Parte teorica

① (10 pts) Probar que si k es un cuerpo y V un k-espacio vectorial finitamente generado, entonces V admite una base

Supongamos que V es de dimension n, y una base por definicion, es un conjunto li de n vectores $\therefore$ si hay $\{v_1, \dots, v_n\}$ vectores li, podemos construir una base de V, y este espacio va a estar generado por esta base, ya que cualquier elemento de V puede escribirse como combinacion lineal de la base.

② (10 pts) Sea K un cuerpo y V, W dos K-espacios vectoriales de la mismo dimension. Sea $f: V \longrightarrow W$ una transformacion lineal. Probar que las siguientes tres condiciones son equivalentes:

- f es biyectiva
- f es inyectiva
- El nucleo de f es $\{0\}$

Como f es biyectiva (isomorfismo) $\Rightarrow$ f es inyectiva y sobreyectiva (monomorfismo e isomorfismo) $\Rightarrow$ como f es un monomorfismo, el nucleo de $f = \{0\}$

③ (10 pts) Sea $(V, \langle , \rangle)$ o $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimension finita con producto interno. Definimos una funcion $\Phi: V \longrightarrow V^*$ (el espacio dual de V) por $\Phi(v)(w) = \langle v, w \rangle$

Probar que Φ es isomorfo (o sea probar que es una transformacion lineal y que es biyectiva)

ⓘ $\Phi(u+v)(w) = \langle u+v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle = \Phi(u)(w) + \Phi(v)(w)$

ⓘⓘ $\Phi(\alpha v)(w) = \langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle = \alpha \, \Phi(v)(w)$

$\therefore$ es una tl

Siendo $\Phi(v)(w) = \langle v, w \rangle$ la unica forma de que de 0 como resultado es que v y/o w sean 0 $\therefore$ $Nu(\Phi) = \{0\}$ $\therefore$ Sabemos por el teorema de la dimension que $\dim(Im(\Phi)) = n$ ya que el nucleo tiene dimension 0. Y como $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(Im(\Phi)) = n$ podemos deducir que Φ llega a todo el conjunto V^* $\therefore$ $Im(\Phi) = V^*$ $\therefore$ acabamos de probar que es un monomorfismo y un epimorfismo $\Rightarrow$ es un isomorfismo.

④ Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada

ⓐ (3 pts) Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, entonces la matriz y la matriz A^t tienen los mismos autovalores.

Sabemos que $\det(A) = \det(A^t)$ por lo que los polinomios caracteristicos de A y A^t tendran las mismas raices, por lo que tendran los mismos autovalores

$\therefore$ ⓐ es Verdadero

ⓑ (3 pts) Sea $f: V \longrightarrow W$ una transformacion lineal. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ tales que el conjunto $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente.

Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independiente.

Supongamos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es ld $\therefore$ existe una combinacion lineal tq $c_1 v_1, \dots, c_n v_n = 0$ con $c_i \in k$ no todos nulos para $i = 1, \dots, n$

Si aplicamos f a ambos lados obtenemos $f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = f(0)$, por propiedades de las transformaciones lineales sabemos que $f(0) = 0$

$\therefore$ $f(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = 0$, por linealidad podemos aplicar f a cada termino $\therefore$ $f(c_1 v_1) + \dots + f(c_n v_n) = 0$ $\therefore$ como c_i son escalares, por propiedad, lo podemos sacar afuera $c_1 f(v_1) + \dots + c_n f(v_n) = 0$ $\therefore$ como sabemos que $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es li $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$

$\therefore$ $\{v_1, \dots, v_n\}$ es li $\therefore$ ⓑ es Verdadero.

Parte Practica

⑤ (15 pts) Sea $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que 2 y 3 sean autovalores de A y 2 tenga multiplicidad 2. Para tales a y b econtrar bases de los autoespacios asociados y decidir si A es diagonalizable

Nesesitamos que $P_A(x) = (x-2)^2(x-3)$

$$\det\left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right] = 0 = \det\begin{pmatrix} \lambda-a & 0 & -b \\ 4 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \lambda-a & 0 & -b \\ 4 & \lambda-2 & -1 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \\ \lambda-a & 0 & -b \\ 4 & \lambda-2 & -1 \end{array}$$

$((\lambda-a)(\lambda-2)(\lambda-4)) + 0 + 0 - ((-b)\cdot(\lambda-2)\cdot(-2)) - 0 - 0$

$((\lambda-a)(\lambda-2)(\lambda-4)) - (2b(\lambda-2))$

$(\lambda^2 - 2\lambda - a\lambda + 2a)(\lambda-4) - 2b\lambda + 4b$

$\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda^2 + 8\lambda - a\lambda^2 + 4a\lambda + 2a\lambda - 8a - 2b\lambda + 4b$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 - a\lambda^2 + 8\lambda + 6a\lambda - 2b\lambda - 8a + 4b$

$\lambda^3 - \lambda^2(6-a) + \lambda(8+6a-2b) - 8a + 4b$

⑥ (15 pts) Sea K un cuerpo y sean $a_1, \dots, a_n$ elementos de K. Calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⑦ Sea $V=\{f:\{1,2,3\}\longrightarrow \mathbb{R}\}$ el $\mathbb{R}$-espacio de funciones del conjunto $\{1,2,3\}$ a valores reales. Definimos $\Phi: V\times V\longrightarrow \mathbb{R}$ por

$\Phi(f,g)=9f(1)g(1)+3f(2)g(1)+3f(1)g(2)+2f(2)g(2)+3f(3)g(3)$.

ⓐ (10 pts) Probar que Φ define un producto interno en V

ⓘ $\Phi(f+h,g) = 9(f+h)(1)g(1)+3(f+h)(2)g(1)+3(f+h)(1)g(2)+2(f+h)(2)g(2)+3(f+h)(3)g(3)$

$= 9f(1)g(1)+9h(1)g(1)+3f(2)g(1)+3h(2)g(1)+3f(1)g(2)+3h(1)g(2)+2f(2)g(2)+2h(2)g(2)+3f(3)g(3)+3h(3)g(3)$

$= 9f(1)g(1)+3f(2)g(1)+3f(1)g(2)+2f(2)g(2)+3f(3)g(3) \quad + \quad 9h(1)g(1)+3h(2)g(1)+3h(1)g(2)+2h(2)g(2)+3h(3)g(3)$

$= \Phi(f,g)+\Phi(h,g)$ //

ⓘⓘ $\Phi(\alpha f,g) = 9(\alpha f)(1)g(1)+3(\alpha f)(2)g(1)+3(\alpha f)(1)g(2)+2(\alpha f)(2)g(2)+3(\alpha f)(3)g(3)$

$=\alpha\left(9f(1)g(1)+3f(2)g(1)+3f(1)g(2)+2f(2)g(2)+3f(3)g(3)\right)$

$=\alpha\,\Phi(f,g)$

ⓑ (5 pts) Dar una base ortogonal de V para el producto interno anterior cuyo primer elemento de la funcion $f\in V$ con valores $f(1)=1$, $f(2)=1$, $f(3)=1$

$f_1=(1,1,1)$

Ortogonalizamos f_2 con respecto a f_1

$\Phi(f_1,f_2)=0 \Rightarrow 9\cdot1\cdot a+3\cdot1\cdot a+3\cdot1\cdot b+2\cdot1\cdot b+3\cdot1\cdot c = 12a+5b+3c=0 \Rightarrow$ tomamos $c=0 \Rightarrow b=-\frac{12}{5}a$, si tomamos $a=5$

Obtenemos $(5,-12,0)$

Verificamos $\Phi(f_1,f_2)=0 \Rightarrow 9\cdot1\cdot5+3\cdot1\cdot5+3\cdot1\cdot(-12)+2\cdot1\cdot(-12)$

$45+15-36-24$

$60-60=0$ //

Ortogonalizaremos f_3 con respecto a f_1 y f_2

$\Phi(f_1,f_3)=0$ y $\Phi(f_2,f_3)=0$

$\downarrow$

$12a+5b+3c$

$9\cdot5\cdot a+3\cdot(-12)a+3\cdot5\cdot b+2(-12)b+3\cdot0=0$

$45a-36a+15b-24b=0$

$9a-9b=0$

$a=b$

$\therefore\ 12a+5a+3c=0$

$17a+3c=0$

$c=-\frac{17}{3}a$ elegimos $a=3 \ \therefore\ b=-17$

Obtenemos $(3,3,-17)$

Verificamos $\Phi(f_1,f_3)=0$ y $\Phi(f_2,f_3)=0$

$\Phi(f_1,f_3)= 9\cdot1\cdot3+3\cdot1\cdot3+3\cdot1\cdot3+2\cdot1\cdot3+3\cdot1\cdot(-17)$

$27+9+9+6-51$

$51-51=0$ //

$\Phi(f_2,f_3)=9\cdot5\cdot3+3\cdot(-12)\cdot3+3\cdot5\cdot3+2\cdot(-12)\cdot3+3\cdot0\cdot(-17)$

$135-108+45-72$

$180-180=0$ //

$\therefore$ una base ortogonal es $\{f_1,f_2,f_3\}$ con $f_1=(1,1,1)$, $f_2(5,-12,0)$ y $f_3=(3,3,-17)$

⑧ Sean V un K-espacio vectorial de dimension n y $T:V\longrightarrow V$ una transformacion lineal. Supongamos que $T^2=T$ (es decir $T(T(v))=T(v)$ para todo $v\in V$)

ⓐ Probar que $V=Nu(T)\oplus Im(T)$