5 Interpolação

Neste capítulo estudaremos métodos que permitem encontrar um valor aproximado para uma função f calculada em um ponto x do intervalo I, através do conhecimento de uma coleção de pares ordenados (pontos) $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{N}$tais que $x_i \in I$. Seja g uma função que aproxima f no intervalo I. Então, para o conjunto de pontos x_i, $i = 1, \ldots, N$

$$g(x_i) = f(x_i),$$

dizemos que g *interpola* a função f nos valores x_1, $x_2, \ldots$, x_N. Então podemos utilizar a função g para encontrar uma aproximação para o valor de f no ponto[1] $x \in [x_1, x_n]$, esse procedimento é denominado *interpolação*. Se x estiver fora do intervalo $[x_1, x_n]$ e ainda assim utilizarmos a função g para encontrar o valor aproximado de f nesse ponto, o procedimento é denominado *extrapolação*.

Exemplo: Vamos determinar uma função interpolante para o conjunto de pontos $\{(-0.5, -5.0)$;$(0.5, 0.81)$; $(1.0, 0.7)$;$(1.5, 0.55)\}$ na forma $g(x) = a_1 e^{a_2 x} + a_3 e^{a_4 x}$. Determinar o valor dos coeficientes a_1, a_2, a_3 e a_4 significa determinar a interpolação.

Por definição, se g interpola o conjunto de pontos (entendido como $\{(x_i, f(x_i))\}_{i=1}^{4}$) então os coeficientes devem satisfazer as quatro equações $g(x_1) = f(x_1)$, ..., $g(x_4) = f(x_4)$, ou seja, devem ser solução do seguinte sistema de equações não lineares:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1 e^{-a_2 0.5} + a_3 e^{-a_4 0.5} & = & -5.0 \\ a_1 e^{a_2 0.5} + a_3 e^{a_4 0.5} & = & 0.81 \\ a_1 e^{a_2} + a_3 e^{a_4} & = & 0.7 \\ a_1 e^{a_2 1.5} + a_3 e^{a_4 1.5} & = & 0.55 \end{array}\right. .$$

Esse sistema possui solução numérica dada por

$$\begin{aligned} a_1 &\approx 1.20334 \\ a_2 &\approx -0.519387 \\ a_3 &\approx -0.880292 \\ a_4 &\approx -4.01704 \end{aligned}$$

[1]Supondo que os pontos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ estão ordenados

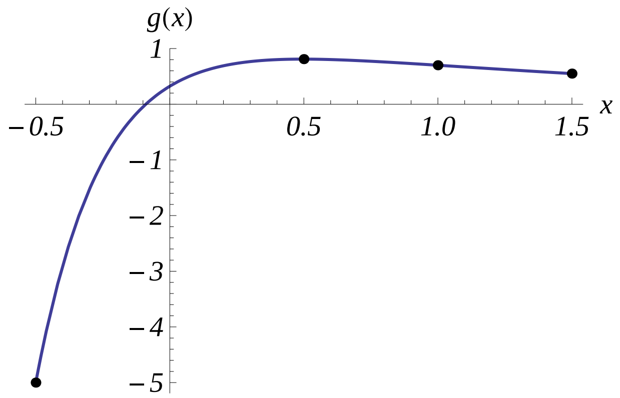


Figura 5.1: Função interpolante $g(x)$ e os quatro pontos de interpolação.

O sucesso em conseguir determinar a interpolação de um conjunto de pontos depende da escolha de função interpolante. No exemplo anterior a interpolação foi possível pois o "comportamento" dos pontos é compatível com a escolha realizada para a função interpolante. Essa "compatibilidade" se manifesta na existência de solução para o sistema de equações associado à interpolação. Se fosse escolhida uma função com comportamento muito distinto do manifestado pelos pontos, o sistema resultante poderia não possuir solução.

A escolha de polinômios como funções interpolantes é natural pelos seguintes motivos: é possível aproximar uma grande variedade de funções, os polinômios são de fácil manipulação matemática (principalmente derivação e integração) e o teorema de Weierstrass

Teorema (Weierstrass)
Seja f uma função contínua definida no intervalo fechado limitado $[a, b]$ e seja δ um número positivo. Então existe um polinômio p, tal que para todo $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p(x)| < \delta.$$

No entanto, da mesma forma que o teorema de Weierstrass garante uma representação de f por um polinômio p tão "próximo" quanto queiramos, ele nada diz sobre o grau de p. Em algumas situações, o problema de encontrar p que desempenhe esse papel pode ser extraordinariamente difícil do ponto de vista numérico.

Antes de discutirmos o procedimento de interpolação por polinômios, vale a pena mencionar um algoritmo útil no cálculo do valor de p em um ponto x. Trata-se do algoritmo de Horner.

Algoritmo de Horner

Batizado com o nome do matemático inglês Willian George Horner mas já conhecido por Isaac Newton em 1669 e mesmo pelo matemático chinês Qin Jiunshao no séc. XIII, o algoritmo consiste em uma maneira otimizada de calcular $p(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ através de m multiplicações e m adições.

Basta reescrever o polinômio na forma concatenada:

$$p(x) = ((\ldots((a_m x + a_{m-1})x + a_{m-a})x + \ldots + a_2)x + a_1)x + a_0.$$

Assim, $p(x)$ pode ser calculado iterativamente: se denominarmos $b_m = a_m$, $a_m x + a_{m-1} = b_m x + a_{m-1} = b_{m-1}$, então obtemos uma recursão para os b_i de modo que $p(x) = b_0$. Por exemplo, o polinômio $p(x) = 3x^3 + 8x^2 - x + 1 = ((3x+8)x-1)+1$. Nesse caso $b_3 = 3$, $b_2 = b_3 x + 8 = 3x + 8$, $b_1 = b_2 x - 1 = (3x+8)x - 1$ e finalmente $p(x) = b_0 = b_1 x + 1$.

5.1 Interpolação polinomial

Seja f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, o valor da função f calculada nos n pontos de interpolação x_i. Encontrar o polinômio de grau m que interpola f nesses pontos consiste em resolver o sistema de equações lineares $f_i \equiv f(x_i) = p(x_i)$, ou seja o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} a_m x_1^m & + & a_{m-1}x_1^{m-1} & + & \ldots & + & a_1 x_1 & + & a_0 & = & f_1 \\ a_m x_2^m & + & a_{m-1}x_2^{m-1} & + & \ldots & + & a_1 x_2 & + & a_0 & = & f_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_m x_n^m & + & a_{m-1}x_n^{m-1} & + & & + & a_1 x_n & + & a_0 & = & f_n \end{array}\right. \tag{5.1}$$

As $m+1$ incógnitas são os coeficientes do polinômio, $a_0, a_1, \ldots, a_m$ e o sistema possui n equações. Portanto, tipicamente, o sistema não possui solução se $m+1 < n$, possui infinitas soluções se $m+1 > n$ e será unicamente determinado se $m+1 = n$.

5.1.1 Interpolação pelos polinômios de Lagrange

Como veremos adiante, resolver o sistema (5.1) não é a maneira mais simples ou menos sujeita a erros de arredondamento quando desejamos determinar o polinômio interpolante. O seguinte teorema garante a unicidade do polinômio interpolante, o que nos permite buscar maneiras alternativas de construí-lo. Por ser único, o resultado será independente da construção.

Teorema (unicidade do polinômio interpolante)
Sejam $x_1, \ldots, x_n$, pontos distintos. Para um conjunto arbitrário de valores $f_1, \ldots, f_n$ existe um e somente um polinômio p de grau menor ou igual a $n-1$ tal que

$$p(x_i) = f_i,$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstração: No caso em que temos n pontos distintos e procuramos um polinômio de grau menor ou igual a $n-1$, a matriz quadrada dos coeficientes do sistema de equações lineares (5.1) assume a forma da seguinte matriz de Vandermonde,

$$\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Por hipótese os x_i são distintos, portanto o determinante da matriz, dado por

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

é não nulo, consequentemente, a solução do sistema é única e o polinômio também. ■

Vamos supor que para cada $1 \leq j \leq n$ exista um polinômio de grau $n-1$, $l_j(x)$ tal que para cada $1 \leq k \leq n$, o valor de l_j no ponto de interpolação x_k é tal que

$$l_j(x_k) = \delta_{j,k},$$

onde $\delta_{j,k}$ é o delta de Kronecker[2]. Nesse caso, os polinômios l_j permitem reescrever o polinômio interpolante $p(x)$:

$$p(x) = f_1 l_1(x) + f_2 l_2(x) + \ldots + f_n l_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j l_j(x),$$

podemos trivialmente verificar que $p(x_k) = \sum_{j=1}^{n} f_j l_j(x_k) = \sum_{j=1}^{n} f_j \delta_{j,k} = f_k$. Portanto se formos capazes de construir os polinômios l_j a interpolação estará determinada. Vamos então construí-los a partir das seguintes considerações.

Segundo a sua definição $l_j(x_k) = 0$ para todo x_k tal que $k \neq j$, então os pontos x_k são raízes de l_j, se $j \neq k$ e portanto, a menos de uma constante multiplicativa, C_j, o polinômio l_j é determinado pelo produtório

$$\begin{aligned} l_j(x) &= C_j(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n) \\ &= C_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}(x-x_i). \end{aligned}$$

Por fim, a constante C_j pode ser determinada através da propriedade $l_j(x_j) = 1$:

$$l_j(x_j) = 1 \quad \Rightarrow \quad C_j \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n}(x_j - x_i) = 1,$$

ou seja

$$C_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \frac{1}{(x_j - x_i)}.$$

[2] O delta de Kronecker é definido pela expressão

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 0 & , \quad j \neq k \\ 1 & , \quad j = k \end{cases},$$

onde j e k são dois números inteiros.

Dessa forma, os polinômios $l_j(x)$, denominados polinômios de Lagrange são determinados a partir do seguinte produtório

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

e a interpolação de Lagrange

$$p(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j l_j(x).$$

Exemplo: Seja a função $f(x) = \text{sen}(x)$ a partir da qual construímos a interpolação nos três pontos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. Será então um polinômio de segundo grau. Os pontos de interpolação são dados por

j	x_j	$f_j = \text{sen}(x_j)$
1	0	0
2	1	sen(1)
3	2	sen(2)

os polinômios de Lagrange são então dados por

$$l_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2},$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x^2 + 2x$$

e

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x^2 - x}{2}.$$

A interpolação é dada por

$$p(x) = \left(\frac{\text{sen}(2)}{2} - \text{sen}(1) \right) x^2 + \left(2\text{sen}(1) - \frac{\text{sen}(2)}{2} \right) x$$

5.1.2 Interpolação de Newton

De acordo com o teorema da unicidade do polinômio interpolante, toda interpolação de n pontos por um polinômio de grau $n-1$ é única e pode ser obtida pelo método de Lagrange. No entanto, existem outras maneiras de construir o polinômio $p(x)$ que podem ser mais convenientes. Uma dessas maneiras é a interpolação de Newton, que permite a inserção de pontos adicionais de maneira simples e menos suscetível à deterioração por erros de arredondamento.

O método consiste em determinar o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_1) + a_2(x - x_1)(x - x_2) + \ldots + a_{n-1}(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}).$$

Por construção, o valor de p calculado em $x = x_1$ é

$$p(x_1) = a_0.$$

Além disso, como $p(x)$ é o polinômio interpolante, $p(x_1) = f_1$, portanto,

$$a_0 = f_1.$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} p(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_1) = f_2 \\ &= f_1 + a_1(x_2 - x_1) = f_2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$a_1 = \frac{f_2 - a_0}{x_2 - x_1}$$

e assim por diante, os coeficientes são determinados recursivamente e o k-ésimo coeficiente é determinado em função dos pontos de interpolação e dos coeficientes anteriores pela expressão

$$a_k = \frac{f_{k+1} - a_0 - \sum_{j=1}^{k-1} a_j(x_{k+1} - x_1)\ldots(x_{k+1} - x_j)}{\prod_{j=1}^{k}(x_{k+1} - x_j)}. \tag{5.2}$$

A fórmula de recorrência (5.2) pode ser convenientemente descrita através da notação de ***diferenças divididas***. Seja a função $f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{l+1}]$ definida pela relação de recorrência

$$f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l, x_{l+1}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+1}, \ldots, x_{l+1}] - f[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_l]}{x_{l+1} - x_k}$$

e

$$f[x_k] = f_k \doteq f(x_k).$$

Assim, podemos verificar que

$$f[x_k, x_{k+1}] = \frac{f[x_{k+1}] - f[x_k]}{x_{k+1} - x_k}$$

e

$$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k+2}] - f[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k}.$$

Nessa notação, os coeficientes do polinômio são dados por

$$\begin{aligned} a_0 &= f[x_1], \\ a_1 &= f[x_1, x_2], \\ a_2 &= f[x_1, x_2, x_3], \\ \vdots &\ \vdots\ \vdots \\ a_{n-1} &= f[x_1, x_2, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Diagramaticamente, os coeficientes são calculados a partir da sequência de diferenças divididas calculadas recursivamente:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & \to & f[x_1] & \to & f[x_1,x_2] & \to & f[x_1,x_2,x_3] & \dots & f[x_1,\dots,x_{n-1}] & \to & f[x_1,\dots,x_n] \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & & \nearrow & \\
x_2 & \to & f[x_2] & \to & f[x_2,x_3] & \to & f[x_2,x_3,x_4] & \dots & f[x_2,\dots,x_n] & & \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
x_3 & \to & f[x_3] & \to & f[x_3,x_4] & \to & f[x_3,x_4,x_5] & \dots & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \\
x_{n-2} & \to & f[x_{n-2}] & \to & f[x_{n-2},x_{n-1}] & \to & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \dots & & & \\
 & & & \nearrow & & \nearrow & & & & & \\
x_{n-1} & \to & f[x_{n-1}] & \to & f[x_{n-1},x_n] & & & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & & & \\
x_n & \to & f[x_n] & & & & & & & &
\end{array}$$

Exemplo: Vamos realizar a interpolação da função sen(x) no intervalo $x \in [0,2]$ através de um polinômio de segundo grau nos pontos $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ e $x_3 = 2$. Neste caso,

j	x_j	$f_j =$ sen(x_j)
1	0	0
2	1	sen(1)
3	2	sen(2)

e $f[x_1] = 0$, $f[x_2] =$ sen(1) e $f[x_3] =$ sen(2). As próximas diferenças divididas são dadas por

$$f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{\text{sen}(1) - 0}{1 - 0}$$

e

$$f[x_2,x_3] = \frac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2} = \frac{\text{sen}(2) - \text{sen}(1)}{2 - 1}.$$

Finalmente,

$$f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{\text{sen}(2) - \text{sen}(1) - \text{sen}(1)}{2 - 0}.$$

Portanto, o polinômio interpolante

$$p(x) = f[x_1] + f[x_1,x_2]\,(x - x_1) + f[x_1,x_2,x_3]\,(x - x_1)(x - x_2)$$

é

$$p(x) = \text{sen}(1)\,x + \frac{\text{sen}(2) - 2\text{sen}(1)}{2}\,x(x-1)$$

Exercício. *1) Inclua o ponto $x_4 = 1/2$ na interpolação anterior e encontre o polinômio interpolante de terceiro grau.*

2) Encontre o polinômio interpolante de terceiro grau nos mesmos pontos do exemplo anterior (incluindo o ponto $x_4 = 1/2$) para as funções $\cos(x)$*,* $xsen(x)$ *e* $e^x - 1$.

Exemplo: A solubilidade do clorato de potássio em água $KClO_3$ nas temperaturas de $0°C$, $10°C$, $20°C$, $30°C$ e $40°C$ é de $3.3g$, $5.2g$, $7.3g$, $10.1g$ e $13.9g$ por $100g$ de H_2O, respectivamente.

Nosso objetivo é estabelecer uma boa aproximação para o valor da solubilidade a $25°C$. Vamos inicialmente aproximar a solubilidade a partir de três valores de temperatura. Seja portanto, $\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^{3}$ dado por $\{(10; 5.2), (20; 7.3), (30, 10.1)\}$. De acordo com o método de Newton, devemos determinar as diferenças divididas $f[x_1]$, $f[x_1, x_2]$, $f[x_1, x_2, x_3]$ e construir o polinômio

$$p(x) = a_0 + a_1(x - 10) + a_2(x - 10)(x - 20),$$

onde $a_0 = f[x_1]$, $a_1 = f[x_1, x_2]$ e $a_2 = f[x_1, x_2, x_3]$.

$$f[x_1] \equiv f_1 = 5.2$$

e $a_0 = 5.2$.

$$f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{7.3 - 5.2}{20 - 10} = 0.21$$

e $a_1 = 2.1 \times 10^{-1}$.

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2 - x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{f[x_2 - x_3] - 0.21}{30 - 10}$$

Para calcular essa quantia será necessário determinar também o valor de $f[x_2, x_3]$.

$$f[x_2, x_3] = \frac{f_3 - f_2}{x_3 - x_2} = \frac{10.1 - 7.3}{30 - 20} = 0.28$$

Assim,

$$[x_1, x_2, x_3] = \frac{0.28 - 0.21}{30 - 10} = 0.0035$$

e $a_2 = 3.5 \times 10^{-3}$.

Portanto a interpolação é dada por

$$p(x) = 5.2 + 2.1 \times 10^{-1}(x - 10) + 3.5 \times 10^{-3}(x - 10)(x - 20).$$

E a aproximação é dada por

$$p(25) = 8.6125.$$

Como a tabela fornece valores com 2 ou três dígitos significativos, a aproximação deverá conter esse mesmo número de dígitos, ou seja, a solubilidade a $25°C$ é de aproximadamente $8.6g$ de $KClO_3$por $100g$ de H_2O. Uma maneira de estabelecer a validade dessa aproximação é incluir mais termos à interpolação e verificar se a nova aproximação coincide. Vamos então incluir o valor da solubilidade a $40°C$ como um quarto dado, ou seja, vamos incluir o ponto $(x_4, f_4) = (40; 13.9)$. Nesse caso, como (x_1, f_1), (x_2, f_2) e (x_3, f_3) são os mesmos do polinômio anterior, a_0, a_1 e a_2 serão os mesmos no novo polinômio:

$$\tilde{p}(x) = 5.2 + 2.1 \times 10^{-1}(x - 10) + 3.5 \times 10^{-3}(x - 10)(x - 20) + a_3(x - 10)(x - 20)(x - 30),$$

onde $a_3 = f[x_1,x_2,x_3,x_4]$. Vamos então determinar $f[x_1,x_2,x_3,x_4]$.

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1} = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-0.0035}{40-10},$$

$$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2} = \frac{f[x_3,x_4]-0.28}{40-20}$$

e

$$f[x_3,x_4] = \frac{f_4-f_3}{x_4-x_3} = \frac{13.9-10.1}{40-30} = 0.38.$$

Dessa forma, substituindo os valores

$$f[x_2,x_3,x_4] = \frac{0.38-0.28}{20} = 0.005$$

e

$$f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{0.005-0.0035}{30} = 5\times 10^{-5}.$$

O novo polinômio é

$$\tilde{p}(x) = 5.2+2.1\times10^{-1}(x-10)+3.5\times10^{-3}(x-10)(x-20)+5\times10^{-5}(x-10)(x-20)(x-30)$$

e a aproximação é determinada a partir de

$$\tilde{p}(25) = 8.59375\ldots$$

Ou seja, obtemos novamente a aproximação de dois dígitos, $8.6g$ de clorato por $100g$ de água.

5.1.3 Erros de truncamento na interpolação por polinômios

Seja f uma função contínua e n vezes diferenciável no intervalo (a,b) que contém os pontos $x_1,x_2,\ldots,x_n$ e seja p o polinômio de grau $n-1$ que interpola f nesses pontos. Então é possível mostrar[3] que para cada $x\in(a,b)$, existe um $\zeta(x)\in(a,b)$ tal que

$$f(x)-p(x) = \frac{1}{n!}f^{(n)}(\zeta)\prod_{i=1}^{n}(x-x_i). \tag{5.3}$$

Poderíamos supor que para uma f contínua e suficientemente suave, a sequência de polinômios interpolantes $\{p_n\}_{n\geq1}$ convergiria para f conforme aumentássemos o número de pontos de interpolação no intervalo (a,b). No entanto, como o exemplo a seguir ilustra, isto nem sempre ocorre.

Fenômeno de Runge

A seguinte função, proposta por Carle D. T. Runge ao estudar o comportamento dos erros na interpolação polinomial,

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad x\in[-1,1]$$

[3] A demonstração pode ser encontrada nas referências:
Eldén, L.; Wittmeyer-Koch, L. *Numerical Analysis* (1990),
Claudio, D. M.; Marins, J. M. *Cálculo Numérico Computacional - teoria e prática* 3ªed. (2000).

é tal que a sequência de polinômios interpolantes $\{p_n\}_n$ construídos a partir de pontos de interpolação igualmente espaçados não converge[4] para $f(x)$ no intervalo de valores $x \in (-1, -0.727) \bigcup (0.727, 1)$. Na realidade é possível demonstrar que

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{-1 \le x \le 1} |f(x) - p_n(x)| = +\infty.$$

Podemos analisar esse comportamento não regular da interpolação a partir do termo

$$\prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \tag{5.4}$$

contido na expressão (5.3). Esse produtório possui uma flutuação para os valores do argumento próximos à fronteira do intervalo $(-1, 1)$ que é progressivamente ampliada conforme aumentamos o número de pontos se os mesmos forem igualmente espaçados. Os gráfico seguintes ajudam a ilustrar o comportamento do produtório (5.4).

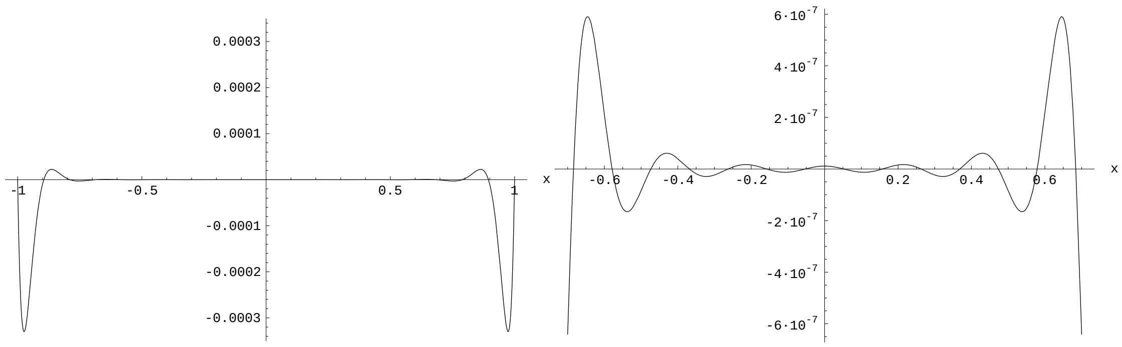


Figura 5.2: a) comportamento do produtório (5.4) com 20 pontos igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$. b) recorte do mesmo produtório no intervalo $[-0.7, 0.7]$.

Esse comportamento é minimizado através da escolha de pontos não igualmente espaçados. Na realidade é possível demonstrar que a variação do termo (5.4) é mínima em valor absoluto quando os pontos x_i estão espaçados em um intervalo (a, b) segundo a seguinte expressão

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right)$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Esses pontos são denominados *pontos de Chebyshev*.

Utilizando os pontos de Chebyshev no intervalo $[-1, .1]$ podemos controlar o comportamento dos polinômios interpolantes para a função de Runge e garantir a convergência $p_{n-1}(x) \to f(x)$ quando $n \to +\infty$.

[4] A demonstração pode ser encontrada na referência :
Isaacson, E. ; Keller, H. *Analysis of Numerical Methods* (1966).

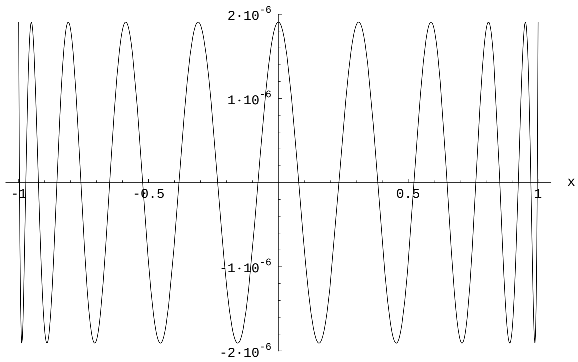


Figura 5.3: O produtório (5.4) com 20 pontos de Chebyshev

Ainda assim, existem funções contínuas que requerem um número impraticável de pontos para que a interpolação se aproxime da função original. Por exemplo, a função $\sqrt{|x|}$ no intervalo $[-1, 1]$ requer um polinômio de grau maior que 10^6 para que a interpolação seja exata até 10^{-3}.

Em geral, quando utilizamos polinômios de grau maior ou igual a 100, a maior dificuldade é lidar com os erros de arredondamento.

5.2 Interpolação *spline*

Splines são funções formadas por diferentes polinômios de grau menor ou igual a um m, definidos para cada intervalo entre os pontos de interpolação de modo que em cada ponto de interpolação o spline é contínuo,assim como todas as derivadas até ordem $m - 1$.

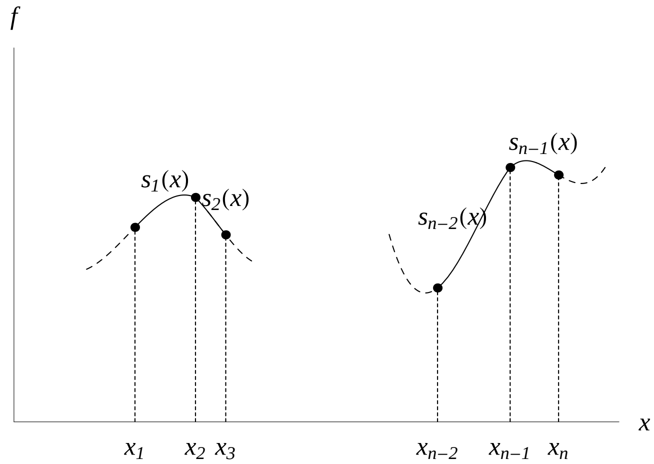


Figura 5.4: Interpolação spline

Nas situações em que o número de pontos de interpolação é grande (por exemplo, em aplicações CAD – *computer-aided design*), a inexatidão na aproximação obtida com um polinômio de grau elevado é dominada pelos erros de arredondamento. Ou então quando a função que se quer interpolar possui derivadas de valor numérico elevado em alguma região do intervalo de interpolação, a aproximação é prejudicada em todo o intervalo. Nessas situações, a interpolação por spline pode auxiliar a tarefa de interpolação.

O procedimento de construir splines é análogo qualquer que seja o grau dos polinômios utilizados, como o spline de maior interesse (veremos porque) é aquele formado por polinômios de grau 3, nos concentraremos nesse caso apenas.

5.2.1 Interpolação spline cúbica

Sejam $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ os pontos e interpolação. um spline cúbico é uma função $s(x)$, definida no intervalo $[x_1, x_n]$ com as seguintes propriedades:

1. $s(x)$, $s'(x)$ e $s''(x)$ são funções contínuas no intervalo (x_1, x_n).
2. Em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $s(x)$ é um polinômio cúbico tal que $s(x_i) = f_i \doteq f(x_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$.

Portanto, s é composto por $n-1$ polinômios cúbicos, cada polinômio é determinado por 4 coeficientes (a_i,b_i, c_i e d_i) o que dá um total de $4n-4$ coeficientes a determinar, ou seja $4n-4$ incógnitas. Cada polinômio deve satisfazer a condição de continuidade nos pontos de interpolação além, é claro, de interpolar o ponto x_i, ou seja,

$$s_i(x_i) = f_i \qquad \text{(interpolação)},$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$ e

$$s_{n-1}(x_n) = f_n.$$

A continuidade é satisfeita se

$$s_i(x_{i+1}) = f_{i+1} \quad \text{(continuidade de } s\text{)},$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-2$.. As condições acima implicam $2(n-1)$ equações. Faltam ainda as continuidades de $s'(x)$ e $s''(x)$:

$$s'_i(x_{i+1}) = s'_{i+1}(x_{i+1}) \quad \text{(continuidade de } s'\text{)},$$

$$s''_i(x_{i+1}) = s''_{i+1}(x_{i+1}) \quad \text{(continuidade de } s''\text{)},$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-2$. Cada condição equivale a $n-2$ equações. Portanto temos até agora um total de $4n-6$ equações. Restam duas equações para que seu número seja igual ao número de incógnitas. Essas duas últimas equações relacionam-se com as condições de fronteira do spline. Com relação ao comportamento de $s(x)$ no extremo do intervalo, há duas possibilidades a se considerar:

i) spline natural,

$$\begin{aligned} s''_1(x_1) &= 0 \\ s''_{n-1}(x_n) &= 0 \end{aligned}$$

possui esse nome por ser a condição equivalente à aproximação por réguas elásticas (uso mais tradicional do spline).

ii) spline com mesmas condições de f na extremidade,

$$
\begin{aligned}
s_1'(x_1) &= f'(x_1) \\
s_{n-1}'(x_n) &= f'(x_n)
\end{aligned}
$$

essa escolha pressupõe que a informação sobre o valor da derivada de f nos extremos do intervalo seja conhecida. A aproximação obtida com essa escolha possui uma maior exatidão do que a obtida com o spline natural.

Nos próximos parágrafos montaremos o sistema de equações lineares para determinarmos $4n-4$ os coeficientes a_i,b_i, c_i e d_i dos $n-1$ polinômios que compõe o spline:

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3. \tag{5.5}$$

Por ser uma interpolação, a cada x_i, temos que $s(x_i) = f_i$, ou seja, $s_i(x_i) = f_i$. Portanto, em vista da equação (5.5) a interpolação implica

$$f_i = s_i(x_i) = a_i$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. O que determina o valor dos coeficientes a_i.

A continuidade do spline $s(x)$ nos pontos de interpolação implica a equação $s_i(x_{i+1}) = s_{i+1}(x_{i+1})$ para $i = 1, 2, \ldots, n-2$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
a_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 &= a_{i+1}, \\
f_i + b_i(x_{i+1} - x_i) + c_i(x_{i+1} - x_i)^2 + d_i(x_{i+1} - x_i)^3 &= f_{i+1}. \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Para aliviar a notação, vamos introduzir a notação $h_i = (x_{i+1} - x_i)$. Dessa forma, a equação anterior (5.6) pode ser reescrita como

$$f_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = f_{i+1} \tag{5.7}$$

A continuidade na primeira e na segunda derivadas implicam

$$b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1} \tag{5.8}$$

e

$$c_i + 3d_i h_i = c_{i+1} \tag{5.9}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Isolando d_i na equação (5.9) e substituindo em (5.7) e (5.8) encontramos respectivamente

$$f_{i+1} = f_i + b_i h_i + \frac{h_i^2}{3}(2c_i + c_{i+1}) \tag{5.10}$$

e

$$b_{i+1} = b_i + h_i(c_i + c_{i+1}) \tag{5.11}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

Isolando b_i na equação (5.10) podemos determiná-lo em termos dos valores conhecidos f_i, h_i e da incógnita c_i(o mesmo acontece com os coeficientes d_i, a partir da equação (5.9)),

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}), \tag{5.12}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-2$.

A substituição de b_i e b_{i-1} dados pela equação (5.12) na equação (5.11) com os índices deslocados de uma unidade, ou seja, $b_i = b_{i-1} + h_{i-1}(c_{i-1} + c_i)$, permite encontrar uma equação para os coeficientes c_i em termos dos valores conhecidos f_i e h_i:

$$h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} = 3\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}\right) - 3\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \tag{5.13}$$

para $i = 2, 3, \ldots, n-1$. A equação anterior define um sistema de equações lineares para as incógnitas c_i. Note que além dos coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$, o sistema envolve um coeficiente c_n que não está diretamente relacionado a algum dos $n-1$ polinômios s_i . Na realidade, c_n está relacionado às condições no extremo do intervalo de interpolação e sua determinação depende do tipo de spline que estamos construindo, se é um spline natural ou um spline que satisfaz as mesmas condições de f nos extremos do intervalo de interpolação.

As $n-2$ equações (5.13) envolvem n variáveis (as incógnitas c_i), para que o sistema (tipicamente) tenha solução única devemos incluir as duas últimas equações que descrevem o comportamento do spline nos extremos do intervalo de interpolação. Vamos estudar inicialmente o caso do spline natural.

Spline natural

O spline natural deve satisfazer as condições $s''(x_1) = 0$ e $s''(x_n) = 0$, estas duas equações implicam respectivamente

$$c_1 = 0$$

e

$$2c_{n-1} + 6d_{n-1}h_{n-1} = 0. \tag{5.14}$$

A equação (5.14) implica em termos da equação para os coeficientes d_i (5.9) que $c_n = 0$.

Colecionando esses resultados temos então a seguinte situação: resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} c_1 & = & 0 \\ \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_i c_{i+1} & = & 3\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}\right) - 3\left(\frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 2, \ldots, n-1 \\ \\ c_n & = & 0 \end{cases}$$

encontramos o valor dos coeficientes c_i. A partir desses coeficientes determinamos o valor dos coeficientes b_i através das equações (5.12)

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}),$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$; e o valor dos coeficientes d_i através da equações

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}, \tag{5.15}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$, obtida a partir de (5.9). Os coeficientes $a_i = f_i$ como já havíamos determinado anteriormente.

Spline com as mesmas condições de f nos extremos

Nesse caso o spline deve satisfazer as condições $s'(x_1) = f'(x_1) \equiv f'_1$ e $s'(x_n) = f'(x_n) \equiv f'_n$.Para determinar o spline, f'_1 e f'_n devem ser valores conhecidos. As condições implicam respectivamente

$$b_1 = f'_1 \tag{5.16}$$

e

$$b_{n-1} + 2c_{n-1}h_{n-1} + 3d_{n-1}h_{n-1}^2 = f'_n. \tag{5.17}$$

Como os coeficientes b_i satisfazem a equação (5.12), a equação (5.16) implica

$$f'_1 = b_1 = \frac{f_2 - f_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(2c_1 + c_2),$$

ou seja,

$$2h_1c_1 + h_1c_2 = 3\left(\frac{f_2 - f_1}{h_1}\right) - 3f'_1. \tag{5.18}$$

Da mesma forma, no caso da equação (5.17), as equações (5.12) e (5.15) implicam

$$h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n = -3\left(\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}\right) + 3f'_n. \tag{5.19}$$

Em resumo, devemos resolver o sistema formado pelas equações (5.13), (5.18) e (5.19)

$$\begin{cases} 2h_1c_1 + h_1c_2 & = \quad 3\left(\frac{f_2-f_1}{h_1}\right) - 3f'_1 \\ \\ h_{i-1}c_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)c_i + h_ic_{i+1} & = \quad 3\left(\frac{f_{i+1}-f_i}{h_i}\right) - 3\left(\frac{f_i-f_{i-1}}{h_{i-1}}\right), \qquad i = 2, \ldots, n-1 \\ \\ h_{n-1}c_{n-1} + 2h_{n-1}c_n & = \quad -3\left(\frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}}\right) + 3f'_n \end{cases}$$

e então determinar os coeficientes b_i e d_i através das equações (5.12) e (5.15):

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}(2c_i + c_{i+1}),$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i},$$

para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Naturalmente, os coeficientes $a_i = f_i$.

Exemplo: Vamos determinar a interpolação spline cúbica (natural e com as mesmas condições de f) para a função seno, no intervalo $[0, 2\pi]$ a partir de 5 pontos igualmente espaçados. Ou seja,

$$\begin{aligned}\{(x_i, f_i)\}_{i=1}^{5} &= \left\{\left(\frac{(i-1)}{2}\pi, \sin\left(\frac{(i-1)}{2}\pi\right)\right)\right\}_{i=1}^{5} \\ &= \left\{(0,0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0)\right\}\end{aligned}$$

Como o conjunto de pontos possui o mesmo espaçamento na coordenada x, então todos os h_i são iguais a $\frac{\pi}{2}$.

O spline cúbico é uma função $s(x)$ da forma

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x), & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ s_2(x), & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ s_3(x), & \pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \\ s_4(x), & \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases},$$

onde cada $s_i(x)$ é um polinômio cúbico

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3.$$

Quando se tratar de um spline natural então os coeficientes $c_i$são determinados através do sistema

$$\begin{cases} c_1 &= 0 \\ h_1c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 + h_2c_3 &= 3\left(\frac{f_3 - f_2}{h_2}\right) - 3\left(\frac{f_2 - f_1}{h_1}\right) \\ h_2c_2 + 2(h_2 + h_3)c_3 + h_3c_4 &= 3\left(\frac{f_4 - f_3}{h_3}\right) - 3\left(\frac{f_3 - f_2}{h_2}\right) \\ h_3c_3 + 2(h_3 + h_4)c_4 + h_4c_5 &= 3\left(\frac{f_5 - f_4}{h_4}\right) - 3\left(\frac{f_4 - f_3}{h_3}\right) \\ c_5 &= 0 \end{cases}. \quad (5.20)$$

Uma vez determinados os coeficientes c_i, os coeficientes b_i e d_i são funções deste:

$$b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i}{3}\left(2c_i + c_{i+1}\right),$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i},$$

para $i = 1, 2, 3, 4$.

Neste exemplo $h_i = \frac{\pi}{2}$ para todo i. Substituindo os demais valores para f_i no sistema (5.20) teremos

$$\begin{cases} c_1 & = & 0 \\ \frac{\pi}{2}c_1 + 2\pi c_2 + \frac{\pi}{2}c_3 & = & -\frac{12}{\pi} \\ \frac{\pi}{2}c_2 + 2\pi c_3 + \frac{\pi}{2}c_4 & = & 0 \\ \frac{\pi}{2}c_3 + 2\pi c_4 + \frac{\pi}{2}c_5 & = & \frac{12}{\pi} \\ c_5 & = & 0 \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_2 &= -\frac{6}{\pi^2}, \\ c_3 &= 0, \\ c_4 &= \frac{6}{\pi^2}, \\ c_5 &= 0. \end{aligned}$$

A partir dessa solução temos também que

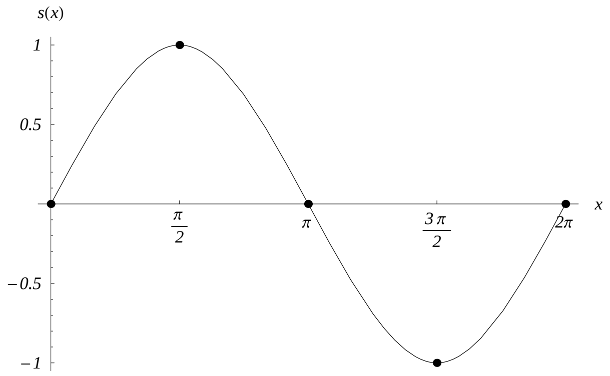
$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{3}{\pi}, \\ b_2 &= 0, \\ b_3 &= -\frac{3}{\pi}, \\ b_4 &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} d_1 &= -\frac{4}{\pi^3}, \\ d_2 &= \frac{4}{\pi^3}, \\ d_3 &= \frac{4}{\pi^3}, \\ d_4 &= -\frac{4}{\pi^3}. \end{aligned}$$

Como $a_i = f_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$, o spline natural cúbico é dado então por

$$s(x) = \begin{cases} \frac{3}{\pi}x - \frac{4}{\pi^3}x^3, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 1 - \frac{6}{\pi^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{4}{\pi^3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ -\frac{3}{\pi}(x - \pi) + \frac{4}{\pi^3}(x - \pi)^3, & \pi \leq x < \frac{3\pi}{2} \\ -1 + \frac{6}{\pi^2}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 - \frac{4}{\pi^3}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^3, & \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}.$$



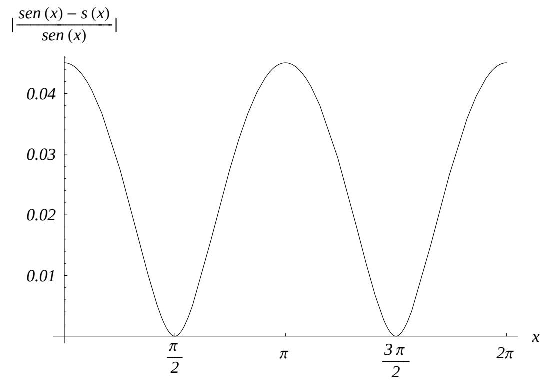


Figura 5.5: **a)** Interpolação spline cúbica (natural) da função seno em 5 pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 2\pi]$. **b)** Diferença entre a interpolação e a função seno. Note que o erro absoluto é menor ou igual a 0.05. O leitor mais atento observará que o gráfico para o erro relativo não se anula nos pontos pontos $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$. Acontece que nesses pontos o erro relativo não está definido pois o seno e sua diferença com relação a $s(x)$ se anulam. No entanto o limite existe e é indicado pelo gráfico.

Quando se trata de um spline com mesmas condições de fronteira de f então o sistema que determina as constantes c_i assume a forma

$$\begin{cases} 2h_1c_1 + h_1c_2 & = & 3\left(\frac{f_2-f_1}{h_1}\right) - 3f_1' \\ h_1c_1 + 2(h_1+h_2)c_2 + h_2c_3 & = & 3\left(\frac{f_3-f_2}{h_2}\right) - 3\left(\frac{f_2-f_1}{h_1}\right) \\ h_2c_2 + 2(h_2+h_3)c_3 + h_3c_4 & = & 3\left(\frac{f_4-f_3}{h_3}\right) - 3\left(\frac{f_3-f_2}{h_2}\right) \\ h_3c_3 + 2(h_3+h_4)c_4 + h_4c_5 & = & 3\left(\frac{f_5-f_4}{h_4}\right) - 3\left(\frac{f_4-f_3}{h_3}\right) \\ h_4c_4 + 2h_4c_5 & = & -3\left(\frac{f_5-f_4}{h_4}\right) + 3f_5' \end{cases} .$$

Neste exemplo $h_i = \dfrac{\pi}{2}$ para todo i. Substituindo os demais valores para f_i no sistema acima teremos após algumas manipulações algébricas

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 & = & \dfrac{12-6\pi}{\pi} \\ \dfrac{\pi}{2}c_1 + 2\pi c_2 + \dfrac{\pi}{2}c_3 & = & -\dfrac{12}{\pi} \\ \dfrac{\pi}{2}c_2 + 2\pi c_3 + \dfrac{\pi}{2}c_4 & = & 0 \\ \dfrac{\pi}{2}c_3 + 2\pi c_4 + \dfrac{\pi}{2}c_5 & = & \dfrac{12}{\pi} \\ c_4 + 2c_5 & = & -\left(\dfrac{12-6\pi}{\pi}\right) \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{24}{7\pi^2}\left(-3+\pi\right), \\
c_2 &= \frac{6}{7\pi^2}\left(-10+\pi\right), \\
c_3 &= 0, \\
c_4 &= -\frac{6}{7\pi^2}\left(-10+\pi\right), \\
c_5 &= \frac{24}{7\pi^2}\left(-3+\pi\right).
\end{aligned}$$

A partir dessa solução temos também que

$$\begin{aligned}
b_1 &= 1, \\
b_2 &= -\frac{2}{7\pi}\left(-3+\pi\right), \\
b_3 &= \frac{-24+\pi}{7\pi}, \\
b_4 &= -\frac{2}{7\pi}\left(-3+\pi\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{4}{7\pi^3}\left(-22+5\pi\right), \\
d_2 &= -\frac{4}{7\pi^3}\left(-10+\pi\right), \\
d_3 &= \frac{4}{7\pi^3}\left(-10+\pi\right), \\
d_4 &= \frac{4}{7\pi^3}\left(-22+5\pi\right).
\end{aligned}$$

Como $a_i = f_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$, o spline cúbico com as mesmas condições de fronteira do seno é dado então por

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x), & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ s_2(x), & \frac{\pi}{2} \le x < \pi \\ s_3(x), & \pi \le x < \frac{3\pi}{2} \\ s_4(x), & \frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi \end{cases},$$

onde

$$\begin{aligned}
s_1(x) &= x - \frac{24\left(-3+\pi\right)}{7\pi^2}x^2 + \frac{4\left(-22+5\pi\right)}{7\pi^3}x^3 \\
s_2(x) &= 1 - \frac{2\left(-3+\pi\right)}{7\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{6\left(-10+\pi\right)}{7\pi^2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{4\left(-10+\pi\right)}{7\pi^3}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3, \\
s_3(x) &= \frac{-24+\pi}{7\pi}\left(x-\pi\right) - \frac{4\left(-10+\pi\right)}{7\pi^3}\left(x-\pi\right)^3, \\
s_4(x) &= 1 - \frac{2\left(-3+\pi\right)}{7\pi}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{6\left(-10+\pi\right)}{7\pi^2}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{4\left(-22+5\pi\right)}{7\pi^3}\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)^3.
\end{aligned}$$

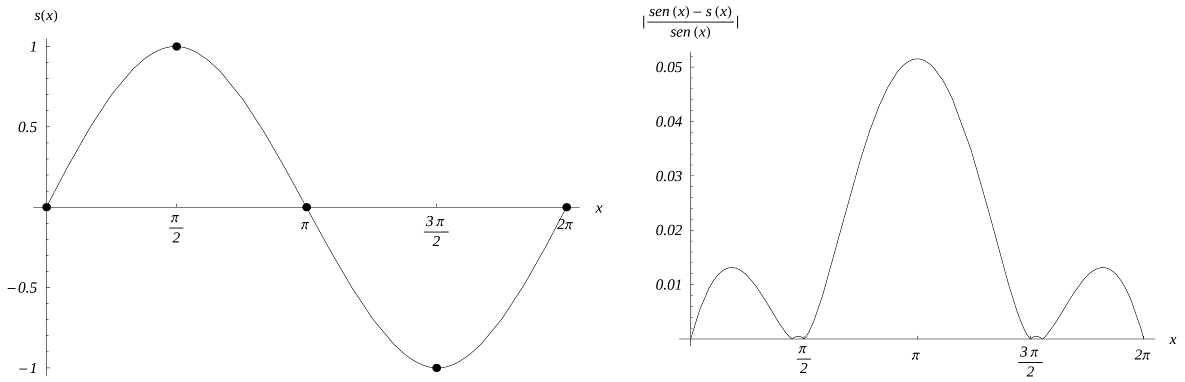


Figura 5.6: **a)** Interpolação spline cúbica (com a mesma derivada do seno na fronteira) da função seno em 5 pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 2\pi]$. **b)** Diferença entre a interpolação e a função seno. Note que o erro absoluto é menor ou igual a 0.052.

Note que a exigência de que o spline possua a mesma derivada que a função seno nos pontos $x = 0$ e $x = 2\pi$ diminui o erro relativo na vizinhança desses pontos em quase $\frac{1}{4}$ do valor original enquanto que o erro relativo na metade do intervalo sofre um aumento muito discreto.

5.3 Exercícios

1) (Aquecimento) Cheque, indiretamente, a exatidão das bibliotecas de funções de seu computador ou calculadora científica através da análise do comportamento das seguintes identidades nos valores de $x = i\frac{\pi}{20}$, para $i = 1, 2, \ldots, 9$.

1. $\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$
2. $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$
3. $\cos(x) = \text{sen}(x + \pi/2)$
4. $\exp(x)\exp(-x) = 1$
5. $\ln(e^x) = x$
6. $\sqrt{x}\,\sqrt{x} = x$

2) Utilize a seguinte tabela (com valores exatos até a precisão utilizada),

x	$\text{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\cot(x)$
0,001	0,001000	1,000000	1000,0
0,002	0,002000	0,999998	499,999
0,003	0,003000	0,999996	333,332
0,004	0,004000	0,999992	249,999
0,005	0,00500	0,999988	199,998

para calcular $\cot(0,0015)$ com a maior precisão possível através de:

1. interpolação para $\cot(x)$.

2. interpolação de sen(x) e $\cos(x)$.

3. estime o erro em 2). Dica: propagação de erros.

4. Explique a diferença entre os resultados em $1)$ e $2)$.

3) Compare os erros na aproximação das funções abaixo no intervalo $[0, 1]$ através de:
i) Expansão de Taylor em torno do ponto $x_0 = 0,5$
ii) Interpolação de Lagrange com pontos igualmente espaçados, com $x_1 = 0$ até $x_4 = 1$.
iii) Interpolação de Lagrange utilizando os pontos de Chebyshev.
Utilize sempre polinômios de 3º grau e compare os erros em $x = 0;\ 0,1;\ 0,2;\ \ldots;\ 1,0$.

1. sen$(2x)$

2. e^x

3. $\sqrt{x}$

4. $\dfrac{1}{1 + 25x^2}$

5. x^4

4) Seja a função $f(x) = (x - 0.2)(x - 0.3)e^{-(x+0.5)^2}$. Escolha um número suficiente de pontos distintos e construa um polinômio interpolante de terceiro grau no intervalo $[0.1, 0.4]$ para a função f. (Sugestão: utilize pontos igualmente espaçados.)

5) Encontre a interpolação *spline* cúbica (*spline* natural) para os dados abaixo

x	$f(x)$
-2	0
-1	1
0	2
1	1
2	0
3	1

6) Decida se as seguintes funções são *splines*

1. $f(x) = \begin{cases} x & , \quad -1 \le x < 0 \\ 2x & , \quad 0 \le x < 1 \\ x + 1 & , \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} x & , \quad -1 \le x < 0 \\ 2x - 1 & , \quad 0 \le x < 1 \\ x + 1 & , \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -1 \le x < 0 \\ x^2 & , \quad 0 \le x < 1 \\ 2x - 1 & , \quad 1 \le x \le 2 \end{cases}$

7) Determine os valores de a e b de forma que a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x & , \quad -1 \leq x < 0 \\ \\ ax^2 + bx & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

seja um *spline* cúbico.

8) Para quais valores de b, c e d a função $s : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é um *spline*? Quando será um *spline* natural? Justifique suas afirmações.

$$s(x) = \begin{cases} dx^3 - 9x^2 + bx & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 3x^3 + cx^2 + x & , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases} .$$