Soluções prova 1

Questão 1

a) Seja x_{ij} a quantidade de litros (medida em mil litros) enviados da distribuidora i para o cliente j.

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{minimiza} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}, & \\
\textbf{sujeito a} & x_{11} + x_{21} = 300, & \\
& x_{12} + x_{22} = 200, & \\
& x_{13} + x_{23} = 400, & \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400, & \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 400, & \\
& x_{ij} \ge 0, & \forall i \in [3], j \in [3].
\end{array}
$$

b) A formulação generalizada é

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{minimiza} & \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[m]} c_{ij}x_{ij}, & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{i\in[n]} x_{ij} = d_j, & \forall j \in [m], \\
& \sum_{j\in[m]} x_{ij} \le c_i, & \forall i \in [n], \\
& x_{ij} \ge 0, & \forall i \in [n], j \in [m].
\end{array}
$$

c) O modelo com demanda variando é

$$
\begin{array}{rll}
\textbf{minimiza} & \sum_{l\in[k]} \sum_{i\in[n]} \sum_{j\in[m]} c_{ij}x^l_{ij}, & \\
\textbf{sujeito a} & \sum_{i\in[n]} x^l_{ij} = d^l_j, & \forall j \in [m], l \in [k], \\
& \sum_{j\in[m]} x^l_{ij} \le c^l_i, & \forall i \in [n], l \in [k], \\
& x^l_{ij} \ge 0, & \forall i \in [n], j \in [m], l \in [k].
\end{array}
$$

d) Temos no item a) 6 variáveis e 5 restrições, no item b) nm variáveis e $n+m$ restrições, e no item c) nmk variáveis e $kn+km$ restrições.

Questão 2

O sistema é forma normal não possui solução básica viável, logo temos que aplicar a fase I. O dicionário inicial do sistema auxiliar é

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & & \downarrow \\
z = & & & & -x_0 \\
\leftarrow w_1 = & -2 & +x_1 & +x_2 & +x_0 \\
w_2 = & -2 & -3x_1 & -x_2 & +x_0 \\
w_3 = & & +2x_1 & -x_2 & +x_0
\end{array}
$$

O dicionário após o pivô x_1 e w_2 é

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & \downarrow & & \\
z = & -2 & +x_1 & +x_2 & -w_1 \\
x_0 = & 2 & -x_1 & -x_2 & +w_1 \\
\leftarrow w_2 = & 0 & -4x_1 & -2x_2 & +w_1 \\
w_3 = & 2 & +x_1 & -2x_2 & +w_1
\end{array}
$$

O dicionário após o pivô x_1 e w_2 é

$$\begin{array}{rrrr}
 & & \downarrow & \\
z = -2 & -1/4w_2 & +1/2x_2 & -3/4w_1 \\
x_0 = 2 & +1/4w_2 & -1/2x_2 & +3/4w_1 \\
\leftarrow x_1 = 0 & -1/4w_2 & -1/2x_2 & +1/4w_1 \\
w_3 = 2 & -1/4w_2 & -5/2x_2 & +5/4w_1
\end{array}$$

O dicionário após o pivô x_2 e x_1 é

$$\begin{array}{rrrr}
z = -2 & -1/2w_2 & -x_1 & -1/2w_1 \\
x_0 = 2 & +1/2w_2 & +x_1 & +1/2w_1 \\
x_2 = 0 & -1/2w_2 & -2x_1 & +1/2w_1 \\
w_3 = 2 & +w_2 & +5x_1 &
\end{array}$$

Como o valor $x_0 > 0$ o sistema é infactível.

Questão 3

a) Não. Um exemplo é o sistema $\max\{x_1 \mid x_1 \geq 1, x_1 \leq 2\}$ com solução máxima $x_1 = 2$. A variável de folga da desigualdade $x_1 \geq 1$ possui valor 1 nesta solução.

b) Não. O sistema pode ser ilimitado.

c) Não. Um exemplo é o sistema $\max\{-x_1 \mid x_1 \geq 1, x_1 \leq 2\}$ com solução ótima $x_1 = 1$. Mesmo com solução inicial viável isso não é verdadeiro. Um exemplo é o sistema $\max\{-x_1 + 2x_2 \mid -4x_1 + x_2 \leq 0, 4x_1 + x_2 \leq 8, x_1, x_2 \geq 0\}$.