Parcial I

PARCIAL 1

① Sean $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{1+x}$

ⓐ Determine el dominio de $f(x)$ y $g(x)$

ⓑ Calcule $(f+g)(1)$

ⓒ Obtenga la función $f \cdot g$ y determine su dominio

ⓓ Obtenga la función $f \circ g$ y determine su dominio

ⓐ $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

$$4 - x^2 \geqslant 0$$
$$-x^2 \geqslant -4$$
$$x^2 \leqslant 4$$
$$x \leqslant \pm 2$$

$g(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$\text{Dom } g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \}$

$\text{Dom } f = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2 \}$

ⓑ $(f+g)(x) = \sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{x+1}$

$$(f+g)(1) = \sqrt{4-1^2} + \frac{1}{1+1}$$
$$(f+g)(1) = \sqrt{3} + \frac{1}{2}$$
$$(f+g)(1) = \frac{2\sqrt{3}+1}{2}$$

ⓒ $(f \cdot g)(x) = \sqrt{4-x^2} \cdot \dfrac{1}{x+1}$

$(f \cdot g)(x) = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}$ $\rightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$ $\rightarrow x \neq 1$

$\text{Dom } (f \cdot g) = \{ x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 2 \wedge x \neq 1 \}$

ⓓ $(f \circ g)(x) = \sqrt{4 - \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^2}$

$$4 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 \geqslant 0$$
$$4 - \frac{1}{(1+x)^2} \geqslant 0$$
$$\frac{4(1+x)^2 - 1}{(1+x)^2} \geqslant 0$$
$$\frac{4(x^2+2x+1)-1}{x^2+2x+1} \geqslant 0$$
$$\frac{4x^2+8x+4-1}{(x+1)(x+1)} \geqslant 0$$

$$\frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3}}{8}$$
$$\frac{-8 \pm \sqrt{64-48}}{8}$$
$$\frac{-8 \pm 4}{8}$$

$x_1 = -\dfrac{4}{8} = -\dfrac{1}{2}$

$x_2 = -\dfrac{12}{8} = -\dfrac{3}{2}$

$16 \times 3 = 48$; $64 - 48 = 16$

$\text{Dom } f \circ g = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{3}{2} \wedge x \geqslant -\frac{1}{2} \right\}$

② ⓐ Encuentre el centro y semiejes de la elipse definida por la siguiente ecuacion y grafiquela

$$x^2+4y^2-2x-16y=-13$$

$$x^2-2x+4y^2-16y=-13$$

$$(x^2-2x+1)-1^2+4(y^2+4y+4)-16=-13$$

$$(x-1)^2+4(y^2+2)=-13+1+16$$

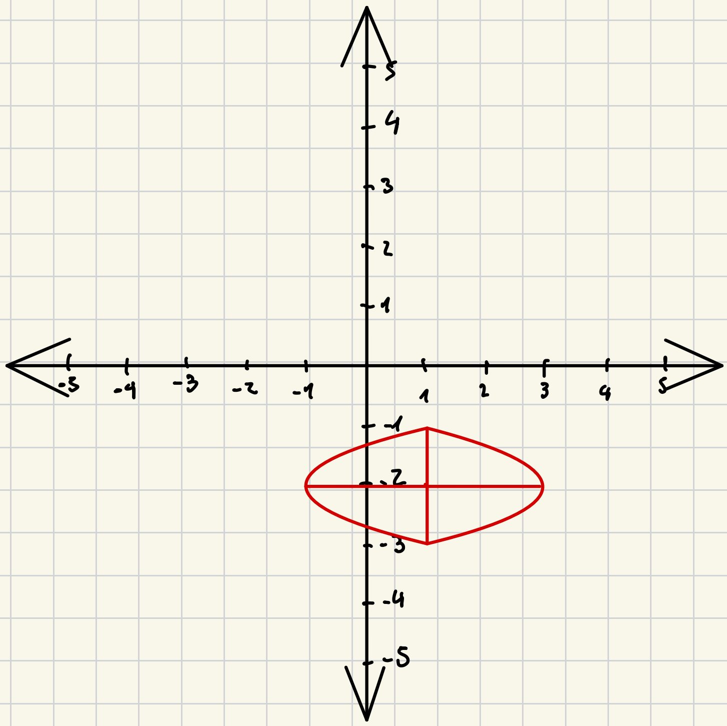
$$(x-1)^2+4(y+2)^2=4$$

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{1}=1$$

$C=(1,-2)$

$a=2$

$b=1$



ⓑ Empleando transformaciones elementales esboce el gráfico de la siguiente función

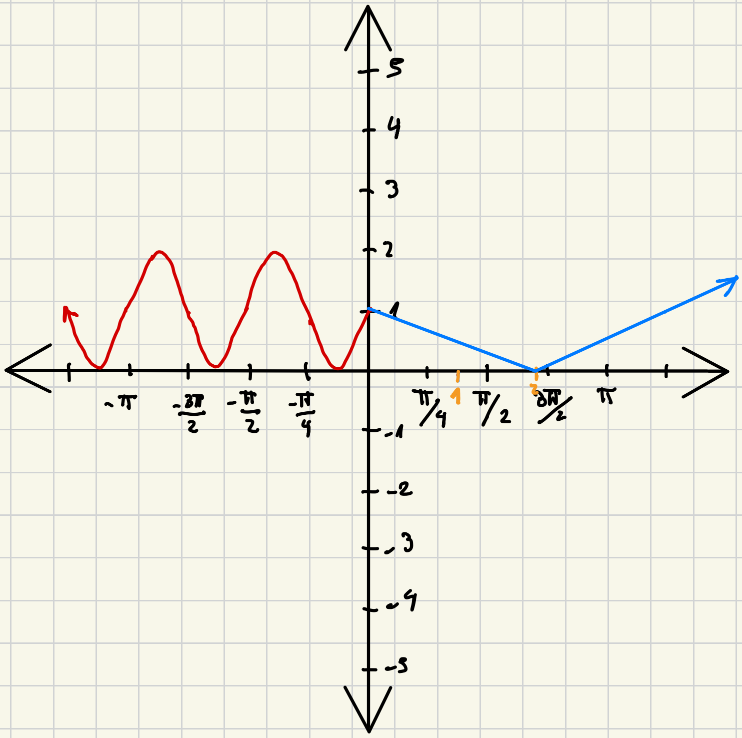
$$j(x)=\begin{cases} 1+\operatorname{sen}(2x) & \text{si } x\leq 0 \\ \left|\frac{1}{2}x-1\right| & \text{Si } x>0 \end{cases}$$

$$P=\frac{2\pi}{2}=\pi$$

$$\left|\frac{1}{2}x-1\right| \begin{cases} \frac{1}{2}x-1 & x\geq 2 \\ -\left(\frac{1}{2}x-1\right) & x<2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}x-1=0$$

$$x=2$$



3 a) Determine todos los valores de x que satisfacen las siguientes ecuaciones. Exprese el resultado como un intervalo o union de intervalos y dibújelos en la recta real.

i) $\frac{x-1}{x-2} \leq 5$

$\frac{x-1}{x-2} - 5 \leq 0$

$\frac{(x-1)-5(x-2)}{x-2} \leq 0$

$\frac{x-1-5x+10}{x-2} \leq 0$

$\frac{-4x+9}{x-2} \leq 0$

$-4x+9=0$

$x = \frac{9}{4}$

$x=2$

$f(x)$	$(-\infty,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\frac{9}{4})$	$\frac{9}{4}$	$(\frac{9}{4},\infty)$
$-4x+9$	+	+	+	+	+	0	−
$x-2$	−	−	−	0	+	+	+
$\frac{-4x+9}{x-2}$	−	−	−	$\nexists$	+	0	−

$S = (-\infty, 2) \cup (\frac{9}{4}, \infty)$

ii) $|x+1| > |2x-1|$

$(x+1)^2 > (2x-1)^2$

$x^2+2x+1 > 4x^2+2\cdot 2x\cdot(-1)+1$

$x^2+2x+1 > 4x^2-4x+1$

$0 > 3x^2-6x$

$\frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2-4\cdot 3\cdot 0}}{6}$

$\frac{6 \pm 6}{6} < \begin{matrix} x_1=2 \\ x_2=0 \end{matrix}$

$S = (0,2)$

b) Encuentre todas las soluciones de la siguiente ecuacion $\cos(3x) = \frac{1}{2}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$2k\pi \pm \frac{\pi}{9}$

$\frac{\pi}{3} = 3x$

$\frac{\pi}{9} = x$

④ Sea $h(x) = -\frac{2x}{x+5}$

ⓐ Indique si $h(x)$ es par, impar, o ninguna de las dos

ⓑ Determine si $h(x)$ es una función inyectiva

ⓒ ¿Que condición debe cumplir una funcion para poseer inversa? En caso de ser posible calcule la funcion inversa de $h(x)$

ⓓ Determine la imagen de la funcion $h(x)$

ⓐ $h(x) = h(-x)$

$$-\frac{2x}{x+5} = -\frac{2\cdot(-x)}{-x+5}$$

$$-\frac{2x}{x+5} = -\frac{-2x}{-x+5}$$

No es par

$h(x) = -h(x)$

$$-\frac{2x}{x+5} = -\left(-\frac{2x}{x+5}\right)$$

$$-\frac{2x}{x+5} = \frac{2x}{x+5}$$

No es impar

ⓑ $f(x_1) = f(x_2)$

$$-\frac{2x_1}{x_1+5} = -\frac{2x_2}{x_2+5}$$

$$-2x_1(x_2+5) = -2x_2(x_1+5)$$

$$-2x_1x_2 - 10x_1 = -2x_2x_1 - 10x_2$$

$$-10x_1 = -10x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Es inyectiva

ⓒ Para poseer una funcion inversa, la funcion debe ser inyectiva

$$y = -\frac{2x}{x+5}$$

$$x = -\frac{2y}{y+5}$$

$$x(y+5) = -2y$$

$$xy + 5x = -2y$$

$$xy + 2y = -5x$$

$$y(x+2) = -5x$$

$$y = \frac{-5x}{x+2}$$

ⓓ La imagen de la función es el dominio de la inversa

$$\text{Img } f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\}$$