23/08/2024

Parciales: 1^{er} p. Viernes 27/9 | Regularidad | Promocion

2^{do} p. Viernes 15/11 | Aprobar c/ parcial o respectivo recuperatorio una nota ≥ 4 | Aprobar c/parcial o respectivo recuperatorio con nota ≥ 6 y promedio de ambas notas ≥ 7

Recup: Viernes 22/11

Unidad 1: Integrales

Dada f, encontrar F tq $F'(x) = f(x)$

- Sabemos dada F encontrar F'
- Queremos, dada $f = F'$ encontrar F

Recordamos

$f \rightsquigarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Propiedades

① Si $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$

② $(af)'(x) = af'(x)$ $\forall a \in \mathbb{R}$

③ $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

④ $(f \cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

⑤ $(f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Def: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una funcion. Decimos que $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una antiderivada o primitiva de f en I si $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

Obs: Las primitivas NO son unicas. En efecto si $f(x) = x$ entonces $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ y $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 8$ son primitivas de f, ya que $F_1'(x) = x$ y $F_2'(x) = x$

Teorema: Si F es primitiva de f en I, entonces todas las primitivas de f en I es la forma $F(x) + c$ para alguna constante C.

Def: Dado I en $\mathbb{R}$ y $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$, se llama ~~integral~~ integral indefinida de f el conjunto de todas las antiderivadas y se denota $\int f(x)\,dx = F_1 + C$, $c \in \mathbb{R}$

Obs: ① El simbolo $\int$ se llama integral y dx se llama diferencial (de x)

Ademas, denotamos por diferencial de una funcion F a $d(F(x)) = F'(x)\,dx$

② En la definicion de integral indefinida podriamos usar otra letra Ej: $\int f(y)\,dy$

Ejemplos

① $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$, $c \in \mathbb{R}$ ya que $\left(\frac{x^2}{2}+c\right)' = x$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, $c \in \mathbb{R}$ si $n \neq -1$, ya que $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+c\right)' = \frac{n+1}{n+1}x^{n+1-1} + 0 = x^n$

② $\int xz\,dx = z\frac{x^2}{2} + c$

$\int xz\,dz = x\frac{z^2}{2} + c$ $\quad c \in \mathbb{R}$

Algunas propiedades de la integral indefinida

① $\int 0\,dx = c$, $c \in \mathbb{R}$

② $\int a f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ $\quad \forall a \in \mathbb{R}$

③ $\int (f \pm g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Teorema (Metodo de sustitucion): Sea $f: (d,e) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g: (a,b) \longrightarrow (d,e)$ y derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d,e).

$H(x) = (F\circ g)(x)$ es primitiva de $h(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$ en (a,b). O sea,

$\int f(g(x))\, g'(x)\,dx = F(g(x)) + C$, $c \in \mathbb{R}$ $\quad$ ($\int h(x)\,dx = H(x) + c$)

Dem: Basta verificar que $H'(x) = h(x)$ $\forall x \in (a,b)$. Por la regla de la cadena

$H'(x) = (F\circ g)'(x) \overset{R.C}{=} F'(g(x))\cdot g'(x) \overset{F \text{ es primitiva de } f}{=} f(g(x))\cdot g'(x) = h(x)$

Obs: El teorema nos brinda un metodo para calcular la integral indefinida de funciones de la forma de $f(g(x))\cdot g'(x)$. En efecto si hacemos la sustitucion $u = g(x)$ y $du\ d(g(x)) = g'(x)\,dx$. Luego $\int f(\underbrace{g(x)}_{u})\cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du$ $= F(u) + c = F(g(x)) + C$

Ejemplos:

① $\int \operatorname{sen}(x^2)\,2x\,dx$ $\quad$ Sea $u = x^2$ $du = 2\,dx$

$\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + c = -\cos(x^2) + C$

Teorema (Metodo de Integracion por Partes): Si f' y g' son continuas, entonces

$\int f(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx$ $\quad (\star)$

Dem: Por la regla de derivacion de un producto de funciones tenemos $(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ o equivalentemente $f(x)\cdot g'(x) = (f\cdot g)'(x) - f'(x)g(x)$. Luego integrando ambos lados tenemos

$\int f(x)\cdot g'(x) = \int (f\cdot g)'(x)\,dx - \int f'(x)g(x)\,dx$

$= (f\cdot g)(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$

Obs: la ecuacion $(\star)$ se llama formula de integracion por partes. Para recordarla

Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$

Luego $\star$ queda $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Ejemplos

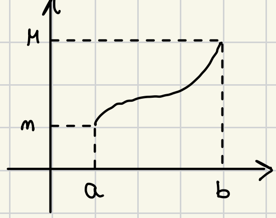
① $\int x e^x\,dx$ $\quad$ Si $u = x$, $dv = e^x\,dx$; $du = 1\,dx$, $v = e^x$, con lo cual $\int x e^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$ $\quad C \in \mathbb{R}$

② $\int x \operatorname{sen}(x)$ $\quad$ Si $u = x$, $dv = \operatorname{sen}(x)$; $du = 1\,dx$, $v = -\cos(x)$ $\quad$ $\int x\operatorname{sen}(x) = x\cdot(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))\,dx =$ $-x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + C$ $\quad C \in \mathbb{R}$

Integral definida

Área bajo una curva $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ función continua y tq $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b]$

¿Cuál es el valor del área A que se encuentra sobre el intervalo $[a,b]$ y debajo de la gráfica de f?



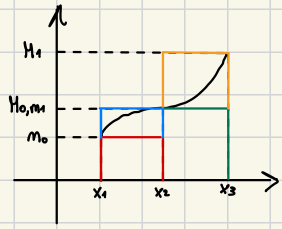
1^{er} Aprox. Sea m min de f en $[a,b]$

M max de f en $[a,b]$

Entonces $m(b-a)\leq A\leq M(b-a)$

2^{da} Aprox: Partimos $[a,b]$ como $[a,x_1]\cup[x_1,b]$, con $x_1\in(a,b)$

$[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]$



Sea $m_k=\min f$ en $[x_k,x_{k+1}]$ $\quad k\in\{0,1\}$

$M_k=\max f$ en $[x_k,x_{k+1}]$

$m_0(x_1-x_0)+m_1(x_2-x_1)\leq A\leq M_0(x_1-x_0)+M_1(x_2-x_1)$

De manera general, tomamos $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$

partición de $[a,b]$

Si $m_k=\min f$ en $[x_k,x_{k+1}]$ $\quad k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$

$M_k=\max f$ en $[x_k,x_{k+1}]$

$\Delta_k=x_{k+1}-x_k$ y Δ el mayor de todos los Δ_k entonces vale lo siguiente

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta_k}_{\text{suma inferior}}\leq A\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} M_k\Delta_k}_{\text{suma superior}}$$

Def: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y tq $f(x)\geq 0 \ \forall x\in[a,b]$ se define el área encerrada por la curva $y=f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$ por

$$\lim_{\Delta\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} m_k\Delta_k\right)$$

Llamaremos a este número integral definida de f en $[a,b]$ y se denota $\int_a^b f(x)\,dx$

Obs: ① Se puede probar que tomar el límite de las sumas superiores coincide con tomar el límite de las sumas inferiores

② La def de integral definida se puede extender a funciones que tomen valores negativos

③ También se puede extender la definición a funciones continuas en $[a,b]$ salvo en un número finito de puntos y siempre que f esté acotada en $[a,b]$

Algunas propiedades de la integral definida

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones acotadas y continuas salvo a lo sumo en una cantidad finita de puntos. Entonces valen

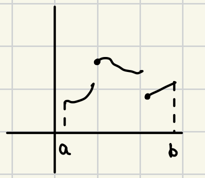
① Si $f\geq 0$ la $[a,b]\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$

② $\int_a^b c\,f(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx$

③ $\int_a^b (f\pm g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

④ Si $d\in[a,b]\Rightarrow\int_a^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$

⑤ Si $f\leq g$ en $[a,b]\Rightarrow\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$



28/08/24

Observación: Si f es acotada y con un nº finito de discontinuidades en $[a,b]$, también podemos aplicar (ii) del TFC en cada sub intervalo donde f es continua gracias al siguiente teorema

Teorema: Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ con f continua y g tal que $g(x)=f(x)$ $\forall x\in[a,b]$ salvo un $c\in[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$

Ejemplo: Apliquemos la regla de Barrow a $f(x)=\begin{cases}x+2 & 0\leq x<1\\ x^2-1 & 1\leq x\leq 2\end{cases}$

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$

Teorema Método de sustitución (I. definidas)

Sea $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ y $g:[a,b]\to[c,d]$ tal que f y g' sean continuas en sus respectivos dominios. Entonces si $u=g(x)$ vale que

$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$. En particular si F es primitiva de f tenemos que $\int_a^b f(g(x))g'(x)=F(g(x))$

Ejemplo

$\int_0^2 2x\cdot\operatorname{sen}(x^2)\,dx$ $\quad u=x^2$, $du=2x\,dx$

$\int_0^2 2x\cdot\operatorname{sen}(x^2)\,dx=\int_0^4 \operatorname{sen}(u)\,du=-\cos(u)\Big|_0^4=-\cos(x^2)\Big|_0^2=-\cos(2)+\cos(0)=\cos(2)+1$

Teorema de integración por partes (I. definida)

Sea f y g derivables en (a,b) tal que f' y g' tienen a lo sumo un nº finito de discontinuidades y acotadas entonces $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)$

Ejemplo:

$\int_1^e \ln(x)\,dx=\int_1^e \ln(x)\,1\,dx=\ln(x)\cdot x\Big|_1^e-\int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx=e-0-x\Big|_1^e=e-(e-1)=1$

ÁREA ENTRE GRÁFICAS DE FUNCIONES

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es no negativa, acotada y con un nº finito de discontinuidades hemos definido el área bajo el gráfico de f y arriba de $[a,b]$ como

$A=\int_a^b f(x)\,dx$

• Si $f(x)\geq g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$ es razonable definir el área entre los gráficos de f y g como:

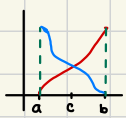
$A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$ ya que $f(x)-g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$

$A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx=\int_a^b f(x)-\int_a^b g(x)\,dx$

TEOREMA: Sea f y g funciones acotadas con un nº finito de discontinuidades tal que $f(x)\geq g(x)$

Entonces, el área entre las gráficas de f y g es $A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$ (Notar que $f(x)-g(x)\geq 0$ $\forall x\in[a,b]$)

Obs: En el caso que las gráficas se crucen, calcular el área por partes



$A=\int_a^c f(x)-g(x)\,dx+\int_c^b f(x)-g(x)\,dx$

30/08/24

Integracion de funciones racionales usando fracciones simples

• Queremos integrar funciones que son cocientes de polinomios osea $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ Ej: $\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2| + c$,

$\int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx = \frac{(x+3)^{-2}}{-2} + c$,

Vamos a suponer que la funcion racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ satisface lo siguiente

① El grado del polinomio p es menor al grado del polinomio q ya que si $gr(x) > gr(q)$ tenemos $\frac{p(x)}{q(x)} = Q + \frac{r(x)}{q(x)}$

② El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de q es 1 ya que si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{p(x)}{a_n \underbrace{\left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} \cdot x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n}\right)}_{\tilde{q}(x)}} = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$

Ejemplo:

$$\int \frac{x+1}{3x^2+1}\,dx = \int \frac{x+1}{3(x^2+\frac{1}{3})}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}(x+1)}{x^2+\frac{1}{3}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}(x+1)}{x^2+\frac{1}{3}}\,dx = \int \frac{\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}{x^2+\frac{1}{3}}\,dx$$

Teorema:

Todo polinomio monico se puede escribir como producto de polinomios de grado 1 y/o polinomio de grado 2 sin raices reales (en el ② q es un polinomio conico)

Es decir, si $q(x) = x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ entonces $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_n) \cdot \underbrace{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_\ell x+\beta_\ell)}_{\text{Sin raices reales}}$

Ejemplos

$x^3 + 2x^2 + (-3x) = x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x-2)$

$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$

$3x^3 + 3x = 3x\underbrace{(x^2+1)}_{x^2+\alpha_1 x+\beta_1}$

$\alpha_1 = 0$

$\beta_1 = 1$

CASO 1: q es un producto de polinomios de grado 1 y todos distintos es decir $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_n)$ con $r_i \neq r_j$ si $i \neq j$.

En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ (una constante para cada $p(x)$ de grado 1) tales que: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \dots + \frac{A_n}{x-r_n}$ luego, todo termino $\frac{A_i}{x-r_i}$ es facil de integrar

Ejemplo: $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\,dx$ tenemos $p(x) = 7x-1$, $q(x) = x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$ debemos hallar A_1 y A_2 tales que $\frac{7x-1}{x^2-x-6} = \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{x+2} = \frac{A_1(x+2)+A_2(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

igualamos los coeficientes de los numeradores obtenemos lo siguiente: $7 = A_1 + A_2$ y $-1 = 2A_1 - 3A_2 \Rightarrow A_1 = 7 - A_2 \Rightarrow -1 = 2(7-A_2) - 3A_2 = 14 - 2A_2 - 3A_2 = -1 = 14 - 5A_2 \Rightarrow 5A_2 = 15 \Rightarrow A_2 = 3$

$\Rightarrow 7 = A_1 + 3 \Rightarrow A_1 = 4$ $\therefore$ $\frac{4(x+2)+3(x-3)}{(x-3)(x+2)}$ Luego, $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{4}{x-3} + \frac{3}{x+2}\,dx = \int \frac{4}{x-3}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx = 4\int \frac{1}{x-3}\,dx + 3\int \frac{1}{x+2}\,dx = 4\ln|x-3| + 3\ln|x+2| + c$

CASO 2: q es el producto de polinomios de grado 1, todos iguales, es decir $q(x) = (x-r_1)^k$. En este caso buscamos constantes $A_1, \dots, A_k$ tales que $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x_1-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-r)^k}$

(tantas A como constantes). Luego, cada termino de la forma $\frac{A_i}{(x-r)^i}$ es facil de integrar

Ejemplo: $\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx$ tenemos $p(x) = 1-2x$ y $q(x) = (x+2)^3$. Debemos encontrar $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla lo siguiente: $\frac{1-2x}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2} + \frac{A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x+2)^2 + A_2(x+2) + A_3}{(x+2)^3}$

$\Rightarrow \frac{A_1(x^2+4x+4) + A_2(x+2) + A_3}{(x+2)^3} =$ Igualando los coeficientes de los numeradores obtenemos que $A_1 = 0$ $-2 = 4A_1 + A_2 \Rightarrow -2 = 4 \cdot 0 + A_2 \Rightarrow A_2 = -2$

$1 = 4A_1 + 2A_2 + A_3 \Rightarrow 1 = 4 \cdot 0 + 2 \cdot (-2) + A_3 \Rightarrow A_3 = 5$. Luego tenemos $\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{-2}{(x+2)^2} + \frac{5}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{-2}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{5}{(x+2)^3}\,dx = -2\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + 5\int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx$

$= -2 \cdot \frac{(x+2)^{-1}}{-1} + 5 \cdot \frac{(x+2)^{-2}}{-2} = \frac{2}{x+2} - \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} + C$

CASO 3: q es el producto de polinomios de grado 1, alguno de los cuales se repiten. Es decir $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_{i-1})(x-r_i)^{k_i}\dots(x-r_n)^{k_n}$. En este caso aplicamos los procedimientos del caso 1 y 2 (mezcla de ambos)

Ejemplo: si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3}$, entonces buscamos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathbb{R}$ tales que: $\frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{A_4}{(x-1)^2} + \frac{A_5}{(x-1)^3}$

CASO 4: q es el producto de polinomios de grado 1 (se pueden repetir) y/o de polinomios de grado 2 sin raices reales. Es decir, $q(x) = (x-r_1)^{k_1}(x-r_2)^{k_2}\dots(x-r_n)^{k_n}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_m x+\beta_m)$

En este caso, $\frac{p(x)}{q(x)}$ se escribe como suma donde por cada factor lineal aparecen tantos terminos como indican los casos 1 y 2 y para cada factor cuadratico aparecen terminos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$ con B y C constantes a encontrar

Ejemplo $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)}$ debemos hallar constantes A_1, A_2, A_3, B y C tales que se cumpla lo siguiente:

$$\frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$ ¿Como hacemos?

Observacion: para integrar terminos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$ debemos hallar constantes k_1 y k_2 tal que se cumpla

$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = k_1 \frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta} + k_2 \frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}$ (forma de resolver lo imaginario)

donde $B = 2k_1$ y $C = \alpha k_1 + k_2$

04/09/24

Integrales Impropias

Definimos $\int_a^b f(x)\,dx$ por el caso $a,b \in \mathbb{R}$ y f es una funcion continua salvo en un numero finito de puntos y acotado

Extendemos la definicion para el caso en el que $a,b \notin \mathbb{R}$ o en que f no es acotada en $[a,b]$

Integral Impropia Tipo I: funciones continuas y al menos uno de los limites de integracion no es finito

diverge cuando se va a $\pm\infty$

converge cuando va a un valor finito

Def. sea $a \in \mathbb{R}$

- Si f es continua en $[a,\infty)$, definimos $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ si existe y es finito

En tal caso decimos $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge, sino decimos que diverge

- Si f es continua en $(-\infty,a]$ definimos $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^a f(x)\,dx$ y decimos que converge o diverge según corresponde
- Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$ siempre que estas ultimas dos converjan

y en tal caso decimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$. Si alguna no converge, decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ diverge

Ejemplo

① $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\underset{\downarrow\ -\frac{1}{e^t}\to 0}{-e^{-t}} + \underset{\downarrow\ 1}{e^0}\right) = 1$ converge

② $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^{-1}\frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\underset{\downarrow\ 0}{\ln|-1|} - \underset{\downarrow\ \infty}{\ln|t|}\right)$ diverge

③ $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ Elegimos $a=0$

$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(\underset{\downarrow\ 0}{\operatorname{arctg}(0)} - \underset{\downarrow\ -\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg}(t)}\right) = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_t^\infty \frac{1}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty}\operatorname{arctg}(x)\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(0)\right) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ converge

Integral Impropia Tipo II: limites de integracion finitos $a,b \in \mathbb{R}$ pero f tiene una asintota vertical en un punto $c \in [a,b]$

Def.

Sea f continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

Definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$, si existe y es finito

- Sea f continua $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$, si el limite existe y es finito

- Sea $c \in (a,b)$. Si f es continua en $[a,c)\cup(c,b]$ y las integrales $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ existen y son finitos

definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Ejemplo:

① $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ Tenemos que f(x) es continua en $(0,1]$ y $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Por definición

$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\ln(x)\Big|_t^1\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\ln(1) - \ln(t)\right) = +\infty$

La integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge

② $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, con $0<p<1$

Por definicion

$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_t^1\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{t^{\overset{>0}{1-p}}}{1-p}\right) = \frac{1}{1-p} \therefore \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$ converge si $0<p<1$

Criterio de comparacion para integrales impropias

Veremos un criterio para determinar si una integral impropia es convergente o divergente sin hacer el calculo sino que lo haremos con una funcion mas facil de integrar

Teorema (Criterio de Comparacion para integrales impropias tipo I)

Sean f y g funciones continuas y $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, \infty)$. Entonces $\int_a^\infty g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx$ converge o equivalentemente $\int_a^\infty f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^\infty g(x)\,dx$ diverge

De manera analoga

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in (-\infty, a]$. Entonces $\int_{-\infty}^a g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ converge o equivalentemente $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_{-\infty}^a g(x)\,dx$ diverge

Teorema (Crit de comparacion para integrales impropias tipo II)

Sean f, g funciones continuas en $[a,b)$ y tal que $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$

Entonces, si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ converge o equivalentemente $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx$ diverge

Ejemplo:

$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ Notemos que no podemos calcular por definicion esta integral ya que la primitiva de e^{-x^2} no es una funcion elemental. Por lo tanto vamos a utilizar el teorema anterior.

(Tipo I)

Primero notemos que $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}\,dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^\infty e^{-x^2}\,dx}_{I_2}$

Tenemos que I_1 converge ya que e^{-x^2} es continua en $[0,1]$ por lo tanto $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx =$ Integral definida

Para determinar si I_2 converge o diverge usamos el Teorema anterior (Tipo I)

Nos interesa $1 \leq x \rightarrow x \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq -x$ y por lo tanto $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ si $x \in [1, \infty)$

Sea $f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = e^{-x}$, tenemos $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [1, \infty)$

Como $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t e^{-x} = \lim_{t \to \infty} -e^{-x}\Big|_1^t = \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1} < \infty$ o sea como $\int_1^\infty g(x)\,dx$ converge $\Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2}\,dx$ converge por lo tanto I_2 converge

06/09/24

Sucesiones

Def: Una Sucesion infinita de números reales es una función cuyo dominio son los naturales $\mathbb{N}$ y su imagen esta incluida en $\mathbb{R}$. O sea $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que $1\to a(1)=a_1$

$2\to a(2)=a_2$ y a lo general $n\to a(n)=a_n$

Notación $\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}\ n\in\mathbb{N}$

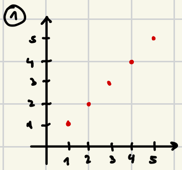
Ejemplos:

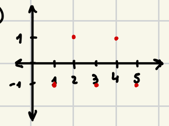
① $\{1,2,3,\dots\}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=n$

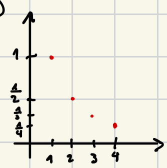
② $\{-1,1,-1,1,\dots\}$, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=(-1)^n$

③ $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=\frac{1}{n}$

Obs: Una sucesion $\{a_n\}$ se puede representar como el gráfico de una función o como conjunto de números reales

①


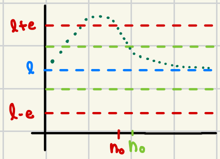
②


③


Def: una sucesión $\{a_n\}$ tiene limite $\ell\in\mathbb{R}$, y se denota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$ ó $a_n\to\ell$, si los términos a_n se acercan a ℓ tanto como queremos al hacer n suficientemente grande. Esto es $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell \iff \forall\varepsilon>0\ \ \exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\underbrace{|a_n-\ell|<\varepsilon}\ \ \forall n>n_0$

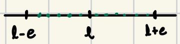
$-\varepsilon<a_n-\ell<\varepsilon$

$\ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon$



(depende el valor de ε)

$a_n\in(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon)\ \forall n\geq n_0$



Ejemplo: Probar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Sea 3, queremos hallar $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

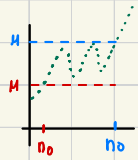
$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<3\ \ \forall n\geq n_0$. Como $\frac{1}{n}<3 \iff \frac{1}{\varepsilon}<n$, entonces

basta tomar $n_0=$ primer natural mayor a $\frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n_0}<3$

Def: Dada una sucesion $\{a_n\}$ decimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ ó $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ si los términos a_n se hacen arbitrariamente grande al hacer n grande. Esto es $\forall M>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_n>M\ \forall n>n_0$

Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ si $\forall k<0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_n<k\ \ \forall n\geq n_0$



Def: Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$ y $\ell\in\mathbb{R}$ (o sea $\ell\neq\pm\infty$) decimos que $\{a_n\}$ converge a ℓ

En los demás casos decimos que diverge

Ejemplo: Decidir si la sucesion converge o diverge

① $a_n=\frac{1}{n}$. Recien vimos que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ por lo tanto $\{\frac{1}{n}\}$ converge a 0

② $a_n=n$ Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ (probar usando definicion) entonces $\{n\}$ diverge

③ $a=(-1)^n$ Como el $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ No existe $\Rightarrow \{(-1)^n\}$ diverge

Teorema: Sean $\{a_n\}$ y $\{B_n\}$ dos sucesiones convergentes y sea $c\in\mathbb{R}$, entonces

ⓘ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm B_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}B_n$

ⓘⓘ $\lim\limits_{n\to\infty}(c\,a_n)=c\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

ⓘⓘⓘ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n B_n)=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}B_n$

ⓘⓥ Si $\lim\limits_{n\to\infty}B_n\neq0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{B_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}B_n}$

Ejemplo:

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+0=1$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n2}{n(1+\frac{1}{n})}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{1}=2$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+7}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3(1+\frac{7}{n^3})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2(1+\frac{7}{n^3})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{7}{n^3})}=$

$0\cdot1=0$

Teorema (Relacion entre limite de fracciones y sucesiones)

Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ell$ y $a_n=f(n)\ \forall n\geq n_0$, para algún $n_0\in\mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$

Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ para $a_n=\frac{\ln(n)}{n}$. Sea $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ para $x>0$ $(x\in(0,\infty))$

Tenemos $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

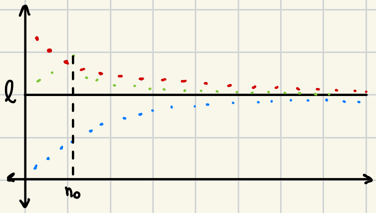
Ademas $f(n)=a_n\ \forall n\geq1 \Rightarrow$ Por teorema $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$

Obs: No es cierto que si $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$ y $a_n=f(n) \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ell$

$a_n=\operatorname{sen}(n\pi)=0$ y $f(x)=\operatorname{sen}(\pi x)$ es claro que $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ pero $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ No existe

Teorema (del Sandwich para sucesiones)

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, y $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = \ell$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \ell$



Ejemplo: Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^3}$

$-1 \leq \text{sen}(n) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\iff$ $-\frac{1}{n^3} \leq \frac{\text{sen}(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n^3} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$ por Teorema del Sándwich tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\text{sen}(n)}{n^3} = 0$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una Sucesión. Entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Ejemplo: Probar que la sucesion $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ Converge a 0

Tenemos que $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ y con lo cual calculo $|a_n| = \frac{1}{n}$. Luego, como

$\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

¿Para que valores de r la sucesión $\{r^n\}$ converge?

- Analicemos el caso $r>0$ ($r \in (0,\infty)$). Recordemos que $r^x = e^{\ln(r^x)} = e^{x\ln(r)}$

y además $\ln(r) \begin{cases} >0 & \text{si } 1<r \\ <0 & \text{si } 0<r<1 \end{cases}$

Sea $f(x) = r^x$. Tenemos $a_n = r^n = f(n)$ y como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } 1<r \\ 0 & \text{si } 0<r<1 \end{cases}$

por Teorema de Relacion entre limite de funciones y sucesiones tenemos que

$\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } 1<r \quad \mathrm{I} \\ 0 & \text{si } 0<r<1 \quad \mathrm{II} \end{cases}$

Veamos que para para $r=0$ y $r=1$

- Si $r=0$, $r^n = 0^n = 0$ $\forall n$ con lo cual $\lim r^n = 0$ III
- Si $r=1$, $r^n = 1^n = 1$ $\forall n$ con lo cual $\lim r^n = 1$ IV
- Analicemos el caso $r<0$

Si $r \in (-1,0) \implies 0<|r|<1$ y por II tenemos que $\lim\limits_{n\to\infty} |r|^n = 0$

por lo tanto por el teorema anterior tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ si $r \in (-1,0)$ V

- Si $r=-1$, tenemos que $r^n = (-1)^n$ que ya sabemos que no tiene limite para $n\to\infty$
- Si $r<-1$, r^n no tiene límite

Conclusion:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } r\leq -1 \\ 0 & \text{si } -1<r<1 \\ 1 & \text{si } r=1 \\ \infty \text{ (diverge)} & 1<r \end{cases}$$

11/09/24

Teorema: Sea $\{a_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y f una funcion continua en $x=a$. Entonces $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ $\left(= f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\right)$

Ejemplo: Calcular limite de $\{n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\}$ Notemos que $n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$. Elegimimo $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, tenemos que f es continua en $x=0$

Si $a_n = \frac{1}{n}$, tenemos $\lim_{n\to\infty} a_n =$

Luego por el teorema $\lim_{n\to\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \overset{\text{Por teorema}}{=} f(0) = 1$

Definicion: Decimos que la sucesion $\{a_n\}$ es

- Creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Si $\{a_n\}$ es creciente o decreciente diremos que es monotona

Ejemplos: ① $\{n\}$ como $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$ $\forall n$ $\therefore \{n\}$ es estrictamente creciente

② $\{\ln(n)\}$ Con $f(x) = \ln(x)$ es una funcion estrictamente creciente por lo tanto $n < n+1 \Rightarrow f(n) < f(n+1)$ o sea $\ln(n) < \ln(n+1)$ y por lo tanto $\{\ln(n)\}$ es estrictamente creciente.

③ $\{1,1,2,2,3,3,4,4\}$ como $a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \{a_n\}$ es creciente

Definicion: decimos que la sucesion $\{a_n\}$ es:

(i) Acotada inferiormente, si $\exists M_i \in \mathbb{R}$ tq. $M_i \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Acotada superiormente, si $\exists M_s \in \mathbb{R}$ tq. $a_n \leq M_s$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) Acotada si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq. $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplos: ① $\{\frac{1}{n}\}$ Como $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ es acotada puedo tomar $M=1$

② $\{-n\}$ Como $-n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{-n\}$ esta acotada superiormente

Obs: En la definicion anterior decimos que M_i es una cota inferior de $\{a_n\}$ y M_s es una cota superior de $\{a_n\}$. Notemos que las cotas superiores e inferiores No son unicas

Por ejemplo $(-1)^n \Rightarrow M_s = 10$, $M_s = 2$, $M_s = 1$ son todas cotas superiores

owo

Axioma de completitud de los numeros reales

Todo conjunto no vacio de numeros reales que es acotado superiormente tiene una menor cota superior en $\mathbb{R}$.

Todo conjunto no vacio de numeros reales que es acotado inferiormente tiene una mayor cota inferior en $\mathbb{R}$.

Def: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- Si A es acotado superiormente la menor cota superior de A se llama supremo de A y se denota $\sup(A)$.
- Si A es acotado inferiormente la mayor cota inferior de A se llama infimo de A y se denota $\inf(A)$

Ejemplo Pensemos las sucesiones como conjunto de numero reales

① $\{\frac{1}{n}\} = A$ $\quad \operatorname{Sup}(A) = 1 \quad \inf(A) = 0$

Como $1 \in A \Rightarrow A$ tiene maximo

como $0 \notin A \Rightarrow A$ no tiene minimo

② $\{-n\} = B$ $\quad \operatorname{Sup}(B) = -1$ y como $-1 \in B \Rightarrow$ tambien es el maximo

$\operatorname{Inf}(B)$ no existe y por lo tanto tampoco existe un minimo

③ $\{(-1)^n\} = C$ $\quad \operatorname{Sup}(C) = 1$ y tambien es el maximo

$\operatorname{Inf}(C) = -1$ y tambien es el minimo

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow \{a_n\}$ es acotado

Obs: La reciproca es falsa, o sea $\{a_n\}$ acotada $\not\Rightarrow \{a_n\}$ convergente

Por ejemplo $a_n = (-1)^n$ Sin embargo si es cierto si la sucesion es creciente o decreciente

Teorema:

(i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(\{a_n\})$

Subsucesions

Dada una sucesion $\{a_n\}$ podemos extraer de esta otras sucesiones descontando algunos terminos. Cada una de estas nuevas sucesiones se llama sub sucesion de $\{a_n\}$

Ejemplo: Consideremos $\{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, ...\}$ Podemos extraer las siguientes subsucesiones: $\{-1,-1,-1,-1,...\}$ (extraigo a_n con n impar), $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\}$ (extraigo a_n con n par)

Def. Una subsucesion de una sucesion $\{a_n\}$ es una sucesion de la forma $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, ...\} = \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ donde $n_j \in \mathbb{N}$ y cumplen $n_1 < n_2 < n_3 < ...$

Por ejemplo = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...\}$

$a_1 \downarrow a_{n_1}$, $a_3 \downarrow a_{n_2}$, $a_5 \downarrow a_{n_3}$

$n_1 = 1$ $\quad n_2 = 3$ $\quad n_3 = 5$ $\quad n_j = 2(j-1)+1$

$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, ...\}$

$a_{2(j-1)+1} = j$ (terminos impares)

a

Teorema: toda subsucesion de una sucesion convergente es convergente y ademas los limites son iguales

Obs: El teorema es util para demostrar que una sucesion no tiene limite: basta encontrar dos subsucesiones distintas que converjan a distintos limites.

Ejemplo: Sea $a_n = (-1)^n$ Luego, $a_{n_j} = (-1)^{2j}$ y $a_{n_k} = (-1)^{2k+1}$ ambas son subsucesiones de $\{a_n\}$ que convergen a 1 y -1 respectivamente $\therefore \{a_n\}$ es divergente

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Toda sucesion acotada tiene al menos una subsucesion convergente Si $\{a_n\} = \{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, ...\}$

Obs: puede haber mas de una subsucesion convergente

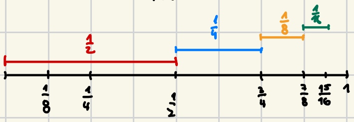
$b_j = a_{2j} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$

$c_j = a_{2(j-1)+1} = \{-1, -1, -1\}$

13/09/24

Dado una sucesión $\{a_n\}$ queremos sumar sus infinitos términos, esto es $a_1+a_2+\dots$ lo cual escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Por ejemplo $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{n} a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$



Def: dada una sucesión $\{a_n\}$, llamamos serie de términos a_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como $S_k = a_1+a_2+a_3+\dots+a_k$. Luego, $\{S_k\}$ es una sucesión de números $\mathbb{R}$

Si el límite de la sucesión $\{S_k\}$ existe y es finito es decir $\lim_{k\to\infty} S_k = S<\infty$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Si $\lim_{k\to\infty} S_k$ no existe o es $\pm\infty$, decimos que la serie es divergente

Ejemplo: Determine si la serie es convergente o divergente

① $\sum_{n=1}^{\infty} n$ Tenemos que $a_n = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $S_1 = 1$, $S_2 = 1+2$, $S_3 = 1+2+3$. $S_k = \frac{k(k+1)}{2} = 1+2+3+\dots+k$

Como $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)}{2} = \infty$ por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ es divergente

② $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ Tenemos que $a_n = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$S_0 = 1$, $S_1 = 1+(-1) = 0$, $S_2 = 1+(-1)+1 = 1$, $S_3 = 1+(-1)+1+(-1) = 0$

en general $S_k \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$ Luego, NO existe $\lim_{k\to\infty} S_k$ pues $\{S_k\}$ admite dos subsucesiones distintas y con límites distintas. $\{S_{2j}\}$ tiene lim 1 y $\{S_{2j+1}\}$ tiene lim 0. Al no existir $\lim_{k\to\infty} S_k \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es divergente.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ parece que converge a 1

Def. Dado $r \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1+r+r^2+\dots$ se llama serie geométrica

Teorema:

① Si $|r|<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

② Si $|r|\geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge

Dem: Fijamos $r \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\left.\begin{aligned} S_k &= 1+r+r^2+r^3+\dots+r^k \\ rS_k &= r+r^2+r^3+r^4+\dots+r^{k+1} \end{aligned}\right\} S_k - rS_k = 1-r^{k+1}$$

osea $(1-r)S_k = 1-r^{k+1}$

(i) Supongamos que $|r|<1$. Por un lado $r\neq 1$, tenemos que $S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$

Por otro lado com $|r|<1$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = r \lim_{k\to\infty} r^k = 0$ (ver dos casos atrás)

Luego $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$

(ii) Supongamos que $|r|\geq 1$

- Si $r=-1$ ya vimos en el ejemplo ② que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverge
- Si $r=1$, entonces $S_k = 1^0+1^1+1^2+\dots+1^k = k+1$

  Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$ y entonces $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ diverge
- Si $|r|>1$ por un lado $S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$, por otra parte ya vimos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} \begin{cases} \infty & \text{si } r>1 \\ \nexists & \text{si } r<-1 \end{cases}$. Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{k+1}}{1-r}\right)$ es divergente y con lo cual $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge.

Obs: $|r|<1$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$$

Propiedades de Series convergentes

Teorema: Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergente y $c \in \mathbb{R}$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ son convergentes y ademas $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

Teorema: Criterio de la divergencia

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Equivalentemente si $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ó $\lim_{n\to\infty} a_n = \nexists$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Dem: Tenemos que

$$\left.\begin{array}{l} S_k = a_1 + \dots + a_k \\ S_{k-1} = a_1 + \dots + a_{k-1} \end{array}\right\} S_k - S_{k-1} = a_k$$

Ahora como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces existe $\lim_{k\to\infty} S_k = S$. Pero entonces tambien vale que $\lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S$ (pues $k\to\infty \Leftrightarrow k-1\to\infty$)

$\hookrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} (S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0$

Obs: no vale la reciproca (Crit. de la divergencia) es decir $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}$ converge

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armonica) Vale que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ pero veamos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Vamos a probar que existe una subsucesion de la sucesion de sumas parciales $\{S_k\}$ que es divergente y por lo tanto esto implica que la sucesion $\{S_k\}$ es divergente, entonces por definicion la serie diverge.

Consideramos la subsucesion $\{S_{2^j}\}$ tenemos que

$j=1 \longrightarrow S_{2^1} = \boxed{S_2 = 1 + \frac{1}{2}}$

$j=2 \longrightarrow S_{2^2} = S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + 2 \cdot \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1 + 2\,\frac{1}{2}}$

$j=3 \longrightarrow S_{2^3} = S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + 4\,\frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3\,\frac{1}{2}$

$j=4 \longrightarrow S_{2^4} = S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16} > S_8 + 8 \cdot \frac{1}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + 3\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4\,\frac{1}{2}$

De manera general $S_{2^j} > 1 + j\,\frac{1}{2}$. Luego $\lim_{j\to\infty} S_{2^j} \geq \lim_{j\to\infty} 1 + j\,\frac{1}{2} = \infty$

O sea $\{S_{2^j}\}$ es una subsucesion de sumas parciales que diverge. Luego $\{S_k\}$ diverge y por lo tanto por def la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

18/09/24

Teorema (Criterio de Comparacion) Si $0 \le a_n \le b_n$ $\forall n \ge n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces si $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplo: Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^2(n)}{2^n+n}$ $\quad 0 \le \frac{sen^2(n)}{2^n+n} \le \frac{1}{2^n}$ $\forall n \ge 1$ pues $sen^2(n) \le 1^2$ y $2^n+n > 2^n \Rightarrow \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente (geometrica) por el criterio de la comparacion $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen^2(n)}{2^n+n}$ es convergente

Teorema (Criterio de la integral para series): Sea f una funcion continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$ entonces $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{C_1}$ es convergente $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{C_2}$ converge

Obs: ① No es cierto en general que $C_1 = C_2$

② Podemos iniciar la serie desde cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-4)^2}$ podemos considerar $\int_5^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ para $0<p<\infty$. Sea $f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$, f es continua positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Ademas $f(n) = \frac{1}{n^p} = a_n$ Por otro lado $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $\Longleftrightarrow p>1$. Luego por el criterio de la integral $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente para $p>1$ y divergente para $0<p\le 1$

serie p

Definicion: decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente (es absolutamente convergente). Converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge (es condicionalmente convergente)

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge absolutamente pues $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge pues serie p (con $p=2>1$)

Teorema: [Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente] Luego, en el ejemplo anterior $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ es convergente

Ejemplo: Decida si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge o diverge. Consideramos $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$ tenemos que $0 \le \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ademas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie p)

La reciproca no vale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero (prox clase) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Teorema: (★) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Dem (★) Se cumple que $-|a_n| \le a_n \le |a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ luego $0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\sum a_n$ converge absolutamente y por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge.

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ es convergente por el Teo (Crit. de comp)

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente (prop de las series)

Teorema (Criterio del cociente): Sean $a_n \neq 0$ $\forall n \ge n_0$ y Sea $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

(i) Si $r<1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto converge)

(ii) Si $r>1$, (ó ∞) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

(iii) Si $r=0$ entonces no se puede asegurar nada.

Ejemplo: Analice si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ con $c \neq 0$ converge o diverge. $a_n = \frac{c^n}{n!}$ Tenemos que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left|\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{c^n}{n!}\right|} = \frac{\frac{|c^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|c^n|}{n!}} = \frac{|c^{n+1}|\, n!}{|c^n|\,(n+1)!} = \frac{|c|}{n+1}$.

Luego $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{n+1} = 0 < 1$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ converge absolutamente y $\therefore$ converge por Teorema (★)

Ejemplo: Analice la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n c^n$, para $c \neq 0$. $a_n = nc^n$. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|c|^{n+1}}{n|c|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} |c| = |c| = r$

- Si $|c|<1$ entonces la serie converge absolutamente ($\therefore$ converge)
- Si $|c|>1$ la serie diverge
- Si $|c|=1$ la serie diverge por criterio de la divergencia $\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = 1$

Ejemplo $a_n = \frac{1}{n}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

$a_n = \frac{1}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie p)

Teorema (Criterio de la raiz)

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(i) Si $r<1$, entonces la serie es absolutamente convergente (y $\therefore$ convergente)

(ii) Si Si $r>1$ entonces la serie es divergente

(iii) Si $r=1$, no se puede asegurar nada

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ $\quad a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$. $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n\right|} = \frac{2n+3}{3n+2}$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \frac{2}{3} = r < 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ converge absolutamente y luego por teorema (★) converge

Definicion: decimos que una serie es alternante si sus terminos son positivos y negativos alternadamente

① $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

② $-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{n}{n+1}$

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$; $a_n = \frac{1}{n}$. $0 < n < n+1$ luego $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ Luego por criterio de series alternantes la serie converge.

Teorema: (Criterio para series alternantes)

Si: $a_n \geqslant a_{n+1} > 0$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ converge (tmb $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

23/09/24

Series de potencias

Vamos a estudiar series en la que sus terminos dependen de una variable, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$, con $a \in \mathbb{R}$ fijo $x \in \mathbb{R}$ variable

Generalizacion de los polinomios $\int e^{-x^2} dx$, $\int e^{-x^2} dx \approx \sum c_n \int (x-a)^n$

Def: Sean $\{C_n\}$ una sucesion de numeros reales y $a \in \mathbb{R}$. Llamamos serie de potencias centrada en a, a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots$

(Notar que adoptamos $(x-a)^0 = 1$, aun cuando $x = a$)

- Para cada x fijo, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ es una serie de terminos constantes, o sea una serie numerica.
- Observamos que si $x = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = C_0 < \infty$ o sea toda serie de potencias centrada en a converge en a

Ejemplo: Sea $\{C_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty}$ y $a = 0$. Entonces la serie de potencia centrada en 0 es (*) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (serie geometrica "$r = x$ variable"). Sabemos que la serie (*) converge $\frac{1}{1-x}$ Si y solo si $|x| < 1$.

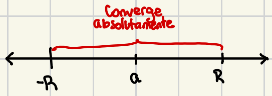
mentira
te amo chiquito

Teorema: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ una serie de potencias. Entonces, se cumple exactamente una de las siguientes:

(i) La serie converge solo cuando $x = a$

(ii) La serie es absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\exists R > 0$ tal que la serie converge absolutamente $\forall x$ tal que $|x-a| < R$ y es divergente $\forall x \,|\, |x-a| > R$



Def. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ una serie de potencias

(A) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R = 0$ si solo converge en $x = a$

(B) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R = \infty$ si converge $\forall x \in \mathbb{R}$

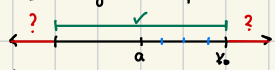
(C) Si ocurre (iii) en el teorema anterior decimos que R es su radio de convergencia.

Def: Llamamos intervalo de convergencia al conjunto $I = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \text{ converge}\}$

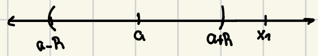
Obs:
- Si $R = 0$, entonces $I = \{a\}$
- Si $R = \infty$, entonces $I = \mathbb{R}$
- Si $0 < R < \infty$, entonces I puede ser $(a-R, a+R)$, $[a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R]$

Obs: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ una serie de potencia. Notemos que:

- Si la serie de potencias converge para algun $x_0 \neq a$, entonces por (iii) del teorema anterior $R \geq |x_0 - a|$ y ademas la serie de potencias converge $\forall x$ tal que $|x-a| < |x_0 - a|$



- Si la serie de potencias divergen en x_1, entonces $R \leq |x_1 - a|$ y ademas la serie diverge $\forall x$ $|x-a| > |x_1 - a|$



(podria ser $R = |x_1 - a|$)

Ejemplo: Determine el radio de convergencia de R y el intervalo de convergencia I de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

- Si $x = 1$, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (por ser serie armonica) y por lo tanto $R \leq 1$ (I)
- Si $x = -1$, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (por crit. de series alternantes). Luego $R \geq |-1| = 1$ (II)

De I y II concluimos que $R = 1$ y $I = [-1, 1)$

Teorema (Crit. del cociente para series de potencias): Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$, con $C_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y R su radio de convergencia. Escribimos $L = \lim_{n \to \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|}$

(i) Si $0 < L < \infty$, entonces $R = \frac{1}{L}$

(ii) Si $L = 0$, entonces $R = \infty$

(iii) Si $L = \infty$, entonces $R = 0$

Dem: Para cada $x \neq a$ puedo aplicar el criterio del cociente para series numericas a la serie $I = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{C_n (x-a)^n}_{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Tenemos que $\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|C_{n+1} (x-a)^{n+1}|}{|C_n (x-a)^n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} |x-a| = L\,|x-a|$

(i) Supongamos $0 < L < \infty$, Luego por el crit. del cociente para series numericas $\begin{cases} L|x-a| < 1 \Rightarrow I \text{ converge absolutamente} \\ L|x-a| > 1 \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases}$ o sea si $\begin{cases} |x-a| < \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ converge absolutamente} \\ |x-a| > \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases}$

(ii) Si $L = 0$, entonces $L|x-a| < 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\therefore R = \infty$

(iii) Si $L = \infty$, entonces $L|x-a| = \infty$ $\forall x \neq a$ y $\therefore R = 0$

Ejemplo: Calcule el radio R e intervalo de convergencia I de las siguientes series de potencia

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ Tenemos que $\lim_{n \to \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \to \infty} n+1 = \infty$. Luego $R = 0$ e $I = \{0\}$ (o sea la serie diverge $\forall x \neq 0$)

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$ Tenemos que $\lim_{n \to \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$. Luego $R = 1$. Ademas en $x = (-1)$ y $x = 1$ la serie diverge (por crit de la div) Entonces $I = (-1, 1)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n 3^n} (x-1)^n$ (notar que $a = 1$). Tenemos que $\lim_{n \to \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}}}{\frac{2^n}{n 3^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{3} \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}$. Luego $R = \frac{3}{2}$. Veamos que pasa en $x = a - R = 1 - \frac{3}{2}$ y en $x = a + R = 1 + \frac{3}{2}$

- Si $x = 1 - \frac{3}{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n 3^n} \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n} \to$ diverge (serie armonica)
- Si $x = 1 + \frac{3}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n 3^n} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \to$ converge (por crit. de series alter.). Por lo tanto $I = \left(1 - \frac{3}{2}, 1 + \frac{3}{2}\right] = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$

02/10/24

Representación de Funciones como series de potencias

Dada una SP $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, para cada x_0 tal que la serie converge podemos definir una función $x_0 \longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. f es una función con dominio en el intervalo de convergencia de la SP.

Ejemplos

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$ La igualdad $*$ vale si $|x|<1$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} \overset{\triangle}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$$ La igualdad $\triangle$ vale si $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, lo cual equivale a $|x|<2$

Teorema: Si la SP $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R entonces la función $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ es derivable (y $\therefore$ continua) en el intervalo $(a-R, a+R)$. Además

(i) $f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)\,dx = C + C_0(x-a) + C_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$

Las SP de (i) y (ii) tienen radio de convergencia R pero los intervalos de convergencia pueden ser distintos

Obs: Otra forma de (i) y (ii) es la siguiente:

(i) $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}\left[C_n(x-a)^n\right]$

(ii) $\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int C_n(x-a)^n\,dx$

Ejemplo: expresar la función $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ como SP. Notemos que $g(x) \overset{\bullet}{=} f'(x)$ con $f = \frac{1}{1-x}$. Además que $f(x) \overset{\bullet}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Si $|x|<1$ $\binom{\text{o sea}}{R=1}$.

Luego $\frac{1}{(1-x)^2} = g(x) \overset{\bullet}{=} f'(x) \overset{\bullet}{=} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]' \overset{(i)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ y su radio de convergencia es $R=1$

Ejemplo: Expresar la función $\ln(1-x)$ como SP. Observamos que $-\ln(1-x) \overset{\bullet}{=} \int f(x)\,dx$, con $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Además $\frac{1}{1-x} \overset{\bullet}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si $|x|<1$.

Luego $-\ln(1-x) \overset{\bullet}{=} \int f(x)\,dx \overset{\bullet}{=} \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)dx \overset{(ii)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\int x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} + C$

Obtuvimos que $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - C$. Para determinar el valor de C evalúo en algún x por ejemplo $x=0$ $\ln(1) = -C \Rightarrow 0 = -C \Rightarrow C = 0$

Queremos estudiar ¿Qué función se puede expresar como SP? ¿Cómo es posible hallar esta representación?

Sea f una función que si se puede representar como una SP, es decir $f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ $\forall x \in (a-R, a+R)$

- Si evaluamos f en $x=a$ obtenemos $f(a) = C_0$
- Por teorema anterior podemos derivar f y obtenemos $f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3(x-a)^2 + 4(x-a)^3 + \ldots$
  - Si evaluamos f' en $x=a$, obtenemos $f'(a) = C_1$
- Aplicando el teorema a f' obtenemos $f''(x) = 2C_2 + 2\cdot 3C_3(x-a) + 3\cdot 4C_4(x-a)^2 + \ldots$
  - Si evaluamos f'' en $x=a$, obtenemos $f''(a) = 2C_2$
- Aplicamos el teorema en f'' y obtenemos $f'''(x) = 2\cdot 3C_3 + 2\cdot 3\cdot 4C_4(x-a) + \ldots$
  - Si evaluamos $f'''(a) = 2\cdot 3C_3$

De manera general obtenemos $f^{(n)}(a) = n!C_n$ donde $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$ y usamos la convención $f^{(0)} = f$, $0! = 1$

Teorema: Si f se puede representar como una SP centrada en a, es decir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ $\forall x \mid |x-a|<R$, entonces $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Def: dada una función f que tiene derivadas de todos los órdenes en a, se llama serie de Taylor de f centrada en "a" a la SP.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)}{3!} + \ldots$$

Obs: el teorema anterior nos dice que si f se puede representar como una SP centrada en "a", entonces esa serie es justamente la serie de Taylor de f centrada en "a" (y por lo tanto es igual a su serie de Taylor)

Ejemplo: Calcular la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ centrada en $a=0$ y determine su radio de convergencia.

- Para calcular la S.T de f centrada en 0 debemos hallar $f^{(n)}(a)$ $\forall n \geq 0$. Como en este caso $f^{(n)}(x) = e^x$ tenemos que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ $\forall n \geq 0$

  Luego la ST queda $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

- Para determinar R usamos el criterio del cociente para SP como $L = \lim_{n\to\infty}\frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ tenemos que $R = \infty$ o sea $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

  $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

04/10/24

Repaso

S.P, centrada en "a" $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n \longrightarrow$ Radio de convergencia $\begin{cases} R=0 \longrightarrow I=\{a\} \\ 0<R<\infty \longrightarrow [(a-R, a+R)] \\ R=\infty \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

En I podemos representar la SP como una funcion f con dominio justamente igual a I $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \rightsquigarrow C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Series y Polinomios de Taylor

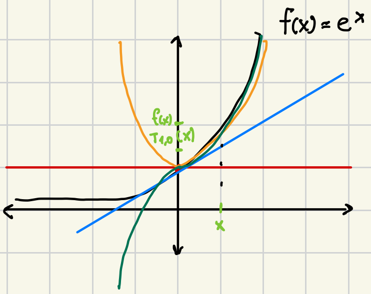
Serie de Taylor dada una funcion f que tiene derivadas de todos los ordenes en a, llamamos ST de f centrada en "a" a la siguiente S.P $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

¿Cuando una funcion f es igual a su serie de Taylor? ¿Cuando es cierto $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$?

Def: Sea f tal que existe $f^{(1)}(a), f^{(2)}(a), \dots, f^{(n)}(a)$ para $n \geq 0$ definimo el polinomio de Taylor de orden n centrada en "a" $T_{n,a}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} \cdot (x-a)^j$

Obs: Notar n-esima suma parcial de la serie de Taylor es justamente el polinomio de Taylor de orden n.

Obs: Notar que f y su polinomio de Taylor de orden n satisfacen $f^{(j)}(a) = T_{n,a}^{(j)}(a)$ $\forall 0 \leq j \leq n$



$T_{0,0}(x) = f(0) = e^0 = 1$

$T_{1,0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot x = 1 + x$

$T_{2,0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)\, x^2}{2} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

$T_{3,0}(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)\, x^2}{2} + \frac{f'''(0)\, x^3}{6} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$

Def: Se define como resto de Taylor de orden n centrado en "a" como $R_{n,a} = f(x) - T_{n,a}(x)$ (Por lo tanto $f(x) = T_{n,a}(x) + R_{n,a}(x)$)

Teorema: Sea f una funcion tal que existen $f^{(n)}(a)$ $\forall n \geq 0$ Se cumple $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ $\forall x \in (a-c, a+c)$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$ $\forall x \in (a-c, a+c)$

Dem: $\Rightarrow$) Suponemos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Entonces por definicion de series tenemos $f(x) = \lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x)$ (limite de sumas parciales).

Luego, $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - T_{n,a}(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x) - \underline{\lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x)} = f(x) - f(x) = 0$

$\Leftarrow$) Si $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$ $\forall x \in (a-c, a+c)$ entonces $\lim_{n\to\infty} T_{n,a}(x) = \lim_{n\to\infty} (f(x) - R_{n,a}(x)) = \lim_{n\to\infty} f(x) - \lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = f(x)$. Luego por def. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$

Teorema: Sea f una funcion tal que existen $f^{(n)}(a)$ $\forall n \geq 0$ se cumple $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ $\forall x \in (a-c, a+c)$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} R_{n,a} = 0$ $\forall x \in (a-c, a+c)$

Teorema: (Formula de Lagrange para el Resto)

Sea f tal que $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n+1)}$ en un intervalo abierto I y sea $a \in I$. Entonces, para cada $x \in I$ existe t entre a y x $\begin{pmatrix} t \in (x, a) \text{ si } x<a \\ t \in (a, x) \text{ si } x>a \end{pmatrix}$

tal que $R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Ejemplo: Probar $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Ya vimos que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es la ST de $f(x) = e^x$ centrada en $a=0$ y su radio de convergencia es $R = \infty$.
- Para probar que la igualdad vale, por el teorema anterior basta ver que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Por la formula de Lagrange $R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{e^t}{(n+1)!}x^{n+1}$ (para algun t entre 0 y x)

Si $0 < x \Rightarrow 0 < t < x = |x|$
$x < 0 \Rightarrow x < t < 0 < |x|$ $\}$ $t < |x|$ siempre

$0 \leq |R_{n,a}(x)| = \frac{e^t |x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq e^{|x|} \frac{|x|}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Entonces, por Sandwich tenemos que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$

y por lo tanto vale $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Ejemplo: Dada la S.T de $\operatorname{sen}(x)$ alrededor de $a=0$ y probar que coincide con f

- Para hallar la ST debemos calcular $f^{(n)}(0)$ $\forall n \geq 0$

$n=0$ $f(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow f(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$

$n=1$ $f'(x) = \cos(x) \longrightarrow f'(0) = \cos(0) = 1$

$n=2$ $f''(x) = -\operatorname{sen}(x) \longrightarrow f''(0) = -\operatorname{sen}(0) = 0$

$n=3$ $f'''(x) = -\cos(x) \longrightarrow f'''(0) = -\cos(0) = -1$

$n=4$ $f''''(x) = \operatorname{sen}(x) \longrightarrow f''''(0) = \operatorname{sen}(0) = 0$

y luego se va repitiendo lo anterior. En general tenemos que $f^{(2n)}(0) = 0$ y $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$ $\forall n \geq 0$

- Luego la ST de $\operatorname{sen}(x)$ centrada en $a=0$ es $f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$

$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

- Veamos ahora que coincide con f $\forall x \in \mathbb{R}$. Debemos ver que $\lim_{n\to\infty} R_{n,0}(x) = 0$ donde por Lagrange

$R_{n,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}$ para algun t entre 0 y x. Como $f^{(n+1)}(t) = \pm\operatorname{sen}(t)$ ó $\pm\cos(t)$, en cualquier caso siempre vale

$|f^{(n+1)}(t)| \leq 1$. Luego $0 \leq |R_{n,0}(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Ejemplo: Estimar el error que se comete si se aproxima $\operatorname{sen}(0.2)$ por el valor en $x=0.2$ de su polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$, o sea $T_{7,0}(0.2)$

- Queremos estimar $|\operatorname{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)|$. Sabemos $\operatorname{sen}(x) = T_{7,0}(x) + R_{7,0}(x)$. Lo que tenemos que estimar es $|\operatorname{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)| = |R_{7,0}(0.2)|$

Como $R_{7,0}(0.2) = \frac{\operatorname{sen}^{(8)}(t)}{8!}(0.2)^8$ para algun $t \in (0, 0.2)$. Como $|\operatorname{sen}^{(8)}(t)| \leq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces $|R_{7,0}(0.2)| = \frac{|\operatorname{sen}^{(8)}(t)}{8!}(0.2)^8 \leq \frac{1}{8!}(0.2)^8 = \frac{1}{8!\,5^8}$.

Conclusion: el error que se comete al aproximar $\operatorname{sen}(0.2)$ por $T_{7,0}(0.2)$ es menor que $\frac{1}{8!\,5^8} \approx 6.3 \times 10^{-11}$

09/10/24

Repaso:

Dada f y $a \in \mathbb{R}$ podemos calcular la S.T centrada en a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$

Pregunta: ¿f = S.T?

- Polinomio de Taylor de f de orden n centrado en a $\quad T_{n,a}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$
- Resto de Taylor de orden n y centrado en a $\quad R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$
- Formula de lagrange: $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algun t entre x y a

Respuesta f = S.T $\iff \displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$

Aplicaciones del Polinomio de Taylor

- Lo usamos para aproximar una funcion" $|f(x) - T_{n,a}(x)| = |R_{n,a}(x)| < \varepsilon_{TOL}$ Hay 3 datos que pueden variar n, x, ε_{TOL}
- Siempre dos datos seran conocidos y el tercero restante debo averguarlo
- Ejemplo clase pasada. Estimar el error que se comete si tomo $T_{7,0}(0.2)$ como valor de $sen(0.2)$

  Dados $x=0.2$ y $n=7$ calculamos $\varepsilon_{TOL} = \dfrac{1}{8!\,5^8}$
- Veamos un ejemplo que dado n y ε_{TOL} hay que encontrar x
- Encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$ de $f(x) = sen(x)$ aproxima a $sen(x)$ con un error menos que 10^{-5}
- Buscamos $x \in \mathbb{R}$ tal que $|sen(x) - T_{7,0}(x)| < 10^{-5}$. Como $|f(x) - T_{7,0}(x)| = |R_{7,0}(x)|$ basta hallar los $x \in \mathbb{R}$ tal que $R_{7,0}(x) < 10^{-5}$.

  Ahora $|R_{n,a}(x)| \underset{\substack{\text{para algun} \\ t \text{ entre } 0 \text{ y } x}}{=} \dfrac{sen^{(8)} t}{8!}|x|^8 \leq \dfrac{1}{8!}|x|^8 < 10^{-5}$. Luego basta considerar $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x|^8 < 10^{-5} \cdot 8!$. Osea todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < \left(\dfrac{8!}{10^5}\right)^{\frac{1}{8}}$
- Encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$ de $f(x) = sen(x)$ aproxima a $sen(x)$ con un error menor que 10^{-5}
- Veamos un ejemplo de dados x y ε_{TOL} hallar n

Ejemplo: ¿Que grado n es necesario si queremos tomar $T_{n,0}(0.2)$ como valor de $sen(0.2)$ y equivocarnos por menos de 10^{-4}?

Debemos hallar n tal que $|sen(0.2) - T_{n,0}(0.2)| = |R_{n,0}(0.2)| < 10^{-4}$. Como $R_{n,0} = \dfrac{sen^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(0.2)^{n+1}$ para algun t entre 0 y 0.2 $t \in (0, 0.2)$ $\quad (0.2)^{n+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$

$\leq \dfrac{1}{(n+1)!}(0.2)^{n+1}$. Basta tomar n tal que $\dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{1}{5^{n+1}} < 10^{-4}$ o equivalentemente $10^4 < (n+1)! \cdot 5^{n+1}$

- Si $n=1 \to 2!\,5^2 = 2 \cdot 25 = 50$
- Si $n=2 \to 3!\,5^3 = 6 \cdot 125 = 750$
- Si $n=3 \to 4!\,5^4 = 24 \cdot 625 = 15.000$

$\therefore$ Basta tomar $n=3$. En efecto $T_{3,0}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$ (ver pag 62). $T_{3,0}(0.2) = 0.2 - \dfrac{(0.2)^3}{3!} \approx 0.1986666\ldots7$ mientras $sen(0.2) = 0.1986693$

Calculo Vectorial

Def: $\mathbb{R}^n = \{A = (a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}$. En $\mathbb{R}^n$ se definen 2 operaciones: Suma: $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$. Mult. por escalar: para $r \in \mathbb{R}$ $r(a_1, \ldots, a_n) = (ra_1, \ldots, ra_n)$

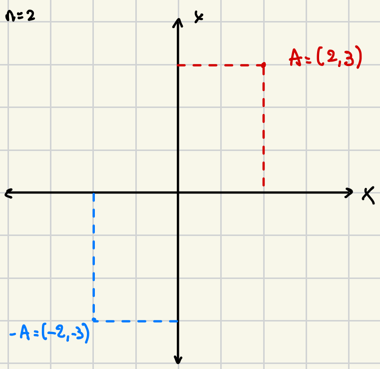
Con estas operaciones, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sus elementos se llaman vectores (puntos)

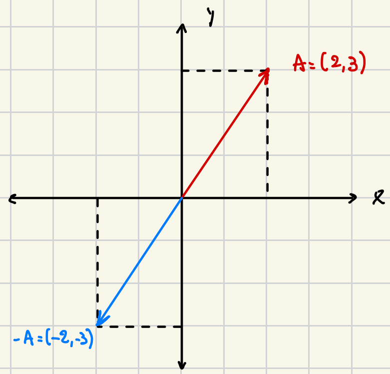
Obs: ① Denotamos $-A = (-1)A$ y definimos la resta $B - A = B + (-A)$

② A veces denotamos al vector nulo simplemente por $0 = (0, 0, 0, \ldots, 0)$

- Representacion geometrica de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

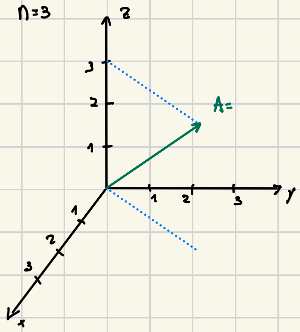
$n=2$



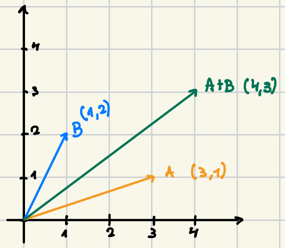


Como una flecha desde el origen (0,0) hasta el pto. correspondiente. Cada vector tiene longitud, direccion y sentido

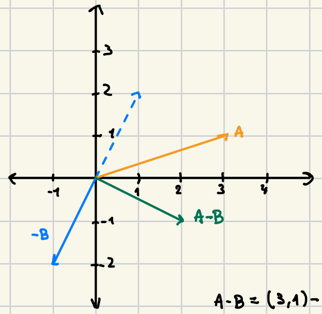
$n=3$



Regla del Paralelogramo



$A+B=(3,1)+(1,2)=(4,3)$



$A-B=(3,1)-(1,2)=(2,-1)$

16/10/24

Def: dados $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $A = (a_1, \dots, a_n)$, $B = (b_1, \dots, b_n)$ el producto escalar (punto ó interno) es el numero $\langle A \cdot B \rangle = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$

Ejemplo: Calcular el producto escalar entre $A = (1, -2, 3)$ y $B = (5, \frac{1}{2}, 0)$ $= 1 \cdot 5 + (-2) \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 0 = 4$

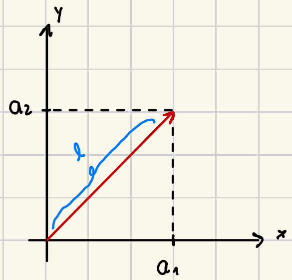
Propiedades del producto escalar: Dadas $A, B, C \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ las siguientes son validas

1. $\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle$
2. $\langle A+B, C \rangle = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle$
3. $r \langle A, B \rangle = \langle rA, B \rangle = \langle A, rB \rangle$
4. $\langle A, A \rangle \geq 0$
5. $\langle A, A \rangle = 0 \iff A = 0 = (0, \dots, 0)$

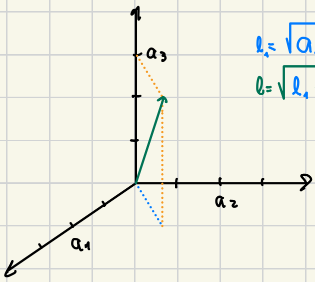
Def: Definimos la norma de un vector $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ como $\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = \sqrt{\langle A, A \rangle}$

Obs: Si $n = 1$ o sea $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}$ $\|A\| = |A|$

Graficamente en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, $\|A\|$ es la longitud del vector que representa a A



$A = (a_1, a_2)$
$l = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \|A\|$

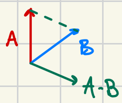


$l_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
$l = \sqrt{l_1 + a_3^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Obs: Notar que $\|A\|$ es la distancia del punto A al origen, o sea $\text{dist}(A, 0) = \|A\|$

Def: la distancia entre dos vectores A y $B \in \mathbb{R}^n$ es $d(A, B) = \|A - B\|$

- Geometricamente en $\mathbb{R}^4$ $\|A - B\|$ es igual a la longitud del vector $A - B$



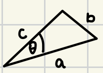
Ejemplo: La distancia entre $A = (1, 0, 2)$ y $B = (1, 3, -1)$ es

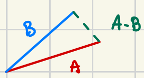
$$\begin{aligned} d(A, B) &= \|A - B\| \\ &= \|(1, 0, 2) - (1, 3, -1)\| \\ &= \|(0, -3, 3)\| \\ &= \sqrt{0^2 + (-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18} \end{aligned}$$

Propiedades de la norma de un vector: Sean $A, B \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$. Entonces

1. $\|A\| \geq 0$ y $\|A\| = 0 \iff (0, \dots, 0)$
2. $\|rA\| = |r| \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (desigualdad triangular)
4. $\langle A, B \rangle = \|A\| \|B\| \cos(\theta)$, donde $0 \leq \theta \leq \pi$ es el angulo entre A y B
5. $|\langle A, B \rangle| \leq \|A\| \|B\|$ (desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Obs: notemos que 4 es consecuencia del teorema del coseno





$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2 \|A\| \|B\| \cdot \cos(\theta)$ I

$$\begin{aligned} \|A - B\|^2 &= \langle A - B, A - B \rangle \\ &= \langle A, A \rangle + \langle A, -B \rangle + \langle -B, A \rangle + \langle -B, -B \rangle \\ &= \langle A, A \rangle - \langle A, B \rangle - \langle B, A \rangle + \langle B, B \rangle \\ &= \langle A, A \rangle - \langle A, B \rangle - \langle A, B \rangle + \langle B, B \rangle \\ &= \|A\|^2 - 2 \langle A, B \rangle + \|B\|^2 \quad \text{II} \end{aligned}$$

Def: dados $A, B \in \mathbb{R}^n$ con $A \neq 0 \neq B$ decimos que A y B son:

(i) Ortogonales (perpendiculares) si $\langle A, B \rangle = 0$

(ii) Paralelos si $A = rB$ para algun $r \in \mathbb{R}$

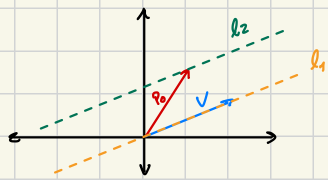
Obs: esta definicion coincide con nuestra nocion usual, esto es

- Si A y B son perpendiculares entonces el angulo entre A y B es $\frac{\pi}{2}$. Luego por propiedad (4) $\langle A, B \rangle = \|A\| \|B\| \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
- Si A y B son paralelos, transladandolos al origen para que comiencen en un mismo punto, tenemos que estan con una misma recta, osea uno es multiplo de otro. $B = rA$ $r > 1$

Rectas en $\mathbb{R}^n$ ($n = 2$ ó 3): Sean $P_0 \in \mathbb{R}^n$ y $V \in \mathbb{R}^n$ con $V \neq 0$

- Los puntos tV, con $t \in \mathbb{R}$, describen la recta l_1 que tiene direccion V y pasa por el origen

Los puntos $P_0 + tV$ con $t \in \mathbb{R}$ describen la recta l_2 que tiene direccion V y pasa por P_0

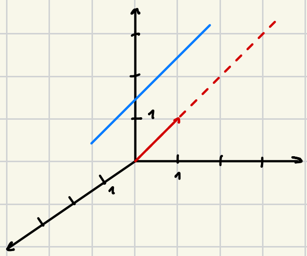


Def: dados $P_0 \in \mathbb{R}^n$ y $V \in \mathbb{R}^n$ con $V \neq 0$ la recta l que pasa por el punto P_0 y tiene direccion V es el conjunto de todos los puntos $X = (x, y)$ (ó $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$) tales que $X = P_0 + tV$, con $t \in \mathbb{R}$ (Ecuacion Vectorial de la Recta)

Osea si $n = 2$ $l = \{ X \in \mathbb{R}^2 : X = P_0 + tV, \text{ con } t \in \mathbb{R} \}$

si $n = 3$ $l = \{ X \in \mathbb{R}^3 : X = P_0 + tV, \text{ con } t \in \mathbb{R} \}$

Ejemplo: Dar la ecuacion vectorial de la recta que pasa $P_0 = (1, 1, 3)$ y tiene direccion $V = (0, 1, 1)$



La ec vectorial es $(x, y, z) = (1, 1, 3) + t(0, 1, 1)$ con $t \in \mathbb{R}$

¿Pertenecen los puntos $P_1 = (0, 0, 2)$ y $P_2 = (1, -1, -1)$ a la recta?

Un punto $P = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in l$ si existe $\bar{t} \in \mathbb{R}$ tal que $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (1, 1, 3) + \bar{t}(0, 1, 1) = (1, 1 + \bar{t}, 3 + \bar{t})$

Equivalentemente, si existe $\bar{t}$ tal que $\bar{x} = 1$, $\bar{y} = 1 + \bar{t}$, $\bar{z} = 3 + \bar{t}$

Por lo tanto $P_1 = (0, 0, 2)$ no pertenece a la recta ya que $\bar{x} = 0 \neq 1$.

Veamos si $P_2 \in l$ (i) $1 = 1$ (ii) $1 = 1 + \bar{t} \Rightarrow \bar{t} = 0$ (iii) $-1 = 3 + \bar{t} = 3$ ABS $\therefore P_2 \notin l$.

Def: decimos que dos rectas son paralelas/perpendiculares si sus vectores direccion son paralelos/perpendiculares

$l_1 = P_1 + tV_1$, $t \in \mathbb{R}$

$l_2 = P_2 + tV_2$, $t \in \mathbb{R}$

- l_1 y l_2 son paralelos si $V_1 = rV_2$ para algun $r \in \mathbb{R}$
- l_1 y l_2 son perpendiculares si $\langle V_1, V_2 \rangle = 0$

18/10/24

Planos en $\mathbb{R}^3$: Sean V y W no nulos y no paralelos en $\mathbb{R}^3$

- Si consideramos los multiples de V, $(tV,\ t\in\mathbb{R})$ obtenemos una recta ℓ_1 que tiene direccion V y pasa por el origen
- Si consideramos tW, con $t\in\mathbb{R}$, obtenemos una recta ℓ_2 que tiene direccion V_2 y pasa por el origen

Si sumo cada punto de ℓ_1 con un punto de ℓ_2 vamos a obtener un plano que esta generado por V y W y pasa por el origen

$V=(1,0,0)$ $\qquad \mathbb{R}^2 = \{t(1,0,0)+r(0,1,0)$ con $r, t\in\mathbb{R}$

$W=(0,1,0)$

Def. Dados $V, W\in\mathbb{R}^3$ con $V\neq 0\neq W$ y $V\neq sW$ $\forall s\in\mathbb{R}$ y dado $P\in\mathbb{R}^3$ decimos que $X=P+tV+rW$ con $t,r\in\mathbb{R}$ es la ecuacion vectorial del plano generado por V, W y que pasa por el punto P.

Ejemplo: Dar la ecuacion del plano generado por $(1,2,2)$ y $(2,5,0)$ y que pasa por el punto $(1,2,4)$

La ecuacion del plano es $X=(1,2,4)+t(1,2,2)+r(2,5,0)$ con $t,r\in\mathbb{R}$

¿El punto $P_0=(0,1,0)$ pertenece al plano?

P_0 esta en el plano si existe t y r tales que $(0,1,0)=(1+t+2r,\ 2+2t+5r,\ 4+2t)$

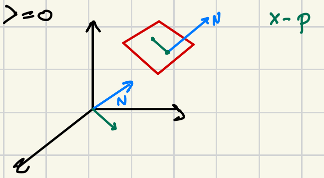
$0=1+t+2r \longrightarrow 0=1-2+2\cdot\frac{3}{5} \longrightarrow 0=-1+\frac{6}{5} \longrightarrow 5=6$ Abs

$1=2+2t+5r \longrightarrow 1=2+2\cdot(-2)+5r \longrightarrow 3=5r \longrightarrow \frac{3}{5}=r$ $\qquad \therefore P_0$ no pertenece al plano

$0=4+2t \longrightarrow -4=2t \longrightarrow -2=t$

Obs: un plano tambien queda determinado si damos un vector N normal (perpendicular) a dicho plano y un punto P_0 por el que pasa

Si X es otro punto en el plano, $X-P$ es perpendicular a N, o sea $\langle X-P,\ N\rangle=0$



Def. el plano normal a N y que pasa por P_0 es conjunto de puntos $X\in\mathbb{R}^3$ de tq $X-P_0$ es perpendicular a N, es decir $\langle X-P_0, N\rangle=0 \longrightarrow$ ecuacion del plano normal

Obs sean $X=(x,y,z)$, $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ y $N=(n_1,n_2,n_3)$

$\langle (x,y,z)-(x_0,y_0,z_0),\ (n_1,n_2,n_3)\rangle=0 \iff \langle (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0),\ (n_1,n_2,n_3)\rangle=0$

$n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$ $\qquad$ Es decir $n_1x+n_2y+n_3z=d$ (Ecuacion Cartesiana del plano)

$\iff n_1x+n_2y+n_3z=n_1x_0+n_2y_0+n_3z_0$

Ejemplo: Dar la ecuacion normal y cartesiana del plano normal a $N=(3,2,1)$ y que pasa por $(2,-1,1)$

La ecuacion normal del plano es

$\langle (x,y,z)-(2,-1,1),\ (3,2,1)\rangle=0$

La ecuacion cartesiana del plano es

$3x+2y+z=\langle (3,2,1),(2,-1,1)\rangle$

$=3\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot 1$

$=6-2+1$

$3x+2y+z=5$

¿Pertenecen $(0,0,2)$ y $(0,0,5)$ al plano?

$3\cdot 0+2\cdot 0+2=5$ Abs $\therefore (0,0,2)$ no pertenece

$3\cdot 0+2\cdot 0+5=5$ $\therefore (0,0,5)$ pertenece

Def: dados dos vectores $V=(v_1,v_2,v_3)$ y $W=(w_1,w_2,w_3)$ definimos el producto vectorial como $V\times W=(v_2w_3-w_2v_3,\ w_1v_3-v_1w_3,\ v_1w_2-w_1v_2)$ $\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{pmatrix}$ $\quad + \quad - \quad +$

El vector $V\times W$ es perpendicular a V y W y por lo tanto al plano generado por V y W (siempre que V y W sean ambos no nulos y no paralelos, porque si $V=0$, o $W=0$, o son paralelos $V\times W=(0,0,0)$)

¿Como pasar de la ecuacion vectorial del plano a la ecuacion normal del plano?

La ecuacion vectorial del plano que esta generado por V y W y pasa por P es $X=P+tV+rW$, con $t,r\in\mathbb{R}$

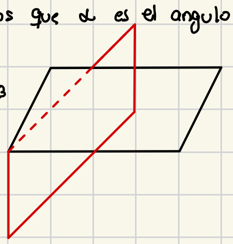
Como el vector $V\times W$ es ortogonal (perpendicular) a V y W y por lo tanto a cualquier combinacion lineal de estos, entonces $\langle X-P,\ V\times W\rangle=0$ es la ecuacion normal del plano

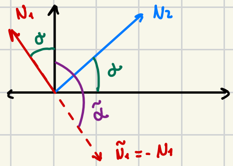
Ejemplo: Dar la ecuacion normal del plano $X=(2,1,0)+t(1,1,2)+r(0,2,3)$

Definimos $N=(1,1,2)\times(0,2,3)=(-1,-3,2)$ $\qquad$ CALCULOS AUX $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$

Luego la ec normal del plano es $\langle (x,y,z)-(2,1,0),\ (-1,-3,2)\rangle=0$

Def : decimos que α es el angulo entre dos planos si α es el angulo entre sus vectores normales (perpendiculares)

En $\mathbb{R}^3$  Plano π_2

En $\mathbb{R}^2$ 

$\langle N_1, N_2 \rangle = \|N_1\| \|N_2\| \cos(\alpha) \longrightarrow \cos(\alpha) \dfrac{|\langle N_1, N_2 \rangle|}{\|N_1\| \|N_2\|}$

Segun el sentido de N_1 se obtendra alguno de los dos angulos α o $\tilde{\alpha}$ (α y $\tilde{\alpha}$ son suplementarios $\pi = \alpha + \tilde{\alpha}$) Al considerar $|\langle N_1, N_2 \rangle|$ siempre vamos a estar considerando α entre 0 y $\pi/2$

Rec: $\cos(x) = -\cos(x+\pi)$. Sabemos $\tilde{\alpha} = \pi - \alpha = \pi + (-\alpha)$. $\cos(\tilde{\alpha}) = -\cos(\pi + (-\alpha)) = -\cos(-\alpha) = -\cos(\alpha)$

23/10/24

Funciones vectoriales

Def: dados $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i=1, n$, llamamos función vectorial a la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$. Las f_i se llaman funciones coordenadas. El dominio de f es $Dom(f) = \bigcap_{i=1}^{n} Dom(f_i)$

Ejemplo: ① Si $f(t) = (t+2, t^3)$ entonces como $Dom(f_1) = \mathbb{R} = Dom(f_2)$ entonces $Dom(f) = \mathbb{R}$

② $g(t) = (\sqrt{t}, \frac{1}{t}, sen(t))$. Tenemos que $Dom(f_1) = [0, \infty) = \mathbb{R}_{\geq 0}$

$Dom(f_2) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$

$Dom(f_3) = \mathbb{R}$

$Dom(f) = (0, \infty)$

Def: Si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, la imagen de f es conjunto de $\mathbb{R}^n$ definido por $Im(f) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \exists t \in Dom(f) \text{ con } f(t) = (y_1, \dots, y_n)\}$

Si $n=2$ o $n=3$ decimos que la imagen es una "curva" en el plano/espacio

Ejemplos: Dar el dominio e imagen:

① $f(t) = (t, 2-t, 3+2t)$

- Como $Dom\, f_1 = Dom\, f_2 = Dom\, f_3 = \mathbb{R}$ tenemos que $Dom(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f)$ es la recta en el espacio que pasa por el punto $(0, 2, 3)$ y tiene dirección $(1, -1, 2)$
  $Im(f) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R} : (y_1, y_2, y_3) = (0, 2, 3) + t(1, -1, 2) \text{ para } t \in \mathbb{R}\}$

② $g(t) = (cos(t), sen(t))$

- Como $Dom(g_1) = \mathbb{R} = Dom(g_2) \implies Dom(g) = \mathbb{R}$
- La imagen de la función g está contenida en el círculo de radio 1 y centro 0 pues $cos^2(t) + sen^2(t) = 1$. Se puede ver de hecho que la imagen es ese círculo. $Im(g) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R} : y_1^2 + y_2^2 = 1\}$

③ Si $\gamma(t) = (sen(t), cos(t))$

$Dom(\gamma) = \mathbb{R}$

$Im(\gamma) = Im(g)$ pero recorro el círculo en sentido antihorario

④ $\beta(t) = (cos(t), sen(t), 2)$ $\beta: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

- Como $Dom(\beta_1) = Dom(\beta_2) = Dom(\beta_3) = \mathbb{R} \implies Dom(\beta) = \mathbb{R}$
- La Imagen de β es el círculo de radio 1 y centro 0 en el plano (y_1, y_2) y con altura y_3. $Im(\beta) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_2^2 = 1 \wedge y_3 = 2\}$

⑤ Si $\alpha(t) = (cos(t), sen(t), t)$

- $Dom(\alpha_1) = \mathbb{R} = Dom(\alpha_2) = Dom(\alpha_3) \implies Dom(\alpha) = \mathbb{R}$
- La imagen de α es una "hélice" en el espacio (curva que se enrosca en el cilindro de radio 1)

Def: Dados $a \in \mathbb{R}$ y $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, definimos el límite de F en $t=a$ como $\lim_{t \to a} f(t) \doteq (\lim_{t \to a} f_1, \dots, \lim_{t \to a} f_n)$. Siempre que $\lim_{t \to a} f_i(t)$ existan $\forall i \in 1, \dots, n$

Def: Si $f: Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in Dom(f)$ decimos que f es continua en a si $\lim_{t \to a} f_i(t) = f_i(a)$ $\forall i = 1, \dots, n$. O sea, f es continua en a $\iff$ f_i es continua a $\forall i, 1, \dots, n$

Ejemplos:

① Sea $\gamma(t) = (3, sen^2(t), 2t+1)$

$$\lim_{t \to 0} \gamma(t) = (\lim_{t \to 0} 3, \lim_{t \to 0} sen^2(t), \lim_{t \to 0} 2t+1) = (3, 0, 1) = \gamma(0) \therefore \gamma \text{ es continua en } t=0$$

② Sea $\beta(t) = (\frac{1}{t-1}, \sqrt{t})$

Por def $\lim_{t \to 1} \beta(t) = (\lim_{t \to 1} \frac{1}{t-1}, \lim_{t \to 1} \sqrt{t})$

$Dom(\beta) = Dom(\beta_1) \cap Dom(\beta_2)$

$\mathbb{R} - \{1\} \cap \mathbb{R}_{\geq 0}$

$= \mathbb{R}_{\geq 0} - \{1\} = [0, 1) \cup (1, \infty)$

¿Existe límite de β en $t=1$?

Def: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $a \in Dom(f)$. Definimos la derivada de f en $t=a$ como $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ siempre que este límite exista.

Obs: $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Es decir $f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_n'(a))$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1(a+h), \dots, f_n(a+h)) - (f_1(a), \dots, f_n(a))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h}, \dots, \frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} \right)$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(a+h)-f_1(a)}{h}, \dots, \lim_{h\to 0} \frac{f_n(a+h)-f_n(a)}{h} \right) = (f_1'(a), \dots, f_n'(a))$$

Ejemplo: Sea $\gamma(t) = (\cos(t), \text{sen}(t), t)$. Calcular $\gamma'(0)$

$\gamma'(t) = (-\text{sen}(t), \cos(t), 1)$ $\quad \gamma'(0) = (0, 1, 1)$

Reglas de derivación: Sean f y h funciones vectoriales y r función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces

(i) $(f(t) \pm g(t))' = f'(t) \pm g'(t)$

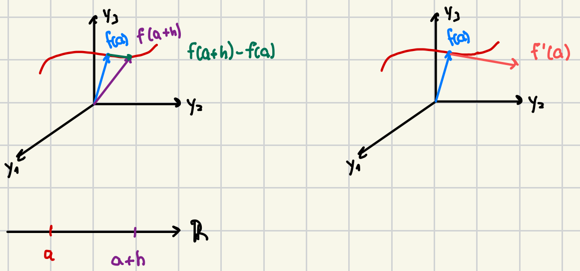
(ii) $(k f(t))' = k f'(t)$

(iii) $(r(t) f(t))' = r'(t) f(t) + r(t) f'(t)$

(iv) $\langle f(t), g(t) \rangle' = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$

(v) $f(r(t))' = f'(r(t)) \cdot r'(t)$

Interpretación geométrica de la derivada



Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

- La imagen de f es una curva en el espacio
- $f(t)$ = posición en el tiempo
- $f(a+h) - f(a)$: vector que va de $f(a)$ a $f(a+h)$
- $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ vector paralelo al anterior
- Cuando h se aproxima a 0, $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se aproxima a un vector tangente a la curva de f en el plano $f(a)$ ($f'(a)$ podemos interpretar como la velocidad en $t=a$ y $\|f'(a)\|$ como la rapidez.

Obs: usualmente decimos que $f(a)$ es el vector posición y $f'(a)$ es vector tangente

Ejemplo: $f(t) = (\cos(t), \text{sen}(t))$

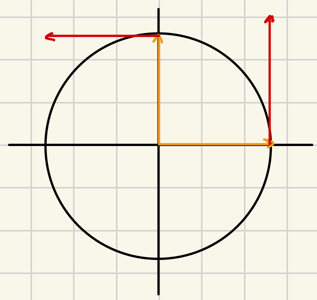
$f'(\frac{\pi}{2}) = (-1, 0)$ $\quad f(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$

- Vector posición en $a=0$

$f(0) = (\cos(0), \text{sen}(0)) = (1, 0)$

- Vector tangente

$f'(0) = (-\text{sen}(0), \cos(0)) = (0, 1)$



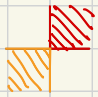
25/10/24

Funciones de varias variables

Def: una funcion f de n variables es una regla que asigna a cada n-tupla $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$ un unico numero real $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ un unico numero $f(\bar{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

- el dominio $Dom(f)$ subconjunto de $\mathbb{R}^n$ dado por $Dom(f) = \{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : f(\bar{x}) \text{ esta bien definida} \}$
- la imagen $Im(f)$ subconjunto de $\mathbb{R}$ dado po $Im(f) = \{ y \in \mathbb{R} : \bar{x} \in Dom(f) \text{ con } y = f(\bar{x}) \}$
- el grafico $G(f)$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por $G(f) = \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_1, \dots, x_n) \in Dom(f),\ x_{n+1} \in Im(f) \}$
  $= \{ (\bar{x}, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : \bar{x} \in Dom(f) \}$
- Notar que solo podemos dibujar el grafico cuando $n = 1$ ó $n = 2$

Ejemplo: Sea $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$ $(n=2)$



$Dom\ f = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0 \} \cup \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \wedge x \leq 0 \}$

$Im\ f = [0, \infty)$. En efecto si elegimos $x_2 = 1$ tenemos que $f(x_1, 1) = \sqrt{x_1}$ y ya que sabemos Analisis Matematico I que $\sqrt{t}$ es sobreyectiva de $[0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ $\therefore f(x_1, 1)$ tambien.

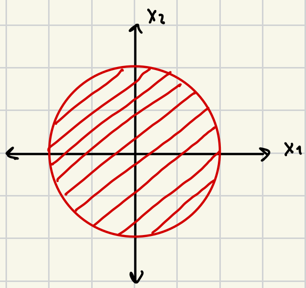
Otra forma: dado $y \geq 0$ veamos que existen $(x_1, x_2) \in Dom(f)$ tal que $f(x_1, x_2) = y$. Basta tomar $x_1 = x_2 = y$, luego $f(x_1, x_2) = f(y, y) = \sqrt{yy} = \sqrt{y^2} = y$

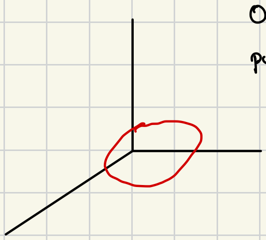
Ejemplo: Sea $f(x_1, x_2) = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2}$

$Dom(f) = \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0 \}$
$= \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 3^2 \}$

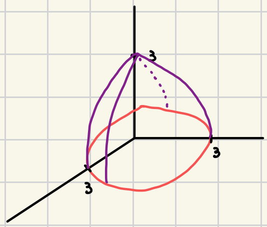
$Im(f) = [0, 3]$. En efecto, si hacemos $x_2 = 0$ $f(x_1, 0) = \sqrt{9 - x_1^2}$ que sabemos que es sobreyectiva $[-3, 3] \longrightarrow [0, 3]$

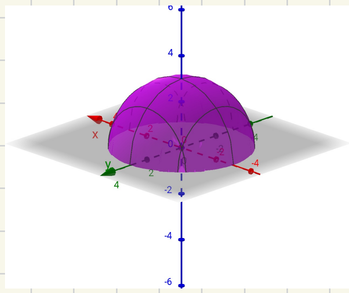
Otra forma: dado $0 \leq y \leq 3$, basta tomar $(x_1, x_2) = ((9 - y^2)^{\frac{1}{2}}, 0)$ pues $f((9 - y^2)^{\frac{1}{2}}, 0) = \sqrt{9 - (9 - y^2)} = \sqrt{9 - 9 + y^2} = \sqrt{y^2} = y$





$G(f) = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 3^2 \wedge x_3 = \sqrt{9 - x_1^2 - x_2^2} \}$
$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R} : x_1^2 + x_2^2 \leq 3^2 \wedge \underbrace{\underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3^2}_{\text{esfera de centro } (0,0,0) \text{ y } r=3} \wedge \underbrace{x_3 \geq 0}_{\text{no neg.}}}_{\text{hemisferio sup. de la esfera}} \}$





Limite de funciones de varias variables

Def: dado $r>0$ y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$, llamamos bola abierta de centro $\bar{a}$ y radio r al conjunto $B(\bar{a},r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{a}\| < r\}$

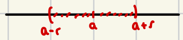
Obs: Si escribimos $\bar{x}=(x_1,\dots,x_n)$, $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)$, $B(\bar{a},r) = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : \sqrt{(x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2} < r\}$

$$= \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : (x_1-a_1)^2+\dots+(x_n-a_n)^2 < r^2\}$$

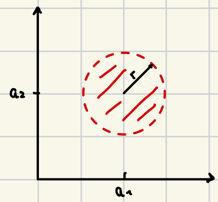
- Si $n=1$, $B(\bar{a},r)$ es un intervalo centrado en $\bar{a}$ y de "radio" r

$$-r < x_1 - a_1 < r$$

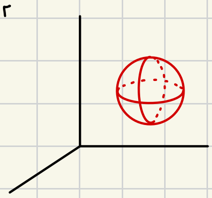
$$a-r < x_1 < a+r$$



- Si $n=2$, $B(\bar{a},r)$ es un disco abierto centrado en $\bar{a}$ y de radio r



- Si $n=3$, $B=(\bar{a},r)$ es una bola centrada en $\bar{a}$ y de radio r



Def (Limite): Sea $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ y $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{Dom}(f)$ incluye puntos arbitrariamente cercanos a $\bar{a}$.
Decimos que $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = L$ $\left(\text{ó} \lim_{(x_1,\dots,x_n)\to(a_1,\dots,a_n)} f(x_1,\dots,x_n) = L \right)$ Si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\bar{x} \in \text{Dom}(f) \cap B(\bar{a},\delta) \Rightarrow |f(\bar{x})-L| < \varepsilon$

(si $\bar{x} \in \text{Dom}(f)$ queda $\|\bar{x}-\bar{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\bar{x})-L|<\varepsilon$). Esto significa que si nos acercamos por cualquier lado el punto $\bar{a}$, el valor de f se acerca a L

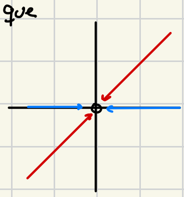
Obs: la definicion establece que la distancia (en $\mathbb{R}$) entre $f(\bar{x})$ y L se puede hacer arbitrariamente pequeña haciendo que la distancia (en $\mathbb{R}^n$) entre $\bar{x}$ y $\bar{a}$ sea suficientemente pequeña. Sin embargo NO hay referencia a la direccion o modulo de aproximacion. Por lo tanto, dos maneras distintas de aproximarnos al punto $\bar{a}$ en las cuales la funcion tiene limites distintos, entonces esto nos dice que $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x})$ NO EXISTE.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$. Demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ No existe $\begin{pmatrix} \bar{a}=(0,0) \\ \bar{x}=(x,y) \end{pmatrix}$

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

- Si nos acercamos al $(0,0)$ por los puntos del eje x, o sea si $(x,y)=(x,0) \longrightarrow (0,0)$ como $f(x,0)=0$ tenemos que

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$



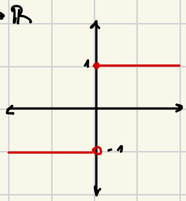
- Si nos acercamos al $(0,0)$ por la recta $y=x$, o sea $(x,y)=(x,x) \longrightarrow (0,0)$ Como $f(x,x) = \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

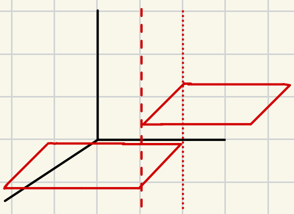
Def (Continuidad): Sea $f: \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$. Decimos que f es continua en $\bar{a}$ si: (i) $\bar{a} \in \text{Dom}(f)$
(ii) $\lim_{\bar{x}\to\bar{a}} f(\bar{x}) = f(\bar{a})$

Decimos que f es continua si es continua $\forall \bar{a} \in \text{Dom}(f)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$f(x,y)$



01/11/24

Derivadas Parciales

Intro: Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Si fijamos b, tenemos $g(x)=f(x,b)$ es una función de una sola variable (la x) entonces tiene sentido considerar su derivada en $x=a$. $g'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}=\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=f_x(a,b)}$ Derivada parcial de f conrrespecto a la variable en el punto $(a,6)$

Def: Sea $f:Dom(f)\subseteq\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$. $\bar{a}=(a_1,\dots,a_n)$ y sup $B(a,r)\subset Dom(f)$ para algun $r>0$. Definimos la derivada parcial de f con respecto a x_j en el punto $\bar{a}$ como $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1,\dots,a_n)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,\dots,a_{j-1},a_j+h,a_{j+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(\bar{a}+he_j)-f(a)}{h}$ siempre que este límite exista.

Obs: para calcular la derivada parcial de f respecto a x_j, consideramos todas la variables x_k con $k\neq j$ como constante y derivamos con respecto a x_j

Obs: Si $n=2$ escribimos f_x y f_y en lugar de f_{x_1} y f_{x_2}

Si $n=3$ escribimos f_x, f_y y f_z en lugar de f_{x_1}, f_{x_2} y f_{x_3}

Ejemplo: Sea $f(x,y,z)=\frac{xz}{y+z}$ Calcular sus derivadas parciales

$f_x(x,y,z)=\frac{z}{y+z}$

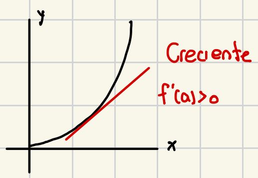
$f_y(x,y,z)=\frac{xz}{(y+z)^2}$

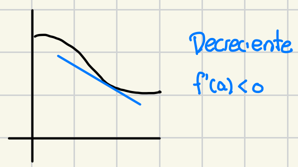
$f_z(x,y,z)=\frac{x(y+z)-xz}{(y+z)^2}=\frac{xy}{(y+z)^2}$

Obs: Sabemos que si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ derivable en $a \Rightarrow f$ continua en a. Sin embargo si $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, $n\geq 2$, la anterior no vale. Pueden existir las derivadas parciales de f en $\bar{a}$ pero f puede ser discontinua en $\bar{a}$. Por ejemplo, sea $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ Tenemos que: $f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\frac{0-0}{h}$

De manera analoga $f_y(0,0)=0$. Por lo tanto existen ambas derivadas parciales en $(0,0)$ sin embargo f NO es continua en $(0,0)$ ya que nisiquiera existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ (ver pag 89)

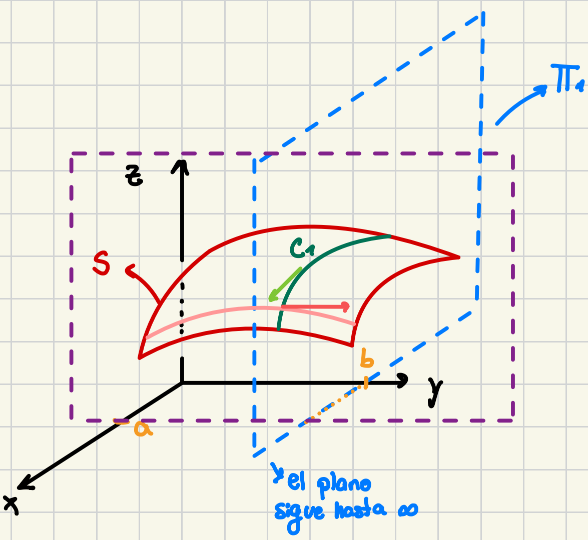
Interpretacion Geometrica de las derivadas parciales. Si $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, la derivada $f'(a)$ nos da informacion sobre la tasa de crecimiento de f en a.





Para $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ la derivada parcial $f_{x_j}(\bar{a})$ da la tasa de crecimiento de f en $\bar{a}$ cuando nos movemos dejando todas las coordenadas fijas salvo la j-esima

- Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ y sea S el grafico de f, o sea $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: (x,y)\in Dom(f),\ z=f(x,y)\}$
- Sea Π_1 el plano $y=b$ y $C_1=S_1\cap\Pi_1$. C_1 es la imagen de la funcion vectorial $\gamma_1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ def por $\gamma_1(x)=(x,b,f(x,b))$



$(0,1,f_y(a,b))$

$(1,0,f_x(a,b))$

Def: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(a,b) \in Dom(f)$. El plano que pasa por $(a,b,f(a,b))$ y es generado por los vectores $(1,0,f_x(a,b))$ y $(0,1,f_y(a,b))$ se llama plano tangente al grafico de f en el punto $(a,b,f(a,b))$

Obs: La ecuacion vectorial del plano tangente al grafico de f en $(a,b,f(a,b))$ es $(x,y,z) = (a,b,f(a,b)) + t(1,0,f_x(a,b)) + r(0,1,f_y(a,b))$ con $r,t \in \mathbb{R}$

Obs: El vector $(1,0,f_x(a,b)) \times (0,1,f_y(a,b)) = (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1)$ es perpendicular al plano tangente. Luego la ecuacion normal del plano tangente $\langle (x,y,z) - (a,b,f(a,b)), (-f_x(a,b), -f_y(a,b), 1) \rangle = 0$ o equivalentemente $\underbrace{z = f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + f(a,b)}_{\text{Ecuacion del plano tangente al grafico de f en }(a,b)}$

Ejemplo: Obtener la ecuacion del plano tangente al grafico de $f(x,y) = sen\left(\frac{x}{y}\right)$ en el punto $\left(\pi, 4, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ y ademas dar la ecuacion de la recta normal a dicho plano y que pasa por el mismo punto.

- $f(x,y) = sen\left(\frac{x}{y}\right) \rightsquigarrow f(\pi,4) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $f_x(x,y) = cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \rightsquigarrow f_x(\pi,4) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$
- $f_y(x,y) = cos\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \left(\frac{-x}{y^2}\right) \rightsquigarrow f_y(\pi,4) = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\frac{-\pi}{16}\right) = \frac{-\pi\sqrt{2}}{32}$

La ecuacion del plano tangente en el punto $\left(\pi, 4, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{8}(x-\pi) + \frac{(-\pi)\sqrt{2}}{32}(y-4) + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Recordemos que el vector $(-f_x(\pi,4), -f_y(\pi,4), 1)$ es normal al plano tangente en el punto $\left(\pi, 4, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$. La recta normal al plano tangente y que pasa por $\left(\pi, 4, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ es $(x,y,z) = \left(\pi, 4, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + t\left(-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\pi\sqrt{2}}{32}, 1\right)$

06/11/24

Regla de la cadena

Recordatorio: Si $n=1$ $h: I_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow I_2$ y $f: I_2 \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow I_3$ funciones derivables en sus dominios entonces $g(t) = f(h(t))$ es derivable $g'(t) = f'(h(t)) \cdot h'(t)$

Teorema (Regla de la cadena Caso 1): Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in Dom(f)$ y tal que $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existen y son continuas en $B(\bar{a}, r)$ para algun $r>0$. Para $1 \leq i \leq n$ y un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, sea $x_i: I \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones derivables $\forall t \in I$ y $(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in B(\bar{a}, r)$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Entonces la funcion $g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ es derivable $\forall t \in I$ y ademas $\frac{dg}{dt} = g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_1'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot x_n'(t)$

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + y$ con $x(t) = sen(t)$, $y(t) = e^t$. Hallar $\frac{dg}{dt}$, siendo $g(t) = f(x(t), y(t))$.

Tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$, $x'(t) = cos(t)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y+1$, $y'(t) = e^t$

$$\frac{dg}{dt}(t) = 2x(t) \cdot cos(t) + (2y(t)+1) \cdot e^t$$
$$= 2\, sen(t) \cdot cos(t) + (2e^t + 1) \cdot e^t$$

Teorema (Regla de la cadena caso 2): Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a}_1 \in Dom(f)$ y tq $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ existen y son cont $B(\bar{a}_1, r_1)$, para algun $r_1 > 0$.
Sean $x: Dom(x) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $y: Dom(y) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones con sus derivadas parciales cont. en $B(\bar{a}_0, r_0)$ para algun $r>0$ y tal que $(x(s,t), y(s,t)) \in B(\bar{a}_1, r_1)$ $\forall (s,t) \in B(\bar{a}_0, r_0)$. Entonces la funcion $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ $\forall (s,t) \in B(\bar{a}_0, r_0)$ tiene derivadas parciales dadas por $\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial s}(s,t)$.
$\frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = xy + 2y^2 + x^3$, donde $x(s,t) = st$, $y(s,t) = e^{st}$. Sea $g(s,t) = f(x(s,t), y(s,t))$ calcular $\frac{\partial g}{\partial s}$

Tenemos $f_x(x,y) = y + 3x^2$; $x_s(s,t) = t$

$f_y(x,y) = x + 4y$; $y_s(s,t) = te^{st}$

Luego $\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) = f_x(x(s,t), y(s,t))x_s + f_y(x(s,t), y(s,t)) \cdot y_s(s,t)$
$= (e^{st} + 3(st)^2)t + (st + 4e^{st})te^{st}$

Derivada Direccional

Def: decimos que $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector unitario si $\|\bar{u}\| = 1$

Def: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$ tal que $B(\bar{a}, r) \subset Dom(f)$ para algun $r>0$ y $\bar{u}$ un vector unitario. Definimos la derivada direccional de f en la direccion de $\bar{u}$ en el punto $\bar{a}$ como $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + hu_1, \dots, a_n + hu_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{a} + h\bar{u}) - f(\bar{a})}{h}$ si el limite existe

Obs: ① Si tomamos $\bar{u} = e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 en la i-esima coordenada) entonces $D_{e_i} f(\bar{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$. O sea las derivadas parciales son casos particulares de derivada direccional

② Si el vector u NO es unitario entonces debemos considerar $\bar{u} = \frac{u}{\|u\|}$

③ $D_{\bar{u}} f(\bar{a})$ nos da la tasa de crecimiento de f en $\bar{a}$ cuando nos movemos en la direccion $\bar{u}$ (ver detalle pag 99)

Def: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in Dom(f)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a})$ $\forall i = 1, \dots, n$. Llamamos gradiente de f en $\bar{a}$ al vector $\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a})\right)$

Teorema: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tq $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ existe y son continuas $\forall \bar{x} \in B(\bar{a}, r) \subseteq Dom(f)$ $\forall i = 1, \dots, n$ y sea $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un vector unitario.
Entonces, $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle$
$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}) \cdot u_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \cdot u_n$

Ejemplo: Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = x \cdot e^y$ en el punto $\bar{a} = (2,0)$ en la direccion $\bar{v} = (1, \sqrt{3})$

Notemos que $\bar{v}$ NO es unitario ya que $\|\bar{v}\| = \sqrt{1^2 + 3} = \sqrt{4} = 2$. Luego, debemos considerar $\bar{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ que tiene misma direccion que $\bar{v}$ pero si es unitario.

Por otra parte $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cdot e^y$ ambas son continuas, entonces por teorema $D f_{\bar{u}}(2,0) = \langle \nabla f(2,0), \bar{u} \rangle = \langle (e^0, 2e^0), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \rangle$
$= \langle (1, 2), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \rangle = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$

Teorema: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in Dom(f)$ tal que existen y son continuas $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in B(\bar{a}, r)$. Si $\nabla f(\bar{a}) \neq (0, \dots, 0)$, entonces:

(i) el vector $\bar{u} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la direccion de maximo crecimiento de f en $\bar{a}$

(ii) el vector $\bar{v} = \frac{-\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$ da la direccion de minimo crecimiento de f en $\bar{a}$

Toma valores entre -1 y 1

Dem: Tenemos que $D_{\bar{u}} f(\bar{a}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = \|\nabla f(\bar{a})\| \, \|\bar{u}\| \cos(\theta)$

- El max (min) valor de $\cos(\theta)$ (y por ende el maximo valor de $D_{\bar{u}} f(\bar{a})$) se da cuando $\cos(\theta) = 1$ (-1) o sea $\theta = 0$ (π) y esto nos dice que $\nabla f(\bar{a})$ y $\bar{u}$ son paralelos y tienen mismo (distinto) sentido
- $\therefore$ $\bar{u} = c \nabla f(\bar{a})$ pero $\bar{u}$ es unitario $\Rightarrow c = \frac{1}{\|\nabla f(\bar{a})\|}$

Ejemplo: ¿En que direccion debemos movernos partiendo de $(1,2)$ para obtener la mayor tasa de crecimiento y la mayor tasa de decrecimiento de la funcion $f(x,y) = (x+y-2)^2$

Tenemos que $\nabla f(x,y) = (2(x+y-2)\cdot 1,\ 2(x+y-2)\cdot 1)$

$\nabla f(1,2) = (2,2)$

Por lo tanto:

- La tasa de mayor crecimiento es de la direccion $\tilde{u} = \nabla f(1,2) = (2,2)$
- La tasa de mayor decrecimiento es de la direccion $\tilde{v} = -\nabla f(1,2) = (-2,-2)$

Para poder calcular efectivamente la maxima/minima tasa de crecimiento debemos calcular la derivada direccional en la direccion $\hat{u} = \frac{\tilde{u}}{\|\tilde{u}\|}$ y $\hat{v} = \frac{\tilde{v}}{\|\tilde{v}\|}$, respectivamente

08/11/24

Derivadas de orden 2

Sea $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y tq existen $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i=1,\dots,n$ podemos preguntarnos si existen las derivadas parciales de cada funcion $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i=1,\dots,n$. Estas se llaman derivadas parciales segundas o de orden 2.

- Si $n=2$, hay 4 derivadas parciales de orden 2

$$(f_x)_x = f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$
$$(f_x)_y = f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$
$$(f_y)_x = f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$
$$(f_y)_y = f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Si $n=3$, hay 9 derivadas parciales de orden 2

$f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{zy}, f_{zz}$

Ejemplo:

① Calculo las dp de orden 2 de $z = x^2(1+y^2)$

Tenemos $z_x = 2x(1+y^2)$, $z_y = x^2\, 2y$

Luego $z_{xx} = 2(1+y^2)$, $z_{yx} = 2x\,2y$, $z_{xy} = 2x\,2y$, $z_{yy} = 2x^2$

② $z = f(x,y) = x^2(1+y^2)$, con $x=(s,t) = 2s+3t$, $y(s,t) = 3s-2t$. Calcular $\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$

Primero debemos calcular $\frac{\partial z}{\partial t}$ y luego a esta funcion con respecto a s

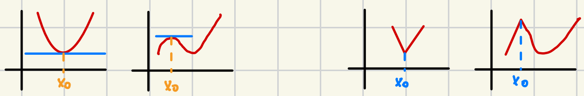
$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$ donde $\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) = 3$, $\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) = -2$

$$\frac{\partial z}{\partial t}(s,t) = 2x(s,t)\left(1+y^2(s,t)\right) \cdot 3 + x(s,t)^2 \cdot 2y(s,t) \cdot (-2)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t), y(s,t)) \cdot 3 + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t), y(s,t)) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}(s,t)$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial s \partial t} = \left(\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}_{f_{xx}} \frac{\partial x}{\partial s} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}}_{f_{xy}} \frac{\partial x}{\partial s}\right) \cdot 3 + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}_{f_{yx}} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}_{f_{yy}} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right) \cdot (-2)$$

Teorema: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\bar{a} \in Dom(f)$. Si las funciones f_{xy} y f_{yx} son ambas continuas en $B(\bar{a}, r) \subseteq Dom(f)$ para algun $r>0$ entonces $f_{xy}(\bar{x}) = f_{yx}(\bar{x})$ $\forall \bar{x} \in B(\bar{a}, r)$

Maximos y Minimos de funciones de dos variables

Repaso: Sea $f(\alpha,\beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Si f tiene un min local o max local en x_0 entonces $f'(x_0) = 0$ (x_0 se llama pto critico) ó $f'(x_0)$ no existe (x_0 se llama pto singular)



Def: Sea $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y (x_0, y_0)

- f tiene un max local (o relativo) en (x_0, y_0) si existe $r>0$ tq $f(x_0,y_0) \geq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in B((x_0,y_0), r)$
- f tiene un min local (o relativo) en (x_0, y_0) si existe $r>0$ tq $f(x_0,y_0) \leq f(x,y)$ $\forall (x,y) \in B((x_0,y_0), r)$.

El numero $f(x_0,y_0)$ se llama valor max/min local de f

- Si las desigualdades se cumple $\forall (x,y) \in Dom(f)$ entonces decimos que f tiene un max absoluto (o minimo absoluto) en (x_0, y_0)

Obs: decimos que f tiene un extremo local en (x_0,y_0) si f tiene un max local o min local en (x_0, y_0)

Teorema: Si $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tiene un extremo local en (x_0, y_0) y existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0) $\Rightarrow$ $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$

Dem: Sea $g(x) = f(x, y_0)$, entonces g tiene un extremo local en x_0 y como $g'(x) = f_x(x,y)$ existe, entonces x_0 es punto critico de g

o sea $y'(x_0) = 0 \iff f_x(x_0, y_0) = 0$

Def: Dada $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) se llama punto critico de f si $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ (o sea $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$).

Decimos ademas que (x_0,y_0) es pto singular de f si no existe $f_x(x_0,y_0)$ ó $f_y(x_0,y_0)$

Conclusion: Si $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un extremo local en (x_0,y_0), entonces

- o bien (x_0,y_0) es punto critico de f ($y \therefore \nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$)
- o bien (x_0,y_0) es punto singular de f ($y \therefore \nexists \nabla f(x_0,y_0)$)

Repaso: si $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 es pto critico de f (o sea $f'(x_0)=0$) y si ademas $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ es un minimo local de f. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ es un max local
si $f''(x_0) = 0$ no puedo asegurar nada

Teorema (Test de las segundas derivadas)

- Sean $f: Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in Dom(F)$. Supongamos que las der. par. de 1^{er} y 2^{do} orden de f son continuas en $B((x_0, y_0), r) \subset Dom(f)$ y ademas $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ ((x_0, y_0) es pto critico). Sea $D = D(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2$

① Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ (o $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$) $\Rightarrow f$ tiene un min local en (x_0, y_0)

② Si $D > 0$ y $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ (o $f_{yy}(x_0, y_0) < 0$) $\Rightarrow f$ tiene un max local en (x_0, y_0)

③ Si $D < 0 \Rightarrow f$ No tiene ni max ni min local en (x_0, y_0). En este caso se dice que (x_0, y_0) es pto de silla

④ Si $D = 0$, no puedo asegurar nada

Obs: Notemos que $D(x_0, y_0)$ es el determinante de la matriz $H(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix}$. La matriz H se llama Hessiana de f y su det Hessiana

Ejemplo Caso 3: Sea $f(x, y) = y^2 - x^2$

Tenemos que $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$. Luego $\nabla f(0,0) = (0,0)$, o sea $(0,0)$ es pto critico de f. Ademas $f_{xx} = -2$, $f_{yy} = 2$ y $f_{xy} = f_{yx} = 0$

por lo tanto $D(0,0) = -2 \cdot 2 - 0^2 = -4 < 0$

Analicemos el comportamiento de f cuando nos acercamos al punto $(x_0, y_0) = (0,0)$.

- Si nos acercamos por el eje y (o sea $x=0$) tenemos $f(0, y) = y^2 \geq 0 = f(0,0)$ $\therefore$ $(0,0)$ No es max local
- Si nos acercamo por el eje x (o sea $y=0$) $f(x, 0) = -x^2 \leq 0 = f(0,0)$ $\therefore$ $(0,0)$ No es min local

Ejemplo: Encontrar los ptos criticos de f y clasificarlos (max/min relativo o punto sillo) de la funcion $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$

Tenemos que $\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4y, 4y^3 - 4x) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{matrix} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x^3 = y \ (I) \\ y^3 = x \ (II) \end{matrix}$. Reemplazo (II) en (I) obteniendo $y^9 = y \Rightarrow y(y^8 - 1) = 0$

por lo tanto los ptos. criticos de f son $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$,

Clasifiquemos los P.C usando el Test de la segunda derivada. Tenemos que $f_{xx}(x,y) = 12x^2$, $f_{yy}(x,y) = 12y^2$, $f_{xy}(x,y) = -4 = f_{yx}(x,y)$

Entonces $D(x,y) = \det \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} = 144x^2y^2 - 16$. Luego $D(0,0) = -16 < 0 \Rightarrow (0,0)$ es un pto silla.

$D(1,1) = 144 - 16 > 0$ y como $f_{xx}(1,1) = 12 > 0 \Rightarrow (1,1)$ es minimo local

$D(-1,-1) = 144 - 16 > 0$ y como $f_{xx}(-1,-1) = 12 > 0 \Rightarrow (-1,-1)$ es minimo local