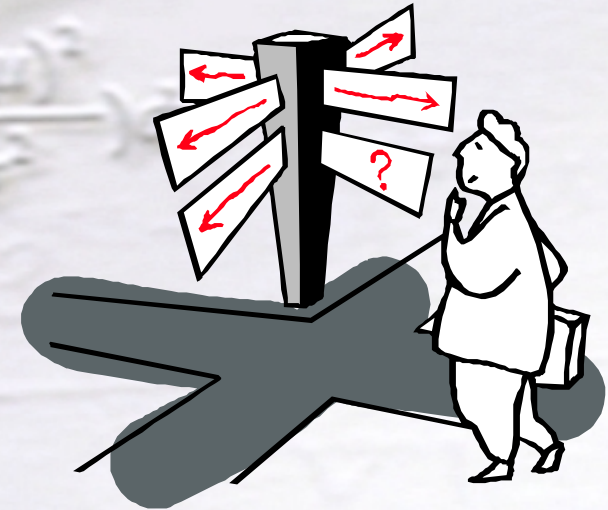


2 Testes de Hipóteses



Prof. Lorí Viali, Dr.

viali@pucrs.br

<http://www.pucrs.br/~viali/>



Testes para

Uma amostra

Média
Proporção
Variância

Duas amostras

Dependentes

Diferença de médias

Independentes

Diferença de médias

Diferença de proporções

Igualdade de variâncias



$$P(x \leq X | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Testes para uma Amostra



Média (μ)

Proporção (π)

Variância (σ^2)



Teste para a média

$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu > \mu_0 \text{ (teste unilateral/unicaudal à direita)}$$

$$\mu < \mu_0 \text{ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)}$$

$$\mu \neq \mu_0 \text{ (teste bilateral/bicaudal) .}$$



(a) variância conhecida

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$Z > z_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$Z < z_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|Z| > z_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde z_c é tal que:

$$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\Phi(z_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\Phi(z_c) = \alpha/2 \text{ ou } \Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal).



Exemplo



A experiência passada mostrou que as notas de Probabilidade e Estatística, estão normalmente distribuídas com média $\mu = 5,5$ e desvio padrão $\sigma = 2,0$. Uma turma de $n = 64$ alunos deste semestre apresentou uma média de 5,9. Teste a hipótese de este resultado mostra uma melhora de rendimento a uma significância de 5%.



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \mu = 5,5$$

$$H_0: \mu > 5,5$$

Dados:

$$\sigma = 2,0 \quad n = 64$$

$$\bar{X} = 5,9 \quad \alpha = 5\%$$

Trata-se de um teste unilateral à direita com σ conhecido.



A variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Então:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{5,9 - 5,5}{2,0 / \sqrt{64}} = \frac{0,4}{2,0 / 8} = \frac{3,2}{2,0} = 1,60$$



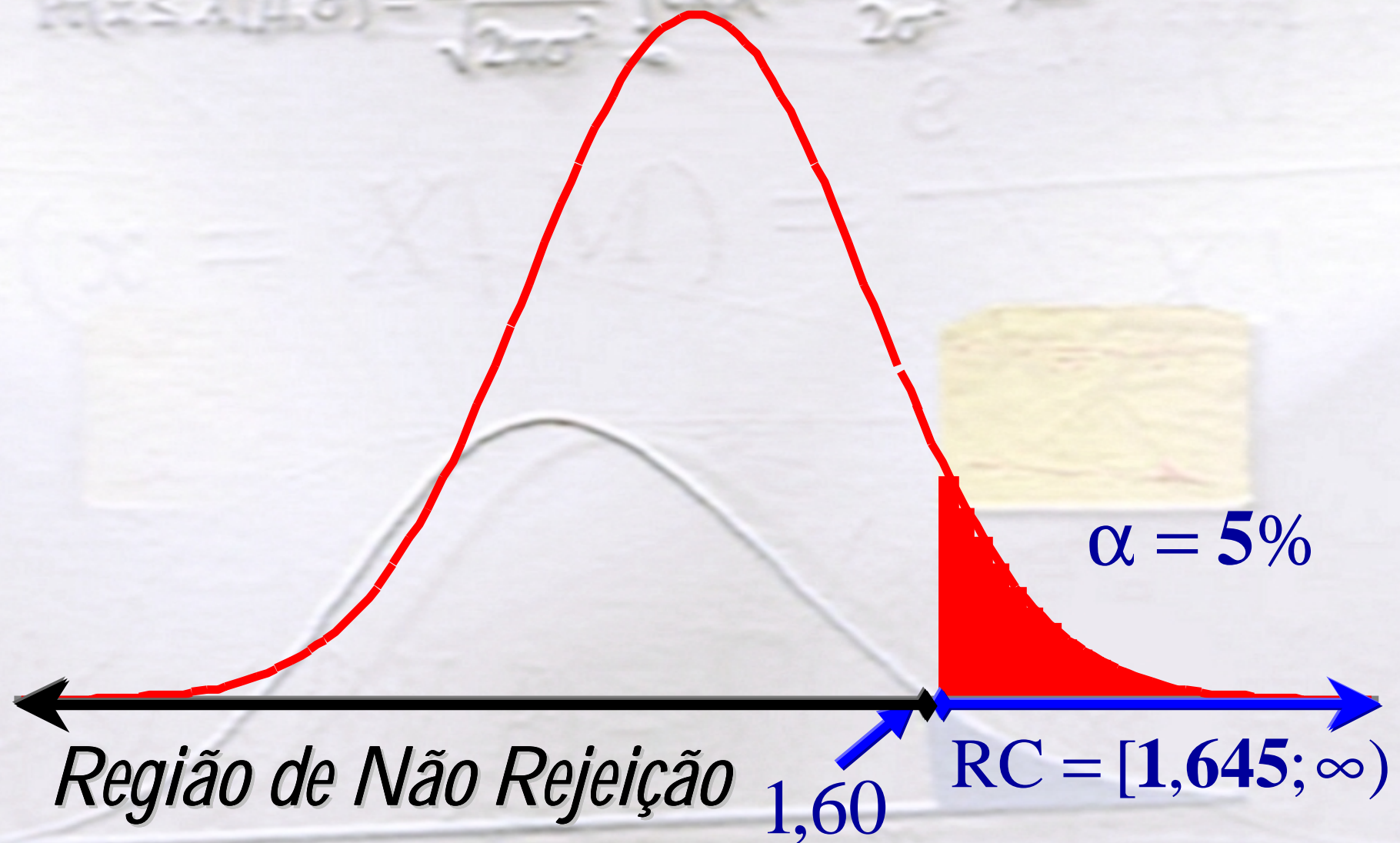
O valor crítico z_c é tal que: $\Phi(z_c) = 1 - \alpha = 1 - 0,05 = 95\%$. Então $z_c = \Phi^{-1}(0,95) = 1,645$. Assim $RC = [1,645; \infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $z = 1,60 \notin RC$ ou $1,60 < 1,645$, Aceito H_0 , isto é, a 5% de significância não se pode afirmar que os resultados desta turma são melhores.



$$P(x \leq X | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$



OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (1,60), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(Z > 1,60)$, isto é, $p = P(Z > 1,60) = 1 - \Phi(1,60) = \Phi(-1,60) = 5,48\%$.

Como a significância do resultado (5,48%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.



(6) variância desconhecida

Neste caso a variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$t_{n-1} > t_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$t_{n-1} < t_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|t_{n-1}| > t_c$$

(teste bilateral/bicaudal).



Onde t_c é tal que:

$$P(t < t_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(t < t_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(t < t_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(t > t_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Exemplo



Suponha que a sua empresa comprou um lote de lâmpadas. Você precisa testar, a 5% de significância, a afirmação do fabricante de que a duração média das lâmpadas é maior que 800 horas.

Para isto você usa uma amostra de 36 lâmpadas e encontra uma média 820 horas com desvio de 70 horas. Isto confirma a afirmação do fabricante?



Solução:

Hipóteses:

$H_0: \mu = 800 \text{ horas}$

$H_a: \mu > 800 \text{ horas}$

Dados:

$n = 36$

$\bar{X} = 820 \text{ horas}$

$s = 70 \text{ horas}$

$\alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à direita com σ desconhecido.



A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

Então:

$$t_{35} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{820 - 800}{70/\sqrt{36}} = \frac{20}{70/6} = \frac{120}{70} = 1,714$$

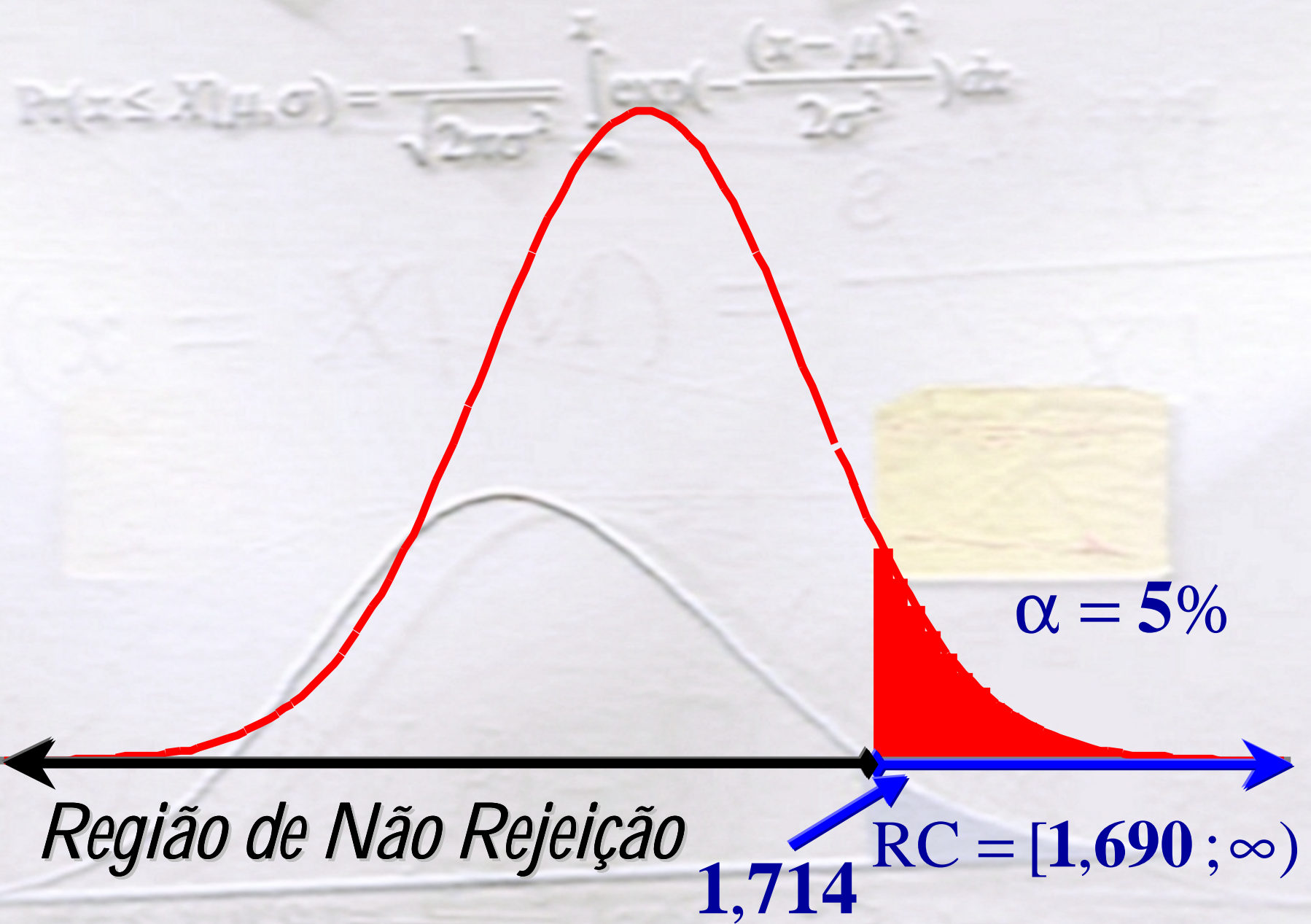


*O valor crítico t_c é tal que: $P(T > t_c) = 1 - \alpha$
Então $t_c = 1,690$. Assim $RC = [1,690; \infty)$*

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = 1,714 \in RC$ ou $1,714 > 1,690$, Rejeito H_0 , isto é, a 5% de significância, pode-se afirmar que a duração média das lâmpadas é superior a 800 horas.





OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (1,714), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(T_{35} > 1,714)$. Utilizando o Excel, tem-se:




DISTT

X	1,714	=	1,714
Graus_liberdade	35	=	35
Caudas	1	=	1

= 0,047686674

Retorna a distribuição t de Student.

X é o valor numérico em que se avalia a distribuição.

 Resultado da fórmula = 0,047686674

OK Cancelar

Como a significância do resultado (4,77%) é menor que a significância do teste (5%) é possível rejeitar a hipótese nula.



Teste para a proporção

$$H_0: \pi = \pi_0$$

$$H_1: \pi > \pi_0 \text{ (teste unilateral/unicaudal à direita)}$$

$$\pi < \pi_0 \text{ (teste unilateral/unicaudal à esquerda)}$$

$$\pi \neq \pi_0 \text{ (teste bilateral/bicaudal).}$$



Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{P - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$Z > z_0$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$Z < z_0$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$|Z| > z_0$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Exemplo



Afirma-se que 40% dos alunos de uma universidade são fumantes. Uma amostra de 225 estudantes selecionados ao acaso mostrou que apenas 72 eram fumantes. Teste a 1% a hipótese de que a afirmação foi exagerada.



Solução:

Hipóteses:

$$H_0: \pi = 40\%$$

$$H_0: \pi < 40\%$$

Dados:

$$f = 72$$

$$n = 225$$

$$p = 72/225 = 32\%$$

$$\alpha = 1\%$$

Trata-se de um teste unilateral à esquerda para a proporção. A variável teste é:



$$Z = \frac{P - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{P - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}}$$

Então:

$$Z = \frac{P - \mu_p}{\sigma_p} = \frac{0,32 - 0,40}{\sqrt{\frac{0,40(1 - 0,40)}{225}}} = \frac{-0,08}{0,0326} = -2,45$$



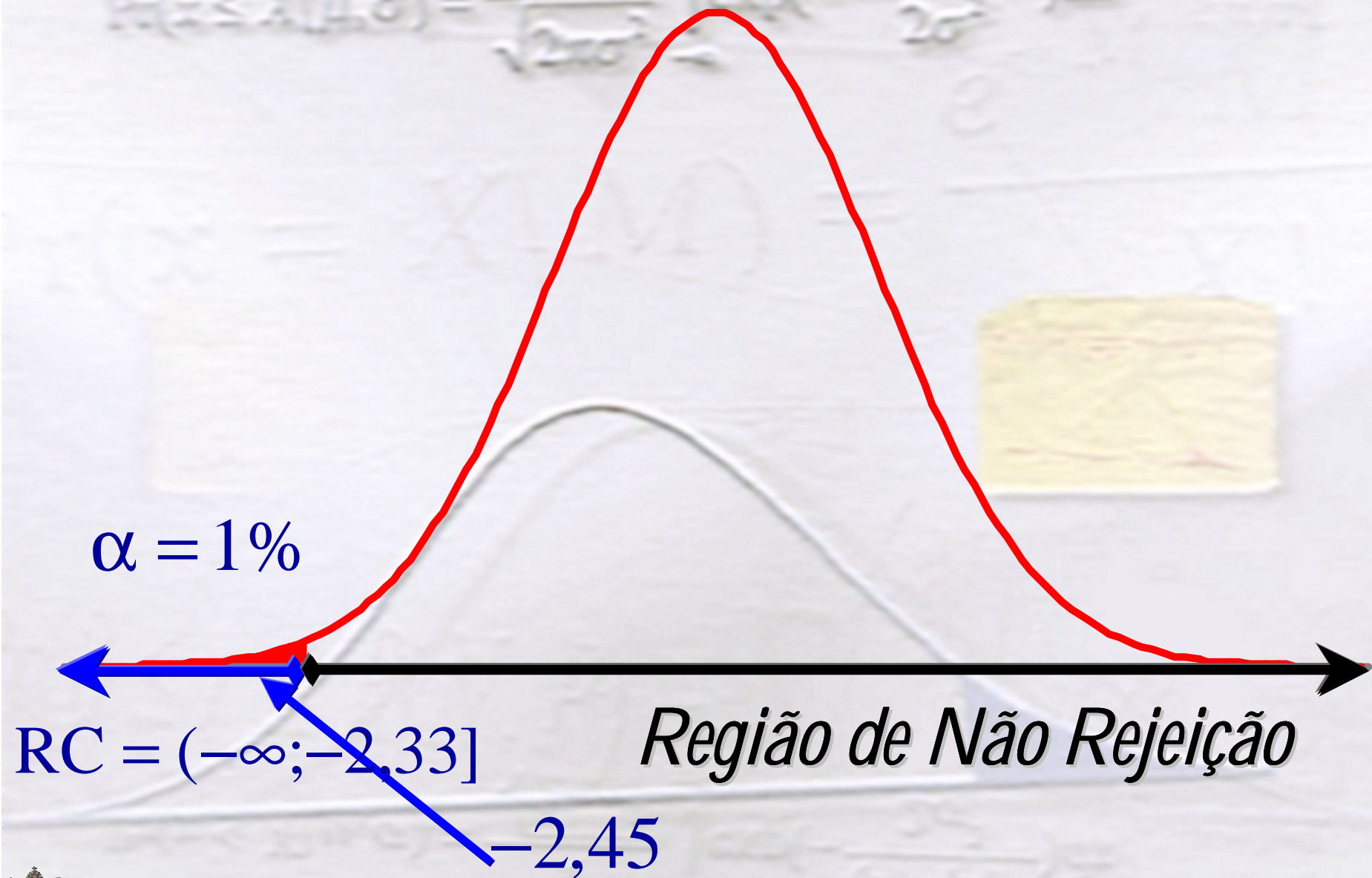
O valor crítico z_c é tal que: $\Phi(z_c) = \alpha = 0,01 = 1\%$. Então $z_c = \Phi^{-1}(0,01) = -2,33$. Assim $RC = (-\infty; -2,33]$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

*Como $z = -2,45 \in RC$ ou $-2,45 < -2,33$. Rejeito H_0 , isto é, a 1% de significância **posso** afirmar que a afirmação é exagerada.*



$$Pr(x \leq X | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$



OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (-2,45), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(Z < -2,45)$, isto é, $p = P(Z < -2,45) = \Phi(-2,45) = 0,71\%$.

Como a significância do resultado (0,71%) é menor que a significância do teste (1%) é possível rejeitar a hipótese nula.



Teste para a variância

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\sigma^2 < \sigma_0^2$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Neste caso a variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$



Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\chi^2_{n-1} < \chi^2_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\chi^2_{n-1} > \chi^2_c \text{ ou } \chi^2_{n-1} < \chi^2_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .



Onde χ^2_c é tal que:

$$P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(\chi^2_{n-1} < \chi^2_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(\chi^2_{n-1} > \chi^2_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal).



Exemplo



O fabricante de uma certa marca de surdina de carro divulga que as suas peças tem uma variância de 0,8 anos. Uma amostra aleatória de 16 peças mostrou uma variância de um ano. Utilizando uma significância de 5%, teste se a variância de todas as peças é superior a 0,8 anos.



Solução:

Dados:

Hipóteses:

$$H_0: \sigma^2 = 0,8 \text{ anos}$$

$$H_0: \sigma^2 > 0,8 \text{ anos}$$

$$n = 16$$

$$s = 1 \text{ ano}$$

$$\alpha = 5\%$$

Trata-se de um teste unilateral à direita para a variância.



A variável teste é:

$$\chi^2_{n-1} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

Então:

$$\chi^2_{15} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(16-1).1}{0,8} = \frac{15}{0,8} = 18,75$$

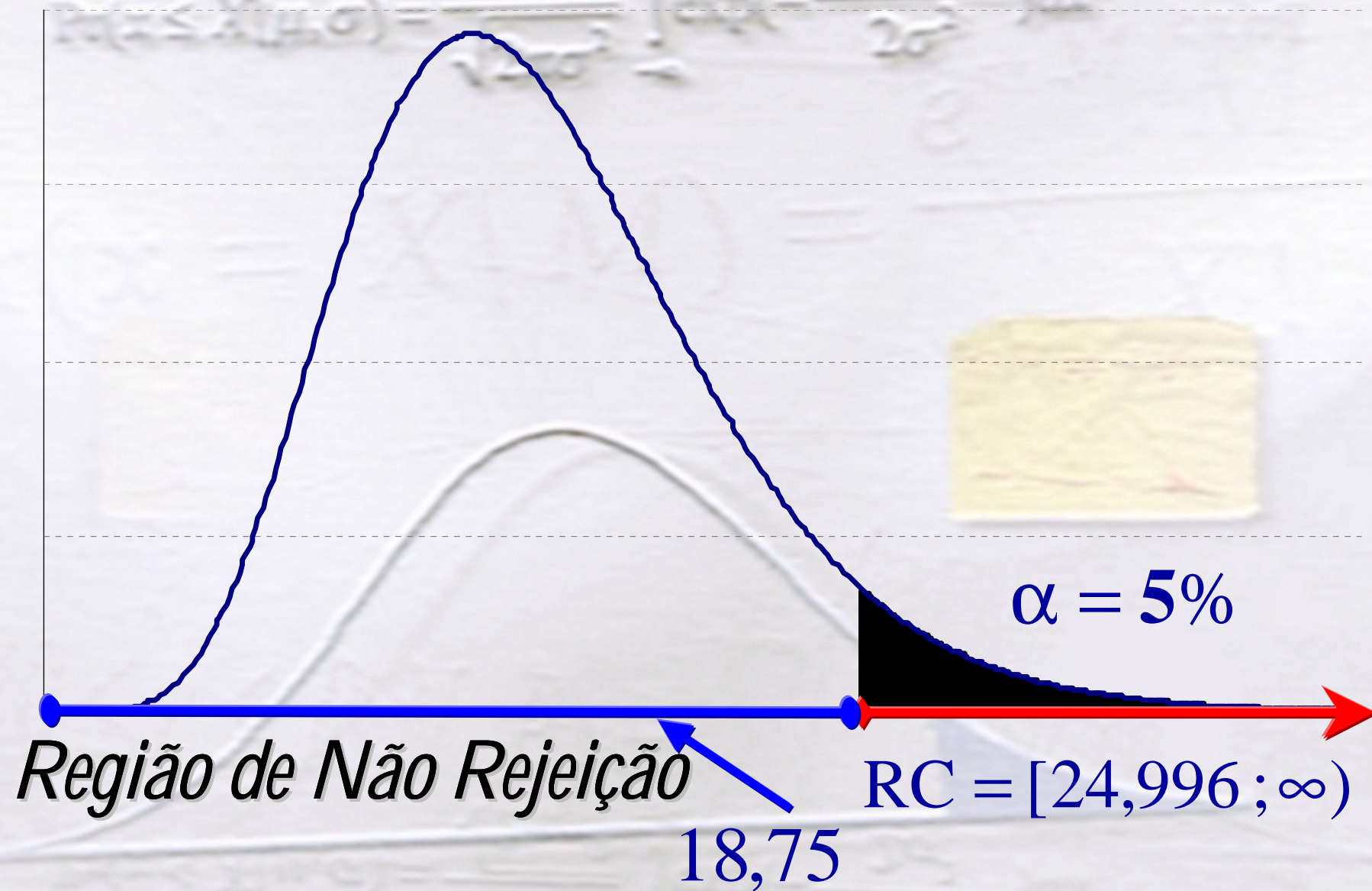


O valor crítico χ^2_c é tal que:
 $P(\chi^2 > \chi^2_c) = \alpha = 5\%$. Então:
 $\chi^2_c = 24,996$. Assim: $RC = [24,996; \infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $\chi^2_{15} = 18,75 \notin RC$ ou
 $18,75 < 24,996$, Aceito H_0 , isto é, a 5%
*de significância, **não** se pode afirmar que*
a variância é maior que 0,80 anos.





OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (18,75), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular $P(\chi^2_{15} > 18,75)$. Utilizando o Excel, tem-se:




DIST.QUI

X	18,75	=	18,75
Graus_liberdade	15	=	15

= 0,225287023

Retorna a probabilidade uni-caudal da distribuição qui-quadrada.

Graus_liberdade é o número de graus de liberdade, um número entre 1 e 10^{10} , excluindo 10^{10} .

 Resultado da fórmula = 0,225287023

OK Cancelar

Como a significância do resultado obtido (22,59%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.





Até a Próxima

