Problema do Maior Caminho

Cléber Machado

João Luiz Grave Gross

04 de Junho de 2012

Caracterização do problema

- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.

Cléber Machado, João Luiz Grave Gross

Caracterização do problema

- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.
  - Caminho simples: caminho que não contém vértices repetidos.
  - Maior comprimento: maior quantidade de arestas entre dois vértices, desde que respeite o caminho simples.

Caracterização do problema

- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.
  - Caminho simples: caminho que não contém vértices repetidos.
  - Maior comprimento: maior quantidade de arestas entre dois vértices, desde que respeite o caminho simples.

- O problema do maior caminho em grafos é NP-completo.

Caracterização do problema

- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.
  - Caminho simples: caminho que não contém vértices repetidos.
  - Maior comprimento: maior quantidade de arestas entre dois vértices, desde que respeite o caminho simples.

- O problema do maior caminho em grafos é NP-completo.
  - Não possui solução em tempo polinomial, a não ser que P = NP.
  - Pode ser verificado em tempo polinomial.

Caracterização do problema

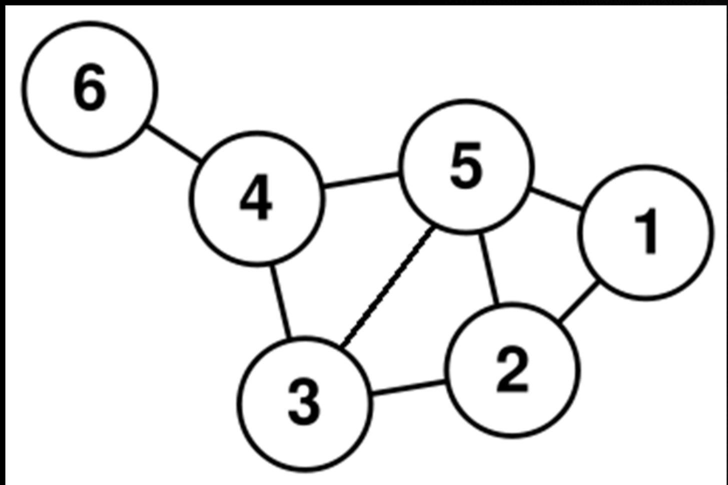
- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.
  - Caminho simples: caminho que não contém vértices repetidos.
  - Maior comprimento: maior quantidade de arestas entre dois vértices, desde que respeite o caminho simples.

- O problema do maior caminho em grafos é NP-completo.
  - Não possui solução em tempo polinomial, a não ser que P = NP.
  - Pode ser verificado em tempo polinomial.

- Versão padrão do problema:
  - Dado um grafo conexo, encontrar um caminho simples de comprimento maior ou igual a k.

Caracterização do problema

- Exemplo

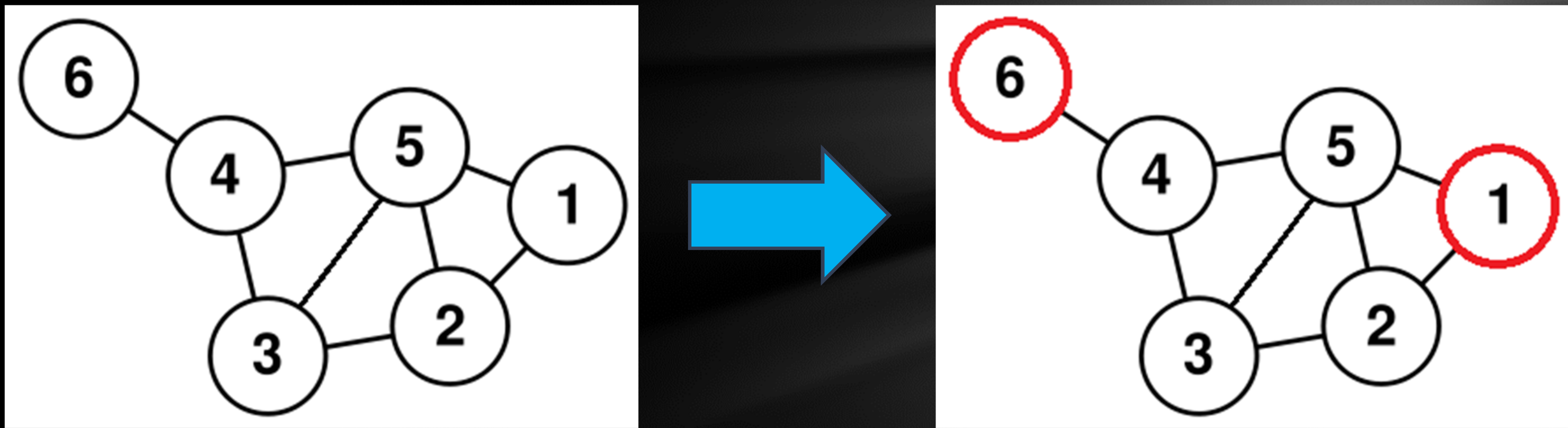


Qual o maior caminho simples deste grafo?

Cléber Machado, João Luiz Grave Gross

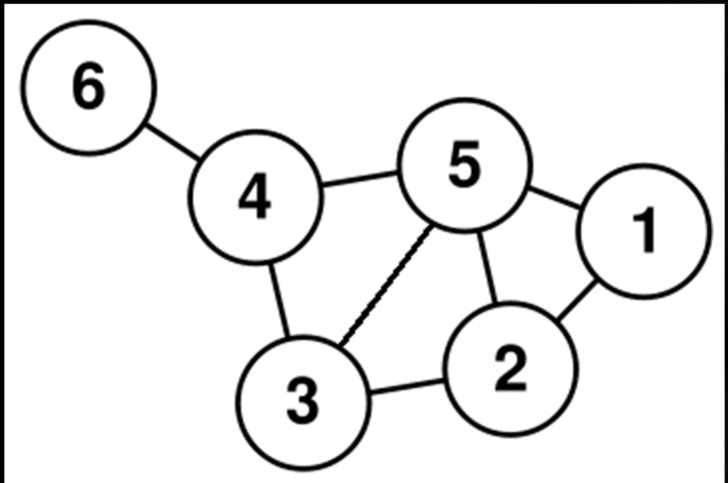
Caracterização do problema

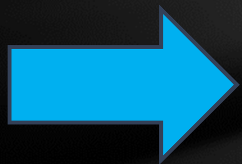
- Exemplo

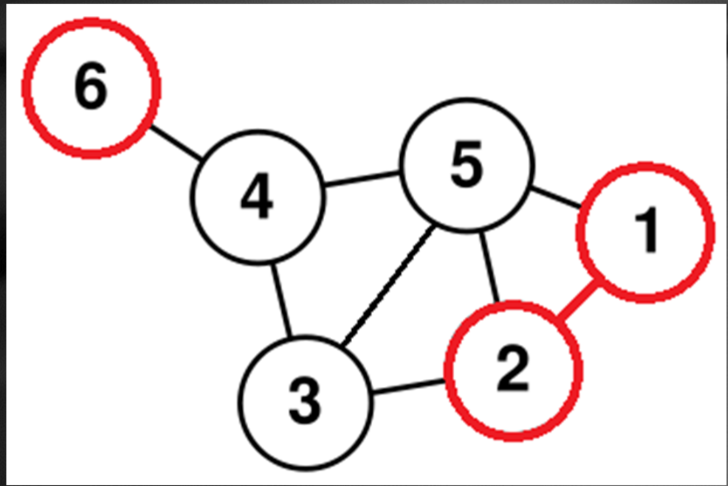


Caracterização do problema

- Exemplo

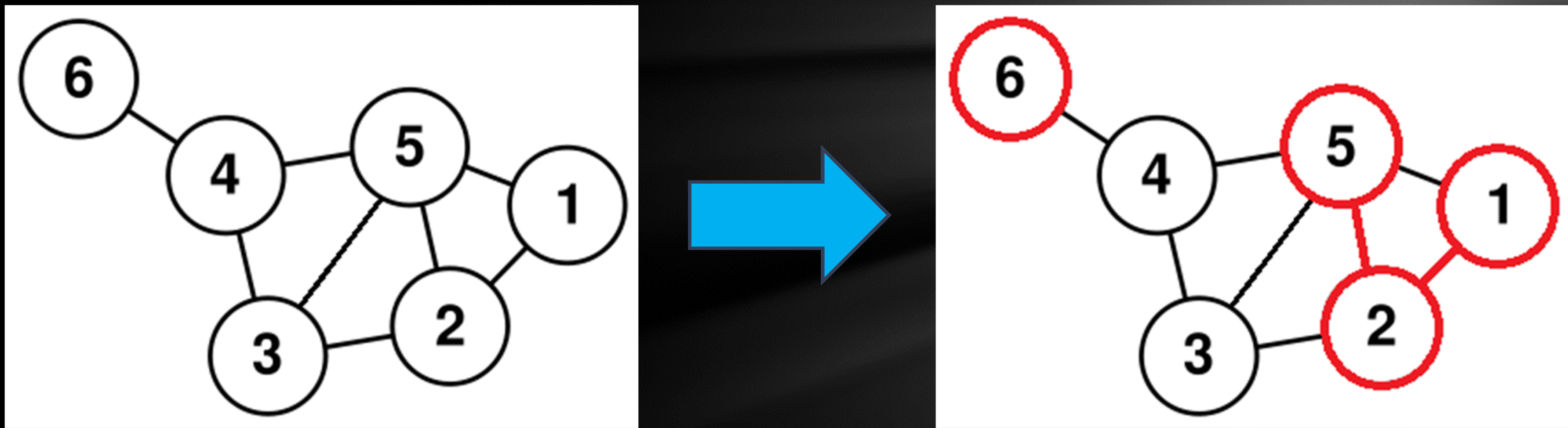






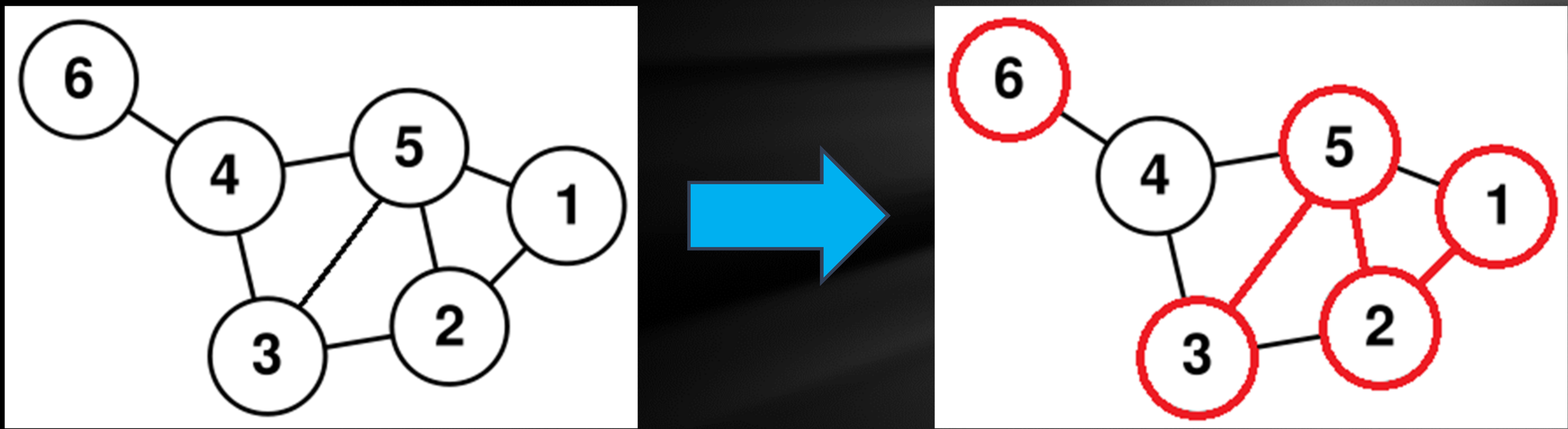
Caracterização do problema

- Exemplo



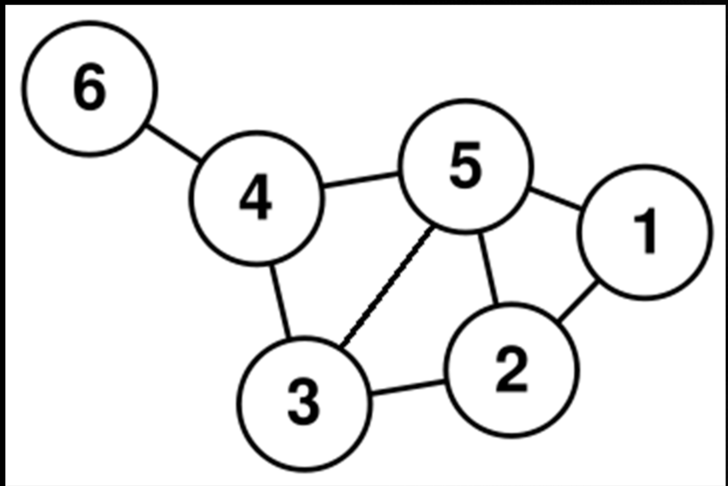
Caracterização do problema

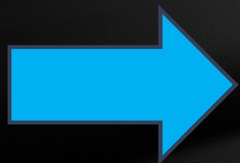
- Exemplo

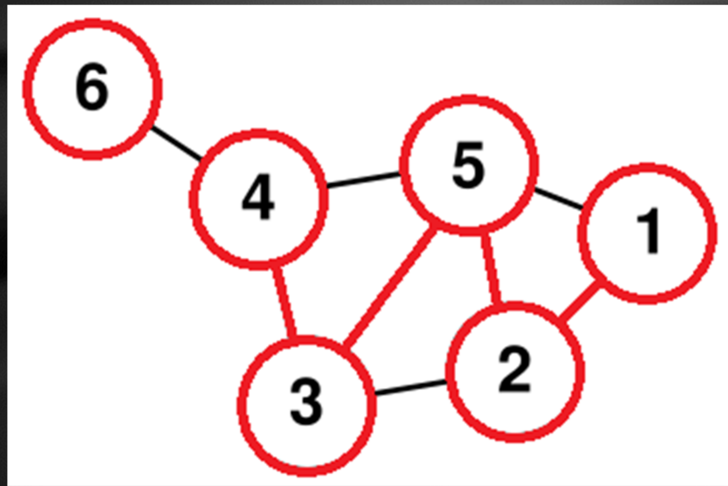


Caracterização do problema

- Exemplo

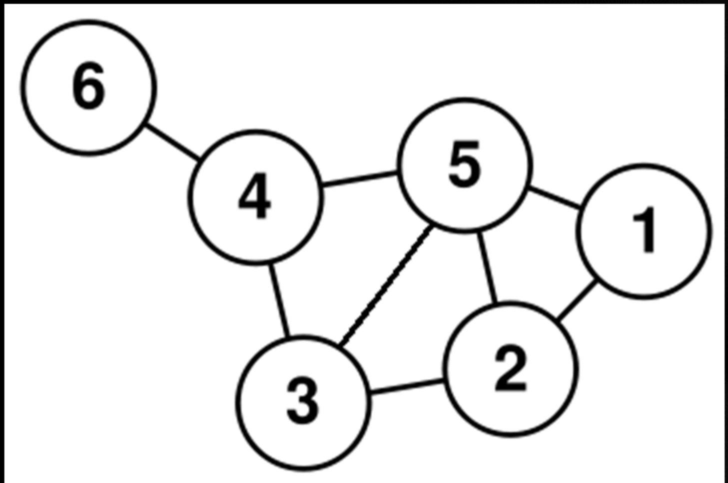


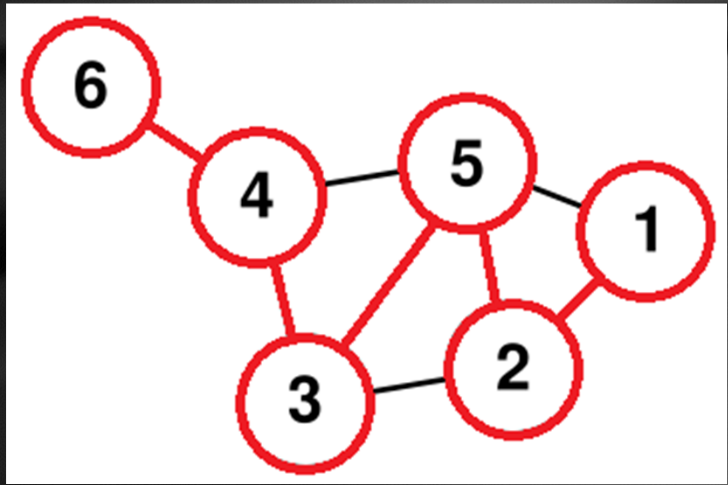




Caracterização do problema

- Exemplo



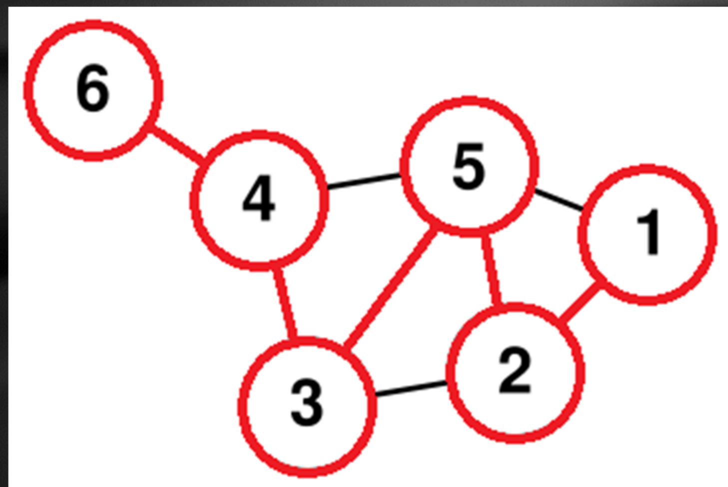


Caracterização do problema

- Exemplo

Qual o maior caminho simples deste grafo?

- Comprimento: 5



Cléber Machado, João Luiz Grave Gross

Caracterização do problema

- Considerações
  - Em um grafo G, com n vértices, o maior caminho simples possível será **sempre** de comprimento n – 1 ou menor.
  - Um caminho com comprimento n – 1 em um grafo G com n vértices é um caminho Hamiltoano.
  - Um caminho Hamiltoniano é um caminho que contempla **todos** os vértices de um grafo.

- O conceito de caminho Hamiltoniano é de suma importância para a prova do problema.

Prova que pertence a NP

- Para a prova assumimos que existe um algoritmo que recebe uma entrada e verifica em tempo polinomial se ela é solução do problema.

- Para este algoritmo, dado um inteiro k e um grafo G, queremos saber se existe um caminho de comprimento maior ou igual a k em G.

- A possível solução chamamos de certificado.

Prova que pertence a NP

- Algoritmo de Verificação
  - Dado u grafo G e um natural k, decidir se existe em G um caminho de comprimento maior ou igual a k.
  - Suponha que a função **CAMINHO(k, G)** receba um inteiro k e um grafo G e devolva **sim** se existe um caminho de comprimento maior ou igual a k em G e devolva **não**, caso contrário.

CAMINHO MAIS LONGO(G)

```
k ← ||V(G)|| - 1
enquanto (CAMINHO(k, G) = nao)
        k ← k - 1
H ← G
para i em E(H)  //seleciona uma aresta i de H
        remova i de H
        se (CAMINHO(k, H) = nao)  //chama recursivamente CAMINHO
                insira i de volta em H
retorne H
```

Prova que pertence a NP

- Prova
  - A prova de que o problema pertence a NP é trivial.
  - Um certicado para a instância sim do problema é a descrição de um caminho de comprimento maior ou igual a k. [RSK]

- Análise de complexidade
  - $C_{algoritmo} = O(n^2)$

Prova que pertence a NP-Completo

- Definições para a prova
  - G = (V, A) é um grafo, onde V e o conjunto de vértices e A o conjunto de arestas.
  - f(<G>) = <G, n - 1> é uma função, onde n é o número de vértices em G, ou seja, n = ||V||.
    - Claramente f é computavel em tempo polinomial: um algoritmo para computar f simplesmente conta o número de vértices do grafo G e anexa o valor decrescido de uma unidade ao seu resultado (saída), n - 1.

Prova que pertence a NP-Completo

- Definições para a prova
  - G = (V, A) é um grafo, onde V e o conjunto de vértices e A o conjunto de arestas.
  - f(<G>) = <G, n - 1> é uma função, onde n é o número de vértices em G, ou seja, n = ||V||.
    - Claramente f é computavel em tempo polinomial: um algoritmo para computar f simplesmente conta o número de vértices do grafo G e anexa o valor decrescido de uma unidade ao seu resultado (saída), n - 1.

- Prova
  - Assumimos que G possui um caminho hamiltoniano e aplicamos a redução:

Caminho-Hamiltoniano ≤p Caminho-Mais-Longo

Prova que pertence a NP-Completo

- Prova (continuação)

  - Se <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano, então G tem um caminho hamiltoniano.
    - implica que f(<G>) = <G, n - 1> ∈ Caminho-Mais-Longo.

  - Se f(<G>) = <G, n - 1> ∈ Caminho-Mais-Longo, então G tem um caminho simples com n - 1 arestas.
    - Implica que <G> possui um caminho hamiltoniano, logo <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano.

Prova que pertence a NP-Completo

- Prova (continuação)
  - Se <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano, então G tem um caminho hamiltoniano.
    - implica que f(<G>) = <G, n - 1> ∈ Caminho-Mais-Longo.
  - Se f(<G>) = <G, n - 1> ∈ Caminho-Mais-Longo, então G tem um caminho simples com n - 1 arestas.
    - Implica que <G> possui um caminho hamiltoniano, logo <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano.
  - Mostrou-se que f é computável em tempo polinomial.
  - Para todos os grafos G, <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano e f(<G>) ∈ Caminho-Mais-Longo.
  - Logo, Caminho-Hamiltoniano ≤p Caminho-Mais-Longo e como Caminho-Hamiltoniano é NP-completo, Caminho-Mais-Longo é NP-completo.

Prova que pertence a NP-Completo

- Algoritmo de Redução

ReduceHamiltonianToLongestPath(G)

```
path ← vazio
se (CAMINHO-HAMILTONIANO-EXISTE(G) = sim)
        path ← ||V(G)|| - 1
retorna <G, path>
```

Prova que pertence a NP-Completo

- Algoritmo de Redução

ReduceHamiltonianToLongestPath(G)

```
path ← vazio
se (CAMINHO-HAMILTONIANO-EXISTE(G) = sim)
        path ← ||V(G)|| - 1
retorna <G, path>
```

- Análise de complexidade
  - $C_{algoritmo} = O(n^m)$

Conclusão

- Conseguimos realizar a prova de que o problema do maior caminho em grafos e um problema NP-completo, pois nao possui solução em tempo polinomial.

- As provas e reduções nos mostraram que o problema em questão apenas é verificável em tempo polinomial.

- Ótima opotunidade para exercitar os conteúdos apresentados na disciplina.

Referências

- [KHM] Khan, Mumit. CSE 221: Longest path in a directed acyclic graph (DAG). April 10, 2011.
- [MCP] McCabe, Paul. University of Toronto. Professor of CSC363, Computational Complexity and Computability on Spring 2005. (http://www.cs.toronto.edu/~pmccabe/csc363-2005S/)
- [RSF] Rezende, Susanna Figueiredo. Caminhos mais longos em grafos. Instituto de Matematica e Estatstica, Universidade de Sao Paulo, Brasil. 17 de fevereiro de 2012.
- [URUY] Uehara, Ryuhei and Uno, Yushi. On Computing Longest Paths in Small Graph Classes. Department of Information Processing, School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST). Japan, July 28, 2005.