1) a) $\overline{\overline{z}} = z$

$z = a+bi$

$\Rightarrow \overline{\overline{a+bi}} = z$

$\overline{a-bi} = z$

$a+bi = z$

b) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

$z_1 = a+bi$
$z_2 = c+di$

$\Rightarrow \overline{(a+bi)+(c+di)} = \overline{a+bi} + \overline{c+di}$

$\overline{(a+c)+(b+d)i} = a-bi + c-di$

$(a+c)-(b+d)i = a+c-(b+d)i$

c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$

$z_1 = a+bi$
$z_2 = c+di$

$\Rightarrow \overline{(ac-bd)+(ad+bc)i} = a-bi \cdot c-di$

$(ac-bd)-(ad+bc)i = (ac-bd)-(ad+bc)i$

d) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$z_1 = a+bi$
$z_2 = c+di$

$\Rightarrow |(a+bi)\cdot(c+di)| = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$|(ac-bd)+(ad+bc)i| = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$\sqrt{(ac)^2 \cancel{-2acbd} + (bd)^2 + (ad)^2 \cancel{+2adbc} + (bc)^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$\sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(d^2+c^2)} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$\sqrt{(c^2+d^2)(a^2+b^2)} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

$\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}$

e) $z\cdot\overline{z} = |z|^2$

$z = a+bi$

$(a+bi)(a-bi) = |a+bi|^2$

$(a^2 \cancel{-abi}) + (\cancel{abi} - b^2 i^2) = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$

$a^2+b^2 = a^2+b^2$

f) $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$

$\dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

$\dfrac{a-bi}{a^2+b^2} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

g) $|\overline{z}| = |z|$

$z = a+bi$

$|a-bi| = |a+bi|$

$\sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

2) a) $(-1+i)(3-2i)$

$= ((-1)\cdot 3 - 1\cdot(-2)) + (1\cdot 3 + (-1)\cdot(-2))i$

$= (-3+2) + (3+2)i = -1+5i$ //

b) $i^{131} - i^9 + 1 = i^{128}\cdot i^3 - i^8\cdot i + 1$

$= 1\cdot -i - i + 1 = 1-2i$ //

c) $1 - \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}} = 1 - \dfrac{1}{\frac{i}{i}+\frac{1}{i}}$

$= 1 - \dfrac{1}{\frac{1+i}{i}} = 1 - \dfrac{i}{1+i}$

$= \dfrac{1(1+i)-i}{1+i} = \dfrac{1}{1+i}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}$

$= \dfrac{1-i}{1\cancel{-i}\cancel{+i}-i^2} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$ //

d) $\dfrac{1+i}{1+2i} + \dfrac{1-i}{1-2i}$

$\dfrac{(1+i)(1-2i)+(1-i)(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$\dfrac{(1+i)(1-2i)+(1-i)(1+2i)}{|1+2i|^2}$

$\dfrac{1\cancel{-2i}\cancel{+i}-2i^2+1\cancel{+2i}\cancel{-i}-2i^2}{5}$

$\dfrac{2+2+2}{5} = \dfrac{6}{5}$ //

e) $\dfrac{4+2i}{6} - \dfrac{4+2i}{6i} = \dfrac{(4+2i)\cdot 6i - (4+2i)\cdot 6}{6\cdot 6i}$

$= \dfrac{(4+2i)\cdot(0+6i)-(4+2i)(6+0i)}{36i}$

$= \dfrac{(4\cdot 0-2\cdot 6)+(4\cdot 6+2\cdot 0)i-(4\cdot 6-2\cdot 0)+(4\cdot 0+2\cdot 6)i}{36i}$

$= \dfrac{-12+24i-(24+12i)}{36i} = \dfrac{-36+12i}{36i} = \dfrac{12(-3+i)}{36i}$

$= \dfrac{-3+i}{3i}\cdot\dfrac{-3i}{-3i} = \dfrac{(3+i)\cdot(-3i)}{3i\cdot(-3i)} = \dfrac{(3\cdot 0-1\cdot(-3))+(3\cdot(-3)+(1\cdot 0))i}{(0\cdot 0-3\cdot(-3))+(0\cdot(-3)+3\cdot 0)i}$

$= \dfrac{3-9i}{9} = \dfrac{1}{3} - i$ //

f) $\dfrac{3i}{1-2i} - \dfrac{1}{1+\frac{1}{i}} = \dfrac{3i\cdot\left(1+\frac{1}{i}\right) - 1\cdot(1-2i)}{(1-2i)\cdot\left(1+\frac{1}{i}\right)}$

3) a) Sea $a \in \mathbb{K}$, entonces

$a\cdot 0 = a(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0$, por la consistencia de la suma, $a\cdot 0 + (-a\cdot 0) = (a+0+a+0)+(-a+0)$, por def del op.

y por asoc. tenemos $0 = a\cdot 0 + (a\cdot 0 + (-a)\cdot 0) \Rightarrow 0 = a\cdot 0 + 0 \Rightarrow 0 = a\cdot a$

b) Si $a=0$, ya está. Si $a\neq 0$, entonces existe el inverso de a, $a^{-1}\in\mathbb{K}$

Luego $a^{-1}(ab) = a^{-1}\cdot 0 \Rightarrow (a^{-1}\cdot a)b = 0 \Rightarrow 1b = 0 \Rightarrow b = 0$

4) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$

Fijamos $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$

$+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$

$[a]+[b] = [a+b]$

$[a]\cdot[b] = [a\cdot b]$

$0_n = [0]$

$1_n = [1]$

Sabemos que es un anillo.

$\mathbb{Z}_n$ es un cuerpo $\Leftrightarrow$ n es primo

$[a]([b][c])$

$[a]([b\cdot c]) = [a\cdot(b\cdot c)]$

$= [(ab)c] = [ab][c] = [a][b][c]$

$\mathbb{Z}_n$ es cuerpo $\Rightarrow$ n es primo. Vamos a probar que si n no es primo $\Rightarrow \mathbb{Z}_n$ no es un cuerpo

Como n no es primo, existe $d\in\mathbb{Z} \mid 1<d<n$ y $d|n \Rightarrow 1<\frac{n}{d}<n \Rightarrow \frac{n}{d}\in\mathbb{Z}$ que cumple $\frac{n}{d}d = n$

$0_n = [0] = [d\frac{n}{d}] = [d]\cdot[\frac{n}{d}]$ como $[\frac{n}{d}] \neq [0] \neq [d]$, por 3b, $\mathbb{Z}_n$ no puede ser un cuerpo.

Si n es primo $\Rightarrow \mathbb{Z}_n$ es un cuerpo

Sea $[d]\in\mathbb{Z}_n \mid [d]\neq 0$, entonces la ecuacion lineal de congruencia $dx \equiv 1\ (n)$ tiene solucion $x\in\mathbb{Z}$,

pues $(d,1)=1$, entonces $[d][x] = [dx] = [1] \Rightarrow [x]$ es un inverso de $[d]$ en $\mathbb{Z}_n$

5) a) $-(a\cdot b) = (-a)\cdot b = a\cdot(-b)$

$-(a\cdot b) + a\cdot b = 0$

$\Rightarrow (-a)\cdot b + a\cdot b = b((-a)+a) = b\cdot 0 = 0$

$(-a)\cdot b$ y $a\cdot(-b)$ son opuestos a $a\cdot b$

b) Si $a\neq 0$ y $b\neq 0$ entonces $(a\cdot b)^{-1} = a^{-1}\cdot b^{-1}$

$(ab)^{-1}\cdot(ab) = 1$

$\Rightarrow (a^{-1}\cdot b^{-1})\cdot(a\cdot b) = (a^{-1}\cdot a)\cdot(b\cdot b^{-1}) = 1\cdot 1 = 1$

c) Si $a\neq 0$ y $ab=ac$ entonces $b=c$ (propiedad cancelativa)

$a\cdot a^{-1} = 1$

$\Rightarrow (ab)\cdot a^{-1} = (ac)\cdot a^{-1}$

$(a\cdot a^{-1})\cdot b = (a\cdot a^{-1})\cdot c$

$1\cdot b = 1\cdot c$

$b = c$

d) Si $a\neq 0$ entonces $\forall y\in\mathbb{K}$ existe un unico $x\in\mathbb{K} \mid a\cdot x = y$

$y = a\cdot x$

$\Rightarrow$

e) Si existe $n\in\mathbb{N} \mid a^n = 0$ entonces $a=0$ (notacion a.a.a n-veces)

$a^n = a\cdot a \cdot\ldots\cdot a$ n-veces

Si $a\neq 0$ entonces $a\cdot a^{-1} = 1$

$\underbrace{(a\cdot a^{-1})^n = 0}_{\text{ABS}}$

6) a) Verdadero

Si tomamos "na" como un polinomio (a+a+a ... +a n-veces) su unica raiz es 0

b) Verdadero

Tomamos "na" como un polinomio (a+a+a ... +a n-veces), entonces $n=0$, ya que a es no nulo

entonces si tomamos "nx" como un polinomio (x+x+x+...+x n-veces) sabiendo que $n=0$, $\forall x\in\mathbb{K}$ $nx=0$

⑦ Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial. Sean $a, a_1, a_2 \in K$ y $v, v_1, v_2 \in V$

ⓐ Si $a\cdot v = 0$ entonces $a=0$ ó $v=0$

$av = 0$

$\Rightarrow a=0$ ó $v=0$

Suponemos que $a\neq 0$

$a\cdot v = 0$

$a^{-1}(a\cdot v) = 0\cdot a^{-1}$

$v = 0$

ⓑ Si $a\neq 0$ y $a\cdot v_1 = a\cdot v_2$, entonces $v_1=v_2$

Como $a\neq 0$, $a\cdot a^{-1}=1$

$a\cdot v_1 = a\cdot v_2$

$a^{-1}(a\cdot v_1) = (a\cdot v_2)\cdot a^{-1}$

$(a^{-1}\cdot a)v_1 = (a\cdot a^{-1})\cdot v_2$

$v_1 = v_2$

ⓒ Si $v\neq 0$ $a_1\cdot v = a_2\cdot v$, entonces $a_1=a_2$

$a_1\cdot v = a_2\cdot v$

$a_1\cdot v + (-a_2\cdot v) = 0$

$a_1\cdot v + (-1)a_2\cdot v = 0$

$v(a_1-a_2) = 0$ Como $v\neq 0$

$\Rightarrow (a_1-a_2) = 0$

$\Rightarrow a_1 = a_2$

⑧ Sean $(K,+,\cdot)$ un cuerpo y n un numero natural. Consideramos el conjunto $K^n = \{(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n): x_1,x_2,x_3,\dots x_n \in K\}$

Usando las operaciones de K, definimos $+: K^n\times K^n \longrightarrow K^n$ $\quad (x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$

$\cdot: K\times K^n \longrightarrow K^n$ $\quad a(x_1,\dots x_n) = (a\cdot x_1,\dots,a\cdot x_n)$

Verificar que $(K^n,+,\cdot)$ es un espacio vectorial.

$a=(a_1,\dots,a_n)$

$b=(b_1,\dots,b_n)$

$c=(c_1,\dots,c_n)$

+	·
asoc	asoc
conm	unit.
neut.	
op.	

dist 2

Asociatividad +

$(a+b)+c = (a_1+b_1, a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)+(c_1,c_2,c_n)$

$=((a_1+b_1)+c_1, (a_2+b_2)+c_2,\dots,(a_n+b_n)+c_n)$

$= a+(b_1+c_1, b_2+c_2,\dots,b_n+c_n) = a+(b+c)$

Conmutatividad +

$a+b = b+a$

Unitario ·

$1\cdot v = v$

Asociatividad ·

$t(l a) = (t\cdot l)\cdot a$

$t,l\in K$ $\quad a=(a_1,a_2,\dots,a_n)\in K^n$

$t(l\cdot a) = t(l\cdot a_1, l\cdot a_2,\dots,l\cdot a_n)$

$=(t(l\cdot a_1), t(l\cdot a_2),\dots,t(l\cdot a_n))$

$=((t\cdot l)a_1,(t\cdot l)\cdot a_2,\dots,(t\cdot l)\cdot a_n)$

$=(t\cdot l)\cdot(a_1,a_2,\dots,a_n)$

$=(t\cdot l)\cdot a$

Distributividad (suma de conjuntos)

$t\cdot(a+b) = t\cdot a + t\cdot b$

$= t,(a_1+b_1, a_2+b_2,\dots,a_n+b_n)$

$=(t(a_1+b_1), t(a_2+b_2),\dots,t(a_n+b_n))$

$=((ta_1+tb_1),(ta_2+tb_2),\dots,(ta_n+tb_n))$ por prop distri de K

$=(ta_1,ta_2,\dots,ta_n)+(tb_1,tb_2,\dots,tb_n)$ por def suma de K^n

$=t(a_1,a_2,\dots,a_n)+t(b_1,b_2,\dots,b_n)$

$=t\cdot a + t\cdot b$

Neutro +

Denotamos $0=(0,\dots,0)$

$0+a = (0,\dots,0)+(a_1,a_2,\dots,a_n)$

$=(0+a_1,0+a_2,\dots,0+a_n) = (a_1,a_2,\dots,a_n)$

Opuesto +

Dado $a=(a_1,a_2,\dots,a_n)$, denotamos $(-a) = (-a_1,-a_2,\dots,-a_n)$

$a+(-a) = (a_1+(-a_1), a_2+(-a_2),\dots,a_n+(-a_n)) = (0,0,0) = 0$

Distributividad (suma de cuerpos)

$(t+l)\cdot a = ta + la$

$= m\cdot a$

$=(m_1 a_1, m_2\cdot a_2,\dots,m_n\cdot a_n)$

$=((t_1+l_1)\cdot a_1, (t_2+l_2)\cdot a_2,\dots,(t_n+l_n)\cdot a_n)$

$=((t_1\cdot a_1+l_1\cdot a_1),(t_2\cdot a_2+l_2\cdot a_2),\dots(t_n\cdot a_n+l_n\cdot a_n))$

$=(t_1\cdot a_1, t_2\cdot a_2,\dots t_n\cdot a_n)+(l_1\cdot a_1, l_2\cdot a_2,\dots,l_n\cdot a_n)$

$=t\cdot(a_1,a_2,\dots,a_n)+l\cdot(a_1,a_2,\dots,a_n)$

$=t\cdot a + l\cdot a$

⑨ Sea $(V,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial

ⓐ Sea -1 el opuesto aditivo de 1 en $\mathbb{K}$ para todo $v\in V$, vale que $-v$ (el opuesto aditivo de v en V) es igual a $(-1)\cdot v$

$1+(-1)=0$, $v+(-v)=0$

$\Rightarrow (-1)\cdot v = -v$

$v+(-1)\cdot v = v(1+(-1)) = v\cdot 0 = 0$

ⓑ Dados $v_1,v_2\in V$ se cumple que $-(v_1+v_2) = -v_1-v_2$

$(v_1+v_2)+(-(v_1+v_2)) = -v_1-v_2+(v_1+v_2)$

$0 = v_1-v_1+v_2-v_2$

$0 = 0$

ⓒ Si $a\in K$ y $v\in V$, entonces $-(a\cdot v) = (-a)\cdot v = a\cdot(-v)$

$-(a\cdot v) = (-a)\cdot v$

$a\cdot v+(-a)\cdot v = v(a+(-a)) = v\cdot 0 = 0$

$-(a\cdot v) = a\cdot(-v)$

$a\cdot v + a\cdot(-v) = a(v+(-v)) = a\cdot 0 = 0$

ⓓ Si $v\neq 0$ y $a_1\cdot v = a_2\cdot v$, entonces $a_1=a_2$

$a_1\cdot v = a_2\cdot v$ como $v\neq 0$

$a_1\cdot v - a_2\cdot v = 0$ $\quad a_1-a_2 = 0 \Rightarrow a_1=a_2$

$v(a_1-a_2) = 0$

10 a) $\mathbb{R}^n$, con $v_1 \oplus v_2 = v_1 - v_2$ y el producto usual

no cumple la conmutatividad +

b) $\mathbb{R}^n$ con la suma usual y $a \odot v = -av$

Es un espacio vectorial

c) $\mathbb{R}^2$, con la suma usual y $a \odot (x,y) = (ax, y)$

No cumple dist. respecto suma de escalares

d) $\mathbb{R}^2$ con $(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, 0)$, $a \odot (x,y) = (ax, 0)$

no existe elemento neutro +

no existe elemento neutro ·

e) El conjunto de polinomios con coeficientes reales, con el producto por reales usual, y con suma $p(x) \oplus q(x) = p'(x) + q'(x)$

el neutro de la suma no es unico

11) $\mathbb{R} + \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

Como $\mathbb{Q}$ es un subconjunto $\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \cdot \mathbb{Q}$ va a ser una operacion cerrada en $\mathbb{R}$

12) Es un espacio vectorial

13) a) No cumple opuesto de suma $S = \{(x_1, \dots x_n) \mid x_1 \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow u = (1,0,0) \in S$ y $\alpha = -1 \in \mathbb{K} \Rightarrow \alpha u = (-1, 0, \dots, 0) \notin S \Rightarrow S$ no es un Subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

b) Es un subespacio

i) $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in S \Rightarrow u_1 + u_2 = v_1 + v_2 = 0 \Rightarrow (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) = 0$

por otro lado $u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \in S$

ii) Sea $u \in S$ y $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow \alpha(u_1 + u_2) = 0 \Rightarrow \alpha u_1 + \alpha u_2 = 0 \Rightarrow \alpha u = (\alpha u_1, \alpha u_2, \dots, \alpha u_n) \in S$

c) No es cerrado en la suma $(0,1) + (1,0) = (1,1) \neq 0$

d) No es cerrado en la suma

e) Es un subespacio

$(\pi^{-21} \cdot u_1 + \sqrt{17} \cdot u_2 + 41 \cdot u_3)$

$(\pi^{-21} \cdot v_1 + \sqrt{17} \cdot v_2 + 41 \cdot v_3)$

$\pi^{-21}(v_1 + u_1) + \sqrt{17}(v_2 + u_2) + 41(u_3 + v_3)$

f) Si Asumimos que son numeros fijos.

es igual al ejercicio anterior, por lo

que seria un subespacio vectorial

Si no son fijos, no es un subespacio ya que

no se podria sacar factor al sumarlos, para

determinar los coeficientes que acompañan

14) Si W_1 y W_2 son SEV de V, probar que $W_1 \cup W_2$ es SEV $\Rightarrow W_1 \subset W_2$ ó $W_2 \subset W_1$

Supongamos que existe $w \in W_2$ y $w \notin W_1$ $(W_2 \not\subset W_1)$

$u \in W_1$ y $w \in W_2 \Rightarrow u, w \in W_1 \cup W_2 \Rightarrow \underbrace{w - u}_{w+(-u)} \in W_1 \cup W_2$. Si $w - u \in W_1 \Rightarrow \underbrace{(w-u)+u}_{w \in W_1} \in W_1$ ABSURDO $\Rightarrow w - u \in W_2$. Luego $w - (w-u) \in W_1 \Rightarrow W_1 \subset W_2$

Si $W_2 \subset W_1$, ya esta

Faltan 15, 16 y 17