23/08/2024

Parciales: 1^{er} p. Viernes 27/9
2^{do} p. Viernes 15/11
Recup: Viernes 22/11

Regularidad
Aprobar c/ parcial o respectivo recuperatorio una nota ≥ 4

Promocion
Aprobar c/parcial o respectivo recuperatorio con nota ≥ 6 y promedio de ambas notas ≥ 7

Unidad 1: Integrales

Dada f, encontrar F tq $F'(x) = f(x)$

- Sabemos dada F encontra F'
- Queremos, dada $f = F'$ encontrar F

Recordamos

$f \rightsquigarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Propiedades

1. Si $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
2. $(af)'(x) = af'(x) \quad \forall a \in \mathbb{R}$
3. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
4. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
5. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Def: Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f: I \to \mathbb{R}$ una funcion. Decimos que $F: I \to \mathbb{R}$ es una antiderivada o primitiva de f en I si $F'(x) = f(x) \ \forall x \in I$

Obs: Las primitivas NO son unicas. En efecto si $f(x) = x$ entonces $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ y $F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 8$ son primitivas de f, ya que $F_1'(x) = x$ y $F_2'(x) = x$

Teorema: Si F es primitiva de f en I, entonces todas las primitivas de f en I es la forma $F(x) + c$ para alguna constante c.

Def: Dado I en $\mathbb{R}$ y $f: I \to \mathbb{R}$, se llama ~~integral~~ integral indefinida de f el conjunto de todas las antiderivadas y se denota $\int f(x)\,dx = F_1 + C, \ c \in \mathbb{R}$

Obs: 1. El simbolo $\int$ se llama integral y dx se llama diferencial (de x)

Ademas, denotamos por diferencial de una funcion F a $d(F(x)) = F'(x)\,dx$

2. En la definicion de integral indefinida podriamos usar otra letra Ej: $\int f(y)\,dy$

Ejemplos

1. $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c, \ c \in \mathbb{R}$ ya que $\left(\frac{x^2}{2} + c\right)' = x$

$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \ c \in \mathbb{R}$ si $n \neq -1$, ya que $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = \frac{n+1}{n+1} x^{n+1-1} + 0 = x^n$

2. $\int xz\,dx = z\frac{x^2}{2} + c$
$\int xz\,dz = x\frac{z^2}{2} + c$ $\quad c \in \mathbb{R}$

Algunas propiedades de la integral indefinida

1. $\int 0\,dx = c, \ c \in \mathbb{R}$
2. $\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx \quad \forall a \in \mathbb{R}$
3. $\int (f \pm g)(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Teorema (Metodo de sustitucion): Sea $f: (d,e) \to \mathbb{R}$ y $g: (a,b) \to (d,e)$ y derivable en su dominio. Entonces, si F es una primitiva de f en (d,e).
$H(x) = (F \circ g)(x)$ es primitiva de $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ en (a,b). O sea,
$\int f(g(x))\, g'(x)\,dx = F(g(x)) + C, \ c \in \mathbb{R} \quad \left(\int h(x)\,dx = H(x) + c\right)$

Dem: Basta verificar que $H'(x) = h(x) \ \forall x \in (a,b)$. Por la regla de la cadena

$H'(x) = (F \circ g)'(x) \overset{R.C}{=} F'(g(x)) \cdot g'(x) \overset{F \text{ es primitiva de } f}{=} f(g(x)) \cdot g'(x) = h(x)$

Obs: El teorema nos brinda un metodo para calcular la integral indefinida de funciones de la forma de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. En efecto si hacemos la sustitucion $u = g(x)$ y $du = d(g(x)) = g'(x)\,dx$. Luego $\int f(\underbrace{g(x)}_{u}) \cdot \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \int f(u)\,du = F(u) + c = F(g(x)) + C$

Ejemplos:

1. $\int \operatorname{sen}(x^2)\, 2x\,dx \quad$ Sea $u = x^2 \quad du = 2\,dx$

$\int \operatorname{sen}(u)\,du = -\cos(u) + c = -\cos(x^2) + c$

Teorema (Metodo de Integracion por Partes): Si f' y g' son continuas, entonces
$\int f(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x)\,dx \quad (\bigstar)$

Dem: Por la regla de derivacion de un producto de funciones tenemos $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ o equivalentemente $f(x) \cdot g'(x) = (f \cdot g)'(x) - f'(x) g(x)$. Luego integrando ambos lados tenemos

$\int f(x) \cdot g'(x) = \int (f \cdot g)'(x)\,dx - \int f'(x) g(x)\,dx$
$= (f \cdot g)(x) - \int f'(x) g(x)\,dx$

Obs: la ecuacion $(\bigstar)$ se llama formula de integracion por partes. Para recordarla
Si $u = f(x)$ y $v = g(x)$, entonces $du = f'(x)\,dx$ y $dv = g'(x)\,dx$
Luego $\bigstar$ queda $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Ejemplos

1. $\int x e^x\,dx \quad$ Si $u = x \quad du = 1\,dx$, $dv = e^x\,dx \quad v = e^x$, con lo cual $\int x e^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$
$c \in \mathbb{R}$

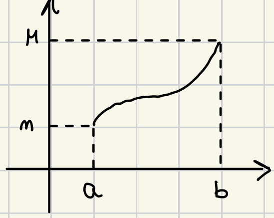
2. $\int x \operatorname{sen}(x) \quad$ Si $u = x \quad du = 1\,dx$, $dv = \operatorname{sen}(x) \quad v = -\cos(x)$

$\int x \operatorname{sen}(x) = x \cdot (-\cos(x)) - \int (-\cos(x))\,dx =$
$-x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \operatorname{sen}(x) + c$
$c \in \mathbb{R}$

Integral definida

Area bajo una curva $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ funcion continua y tq $f(x)\geq 0 \;\; \forall x\in[a,b]$

¿Cual es el valor del area A que se encuentra sobre el intervalo $[a,b]$ y debajo de la grafica de f?



1^{er} Aprox. Sea m min de f en $[a,b]$

M max de f en $[a,b]$

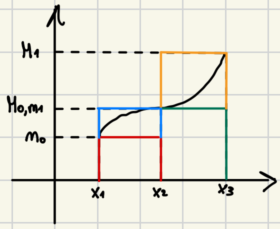
Entonces $m(b-a)\leq A\leq M(b-a)$

2^{da} Aprox: Partimos $[a,b]$ como $[a,x_1]\cup[x_1,b]$, con $x_1\in(a,b)$

$[a,b]=[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]$

Sea $m_k=\min f$ en $[x_k,x_{k+1}]$
$M_k=\max f$ en $[x_k,x_{k+1}]$ $\quad k\in\{0,1\}$

$\underline{m_0(x_1-x_0)}+\underline{m_1(x_2-x_1)}\leq A\leq \underline{M_0(x_1-x_0)}+\underline{M_1(x_2-x_1)}$



De manera general, tomamos $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ particion de $[a,b]$

Si $m_k=\min f$ en $[x_k,x_{k+1}]$
$M_k=\max f$ en $[x_k,x_{k+1}]$ $\quad k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$

$\Delta_k=x_{k+1}-x_k$ y Δ el mayor de todos los Δ_k entonces vale lo siguiente

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta_k}_{\text{suma inferior}}\leq A\leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}M_k\Delta_k}_{\text{suma superior}}$$

Def: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y tq $f(x)\geq 0\;\;\forall x\in[a,b]$ se define el area encerrada por la curva $y=f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$ por

$$\lim_{\Delta\to 0}\left(\sum_{k=0}^{n-1}m_k\Delta_k\right)$$

Llamaremos a este numero integral definida de f en $[a,b]$ y se denota $\int_a^b f(x)\,dx$

Obs: Se puede probar que tomar el limite de las sumas superiores coincide con tomar el limite de las sumas inferiores

② La def de integral definida se puede extender a funciones que tomen valores negativos

③ Tambien se puede extender la definicion a funciones continuas en $[a,b]$ salvo en un numero finito de puntos y siempre que f este acotada en $[a,b]$

Algunas propiedades de la integral definida

Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones acotadas y continuas salvo a lo suma en una cantidad finita de puntos. Entonces Valen

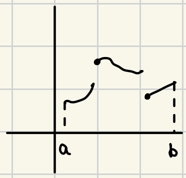
① Si $f\geq 0$ la $[a,b]\implies \int_a^b f(x)\,dx\geq 0$

② $\int_a^b c\,f(x)\,dx=c\int_a^b f(x)\,dx$

③ $\int_a^b (f\pm g)(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx\pm\int_a^b g(x)\,dx$

④ Si $d\in[a,b]\implies \int_a^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$

⑤ Si $f\leq g$ en $[a,b]\implies \int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$



28/08/24

Observacion: Si f es acotada y con un n° finito de discontinuidades en $[a,b]$, tambien podemos aplicar ⓘⓘ del TFC en cada sub intervalo donde f es continua gracias al siguente teorema

Teorema: Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ con f continua y g tal que $g(x)=f(x)\;\;\forall x\in[a,b]$ salvo un $c\in[a,b]$ entonces $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,dx$

Ejemplo: Apliquemos la regla de Barrow a $f(x)=\begin{cases}x+2 & 0\leq x<1\\ x^2-1 & 1\leq x\leq 2\end{cases}$

$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$

Teorema Metodo de sustitucion (I. definidas)

Sea $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ y $g:[a,b]\to[c,d]$ tal que f y g' sean continuas en sus respectivos dominios. Entonces si $u=g(x)$ vale que

$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$. En particular si F es primitiva de f tenemos que $\int_a^b f(g(x))g'(x)=F(g(x))$

Ejemplo

$\int_0^2 2x\cdot\operatorname{sen}(x^2)\,dx$ $\quad u=x^2$, $du=2x\,dx$

$\int_0^2 2x\cdot\operatorname{sen}(x^2)\,dx=\int_0^4 \operatorname{sen}(u)\,du=-\cos(u)\Big|_0^4=-\cos(x^2)\Big|_0^2=-\cos(2)+\cos(0)=\cos(2)+1$

Teorema de integracion por partes (I. definida)

Sea f y g derivables en (a,b) tal que f' y g' tienen a lo sumo un n° finito de discontinuidades y acotadas entonces $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)f'(x)$

Ejemplo:

$\int_1^e \ln(x)\,dx=\int_1^e \ln(x)\,1\,dx=\ln(x)\cdot x\Big|_1^e-\int_1^e x\,\frac{1}{x}\,dx=e-0-x\Big|_1^e=e-(e-1)=1$

ARCO ENTRE GRAFICOS DE FUNCIONES

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es no negativa, acotada y con un n° finito de discontinuidades hemos definido el area bajo el grafico de f y arriba de $[a,b]$ como

$A=\int_a^b f(x)\,dx$

• Si $f(x)\geq g(x)\geq 0\;\;\forall x\in[a,b]$ es razonable definir el area entre los graficos de f y g como:

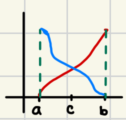
$A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$ ya que $f(x)-g(x)\geq 0\;\;\forall x\in[a,b]$

$A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx=\int_a^b f(x)-\int_a^b g(x)\,dx$

TEOREMA: Sea f y g funciones acotadas con un n° finito de discontinuidades tal que $f(x)\geq g(x)$

Entonces, el area entre las graficas de f y g es $A=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$ (Notar que $f(x)-g(x)\geq 0\;\;\forall x\in[a,b]$)

Obs: En el caso que las graficas se crucen, calcular el area por partes



$A=\int_a^c f(x)-g(x)\,dx+\int_c^b f(x)-g(x)\,dx$

30/08/24

Integración de funciones racionales usando fracciones simples

• Queremos integrar funciones que son cocientes de polinomios osea $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$ Ej: $\int \frac{1}{x-2}\,dx = \ln|x-2|+c$,

$\int \frac{1}{(x+3)^3}\,dx = \frac{(x+3)^{-2}}{-2}+c$

Vamos a suponer que la función racional $\frac{p(x)}{q(x)}$ satisface lo siguiente

① El grado del polinomio p es menor al grado del polinomio q ya que si $gr(x) > gr(q)$ tenemos $\frac{p(x)}{q(x)} = Q + \frac{r(x)}{q(x)}$

② El coeficiente que acompaña a la potencia de mayor grado de q es 1 ya que si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0} = \frac{p(x)}{a_n\underbrace{\left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x^{n-1}+\dots+\frac{a_0}{a_n}\right)}_{\tilde{q}(x)}} = \frac{\tilde{p}(x)}{\tilde{q}(x)}$

Ejemplo:

$$\int \frac{x+1}{3x^2+1}\,dx = \int \frac{x+1}{3(x^2+\frac{1}{3})}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}(x+1)}{x^2+\frac{1}{3}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{3}(x+1)}{x^2+\frac{1}{3}}\,dx = \int \frac{\frac{x}{3}+\frac{1}{3}}{x^2+\frac{1}{3}}\,dx$$

Teorema:

Todo polinomio monico se puede escribir como producto de polinomios de grado 1 y/o polinomio de grado 2 sin raíces reales (en el ② q es un polinomio conico)

Es decir, si $q(x) = x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1}+\dots+a_1\cdot x + a_0$ entonces $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_n)\cdot\underbrace{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_\ell x+\beta_\ell)}_{\text{Sin raíces reales}}$

Ejemplos

$x^3+2x^2+(-3x) = x(x^2+2x-3) = x(x-1)(x-3)$

$x^2-2x+1 = (x-1)^2 = (x-1)(x-1)$

$3x^3+3x = 3x\underbrace{(x^2+1)}_{x^2+\alpha_1 x+\beta_1}$

$\alpha_1 = 0$

$\beta_1 = 1$

CASO 1: q es un producto de polinomios de grado 1 y todos distintos es decir $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_n)$ con $r_i \neq r_j$ si $i\neq j$.

En este caso buscamos constantes $A_1,\dots,A_k$ (una constante para cada $p(x)$ de grado 1) tales que: $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-r_1}+\frac{A_2}{x-r_2}+\dots+\frac{A_n}{x-r_n}$ luego, todo termino $\frac{A_i}{x-r_i}$ es fácil de integrar

Ejemplo: $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\,dx$ tenemos $p(x) = 7x-1$, $q(x) = x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$ debemos hallar A_1 y A_2 tales que $\frac{7x-1}{x^2-x-6} = \frac{A_1}{x-3}+\frac{A_2}{x+2} = \frac{A_1(x+2)+A_2(x-3)}{(x-3)(x+2)}$

igualamos los coeficientes de los numeradores obtenemos lo siguiente: $7 = A_1+A_2$ y $-1 = 2A_1-3A_2 \Rightarrow A_1 = 7-A_2 \Rightarrow -1 = 2(7-A_2)-3A_2 = 14-2A_2-3A_2 = -1 = 14-5A_2 \Rightarrow 5A_2 = 15 \Rightarrow A_2 = 3$

$\Rightarrow 7 = A_1+3 \Rightarrow A_1 = 4$ $\therefore$ $\frac{4(x+2)+3(x-3)}{(x-3)(x+2)}$ Luego, $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6}\,dx = \int \frac{4}{x-3}+\frac{3}{x+2}\,dx = \int \frac{4}{x-3}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx = 4\int \frac{1}{x-3}\,dx + 3\int \frac{1}{x+2}\,dx = 4\ln|x-3|+3\ln|x+2|+c$

CASO 2: q es el producto de polinomios de grado 1, todos iguales, es decir $q(x) = (x-r_1)^k$. En este caso buscamos constantes $A_1,\dots,A_k$ tales que $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x_1-r}+\frac{A_2}{(x-r)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-r)^k}$

(tantas A como constantes). Luego, cada termino de la forma $\frac{A_i}{(x-r)^i}$ es fácil de integrar

Ejemplo: $\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx$ tenemos $p(x) = 1-2x$ y $q(x) = (x+2)^3$. Debemos encontrar $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ tales que se cumpla lo siguiente: $\frac{1-2x}{(x+2)^3} = \frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2}{(x+2)^2}+\frac{A_3}{(x+2)^3} = \frac{A_1(x+2)^2+A_2(x+2)+A_3}{(x+2)^3}$

$\Rightarrow \frac{A_1(x^2+4x+4)+A_2(x+2)+A_3}{(x+2)^3} =$ Igualando los coeficientes de los numeradores obtenemos que $A_1 = 0$ $-2 = 4A_1+A_2 \Rightarrow -2 = 4\cdot 0+A_2 \Rightarrow A_2 = -2$

$1 = 4A_1+2A_2+A_3 \Rightarrow 1 = 4\cdot 0+2\cdot(-2)+A_3 \Rightarrow A_3 = 5$. Luego tenemos $\int \frac{1-2x}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{-2}{(x+2)^2}+\frac{5}{(x+2)^3}\,dx = \int \frac{-2}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{5}{(x+2)^3}\,dx = -2\int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + 5\int \frac{1}{(x+2)^3}\,dx$

$= -2\cdot\frac{(x+2)^{-1}}{-1}+5\cdot\frac{(x+2)^{-2}}{-2} = \frac{2}{x+2}-\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2}+C$

CASO 3: q es el producto de polinomios de grado 1, alguno de los cuales se repiten. Es decir $q(x) = (x-r_1)\dots(x-r_{i-1})(x-r_i)^{k_i}\dots(x-r_n)^{k_n}$. En este caso aplicamos los procedimientos del caso 1 y 2 (mezcla de ambos)

Ejemplo: si $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3}$, entonces buscamos $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathbb{R}$ tales que: $\frac{x^3-x+1}{x(x-2)(x-1)^3} = \frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x-2}+\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{(x-1)^2}+\frac{A_5}{(x-1)^3}$

CASO 4: q es el producto de polinomios de grado 1 (se pueden repetir) y/o de polinomios de grado 2 sin raíces reales. Es decir, $q(x) = (x-r_1)^{k_1}(x-r_2)^{k_2}\dots(x-r_n)^{k_n}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)\dots(x^2+\alpha_m x+\beta_m)$

En este caso, $\frac{p(x)}{q(x)}$ se escribe como suma donde por cada factor lineal aparecen tantos terminos como indican los casos 1 y 2 y para cada factor cuadrático aparecen terminos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$ con B y C constantes a encontrar

Ejemplo $\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)}$ debemos hallar constantes A_1, A_2, A_3, B y C tales que se cumpla lo siguiente:

$$\frac{x-1}{(x-2)x^2(x^2+4)} = \frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{x}+\frac{A_3}{x^2}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$$ ¿Como hacemos?

Observación: para integrar terminos de la forma $\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta}$ debemos hallar constantes k_1 y k_2 tal que se cumpla

$\frac{Bx+C}{x^2+\alpha x+\beta} = k_1\frac{2x+\alpha}{x^2+\alpha x+\beta}+k_2\frac{1}{x^2+\alpha x+\beta}$ (forma de resolver la imaginario)

donde $B = 2k_1$ y $C = \alpha k_1+k_2$

04/09/24

Integrales Impropias

Definimos $\int_a^b f(x)\,dx$ por el caso $a,b \in \mathbb{R}$ y f es una funcion continua salvo en un numero finito de puntos y acotado

Extendemos la definicion para el caso en el que $a,b \notin \mathbb{R}$ o en que f no es acotada en $[a,b]$

Integral Impropia Tipo I: funciones continuas y al menos uno de los limites de integracion no es finito

diverge cuando se va a $\pm\infty$

converge cuando va a un valor finito

Def. sea $a \in \mathbb{R}$

- Si f es continua en $[a,\infty)$, definimos $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ si existe y es finito

En tal caso decimos $\int_a^\infty f(x)\,dx$ converge, sino decimos que diverge

- Si f es continua en $(-\infty,a]$ definimos $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^a f(x)\,dx$ y decimos que converge o diverge según corresponde
- Si f es continua en $\mathbb{R}$, definimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$ siempre que estas ultimas dos converjan

y en tal caso decimos $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$. Si alguna no converge, decimos que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx$ diverge

Ejemplo

① $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^t\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\underset{-\frac{1}{e^t}\to 0}{\underset{\downarrow}{-e^{-t}}} + \underset{1}{\underset{\downarrow}{e^0}}\right) = 1$ converge

② $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left(\underset{0}{\underset{\downarrow}{\ln|-1|}} - \underset{\infty}{\underset{\downarrow}{\ln|t|}}\right)$ diverge

③ $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ Elegimos $a=0$

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_t^0 = \lim_{t\to-\infty}\left(\underset{0}{\underset{\downarrow}{\operatorname{arctg}(0)}} - \underset{-\frac{\pi}{2}}{\underset{\downarrow}{\operatorname{arctg}(t)}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ converge}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \frac{1}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^t = \lim_{t\to\infty}\left(\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(0)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Integral Impropia Tipo II: limites de integracion finitos $a,b \in \mathbb{R}$ pero f tiene una asintota vertical en un punto $c \in [a,b]$

Def.

Sea f continua en $[a,b)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$

Definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$, si existe y es finito

- Sea f continua $(a,b]$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

Definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$, si el limite existe y es finito

- Sea $c \in (a,b)$. Si f es continua en $[a,c)\cup(c,b]$ y las integrales $\int_a^c f(x)\,dx$ y $\int_c^b f(x)\,dx$ existen y son finitos

definimos $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Ejemplo:

① $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ Tenemos que $f(x)$ es continua en $(0,1]$ y $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Por definición

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\ln(x)\Big|_t^1\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\ln(1) - \ln(t)\right) = +\infty$$

La integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge

② $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$, con $0<p<1$

Por definicion

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_t^1\right) = \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p} - \frac{t^{\overset{>0}{1-p}}}{1-p}\right) = \frac{1}{1-p} \therefore \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \text{ converge si } 0<p<1$$

Criterio de comparacion para integrales impropias

Veremos un criterio para determinar si una integral impropia es convergente o divergente sin hacer el calculo sino que lo haremos con una funcion mas facil de integrar

Teorema (Criterio de Comparacion para integrales impropias tipo I)

Sean f y g funciones continuas y $a \in \mathbb{R}$.

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a, \infty)$. Entonces $\int_a^{\infty} g(x)\, dx$ converge $\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)\, dx$ converge o equivalentemente $\int_a^{\infty} f(x)\, dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^{\infty} g(x)\, dx$ diverge

De manera analoga

- Si $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in (-\infty, a]$. Entonces $\int_{-\infty}^{a} g(x)\, dx$ converge $\Rightarrow \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ converge o equivalentemente $\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ diverge $\Rightarrow \int_{-\infty}^{a} g(x)\, dx$ diverge

Teorema (Crit de comparacion para integrales impropias tipo II)

Sean f, g funciones continuas en $[a,b)$ y tal que $|f(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x) = \pm\infty$

Entonces, si $\int_a^b g(x)\, dx$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx$ converge o equivalentemente $\int_a^b f(x)\, dx$ diverge $\Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx$ diverge

Ejemplo:

$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$ Notemos que no podemos calcular por definicion esta integral ya que la primitiva de e^{-x^2} no es una funcion elemental. Por lo tanto vamos a utilizar el teorema anterior.

(Tipo I)

Primero notemos que $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 e^{-x^2}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_1^{\infty} e^{-x^2}\, dx}_{I_2}$

Tenemos que I_1 converge ya que e^{-x^2} es continua en $[0,1]$ por lo tanto $\int_0^1 e^{-x^2} dx =$ Integral definida

Para determinar si I_2 converge o diverge usamos el Teorema anterior (Tipo I)

Nos interesa $1 \leq x \rightarrow x \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq -x$ y por lo tanto $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ si $x \in [1, \infty)$

Sea $f(x) = e^{-x^2}$ y $g(x) = e^{-x}$, tenemos $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [1, \infty)$

Como $\int_1^{\infty} g(x)\, dx = \int_1^{\infty} e^{-x}\, dx = \lim_{t \to \infty} \int_1^t e^{-x} = \lim_{t \to \infty} -e^{-x}\Big|_1^t = \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = e^{-1} < \infty$ o sea como $\int_1^{\infty} g(x)\, dx$ converge $\Rightarrow \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$ converge por lo tanto I_2 converge

06/09/24

Sucesiones

Def: Una Sucesion infinita de números reales es una función cuyo dominio son los naturales $\mathbb{N}$ y su imagen esta incluida en $\mathbb{R}$. O sea $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ tal que $1\to a(1)=a_1$
$2\to a(2)=a_2$ y a lo general $n\to a(n)=a_n$

Notación $\{a_1,a_2,a_3,\dots\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}\ n\in\mathbb{N}$

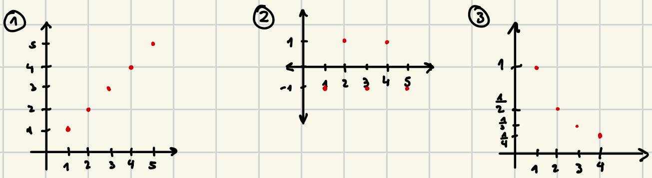
Ejemplos:

① $\{1,2,3,\dots\}$, $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=n$

② $\{-1,1,-1,1,\dots\}$, $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=(-1)^n$

③ $\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\}$, $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n=\frac{1}{n}$

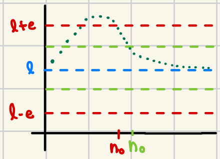
Obs: Una sucesion $\{a_n\}$ se puede representar como el gráfico de una función o como conjunto de números reales



Def: Una sucesión $\{a_n\}$ tiene limite $\ell\in\mathbb{R}$, y se denota $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$ ó $a_n\longrightarrow\ell$, si los términos a_n se acercan a ℓ tanto como queremos al hacer n suficientemente grande. Esto es $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell \iff \forall\varepsilon>0\quad \exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\underbrace{|a_n-\ell|<\varepsilon}$ $\forall n>n_0$

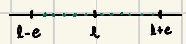
$-\varepsilon<a_n-\ell<\varepsilon$

$\ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon$



(depende el valor de ε)

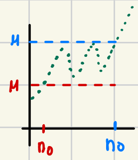
$a_n\in(\ell-\varepsilon,\ell+\varepsilon)\ \forall n\geq n_0$



Ejemplo: Probar $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Sea ε, queremos hallar $n_0\in\mathbb{N}$ tal que
$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\left|\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon\ \ \forall n\geq n_0$. Como $\frac{1}{n}<\varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon}<n$, entonces
basta tomar $n_0=$ primer natural mayor a $\frac{1}{\varepsilon}$

$$\frac{1}{n+2}<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$$

Def: Dada una sucesion $\{a_n\}$ decimos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ ó $a_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty$ si los términos a_n se hacen arbitrariamente grande al hacer n grande. Esto es $\forall M>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_n>M\ \forall n>n_0$



Decimos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$ si $\forall k<0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_n<k\ \ \forall n\geq n_0$

Def: Si existe $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$ y $\ell\in\mathbb{R}$ (o sea $\ell\neq\pm\infty$) decimos que $\{a_n\}$ converge a ℓ
En los demás casos decimos que diverge

Ejemplos: Decidir si la sucesion converge o diverge

① $a_n=\frac{1}{n}$. Recien vimos que $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ por lo tanto $\{\frac{1}{n}\}$ converge a 0

② $a_n=n$ Como $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ (probar usando definicion) entonces $\{n\}$ diverge

③ $a=(-1)^n$ Como el $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ No existe $\Rightarrow \{(-1)^n\}$ diverge

Teorema: Sean $\{a_n\}$ y $\{B_n\}$ dos sucesiones convergentes y sea $c\in\mathbb{R}$, entonces

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm B_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} B_n$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(c\,a_n)=c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n B_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} B_n$

(iv) Si $\lim\limits_{n\to\infty} B_n\neq 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{B_n}\right)=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} B_n}$

Ejemplo:

① $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+0=1$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n2}{n(1+\frac{1}{n})}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\frac{1}{n}}=\frac{2}{1}=2$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+7}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^3(1+\frac{7}{n^3})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2(1+\frac{7}{n^3})}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{7}{n^3})}=$
$0\cdot 1=0$

Teorema (Relacion entre limite de fracciones y sucesiones)

Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ell$ y $a_n=f(n)\ \forall n\geq n_0$, para algún $n_0\in\mathbb{N}$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$

Ejemplo: Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ para $a_n=\frac{\ln(n)}{n}$. Sea $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$ para $x>0$ $(x\in(0,\infty))$

Tenemos $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

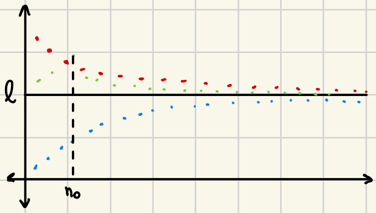
Ademas $f(n)=a_n\ \forall n\geq1 \Rightarrow$ Por teorema $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(n)}{n}=0$

Obs: No es cierto que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\ell$ y $a_n=f(n)\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\ell$

$a_n=\operatorname{sen}(n\pi)=0$ y $f(x)=\operatorname{sen}(\pi x)$ es claro que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ pero $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ No existe

Teorema (del Sandwich para sucesiones)

Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ $\forall n \geq n_0$, para algún $n_0 \in \mathbb{N}$, y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \ell$, entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = \ell$



Ejemplo: Hallar $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3}$

$-1 \leq \operatorname{sen}(n) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\iff$ $-\frac{1}{n^3} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Como $\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n^3} = 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$ por Teorema del Sándwich tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^3} = 0$

Teorema: Sea $\{a_n\}$ una Sucesión. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

Ejemplo: Probar que la sucesion $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ Converge a 0

Tenemos que $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ y con lo cual calculo $|a_n| = \frac{1}{n}$. Luego, como

$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

¿Para que valores de r la sucesión $\{r^n\}$ converge?

- Analicemos el caso $r > 0$ $(r \in (0,\infty))$. Recordemos que $r^x = e^{\ln(r^x)} = e^{x\ln(r)}$

y ademas $\ln(r) \begin{cases} > 0 & \text{si } 1 < r \\ < 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$

Sea $f(x) = r^x$. Tenemos $a_n = r^n = f(n)$ y como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < r \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 \end{cases}$

por Teorema de Relacion entre limite de funciones y sucesiones tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & \text{si } 1 < r & \mathrm{I} \\ 0 & \text{si } 0 < r < 1 & \mathrm{II} \end{cases}$$

Veamos que para para $r = 0$ y $r = 1$

- Si $r = 0$, $r^n = 0^n = 0$ $\forall n$ con lo cual $\lim r^n = 0$ III
- Si $r = 1$, $r^n = 1^n = 1$ $\forall n$ con lo cual $\lim r^n = 1$ IV
- Analicemos el caso $r < 0$

Si $r \in (-1,0) \Rightarrow 0 < |r| < 1$ y por II tenemos que $\lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$

por lo tanto por el teorema anterior tenemos $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $r \in (-1,0)$ V

- Si $r = -1$, tenemos que $r^n = (-1)^n$ que ya sabemos que no tiene limite para $n \to \infty$
- Si $r < -1$, r^n no tiene límite

Conclusion:

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \text{diverge} & \text{si } r \leq -1 \\ 0 & \text{si } -1 < r < 1 \\ 1 & \text{si } r = 1 \\ \infty \text{ (diverge)} & 1 < r \end{cases}$$

11/09/24

Teorema: Sea $\{a_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y f una funcion continua en $x=a$. Entonces $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ $\left(= f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\right)$

Ejemplo: Calcular limite de $\{n \text{ sen}(\frac{1}{n})\}$ Notemos que $n \text{ sen}(\frac{1}{n}) = \dfrac{\text{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$. Elegimimo $f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, tenemos que f es continua en $x=0$

Si $a_n = \frac{1}{n}$, tenemos $\lim_{n\to\infty} a_n =$

Luego por el teorema $\lim_{n\to\infty} n \text{ sen}(\frac{1}{n}) = \lim \dfrac{\text{sen}(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \overset{\text{Por teorema}}{=} f(0) = 1$

Definicion: Decimos que la sucesion $\{a_n\}$ es

- Creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Estrictamente creciente si $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- Si $\{a_n\}$ es creciente o decreciente diremos que es monotona

Ejemplos: ① $\{n\}$ como $a_n = n < n+1 = a_{n+1}$ $\forall n$ $\therefore \{n\}$ es estrictamente creciente

② $\{\ln(n)\}$ Con $f(x) = \ln(x)$ es una funcion estrictamente creciente por lo tanto $n < n+1 \Rightarrow f(n) < f(n+1)$ o sea $\ln(n) < \ln(n+1)$ y por lo tanto $\{\ln(n)\}$ es estrictamente creciente.

③ $\{1,1,2,2,3,3,4,4\}$ como $a_n \leq a_{n+1} \Rightarrow \{a_n\}$ es creciente

Definicion: decimos que la susecion $\{a_n\}$ es:

(i) Acotada inferiormente, si $\exists M_i \in \mathbb{R}$ tq $M_i \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) Acotada superiormente, si $\exists M_s \in \mathbb{R}$ tq $a_n \leq M_s$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) Acotada si $\exists M \in \mathbb{R}$ tq $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejemplos: ① $\{\frac{1}{n}\}$ Como $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\frac{1}{n}\}$ es acotada puedo tomar $M=1$

② $\{-n\}$ Como $-n \leq 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{-n\}$ esta acotada superiormente

Obs: En la definicion anterior decimos que M_i es una cota inferior de $\{a_n\}$ y M_s es una cota superior de $\{a_n\}$. Notemos que las cotas superiores e inferiores NO son unicas

Por ejemplo $(-1)^n \Rightarrow M_s = 10$, $M_s = 2$, $M_s = 1$ son todas cotas superiores

owo

Axioma de completitud de los numeros reales

Todo conjunto no vacio de numeros reales que es acotado superiormente tiene una menor cota superior en $\mathbb{R}$.

Todo conjunto no vacio de numeros reales que es acotado inferiormente tiene una mayor cota inferior en $\mathbb{R}$.

Def: Sea $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

- Si A es acotado superiormente la menor cota superior de A se llama supremo de A y se denota $\sup(A)$.
- Si A es acotado inferiormente la mayor cota inferior de A se llama infimo de A y se denota $\inf(A)$

Ejemplo Pensemos las sucesiones como conjunto de numero reales

① $\{\frac{1}{n}\} = A$ $\quad \text{Sup}(A) = 1$ $\quad \inf(A) = 0$

Como $1 \in A \Rightarrow A$ tiene maximo

como $0 \notin A \Rightarrow A$ no tiene minimo

② $\{-n\} = B$ $\quad \text{Sup}(B) = -1$ y como $-1 \in B \Rightarrow$ tambien es el maximo

$\text{Inf}(B)$ no existe y por lo tanto tampoco existe un minimo

③ $\{(-1)^n\} = C$ $\quad \text{Sup}(C) = 1$ y tambien es el maximo

$\text{Inf}(C) = -1$ y tambien es el minimo

Teorema: Si $\{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow \{a_n\}$ es acotado

Obs: La reciproca es falsa, o sea $\{a_n\}$ acotada $\not\Rightarrow \{a_n\}$ convergente

Por ejemplo $a_n = (-1)^n$ Sin embargo si es cierto si la sucesion es creciente o decreciente

Teorema:

(i) Si $\{a_n\}$ es creciente y acotada superiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup(\{a_n\})$

(ii) Si $\{a_n\}$ es decreciente y acotada inferiormente $\Rightarrow \{a_n\}$ converge y $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf(\{a_n\})$

Subsucesions

Dada una sucesion $\{a_n\}$ podemos extraer de esta otras sucesiones descontando algunos terminos. Cada una de estas nuevas sucesiones se llama sub sucesion de $\{a_n\}$

Ejemplo: Consideremos $\{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, \dots\}$ Podemos extraer las siguientes subsucesiones: $\{-1, -1, -1, -1, \dots\}$ (extraigo a_n con n impar), $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ (extraigo a_n con n par)

Def. Una subsucesion de una sucesion $\{a_n\}$ es una sucesion de la forma $\{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots\} = \{a_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ donde $n_j \in \mathbb{N}$ y cumplen $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$

Por ejemplo = $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots\}$

a_{n_1} a_{n_2} a_{n_3}

$n_1 = 1$ $n_2 = 3$ $n_3 = 5$ $n_j = 2(j-1)+1$

$\{1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots\}$

$a_{2(j-1)+1} = j$ (terminos impares)

a

Teorema: toda subsucesion de una sucesion convergente es convergente y ademas los limites son iguales

Obs: El teorema es util para demostrar que una sucesion no tiene limite: basta encontrar dos subsucesiones distintas que converjan a distintos limites.

Ejemplo: Sea $a_n = (-1)^n$ Luego, $a_{n_j} = (-1)^{2j}$ y $a_{n_k} = (-1)^{2k+1}$ ambas son subsucesiones de $\{a_n\}$ que convergen a 1 y -1 respectivamente $\therefore \{a_n\}$ es divergente

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Toda sucesion acotada tiene al menos una subsucesion convergente Si $\{a_n\} = \{-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, \dots\}$

Obs: puede haber mas de una subsucesion convergente

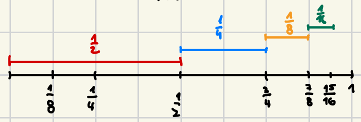
$b_j = a_{2j} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$

$c_j = a_{2(j-1)+1} = \{-1, -1, -1\}$

13/09/24

Dado una sucesion $\{a_n\}$ queremos sumar sus infinitos terminos, esto es $a_1+a_2+\dots$ lo cual escribimos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Por ejemplo $a_n = \frac{1}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{n} a_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$



Def: dada una sucesion $\{a_n\}$, llamamos serie de terminos a_n a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ como $S_k = a_1+a_2+a_3+\dots+a_k$. Luego, $\{S_k\}$ es una sucesion de numeros $\mathbb{R}$

Si el limite de la sucesion $\{S_k\}$ existe y es finito es decir $\lim_{k\to\infty} S_k = S<\infty$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Si $\lim_{k\to\infty} S_k$ no existe

o es $\pm\infty$, decimos que la serie es divergente

Ejemplo: Determine si la serie es convergente o divergente

① $\sum_{n=1}^{\infty} n$ Tenemos que $a_n = n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $S_1 = 1$, $S_2 = 1+2$, $S_3 = 1+2+3$. $S_k = \frac{k(k+1)}{2} = 1+2+3+\dots+k$

Como $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)}{2} = \infty$ por definicion, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n$ es divergente

② $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ Tenemos que $a_n = (-1)^n$ $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

$S_0 = 1$, $S_1 = 1+(-1) = 0$, $S_2 = 1+(-1)+1 = 1$, $S_3 = 1+(-1)+1+(-1) = 0$

en general $S_k \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ es par} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$ Luego, No existe $\lim_{k\to\infty} S_k$ pues $\{S_k\}$ admite dos subsucesiones distintas y con limites distintos. $\{S_{2j}\}$ tiene lim 1 y $\{S_{2j+1}\}$ tiene lim 0. Al no existir $\lim_{k\to\infty} S_k \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ es divergente.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ parece que converge a 1

Def: Dado $r\in\mathbb{R}$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1+r+r^2+\dots$ se llama serie geometrica

Teorema:

① Si $|r|<1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge y $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

② Si $|r|\geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge

Dem: Fijamos $r\in\mathbb{R}$ tenemos que

$$\left.\begin{aligned} S_k &= 1+r+r^2+r^3+\dots+r^k \\ rS_k &= r+r^2+r^3+r^4+\dots+r^{k+1} \end{aligned}\right\} S_k - rS_k = 1-r^{k+1}$$

o sea $(1-r)S_k = 1-r^{k+1}$

(i) Supongamos que $|r|<1$. Por un lado $r\neq 1$, tenemos que $S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$

Por otro lado com $|r|<1$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} = r \lim_{k\to\infty} r^k = 0$ (ver dos casos atras)

Luego $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$

(ii) Supongamos que $|r|\geq 1$

- Si $r=-1$ ya vimos en el ejemplo ② que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverge
- Si $r=1$, entonces $S_k = 1^0+1^1+1^2+\dots+1^k = k+1$

 Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \infty$ y entonces $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ diverge
- Si $|r|>1$ por un lado $S_k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$, por otra parte ya vimos que $\lim_{k\to\infty} r^{k+1} \begin{cases} \infty & \text{si } r>1 \\ \nexists & \text{si } r<-1 \end{cases}$. Luego, $\lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1-r^{k+1}}{1-r} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{1-r} - \frac{r^{k+1}}{1-r}\right)$ es divergente y con lo cual $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ diverge.

Obs: $|r|<1$, entonces

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$

Propiedades de Series convergentes

Teorema: Si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergente y $c \in \mathbb{R}$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ son convergentes y ademas $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c\,a_n = c \sum_{k=1}^{\infty} a_n$$

Teorema: Criterio de la divergencia

Si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ converge $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ Equivalentemente si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \nexists$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Dem: Tenemos que

$$\left.\begin{aligned} S_k &= a_1 + \dots + a_k \\ S_{k-1} &= a_1 + \dots + a_{k-1} \end{aligned}\right\} S_k - S_{k-1} = a_k$$

Ahora como $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces existe $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = S$. Pero entonces tambien vale que $\lim\limits_{k\to\infty} S_{k-1} = S$ (pues $k\to\infty \iff k-1\to\infty$)

$$\hookrightarrow \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}(S_k - S_{k-1}) = \lim_{k\to\infty} S_k - \lim_{k\to\infty} S_{k-1} = S - S = 0$$

Obs: no vale la reciproca (Crit. de la divergencia) es decir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \not\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty}$ converge

Ejemplo:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (serie armonica) Vale que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ pero veamos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Vamos a probar que existe una subsucesion de la sucesion de sumas parciales $\{S_k\}$ que es divergente y por lo tanto esto implica que la sucesion $\{S_k\}$ es divergente, entonces por definicion la serie diverge

Consideramos la subsucesion $\{S_{2^j}\}$ tenemos que

$j=1 \longrightarrow S_{2^1} = \boxed{S_2 = 1 + \frac{1}{2}}$

$j=2 \longrightarrow S_{2^2} = S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + 2 + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \boxed{1 + 2\,\frac{1}{2}}$

$j=3 \longrightarrow S_{2^3} = S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + 4\,\frac{1}{8} = S_4 + \frac{1}{2} > 1 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 3\,\frac{1}{2}$

$j=4 \longrightarrow S_{2^4} = S_{16} = S_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16} > S_8 + 8\cdot\frac{1}{16} = S_8 + \frac{1}{2} > 1 + 3\,\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + 4\,\frac{1}{2}$

De manera general $S_{2^j} > 1 + j\,\frac{1}{2}$. Luego $\lim\limits_{j\to\infty} S_{2^j} \geq \lim\limits_{j\to\infty} 1 + j\,\frac{1}{2} = \infty$

O sea $\{S_{2^j}\}$ es una subsucesion de sumas parciales que diverge. Luego $\{S_k\}$ diverge y por lo tanto por def la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

18/09/24

Teorema (Criterio de Comparacion) si $0 \leq a_n \leq b_n$ $\forall n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces si $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$ es convergente entonces $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ es convergente.

Ejemplo: Analice la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n+n}$ $\quad 0 \leq \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n+n} \leq \frac{1}{2^n}$ $\forall n \geq 1$ pues $\operatorname{sen}^2(n) \leq 1^2$ y $2^n+n > 2^n \Rightarrow \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente (geometrica) por el criterio de la comparacion $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n)}{2^n+n}$ es convergente

Teorema (Criterio de la integral para series): Sea f una funcion continua, positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Si $a_n = f(n)$ entonces $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_n}_{C_1}$ es convergente $\Leftrightarrow$ $\underbrace{\int_1^{\infty} f(x)\,dx}_{C_2}$ converge

Obs: ① No es cierto en general que $C_1 = C_2$

② Podemos iniciar la serie desde cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$

$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-4)^2}$ podemos considerar $\int_5^{\infty} \frac{1}{(x-4)^2}\,dx$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ para $0 < p < \infty$. Sea $f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$, f es continua positiva y decreciente en $[1,\infty)$. Ademas $f(n) = \frac{1}{n^p} = a_n$ Por otro lado $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$ converge $\Leftrightarrow p > 1$. Luego por el criterio de la integral $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es convergente para $p > 1$ y divergente para $0 < p \leq 1$

serie p

Definicion: decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente (es absolutamente convergente). Converge condicionalmente si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pero $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ no converge (es condicionalmente convergente)

Ejemplo: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ converge absolutamente pues $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge pues serie p (con $p = 2 > 1$)

Teorema: [Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente] Luego, en el ejemplo anterior $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ es convergente

Ejemplo: Decida si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ converge o diverge. Consideramos $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right|$ tenemos que $0 \leq \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Ademas $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie p)

La reciproca no vale $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge, pero (prox clase) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Teorema: (★) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

Dem (★) Se cumple que $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$ luego $0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sabemos que $\sum a_n$ converge absolutamente y por lo tanto, $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge.

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ es convergente por el Tea (Crit. de comp)

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente (prop de las series)

Teorema (Criterio del cociente): Sean $a_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y Sea $r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

(i) Si $r < 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente (y por lo tanto converge)

(ii) Si $r > 1$, (ó ∞) entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge

(iii) Si $r = 0$ entonces no se puede asegurar nada.

Ejemplo: Analice si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ con $c \neq 0$ converge o diverge. $a_n = \frac{c^n}{n!}$ Tenemos que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\left|\frac{c^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{c^n}{n!}\right|} = \frac{\frac{|c^{n+1}|}{(n+1)!}}{\frac{|c^n|}{n!}} = \frac{|c^{n+1}|\,n!}{|c^n|\,(n+1)!} = \frac{|c|}{n+1}$.

Luego $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|c|}{n+1} = 0 < 1$. Luego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!}$ converge absolutamente y $\therefore$ converge por Teorema (★)

Ejemplo: Analice la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} n c^n$, para $c \neq 0$. $a_n = nc^n$. $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|c|^{n+1}}{n|c|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} |c| = |c| = r$

- Si $|c| < 1$ entonces la serie converge absolutamente ($\therefore$ converge)
- Si $|c| > 1$ la serie diverge
- Si $|c| = 1$ la serie diverge por criterio de la divergencia $\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{1}{n})}{n} = 1$

Ejemplo $a_n = \frac{1}{n}$ entonces $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

$a_n = \frac{1}{n^2}$ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (serie p)

Teorema (Criterio de la raiz)

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea $r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

(i) Si $r < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente (y $\therefore$ convergente)

(ii) Si Si $r > 1$ entonces la serie es divergente

(iii) Si $r = 1$, no se puede asegurar nada

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ $\quad a_n = \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$. $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n\right|} = \frac{2n+3}{3n+2}$. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{3n+2} = \overset{r}{\frac{2}{3}} < 1$. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$ converge absolutamente y luego por teorema (★) converge

Definicion: decimos que una serie es alternante si sus terminos son positivos y negativos alternadamente

① $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

② $-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}-\dots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$

Ejemplo:

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$; $a_n=\frac{1}{n}$. $0<n<n+1$ luego $0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ y $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ Luego por criterio de series alternantes la serie converge.

Teorema: (Criterio para series alternantes)

Si $a_n\geqslant a_{n+1}>0$ y $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n$ converge (tmb $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$

23/09/24

Series de potencias

Vamos a estudiar series en la que sus terminos dependen de una variable, es decir $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$, con $a \in \mathbb{R}$ fijo $x \in \mathbb{R}$ variable

Generalizacion de los polinomios $\int e^{-x^2} dx$, $\int e^{-x^2} dx \approx \sum c_n \int (x-a)^n$

Def: Sean $\{C_n\}$ una sucesion de numeros reales y $a \in \mathbb{R}$. Llamamos serie de potencias centrada en a, a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots$

(Notar que adoptamos $(x-a)^0 = 1$, aun cuando $x = a$)

- Para cada x fijo, $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ es una serie de terminos constantes, o sea una serie numerica.
- Observamos que si $x=a$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = C_0 < \infty$ o sea toda serie de potencias centrada en a converge en a

Ejemplo: Sea $\{C_n\}_{n=0}^{\infty} = \{1\}_{n=0}^{\infty}$ y $a=0$. Entonces la serie de potencia centrada en 0 es (*) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ (serie geometrica "$r=x$ variable"). Sabemos que la serie (*) converge $\frac{1}{1-x}$ Si y solo si $|x|<1$.

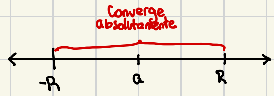
mentira te amo chiquito

Teorema: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ una serie de potencias. Entonces, se cumple exactamente una de las siguientes:

(i) La serie converge solo cuando $x=a$

(ii) La serie es absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$

(iii) $\exists R>0$ tal que la serie converge absolutamente $\forall x$ tal que $|x-a|<R$ y es divergente $\forall x \,|\, |x-a|>R$



Def. Sea $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ una serie de potencias

(A) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=0$ si solo converge en $x=a$

(B) Decimos que la serie tiene radio de convergencia $R=\infty$ si converge $\forall x \in \mathbb{R}$

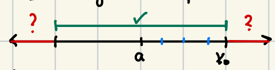
(C) Si ocurre (iii) en el teorema anterior decimos que R es su radio de convergencia.

Def: Llamamos intervalo de convergencia al conjunto $I = \{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \text{ converge}\}$

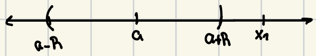
Obs:
- Si $R=0$, entonces $I = \{a\}$
- Si $R=\infty$, entonces $I = \mathbb{R}$
- Si $0<R<\infty$, entonces I puede ser $(a-R, a+R)$, $[a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R]$

Obs: Sea $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$ una serie de potencia. Notemos que:

- Si la serie de potencias converge para algun $x_0 \neq a$, entonces por (iii) del teorema anterior $R \geq |x_0 - a|$ y ademas la serie de potencias converge $\forall x$ tal que $|x-a|<|x_0-a|$



- Si la serie de potencias divergen en x_1, entonces $R \leq |x_1 - a|$ y ademas la serie diverge $\forall x$ $|x-a|>|x_1-a|$



(podria ser $R = |x_1 - a|$)

Ejemplo: Determine el radio de convergencia R y el intervalo de convergencia I de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$

- Si $x=1$, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge (por ser serie armonica) y por lo tanto $R \leq 1$ (I)
- Si $x=-1$, tenemos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge (por crit. de series alternantes). Luego $R \geq |-1| = 1$ (II)

De I y II concluimos que $R=1$ y $I=[-1, 1)$

Teorema (Crit. del cociente para series de potencias): Dada la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$, con $C_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$ y R su radio de convergencia. Escribimos $L = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|}$

(i) Si $0<L<\infty$, entonces $R = \frac{1}{L}$

(ii) Si $L=0$, entonces $R=\infty$

(iii) Si $L=\infty$, entonces $R=0$

Dem: Para cada $x \neq a$ puedo aplicar el criterio del cociente para series numericas a la serie $I = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{C_n (x-a)^n}_{a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}(x-a)^{n+1}|}{|C_n (x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} |x-a| = L|x-a|$

(i) Supongamos $0<L<\infty$, Luego por el crit. del cociente para series numericas $\begin{cases} L|x-a|<1 \Rightarrow I \text{ converge absolutamente} \\ L|x-a|>1 \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases}$ o sea si $\begin{cases} |x-a| < \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ converge absolutamente} \\ |x-a| > \frac{1}{L} \Rightarrow I \text{ diverge} \end{cases}$

(ii) Si $L=0$, entonces $L|x-a|<1$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y $\therefore R=\infty$

(iii) Si $L=\infty$, entonces $L|x-a|=\infty$ $\forall x \neq a$ y $\therefore R=0$

Ejemplo: Calcule el radio R e intervalo de convergencia I de las siguientes series de potencia

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1 = \infty$. Luego $R=0$ e $I=\{0\}$ (o sea la serie diverge $\forall x \neq 0$)

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^3 x^n$ Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = 1$. Luego $R=1$. Ademas en $x=(-1)$ y $x=1$ la serie diverge (por crit de la div) Entonces $I=(-1,1)$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n 3^n} (x-1)^n$ (notar que $a=1$). Tenemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{2^n}{n 3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3} \frac{n}{n+1} = \frac{2}{3}$. Luego $R = \frac{3}{2}$. Veamos que pasa en $x=a-R = 1-\frac{3}{2}$ y en $x=a+R = 1+\frac{3}{2}$

- Si $x = 1-\frac{3}{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n 3^n} \left(-\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n} \rightarrow$ diverge (serie armonica)
- Si $x = 1+\frac{3}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n 3^n} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \rightarrow$ converge (por crit. de series alter.). Por lo tanto $I = \left(1-\frac{3}{2}, 1+\frac{3}{2}\right] = \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right]$

02/10/24

Representacion de Funciones como series de potencias

Dada una SP $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, para cada x_0 tal que la serie converge podemos definir una funcion $x_0 \longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ f es una funcion con dominio en el intervalo de convergencia de la SP.

Ejemplos

$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots \overset{*}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ La igualdad * vale si $|x|<1$

$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} \overset{\triangle}{=} \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}x^n$ La igualdad $\triangle$ vale si $|\frac{x}{2}|<1$, lo cual equivale a $|x|<2$

Teorema: Si la SP $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ tiene radio de convergencia R entonces la funcion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ es derivable (y $\therefore$ continua) en el intervalo $(a-R, a+R)$. Ademas

(i) $f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3C_3(x-a)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} nC_n(x-a)^{n-1}$

(ii) $\int f(x)\,dx = C + C_0(x-a) + C_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots = C + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$

Las SP de (i) y (ii) tienen radio de convergencia R pero los intervalos de convergencia pueden ser distintos

Obs: Otra forma de (i) y (ii) es la siguiente:

(i) $\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}[C_n(x-a)^n]$

(ii) $\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int C_n(x-a)^n\,dx$

Ejemplo: expresar la funcion $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ como SP. Notemos que $g(x) \overset{\bullet}{=} f'(x)$ con $f = \frac{1}{1-x}$. Ademas que $f(x) \overset{\bullet}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Si $|x|<1$ $\binom{\text{o sea}}{R=1}$.

Luego $\frac{1}{(1-x)^2} = g(x) \overset{\bullet}{=} f'(x) \overset{\bullet}{=} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right]' \overset{(i)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ y su radio de convergencia es $R=1$

Ejemplo: Expresar la funcion $\ln(1-x)$ como SP. Observamos que $-\ln(1-x) \overset{\bullet}{=} \int f(x)\,dx$, con $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Ademas $\frac{1}{1-x} \overset{\bullet}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, si $|x|<1$.

Luego $-\ln(1-x) \overset{\bullet}{=} \int f(x)\,dx \overset{\bullet}{=} \int\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)dx \overset{(ii)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\int x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} + C = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} + C$

Obtuvimos que $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} - C$. Para determinar el valor de C evaluo en algun x por ejemplo $x=0$ $\ln(1) = -C \Rightarrow 0 = -C \Rightarrow C = 0$

Queremos estudiar ¿Que funcion se puede expresar como SP? ¿Como es posible hallar esta representacion?

Sea f una funcion que si se puede representar como una SP, es decir $f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ $\forall x \in (a-R, a+R)$

- Si evaluamos f en $x=a$ obtenemos $f(a) = C_0$
- Por teorema anterior podemos derivar f y obtenemos $f'(x) = C_1 + 2C_2(x-a) + 3(x-a)^2 + 4(x-a)^3 + \ldots$
  - Si evaluamos f' en $x=a$, obtenemos $f'(a) = C_1$
- Aplicando el teorema a f' obtenemos $f''(x) = 2C_2 + 2\cdot3C_3(x-a) + 3\cdot4C_4(x-a)^2 + \ldots$
  - Si evaluamos f'' en $x=a$, obtenemos $f''(a) = 2C_2$
- Aplicamos el teorema en f'' y obtenemos $f'''(x) = 2\cdot3C_3 + 2\cdot3\cdot4C_4(x-a) + \ldots$
  - Si evaluamos $f'''(a) = 2\cdot3C_3$

De manera general obtenemos $f^{(n)}(a) = n!C_n$ donde $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ y usamos la convencion $f^{(0)} = f$, $0! = 1$

Teorema: Si f se puede representar como una SP centrada en a, es decir $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ $\forall x \mid |x-a|<R$, entonces $C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Def: dada una funcion f que tiene derivadas de todos los ordenes en a, se llama serie de Taylor de f centrada en "a" a la SP.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)}{3!} + \ldots$$

Obs: el teorema anterior nos dice que si f se puede representar como una SP centrada en "a", entonces esa serie es justamente la serie de Taylor de f centrada en "a" (y por lo tanto es igual a su serie de Taylor)

Ejemplo: Calcular la serie de Taylor de $f(x) = e^x$ centrada en $a=0$ y determine su radio de convergencia.

- Para calcular la S.T de f centrada en 0 debemos hallar $f^{(n)}(a)$ $\forall n \geq 0$. Como en este caso $f^{(n)}(x) = e^x$ tenemos que $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ $\forall n \geq 0$

  Luego la ST queda $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$

- Para determinar R usamos el criterio del cociente para SP como $L = \lim_{n\to\infty}\frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ tenemos que $R = \infty$ o sea $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge $\forall x \in \mathbb{R}$

  $\lim \frac{x^n}{n!} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

04/10/24

Repaso

S.P, centrada en "a" $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n \longrightarrow$ Radio de convergencia $\begin{cases} R=0 \longrightarrow I=\{a\} \\ 0<R<\infty \longrightarrow [(a-R, a+R)] \\ R=\infty \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$

En I podemos representar la SP como una funcion f con dominio justamente igual a I $\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \rightsquigarrow C_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

Series y Polinomios de Taylor

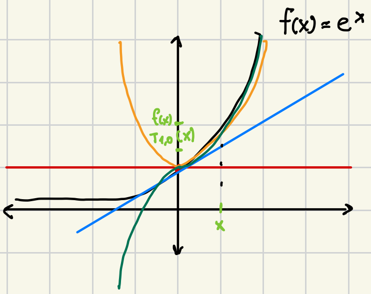
Serie de Taylor dada una funcion f que tiene derivadas de todos los ordenes en a, llamamos ST de f centrada en "a" a la siguiente S.P $\quad \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

¿Cuando una funcion f es igual a su serie de Taylor? ¿Cuando es cierto $f(x)=\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$?

Def: Sea f tal que existe $f^{(1)}(a), f^{(2)}(a), \dots, f^{(n)}(a)$ para $n\geq 0$ definimos el polinomio de Taylor de orden n centrado en "a" $\quad T_{n,a}(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}\cdot(x-a)^j$

Obs: Notar n-esima suma parcial de la serie de Taylor es justamente el polinomio de Taylor de orden n.

Obs: Notar que f y su polinomio de Taylor de orden n satisfacen $f^{(j)}(a)=T_{n,a}^{(j)}(a)\ \forall\, 0\leq j\leq n$



$T_{0,0}(x)=f(0)=e^0=1$

$T_{1,0}(x)=f(0)+f'(0)\cdot x = 1+x$

$T_{2,0}(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)x^2}{2}=1+x+\frac{1}{2}x^2$

$T_{3,0}(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)x^2}{2}+\frac{f'''(0)x^3}{6}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$

Def: Se define como resto de Taylor de orden n centrado en "a" como $R_{n,a}=f(x)-T_{n,a}(x)$ $\quad$ (Por lo tanto $f(x)=T_{n,a}(x)+R_{n,a}(x)$)

Teorema: Sea f una funcion tal que existen $f^{(n)}(a)\ \forall n\geq 0$ Se cumple $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\ \ \forall x\in(a-c, a+c)$ si y solo si $\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x)=0\ \ \forall x\in(a-c,a+c)$

Dem: $\Rightarrow$) Suponemos $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. Entonces por definicion de series tenemos $f(x)=\lim_{n\to\infty}T_{n,a}(x)$ (limite de sumas parciales).

Luego, $\lim_{n\to\infty}R_{n,a}(x)=\lim_{n\to\infty}(f(x)-T_{n,a}(x))=\lim_{n\to\infty}f(x)-\underline{\lim_{n\to\infty}T_{n,a}(x)}=f(x)-f(x)=0$

$\Leftarrow$) Si $\lim_{n\to\infty}R_{n,a}(x)=0\ \forall x\in(a-c,a+c)$ entonces $\lim_{n\to\infty}T_{n,a}(x)=\lim_{n\to\infty}(f(x)-R_{n,a}(x))=\lim_{n\to\infty}f(x)-\lim_{n\to\infty}R_{n,a}(x)=f(x)$. Luego por def. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(j)}(a)}{j!}(x-a)^j$

Teorema: Sea f una funcion tal que existen $f^{(n)}(a)\ \forall n\geq 0$ se cumple $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\ \forall x\in(a-c,a+c)$ si y solo si $\lim_{n\to\infty}R_{n,a}=0\ \forall x\in(a-c,a+c)$

Teorema: (Formula de Lagrange para el Resto)

Sea f tal que $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n+1)}$ en un intervalo abierto I y sea $a\in I$. Entonces, para cada $x\in I$ existe t entre a y x $\left(\begin{array}{l} t\in(x,a) \text{ si } x<a \\ t\in(a,x) \text{ si } x>a\end{array}\right)$ tal que $R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$

Ejemplo: Probar $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\ \forall x\in\mathbb{R}$.

- Ya vimos que $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ es la ST de $f(x)=e^x$ centrada en $a=0$ y su radio de convergencia es $R=\infty$.
- Para probar que la igualdad vale, por el teorema anterior basta ver que $\lim_{n\to\infty}R_{n,0}(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Por la formula de Lagrange $R_{n,0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}=\frac{e^t}{(n+1)!}x^{n+1}$ $\left(\begin{array}{l}\text{para algun} \\ t \text{ entre} \\ 0 \text{ y } x\end{array}\right)$

Si $\left.\begin{array}{l} 0<x \Rightarrow 0<t<x=|x| \\ x<0 \Rightarrow x<t<0<|x| \end{array}\right\} t<|x|$ siempre $\quad 0\leq|R_{n,a}(x)|=\frac{e^t|x|^{n+1}}{(n+1)!}\leq e^{|x|}\frac{|x|}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Entonces, por Sandwich tenemos que $\lim_{n\to\infty}R_{n,0}(x)=0$

y por lo tanto vale $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\ \forall x\in\mathbb{R}$

Ejemplo: Dada la S.T de $\operatorname{sen}(x)$ alrededor de $a=0$ y probar que coincide con f

- Para hallar la ST debemos calcular $f^{(n)}(0)\ \forall n\geq 0$

$n=0\quad f(x)=\operatorname{sen}(x)\longrightarrow f(0)=\operatorname{sen}(0)=0$

$n=1\quad f'(x)=\cos(x)\longrightarrow f'(0)=\cos(0)=1$

$n=2\quad f''(x)=-\operatorname{sen}(x)\longrightarrow f''(0)=-\operatorname{sen}(0)=0$

$n=3\quad f'''(x)=-\cos(x)\longrightarrow f'''(0)=-\cos(0)=-1$

$n=4\quad f''''(x)=\operatorname{sen}(x)\longrightarrow f''''(0)=\operatorname{sen}(0)=0$

y luego se va repitiendo lo anterior. En general tenemos que $f^{(2n)}(0)=0$ y $f^{(2n+1)}(0)=(-1)^n\ \forall n\geq 0$

- Luego la ST de $\operatorname{sen}(x)$ centrada en $a=0$ es $f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2!}\cdot x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots$

$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

- Veamos ahora que coincide con $f\ \forall x\in\mathbb{R}$. Debemos ver que $\lim_{n\to\infty}R_{n,0}(x)=0$ donde por Lagrange $R_{n,0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}x^{n+1}$ para algun t entre 0 y x. Como $f^{(n+1)}(t)=\pm\operatorname{sen}(t)$ ó $\pm\cos(t)$, en cualquier caso siempre vale $|f^{(n+1)}(t)|\leq 1$. Luego $0\leq|R_{n,0}(x)|=\frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

Ejemplo: Estimar el error que se comete si se aproxima $\text{sen}(0.2)$ por el valor en $x=0.2$ de su polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$, o sea $T_{7,0}(0.2)$

- Queremos estimar $|\text{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)|$. Sabemos $\text{sen}(x) = T_{7,0}(x) + R_{7,0}(x)$. Lo que tenemos que estimar es $|\text{sen}(0.2) - T_{7,0}(0.2)| = |R_{7,0}(0.2)|$

Como $R_{7,0}(0.2) = \dfrac{\text{sen}^{(8)}(t)}{8!}(0.2)^8$ para algun $t \in (0, 0.2)$. Como $|\text{sen}^{(8)}(t)| \leq 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces $|R_{7,0}(0.2)| = \dfrac{|\text{sen}^{(8)}(t)|}{8!}(0.2)^8 \leq \dfrac{1}{8!}(0.2)^8 = \dfrac{1}{8!\,5^8}$.

Conclusion: el error que se comete al aproximar $\text{sen}(0.2)$ por $T_{7,0}(0.2)$ es menor que $\dfrac{1}{8!\,5^8} \approx 6.3 \times 10^{-11}$

09/10/24

Repaso:

Dada f y $a \in \mathbb{R}$ podemos calcular la S.T centrada en a $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!}(x-a)^k$

Pregunta: ¿ $f = S.T$?

- Polinomio de Taylor de f de orden de n centrado en a $\quad T_{n,a}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}_{(a)}}{k!}(x-a)^k$
- Resto de Taylor de orden n y centrado en a $\quad R_{n,a}(x) = f(x) - T_{n,a}(x)$
- Formula de lagrange: $R_{n,a}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algun t entre x y a

Respuesta $f = S.T \iff \displaystyle\lim_{n\to\infty} R_{n,a}(x) = 0$

Aplicaciones del Polinomio de Taylor

- "Lo usamos para aproximar una funcion" $|f(x) - T_{n,a}(x)| = |R_{n,a}(x)| < \varepsilon_{TOL}$ Hay 3 datos que pueden variar n, x, ε_{TOL}
- Siempre dos datos seran conocidos y el tercero restante debo averiguarlo
- Ejemplo clase pasada. Estimar el error que se comete si tomo $T_{7,0}(0.2)$ como valor de $\text{sen}(0.2)$

  Dados $x = 0.2$ y $n = 7$ calculamos $\varepsilon_{TOL} = \dfrac{1}{8!\,5^8}$
- Veamos un ejemplo que dado n y ε_{TOL} hay que encontrar x
- Encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$ de $f(x) = \text{sen}(x)$ aproxima a $\text{sen}(x)$ con un error menos que 10^{-5}
- Buscamos $x \in \mathbb{R}$ tal que $|\text{sen}(x) - T_{7,0}(x)| < 10^{-5}$. Como $|f(x) - T_{7,0}(x)| = |R_{7,0}(x)|$ basta hallar los $x \in \mathbb{R}$ tal que $R_{7,0}(x) < 10^{-5}$.

  Ahora $|R_{n,a}(x)| \underset{\substack{\text{para algun} \\ t \text{ entre } 0 \text{ y } x}}{=} \dfrac{\text{sen}^{(8)} t}{8!}|x|^8 \leq \dfrac{1}{8!}|x|^8 < 10^{-5}$. Luego basta considerar $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x|^8 < 10^{-5} \cdot 8!$. Osea todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < \left(\dfrac{8!}{10^5}\right)^{\frac{1}{8}}$

- Encontrar los $x \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio de Taylor de orden 7 centrado en $a=0$ de $f(x) = \text{sen}(x)$ aproxima a $\text{sen}(x)$ con un error menor que 10^{-5}
- Veamos un ejemplo de dados x y ε_{TOL} hallar n

Ejemplo: ¿Que grado n es necesario si queremos tomar $T_{n,0}(0.2)$ como valor de $\text{sen}(0.2)$ y equivocarnos por menos de 10^{-4}?

Debemos hallar n tal que $|\text{sen}(0.2) - T_{n,0}(0.2)| = |R_{n,0}(0.2)| < 10^{-4}$. Como $R_{n,0} = \dfrac{\text{sen}^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(0.2)^{n+1}$ para algun t entre 0 y 0.2 $t \in (0, 0.2)$ $\quad (0.2)^{n+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = \frac{1}{5^{n+1}}$

$\leq \dfrac{1}{(n+1)!}(0.2)^{n+1}$. Basta tomar n tal que $\dfrac{1}{(n+1)!}\dfrac{1}{5^{n+1}} < 10^{-4}$ o equivalentemente $10^4 < (n+1)! \cdot 5^{n+1}$

- Si $n=1 \to 2!\,5^2 = 2 \cdot 25 = 50$
- Si $n=2 \to 3!\,5^3 = 6 \cdot 125 = 750$
- Si $n=3 \to 4!\,5^4 = 24 \cdot 625 = 15.000$

$\therefore$ Basta tomar $n=3$. En efecto $T_{3,0}(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$ $\left(\begin{matrix}\text{ver pag} \\ 62\end{matrix}\right)$. $T_{3,0}(0.2) = 0.2 - \dfrac{(0.2)^3}{3!} \approx 0.1986666\ldots7$ mientras $\text{sen}(0.2) = 0.1986693$

Calculo Vectorial

Def: $\mathbb{R}^n = \{A = (a_1, \ldots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\ \forall i\}$. En $\mathbb{R}^n$ se definen 2 operaciones: Suma: $(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) = (a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$. Mult. por escalar: para $r \in \mathbb{R}$ $r(a_1, \ldots, a_n) = (ra_1, \ldots, ra_n)$

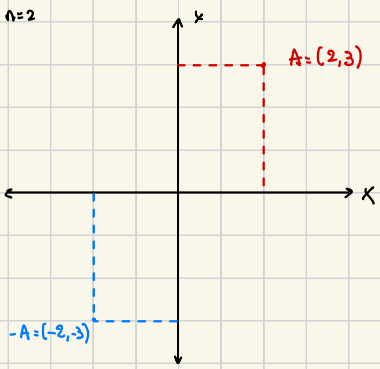
Con estas operaciones, $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sus elementos se llaman vectores (puntos)

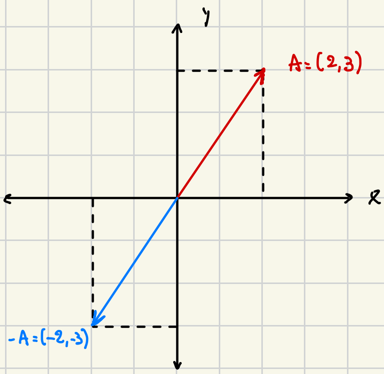
Obs: ① Denotamos $-A = (-1)A$ y definimos la resta $B - A = B + (-A)$

② A veces denotamos al vector nulo simplemente por $0 = (0, 0, 0, \ldots, 0)$

- Representacion geometrica de vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

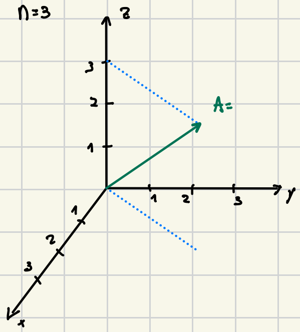
$n=2$



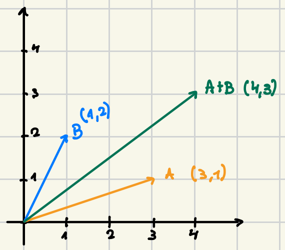


Como una flecha desde el origen (0,0) hasta el pto. correspondiente. Cada vector tiene longitud, direccion y sentido

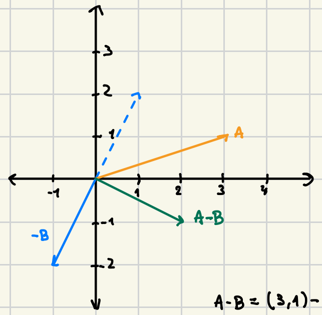
$n=3$



Regla del Paralelogramo



$A+B=(3,1)+(1,2)=(4,3)$



$A-B=(3,1)-(1,2)=(2,-1)$