① (3 pts) Decidir para cuales valores de $a \in \mathbb{R}$ el siguiente sistema tiene solucion.

$$\begin{cases} 3x + 3ay - 2z = 1 \\ 2y - az = 2 \\ x + ay - z = -1 \end{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3a & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -a & 2 \\ 1 & a & -1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \rightleftarrows f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -a & 2 \\ 3 & 3a & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - 3f_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -a & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \cdot \frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{a}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 - f_2 \cdot a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1+\frac{a^2}{2} & 1-a \\ 0 & 1 & -\frac{a}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 + f_3 \cdot \frac{a}{2}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1+\frac{a^2}{2} & 1-a \\ 0 & 1 & 0 & 1+2a \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 + f_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{a^2}{2} & 5-a \\ 0 & 1 & 0 & 1+2a \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 - f_3 \frac{a^2}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5-a-\frac{a^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1+2a \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

llegamos a una MERF $\therefore$ $x = -\frac{a^2}{2} - a + 5$, $y = 1+2a$, $z = 4$

$\therefore$ el sistema tiene infinitas soluciones de la forma

$(x, y, z) = (-\frac{a^2}{2} - a + 5, 1+2a, 4)$

② (2.5 pts) Decidir si existe matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. En caso afirmativo calcularla

Suponemos que existe $A^{-1} = B$ tq $A \cdot B = Id_3$. Calcularemos la inversa expandiendo la matriz A con Id_3

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \cdot \frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_3 - 4f_1]{f_2 + 2f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Observamos que se nos anulo una fila. Una matriz es inversible si y solo si es equivalente por filas a la Id. Como A tiene una fila nula, no es equivalente a la Id

$\therefore$ A no es inversible y no existe B tq $A \cdot B = Id$

③ ⓐ (1 pt) Dado un subconjunto G de un espacio vectorial V, dar la definicion de subespacio generado por G

El subespacio generado por G, $\langle G \rangle$, es el conjunto de las combinaciones lineales de los elementos de G

Siendo $a_1, \dots, a_n$ escalares y $v_1, \dots, v_n$ los elementos de G, $\langle G \rangle = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n\}$

ⓑ (1.5 pts) Decidir si el subconjunto $\{(3,1,4), (1,2,0), (3,2,0)\}$ de $(\mathbb{Z}_{11})^3$ es linealmente independiente

Para que un conjunto sea li, la unica combinacion lineal que sea igual a 0 es la que todos los escalares son 0 $\therefore$ formaremos una matriz con los vectores y por medio de operaciones elementales por fila intentaremos llegar a la Id.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_1 \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - 4f_1]{f_2 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -16 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{mod(11)} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \cdot 5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - 6f_2]{f_1 - 4f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -19 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -23 \end{pmatrix} \xrightarrow{mod(11)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 \cdot (-1)}$$

buscamos $3x \equiv 1$ (11)

$x = 4 \Rightarrow 12 \equiv 1$ (11)

buscamo $9x \equiv 1$ (11)

$x = 5 \Rightarrow 45 \equiv 1$ (11)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 - 5f_3]{f_1 - 3f_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ el conjunto $\{(3,1,4), (1,2,0), (3,2,0)\} \in (\mathbb{Z}_{11})^3$ es li

④ Determinar si cada una de las afirmaciones son verdaderos o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada

ⓐ (0.6 pts) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + x = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Para ser un subespacio, una de las condiciones que tiene que cumplir es la cerradura en la suma. Buscaremos un contraejemplo. Veamos que $(-1, 2, 3)$ y $(-1, 3, 2)$ estos vectores pertenecen a S ya que $(-1)^2 + (-1) = 0 = 1 - 1 = 0$ $\therefore$ $(-1, 2, 3) + (-1, 3, 2) = (-2, 5, 5)$, $(-2)^2 + (-2) = 0$, $4 - 2 = 0$, $2 = 0$ ABS

$\therefore$ $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + x = 0\}$ no es un subespacio $\Rightarrow$ a es Falso

ⓑ (0.4 pts) La interseccion de dos subespacios es un subespacio

Definamos V, W dos subespacios donde $V \cap W = \{v \in V \cap W \mid v \in V \wedge v \in W\}$

Vamos a probar si $V \cap W$ cumple las condiciones para ser subespacio: ⓘ Contiene $v = 0$, ⓘⓘ Cerradura en la suma, ⓘⓘⓘ Cerradura en la multiplicacion

ⓘ Como V y W son subespacios, los dos contienen $v = 0$ $\therefore$ $V \cap W$ tambien

ⓘⓘ Sean $v, w \in V \cap W \Rightarrow v, w \in V$ y $v, w \in W$. Como V y W son subespacios $v + w \in V$ y $v + w \in W$ $\therefore$ $v + w \in V \cap W$

ⓘⓘⓘ Sea $k \in \mathbb{R}$, $u \in V \cap W \Rightarrow u \in V$ y $u \in W$. Como V y W son subespacios $ku \in V$ y $ku \in W$ $\therefore$ $ku \in V \cap W$

$\therefore$ $V \cap W$ es un subespacio $\Rightarrow$ b es Verdadero

© (0.7 pts) Si A y B son matrices en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tq $AB=0$, entonces $A=0$ o $B=0$

Demostraremos por contraejemplo que $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0\\ 1\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow c \text{ es Falso}$$