Parte Teorica

① (12 pts) Sea k un cuerpo y sean V, W dos k-espacio vectoriales de la misma dimension. Sea $f: V \longrightarrow W$ una transformacion lineal. Probar que las siguientes tres condiciones son equivalentes:

- f es biyectiva
- f es inyectiva
- El nucleo de f es $\{0\}$

que sea biyectiva implica que sea inyectiva y sobreyectiva y como el nucleo es $\{0\}$ el enunciado esta dando todas las condiciones para que f sea un isomorfismo.

② (12 pts) ⓐ Definir suma directa de mas de dos subespacios

La suma directa de sobespacios es la suma que la interseccion entre dos o mas subespacios en los que su interseccion es $\{0\}$
Suponiendo que tenemos dos subespacios V y W, $V \cap W = \{0\}$ la suma directa se define como $V \oplus W$.

ⓑ Probar que si $A \in K^{n \times n}$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ son autovalores distintos de A, entonces los subespacios $E_{\lambda_i} = \{v \in k^n : Av = \lambda_i v\}$ con $i = 1, \dots, r$ estan en la suma directa.

Sabemos que si A tiene r autovalores distintos, tiene r autovectores l.i, sabemos que podemos formar una base de con ellos y esto nos dices que es diagonalizable. Como los autovectores son l.i entre ellos, los autoespacios son espacios disjuntos entre ellos a la excepcion del $\{0\}$. Entonce de esta manera se observa que los E_{λ_i} estan presentes en la suma directa.

③ Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada

ⓐ (3 pts) Suma de dos isomorfismos de espacios vectoriales es isomorfismo

Sea $f: V \longrightarrow W$ y $g: V \longrightarrow W$ dos isomorfismos entre V y W $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$ $\forall v \in V$. Suponemos que $V = W = \mathbb{R}^2$ y $f(x,y) = (x, x)$ y $g(x,y) = (-x, -x)$ $\Rightarrow (f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y) = (x,x) + (-x,-x) = 0$ y como $Nu(f+g) \neq \{0\}$ no es inyectiva $\therefore$ falso

ⓑ (3 pts) Si $S, T: V \longrightarrow V$ son dos transformaciones lineales tales que $rg(S) \subset Nu(T)$, entonces $T \circ S = 0$

Si $w \in Nu(T) \Rightarrow T(w) = 0$ como $rg(S) \subseteq Nu(T)$ todo vector $v \in rg(S)$ satisface $T(v) = 0$ dado que $S(v) \in rg(v)$ $\forall v \in V$
por def de $T \circ S = T(S(v))$ pero $S(v) \in rg(T)$ que a su vez $rg(S) \subset Nu(T)$, luego $S(v) = w \in rg(S) \subseteq Nu(T)$ $\therefore T(w) = 0$, $T(S(v)) = T(w) = 0$ $\therefore$ Verdadero

Parte Practica

④ (15 pts) Supongamos que $v_1, \dots, v_m$ es un conjunto de vectores de un K-espacio vectorial y $T: K^m \longrightarrow V$ definida por: $T(x_1, \dots, x_m) = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$

ⓐ ¿A que propiedad de T corresponde el hecho de que $\{v_1, \dots, v_m\}$

Corresponde a que la definicion de T es una combinacion lineal de los elementos de V y $x_1, \dots, x_n$ son escalares y como T es sobreyectiva (llega a todos los elementos de V), $Im(T) = V$

ⓑ ¿A que propiedad de T corresponde el hecho de que $\{v_1, \dots, v_m\}$ sea linealmente independiente

$x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ es li $\iff$ la unica combinacion lineal que da como resultado 0 es siendo $x_1 = \dots = x_m = 0$ $\therefore$ Sabiendo que $Nu(T) = \{x \in k^n \mid T(x) = 0\}$

$\therefore$ $x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ será li $\iff$ $Nu(T) = \{0\}$

⑤ (20 pts) ⓐ Sea U y V dos subespacios de $\mathbb{C}^6$ de dimension 4. Probar que $\dim(U \cap V) \geq 2$

$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$, sabemos que $\dim(U) = \dim(V) = 4$ $\therefore$ $\dim(U+V) = 4 + 4 - \dim(U \cap V)$. Como U y V son subespacios de $\mathbb{C}^6$ sabemos que $\dim(V+W) \leq 6$ $\therefore$ $8 - \dim(U \cap V) \leq 6 \Rightarrow 8 - 6 - \dim(U \cap V) \leq 0 \Rightarrow 2 \leq \dim(U \cap V)_{//}$

ⓑ Dar ejemplos de U y V

Supongamos $e_1 = (1,0,0,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0,0,0)$, $e_4 = (0,0,0,1,0,0)$, $e_5 = (0,0,0,0,1,0)$, $e_6 = (0,0,0,0,0,1)$

W el subespacio generado por $\{e_1, e_2\}$, U el es subespacio generado por $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y V el espacio generado por $\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$. Con esto cumplimos las dimensiones del enunciado $\dim(U) = \dim(V) = 4$ y $\dim(W) = 2$, y como e_1 y e_2 estan presentes en U y W, el subespacio W esta generado por estos

⑥ (20 pts.) Sea $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Encontrar valores de a y b $\in \mathbb{R}$ de modo que $\lambda = 3$ sea un autovalor doble y M sea diagonalizable.

Para que $\lambda = 3$ sea un autovalor doble el $P_M(\lambda) = \det(M - \lambda Id) = 0$ tiene que tener dos de sus tres raices iguales a 3

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] = 0 \Rightarrow \det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & a-\lambda & b \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$\det(M(1|1)) = (a-\lambda)\cdot(3-\lambda)$
$\det(M(1|2)) = 2\cdot(3-\lambda)$
$\det(M(1|3)) = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & a-\lambda \end{pmatrix} \quad (1-\lambda)(a-\lambda) - 4 \Rightarrow \det(M) \quad (3-\lambda)((1-\lambda)(a-\lambda) - 4) = 0$$

$$(1-\lambda)(a-\lambda) - 4 = a - \lambda - \lambda a + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - \lambda(1+a) + (a-4) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda(1+1) - 4 + 1 \Rightarrow (3-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) = (3-\lambda)^2(1-\lambda)$$

$9 - 3 - 3a + a - 4 = 0$

$2 - 2a = 0$

$2 = 2a$

$1 = a$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3$

$(3-\lambda)(1-\lambda)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & b \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 2y + bz = 0 \end{cases}$$

podemos asumir que $b = -3$ y esta seria comb. lineal de la ecuacion ① $\cdot (-1)$
$\therefore$ $b = -3$

$\therefore$ Como $\lambda_1 = 3$ tiene multiplicidad algebraica y $\lambda_2 = 1$ se puede armar una base con autovectores $\therefore$ M es diagonalizable si $a = 1$ y $b = -3$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(7) (15 pts) Sea V un espacio vectorial con producto interno de dimension finita y $T: V \longrightarrow V$ una transformacion lineal tal que existe una base β de V para la cual $[T]_\beta$ es triangular superior. Mostrar que existe una base ortonormal para la cual la matriz de T en esa base tambien es triangular superior

Si $[T]_\beta$ es triangular superior, β tiene la forma de $\{(*, 0, 0, \dots, 0), (*, *, 0, \dots, 0), (*, *, *, \dots, 0), \dots, (*, *, *, \dots, *)\}$
por lo tanto la base ortogonal va a ser una base con las mismas caracteristicas tq $\langle v_i, w_i \rangle = 0$ $v_i \in \beta$ y $w_i \in \beta^\perp$ para $i = 1, \dots, n$