decir $q(x) = (x-r_1)^k$. En este caso buscamos constantes $A_1,\dots,A_k$ tales que $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x_1-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-r)^k}$

(tantas A como constantes). Luego, cada termino de la forma $\frac{A_i}{(x-r)^i}$ es facil de integrar

Ejemplo: $\int\frac{1-2x}{(x+2)^3}dx$ tenemos $p(x) = 1-2x$ y $q(x) = (x+2)^3$. Debemos encontrar $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla lo siguiente: $\frac{1-2x}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x+2)^2+A_2(x+2)+A_3}{(x+2)^3}$

$\Rightarrow \frac{A_1(x^2+4x+4)+A_2(x+2)+A_3}{(x+2)^3} =$ Igualando los coeficientes de los numeradores obtenemos que $A_1 = 0$ $-2 = 4A_1+A_2 \Rightarrow -2 = 4\cdot0+A_2 \Rightarrow A_2 = -2$

$1 = 4A_1+2A_2+A_3 \Rightarrow 1 = 4\cdot0+2\cdot(-2)+A_3 \Rightarrow A_3 = 5$. Luego tenemos $\int\frac{1-2x}{(x+2)^3}dx = \int\frac{-2}{(x+2)^2}+\frac{5}{(x+2)^3}dx = \int\frac{-2}{(x+2)^2}dx+\int\frac{5}{(x+2)^3}dx = -2\int\frac{1}{(x+2)^2}dx+5\int\frac{1}{(x+2)^3}dx$

$= -2\cdot\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+5\cdot\frac{(x+2)^{-2}}{-2} = \frac{2}{x+2}-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+C$

CASO 3: q es el producto de polinomios de grado 1, alguno de los cuales se repiten. Es decir $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_{i-1})(x-r_i)^{k_i}\dots(x-r_n)^{k_n}$. En este caso aplicamos los procedimientos del caso 1 y 2 (mezcla de ambos)

Ejemplo: si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3}$, entonces buscamos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathbb{R}$ tales que: $\frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{(x-1)^2}+\frac{A_5}{(x-1)^3}$

CASO 4: q es el producto de polinomios de grado 1 (se pueden repetir) y/o de polinomios de grado 2 sin raices reales. Es decir, $q(x) = (x-r_1)^{k_1}(x-r_2)^{k_2}\dots(x-r_n)^{k_n}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_m x+\beta_m)$

En este caso, $\frac{p(x)}{q(x)}$ se escribe como suma donde por cada factor lineal aparecen tantos terminos como indican los casos 1 y 2 y para cada factor cuadratico aparecen terminos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$ con B y C constantes a encontrar

Ejemplo $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)}$ debemos hallar constantes A_1, A_2, A_3, B y C tales que se cumpla lo siguiente:

$\frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$ ¿Como hacemos?

Observacion: para integrar terminos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$ debemos hallar constantes k_1 y k_2 tal que se cumpla

$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = k_1\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}+k_2\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}$ (forma de resolver la imaginario)

donde $B = 2k_1$ y $C = \alpha k_1+k_2$

04/09/24

Integrales Impropias

Definimos $\int_a^b f(x)\,dx$ por el caso $a,b \in \mathbb{R}$ y f es una funcion continua salvo en un numero finito de puntos y acotado

Extendemos la definicion para el caso en el que $a,b \notin \mathbb{R}$ o en que f no es acotada en $[a,b]$

Integral Impropia Tipo I: funciones continuas y al menos uno de los limites de integracion no es finito

diverge cuando se va a $\pm\infty$

converge cuando va a un valor finito

Def. sea $a \in \mathbb{R}$

- Si f es continua en $[a,\infty)$, definimos $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ si existe y es finito

En tal caso decimos $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge, sino decimos que diverge

- Si f es continua en $(-\infty,a]$ definimos $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{a} f(x)\,dx$ y decimos que converge o diverge según corresponde
- Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$ siempre que estas ultimas dos converjan

y en tal caso decimos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Si alguna no converge, decimos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ diverge

Ejemplo

① $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\underbrace{-e^{-t}}_{-\frac{1}{e^t}\to 0} + \underbrace{e^0}_{1}\right) = 1$ converge

② $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\underbrace{\ln|-1|}_{0} - \underbrace{\ln|t|}_{\infty}\right)$ diverge

③ $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ Elegimos $a=0$

$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 \frac{1}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(\underbrace{\operatorname{arctg}(0)}_{0} - \underbrace{\operatorname{arctg}(t)}_{-\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(0)\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ converge

Integral Impropia Tipo II: limites de integracion finitos $a,b \in \mathbb{R}$ pero f tiene una asintota vertical en un punto $c \in [a,b]$

Def.

Sea f continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

Definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$, si existe y es finito

- Sea f continua $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$, si el limite existe y es finito

- Sea $c \in (a,b)$. Si f es continua en $[a,c)\cup(c,b]$ y las integrales $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ existen y son finitos

definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Ejemplo:

① $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ Tenemos que $f(x)$ es continua en $(0,1]$ y $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Por definición

$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\ln(x)\Big|_t^1\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\ln(1) - \ln(t)\right) = +\infty$

La integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge

② $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, con $0<p<1$

Por definicion

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_t^1\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{t^{\overset{>0}{1-p}}}{1-p}\right) = \frac{1}{1-p} \therefore \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge si $0<p<1$

Criterio de comparacion para integrales impropias

Veremos un criterio para determinar si una integral impropia es convergente o divergente sin hacer el calculo sino que lo haremos con una funcion mas facil de integrar

Teorema (Criterio de Comparacion para integrales impropias tipo I)

Sean f y g funciones continuas y $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, \infty)$. Entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ converge o equivalentemente $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge

De manera analoga

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in (-\infty, a]$. Entonces $\int_{-\infty}^a g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ converge o equivalentemente $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_{-\infty}^a g(x)\,dx$ diverge

Teorema (Crit de comparacion para integrales impropias tipo II)

Sean f, g funciones continuas en $[a, b)$ y tal que $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$

Entonces, si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge o equivalentemente $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge

Ejemplo:

$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ Notemos que no podemos calcular por definicion esta integral ya que la primitiva de e^{-x^2} no es una funcion elemental. Por lo tanto vamos a utilizar el teorema anterior.

(Tipo I)

Primero notemos que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx}_{I_2}$

Tenemos que I_1 converge ya que e^{-x^2} es continua en $[0,1]$ por lo tanto $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx =$ Integral definida

Para determinar si I_2 converge o diverge usamos el Teorema anterior (Tipo I)

Nos interesa $1 \leq x \rightarrow x \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq -x$ y por lo tanto $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ si $x \in [1, \infty)$

Sea $f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = e^{-x}$, tenemos $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [1, \infty)$

Como $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t e^{-x} = \lim_{t \to \infty} -e^{-x}\Big|_1^t = \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1} < \infty$ o sea como $\int_1^\infty g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge por lo tanto I_2 converge

06/09/24

Sucesiones

Def: Una Sucesion infinita de números reales es una función cuyo dominio son los naturales $\mathbb{N}$ y su imagen esta incluida en $\mathbb{R}$. O sea $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $1 \to a(1) = a_1$
$2 \to a(2) = a_2$ y a lo general $n \to a(n) = a_n$

Notación $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}$ $n \in \mathbb{N}$

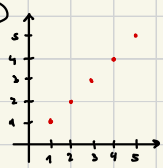
Ejemplos:

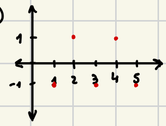
① $\{1, 2, 3, \dots\}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = n$

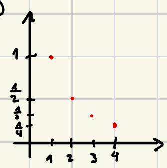
② $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = (-1)^n$

③ $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n = \frac{1}{n}$

Obs: Una sucesion $\{a_n\}$ se puede representar como el gráfico de una función o como conjunto de números reales

① 

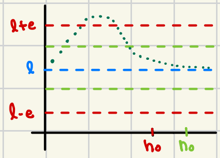
② 

③ 

Def: Una sucesión $\{a_n\}$ tiene limite $\ell \in \mathbb{R}$, y se denota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ ó $a_n \longrightarrow \ell$, si los términos a_n se acercan a ℓ tanto como queremos al hacer n suficientemente grande. Esto es $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\underbrace{|a_n - \ell| < \varepsilon}$ $\forall n > n_0$

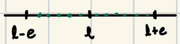
$-\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$



(depende el valor de ε)

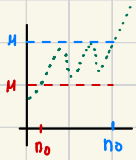
$a_n \in (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon) \ \forall n \geq n_0$



Ejemplo: Probar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Sea ε, queremos hallar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$. Como $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$, entonces
basta tomar $n_0 =$ primer natural mayor a $\frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

Def: Dada una sucesion $\{a_n\}$ decimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ó $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ si los términos a_n se hacen arbitrariamente grande al hacer n grande. Esto es $\forall M > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > M \ \forall n > n_0$



Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ si $\forall k < 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < k \ \forall n \geq n_0$

Def: Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ y $\ell \in \mathbb{R}$ (o sea $\ell \neq \pm\infty$) decimos que $\{a_n\}$ converge a ℓ
En los demás casos decimos que diverge

Ejemplo: Decidir si la sucesion converge o diverge

① $a_n = \frac{1}{n}$. Recien vimos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ por lo tanto $\{\frac{1}{n}\}$ converge a 0

② $a_n = n$ Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ (probar usando definicion) entonces $\{n\}$ diverge

③ $a = (-1)^n$ Como el $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ No existe $\Rightarrow \{(-1)^n\}$ diverge

Teorema: Sean $\{a_n\}$ y $\{B_n\}$ dos sucesiones convergentes y sea $c \in \mathbb{R}$, entonces

ⓘ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} B_n$

ⓘⓘ $\lim\limits_{n\to\infty} (c\, a_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

ⓘⓘⓘ $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} B_n$

ⓘⓥ Si $\lim\limits_{n\to\infty} B_n \neq 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{B_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} B_n}$

Ejemplo:

① $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$

② $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n2}{n(1+\frac{1}{n})}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} 2}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n}} = \frac{2}{1} = 2$

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^3+7} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^3(1+\frac{7}{n^3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2(1+\frac{7}{n^3})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{7}{n^3})} =$
$0 \cdot 1 = 0$

Teorema (Relacion entre limite de fracciones y sucesiones)

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$ y $a_n = f(n)$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$

Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ para $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$. Sea $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ para $x > 0$ $(x \in (0, \infty))$

Tenemos $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

Ademas $f(n) = a_n$ $\forall n \geq 1$ $\Rightarrow$ Por teorema $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$

Obs: No es cierto que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$ y $a_n = f(n) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \ell$

$a_n = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ y $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ pero $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ No existe

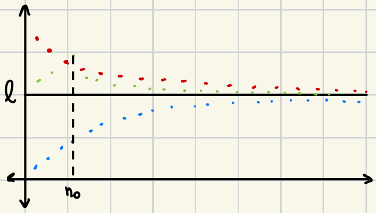
Teorema (del Sandwich para sucesiones)

Si $\underline{a_n} \leq \underline{B_n} \leq \underline{C_n}$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} C_n = \ell$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \ell$

Ejemplo : Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3}$

$-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\iff$ $-\frac{1}{n^3} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n^3} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$ por Teorema del Sándwich tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3} = 0$



Teorema: Sea $\{a_n\}$ una Sucesión. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Ejemplo : Probar que la sucesion $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ Converge a 0

Tenemos que $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ y con lo cual calculo $|a_n| = \frac{1}{n}$. Luego, como

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

¿Para que valores de r la sucesión $\{r^n\}$ converge?

- Analicemos el caso $r > 0$ $(r \in (0,\infty))$. Recordemos que $r^x = e^{\ln(r^x)} = e^{x\ln(r)}$

y ademas $\ln(r)$ $\begin{cases} > 0 & \text{si } 1 < r \\ < 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$

Sea $f(x) = r^x$. Tenemos $a_n = r^n = f(n)$ y como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < r \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$

por Teorema de Relacion entre limite de funciones y sucesiones tenemos que

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < r & \text{I} \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 & \text{II} \end{cases}$

Veamos que para para $r = 0$ y $r = 1$

- Si $r = 0$, $r^n = 0^n = 0$ $\forall n$ con lo cual $\lim r^n = 0$ III
- Si $r = 1$, $r^n = 1^n = 1$ $\forall n$ con lo cual $\lim r^n = 1$ IV
- Analicemos el caso $r < 0$

Si $r \in (-1,0) \implies 0 < |r| < 1$ y por II tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = 0$

por lo tanto por el teorema anterior tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ si $r \in (-1,0)$ V

- Si $r = -1$, tenemos que $r^n = (-1)^n$ que ya sabemos que no tiene limite para $n \to \infty$
- Si $r < -1$, r^n no tiene límite

Conclusion:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } r \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \infty \text{ (diverge)} & 1 < r \end{cases}$$

11/09/24

Teorema: Sea $\{a_n\}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ y f una funcion continua en $x=a$. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) \; \left(= f(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\right)$

Ejemplo: Calcular limite de $\{n \;\operatorname{sen}(\frac{1}{n})\}$ Notemos que $n\;\operatorname{sen}(\frac{1}{n}) = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$. Elegimimo $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, tenemos que f es continua en $x=0$

Si $a_n = \frac{1}{n}$, tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

Luego por el teorema $\lim\limits_{n\to\infty} n\;\operatorname{sen}(\frac{1}{n}) = \lim \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \overset{\text{Por teorema}}{=} f(0) = 1$

Definicion: Decimos que la sucesion $\{a_n\}$ es

- Creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Si $\{a_n\}$ es creciente o decreciente diremos que es monotona

Ejemplos: ① $\{n\}$ como $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$ $\forall n$ $\therefore \{n\}$ es estrictamente creciente

② $\{\ln(n)\}$ Con $f(x) = \ln(x)$ es una funcion estrictamente creciente por lo tanto $n < n+1 \Rightarrow f(n) < f(n+1)$ o sea $\ln(n) < \ln(n+1)$ y por lo tanto $\{\ln(n)\}$ es estrictamente creciente.

③ $\{1,1,2,2,3,3,4,4\}$ como $a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \{a_n\}$ es creciente

Definicion: decimos que la sucesion $\{a_n\}$ es:

(i) Acotada inferiormente, si $\exists\, M_i \in \mathbb{R}$ tq. $M_i \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Acotada superiormente, si $\exists\, M_s \in \mathbb{R}$ tq. $a_n \leq M_s$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) Acotada si $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tq. $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplos: ① $\{\frac{1}{n}\}$ Como $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ es acotada puedo tomar $M=1$

② $\{-n\}$ Como $-n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{-n\}$ esta acotada superiormente

Obs: En la definicion anterior decimos que M_i es una cota inferior de $\{a_n\}$ y M_s es una cota superior de $\{a_n\}$. Notemos que las cotas superiores e inferiores NO son unicas

Por ejemplo $(-1)^n \Rightarrow M_s = 10$, $M_s = 2$, $M_s = 1$ son todas cotas superiores

owo

Axioma de completitud de los numeros reales

Todo conjunto no vacio de numeros reales que es acotado superiormente tiene una menor cota superior en $\mathbb{R}$.

Todo conjunto no vacio de numeros reales que es acotado inferiormente tiene una mayor cota inferior en $\mathbb{R}$.

Def: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- Si A es acotado superiormente la menor cota superior de A se llama supremo de A y se denota $\sup(A)$.
- Si A es acotado inferiormente la mayor cota inferior de A se llama infimo de A y se denota $\inf(A)$

Ejemplo Pensemos las sucesiones como conjunto de numero reales

① $\{\frac{1}{n}\} = A$ $\quad \sup(A) = 1$ $\quad \inf(A) = 0$

Como $1 \in A \Rightarrow A$ tiene maximo

como $0 \notin A \Rightarrow A$ no tiene minimo

② $\{-n\} = B$ $\quad \sup(B) = -1$ y como $-1 \in B \Rightarrow$ tambien es el maximo

$\inf(B)$ no existe y por lo tanto tampoco existe un minimo

③ $\{(-1)^n\} = C$ $\quad \sup(C) = 1$ y tambien es el maximo

$\inf(C) = -1$ y tambien es el minimo

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow \{a_n\}$ es acotado

Obs: La reciproca es falsa, o sea $\{a_n\}$ acotada $\not\Rightarrow \{a_n\}$ convergente

Por ejemplo $a_n = (-1)^n$ Sin embargo si es cierto si la sucesion es creciente o decreciente

Teorema:

(i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf(\{a_n\})$

Subsucesions

Dada una sucesion $\{a_n\}$ podemos extraer de esta otras sucesiones descontando algunos terminos. Cada una de estas nuevas sucesiones se llama sub sucesion de $\{a_n\}$

Ejemplo: Consideremos $\{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, \dots\}$ Podemos extraer las siguientes subsucesiones: $\{-1, -1, -1, -1, \dots\}$ (extraigo a_n con n impar), $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ (extraigo a_n con n par)

Def. Una subsucesion de una sucesion $\{a_n\}$ es una sucesion de la forma $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} = \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ donde $n_j \in \mathbb{N}$ y cumplen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Por ejemplo = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\}$

$a_1 \downarrow a_{n_1}$, $a_3 \downarrow a_{n_2}$, $a_5 \downarrow a_{n_3}$

$n_1 = 1$ $\quad n_2 = 3$ $\quad n_3 = 5$ $\qquad n_j = 2(j-1)+1$

$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots\}$

$a_{2(j-1)+1} = j$ (terminos impares)

a

Teorema: toda subsucesion de una sucesion convergente es convergente y ademas los limites son iguales

Obs: El teorema es util para demostrar que una sucesion no tiene limite: basta encontrar dos subsucesiones distintas que converjan a distintos limites.

Ejemplo: Sea $a_n = (-1)^n$ Luego, $a_{n_j} = (-1)^{2j}$ y $a_{n_k} = (-1)^{2k+1}$ ambas son subsucesiones de $\{a_n\}$ que convergen a 1 y -1 respectivamente $\therefore \{a_n\}$ es divergente

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Toda sucesion acotada tiene al menos una subsucesion convergente Si $\{a_n\} = \{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, \dots\}$

Obs: puede haber mas de una subsucesion convergente

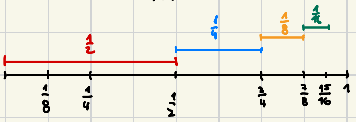
$b_j = a_{2j} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$

$c_j = a_{2(j-1)+1} = \{-1, -1, -1\}$

13/09/24

Dado una sucesion $\{a_n\}$ queremos sumar sus infinitos terminos, esto es $a_1+a_2+\dots$ lo cual escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Por ejemplo $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{n} a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$



Def: dada una sucesion $\{a_n\}$, llamamos serie de terminos a_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como $S_k = a_1+a_2+a_3+\dots+a_k$. Luego, $\{S_k\}$ es una sucesion de numeros $\mathbb{R}$

Si el limite de la sucesion $\{S_k\}$ existe y es finito es decir $\lim_{k\to\infty} S_k = S < \infty$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Si $\lim_{k\to\infty} S_k$ no existe o es $\pm\infty$, decimos que la serie es divergente

Ejemplo: Determine si la serie es convergente o divergente

① $\sum_{n=1}^{\infty} n$ Tenemos que $a_n = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $S_1 = 1$, $S_2 = 1+2$, $S_3 = 1+2+3$. $S_k = \frac{k(k+1)}{2} = 1+2+3+\dots+k$

Como $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)}{2} = \infty$ por definicion, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ es divergente

② $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ Tenemos que $a_n = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$S_0 = 1$, $S_1 = 1+(-1) = 0$, $S_2 = 1+(-1)+1 = 1$, $S_3 = 1+(-1)+1+(-1) = 0$

en general $S_k \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$ Luego, no existe $\lim_{k\to\infty} S_k$ pues $\{S_k\}$ admite dos subsucesiones distintas y con limites distintas. $\{S_{2j}\}$ tiene lim 1 y $\{S_{2j+1}\}$ tiene lim 0. Al no existir $\lim_{k\to\infty} S_k \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es divergente.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ parece que converge a 1

Def. Dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1+r+r^2+\dots$ se llama serie geometrica

Teorema:

① Si $|r|<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

② Si $|r|\geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge

Dem: Fijamos $r \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\left.\begin{aligned} S_k &= 1+r+r^2+r^3+\dots+r^k \\ r S_k &= r+r^2+r^3+r^4+\dots+r^{k+1} \end{aligned}\right\} S_k - rS_k = 1-r^{k+1} \quad \text{osea} \quad (1-r)S_k = 1-r^{k+1}$$

(i) Supongamos que $|r|<1$. Por un lado $r\neq 1$, tenemos que $S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$

Por otro lado com $|r|<1$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = r \lim_{k\to\infty} r^k = 0$ (ver dos casos atras)

Luego $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$

(ii) Supongamos que $|r|\geq 1$

- Si $r=-1$ ya vimos en el ejemplo ② que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverge
- Si $r=1$, entonces $S_k = 1^0+1^1+1^2+\dots+1^k = k+1$

  Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$ y entonces $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ diverge
- Si $|r|>1$ por un lado $S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$, por otra parte ya vimos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} \begin{cases} \infty & \text{si } r>1 \\ \nexists & \text{si } r<-1 \end{cases}$. Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{k+1}}{1-r}\right)$ es divergente y con lo cual $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge.

Obs: $|r|<1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$$

Propiedades de Series convergentes

Teorema: Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergente y $c \in \mathbb{R}$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ son convergentes y además $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\,a_n = c \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

Teorema: Criterio de la divergencia

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Equivalentemente si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ó $\lim_{n\to\infty} a_n = \nexists$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Dem: Tenemos que

$$\left.\begin{aligned} S_k &= a_1 + \dots + a_k \\ S_{k-1} &= a_1 + \dots + a_{k-1} \end{aligned}\right\} S_k - S_{k-1} = a_k$$

Ahora como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces existe $\lim_{k\to\infty} S_k = S$. Pero entonces tambien vale que $\lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S$ (pues $k\to\infty \Leftrightarrow k-1\to\infty$)

$\hookrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0$

Obs: no vale la reciproca (Crit. de la divergencia) es decir $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}$ converge

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armonica) Vale que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pero veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Vamos a probar que existe una subsucesion de la sucesion de sumas parciales $\{S_k\}$ que es divergente y por lo tanto esto implica que la sucesion $\{S_k\}$ es divergente, entonces por definicion la serie diverge

Consideramos la subsucesion $\{S_{2^j}\}$ tenemos que

$j=1 \longrightarrow S_{2^1} = \boxed{S_2 = 1 + \frac{1}{2}}$

$j=2 \longrightarrow S_{2^2} = S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + 2 + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1 + 2\,\frac{1}{2}}$

$j=3 \longrightarrow S_{2^3} = S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + 4\,\frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3\,\frac{1}{2}$

$j=4 \longrightarrow S_{2^4} = S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16} > S_8 + 8 \cdot \frac{1}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + 3\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4\,\frac{1}{2}$

De manera general $S_{2^j} > 1 + j\,\frac{1}{2}$. Luego $\lim_{j\to\infty} S_{2^j} \geq \lim_{j\to\infty} 1 + j\,\frac{1}{2} = \infty$

O sea $\{S_{2^j}\}$ es una subsucesion de sumas parciales que diverge. Luego $\{S_k\}$ diverge y por lo tanto por def la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

18/09/24

Teorema (Criterio de Comparacion) Si $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces si $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplo: Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n+n}$ $\quad 0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n+n} \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall n \geq 1$ pues $\operatorname{sen}^2(n) \leq 1^2$ y $2^n+n > 2^n \Rightarrow \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente (geometrica) por el criterio de la comparacion $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n+n}$ es convergente

Teorema (Criterio de la integral para series): Sea f una funcion continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$ entonces $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{C_1}$ es convergente $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{C_2}$ converge

Obs: ① No es cierto en general que $C_1 = C_2$

② Podemos iniciar la serie desde cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-4)^2}$ podemos considerar $\int_5^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ para $0<p<\infty$. Sea $f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$, f es continua positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Ademas $f(n) = \frac{1}{n^p} = a_n$ Por otro lado $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $\Leftrightarrow p>1$. Luego por el criterio de la integral $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente para $p>1$ y divergente para $0<p\leq 1$

serie p

Definicion: decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente (es absolutamente convergente). Converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge (es condicionalmente convergente)

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge absolutamente pues $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge pues serie p (con $p=2>1$)

Teorema: [Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente] Luego, en el ejemplo anterior $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ es convergente

Ejemplo: Decida si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge o diverge. Consideramos $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$ tenemos que $0 \leq \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ademas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie p)

La reciproca no vale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero (prox clase) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Teorema: ★ Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Dem ★ Se cumple que $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ luego $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\sum a_n$ converge absolutamente y por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge.

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ es convergente por el Teo (Crit. de comp)

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente (prop de las series)

Teorema (Criterio del cociente): Sean $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y Sea $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

(i) Si $r<1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto converge)

(ii) Si $r>1$, (ó ∞) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

(iii) Si $r=0$ entonces no se puede asegurar nada.

Ejemplo: Analice si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ con $c \neq 0$ converge o diverge. $a_n = \frac{c^n}{n!}$ Tenemos que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left|\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{c^n}{n!}\right|} = \frac{\frac{|c^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|c^n|}{n!}} = \frac{|c^{n+1}|\,n!}{|c^n|\,(n+1)!} = \frac{|c|}{n+1}$.

Luego $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{n+1} = 0 < 1$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ converge absolutamente y $\therefore$ converge por Teorema ★

Ejemplo: Analice la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n c^n$, para $c \neq 0$. $a_n = nc^n$. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|c|^{n+1}}{n|c|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} |c| = |c| = r$

- Si $|c|<1$ entonces la serie converge absolutamente ($\therefore$ converge)
- Si $|c|>1$ la serie diverge
- Si $|c|=1$ la serie diverge por criterio de la divergencia $\longrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = 1$

Ejemplo $a_n = \frac{1}{n}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

$a_n = \frac{1}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie p)

Teorema (Criterio de la raiz)

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(i) Si $r<1$, entonces la serie es absolutamente convergente (y $\therefore$ convergente)

(ii) Si Si $r>1$ entonces la serie es divergente

(iii) Si $r=1$, no se puede asegurar nada

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ $\quad a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$. $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n\right|} = \frac{2n+3}{3n+2}$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} = r < 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ converge absolutamente y luego por teorema ★ converge

Defincion: decimos que una serie es alternante si sus terminos son positivos y negativos alternadamente

1. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$
2. $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$; $a_n = \frac{1}{n}$. $0 < n < n+1$ luego $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ y $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ Luego por criterio de series alternantes la serie converge.

Teorema: (Criterio para series alternantes)

Si $a_n \geq a_{n+1} > 0$ y $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} a_n$ converge (tmb $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$