PARCIAL 1

① Sean $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = \frac{1}{1+x}$

ⓐ Determine el dominio de $f(x)$ y $g(x)$

ⓑ Calcule $(f+g)(1)$

ⓒ Obtenga la función $f \cdot g$ y determine su dominio

ⓓ Obtenga la función $f \circ g$ y determine su dominio

ⓐ $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ $\quad g(x) = \frac{1}{1+x}$

$4 - x^2 \geq 0$

$-x^2 \geq -4$

$x^2 \leq 4$

$x \leq \pm 2$

$\text{Dom } g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$

$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

ⓑ $(f+g)(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{1}{x+1}$

$(f+g)(1) = \sqrt{4-1^2} + \frac{1}{1+1}$

$(f+g)(1) = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$

$(f+g)(1) = \frac{2\sqrt{3}+1}{2}$

ⓒ $(f \cdot g)(x) = \sqrt{4-x^2} \cdot \frac{1}{x+1}$

$(f \cdot g)(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x+1} \rightarrow -2 \leq x \leq 2 \rightarrow x \neq 1$

$\text{Dom}(f \cdot g) = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2 \wedge x \neq 1\}$

ⓓ $(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^2}$

$4 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 \geq 0$

$4 - \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0$

$\frac{4(1+x)^2 - 1}{(1+x)^2} \geq 0$

$\frac{4(x^2+2x+1) - 1}{x^2+2x+1} \geq 0$

$\frac{4x^2+8x+4-1}{(x+1)(x+1)} \geq 0$

$\frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{8}$ $\quad \frac{1}{16} \times 3 \over 48$

$\frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{8}$ $\quad \frac{3}{-48} \over 16$

$\frac{-8 \pm 4}{8}$ $\quad x_1 = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$ $\quad x_2 = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$

$\text{Dom } f \circ g = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -\frac{3}{2} \wedge x \geq -\frac{1}{2}\right\}$

(2) (a) Encuentre el centro y semiejes de la elipse definida por la siguiente ecuacion y grafiquela

$x^2 + 4y^2 - 2x - 16y = -13$

$x^2 - 2x + 4y^2 - 16y = -13$

$(x^2 - 2x + 1) - 1^2 + 4(y^2 + 4y + 4) - 16 = -13$

$(x-1)^2 + 4(y^2 + 2) = -13 + 1 + 16$

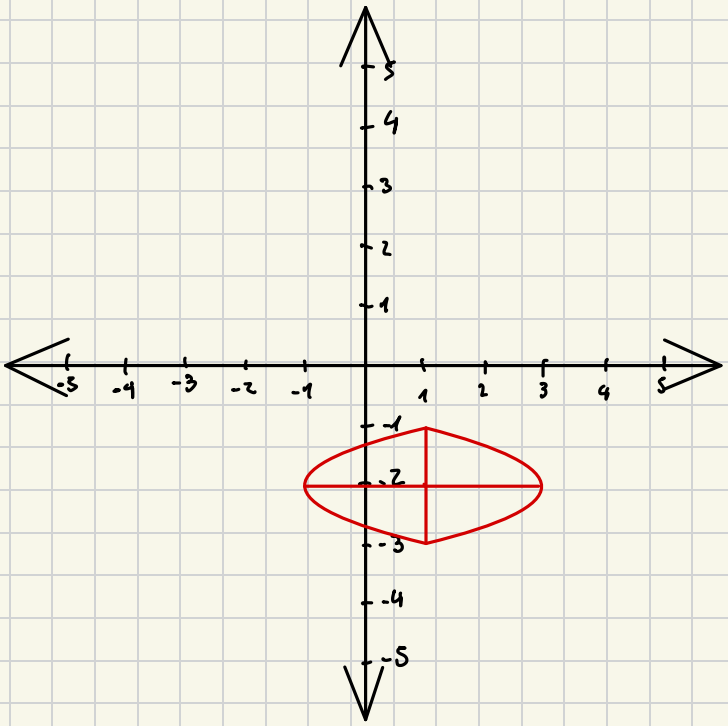
$(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 4$

$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$

$C = (1, -2)$

$a = 2$

$b = 1$



(b) Empleando transformaciones elementales esboce el gráfico de la siguiente función

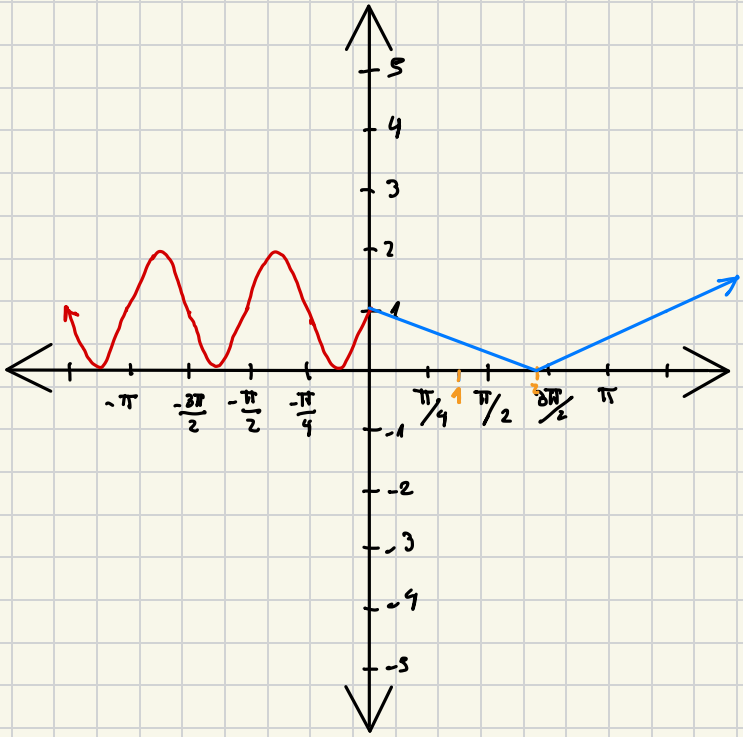
$$j(x) = \begin{cases} 1 + \operatorname{sen}(2x) & \text{si } x \leq 0 \\ \left|\frac{1}{2}x - 1\right| & \text{Si } x > 0 \end{cases}$$

$P = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$$\left|\frac{1}{2}x - 1\right| \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1 & x \geq 2 \\ -\left(\frac{1}{2}x - 1\right) & x < 2 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}x - 1 = 0$

$x = 2$



③ (a) Determine todos los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones. Exprese el resultado como un intervalo o union de intervalos y dibújelos en la recta real.

(i) $\frac{x-1}{x-2} \leq 5$

$\frac{x-1}{x-2} - 5 \leq 0$

$\frac{(x-1) - 5(x-2)}{x-2} \leq 0$

$\frac{x-1-5x+10}{x-2} \leq 0$

$\frac{-4x+9}{x-2} \leq 0$

$-4x+9=0$

$x = \frac{9}{4}$

$x=2$

f(x)	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \frac{9}{4})$	$\frac{9}{4}$	$(\frac{9}{4}, \infty)$
$-4x+9$	+	+	+	+	+	0	−
$x-2$	−	−	−	0	+	+	+
$\frac{-4x+9}{x-2}$	−	−	−	∄	+	0	−

$S = (-\infty, 2) \cup (\frac{9}{4}, \infty)$

(ii) $|x+1| > |2x-1|$

$(x+1)^2 > (2x-1)^2$

$x^2+2x+1 > 4x^2+2\cdot 2x\cdot(-1)+1$

$x^2+2x+1 > 4x^2-4x+1$

$0 > 3x^2-6x$

$\frac{6 \pm \sqrt{(6)^2-4\cdot 3\cdot 0}}{6}$

$\frac{6 \pm 6}{6}$ → $x_1 = 2$, $x_2 = 0$

$S = (0, 2)$

(b) Encuentre todas las soluciones de la siguiente ecuacion $\cos(3x) = \frac{1}{2}$

$\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

$2k\pi \pm \frac{\pi}{9}$

$\frac{\pi}{3} = 3x$

$\frac{\pi}{9} = x$

④ Sea $h(x) = -\frac{2x}{x+5}$

ⓐ Indique si $h(x)$ es par, impar, o ninguna de las dos

ⓑ Determine si $h(x)$ es una función inyectiva

ⓒ ¿Que condición debe cumplir una funcion para poseer inversa? En caso de ser posible calcule la funcion inversa de $h(x)$

ⓓ Determine la imagen de la funcion $h(x)$

ⓐ $h(x) = h(-x)$

$$-\frac{2x}{x+5} = -\frac{2\cdot(-x)}{-x+5}$$

$$-\frac{2x}{x+5} = -\frac{-2x}{-x+5}$$

No es par

$h(x) = -h(x)$

$$-\frac{2x}{x+5} = -\left(-\frac{2x}{x+5}\right)$$

$$-\frac{2x}{x+5} = \frac{2x}{x+5}$$

No es impar

ⓑ $f(x_1) = f(x_2)$

$$-\frac{2x_1}{x_1+5} = -\frac{2x_2}{x_2+5}$$

$$-2x_1(x_2+5) = -2x_2(x_1+5)$$

$$-2x_1x_2 - 10x_1 = -2x_2x_1 - 10x_2$$

$$-10x_1 = -10x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Es inyectiva

ⓒ Para poseer una funcion inversa, la funcion debe ser inyectiva

$$y = -\frac{2x}{x+5}$$

$$x = -\frac{2y}{y+5}$$

$$x(y+5) = -2y$$

$$xy + 5x = -2y$$

$$xy + 2y = -5x$$

$$y(x+2) = -5x$$

$$y = \frac{-5x}{x+2}$$

ⓓ La imagen de la función es el dominio de la inversa

$$\text{Img } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$$