Parte Teórica

① (12 pts) Demostrar que si V es un espacio vectorial de dimension n sobre un cuerpo k, entonces existe un isomorfismo $f: V \longrightarrow k^n$

Como $\dim(V) = \dim(k^n) = n$. Como f es un isomorfismo (inyectiva y sobreyectiva) sabemos que $Im(f) = k^n$ con dimension n entonces la dim del nucleo es 0 por el teorema de la dimension $\therefore$ existe un isomorfismo entre V y k^n

② (12 pts) Probar que en un espacio vectorial con producto interno un conjunto de vectores ortogonales son linealmente independientes

Consideremos $\{v_1, \dots, v_n\} \in V$ tq $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ para $i \neq j$ y $v_i \neq 0$, suponemos que existe una combinacion lineal tq $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ donde $a_i \in k$ para $i = 1, \dots, n$ haremos lo siguiente $\langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, v_k \rangle$ para $k = 1, \dots, n$. Por linealidad de producto interno $a_1 \langle v_1, v_k \rangle + a_2 \langle v_2, v_k \rangle + \dots + a_n \langle v_n, v_k \rangle$

Como v_i y v_k son ortogonales ($\langle v_i, v_k \rangle = 0$) para $i \neq k$ y como $\langle v_k, v_k \rangle > 0$ porque $v_k \neq 0$ la formula se reduciria a $a_k \langle v_k, v_k \rangle = 0$ ya que todos los otros a_i se multiplicaron por 0 obtenemos que $a_k = 0$ $\therefore$ $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ $\therefore$ un conjunto de vectores ortogonales son l.i.

③ Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada

ⓐ (3 pts) Toda transformacion lineal de un espacio vectorial de dimension uno en si mismo es un multiplo de la identidad

Suponiendo que V es un subespacio de dim 1 con base $\beta = \{v\}$ con $v \neq 0$, como es de dim 1 cualquiera de sus elementos puede expresarse como multiplo de v, αv con $\alpha \in k$ $\therefore$ la transformacion lineal seria $T(v) = \beta v$ con $\beta \in k$ $\therefore$ $T(\alpha v) = \beta(\alpha v) = (\beta \alpha) v$

$\therefore$ seria $T = \beta \cdot Id_V$ $\therefore$ verdadero

ⓑ (3 pts) Si V un espacio vectorial de dimension n entonces $\dim(Hom(V, V^*)) = n$

$\dim(V) = \dim(V^*) = n$. Sabemos que $Hom(V, V^*)$ es el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en V^* y sabemos que son isomorfismos (inyectivas y sobreyectivas) por lo tanto $Hom(V, V^*) = k^{n \times n}$ $\therefore$ $\dim(Hom(V, V^*)) = n^2 \neq n$ $\therefore$ falso

④ (15 pts) Sea $T: \mathbb{R}[t]_n \longrightarrow \mathbb{R}[t]_n$ la transformación lineal tq $T(p(x)) = p'(x)$. Probar que $\det(ST) = 0$ para toda transformacion lineal $S: \mathbb{R}[x]_n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_n$

$T(p) = p'$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{T(1)}, \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{T(x)}, \dots, \underset{\substack{\downarrow\\ nx^{n-1}}}{T(x^n)} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det(S) \Rightarrow 0 \cdot \det(S) = 0$$

⑤ Sea $U \{ p \in \mathbb{R}[x]_4 : p(6) = 0 \}$

ⓐ (7 pts) Mostrar que es un subespacio y hallar una base de U. (Ayuda: si $p \in U$ entonces $p(x) = (x-6)q(x)$, con el grado de q menor o igual a 3.

ⓘ Contencion del vector 0

por def sabemos que $p(6) = 0$ ∴ contiene al vector 0

ⓘⓘ Cerrado bajo la suma

$(p+q)(x) = p(x) + q(x)$, evaluando en 6

$p(6) + q(6)$

$0 + 0$ ∴ cerrado en la suma

0 //

ⓘⓘⓘ Cerrado bajo multiplicacion de escalar

$(\alpha p)(x) = \alpha p(x)$, evaluando en 6

$\alpha \cdot 0$

0 ∴ cerrado en la multiplicacion

$p(x) = (x-6)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$

$= (x-6)b_0 + (x-6)x b_1 + (x-6)x^2 b_2 + (x-6)x^3 b_3$

$x b_0 - 6b_0 + x^2 b_1 - 6 b_1 x + x^3 b_2 - 6x^2 b_2 + x^4 b_3 - 6x^3 b_3$

$(-6b_0) + x(b_0 - 6b_1) + x^2(b_1 - 6b_2) + x^3(b_2 - 6b_3) + b_3 x^4$

∴ todos los polinomios pueden expresarse como combinacion lineal de

$\{(x-6), x(x-6), x^2(x-6), x^3(x-6)\} =$

$\{(x-6), (x^2-6x), (x^3-6x^2), (x^4-6x^3)\}$ ∴

$\alpha_1(x-6) + \alpha_2(x^2-6x) + \alpha_3(x^3-6x^2) + \alpha_4(x^4-6x^3) = 0$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ ∴ es base

ⓑ (6 pts) Extender la base obtenida en (a) a una base de $\mathbb{R}[x]_4$

Observemos que $\dim(\mathbb{R}[x]_4) = 5$ y nuestra base tiene $\dim = 4$ ∴ necesitamos otro polinomio que no pertenezca a U y que sea l.i con los ya obtenidos. Observamos que falta el termino independiente, $1(6) = 1 \neq 0 \Rightarrow 1 \notin U$ y tambien es l.i con todos los otros, por lo que la base completa seria $\{1, (x-6), (x^2-6x), (x^3-6x^2), (x^4-6x^3)\}$

ⓒ (7 pts) Encontrar un subespacio W tq $\mathbb{R}[x]_4 = U \oplus W$

$W \subseteq \mathbb{R}[x]_4$ tq $W \cap U = \{0\}$. Como en el ejericio anterior completamos base con $\{1\}$, en este ejercicio podemos hacer lo mismo ya que el espacio generado por $\{1\}$ y el espacio generado por U tienen interseccion igual a 0 por ser l.i con respecto a los polinomios de U

∴ $\{1\} \oplus U = \mathbb{R}[x]_4$

⑥ Fijemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $T: \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}$, definida por $T(B) = AB - BA$ para toda matriz B

ⓐ (10 pts) calcular la matriz $[T]_E$ con E la base canonica de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, -2, 2, 0)$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow (-2, 0, 0, 2)$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow (2, 0, 0, -2)$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, 2, -2, 0)$$

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ⓑ (10 pts) Calcular los autovalores y autovectores asociados para $[T]_E$ y decidir si es diagonalizable

$$\det(A-\lambda I)=0 = \det\left[\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -\lambda & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$\det(A(1|1)) = (-\lambda^3) + 0 + 0 - (-4\lambda) - (-4\lambda) - 0$

$= -\lambda^3 + 8\lambda$

$$\begin{matrix} -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \\ -\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -\lambda & -2 \end{matrix}$$

$\det(A(1|2)) = -2\lambda^2 - 8 + 8$

$-2\lambda^2$

$$\begin{matrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & -\lambda & -2 \end{matrix}$$

$\det(A(1|3)) = 8 - 8 - 2\lambda^2$

$-2\lambda^2$

$$\begin{matrix} -2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -\lambda \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{matrix}$$

$(-\lambda)(-\lambda^3 + 8\lambda) - (-2)(-2\lambda^2) + 2\cdot(-2\lambda^2)$

$\lambda^4 - 8\lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda^2$

$\lambda^4 - 16\lambda^2$

$u^2 - 16u$ $\begin{cases} u_1 = 4 \longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{4} \\ u_2 = -4 \end{cases}$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -2$

Para $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2y + 2z = 0 \\ -2x + 2w = 0 \\ 2x - 2w = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2w = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2x = 2w \Rightarrow x = w \\ 2y = 2z \Rightarrow y = z \end{matrix} \quad \therefore$$

$(w, z, z, w) = w(1,0,0,1) + z(0,1,1,0)$

$\therefore$ los autovectores son $\{(1,0,0,1), (0,1,1,0)\}$

Para $\lambda_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2w = 0 \\ 2x - 2z - 2w = 0 \\ 2y - 2z - 2w = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2z = 2x + 2y \Rightarrow z = x + y$

$2y - 2z - 2w = 0 \longrightarrow 2y - 2(x+y) - 2w = 0$

$2y - 2x - 2y - 2w = 0$

$-2x - 2w = 0$

$x = -w$

$-2w - 2(-w+y) - 2w = 0$

$-4w + 2w - 2y = 0$

$-2y = 2w$

$y = -w$

$\therefore (-w, -w, -2w, w) = w(-1,-1,-2,1)$

$\therefore$ el autovector es $(-1,-1,-2,1)$

Para $\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + 2w = 0 \\ 2x + 2z - 2w = 0 \\ 2y - 2z + 2w = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2z = -2x + 2y \Rightarrow z = -x + y$

$2y - 2z + 2w = 0 \longrightarrow 2y - 2(-x+y) + 2w = 0$

$2y + 2x - 2y + 2w = 0$

$x = -w$

$-2w + 2(w + y) - 2w = 0$

$-2w + 2y = 0$

$w = y$

$\therefore (-w, w, 2w, w) = w(-1, 1, 2, 1)$

$\therefore \{(1,0,0,1), (0,1,1,0), (-1,-1,-2,1), (-1,1,2,1)\}$ es base de autovectores $\therefore [T]_E$ es diagonalizable

7 (15 pts.) Sea $(V, \langle , \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno y $v_1, \dots, v_m$ un conjunto de vectores ortonormales en V mostrar que si $v \in V$ entonces $\|v\|^2 = |\langle v, v_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, v_m \rangle|^2 \iff v \in \langle \{v_1, \dots, v_m\} \rangle$

Sabemos que $V = W \oplus W^{\perp}$ v se puede escribir como $v = w + u$ con $w \in W$ y $u \in W^{\perp}$

*

$$\|\sqrt{\langle w+u, w+u \rangle}\|^2 = \langle w+u, w+u \rangle$$