① Encuentre todos los valores de z que satisfacen la igualdad

$$2\,sen^2(z) - 3\,sen(z) + 1 = 0$$

$$u = sen(z)$$

$$2u^2 - 3u + 1 = 0$$

$$\frac{3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{4} \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$sen(z) = 1$ $\qquad$ $sen(z) = \frac{1}{2}$

$z = \pi$ $\qquad$ $z = \frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$

$$S = \left\{ 2k\pi + \pi \wedge 2k\pi + \frac{\pi}{6} \wedge 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \right\} \; k \in \mathbb{Z}$$

② Calcule los siguientes limites sin usar la regla de L'Hopital

ⓐ $\lim_{h \to \pi} \frac{1 - \cos^2(h-\pi)}{h-\pi} = \lim_{h \to \pi} \frac{sen^2(h-\pi)}{h-\pi}$

$$\lim_{h \to \pi} \frac{sen(h-\pi) \cdot sen(h-\pi)}{h-\pi} = \lim_{h \to \pi} \frac{sen(h-\pi)}{h-\pi} \cdot sen(h-\pi)$$

$$\lim_{h \to \pi} 1 \cdot sen(h-\pi) = 0_{//}$$

ⓑ $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{2x+1} + 3}{\sqrt{2x+1} + 3}$

$$\lim_{x \to 4} \frac{(\sqrt{2x+1} - 3)(\sqrt{2x+1} + 3)}{(x-4)(\sqrt{2x+1} + 3)} = \lim_{x \to 4} \frac{2x+1-9}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{2x-8}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \to 4} \frac{2\cancel{(x-4)}}{\cancel{(x-4)}(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{2}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}_{//}$$

③ Considere la siguiente funcion definida por partes

$$g(x) \begin{cases} \sqrt{2x+1} & si \; |x-1| \leq 1 \\ \frac{x^2+2}{x-8} & si \; |x| \geq 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{25}{4} & \text{puntos restantes} \end{cases}$$

ⓐ Analice la continuidad de g en $\mathbb{R}$ y en caso de que g presente discontinuidades, clasifiquelas

ⓑ De la ecuacion de la recta tangente a g en el punto $x_0 = 1$

ⓐ

$$g(x) \begin{cases} \sqrt{2x+1} & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2+2}{x-8} & x \geq 3 \wedge x \leq -3 \wedge x \neq 8 \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{25}{4} & \text{puntos restantes} \end{cases}$$

$x = 0$

1. $g(0) = 1$

2. $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{2x+1} = 1$

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{25}{4} = -\frac{25}{4}$

$g(x)$ es discontinua en $x=0$

Discontinuidad de salto

$x = 2$

1. $g(2) = \sqrt{5}_{//}$

2. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{25}{4} = \frac{8}{4} - \frac{2}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{19}{4}$

$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{2x+1} = \sqrt{5}$

$g(x)$ es discontinua en $x=2$

Discontinuidad de salto

$x = 3$

1. $g(3) = \frac{3^2+2}{3-8} = -\frac{11}{5}$

2. $\lim_{x \to 3^+} \frac{x^2+2}{3-8} = -\frac{11}{5}$

$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{25}{4} = \frac{18}{4} - \frac{3}{4} - \frac{25}{4} = -\frac{10}{4} = -\frac{5}{2}$

$g(x)$ es discontinua en $x=3$

Discontinuidad de salto

$x = 8$

1. $g(8) = \frac{1}{2} \cdot 64 - \frac{1}{4} \cdot 8 - \frac{25}{4} = \frac{120}{4} - \frac{25}{4} = \frac{95}{4}_{//}$

2. $\lim_{x \to 8^+} \frac{x^2+2}{x-8} = \frac{64+2}{8-8} = \infty$

$\lim_{x \to 8^-} \frac{x^2+2}{x-8} = \frac{64+2}{8-8} = -\infty$

$g(x)$ es discontinua en $x = 8$

Discontinuidad esencial

$x = -3$

1. $g(-3) = \frac{(-3)^2+2}{-3-8} = -\frac{11}{11} = -1$

2. $\lim_{x \to -3^+} \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{25}{4} = \frac{1}{2} \cdot 9 + \frac{3}{4} - \frac{25}{4} = \frac{21}{4} - \frac{25}{4} = -1$ $\qquad \Rightarrow \lim_{x \to -3} g(x) = -1$

$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^2+2}{x-8} = \frac{(-3)^2+2}{-3-8} = -\frac{11}{11} = -1$

3. $\lim_{x \to -3} g(x) = -1 = g(-3) = -1$

$g(x)$ es continua en $x=-3$

ⓑ $g(x) = \sqrt{2x+1}$, $g(1) = \sqrt{3}$

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $g'(1) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$t(x) = ax + b$ $\qquad$ $t(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1 + b$

$\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = b$

$\frac{2\sqrt{3}}{3} = b$

④ Calcule la derivada de la siguiente funcion $h(t) = (t-2)^{t-\operatorname{sen}^2(t+1)}$

$$h(t) = (t-2)^{t-\operatorname{sen}^2(t+1)} = e^{\ln(t-2)\cdot(t-\operatorname{sen}^2(t+1))}$$

$$h'(t) = e^{\ln(t-2)\cdot(t-\operatorname{sen}^2(t+1))} \cdot \frac{1}{t-2}\cdot(t-\operatorname{sen}^2(t+1)) + \ln(t-2)\cdot\left(1-2\operatorname{sen}(t+1)\cdot\cos(t+1)\right)_{//}$$

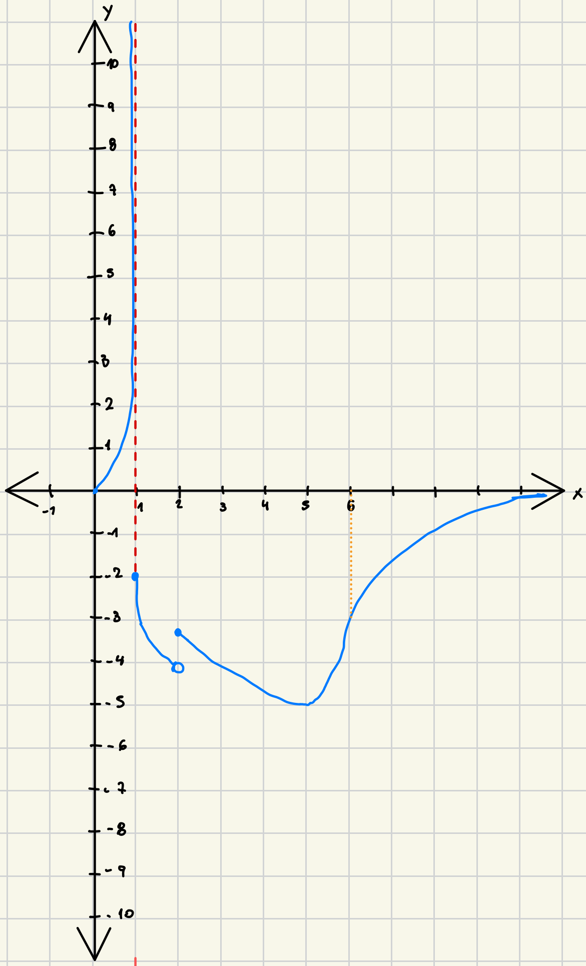
⑤ Grafique una funcion $f(x)$ tal que cumpla con todas las siguientes condiciones

(i) El dominio es el intervalo $[0,\infty)$. La funcion posee una discontinuidad esencial en $x=1$ y una discontinuidad de salto en $x=2$

(ii) La función cumple que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ y $f(0)=0$ y $f(1)=-2$

(iii) La primera derivada de la funcion es positiva en el intervalo $[0,1)$ y negativa en $(1,5)$

(iv) Es derivable en $x=5$, donde tiene un mínimo absoluto. Tiene un punto de inflexion en $x=6$



+ | -

Creciente | decreciente

∪ | ∩

⑥ Dada la siguiente funcion $f(x) = \frac{100x}{(x^2+9)^2}$

ⓐ Determine el dominio de f y de las ecuaciones de las asíntotas verticales y/o verticales (si las tiene)

ⓑ Encuentre los puntos criticos, los intervalos de crecimiento/decrecimiento y determine si tiene extremos

ⓒ Esboce la gráfica de f.

ⓐ Dom $f = \{x \in \mathbb{R}\}$

AV: No hay

AH:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{100x}{(x^2+9)^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{100}{2(x^2+9)\cdot 2x} = 0 \quad \text{AH: } y=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{100x}{(x^2+9)^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{100}{2(x^2+9)\cdot 2x} = 0$$

ⓑ $$f'(x) = \frac{100\cdot(x^2+9)^2 - 100x\cdot(2(x^2+9)\cdot 2x))}{(x^2+9)^4}$$

$$= \frac{100(x^2+9)^2 - 100x\cdot(4x(x^2+9))}{(x^2+9)^4}$$

$$= \frac{\cancel{(x^2+9)}(100(x^2+9) - 100x\cdot 4x)}{(x^2+9)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{100x^2+900-400x^2}{(x^2+9)^3}$$

$$= \frac{-300x^2+900}{(x^2+9)^3}$$

P.C: $x=\sqrt{3}$ y $x=-\sqrt{3}$

$-300x^2+900=0$

$-300x^2 = -900$

$x^2 = \frac{-900}{-300}$

$x^2 = 3$

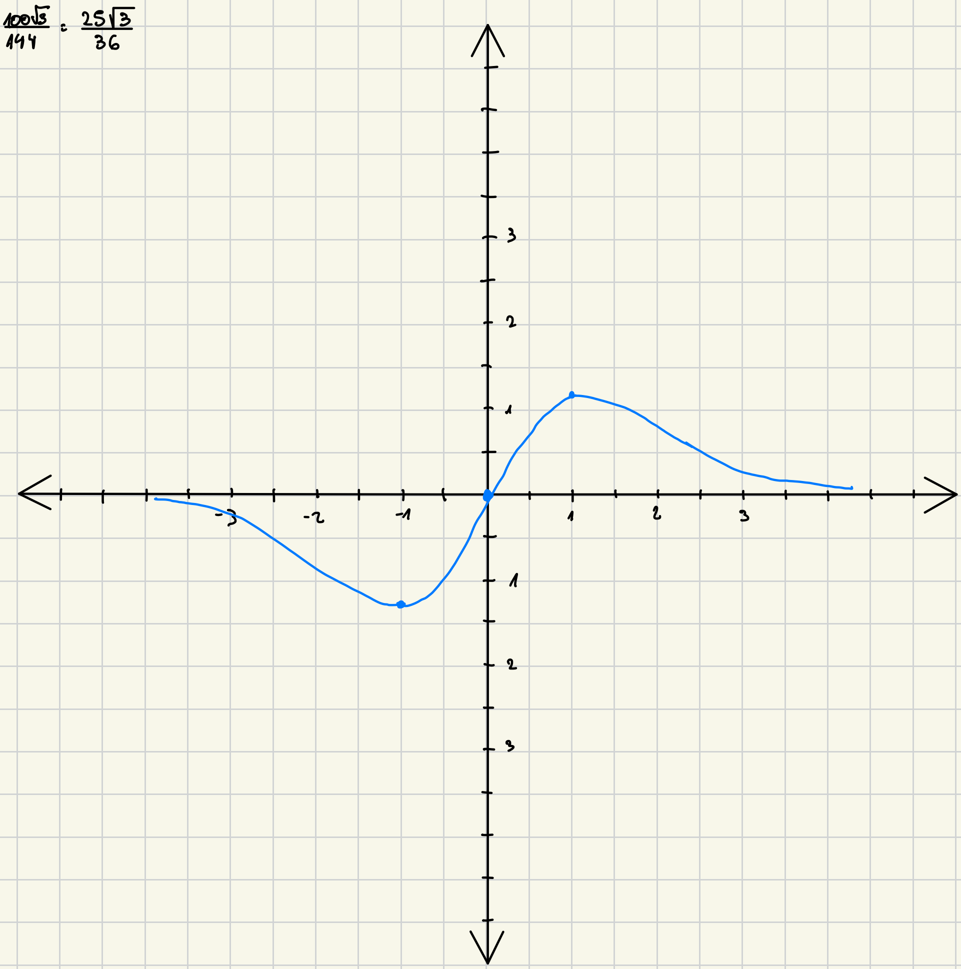
$x = \pm\sqrt{3}$

f(x)	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
$-300x^2+900$	−	0	+	0	−
$(x^2+9)^3$	+	+	+	+	+
$f'(x)$	−	0	+	0	−
	↘	min	↗	max	↘

Es decreciente en los intervalos $(-\infty,-\sqrt{3})$ y $(\sqrt{3},\infty)$

Es creciente en el intervalo $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

ⓒ $f(\sqrt{3}) = \frac{100\sqrt{3}}{(3+9)^2} = \frac{100\sqrt{3}}{144} = \frac{25\sqrt{3}}{36}$



⑦ Calcule la siguiente integral indefinida $\int \sqrt{y}\ \ln(y)\ dy$

$\int f(x)\cdot g'(x) = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)$

$f(y) = \ln(y) \qquad f'(y) = \frac{1}{y}$

$g(y) = \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \qquad g'(y) = y^{\frac{1}{2}}$

$\int \ln(y)\cdot\sqrt{y} = \ln(y)\cdot \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \int y^{-1}\cdot \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3}$

$= \ln(y)\cdot \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}\int y^{-1}\cdot y^{\frac{3}{2}}$

$= \ln(y)\cdot \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}\int y^{\frac{1}{2}}$

$= \ln(y)\cdot \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2}{3}\cdot \frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$

$= \ln(y)\cdot \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{4y^{\frac{3}{2}}}{9} + C_{//}$

⑧ Encuentre el valor numerico de k ($k\in\mathbb{R}$ y $0<k<\sqrt{\pi/2}$) para el que se cumple que

$$\int_k^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos(x^2)\ dx = \frac{1}{2}$$

$\int 2x\cdot\cos(x^2)\ dx \qquad u = x^2$
$\qquad du = 2x\ dx$

$\int \cos(u)\ du =$

$= \operatorname{sen}(u) + C = \operatorname{sen}(x^2) + C_{//}$

$\operatorname{sen}(x^2)\Big|_k^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\ \operatorname{sen}(\pi/2) - \operatorname{sen}(k^2) = 1 - \operatorname{sen}(k^2) = \frac{1}{2}$

$1 - \operatorname{sen}(k^2) = \frac{1}{2}$

$-\operatorname{sen}(k^2) = -\frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}(k^2) = \frac{1}{2}$

$k^2 = \frac{\pi}{6}$

$k = \sqrt{\frac{\pi}{6}}_{//}$