Gauss Jacobi

Vamos encontrar a solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{array}{rrrrl}
1\,x1 + & 2\ x2 - & x3 - & & = 1 \\
2\,x1 - & x2 & & & = 1 \\
- & x2 + & 2\,x3 - & x4 & = 1 \\
 & & x3 + & 2\,x4 & = 1
\end{array}$$

Vamos definir:

```
In[9]:= A = {{1., 2., -1., 0.}, {2., -1., 0, 0}, {0., -1., 2., -1.}, {0., 0., -1., 2.}};
        b = {1, 2, 3, 4};
```

In[11]:=

$$x1[i\_] := \frac{-A[[1,2]]\,x2[i-1] - A[[1,3]]\,x3[i-1] - A[[1,4]]\,x4[i-1] + b[[1]]}{A[[1,1]]}$$

$$x2[i\_] := \frac{-A[[2,1]]\,x1[i-1] - A[[2,3]]\,x3[i-1] - A[[2,4]]\,x4[i-1] + b[[2]]}{A[[2,2]]}$$

$$x3[i\_] := \frac{-A[[3,1]]\,x1[i-1] - A[[3,2]]\,x2[i-1] - A[[3,4]]\,x4[i-1] + b[[3]]}{A[[3,3]]}$$

$$x4[i\_] := \frac{-A[[4,1]]\,x1[i-1] - A[[4,2]]\,x2[i-1] - A[[4,3]]\,x3[i-1] + b[[4]]}{A[[4,4]]}$$

Fazendo :

In[15]:=
```
x1[0] = 0; x2[0] = 0; x3[0] = 0; x4[0] = 0;
int[j_] := MatrixForm[{x1[j], x2[j], x3[j], x4[j]}]
{int[0], int[1], int[2], int[3], int[4], int[5], int[6], int[7], int[8], int[9], int[10]}
```

Out[17]=

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1.\\-2.\\1.5\\2.\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6.5\\0.\\1.5\\2.75\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2.5\\11.\\2.875\\2.75\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-18.125\\3.\\8.375\\3.4375\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3.375\\-38.25\\4.71875\\6.1875\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}82.2188\\4.75\\-14.5313\\4.35938\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-23.0313\\162.438\\6.05469\\-5.26563\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-317.82\\-48.0625\\80.0859\\5.02734\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}177.211\\-637.641\\-20.0176\\42.043\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1256.26\\352.422\\-296.299\\-8.00879\end{pmatrix}\right\}$$

Assim o método de Jacobi diverge para estas equações. Podemos observar que neste caso a matriz A não é diagonal dominante. (Mesmo trocando a ordem das equações). Vamos agora usar o método de Gauss Seidel sobre o mesmo sistema, assim:

In[18]:=

$$x1[i\_] := \frac{-A[[1,2]]\,x2[i-1] - A[[1,3]]\,x3[i-1] - A[[1,4]]\,x4[i-1] + b[[1]]}{A[[1,1]]}$$

$$x2[i\_] := \frac{-A[[2,1]]\,x1[i] - A[[2,3]]\,x3[i-1] - A[[2,4]]\,x4[i-1] + b[[2]]}{A[[2,2]]}$$

$$x3[i\_] := \frac{-A[[3,1]]\,x1[i] - A[[3,2]]\,x2[i] - A[[3,4]]\,x4[i-1] + b[[3]]}{A[[3,3]]}$$

$$x4[i\_] := \frac{-A[[4,1]]\,x1[i] - A[[4,2]]\,x2[i] - A[[4,3]]\,x3[i] + b[[4]]}{A[[4,4]]}$$

Fazendo :

In[22]:=
```
x1[0] = 0; x2[0] = 0; x3[0] = 0; x4[0] = 0;
int[j_] := MatrixForm[{x1[j], x2[j], x3[j], x4[j]}]
{int[0], int[1], int[2], int[3], int[4], int[5]}
```

Out[24]=

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1.\\0.\\1.5\\2.75\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2.5\\3.\\4.375\\4.1875\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-0.625\\-3.25\\1.96875\\2.98438\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9.46875\\16.9375\\11.4609\\7.73047\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-21.4141\\-44.8281\\-17.0488\\-6.52441\end{pmatrix}\right\}$$

O método de Gauss - Seidel tb é divergente para este sistema. Observe que nem o critério das linhas, nem o critério de Sanssenfeld são satisfeitos. Agora se permutamos as duas primeiras linhas deste sistemas de equações, o critério de Sanssenfeld passa a ser satisfeito, logo o método de Gauss - Seidel será convergente, para qualquer vetor inicial considerado.

```
In[25]:= A = {{2., -1., 0, 0}, {1., 2., -1., 0.}, {0., -1., 2., -1.}, {0., 0., -1., 2.}};
         b = {2, 1, 3, 4};
```

In[35]:=
```
V[i_] := Norm[{x1[i], x2[i], x3[i], x4[i]} - {x1[i - 1], x2[i - 1], x3[i - 1], x4[i - 1]}, Infinity]
{int[0]}
{int[1], V[1]}
{int[2], V[2]}
{int[3], V[3]}
{int[4], V[4]}
{int[5], V[5]}
```

Out[36]= $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Out[37]= $\left\{\begin{pmatrix} 1. \\ 0. \\ 1.5 \\ 2.75 \end{pmatrix}, 2.75\right\}$

Out[38]= $\left\{\begin{pmatrix} 1. \\ 0.75 \\ 3.25 \\ 3.625 \end{pmatrix}, 1.75\right\}$

Out[39]= $\left\{\begin{pmatrix} 1.375 \\ 1.4375 \\ 4.03125 \\ 4.01563 \end{pmatrix}, 0.78125\right\}$

Out[40]= $\left\{\begin{pmatrix} 1.71875 \\ 1.65625 \\ 4.33594 \\ 4.16797 \end{pmatrix}, 0.34375\right\}$

Out[41]= $\left\{\begin{pmatrix} 1.82813 \\ 1.75391 \\ 4.46094 \\ 4.23047 \end{pmatrix}, 0.125\right\}$