① ⓐ Halle todas las soluciones de la siguiente ecuacion

$\ln(x-2)+\ln(x+1) = \frac{1}{2}\left[\ln(200x)-\ln(2x)\right]$

$\ln\left((x-2)\cdot(x+1)\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{200x}{2x}\right)$

$\ln\left((x-2)\cdot(x+1)\right) = \frac{1}{2}\ln(100)$

$\ln\left((x-2)\cdot(x+1)\right) = \ln(10)$

$(x-2)(x+1) = 10$

$x^2+x-2x-2 = 10$

$x^2-x-12 = 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2}$ $\quad$ $\begin{matrix}12\\ \times 4\\ \hline 48\end{matrix}$

$\frac{1\pm 7}{2} < \begin{matrix} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{matrix}$ → No es solucion ya que el argumento del ln no puede ser menor a 0.

$x = 4$

ⓑ Calcule el siguiente limite, si existe. De no existir explique por que.

$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{|x+2|}$ $\quad$ $|x+2| = \begin{cases} x+2 & si\ x \geq -2 \\ -(x+2) & si\ x < -2 \end{cases}$ $\quad$ $x+2=0$, $x=-2$

$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+2}} = \lim_{x\to -2^+} x-2 = -4$ //

$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2-4}{-(x+2)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{-\cancel{(x+2)}} = \lim_{x\to -2^-} -(x-2) = -(-2-2) = 4$ //

$\lim_{x\to -2} f(x) = \nexists$ ya que el limite por derecha no es igual al limite por izquierda.

② Considere la funcion $f(x) = \frac{x^2+5x}{50-2x^2}$. Determine si existen asintotas verticales y/o horizontales de f. (Calcule todos los limites involucrados y evalue la existencia).

Posibles AV: $50-2x^2=0$

$-2x^2 = -50$

$x = \pm\sqrt{25}$

$x = \pm 5$

$x^2+5x \neq 0$

$x=5$

$5^2+5\cdot 5 = 50$

$x=-5$

$(-5)^2+5\cdot(-5) = 0$ $\}$ -5 no es AV.

AV: $x=5$

AH: $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5x}{50-2x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(\frac{50}{x^2}-2\right)} = -\frac{1}{2}$

AH: $-\frac{1}{2}$

③ Analice la continuidad de la siguiente funcion en el punto $x=0$. En caso de encontrar una discontinuidad clasifiquela.

$f(x) = \begin{cases} e^{1/x} & x<0 \\ \frac{\text{sen}(2x)+\text{sen}(3x)}{x} & x>0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

1. $f(0) = 0$

2. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(2x)+\text{sen}(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(2x)}{x} + \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(3x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\text{sen}(2x)}{x}\cdot\frac{2}{2} + \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(3x)}{x}\cdot\frac{3}{3} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(2x)}{2x}\cdot\frac{2}{1} + \lim_{x\to 0^+}\frac{\text{sen}(3x)}{3x}\cdot\frac{3}{1} = 5$ //

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = 0$ //

$\lim_{x\to 0} f(x) = \nexists$

f(x) es discontinua en $x=0$. Esta es una discontinuidad de Salto ya que sus limites laterales tienden a valores finitos.

④ Demuestre que la ecuacion $\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \ln(x+1)$ tiene al menos una solucion en el intervalo $(0,\frac{\pi}{2})$. En caso de usar un teorema enunciarlo

$f(x) = \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right) - \ln(x+1)$

Por el teorema del valor intermedio:

tomamos $[0, \pi/2]$

$f(0) = \text{sen}(\pi/2) - \ln(1) = 1 - 0 = 1$ //

$f(\pi/2) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) - \ln(\pi/2) = \text{sen}(\pi) - \ln(\pi/2) = 0 - \ln(\pi/2)$

$\Rightarrow f(\frac{\pi}{2}) < f(c) < f(0)$

$-\ln(\pi/2) < c < 1$

El T.V.I dice que si una funcion es continua en un intervalo cerrado [a,b] y "N" es un valor entre f(a) y f(b), existe un "c" tal que $f(c) = N$

$f(a) < f(c) < f(b)$

Como tenemos un valor negativo y uno positivo, y sabemos que esta funcion es continua en el intervalo (sen(x) es continua para $x \in \mathbb{R}$ y ln es continua en su dominio $x \in \mathbb{R} / x > -1$) si o si cortara el eje x.

⑤ En cada inciso escriba claramente las reglas de derivacion utilizadas

ⓐ Calcule la derivada de las siguientes funciones

ⓘ $f(x) = \frac{e^{5x^3}(4\,\text{sen}(x)+2)}{x^7+\pi}$

$f'(x) = \frac{\left(e^{5x^3}\cdot 15x^2\cdot(4\,\text{sen}(x)+2) + e^{5x^3}\cdot 4\cos(x)\right)\cdot(x^7+\pi) - \left(e^{5x^3}\cdot(4\,\text{sen}(x)+2)\right)\cdot 7x^6}{(x^7+\pi)^2}$

Derivada del producto y derivada de cociente

ⓘⓘ $g(x) = \cos(x)^{\text{arctg}(x)} = e^{\ln(\cos(x))\cdot\text{arctg}(x)}$

$g'(x) = e^{\ln(\cos(x))\cdot\text{arctg}(x)}\cdot\left(\frac{1}{\cos(x)}\cdot -\text{sen}(x)\cdot\text{arctg}(x) + \ln(\cos(x))\cdot\frac{1}{1+x^2}\right)$

Regla de la cadena y derivada del producto

$= e^{\ln(\cos(x))\cdot\text{arctg}(x)}\left(\frac{-\text{sen}(x)\cdot\text{arctg}(x)}{\cos(x)} + \frac{\ln(\cos(x))}{1+x^2}\right)$ //

No estoy seguro si estan bien

(b) De la ecuacion de la recta tangente al gráfico $f(x) = 2\tan^2(x - \pi/2)$ en $x = \pi/4$

$y = 2\tan^2(\pi/4 - \pi/2)$

$y = 2\tan^2(-\pi/2)$

$y = 2(-1)^2$

$y = 2$

punto $\rightarrow (\pi/4, 2)$

$f'(x) = 4\tan(x - \pi/2) \cdot \sec^2(x - \pi/2)$

$f'(\pi/4) = 4\tan(\pi/4 - \pi/2) \cdot \sec^2(\pi/4 - \pi/2)$

$= 4 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\cos^2(-\pi/4)} = \frac{-4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}$

$= \frac{-4}{\frac{\cancel{2}\,1}{\cancel{4}\,2}} = \frac{-8}{1} = -8$ //

$t(x) = Ax + B$

$2 = -8 \cdot \frac{\pi}{4} + B$

$2 = -2\pi + B$

$2 + 2\pi = B$

$t(x) = -8x + (2 + 2\pi)$ //