Exercício 0.1 (Matrizes TU)
Quais das matrizes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

são totalmente unimodulares?

Para cada um dos quatro problemas abaixo

(i) Encontre uma formulação como programa inteiro,

(ii) descubra se a relaxação linear produz soluções inteiras ótimas:
- Escreva a matriz de coeficientes do programa linear.
- Verifique se a matriz é totalmente unimodular.

Proposição 0.1
Uma matriz A é totalmente unimodular se
(i) $a_{ij} \in \{+1, -1, 0\}$
(ii) Cada coluna contém no máximo dois coeficientes não-nulos.
(iii) Existe uma partição de linhas M_1, M_2 tal que cada coluna com dois coeficientes não-nulos satisfaz

$$\sum_{i \in M_1} a_{ij} - \sum_{i \in M_2} a_{ij} = 0$$

ou exibe um exemplo em que a relaxação linear não gera uma solução inteira ótima.

Conjunto independente máximo

Instância Um grafo não-direcionado $G = (V, A)$.

Solução Um *conjunto independente* I, i.e. $I \subseteq V$ tal que para vértices $v_1, v_2 \in I$, $\{v_1, v_2\} \notin A$.

Objetivo Maximizar $|I|$.

Casamento perfeito com peso máximo

Instância Um grafo não-direcionado bi-partido $G = (V_1 \dot\cup V_2, A)$ (o fato de ser bi-partido significa que $A \subseteq V_1 \times V_2$) com pesos $p : A \to \mathbb{R}$ nos arcos.

Solução Um *casamento perfeito*, i.e. um conjunto de arcos $C \subseteq A$ tal que todos nós no sub-grafo $G[C] = (V_1 \cup V_2, C)$ tem grau 1.

Objetivo Maximiza o peso total $\sum_{c \in C} p(c)$ do casamento.

Problema de transporte

Instância n depósitos, cada um com um estoque de p_i $(1 \leq i \leq n)$ produtos, e m clientes, cada um com uma demanda d_j $(1 \leq j \leq m)$ produtos. Custos de transporte a_{ij} de cada depósito para cada cliente.

Solução Um decisão de quantos produtos x_{ij} devem ser transportados do depósito i ao cliente j, que satisfaz (i) Cada depósito manda todo seu estoque (ii) Cada cliente recebe exatamente a sua demanda. (Observe que o número de produtos transportados deve ser integral.)

Objetivo Minimizar os custos de transporte $\sum_{i,j} a_{ij} x_{ij}$.

CONJUNTO DOMINANTE

Instância Um grafo não-direcionado $G = (V, A)$.

Solução Um *conjunto dominante*, i.e. um conjunto $D \subseteq V$, tal que $\forall v \in V : v \in D \vee (\exists u \in D : \{u, v\} \in A)$ (cada vértice faz parte do conjunto dominante ou tem um vizinho no conjunto dominante).

Objetivo Minimizar o tamanho do conjunto dominante $|D|$.

Exercício 0.2 (Algoritmo de Planos de Corte)

1. Considere um sistema de PI com variáveis x_1 e x_2, e variáveis de folga x_3, x_4 e x_5, cujo dicionário ótimo da resolução linear é:

$$\begin{array}{llccc} \textbf{max} & z = & 2 & -x_3 & -x_4 \\ & x_1 = & 4/3 & +2/3x_3 & +1/3x_4 \\ & x_2 = & 1/3 & -1/3x_3 & +1/3x_4 \\ & x_5 = & 2/3 & +1/3x_3 & -1/3x_4 \end{array}$$

2. Resolva o sistema via método de Plano de Cortes (se a solução requerer a inserção de mais que dois cortes, pare ao obter o sistema ótimo após ter inserido o segundo corte).
3. Resolva o sistema abaixo usando o algoritmo de planos de corte.

$$\begin{array}{ll} \textbf{max} & z = -3/4x_1 + 1/2x_2 \\ & 1/4x_1 - 1/2x_2 \leq 1/8 \\ & 1/2x_1 + 3x_2 \leq 9/4 \\ & x_1, x_2 \in Z^+ \end{array}$$