INF01046 - Fundamentos de Processamento Imagens

Aula 10 - Filtros no domínio da freqüência

Horacio E. Fortunato

Instituto de Informática
Universidade Federal de Rio Grande do Sul
Porto Alegre - RS
hefortunato@inf.ufrgs.br

Link do curso: http://www.inf.ufrgs.br/~hefortunato/cursos/INF01046

23 de setembro de 2009

Processamento Digital de Imagens - Nesta disciplina

Sensores e Aquisição de Imagens | Processamento para a interpretação humana | Percepção por máquina | Armazenamento e Comunicação

- Sistema visual Humano
- Modalidade de Imagens
- Câmeras Digitais

- Realce de Imagens:
  - Processamento de histograma
  - Filtragem espacial
  - Filtragem no domínio da freqüência
- Restauração de Imagens:
  - Remoção de ruído
  - Remoção de borramento
- Espaços de Cores
- Imagens em Alta Faixa Dinâmica

- Detecção de linhas e bordas
- Limiarização
- Segmentação

- Compressão de imagens

Transformada de Fourier unidimensional

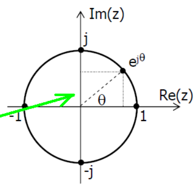
Seja $f(x)$ uma função contínua de variável real x

A transformada de Fourier (FT) de $f(x)$, é definida pela equação

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

Fórmula de Euler

$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j{*}sen(\theta)$



$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(2\pi ux) - j sen(2\pi ux)) dx$$

Transformada de Fourier unidimensional e sua inversa

Dado $F(u)$, transformada de Fourier de $f(x)$

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx$$

$f(x)$ pode ser obtida calculando-se a transformada inversa de Fourier (IFT)

troca + or -

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du$$

Estas equações chamadas conjuntamente de 'par de Fourier' existem se f(x) for contínua e integrável e F(u) for integrável.

Transformada de Fourier bidimensional e sua inversa

Para sinais bidimensionais contínuos o par de Fourier é:

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dxdy$$

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v) e^{j2\pi(ux+vy)} dudv$$

f deve ser contínua e integrável e F deve ser integrável

Transformada de Fourier unidimensional discreta e sua inversa

Seja $f(x)$ função discreta de uma variável x = 0, 1, 2....M-1

a transformada de Fourier de $f(x)$ (DFT) será:

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{-j2\pi ux/M} \qquad u = 0, 1, 2....M-1$$

e a transformada inversa de Fourier (IDFT) será:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u)\, e^{j2\pi ux/M} \qquad x = 0, 1, 2....M-1$$

- O domínio de F(u) é chamado "domínio da frequência".
- Para f com valores finitos a DFT e sua inversa sempre existem

Transformada de Fourier bidimensional discreta e sua inversa

DFT:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \qquad u = 0,1,2...M-1 \quad v = 0,1,2...N-1$$

IDFT

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \qquad x = 0,1,2...M-1 \quad y = 0,1,2...N-1$$

DFT - Exemplo

DFT:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \qquad u = 0,1,2...M-1 \quad v = 0,1,2...N-1$$

Exemplo:

M = 512 N = 1024 u = 0,1,2..511 v = 0,1,2..1023

Para u = 2 e v = 3

$$F(2,3) = \frac{1}{512 \bullet 1024} \sum_{x=0}^{511}\sum_{y=0}^{1023} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{2x}{512}+\frac{3y}{1024}\right)}$$

$$F(2,3) = \frac{1}{512 \bullet 1024} \left(f(0,0) + f(0,1)\, e^{-j2\pi\left(\frac{3}{1024}\right)} + \cdots \right)$$

cos ( ) + j sin ( )

Transformada de Fourier bidimensional discreta

Algumas definições:

Sejam $R(u,v)$ e $I(u,v)$ a parte real e a parte imaginaria de $F(u,v)$ (uma DFT)

Espectro da TF → $|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$

Ângulo de fase → $\phi(u,v) = \tan^{-1}\left(\dfrac{I(u,v)}{R(u,v)}\right)$

Espectro de potência → $P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$

Propriedades da DFT

Separabilidade $f(x,y) = f(x)f(y) \Leftrightarrow F(u,v) = F(u)F(v)$

Trafos lineares $af(x,y) + bg(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v) + bG(u,v)$

Rotação O par de funções rota o mesmo ângulo

Translação
$$f(x - x_0, y - x_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi(ux_0 + vy_0)} F(u,v)$$
$$e^{j2\pi(u_0x + v_0y)} f(x,y) \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0)$$

Convolução
$$f(x,y) * g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$$
$$f(x,y)g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) * G(u,v)$$

Periodicidade $F(u,v) = F(u+N, v) = F(u, v+M) = F(u+N, v+M)$

Simetria conjugada $F(u,v) = F^*(-u,-v) \Rightarrow |F(u,v)| = |F(-u,-v)|$

Propriedades da DFT

Separabilidade:

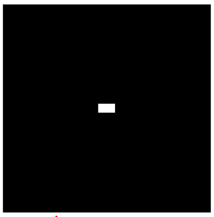
DFT:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)} \qquad \begin{matrix} u = 0,1,2...M\text{-}1 \\ v = 0,1,2...N\text{-}1 \end{matrix}$$

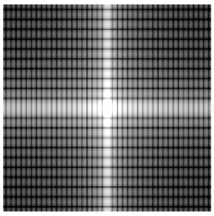
$$F(u,v) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}\right)} \times \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{vy}{N}\right)}} \qquad \begin{matrix} u = 0,1,2...M\text{-}1 \\ v = 0,1,2...N\text{-}1 \end{matrix}$$

$$F(u,v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} F(x,v)\; e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}\right)} \qquad \begin{matrix} u = 0,1,2...M\text{-}1 \\ v = 0,1,2...N\text{-}1 \end{matrix}$$

DFT - Exemplo



Original



Log do Espectro de Fourier (centrado)

MATLAB:

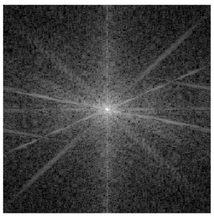
```
im_in = zeros ( 512, 512 );
im_in( 256 - 10:256 + 10, 256 - 20 : 256 + 20  ) = 255;

FFT = fftshift( fft2 ( im_in ) );

subplot( 1, 2, 1 ); imshow( im_in );
subplot( 1, 2, 2 ); imshow ( log ( 1 + abs ( FFT ) ), [3, 10] );
```

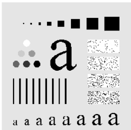

DFT - Exemplo

Original

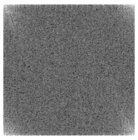


Log do Espectro de Fourier (centrado)

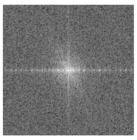
DFT - MATLAB: fftshift e ifftshift



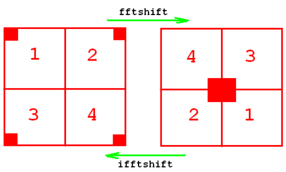
im_in



fft2 (im_in)



fftshift(fft2 (im_in))

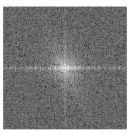


Filtragem no domínio da frequência

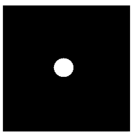
A convolução no domínio espacial é um produto no domínio da frequência

$f(x,y) * g(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad F(u,v) \qquad G(u,v)$

⇔



x



Filtragem no domínio da frequência - procedimento

MATLAB:

- $F(u,v) =$ **DFT** $\left(f(x,y)\right)$ `F = fft2(im_in);`
- $F_c(u,v) =$ *Shift* $\left(F(u,v)\right)$ `Fc = fftshift(F);`
- $G_c(u,v) = H(u,v) \cdot F_c(u,v)$ `Gc = H .* Fc;`
- $G(u,v) =$ *Shift*$^{-1}\left(G_c(u,v)\right)$ `G = ifftshift(Gc);`
- $g_s(x,y) =$ **IDFT** $\left(G(u,v)\right)$ `im_out_s = ifft2(G)`
- $g(x,y) =$ *Real* $\left(g_s(x,y)\right)$ `im_out = real(im_out_s)`

Filtragem no domínio da frequência

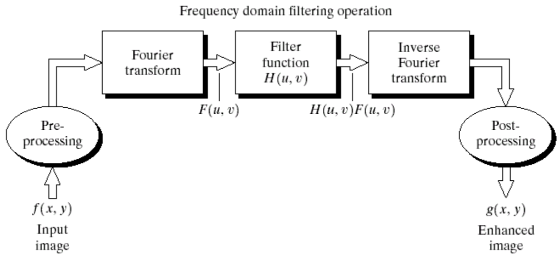


FIGURE 4.5 Basic steps for filtering in the frequency domain.

Imagem extraída do livro: Digital image processing 2ed, Gonzales e woods.

Notch Filter - Remoção da media (F(0,0))

Notch Filter: (orifício) remove uma freq. em particular

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{se } u = u_1 \text{ e } v = v_1 \\ 1 & \text{senão} \end{cases}$$

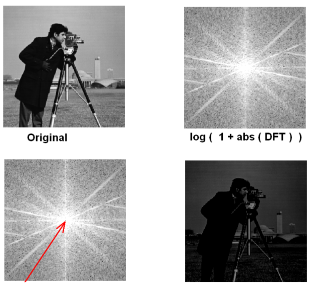
Exemplo: remoção da média

$$F(0,0) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{0x}{M}+\frac{y0}{N}\right)} = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

Valor médio de f

$$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{se } u = 0 \text{ e } v = 0 \\ 1 & \text{senão} \end{cases}$$

Notch Filter - Remoção da media (F(0,0))



Original

log (1 + abs (DFT))

log (1 + abs (DFT))
Ponto central (F(0,0)) removido

IDFT após remoção da componente F(0,0)

Filtros passa baixas e passa altas

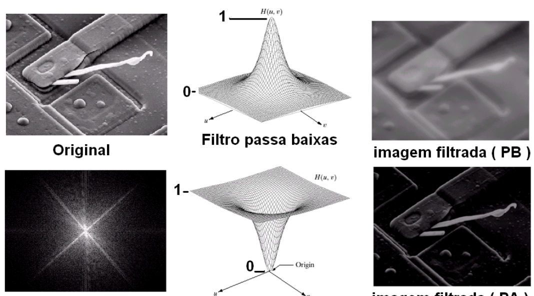


Imagem extraída do livro: Digital image processing 2ed, Gonzales e woods.

Filtro passa altas mais Constante

FIGURE 4.8 Result of highpass filtering the image in Fig. 4.4(a) with the filter in Fig. 4.7(c), modified by adding a constant of one-half the filter height to the filter function. Compare with Fig. 4.4(a).

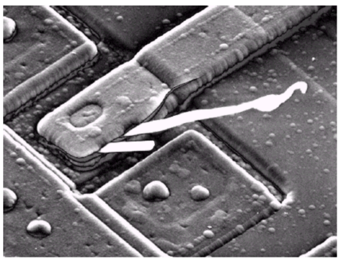


Imagem extraída do livro: Digital image processing 2ed, Gonzales e woods.

Processamento Digital de Imagens - Tarefas

Tarefas Acumuladas:

- Leia os Capítulo 1, 2, e 3 (aulas 01 a 09) do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)
- Faça os exercicios do Capítulos 1 a 3 do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)
- Estude as seções 1, 2 e 3 do tutorial do MATLAB *http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf*

Tarefas Novas:

- Leia as seções 4.1, 4.2 do Capítulo 4 (aula 10) do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)
- Faça os exercicios do Capítulo 4,(Problemas 4.1 até 4.3) do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)

Nota Importante: **No livro Gonzalez, R. & Woods em português os capítulos possuem número diferente**

Livro Gonzalez, R. & Woods 2ª Ed. (em Inglês): Gonzalez, R. & Woods, R. Digital Image Processing 2ª Ed. Prentice Hall, 2002.

Link do curso: http://www.inf.ufrgs.br/~hefortunato/cursos/INF01046