① (3 pts) Sea $\mathbb{R}[t]_2$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 2, y sea $T: \mathbb{R}[t]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[t]_2$ la transformacion lineal dada por $T(p(x)) = p'(x) + 2p(x)$

ⓐ Calcular la imagen de T

Sabemos que $\{1, x, x^2\}$ es base de $\mathbb{R}[t]_2$ $\therefore$ evaluaremos la tl en estos valores para encontrar su imagen

$T(1) = 0 + 2\cdot 1 = 2$

$T(x) = 1 + 2x = 2x+1$ $\therefore$ la imagen esta generada por $\{2, 2x+1, 2x+2x^2\}$

$T(x^2) = 2x + 2x^2$

Para calcular el nucleo, por definicion son los vectores que al ingresarlos en la tl dan como resultado 0.

$T(v) = 0$ $\therefore$ $p'(x) + 2p(x) = 0$ $\therefore$ se obserba que $p'(x) = -2p(x)$ y esto no es posible $\therefore$ la unica forma de que la tl tenga como nucleo $\{0\}$

$Im(T) = \{2, 2x+1, 2x^2+2x\}$ y $Nu(T) = \{0\}$ podemos ver que por el teorema de la dimension se comprueban los resultados $\dim(\mathbb{R}[t]_2) = 3$, $\dim(Im(T)) = 3$ y $\dim(Nu(T)) = 0$

$\therefore$ $3 = 3+0 \Rightarrow 3 = 3$.

ⓑ Dadas $\beta_1 = \{1+t, t+t^2, -t^2\}$ y $\beta_2 = \{1+t, t^2+t+1, t^2+1\}$ de $\mathbb{R}[t]_2$, calcular $[T]_{\beta_1\beta_2}$

$T(1+t) = 1+2+2t = 3+2t$

$T(t+t^2) = 1+2t+2t+2t^2 = 1+4t+2t^2$

$T(-t^2) = -2t-2t^2$

ⓘ $[3+2t]_{\beta_2} = a(1+t) + b(t^2+t+1) + c(t^2+1) = 3(1+t) + (-1)(t^2+t+1) + 1(t^2+1)$ $\therefore [T(1+t)]_{\beta_2} = (3,-1,1)$

ⓘⓘ $[1+4t+2t^2]_{\beta_2} = a(1+t) + b(t^2+t+1) + c(t^2+1) = (-1)(1+t) + 5(t^2+t+1) + (-3)(t^2+1)$ $\therefore [T(t+t^2)]_{\beta_2} = (-1,5,-3)$

ⓘⓘⓘ $[-2t-2t^2]_{\beta_2} = a(1+t) + b(t^2+t+1) + c(t^2+1) = 2(1+t) + (-4)(t^2+t+1) + 2(t^2+1)$ $\therefore [T(-t^2)]_{\beta_2} = (2,-4,2)$

ⓘ $a + at + bt^2 + bt + b + ct^2 + c = t^2(b+c) + t(a+b) + a+b+c \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 3 \\ a+b = 2 \\ b+c = 0 \Rightarrow b = -c \end{cases}$

$a + (-c) + c = 3$ $\quad a = 3$ $\quad 3 + b = 2$ $\quad b = -1 \Rightarrow c = 1$

ⓘⓘ $a + at + bt^2 + bt + b + ct^2 + c = t^2(b+c) + t(a+b) + a+b+c \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 1 \\ a+b = 4 \Rightarrow b = 4-a \\ b+c = 2 \Rightarrow c = 2-b \end{cases}$

$a + b + (2-b) = 1$ $\quad a + 2 = 1$ $\quad a = -1 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow c = -3$

ⓘⓘⓘ $a + at + bt^2 + bt + b + ct^2 + c = t^2(b+c) + t(a+b) + a+b+c \Rightarrow \begin{cases} a+b+c = 0 \\ a+b = -2 \Rightarrow a = -2-b \\ b+c = -2 \Rightarrow c = -2-b \end{cases}$

$(-2-b) + b + (-2-b) = 0$ $\quad -4-b = 0$ $\quad -4 = b \Rightarrow a = c = 2$

$$[T]_{\beta_1,\beta_2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 5 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

② (20 pts) Sea $T: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ la siguiente transformacion lineal: $T(x,y,z) = (x-y, -x+2y-z, -y+z)$, $x,y,z \in \mathbb{C}$

ⓐ Calcular los autovalores de T y sus correspondientes autoespacios

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \end{matrix}$$

$((1-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)) + ((-1)\cdot(-1)\cdot 0) + (0\cdot(-1)\cdot(-1)) - (0\cdot(2-\lambda)\cdot 0) - ((-1)\cdot(-1)\cdot(1-\lambda)) - ((1-\lambda)\cdot(-1)\cdot(-1))$

$((2-\lambda-2\lambda+\lambda^2)\cdot(1-\lambda)) + 0 + 0 - 0 - (1-\lambda) - (1-\lambda)$

$((2-3\lambda+\lambda^2)(1-\lambda)) - 1 + \lambda - 1 + \lambda$

$(2-2\lambda-3\lambda+3\lambda^2+\lambda^2-\lambda^3) - 2 + 2\lambda$

$2 - 5\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + 2\lambda$

$-3\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = -\lambda(\lambda^2 - \lambda - 3\lambda + 3) = -\lambda(\lambda(\lambda-1) - 3(\lambda-1)) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-3)$

$\therefore \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$

Los autovalores son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

Para $\lambda_1=0$ $\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \Rightarrow x=y \\ -x+2y-z=0 \\ -y+z=0 \Rightarrow z=y\end{cases}$ $\quad -y+2y-y=0$, $0=0$ $\quad \therefore V_0=\langle(1,1,1)\rangle$

Para $\lambda_2=1$ $\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y=0 \Rightarrow y=0 \\ -x+y-z=0\end{cases}$ $\quad -x-z=0$, $x=-z$ $\quad \therefore (-z,0,z)=z(-1,0,1) \therefore V_1\ \langle(-1,0,1)\rangle$

Para $\lambda_3=3$ $\begin{pmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x-y=0 \Rightarrow y=-2x \\ -x-y-z=0 \\ -y-2z=0 \Rightarrow y=-2z\end{cases}$

$-z-(-2x)-z=0$
$-2z+2x=0$
$2x=2z$
$x=z$

$\therefore (z,-2z,z)=z(1,-2,1)$
$V_3=\langle(1,-2,1)\rangle$

(b) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow[f_3-2f_2]{f_1+f_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow{f_3\cdot\frac{1}{6}} \begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[f_2+3f_3]{f_1+2f_3} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

Como los autovectores forman una $\therefore$ base de $\mathbb{C}^3$ la matriz es diagonalizable

$C^{-1}= \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[f_3-f_1]{f_2-f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[f_3-2f_2]{f_1+f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 1 & -2 & 1\end{array}\right) \xrightarrow{f_3\cdot\frac{1}{6}} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{array}\right)$

$\xrightarrow[f_2+3f_3]{f_1+2f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{array}\right) \therefore C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$

$$B=C^{-1}\cdot A\cdot C = \begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

(5) (20 pts) Sea $\mathbb{R}^3$ el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Consideramos la función $\langle\,,\rangle:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ $\quad \langle(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle = x_1x_2-2x_1y_2-2x_2y_1+5y_1y_2+z_1z_2$

(i) $\langle\alpha u+\beta v, w\rangle = \alpha\langle u,w\rangle+\beta\langle v,w\rangle$

$u=(u_1,u_2,u_3)$ $\quad v=(v_1,v_2,v_3)$, $\quad w=(w_1,w_2,w_3)$

(i) $(\alpha u_1+\beta v_1)w_1 - 2((\alpha u_1+\beta v_1)w_2) - 2(w_1(\alpha u_2+\beta v_2)) + 5(\alpha u_2+\beta v_2)w_3 + (\alpha u_3+\beta v_3)w_3$

$\alpha u_1w_1+\beta v_1w_1 - 2(\alpha u_1w_2+\beta v_1w_2) - 2(\alpha u_2w_1+\beta v_2w_1) + 5(\alpha u_2w_3+\beta v_2w_3) + \alpha u_3w_3+\beta v_3w_3$

$\alpha u_1w_1+\beta v_1w_1 - 2\alpha u_1w_2 - 2\beta v_1w_2 - 2\alpha u_2w_1 - 2\beta v_2w_1 + 5\alpha u_2w_3 + 5\beta v_2w_3 + \alpha u_3w_3+\beta v_3w_3$ $\quad$ * Revisar calculos

$\alpha(u_1w_1 - 2u_1w_2 - 2u_2w_1 + 5u_2w_3 + u_3w_3) + \beta(v_1w_1 - 2v_1w_2 - 2v_2w_1 + 5v_2w_3 + v_3w_3)$ $\quad$ pero esta es la idea

$\alpha\langle u,w\rangle + \beta\langle v,w\rangle$

(ii) $\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$

$u_1v_1 - 2u_1v_2 - 2v_1u_2 + 5u_2v_2 + u_3v_3 = v_1u_1 - 2v_1u_2 - 2u_1v_2 + 5v_2u_2 + v_3u_3$

$\cancel{u_1v_1} - 2u_1v_2 - 2v_1u_2 + \cancel{5u_2v_2} + \cancel{u_3v_3} = \cancel{v_1u_1} - 2v_1u_2 - 2u_1v_2 + \cancel{5v_2u_2} + \cancel{v_3u_3}$

$-2\cancel{u_1v_2} - 2\cancel{v_1u_2} = -2\cancel{v_1u_2} - 2\cancel{u_1v_2}$

(iii) $\langle(x,y,z),(x,y,z)\rangle \geq 0$

$= x^2-2xy-2xy+5y^2+z^2 \geq 0$

$= x^2-4xy+5y^2+z^2 \geq 0$ $\qquad$ si $(x,y,z)\neq 0 \Rightarrow x^2-4xy+5y^2+z^2 \geq 0$

$\therefore$ es un p.i

ⓑ Dado el subespacio W generado por los vectores $\{(1,1,1), (0,1,1)\}$, encontrar una base ortogonal de W

④ Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta

ⓐ (10 pts) Si una Matriz $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ tiene tres autovalores, entonces es diagonalizable

Que tenga 3 autovalores implica que tiene 3 autovectores que son l.i $\therefore$ se puede formar una base de $\mathbb{R}^3$ (en este caso) $\therefore$ significa que es diagonalizable

ⓑ (10 pts) Existe un isomorfismo entre $(\mathbb{R}^5)^*$ y $M_{2x3}(\mathbb{C})$

$\dim((\mathbb{R}^5)^*) = 5 = \dim \mathbb{R}^5$ y trataremos la matriz como un vector de $\mathbb{C}^6$, suponiendo que $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ $\therefore$ el vector seria $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{C}^6$

Observamos que $\dim(\mathbb{C}^6) = 6$, como los isomorfismos en sus condiciones dice que el espacio de salida tiene que tener la misma dimension que el de llegada. $\therefore$ no existe

ⓒ (10 pts) Una matriz cuadrada es inversible si solo si A^t es inversible

Consideremos A y A^{-1}

$A \cdot A^{-1} = Id_n$

$(A \cdot A^{-1})^t = (Id_n)^t$

$A^t \cdot (A^{-1})^t = (Id_n)^t$

$(A^{-1})^t = (Id_n)^t \cdot (A^{-1})^t$

$(A^{-1})^t = (A^{-1})^t$

Tambien podemos observar a travez del determinante

ya que $\det(A) = \det(A^t)$, entonces si $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \det(A^t)$ tambien