① (12 pts) Sea una matriz de tamaño $n \times n$ con coeficientes del cuerpo k. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes

- A es invertible
- El sistema $AX = Y$ tiene una unica solucion para todo $Y \in k^{n\times 1}$
- El sistema homogeneo $AX = 0$ tiene una unica solucion (la trivial)

- Existe $B = A^{-1}$ tq $A \cdot B = Id$
- $AX = Y$ si consideramos el caso particular $AX = 0$ tiene una unica solucion
- $AX = 0$ tiene unicamente la solucion trivial $\therefore Nu(A) = \{0\} \Rightarrow$ es un monomorfismo, $\dim(Im(A)) = n$ $\therefore$ es un epimorfismo $\therefore$ es un isomorfismo y como el espacio de salida es de igual dimension que el de llegada $\therefore$ es invertible

② (12 pts) Sea k un cuerpo y sean V y W dos k-espacios vectoriales, donde V es de dimension finita. Sea $f: V \longrightarrow W$ una transformacion lineal.
Probar que $\dim(Im(f)) = \dim(V) - \dim(Nu(f))$

Por el teorema de la dimension sabemos que $\dim(V) = \dim(Im(f)) + \dim(Nu(f)) \Rightarrow \dim(V) - \dim(Nu(f)) = \dim(Im(f))$

③ Determinar si cada una de las siguentes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada

ⓐ (3 pts) Sea $f: V \longrightarrow W$ una transformacion lineal. Sean $v_1, \dots, v_n \in V$ tales que el conjunto $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es linealmente independente.
Entonces $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente independente.

Supongamos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es linealmente dependiente. Entonces existen escalares $c_i \in K$ con $i = 1, \dots, n$, no todos 0 tq
$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0$. Aplicamos f de ambos lados $f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) = f(0)$. Sabemos que $f(0) = 0$
$\Rightarrow c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2) + \dots + c_n (f v_n) = 0$, como sabemos que $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es li, entonces la unica solucion es
$c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ $\therefore \{v_1, \dots, v_n\}$ es li $\therefore$ verdadera

ⓑ (3 pts) Sea V un espacio vectorial de dimension finita. Existe isomorfismo V y V^*
$\dim(V) = \dim(V^*) = n$ $\therefore$ si Definimos una tl $f: V \longrightarrow V^*$ por teo. dim. $\dim(V) = \dim(Nu(f)) + \dim(Im(f))$. si suponemos que el nucleo es $\{0\}$ $\dim(V^*) = \dim(Im(T))$ $\therefore V^* = Im(T)$ $\therefore$ verdadero

Parte Practica

④ (15 ptos) Sea $T: \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_n$ la transformacion lineal tal que $T(p(x)) = x\,p'(x) + p(1)$. Probar que $T = n!$

$$T(1) = 1$$
$$T(x) = x + 1$$
$$T(x^2) = 2x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$
$$\vdots$$
$$T(x^n) = nx^n + 1$$

∴ como es una matriz diagonal el determinante es el producto de la diagonal

$\det = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$

⑤ (15 ptos) Sea $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del K-espacio vectorial V y consideramos $v_1 = u_1$, $v_2 = u_1 - u_2$, $v_3 = u_1 - u_2 + u_3$, $v_4 = u_1 - u_2 + u_3 - u_4$

Probar que para $n = 2, 3, 4$ el subesespacio generado por $u_1, \ldots, u_n$ coincide con el subespacio generado por $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Deducir que $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ tambien es una base de V.

$$u_2 = v_1 - v_2$$

$$\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \rangle = \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle \qquad u_3 = -v_2 + v_3$$

$$u_4 = v_3 - v_4$$

Para $n=2$

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$\alpha u_1 + \gamma u_2 = \alpha v_1 + \gamma(v_1 - v_2) = \alpha v_1 + \gamma v_1 - \gamma v_2 = (\alpha + \gamma) v_1 - \gamma v_2$ ∴ es una comb. lineal de v_1 y v_2 ∴ generan el mismo espacio

Para $n=3$

$$\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

$\alpha u_1 + \gamma u_2 + \varepsilon u_3 = \alpha v_1 + \gamma(v_1 - v_2) + \varepsilon(-v_2 + v_3) = \alpha v_1 + \gamma v_1 - \gamma v_2 - \varepsilon v_2 + \varepsilon v_3 = (\alpha + \gamma) v_1 + (-\gamma - \varepsilon) v_2 + \varepsilon v_3$

∴ es una comb lineal de v_1, v_2 y v_3 ∴ generan el mismo espacio

∴ $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es base de V

Para $n=4$

$$\langle u_1, u_2, u_3, u_4 \rangle = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$$

$a u_1 + b u_2 + c u_3 + d u_4 = a v_1 + b(v_1 - v_2) + c(-v_2 + v_3) + d(v_3 - v_4)$ ∴ es una comb lineal de v_1, v_2, v_3 y v_4

$a v_1 + b v_1 - b v_2 - c v_2 + c v_3 + d v_3 - d v_4$ ∴ generan el mismo espacio

$(a+b) v_1 + (-b-c) v_2 + (c+d) v_3 - d v_4$

⑥ Consideramos la funcion $\Phi: \mathbb{R}[x]_3 \times \mathbb{R}[x]_3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Phi(p, q) = \int_0^2 p(t) q(t)\, dt$

ⓐ (8 ptos) Probar que Φ es un producto interno

ⓘ $\Phi(\alpha p_1 + p_2, q) = \alpha \Phi(p_1, q) + \Phi(p_2, q)$

$$\int_0^2 (\alpha p_1(t) + p_2(t)) q(t)\, dt = \int_0^2 \alpha p_1(t) q(t) + p_2(t) q(t)\, dt$$
$$= \alpha \int_0^2 p_1(t) q(t)\, dt + \int_0^2 p_2(t) q(t)\, dt$$
$$= \alpha \Phi(p_1, q) + \Phi(p_2, q)$$

ⓘⓘ $\Phi(p, q) = \Phi(q, p)$

$$\int_0^2 p(t) q(t)\, dt = \int_0^2 q(t) p(t) = \Phi(q, p)$$

ⓘⓘⓘ $\Phi(p, p) \geq 0$ y $\Phi(p, p) = 0 \iff p = 0$

$\int_0^2 p^2(t)\, dt \geq 0$ verdad.

ⓑ (6 pts) Sea S el subespacio generado por $\{1, 1+4t^3\}$. Dar una base ortogonal de S para el producto interno del item anterior

$u_1 = v_1 = 1$ Ortogonalizamos v_2 con respecto a v_1

$$W_2 = v_2 - \frac{\Phi(v_2, u_1)}{\Phi(u_1, u_1)} \cdot u_1 = 1+4t^3 - \frac{\left(\int_0^2 1+4t^3\, dt\right)}{2} \cdot = 1+4t^3 - \frac{\left(\int_0^2 1\, dt + \int_0^2 4t^3\, dt\right)}{2}$$

$$W_2 = 1+4t^3 - 1 - \frac{\int_0^2 4t^3\, dt}{2} = 4t^3 - 8$$

$t^4 = 16$

$\therefore\ U = \{1,\ -8+4t^3\}$

ⓒ (6 pts) Dar una base de $S^\perp$

$\langle S, S^\perp\rangle = 0 \Rightarrow S \oplus S^\perp = \mathbb{R}[t]_3 \Rightarrow S^\perp = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_3 \mid \langle s, p(t)\rangle = 0,\ s \in S\}$

$S^\perp = \{p(t) \in \mathbb{R}[t]_3 \mid \langle 1, p(t)\rangle = 0 \wedge \langle 4t^3+1, p(t)\rangle = 0\}$

$$\int_0^2 p(t)\, dt = 0 \quad \wedge \quad \int (4t^3+1)p(t)\, dt = 0$$

$(at^3+bt^2+ct+d)(4t^3+1)$

$$\int_0^2 at^3 + bt^2 + ct + d\, dt = 0$$

$$\wedge \int_0^2 4at^6 + 4bt^5 + 4ct^4 + 4dt^3 + (at^3+bt^2+ct+d)$$

⑦ Sea $T: \mathbb{R}^{3\times3} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times3}$ $T(A) = A^t$, $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$

ⓐ (10 pts) Probar que 1 y -1 son autovalores de T

$T^2(A) = T(T(A)) = A \Rightarrow T^2 = Id \ \therefore\ T(T(A)) = T(\lambda A^t) = \lambda^2 A = A$

$\lambda^2 = A \cdot A^{-1}$

$\lambda^2 = 1 \qquad \lambda = \pm 1$

ⓑ (10 pts) Dar bases de los correspondientes autoespacios y decidir si T es diagonalizable

$$E_\lambda = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid T(A) = A^T = \lambda A\}$$

Para $\lambda_1 = 1$

$$E_1 = \{A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid T(A) = A^t = A\}$$
$$\{A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid A^t = A\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = a \\ b = d \\ c = g \\ d = b \\ e = e \\ f = h \\ g = c \\ h = f \\ i = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = d \\ c = g \\ d = b \\ f = h \\ g = c \\ h = f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = d \\ c = g \\ f = h \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ d & e & h \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E_{-1} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid T(A) = A^t = -A \right\}$$
$$= \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times3} \mid A^t = -A \right\}$$

$$-\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} -a = a \\ -b = d \\ -c = g \\ -d = b \\ -e = e \\ -f = h \\ -g = c \\ -h = f \\ -i = i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b = d \\ -c = g \\ -f = h \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & d & g \\ -d & 0 & h \\ -g & -h & 0 \end{pmatrix} = d\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$