

## Autovalores y autovectores. Transformaciones lineales diagonalizables.

Martes 5 de noviembre

**Ejercicio 1.** Para cada una de las siguientes transformaciones lineales  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , hallar sus autovalores, y para cada autovalor, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Decidir en cada caso si la transformación lineal es o no diagonalizable.

- (a)  $T(x, y) = (y, 0)$ .
- (b)  $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + 2y - z, 2x + y - z)$ .
- (c)  $T(x, y, z, u) = (-5x - 5y - 9z + 7u, 8x + 9y + 18z - 9u, -2x - 3y - 7z + 4u, 2u)$
- (d)  $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$ .
- (e)  $T(x, y, z, u, v) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x + 2y + 3z, 3u + v, 2u + 2v)$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $V$  un  $\mathbb{k}$ -espacio vectorial y  $T \in \text{Hom}(V, V)$ .

- (a) Supongamos que  $T$  es un isomorfismo, y sea  $\lambda \in \mathbb{k}$  no nulo. Probar que  $\lambda$  es un autovalor de  $T$  si y sólo si  $\lambda^{-1}$  es un autovalor de  $T^{-1}$ .
- (b) Probar que si  $T$  es un múltiplo de  $\text{Id}_V$ , entonces todos los elementos de  $V$  son autovectores de  $T$ .
- (c) Supongamos que  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  y que  $\dim V = 2$ . Probar que toda  $T \in \text{Hom}(V, V)$  es *triangularizable*. Es decir, existe una base de  $V$  tal que la matriz de  $T$  en esa base es triangular superior.
- (d) Decidir si el enunciado anterior es verdadero o falso cuando  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 3.** Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios de las siguientes matrices  $A$ , y decidir si son diagonalizables. En caso que lo sean, dar una matriz  $C$  tal que  $D = C^{-1}AC$  es diagonal. Considerarlas primero como matrices en  $\mathbb{R}$  y luego en  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para cada una de las matrices  $A$  anteriores, calcular  $P(A)$ , donde  $P = 4x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$ .

**Ejercicio 4.** Sea  $A \in \mathbb{k}^{2 \times 2}$ .

- (a) Probar que el polinomio característico de  $A$  es  $x^2 - \text{tr}(A)x + \det(A)$ .
- (b) Probar que si  $A$  no es inversible, entonces sus autovalores son 0 y  $\text{tr}(A)$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{k}^{n \times n}$  una matriz triangular superior. Calcular su polinomio característico y sus autovalores. Calcular también los autovalores de  $A^m$ ,  $m \geq 2$ .

### Definición

Sea  $\mathbb{k}$  un cuerpo y  $A \in \mathbb{k}^{n \times n}$ .

- (a) Se dice que  $A$  es *nilpotente* si existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $A^m = 0$ .
- (b) Se dice que  $A$  es *idempotente* si  $A^2 = A$ .

**Ejercicio 6.**

- (a) Probar que si  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  es nilpotente, entonces 0 es el único autovalor de  $A$ .
- (b) Probar que si  $E \in \mathbb{K}^{n \times n}$  es idempotente y no nula, entonces 0 y 1 son sus únicos autovalores.

Jueves 7 de noviembre

**Ejercicio 7.** Probar que existe una única transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $(1, 1, 1)$  y  $(-1, 1, 0)$  son autovectores de autovalor 2 y  $(0, -2, 1)$  es autovector de autovalor 1. Para tal  $T$ , calcular  $\det T$  y dar la matriz de  $T$  en la base canónica.

**Ejercicio 8.** Sean  $V$  un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial y  $T \in \text{Hom}(V, V)$ .

- (a) Decidir si la recíproca del **Ejercicio 2 (b)** es verdadera o falsa.
- (b) Supongamos que  $T$  conmuta con toda  $S \in \text{Hom}(V, V)$ . Probar que  $T$  es un múltiplo de  $\text{Id}_V$ .
- (c) Supongamos que  $\dim \text{Im } T = k$ . Probar que  $T$  tiene a lo sumo  $k + 1$  autovalores distintos.
- (d) Sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_h$  los autovalores (distintos) no nulos de  $T$ . Sea  $d_j = \dim \text{Nu}(T - \lambda_j \text{Id}_V)$ . Probar que  $d_1 + \dots + d_h \leq \dim \text{Im } T$ .

**Ejercicio 9.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

- (a) Probar que el término independiente del polinomio característico de  $A$  es  $(-1)^n \det(A)$  y que el coeficiente del término de grado  $n - 1$  es  $-\text{tr}(A)$ .
- (b) Probar que si  $c_1, \dots, c_n$  son los autovalores de  $A$  (contados con la multiplicidad repetida), entonces  $\det(A) = c_1 \dots c_n$  y  $\text{tr}(A) = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ .

**Ejercicio 10.** Hallar una matriz  $A \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$  tal que  $A^3 - A^2 + A - \text{Id}_3 = 0$ . Decidir si  $A$  es diagonalizable.

**Ejercicio 11.** Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Probar que  $A$  y  $A^t$  tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

★ **Ejercicio 12.** Sean  $V$  un espacio vectorial y  $T \in \text{Hom}(V, V)$ . Probar que si  $T^2 = T$ , entonces  $V = \text{Nu } T \oplus \text{Im } T$ .

### Definición

Sea  $\mathbb{K}$  un cuerpo. Se dice que dos matrices  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  son *semejantes* si existe una matriz invertible  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$  tal que  $B = C^{-1}AC$ .

★ **Ejercicio 13.**

- (a) Probar que la relación de semejanza en  $\mathbb{K}^{n \times n}$  es una relación de equivalencia.
- (b) Probar que dos matrices semejantes tienen la misma traza, el mismo determinante y los mismos autovalores.
- (c) Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita. Supongamos que tenemos dos bases  $\mathbb{B}_1$  y  $\mathbb{B}_2$  de  $V$ , y sea  $T \in \text{Hom}(V, V)$ . Probar que  $[T]_{\mathbb{B}_1}$  y  $[T]_{\mathbb{B}_2}$  son semejantes.
- (d) Si  $B = C^{-1}AC \in \mathbb{K}^{n \times n}$  y  $V$  es cualquier espacio vectorial de dimensión  $n$ , entonces existen bases  $\mathbb{B}_1$  y  $\mathbb{B}_2$  de  $V$  y  $T \in \text{Hom}(V, V)$  tales que  $B = [T]_{\mathbb{B}_2}$ ,  $C = \mathcal{C}(\mathbb{B}_2, \mathbb{B}_1)$  y  $A = [T]_{\mathbb{B}_1}$ .

★ **Ejercicio 14.** Sean  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$

- (a) Probar que las matrices  $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$  en  $\mathbb{K}^{(m+n) \times (m+n)}$  son semejantes.
- (b) Asumir ahora que  $m = n$ . Utilizar el resultado anterior para concluir que los polinomios característicos de  $AB$  y de  $BA$  coinciden. Deducir que  $AB$  y  $BA$  tienen los mismos autovalores.