

1	2	3	4	5	6	7

CALIF.

APELLIDO Y NOMBRE:

CONDICIÓN:

Libre

Regular

CARRERA:

Algebra II - Final
21 de diciembre de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos.
Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

- Sea \mathbb{k} un cuerpo, V un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión finita, y sean $S, T \subset V$ subespacios.
 - (4 pts) Definir $S + T$, y probar que es un subespacio.
 - (8 pts) Dar una fórmula para $\dim(S + T)$ y demostrarla.
- Sea \mathbb{k} un cuerpo y V, W dos \mathbb{k} -espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1 y B_2 bases de V y W respectivamente, y $f : V \rightarrow W$ una transformación lineal.
 - (3 pts) Definir la matriz de f en las bases B_1, B_2 (denotada $[f]_{B_1, B_2}$).
 - (9 pts) Probar que para todo $v \in V$ vale que $[f(v)]_{B_2} = [f]_{B_1, B_2}[v]_{B_1}$.
- Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.
 - (3 pts) Sea $V = \{\phi \in (\mathbb{C}^4)^* \mid \phi(i, -i, 0, 1) = 0\}$. Existe un monomorfismo $T : \mathbb{C}^{2 \times 2} \rightarrow V$.
 - (3 pts) Sea $T : \mathbb{Q}^6 \rightarrow \mathbb{Q}^6$ una transformación lineal tal que $T^4 = 25 \text{ Id}$. Entonces T no posee autovalores.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sean $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $T : \mathbb{R}^{3 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 2}$ la transformación lineal tal que $T(B) = AB$.

(a) Probar que $T^2 = \text{Id}$. Deducir que, si λ es un autovalor, entonces $\lambda = \pm 1$.

(b) Hallar los autoespacios asociados a 1 y -1 , decidir si T es diagonalizable.

5. (15 pts) Sea $a \in \mathbb{R}$. Probar que la matriz $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ es inversible si y sólo si $a \neq 1, -1$.

6. Sean $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ el producto interno canónico y $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal tal que $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ para todo par de vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$.

(a) (2 pts) Probar que $\|T(v)\| = \|v\|$ para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

(b) (8 pts) Probar que T es un isomorfismo.

(c) (10 pts) Sea A la matriz de T con respecto a la base canónica. Probar que $A \cdot A^t = \text{Id}_n$.

7. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $S, T : V \rightarrow V$ dos transformaciones lineales.

(a) (8 pts) Probar que $\text{Im } T \subset \text{Nu } S$ si y sólo si $S \circ T = 0$.

(b) (4 pts) Asumimos que $S \circ T = 0$. Probar que $(S + T)(\text{Nu } S) \subseteq \text{Im } T$.

(c) (8 pts) Asumimos ahora que $S \circ T = 0$ y que $S + T$ es un monomorfismo. Probar que $\text{Im } T = \text{Nu } S$.

JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS
