1	2	3	T	4	5	6	7	P	Total

Calif.

Apellido y Nombre: Carrera:

Condición: Libre Regular (tachar lo que NO corresponda) Año:

Algebra - Algebra Lineal - Algebra II - Final

27 de Febrero de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 35 pts. en la parte práctica para los regulares. Los alumnos libres deberán obtener al menos 40 puntos en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (12 pts) Sea K un cuerpo y sean V, W dos K-espacios vectoriales de la misma dimensión. Sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Probar que las siguientes tres condiciones son equivalentes:
   - f es biyectiva.
   - f es inyectiva.
   - El núcleo de f es $\{\vec{0}\}$.

2. (12 pts) (a) Definir suma directa de más de dos subespacios.

   (b) Porbar que si $A \in K^{n\times n}$ y $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ son autovalores distintos de A, entonces los subespacios $E_{\lambda_i} = \{v \in K^n : Av = \lambda_i v\}$ con $i = 1, \cdots, r$ están en suma directa.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Suma de dos isomorfismos de espacios vectoriales es isomorfismo.

   (b) (3 pts) Si $S, T : V \to V$ son dos transformaciones lineales tales que $\mathrm{rg}(S) \subset \mathrm{Nu}(T)$, entonces $T \circ S = 0$.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Supongamos que $v_1, \cdots, v_m$ es un conjunto de vectores de un K-espacio vectorial y $T : K^m \to V$ definida por:
$$T(x_1, \cdots, x_m) = x_1 v_1 + \cdots + x_m v_m.$$
   (a) ¿ A qué propiedad de T corresponde el hecho de que $\{v_1, \cdots, v_m\}$ genere V?

   (b) ¿ A qué propiedad de T corresponde el hecho de que $\{v_1, \cdots, v_m\}$ sea linealmente independiente?

5. (20 pts) (a) Sea U y V dos subespacios de $\mathbb{C}^6$ de dimensión 4. Probar que $\dim(U \cap V) \geq 2$.

   (b) Dar ejemplos de U y V tales que $\dim(U \cap V) = 2$.

6. (20 ptos) Sea
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
   Encontrar los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ de modo que $\lambda = 3$ sea un autovalor doble y M sea diagonalizale.

7. (15 ptos) Sea V espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que existe una base β de V para la cual $[T]_\beta$ es triangular superior. Mostrar que existe una base ortonormal para la cual la matriz de T en esa base también es triangular superior.

$\boxed{\text{Justificar debidamente todas las respuestas}}$