Vizsgafeladatok Optimalizálásból (Minta1)

1. Egy üzemben négyféle terméket gyártanak. A termékeket három gép munkálja meg. Az alábbi táblázat megadja az egyes gépek heti kapacitását, a termékek egységárát, valamint azt, hogy az egyes gépek mennyi ideig munkálják meg az egyes alkatrészeket. Hány darabot kell gyártani az egyes termékekből, hogy a gépek kapacitását ne lépjük túl és maximális nyereséget érjünk el?

	T_1	T_2	T_3	T_4	kapacitás
G_1	1	1	2	1	160
G_2	1	1	1	0	100
G_3	0	1	1	1	80
egységár	2	4	3	1	

2. Oldja meg az alábbi hiperbolikus programozási feladatot:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \\ \frac{2x_1 + x_2 - 2}{x_1 + x_2 + 1} &\to \max \end{aligned}$$

3. Oldja meg azt a hátizsák feladatot, melyben a tárgyak tömegei 10,10,20,20,20 és 40 kg, az értékek pedig rendre: 16, 6, 25, 24, 10 és 60, a hátizsák teherbírása pedig 80 kg!

4. Egy üzem három műhelyében (M_1, M_2, M_3) egy bizonyos terméket gyárt 14,26,20 darab/nap termelési kapacitással. A termékekkel három fogyasztó (F_1, F_2, F_3) 20,16,24 darab/nap igényét kell kielégíteni. A műhelyek és a megrendelők közötti fajlagos szállítási költségeket mutatja az alábbi táblázat:

	F_1	F_2	F_3
M_1	7	3	10
M_2	6	5	7
M_3	9	5	8

Határozza meg a minimális összköltségű szállítási tervet, figyelembe véve, hogy az F_2 megrendelő nem vesz át az M_1 műhelyben készült terméket!

5. Egy síkidom egy téglalapból és a téglalap egyik oldalára illesztett félkörből áll. A síkidom területe 2 m^2. Mennyi legyen a félkör sugara, ha azt akarjuk, hogy minimális legyen a síkidom kerülete?

6. Határozza meg az alábbi NLO feladat összes KKT pontját:

$$\begin{aligned} x^2 &\le y \\ y &\le 4 \\ x + 2y + 4 &\to \min \end{aligned}$$

Vizsgafeladatok Optimalizálásból (Minta2)

1. Oldja meg kétfázisú szimplex módszerrel az alábbi LP feladatot:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\quad + x_3 - x_4 &= 30 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 &\le 250 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\ge 125 \\ x_1, x_3, x_4 \ge 0;\ x_2 &\le 0 \\ 5x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 7x_4 &\to \min \end{aligned}$$

2. Adott az alábbi LP feladat:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 50 \\ x_1 + x_2 \qquad &= 40 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &\ge 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \\ 5x_1 - 2x_2 + 8x_3 &\to \max \end{aligned}$$

Szimplex módszerrel történő megoldása során az alábbi optimális táblát kaptuk:

	x_2	u_1	b	u_2^*	u_3^*
x_3	1	1	10	-1	0
v_3	2	2	40	-1	-1
x_1	1	0	40	1	0
$-z$	-15	-8	-280	3	0

Adja meg a duális feladatot, a primál és a duál feladat optimális megoldását, valamint végezzen érzékenységvizsgálatot a primál feladat első feltételére!

3. Oldja meg az alábbi szállítási feladatot:

	F_1	F_2	készlet
T_1	5	3	6
T_2	4	2	8
T_3	6	1	9
igény	10	7	

4. Egy tanár ötfős csapatot állított össze a matematikaversenyre, ahol öt feladatot kell megoldani. Az alábbi táblázat ij eleme azt mutatja, hogy hány pont várható, ha az S_i diák oldja meg a P_j problémát. Adja meg azt a hozzárendelést (minden diákhoz pontosan egy feladatot), mely összességében a legtöbb pontot eredményezi!

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
S_1	6	5	8	7	5
S_2	8	8	10	6	8
S_3	7	7	10	8	5
S_4	2	6	9	8	6
S_3	5	8	7	4	7

5. A korlátozás és szétválasztás módszerével oldja meg az alábbi egészértékű programozási feladatot:

$$\begin{aligned} 13x_1 + 8x_2 &\leq 104 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 10 \\ x_1, x_2 &\geq 0, \text{ egész számok} \\ 3x_1 + 2x_2 &\to \max \end{aligned}$$

6. Határozza meg az alábbi NLO feladat összes KKT pontját:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= 1 \\ x_1^2 + 4x_2^2 &\leq 17 \\ 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 + x_2 + 4 &\to \min \end{aligned}$$

Pontozás és értékelés: Minden feladat 6 pontot ér.

0-17 pont: elégtelen; 18-21: elégséges; 22-26: közepes; 27-31: jó; 32-36: jeles

1) Jelölje x_i a T_i termékből gyártandó mennyiséget ($i=1,2,3,4$).

A feladat modellje:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 160$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 100$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \le 80$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 \to max$$

Ez egy normál feladat. Megoldjuk szimplex módszerrel:

	x_1	x_2	x_3	x_4	b
u_1	1	1	2	1	160
u_2	$\boxed{1}$	1	1	0	100
u_3	0	1	1	1	80
$-z$	2	4	3	1	0

	u_2	x_2	x_3	x_4	b
u_1	-1	0	1	1	60
x_1	1	1	1	0	100
u_3	0	$\boxed{1}$	1	1	80
$-z$	-2	2	1	1	-200

	u_2	u_3	x_3	x_4	b
u_1	-1	0	1	1	60
x_1	1	-1	0	-1	20
x_2	0	1	1	1	80
$-z$	-2	-2	-1	-1	-360

↑ Optimális megoldás: ↑ $\boxed{x_1=20;\ x_2=80;\ x_3=x_4=0;\ z_{max}=360}$

2) A feladatot LP-feladattá transzformáljuk, és megoldjuk kétfázisú szimplex módszerrel:

$$y_1 + y_2 - 4t \le 0$$
$$y_1 - y_2 - 2t \le 0$$
$$y_1 + y_2 + t = 1$$
$$2y_1 + y_2 - 2t \to max$$

ahol $y_1 = x_1 t$

$y_2 = x_2 t$

	y_1	y_2	t	b
u_1	1	1	-4	0
u_2	1	-1	-2	0
u_3^*	1	1	$\boxed{1}$	1
$-z$	2	1	-2	0
z^*	1	1	1	1

	y_1	y_2	u_3^*	b
u_1	5	$\boxed{5}$	4	4
u_2	3	1	2	2
t	1	1	1	1
$-z$	4	3	2	2
z^*	0	0	-1	0

	y_1	u_1	b
y_2	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$
u_2	$\boxed{2}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
t	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$-z$	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$

	u_2	u_1	b
y_2	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$
y_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$
t	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$-z$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1

Optimális megoldás:

$y_1 = \frac{3}{5}$; $y_2 = \frac{1}{5}$; $t = \frac{1}{5}$; $z = 1 \implies \boxed{x_1 = 3;\ x_2 = 1;\ z_{max} = 1}$

3) A tárgyakat úgy kell indexelni, hogy az érték/tömeg hányadosok szerinti csökkenő sorrendben legyenek. A modell:

$$16x_1+60x_2+25x_3+24x_4+6x_5+10x_6 \to max$$

$$10x_1+40x_2+20x_3+20x_4+10x_5+20x_6 \le 80$$

$$x_i \in \{0;1\} \quad i=1,2,3,4,5,6.$$

Megoldás a korlátozás és szétválasztás módszerével:

$\boxed{1\ 1\ 1\ \tfrac{1}{2}\ 0\ 0;\ z=113}$

- $x_4=0$: P_1: $\boxed{111010;\ z=104}$
- $x_4=1$: P_2: $\boxed{1\ 1\ \tfrac{1}{2}\ 1\ 0\ 0;\ z=112{,}5}$
  - $x_3=0$: P_3: $\boxed{110110;\ z=106}$
  - $x_3=1$: P_4: $\boxed{1\ \tfrac{3}{4}\ 1100;\ z=110}$
    - $x_2=0$: P_5: $\boxed{101111;\ z=81}$
    - $x_2=1$: P_6: $\boxed{011100;\ z=109}$

OPTIMÁLIS MEGOLDÁS: $x_2=x_3=x_4=1$, $x_1=x_5=x_6=0$; $z_{max}=\underline{\underline{109}}$.

4) Kezdeti megoldás ÉNY sarok módszerrel:

14	–	–	14
6	16	4	26
–	–	20	20
20	16	24	

	$v_1=7$	$v_2=6$	$v_3=8$
$u_1=0$	14 / 7	– / M	– / 10
$u_2=-1$	6 / 6	16 / 5	4 / 7
$u_3=0$	– / 9	– / 5	20 / 8

$\bar{c}_{12}$: tiltott

$\bar{c}_{13}=10-8-0=2$

$\bar{c}_{31}=9-0-7=2$

$\bar{c}_{32}=5-0-6=-1$

A $(3;2)\to(3;3)\to(2;3)\to(2;2)\to(3;2)$ hurokban 16 egységet mozgatunk.

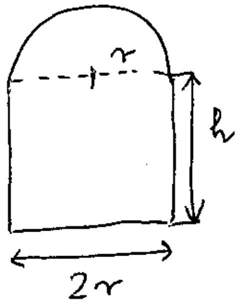
	$v_1=7$	$v_2=5$	$v_3=8$
$u_1=0$	14 / 7	– / M	– / 10
$u_2=-1$	6 / 6	– / 5	20 / 7
$u_3=0$	– / 9	16 / 5	4 / 8

$\left.\begin{array}{l}\bar{c}_{13}=2\\ \bar{c}_{22}=1\\ \bar{c}_{31}=2\end{array}\right\}$ mind pozitív, optimális a szállítás.

A minimális szállítási költség:

$$14\cdot7+6\cdot6+20\cdot7+16\cdot5+4\cdot8=\underline{\underline{386}}$$

5)



A terület: $2rh + \frac{r^2\pi}{2} = 2m^2$

A kerület: $2h + 2r + r\pi \to \min$

Felírjuk a Lagrange függvényt:

$$L(r,h,\lambda) = 2h + 2r + r\pi + \lambda\left(2rh + \frac{r^2\pi}{2} - 2\right)$$

$$L'_r = 2 + \pi + 2\lambda h + r\pi\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = \frac{-2-\pi}{2h + r\pi}$$

$$L'_h = 2 + 2\lambda r = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{1}{r}$$

$$\frac{2+\pi}{2h+r\pi} = \frac{1}{r} \to r = h$$

$$L'_\lambda = 2rh + \frac{r^2\pi}{2} - 2 = 0$$

$$2r^2 + \frac{r^2\pi}{2} = 2$$

$$4r^2 + r^2\pi = 4$$

$$r^2 = \frac{4}{4+\pi} \Longrightarrow r = \frac{2}{\sqrt{4+\pi}} \approx 0{,}75\,m$$

6) A Lagrange függvény:

$$L(x,y,\mu_1,\mu_2) = x + 2y + 4 + \mu_1(x^2 - y) + \mu_2(y - 4)$$

A megoldandó rendszer:

1. $1 + 2\mu_1 x = 0$
2. $2 + (-\mu_1) + \mu_2 = 0$
3. $\mu_1(x^2 - y) = 0$
4. $\mu_2(y - 4) = 0$
5. $\mu_1 \geq 0$
6. $\mu_2 \geq 0$
7. $x^2 - y \leq 0$
8. $y - 4 \leq 0$

③ és ④-et vizsgáljuk: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ egyszerre nem lehet.

$\mu_1 = 0$ esetén ① nem teljesül, ezért $\mu_1 > 0$ és $x^2 - y = 0$, azaz $y = x^2$

Ha $\mu_2 = 0$, akkor ② miatt $\mu_1 = 2$, és ① alapján $x = -\frac{1}{4}$. Ekkor $y = \frac{1}{16}$ és $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$ KKT pont.

Ha $\mu_2 > 0$, akkor $y - 4 = 0$, azaz $y = 4$.

Ekkor $x^2 = y$ miatt $x = \pm 2$.

Ha $x = 2$, akkor ① miatt $\mu_1 = -\frac{1}{4} < 0$, nem lehet.

Ha $x = -2$, akkor ① miatt $\mu_1 = \frac{1}{4}$, de ekkor ② miatt $\mu_2 < 0$, ami szintén nem lehet.

Tehát egyetlen KKT pont van: $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$

MEGOLDÁS MINTA 2-höz

1) Az $x_2 \leq 0$ feltétel miatt x_2 helyett mindenhol $-x_2$-t írunk.
Mivel minimumfeladatról van szó, a célfgv. (-1)szeresével számolunk.
Az = és ≥ feltétel miatt két mesterséges változóra van szükség.

	x_1	x_2	x_3	x_4	v_3	b
u_1^*	$\boxed{1}$	0	1	-1	0	30
u_2	2	3	1	2	0	250
u_3^*	4	-2	2	1	-1	125
$-z$	-5	-4	-8	-7	0	0
z^*	5	-2	3	0	-1	155

	u_1^*	x_2	x_3	x_4	v_3	b
x_1	1	0	1	-1	0	30
u_2	-2	3	-1	4	0	190
u_3^*	-4	-2	-2	5	-1	5
$-z$	5	-4	-3	-12	0	150
z^*	-5	-2	-2	5	-1	5

	u_1^*	x_2	x_3	u_3^*	v_3	b
x_1	0,2	-0,4	0,6	0,2	-0,2	31
u_2	1,2	4,6	0,6	-0,8	0,8	186
x_4	-0,8	-0,4	-0,4	0,2	-0,2	1
$-z$	-4,6	-8,8	-7,8	2,4	-2,4	162
z^*	-1	0	0	-1	0	0

Az első fázis, és egyúttal a második fázis is véget ért, optimális a tábla.
Az optimális megoldás:

$x_1 = 31$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 1$

$z_{min} = 162$

2) A duális feladat:

$y_1 + y_2 + y_3 \geq 5$

$2y_1 + y_2 + y_3 \geq -2$

$y_1 \quad + 2y_3 \geq 8$

$y_1 \geq 0$; y_2 előjelkötetlen; $y_3 \leq 0$

$50\, y_1 + 40 y_2 + 20\, y_3 \to min$

A primál feladat optimális megoldása:

$x_1 = 40$; $x_2 = 0$; $x_3 = 10$; $z_{max} = 280$

A duál feladat optimális megoldása:

$y_1 = 8$; $y_2 = -3$; $y_3 = 0$; $z_{min} = 280$

Érzékenységvizsgálat: $b + \lambda \mu_1 \geq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} 10 + \lambda \geq 0 \to \lambda \geq -10 \\ 40 + 2\lambda \geq 0 \to \lambda \geq -20 \end{array}\right\} \lambda \geq -10$$

$40 + 0\lambda \geq 0$

tehát, ha $\lambda \geq -10$, akkor a feladat új optimális megoldása:

$x_1 = 40$; $x_2 = 0$; $x_3 = 10 + \lambda$; $z_{max} = 280 + 8\lambda$.

3) Az összkészlet 6-tal több, mint az összigény, ezért felvesszük a fiktív F_3 fogyasztót, 6 igénnyel.

Kezdeti megoldás ÉNY sarok módszerrel:

	F_1	F_2	F_3	
T_1	6	–	–	~~6~~ 0
T_2	4	4	–	~~8~~ ~~4~~ 0
T_3	–	3	6	~~9~~ ~~6~~ 0
	~~10~~ ~~4~~ 0	~~7~~ ~~3~~ 0	~~6~~ 0	

	$v_1=5$	$v_2=3$	$v_3=2$
$u_1=0$	6 / 5	– / 3	– / 0
$u_2=-1$	4 / 4	4 / 2	– / 0
$u_3=-2$	– / 6	3 / 1	6 / 0

$\bar{c}_{12} = 3-0-3=0$

$\bar{c}_{13} = 0-0-2=-2$

$\bar{c}_{23} = 0-(-1)-2=-1$

$\bar{c}_{31} = 6-(-2)-5=3$

$\bar{c}_{13}$ a legkisebb, ezért az (1;3) cellát kell kötötté tenni.

A hurok: $(1;3)\to(3;3)\to(3;2)\to(2;2)\to(2;1)\to(1;1)\to(1;3)$

(csak kötött cellánál lehet irányt változtatni)

A páratlan lépésszámra levő kötött cellákban a minimum lekötés értéke 4, ezért az új megoldás:

	$v_1=5$	$v_2=1$	$v_3=0$
$u_1=0$	2 / 5	– / 3	4 / 0
$u_2=-1$	8 / 4	– / 2	– / 0
$u_3=0$	– / 6	7 / 1	2 / 0

$$\left.\begin{array}{l}\bar{c}_{12}=2\\ \bar{c}_{22}=2\\ \bar{c}_{23}=1\\ \bar{c}_{31}=1\end{array}\right\}$$ mind pozitív, optimális a szállítás.

A minimális szállítási költség:

$2\cdot5+8\cdot4+7\cdot1=\underline{\underline{49}}$

4) Hozzárendelési feladat, maximumkereséssel, ezért először a legnagyobb számból (10) kivonjuk a táblázatbeli összes számot:

4	5	2	3	5	(-2)
2	2	0	4	2	
3	3	0	2	5	
8	4	1	2	4	(-1)
5	2	3	6	3	(-2)

2	3	0	1	3
2	2	0	4	2
3	3	0	2	5
7	3	0	1	3
3	0	1	4	1
(-2)			(-1)	(-1)

0	3	0	0	2
0	2	0	3	1
1	3	0	1	4
5	3	0	0	2
1	0	1	3	0

4 vonallal lefedhető az összes 0, további redukció $\varepsilon=1$-el:

0*	2	0	0	1
0	1	0	3	0*
1	2	0*	1	3
5	2	0	0*	1
2	0*	2	4	0

Most már 5 vonal kell az összes 0 lefedéséhez. A *-gal jelölt helyek jelentik az optimális hozzárendelést. A maximális összpontszám:

$6+8+10+8+8=40$

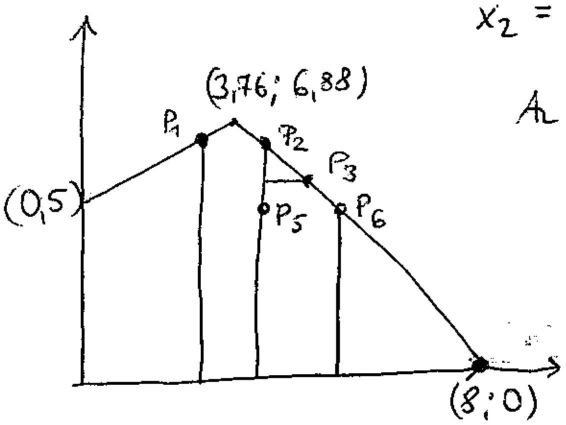
5) A két feltételben szereplő egyenesek metszéspontja:

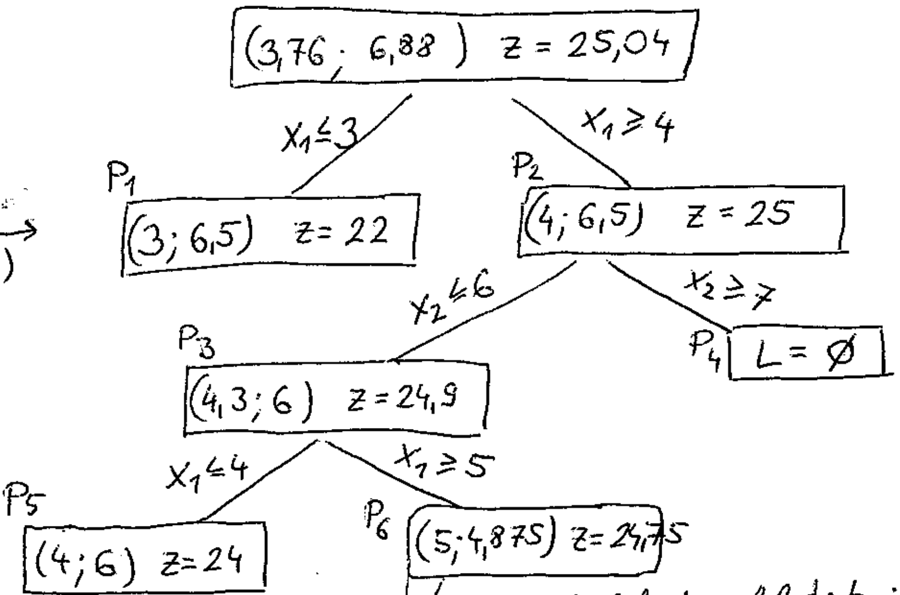
$$13(2x_2-10)+8x_2=104$$

$$34x_2=234$$

$$x_2=\frac{117}{17}\approx 6{,}88 \quad \text{és} \quad x_1=2x_2-10=\frac{64}{17}\approx 3{,}76$$

Az LP lazítás megoldása: (3,76; 6,88)





ezt még lehetne folytatni, de nem érdemes, mert 24-től nem adhat jobb értéket, azt meg P_5-ben elértük

Optimális megoldás: (4;6). Optimum: 24

6) A feladat Lagrange függvénye:

$$L(x_1,x_2,\lambda,\mu)=3x_1^2+x_2^2+2x_1+x_2+4+\lambda(x_2-x_1-1)+\mu(x_1^2+4x_2^2-17)$$

A megoldandó rendszer:

1. $6x_1+2-\lambda+2\mu x_1=0$
2. $2x_2+1+\lambda+8\mu x_2=0$
3. $\mu(x_1^2+4x_2^2-17)=0$
4. $\mu\geq 0$
5. $x_2-x_1-1=0$
6. $x_1^2+4x_2^2-17\leq 0$

1. eset: $\mu=0$. Ekkor 1+2:

$$\left.\begin{aligned} 6x_1+2x_2+3&=0\\ (5)\quad x_2-x_1&=1\end{aligned}\right\}$$

$$6x_1+2(x_1+1)+3=0$$

$$8x_1=-5\rightarrow x_1=-\frac{5}{8}=-0{,}625$$

$$x_2=\frac{3}{8}=0{,}375$$

$(x_1;x_2)$ a 6 feltételt is teljesíti, ezért (−0,625; 0,375) KKT pont.

2. eset: $\mu>0$; $x_1^2+4x_2^2-17=0$

5-el egybevetve két megoldást kapunk: (1;2) és (−2,6; −1,6) Mindkét pontot be kell helyettesíteni az 1 és 2 egyenletekbe, hogy μ-t meghatározzuk, azonban mindkét esetben $\mu<0$ adódik, ezért ezek nem lehetnek KKT pontok.