MAT 01375 – Matemática Discreta B 2009/2

Lista de Exercícios 10

1. Mostre, por indução, que:

   a) $(\forall n \geq 0)\ \ 2 - 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 - \ldots + 2 \cdot (-7)^n = \dfrac{1 - (-7)^{n+1}}{4}$

   b) $(\forall n \geq 1)\ \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

   c) $(\forall n \geq 0)\ \ 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

   d) $(\forall n \geq 1)\ \ 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

   e) $(\forall n \geq 4)\ \ 2^n \geq n^2$

   f) $(\forall n \geq 1)\ \ n! \leq n^n$

   g) $(\forall n \geq 0)\ \ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

   h) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
   $(\forall n \geq 0)$

   i) $(\forall n \geq 1)\ \ 1 + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{9} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} \leq 2 - \dfrac{1}{n}$

2. Use indução para mostrar que $(\forall n \geq 0)\ \ n^3 + 2n$ é divisível por 3.

3. Mostre, usando indução, que $(\forall n \geq 0)$ se $f(x) = x^n$ então $f'(x) = nx^{(n-1)}$.

4. Determine quais os valores de postagem que podem ser formados usando somente selos de $5u.m$ e $6u.m.$ Mostre o resultado obtido usando o 1º e o 2º Princípio de Indução.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, onde $a, b \in \mathbb{R}$. Mostre que $(\forall n \geq 0)\ \ A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$.

6. <u>Afirmação</u>: $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(2n+1)^2}{8},\ \forall n \geq 1$. Encontre o erro na seguinte "prova" dessa afirmação : suponhamos, por hipótese de indução, que a fórmula seja válida para um certo número natural n, ou seja, que vale $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(2n+1)^2}{8}$. Mostremos que a fórmula também é válida para $n + 1$. De fato:

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{(2n+1)^2}{8} + (n+1) = \frac{4n^2 + 4n + 1}{8} + (n+1) =$$

$$= \frac{4n^2 + 4n + 1 + 8n + 8}{8} = \frac{4n^2 + 12n + 9}{8} = \frac{(2n+3)^2}{8} = \frac{(2(n+1)+1)^2}{8}.$$

Logo, pelo princípio da indução , $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(2n+1)^2}{8}$, para cada $n \geq 1$.

7. Considere a seqüência abaixo:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2 \qquad \text{e} \qquad a_n = \frac{(a_{n-1})^2}{a_{n-2}}\ , \qquad \text{para} \qquad \text{para} \quad n \geq 2$$

Conjecture uma fórmula geral para os termos desta seqüência e prove por indução a validade de sua fórmula.

8. • **Questão 4** (2,5 pontos):

   i) Mostre, por indução, que:

$$(\forall n \geq 1) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

   ii) Seja $a_0 = 1$ e, para $n > 0$, seja $a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 1$. Mostre, por indução, que

$$(\forall n \geq 1) \quad a_n = \frac{3^n + 1}{2}\ .$$

9. • **Questão 4** (2,5 pontos): Mostre, por indução, que:

   i) $(\forall n \geq 1) \quad 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1}\ .$

   ii) $(\forall n \geq 1) \quad 1 + \dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}\ .$