Cours - Le second degré

Niveau : Première

1. Définition d'un trinôme du second degré

Définition

On appelle **trinôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec } a \neq 0 \text{ et } a, b, c \in \mathbb{R}$$

- a est le coefficient dominant ; b est le coefficient de x ; c est le terme constant.
- Le domaine de définition est toujours $\mathbb{R}$.

2. Forme canonique d'un trinôme

2.1 Objectif

La forme canonique permet d'obtenir facilement :

- les **variations** de la fonction
- les **coordonnées du sommet** de la parabole

2.2 Démonstration

Théorème

Tout trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ s'écrit sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \quad \text{où } \alpha = -\frac{b}{2a},\ \beta = f(\alpha)$$

Démonstration :

$$
\begin{aligned}
f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
&= a\left(x - \alpha\right)^2 + \beta \quad \text{où } \alpha = -\frac{b}{2a},\ \beta = f(\alpha)
\end{aligned}
$$

2.3 Conséquences

- Le sommet de la parabole est le point $S(\alpha, \beta)$.
- **Si** $a > 0$: parabole tournée vers le haut, f a un minimum en α.
- **Si** $a < 0$: parabole tournée vers le bas, f a un maximum en α.

3. Discriminant et résolution de l'équation $f(x) = 0$

Définition

Une **équation du second degré** est une équation de la forme :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{où } a \neq 0 \text{ et } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Discriminant

Le **discriminant** est défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Il permet de déterminer le nombre et la nature des racines de l'équation.

Démonstration de la formule du discriminant :

$$
\begin{aligned}
&ax^2 + bx + c = 0 \\
&\qquad \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{(formule quadratique)}
\end{aligned}
$$

Cette formule provient de la résolution par la méthode du carré complété.

- $\Delta > 0$: deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

— $\Delta = 0$: une racine double

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

— $\Delta < 0$: pas de racines réelles (racines complexes)

4. Factorisation

— **Si** $\Delta > 0$: L'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes x_1 et x_2. On peut alors factoriser le trinôme sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Cette factorisation est utile pour étudier le signe ou résoudre des inéquations.

— **Si** $\Delta = 0$: L'équation possède une racine double x_0. Le trinôme se factorise alors sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

Cette forme est pratique pour montrer que $f(x)$ est toujours du signe de a, sauf en x_0.

— **Si** $\Delta < 0$: L'équation n'admet aucune solution réelle. Il est donc impossible de factoriser $f(x)$ sur $\mathbb{R}$, car il n'existe pas de racines.

5. Signe du trinôme

L'étude du signe d'un trinôme s'appuie sur la forme factorisée de $f(x)$ lorsque cela est possible.

— **Si** $\Delta > 0$: Le trinôme admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 avec $x_1 < x_2$.

  — Si $a > 0$, alors $f(x) > 0$ sur les intervalles $]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$, et $f(x) < 0$ sur $]x_1, x_2[$.

  — Si $a < 0$, les signes sont inversés.

— **Si** $\Delta = 0$: Le trinôme a une racine double x_0. Le signe de $f(x)$ est celui de a sur $\mathbb{R}$, sauf en x_0 où $f(x) = 0$.

— **Si** $\Delta < 0$: Le trinôme ne s'annule jamais. $f(x)$ est toujours du signe de a sur tout $\mathbb{R}$.

6. Résolution d'inéquations

Pour résoudre une inéquation du type $f(x) \geq 0$, il faut :

1. **Résoudre l'équation** $f(x) = 0$ pour déterminer les racines (ou constater qu'il n'y en a pas).
2. **Étudier le signe de** $f(x)$ à l'aide de la factorisation (si possible) ou de la forme canonique.
3. **Construire un tableau de signes** qui précise les valeurs de x pour lesquelles $f(x) \geq 0$ ou $f(x) < 0$.

4. **Exprimer l'ensemble des solutions** sous forme d'intervalles, en fonction des valeurs de Δ :
   — Si $\Delta > 0$: intervalles délimités par x_1 et x_2.
   — Si $\Delta = 0$: solution unique $x = x_0$ ou tous les réels si $a > 0$.
   — Si $\Delta < 0$: soit tous les réels (si $a > 0$ et ≥ 0), soit aucun (si < 0).

7. Synthèse finale

— Une fonction polynôme de degré 2 est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

— Sa représentation graphique est une parabole orientée vers le haut si $a > 0$, ou vers le bas si $a < 0$.

— La **forme canonique** $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ donne le sommet $S(\alpha, \beta)$ de la parabole.

— Le **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ permet de déterminer le nombre et la nature des racines de l'équation $f(x) = 0$.

— Le **signe de** a détermine les variations, la concavité de la parabole et le signe global de $f(x)$ hors des racines.