① (3 pts) Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tq el siguiente sistema tiene al menos una solucion. Para cada valor a hallado encontrar todas las soluciones

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x+2z=-1 \\ 2x+7y-3z=2a \end{cases} \Rightarrow x=-1-2z$$

$$x+y+z=a$$
$$(-1-2z)+y+z=a$$
$$-1-z+y=a$$
$$y=a+1+z$$

$$2(-1-2z)+7(a+1+z)-3z=2a$$
$$-2-4z+7a+7+7z-3z=2a$$
$$5+7a=2a$$
$$5=-5a$$
$$-1=a$$

$\therefore$ si $a=-1$, $\begin{cases} x=-1-2z \\ y=z \\ z=z \end{cases}$ $\therefore$ las soluciones tienen forma de $(x,y,z)=(-1-2z,z,z)$
$=(-1,0,0)+z(-2,1,1)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -3 & 2a \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-2f_1]{f_2-f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 & -1-a \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2\cdot(-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & 1+a \\ 0 & 5 & -5 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-5f_2]{f_1-f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1+a \\ 0 & 0 & 0 & -5-5a \end{array}\right)$$

$x+2z=-1 \Rightarrow x=-1-2z$
$y-z=1+a \Rightarrow y=1+a+z$

$$2(-1-2z)+7(1+a+z)-3z=2a$$
$$-2-4z+7+7a+7z-3z=2a$$
$$5+7a=2a$$
$$5=-5a$$
$$-1=a$$

$\therefore a=-1 \therefore \begin{cases} x=-1-2z \\ y=z \\ z=z \end{cases}$ $\therefore$ las soluciones tienen forma de $(x,y,z)=(-1-2z,z,z)$
$=(-1,0,0)+z(-2,1,1)$

② (2.5 pts) Calcular la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_{11})^{3\times 3}$

Suponemos que existe $A^{-1}=B$ tq $A\cdot B=Id_3$. Calcularemos la inversa expandiendo la matriz A con Id_3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2\cdot 6} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1-3f_3}$$

$2x \equiv 1 \ (11)$
$x=6 \quad 12\equiv 1 \ (11)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$\therefore$ B es equivalente por filas a la Id
$\therefore$ A es inversible.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ ⓐ (1 pts) Dar la definicion de linearmente independiente.

Un conjunto linealmente independiente es aquel que la unica combinacion lineal igual a 0, es que los escalares que acompañan a los vectores sean 0

Se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es linearmente independiente (li) si $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha v_\alpha = 0 \Rightarrow a_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in I$

ⓑ (1.5 pts) Decidir si el subconjunto $\{(i,1,i),(0,i+1,0),(0,-1,-1+i)\}$ de $\mathbb{C}^3$ es linealmente independiente

Para que un conjunto sea li, la unica combinacion lineal que sea igual a 0 es la que todos los escalares son 0 $\therefore$ formaremos una matriz con los vectores y por medio de operaciones elementales por fila intentaremos llegar a la Id.

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 1 & i+1 & -1 \\ i & 0 & -1+i \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1\cdot(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & i+1 & -1 \\ i & 0 & -1+i \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1\cdot i]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2\cdot\frac{1-i}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 & -1+i \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3\cdot\frac{-1-i}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+f_3\cdot\frac{1-i}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$\therefore$ el conjunto es li

$$(1+i)\,x=1$$
$$x=\frac{1}{1+i}$$
$$x=\frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}$$
$$x=\frac{1-i}{1-i^2}$$
$$x=\frac{1-i}{2}$$

$$(-1+i)\cdot x=1$$
$$x=\frac{1}{-1+i}$$
$$x=\frac{1}{-1+i}\cdot\frac{-1-i}{-1-i}$$
$$x=\frac{-1-i}{1-i^2}$$
$$x=\frac{-1-i}{2}$$

④ Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar en cada caso la respuesta

ⓐ (0.6 pts) $\mathbb{Z}_{30}$ es un cuerpo

Por un teorema vimos que $\mathbb{Z}_{30}$ no es un cuerpo porque 30 no es primo. Esto implica la ausencia de inversos multiplicativos ya que hay $a \cdot b \equiv 1\ (30)$. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$\therefore$ Cualquier multiplo de 2, 3 y 5 no es coprimo con 30 $\therefore$ estos no tienen inverso multiplicativo

Ademas la existencia del 0 no es unica ya que $2 \cdot 15 \equiv 0\ (30)$ y $6 \cdot 5 \equiv 0\ (30)$ $\Rightarrow$ a es Falso

ⓑ (0.7 pts) La union de dos subespacios es un subespacio

Definamos V, W dos subespacios donde $V \cup W = \{ v \in V \cup W \mid v \in V \vee v \in W \}$

Vamos a probar si $V \cup W$ cumple las condiciones para ser subespacio: ⓘ Contiene $v = 0$, ⓘⓘ Cerradura en la suma, ⓘⓘⓘ Cerradura en la multiplicacion

ⓘ Como V y W son subespacios, los dos contienen $v = 0$ $\therefore$ $V \cup W$ tambien

ⓘⓘ Sean $v, w \in V \cup W \Rightarrow$ si los dos vectores pertenecen a V o W al ser un subespacio es cerrado en la suma, pero si $v \in V$ y $w \in W$, $v + w$ no necesariamente pertenece a $V \cup W$

$\therefore$ $V \cup W$ no es un subespacio $\Rightarrow$ b es Falso

ⓒ (0.7 pts.) Si A y B son dos matrices $\mathbb{R}^{3\times 3}$ inversibles, entonces $A+B$ es inversible

Vamos a demostrar por contra ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = B^{-1} \qquad A^{-1} + B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow c \text{ es Falso}$$