MAT 01375 – Matemática Discreta B	**2009/2**
Lista de Exercícios 7	

1. Determine se as relações abaixo, dadas por sua representação matricial, são ou não relações de ordem . Justifique sua resposta.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Faça o grafo das relações do exercício anterior.

3. Quais dos elementos abaixo são comparáveis no conjunto parcialmente ordenado $(\mathbb{N}^*, |\,)$? Justifique.

   i) 5 e 15, ii) 6 e 9, iii) 8 e 16, iv) 7 e 17, v) 10 e 15.

4. Determine dois elementos não comparáveis nos conjuntos parcialmente ordenados abaixo.

   a) $(\mathbb{P}(\{0, 1, 2\}), \subseteq)$
   b) $(\{1, 2, 4, 6, 8\}, |\,)$.

5. Faça o diagrama de Hasse para a relação de divisibilidade nos seguintes conjuntos e determine a altura e a largura de cada um deles:

   a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   b) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$.
   c) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$.
   d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$.

6. Faça o diagrama de Hasse para a relação de inclusão no conjunto das partes de $\{a, b, c, d\}$.

7. Mostre que, se $(S_1, \leq_1)$ e $(S_2, \leq_2)$ são conjuntos PO, então $(S_1 \times S_2, \leq_{pro})$ é um conjunto PO, onde relação "$\leq_{pro}$" é definida por:

$$(a, b) \leq_{pro} (c, d) \iff [\, a \leq_1 c \;\wedge\; b \leq_2 d \,].$$

   Caso S_1 e S_2 sejam totalmente ordenados, o conjunto $S_1 \times S_2$ será também totalmente ordenado? Justifique.

8. Seja (S, R) um conjunto PO.

   Mostre que:

   a) $\left(S, R^{-1}\right)$ é um conjunto PO. Se designamos a relação R por "menor que ou igual,"como poderíamos designar a relação R^{-1}?

   b) R é sobrejetora.

   c) $(\exists\, a, b \in S)\,[aRb \;\wedge\; a \neq b] \Longrightarrow$ R não é injetora $\quad \wedge \quad$ R não é funcional.

9. Seja $(\mathbb{P}\,(X)\,, \subseteq)\,$, onde X é um conjunto qualquer.

   Mostre que, se A e B são subconjuntos de X, então $\{X, A \cap B, A \cup B, A\}$ é uma cadeia em $\mathbb{P}\,(X)\,.$

10. Determine todos os elementos $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, para os quais temos:

    a) $(a, b) \leq_{pro} (1, 3)\,;$

    b) $(a, b) \leq_{lex} (1, 3)\,;$

11. • **Questão 5** (2,0 pontos): Seja $\mathcal{P}$ o conjunto das proposições. Mostre que " $\Longrightarrow$ " define uma relação de ordem parcial em $\mathcal{P}$, ou seja, mostre que a relação R definida por:

    $$(\forall\; p\,,\, q \in \mathcal{P}) \quad (p, q) \in R \quad \text{se e somente se} \quad p \Longrightarrow q$$

    é uma relação de ordem parcial. Use que duas proposições p e q são "iguais" se elas são logicamente equivalentes, ou seja, $p \Longleftrightarrow q$.

12. • **Questão 5** (2,0 pontos): Seja $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ a relação definida por:

    $$(a, b) \in R \longleftrightarrow (\exists\; t \in \mathbb{N}^*) \;\; b = a^t.$$

    (i) Mostre que R é uma relação de ordem parcial em $\mathbb{Z}$.

    (ii) $(\mathbb{Z}, R)$ é um conjunto totalmente ordenado?