① Encontrar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que el siguiente sistema tiene al menos una solucion. Para cada valor de a hallado, encontrar todas las soluciones

$$\begin{cases} x-y+2z=2 \\ 3y-z=a+1 \\ 8x+4y+12z=a \end{cases} \Rightarrow 3y-(a+1)=z$$

$$x-y+2(3y-(a+1))=2$$
$$x-y+6y-2a-2=2$$
$$x+5y-2a=4$$
$$x=-5y+2a+4$$

$$8(-5y+2a+4)+4y+12(3y-(a+1))=a$$
$$-\cancel{40y}+16a+32+\cancel{4y}+\cancel{36y}-12a-12=a$$
$$4a+20=a$$
$$3a=-20$$
$$a=-\frac{20}{3}$$

$$x=-5y+2\cdot\left(-\frac{20}{3}\right)+4$$
$$x=-5y-\frac{40}{3}+\frac{12}{3}$$
$$x=-5y-\frac{28}{3}$$

$$z=3y-\left(-\frac{20}{3}+\frac{3}{3}\right)$$
$$=3y+\frac{17}{3}$$

$$\therefore \begin{cases} x=-5y-\frac{28}{3} \\ y=y \\ z=3y+\frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow$$ las soluciones tienen la forma de

$$(x,y,z)=\left(-5y-\frac{28}{3},\ y,\ 3y+\frac{17}{3}\right)$$
$$=\left(-\frac{28}{3},0,\frac{17}{3}\right)+y(-5,1,3)$$

② (2.5 pts) Calcular la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in (\mathbb{Z}_{13})^{3\times 3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1\cdot 7} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-5f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2\cdot 9} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 12 & 7 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3-4f_2]{f_1-12f_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3\cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 7 & 7 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1-7f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 9 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 & 2 \end{array}\right)$$

③ ⓐ (1 pts) Dar la definicion de linearmente independiente.

Un conjunto linealmente independiente es aquel que la unica combinacion lineal igual a 0, es que los escalares que acompañan a los vectores sean 0

Se dice que $\{v_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es linearmente independiente (l.i) si $\sum_{\alpha\in I} a_\alpha v_\alpha = 0 \Rightarrow a_\alpha = 0 \ \forall \alpha \in I$

ⓑ (1.5 pts) Decidir si el conjunto $\{(i,1,i),(0,2,i+1),(i,2i-1,-2)\}$ de $\mathbb{C}^3$ es linealmente independiente

$$\begin{pmatrix} i & 0 & i \\ 1 & 2 & 2i-1 \\ i & i+1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1\cdot(-i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2i-1 \\ i & i+1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-if_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2i-1 \\ 0 & i+1 & -2-i \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \leftrightarrow f_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i+1 & -2-i \\ 0 & 0 & 2i-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2\cdot\frac{1-i}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-3+i}{2} \\ 0 & 0 & 2i-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3\cdot\frac{-1-2i}{5}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-3+i}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2-\frac{-3+i}{2}f_3]{f_1-f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{-1+2i}\cdot\frac{-1-2i}{-1-2i}=\frac{-1-2i}{1-4i^2}=\frac{-1-2i}{5}$$

$\therefore$ el conjunto es l.i

④ Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar en cada caso la respuesta

ⓐ (0.6 pts) $\mathbb{Z}_{20}$ es un cuerpo

Por teorema, para que un conjunto mod (n) sea un cuerpo, n tiene que ser primo, porque sino no se cumple el inverso multiplicativo y la unicidad del 0.

ⓑ (0.7 pts) La interseccion de dos subespacios

Definamos V, W dos subespacios donde $V\cap W = \{v \in V\cap W \mid v\in V \wedge v \in W\}$

Vamos a probar si $V\cap W$ cumple las condiciones para ser subespacio: ⓘ Contiene $v=0$, ⓘⓘ Cerradura en la suma, ⓘⓘⓘ Cerradura en la multiplicacion

ⓘ Como V y W son subespacios, los dos contienen $v=0$ $\therefore$ $V\cap W$ tambien

ⓘⓘ Sean $v,w \in V\cap W \Rightarrow v,w \in V$ y $v,w\in W$. Como V y W son subespacios $v+w\in V$ y $v+w\in W$ $\therefore$ $v+w \in V\cap W$

ⓘⓘⓘ Sea $k\in\mathbb{R}$, $u\in V\cap W \Rightarrow u \in V$ y $u\in W$. Como V y W son subespacios $ku\in V$ y $ku \in W$ $\therefore$ $ku \in V\cap W$

$\therefore$ $V\cap W$ es un subespacio $\Rightarrow$ b es Verdadero

ⓒ Si A y B son matrices $\mathbb{R}^{3\times3}$ inversibles, entonces $A\cdot B$ es inversible

$(A\cdot B)\cdot(B^{-1}\cdot A^{-1}) = A(B\cdot B^{-1})\cdot A^{-1} = A\cdot Id_3\cdot A^{-1} = A\cdot A^{-1} = Id_3$ $\therefore$ c Verdadero