1) $A+B,\ A-B,\ 3A,\ -2B$

a) $A=(2,-1)\ ,\ B=(-1,1)$

$A+B=(2,-1)+(-1,1)=(1,0)$

$A-B=(2,-1)-(-1,1)=(3,-2)$

$3A=3(2,-1)=(6,-3)$

$-2B=-2(2,-1)=(-4,2)$

b) $A=(0,3,-1)\ ,\ B=(2,-3,7)$

$A+B=(0,3,-1)+(2,-3,7)=(2,0,6)$

$A-B=(0,3,-1)-(2,-3,7)=(-2,6,-8)$

$3A=3(0,3,-1)=(0,9,-3)$

$-2B=-2(2,-3,7)=(-4,6,-14)$

2) a) Calcular el producto escalar o interno $A\cdot B$

i) $A=(-1,3)\quad B=(0,4)$

$(-1\cdot 0)+(3\cdot 4)=12$

ii) $A=(-1,-1,3),\ B=(-1,3,-4)$

$(-1)\cdot(-1)+((-1)\cdot 3)+(3\cdot(-4))=-14$

b) ¿Cuales de los siguientes pares de vectores son perpendiculares $(A\cdot B=0)$ entre si?

i) $A=(1,-1,1),\ B=(2,3,1)$

$1\cdot 2+(-1)\cdot 3+1=0$

$\therefore$ son perpendiculares

ii) $A=(-5,2,7),\ B=(3,-1,2)$

$(-5)\cdot 3+2\cdot(-1)+7\cdot 2=-3$

$\therefore$ no son perpendiculares

c) Obtener la longitud o norma $(\sqrt{X\cdot X})$ de cada uno de los siguientes vectores

$A=(2,-1)\quad B=(2,3,1)\quad C=(-t/2,\ 2,\ 7)$

$\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}\quad \|B\|=\sqrt{\langle B,B\rangle}\quad \|C\|=\sqrt{\langle C,C\rangle}$

$\|A\|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}\quad \|B\|=\sqrt{4+9+1}=\sqrt{14}\quad \|C\|=\sqrt{\frac{t^2}{4}+53}$

3) Dar la ecuacion

a) L pasa por $(-3,2)$ y es paralela a $(1,-2)$

$L=P_0+t(1,2)$

$L=(-3,2)+t(1,2)$

$L=(-3,2)+(t,2t)$

$L=(-3+t,\ 2+2t)$

b) L esta definida por

$x=3t+1;\ y=5t-2;\ z=2t+1$

$L=P_0+tV$ con $t=0$, $P_0=(1,-2,1)$

$L=(1,-2,1)+t(3,5,2)\quad \therefore V=(3,5,2)$

$L=1+3t,\ -2+5t,\ 1+2t$

c) L pasa por $(2,0)$ y es ortogonal a $(1,3)$

$L=P_0+tV\qquad \exists V\mid\langle V,(1,3)\rangle=0$

$L=(2,0)+tV\qquad V=(a,b)$

$L=(2,0)+t(3,-1)\qquad \langle(a,b),(1,3)\rangle=a+3b=0\quad a,b\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow (3,-1)$

4) a) Dar la ecuacion vectorial del plano S generado por $(-2,1,\frac{1}{2})$ y $(4,-\frac{1}{5},-1)$ y contiene al punto $(0,-1,4)$

- ¿Pasa por el plano origen?
- ¿Contiene los puntos $(1,-1,\frac{1}{2}),\ (0,-\frac{1}{10},\frac{7}{2})$ y $(0,\frac{3}{2},1)$?

$L=P_0+sV_1+tV_2$

$L=(0,-1,4)+s(-2,1,\frac{1}{2})+t(4,-\frac{1}{5},-1)$

Pasa por $(0,0,0)$?

$(0,-1,4)+s(-2,1,\frac{1}{2})+t(4,-\frac{1}{5},-1)=(0,0,0)$

$$\begin{cases} (1)\ 0+-2s+4t=0 \Rightarrow -2s+4t=0 \Rightarrow 4t=2s \Rightarrow 2t=s \\ (2)\ -1+s-\frac{1}{5}t=0 \Rightarrow 1=s-\frac{1}{5}t \\ (3)\ 4+\frac{1}{2}s-t=0 \Rightarrow -4=\frac{1}{2}s-t \end{cases}$$

(2)

$1=s-\frac{1}{5}t$

$1=2t-\frac{1}{5}t$

$1=\frac{9}{5}t$

$\frac{5}{9}=t$

(3)

$-4=\frac{1}{2}s-t$

$-4=\frac{1}{2}\cdot 2t-t$

$-4=t-t$

$-4=0$

ABS

$\therefore$ No pasa por el origen.

Contiene a $(1,-1,\frac{1}{2}),\ (0,-\frac{1}{10},\frac{7}{2})$ y $(0,\frac{3}{2},1)$?

$(0,-1,4)+s(-2,1,\frac{1}{2})+t(4,-\frac{1}{5},-1)=(1,-1,\frac{1}{2})$

$$\begin{cases} (1)\ 0+-2s+4t=1 \Rightarrow 1=-2s+4t \\ (2)\ -1+s-\frac{1}{5}t=-1 \Rightarrow 0=s-\frac{1}{5}t \Rightarrow \frac{1}{5}t=s \\ (3)\ 4+\frac{1}{2}s-t=\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{7}{4}=\frac{1}{2}s-t \end{cases}$$

$1=-2s+4t$

$1=-2\cdot\frac{1}{5}t+4t$

$1=-\frac{2}{5}t+\frac{20t}{5}$

$1=\frac{18t}{5}$

$\frac{5}{18}=t$

$-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}s-t$

$-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}t-t$

$-\frac{7}{4}=\frac{1}{10}t-t$

$-\frac{7}{4}=-\frac{9}{10}t$

$\frac{(-7)\cdot 10}{4\cdot(-9)}=t$

$\frac{70}{36}=t$

$\frac{35}{18}=t$ ABS

$\therefore$ no pasa por el punto $(1,-1,\frac{1}{2})$

$(0,-1,4)+s(-2,1,\frac{1}{2})+t(4,-\frac{1}{5},-1)=(0,-\frac{1}{10},\frac{7}{2})$

$$\begin{cases} 0+-2s+4t=0 \Rightarrow 2s=4t \Rightarrow s=2t \\ -1+s-\frac{1}{5}t=-\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{9}{10}=s-\frac{1}{5}t \\ 4+\frac{1}{2}s-t=\frac{7}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-t \end{cases}$$

$\frac{9}{10}=s-\frac{1}{5}t$

$\frac{9}{10}=2t-\frac{1}{5}t$

$\frac{9}{10}=\frac{9}{5}t$

$\frac{9\cdot 5}{10\cdot 9}=t$

$\frac{1}{2}=t$

$-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}s-t$

$-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 2t-t$

$-\frac{1}{2}=0$

ABS

$\therefore$ no pasa por el punto $(0,-\frac{1}{10},\frac{7}{2})$

b) Dar la ecuacion vectorial del plano que determina la ecuacion $3x+3y+z=1$

Si: $x=0$ y $y=0 \Rightarrow z=1\quad P_0=(0,0,1)$

Si $x=1$ y $y=0 \Rightarrow z=-2\quad V_1=(1,0,-2) \Rightarrow L=(0,0,1)+s(1,0,-2)+t(0,1,-2)$

Si $y=1$ y $x=0 \Rightarrow z=-2\quad V_2=(0,1,-2)$

c) Dar la ecuacion normal de los siguientes planos.

i) el plano que contiene a los puntos $(1,-1,1),(-2,0,1),(-1,1,1)$

ii) $X=s(1,2,0)+t(2,0,1)+(1,0,0)\quad \forall s,t\in\mathbb{R}$

i) $V_1=(-2-1,\ 0+1,\ 1+1)=(-3,1,2)\qquad n=(-3,1,2)\times(0,0,2)=$

$V_2=(-1+1,\ -1+1,\ 1+1)=(0,0,2)$

ii) $n=(1,2,0)\times(2,0,1)=$

Contiene a $(1,-1,\frac{1}{2})$, $(0,-\frac{1}{10},\frac{7}{2})$ y $(0,\frac{3}{2},1)$? Otra forma

$\langle X-P_0, N\rangle$

$$N = v \times w = \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & -\frac{1}{5} & -1 \end{pmatrix} = \left(1\cdot(-1) - (-\tfrac{1}{5})\cdot\tfrac{1}{2}, -\left((-2)\cdot(-1) - 4\cdot\tfrac{1}{2}\right), (-2)\cdot(-\tfrac{1}{5}) - 4\cdot 1\right)$$

$$N = \left(-\frac{11}{10}, 0, -\frac{18}{5}\right)$$

$$S = \{X : \langle X-P_0, N\rangle = 0\}$$

$$S = \{(x,y,z) : \langle (x,y,z)-(0,-1,4), (-\tfrac{11}{10}, 0, -\tfrac{18}{5})\rangle\}$$

$$\Rightarrow \quad \langle (1,-1,\tfrac{1}{2})-(0,-1,4), (-\tfrac{11}{10}, 0, -\tfrac{18}{5})\rangle$$

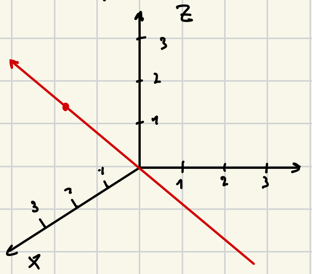
$$\langle (1,0,-\tfrac{7}{2}), (-\tfrac{11}{10}, 0, -\tfrac{18}{5})\rangle$$

$$= 1\cdot\left(-\tfrac{11}{10}\right) + 0 + \left(-\tfrac{7}{2}\cdot -\tfrac{18}{5}\right) = -\tfrac{11}{10} + \tfrac{63}{5} \neq 0 \quad \therefore \text{ no pertenece}$$

⑤ Bosquejar la imagen de la curva descripta por las siguientes funciones vectoriales. Indicar con una flecha la direccion en la que t aumenta

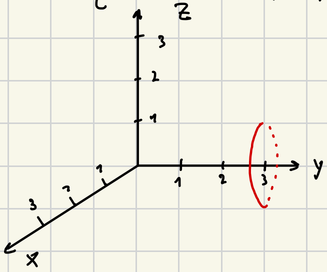
ⓐ $r(t) = (t, -t, 2t)$

$\mathrm{Im}\ r = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R} : t(1, -1, 2)\}$



ⓑ $r(t) = (\mathrm{sen}\, t, 3, \cos t)$

$\mathrm{Im}\ r = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 : y_1^2 + y_3^2 = 1 \wedge y_2 = 3\}$



⑥ Calcular los siguientes limites

ⓐ $\lim_{t\to 0} (t, \cos^2(t), 5) = \left(\lim_{t\to 0} t, \lim_{t\to 0} \cos^2(t), \lim_{t\to 0} 5\right) = (0, 1, 5)$

ⓑ $\lim_{t\to 0} \left(t, \ln(t+1), e^{-\frac{1}{t^2}}\right) = \left(\lim_{t\to 0} t, \lim_{t\to 0} \ln(t+1), \lim e^{-\frac{1}{t^2}}\right) = \left(\lim_{t\to 0} t, \lim_{t\to 0} \ln(t+1), \lim_{t\to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{t^2}}}\right) = (0, 0, 0)$

↳ ∞

⑦ Determinar el dominio y la derivada de las siguientes funciones vectoriales

ⓐ $r(t) = (\ln(4-t^2), t^3, \arctan(t))$

$r'(t) = \left(\ln(4-t^2)', {t^3}', \arctan(x)'\right)$
$= \left(\frac{1}{4-t^2} \cdot -2t, 3t^2, \frac{1}{1+x^2}\right)$

$\mathrm{Dom}(r_1) = (-2, 2)$
$\mathrm{Dom}(r_2) = \mathbb{R}$
$\mathrm{Dom}(r_3) = \mathbb{R}$
$(-2, 2) \cap \mathbb{R} = (-2, 2)$

$\Rightarrow \mathrm{Dom}(r) = (-2, 2)$

ⓑ $r(t) = ta + \langle b, tc \rangle d$ donde a, b, c, d son vectores

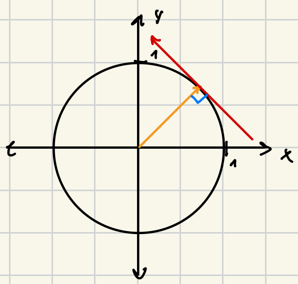
$ta + t\langle b, c \rangle d$
$t(a + \langle b, c \rangle d)$

$r'(t) = (t(a + \langle b, c \rangle d))'$
$= a + \langle b, c \rangle \cdot d$

⑧ Para cada una de las siguientes funciones vectoriales bosquejar su imagen y obtener $r'(t)$. Ademas dar el vector posicion y el vector tangente para el valor de t indicado.

ⓐ $r(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, $t = \frac{\pi}{4}$

$\mathrm{Im}\ r(t) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = 1\}$



$r'(t) = (-\mathrm{sen}(t), \cos(t))$

$r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right), \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

vector posicion: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

vector tangente: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ (velocidad)

(b) $r(t) = (1+t, t^2)$, $t=1$

$Im\ r(t) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = 1+t,\ y_2 = t^2,\ t \in \mathbb{R}\}$

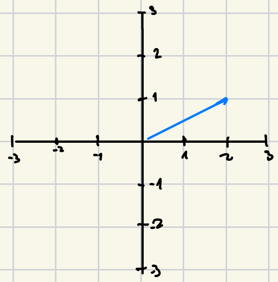
$r(1) = (2, 1)$

$r'(t) = (1, 2t)$

$r'(1) = (1, 2)$

vector posicion : $(2, 1)$

vector tangente : $(1, 2)$



⊛ Como ver la imagen

(c) $r(t) = (t^3, t^2)$, $t=1$

$Im\ r(t) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1 = t^3,\ y_2 = t^2,\ t \in \mathbb{R}\}$

$r(1) = (1, 1)$

$r'(t) = (3t^2, 2t)$

$r'(1) = (3, 2)$

vector posicion : $(1, 1)$

vector tangente : $(3, 2)$