INF01 118

Técnicas Digitais para Computação

Funções Booleanas

UFRGS

Aula 9

Álgebra Booleana de Chaveamento

Álgebras Booleanas

- variáveis, constantes
- valores de variáveis e constantes: conjunto discreto e finito
- operadores "+", ".", "complemento" definidos sobre as constantes
- elementos neutros para cada operador

Álgebra Booleana de Chaveamento

- valores 0 e 1
- operadores "+", ".", "complemento" definidos sobre 0 e 1

A	B	A + B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	A . B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

"0" ⟺ "falso"
"1" ⟺ "verdadeiro"

- "0" é o elemento neutro do operador "+"
- "1" é o elemento neutro do operador "."

"+" ⟺ "or"
"." ⟺ "and"

Axiomas e Teoremas da Álgebra Booleana

1. $X + 0 = X$
2. $X \,.\, 1 = X$
3. $X + 1 = 1$
4. $X \,.\, 0 = 0$
5. $X + X = X$
6. $X \,.\, X = X$
7. $X + \overline{X} = 1$
8. $X \,.\, \overline{X} = 0$
9. $\overline{\overline{X}} = X$
10. $X + Y = Y + X$
11. $X\,Y = Y\,X$

Lei comutativa

12. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
13. $X(YZ) = (XY)Z$

Lei associativa

14. $X \,.\, (Y + Z) = XY + XZ$
15. $X + YZ = (X + Y)\,(X + Z)$

Lei distributiva

16. $\overline{X + Y} = \overline{X} \,.\, \overline{Y}$
17. $\overline{X \,.\, Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

DeMorgan

- Dual de uma expressão algébrica
  - trocar OR $\longleftrightarrow$ AND
  - trocar 0 $\longleftrightarrow$ 1

- Em qualquer equação booleana acima, X pode ser substituído por uma expressão qualquer.

- Exemplo: $X + 1 = 1$ substituindo X por AB + C $AB + C + 1 = 1$

- Lei distributiva $X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$

- Ex. : $(A + B)(A + CD)$

  aplicando lei distributiva ao contrário => $A + BCD$

Avaliação de Funções Booleanas

- Construção de uma Tabela-Verdade

Exemplo: F (A,B)
4 combinações de valores de A,B
uma linha para cada combinação

A	B	F(A,B)
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

- Avaliação da função
  - substituir variáveis por 0 ou 1
  - avaliar AND, OR, complemento na ordem estabelecida

- Exemplo: DeMorgan

$$\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$$

X	Y	X+Y	$\overline{X+Y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$\overline{X} \cdot \overline{Y}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

As 2 tabelas-verdade são idênticas, portanto a igualdade das funções é verdadeira

Funções Booleanas e Circuitos Lógicos

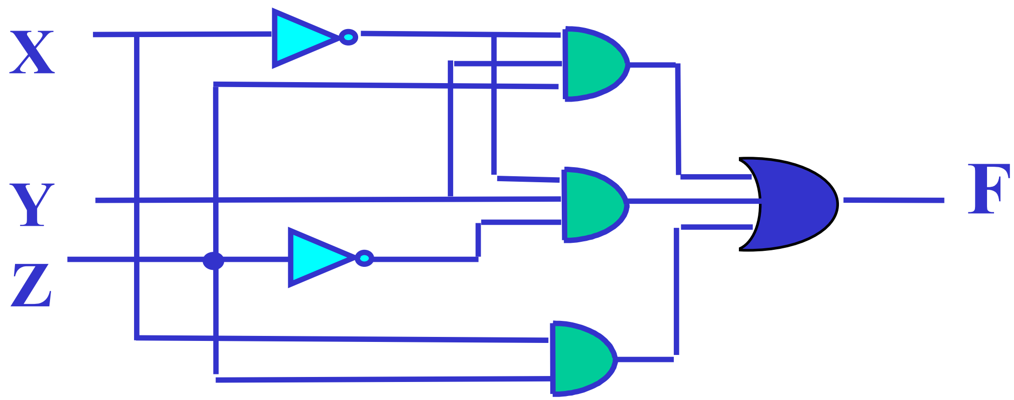
$\bar{X} . Y . Z + \bar{X} . Y . \bar{Z} + X . Z$

termo

literais

Cada ocorrência de variável (complementada ou não)

- Pode-se obter um circuito da seguinte maneira
  - cada termo é uma porta
  - cada literal é uma entrada para uma porta
  - portas adicionais : inversores na entrada
    composição dos termos (1 AND ou 1 OR)



O número de termos e literais dá uma medida aproximada da complexidade do circuito.

- No exemplo:

3 termos
8 literais

6 portas
- 3 portas de 3 entradas
- 1 porta de 2 entradas
- 2 portas de 1 entrada

Manipulações Algébricas

- Manipulação algébrica usando axiomas e teoremas => simplificação de circuitos
- Redução do número de termos e/ou de literais deve resultar num circuito com menos portas
- Exemplo anterior

$$F = \overline{X}\,Y\,Z + \overline{X}\,Y\,\overline{Z} + X\,Z$$

(identidade 14) lei distributiva

$$F = \overline{X}\,Y\,(Z + \overline{Z}) + X\,Z$$

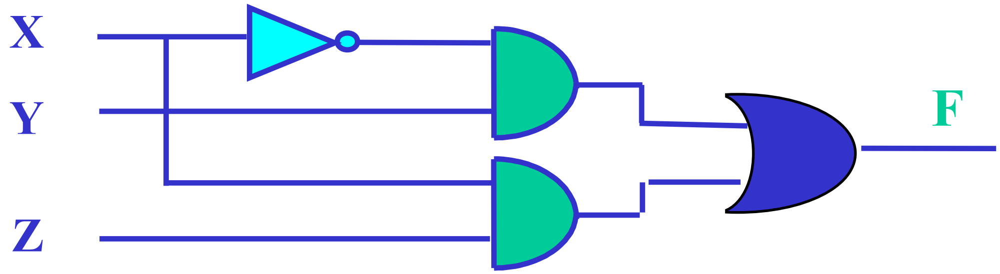
(identidade 7) complemento

$$F = \overline{X}\,Y \,.\, 1 + X\,Z$$

(identidade 2) elemento identidade

$$F = \overline{X}\,Y + X\,Z$$

2 termos
4 literais



4 portas
- 3 portas de 2 entradas
- 1 porta de 1 entrada

- Não existe nenhuma técnica especial para indicar qual manipulação algébrica deve ser aplicada para simplificar o circuito
  - método de tentativas
  - familiaridade com axiomas e teoremas

- Exemplos

$$X + XY = X\,.\,(1+Y) = X\,.\,1 = X$$

$$XY + X\overline{Y} = X\,.\,(Y+\overline{Y}) = X\,.\,1 = X$$

$$X + \overline{X}Y = (X+\overline{X})\,.\,(X+Y) = 1.\,(X+Y) = X + Y$$

- Outros exemplos

$$X\,.\,(X+Y) = X.X + X.Y = X + X.Y = X.(1+Y) = X.1 = X$$

$$(X+Y)\,.\,(X+\overline{Y}) = X + Y.\,\overline{Y} = X + 0 = X$$

$$X\,.\,(\overline{X}+Y) = X\,.\,\overline{X} + X.\,Y = 0 + X\,.\,Y = XY$$

- Note-se que estas 3 funções são as duais das anteriores

Teorema do Consenso

$$XY + \overline{X}Z + YZ = XY + \overline{X}Z$$

Demonstração: fazer AND do terceiro termo com $X + \overline{X} = 1$

$$\begin{aligned} XY + \overline{X}Z + YZ &= XY + \overline{X}Z + YZ\,(X + \overline{X}) \\ &= XY + \overline{X}Z + XYZ + \overline{X}YZ \\ &= XY + XYZ + \overline{X}Z + \overline{X}YZ \\ &= XY(1 + Z) + \overline{X}Z(1 + Y) \\ &= XY + \overline{X}Z \end{aligned}$$

Aplicação numa simplificação

$$\begin{aligned} (A + B)\,(\overline{A} + C) &= A\overline{A} + AC + \overline{A}B + BC \\ &= AC + \overline{A}B + BC \\ &= AC + \overline{A}B \end{aligned}$$

redundante segundo o teorema do consenso

Complemento de uma função

a) Usando tabela-verdade

trocar 0 $\longleftrightarrow$ 1

- exemplo: $F = X(\overline{Y}\,\overline{Z} + YZ)$

- construindo a tabela-verdade

X	Y	Z	$\overline{Y}\,\overline{Z}$	YZ	$\overline{Y}\,\overline{Z} + YZ$	F	$\overline{F}$
0	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	1	0

construção da função a partir da tabela-verdade

OR dos termos iguais a 1

$$\overline{F} = \overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} + \overline{X}\,\overline{Y}Z + \overline{X}Y\overline{Z} + \overline{X}YZ + X\overline{Y}Z + XY\overline{Z}$$

b) Usando DeMorgan

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{X(\overline{Y}\,\overline{Z} + YZ)} \\
&= \overline{X} + \overline{(\overline{Y}\,\overline{Z} + YZ)} \\
&= \overline{X} + (\overline{\overline{Y}\,\overline{Z}} \,.\, \overline{YZ}) \\
&= \overline{X} + (Y + Z).(\overline{Y} + \overline{Z})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{X} + Y\overline{Y} + Y\overline{Z} + \overline{Y}Z + Z\overline{Z} \\
&= \overline{X} + Y\overline{Z} + \overline{Y}Z
\end{aligned}
$$

c) Tomar dual da função e complementar cada literal

$$F = X(\overline{Y}.\overline{Z} + Y.Z)$$

$$F' = X + (\overline{Y} + \overline{Z})\,(Y + Z)$$

$$
\begin{aligned}
\overline{F} &= \overline{X} + (Y + Z).(\overline{Y} + \overline{Z}) \\
&= \overline{X} + Y\overline{Y} + Y\overline{Z} + \overline{Y}Z + Z\overline{Z} \\
&= \overline{X} + Y\overline{Z} + \overline{Y}Z
\end{aligned}
$$

X	Y	Z	$\overline{X}$	$Y\overline{Z}$	$\overline{Y}Z$	$\overline{F}$
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	0

Axiomas e Teoremas da Álgebra Booleana de Chaveamento

1. $X + 0 = X$
2. $X \,.\, 1 = X$
3. $X + 1 = 1$
4. $X \,.\, 0 = 0$
5. $X + X = X$
6. $X \,.\, X = X$
7. $X + \overline{X} = 1$
8. $X \,.\, \overline{X} = 0$
9. $\overline{\overline{X}} = X$
10. $X + Y = Y + X$
11. $X\,Y = Y\,X$

Lei comutativa

12. $X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$
13. $X(YZ) = (XY)Z$

Lei associativa

14. $X \,.\, (Y + Z) = XY + XZ$
15. $X + YZ = (X + Y)\,(X + Z)$

Lei distributiva

16. $\overline{X + Y} = \overline{X} \,.\, \overline{Y}$
17. $\overline{X \,.\, Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

DeMorgan

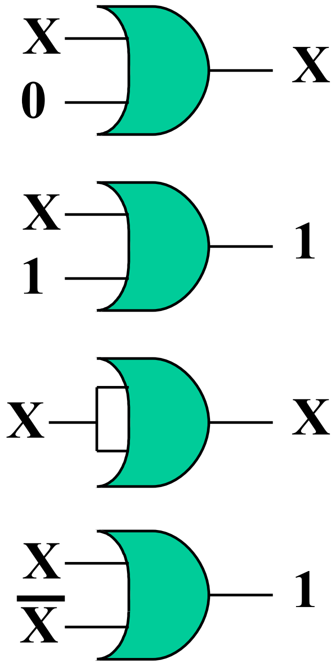
Porta OR :

1. $X + 0 = X$

3. $X + 1 = 1$

5. $X + X = X$

7. $X + \overline{X} = 1$



E1	E2	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

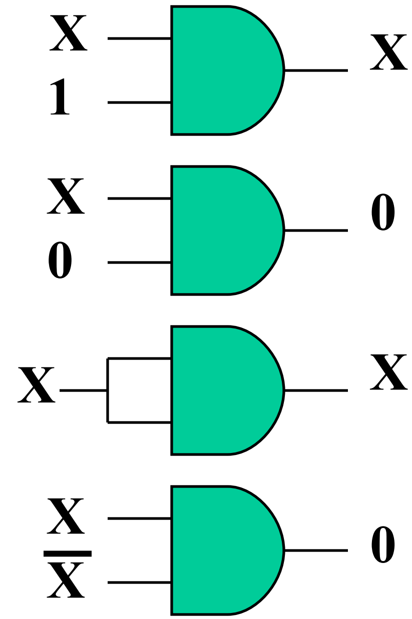
Porta AND :

2. $X \,.\, 1 = X$

4. $X \,.\, 0 = 0$

6. $X \,.\, X = X$

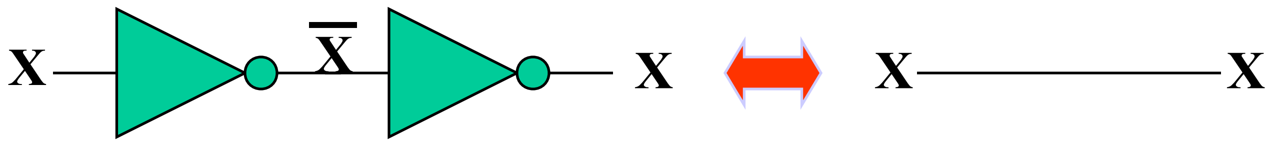
8. $X \,.\, \overline{X} = 0$



E1	E2	S
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Porta NOT :

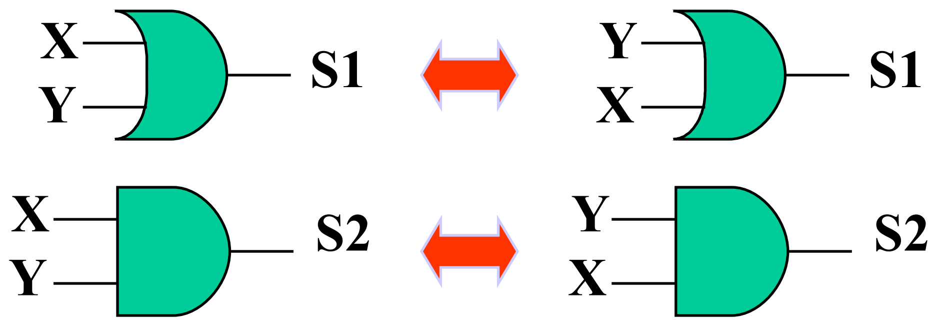
9. $\overline{\overline{X}} = X$



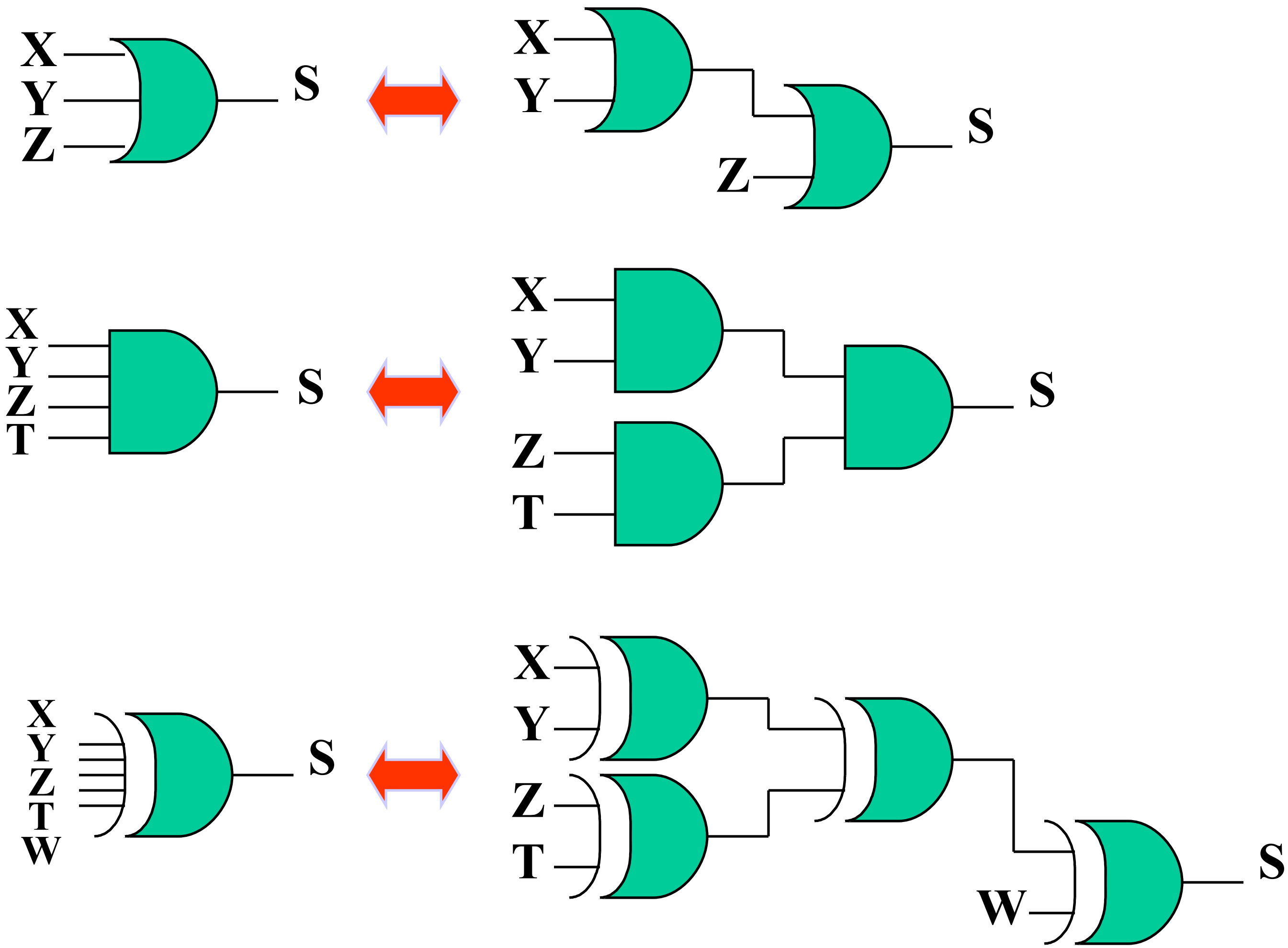
Lei Comutativa :

10. $X + Y = Y + X$

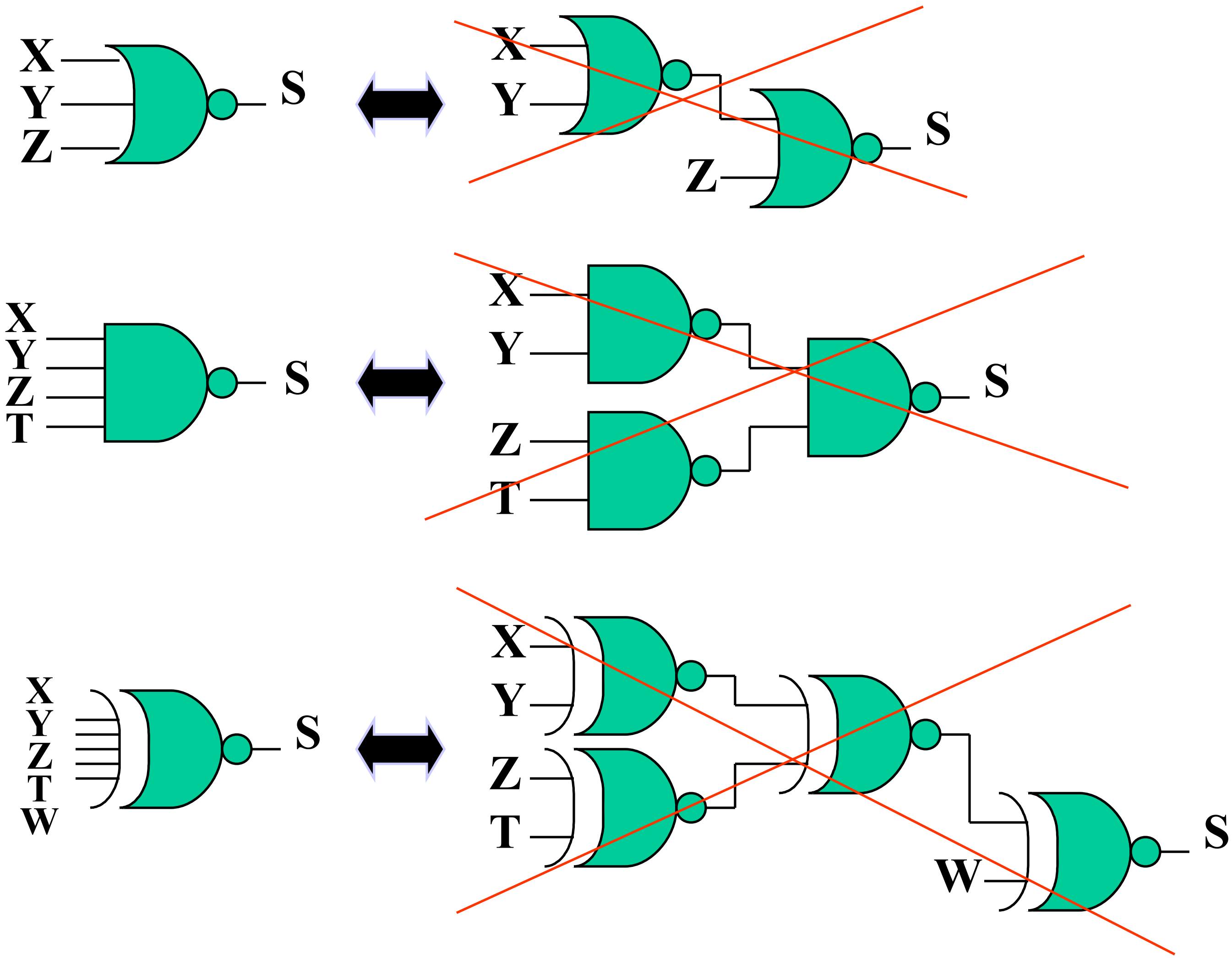
11. $X\,Y = Y\,X$



Expansão de Portas com Múltiplas Entradas :

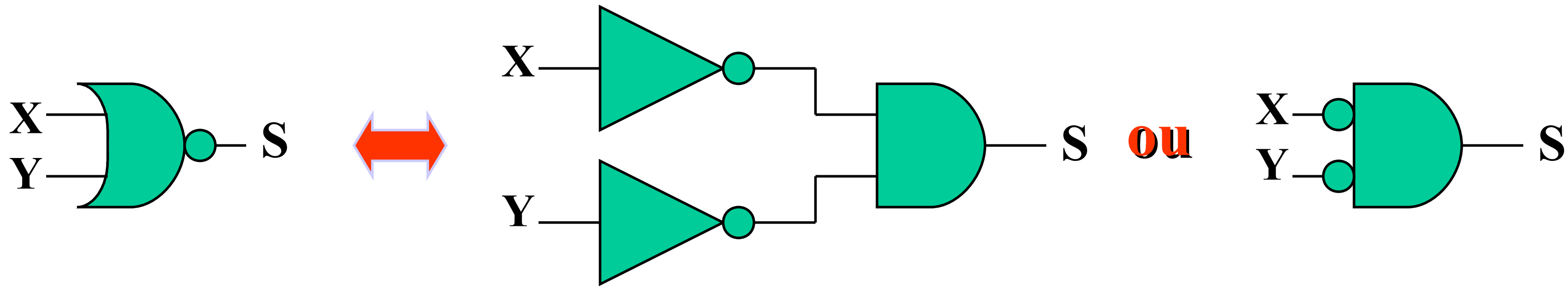


CUIDADO !!!

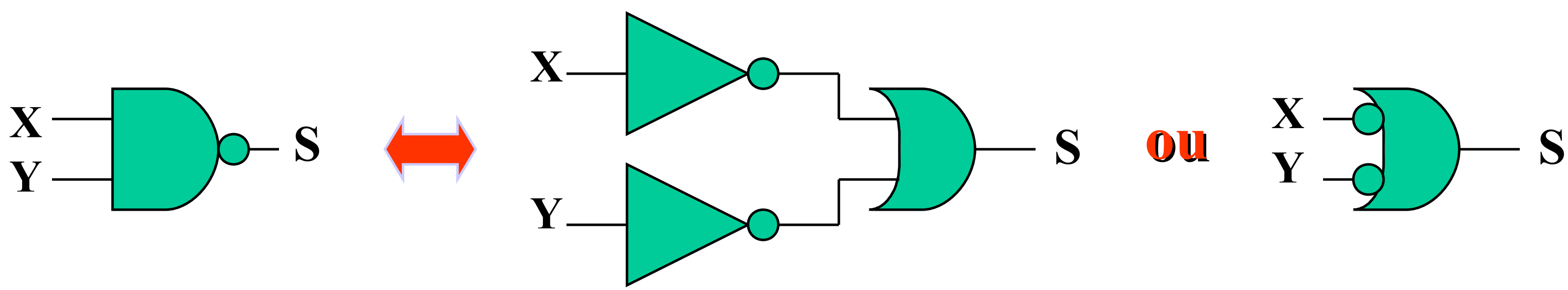


Teorema de DeMorgan :

16. $\overline{X + Y} = \overline{X} \, . \, \overline{Y}$



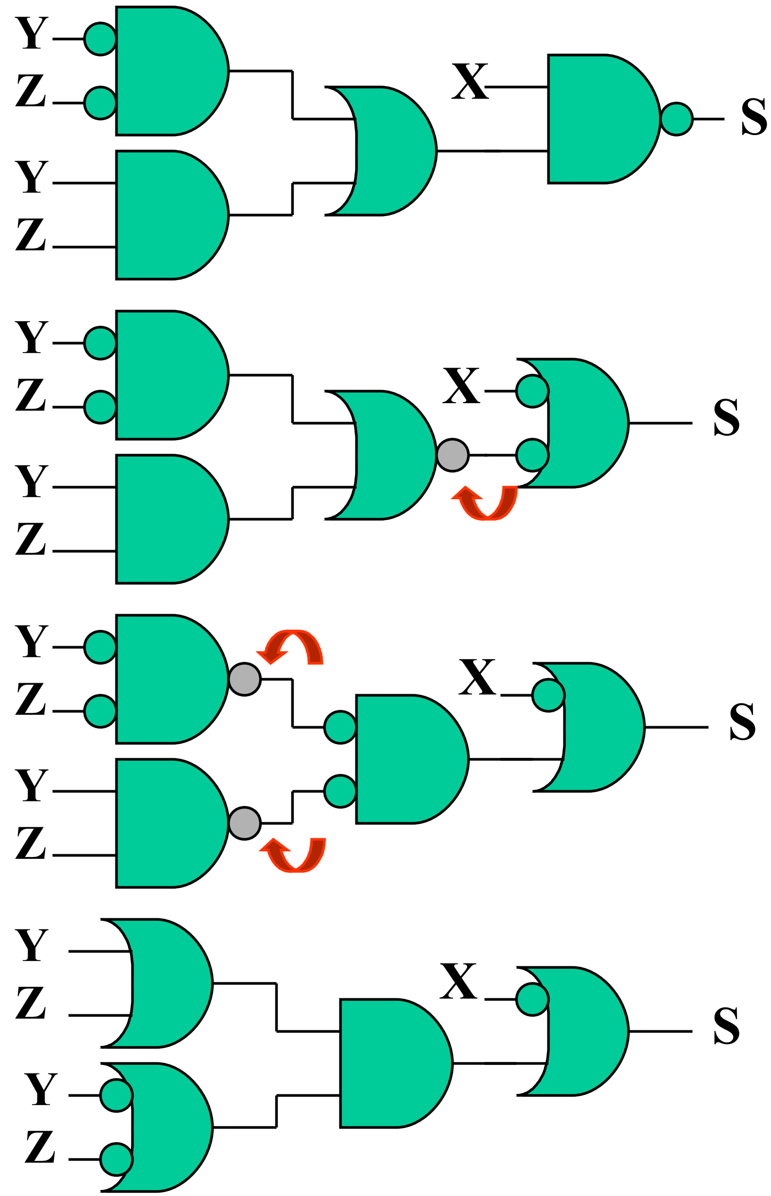
17. $\overline{X \, . \, Y} = \overline{X} + \overline{Y}$



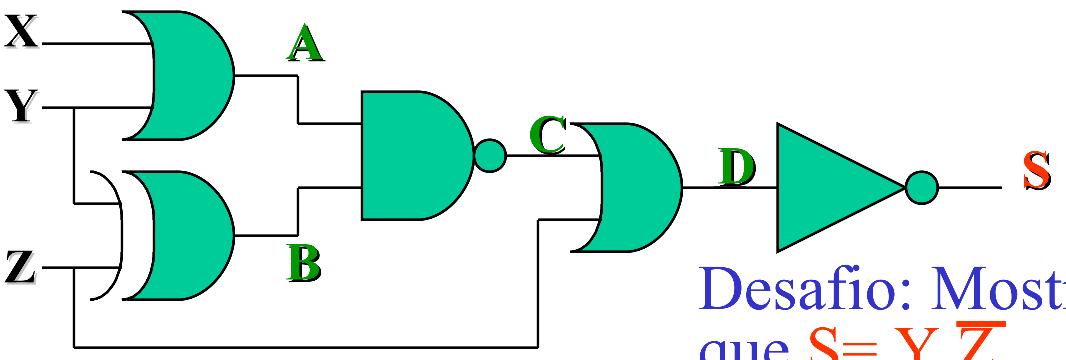
Usando o Teorema de DeMorgan ...

$$S = \overline{X\,(\bar{Y}\bar{Z} + YZ)}$$
$$= \bar{X} + \overline{(\bar{Y}\bar{Z} + YZ)}$$
$$= \bar{X} + (\overline{\bar{Y}\bar{Z}} \,.\, \overline{YZ})$$
$$= \bar{X} + (Y + Z).(\bar{Y} + \bar{Z})$$

Dica: sempre que possível e interessante (simplifica a implementação) a aplicação do Teorema de DeMorgan, troca-se a porta lógica de AND para OR, e vice-versa, invertendo-se os sinais de entrada e saída.



Combinação de Portas Lógicas



Desafio: Mostre que S= Y.$\overline{Z}$ (mais simples!)

X	Y	Z	A	B	C	D	S
0	0	0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

Formas de Onda (transição no tempo) :