Relações de Ordem

20/10/2009 e 22/10/2009

Definições

Seja $(S, \leq)$ um conjunto PO e $m, M \in S$.

a) m é um *mínimo* de $S \iff (\forall s \in S)\,[\,m \leq s\,]$

b) M é um *máximo* de $S \iff (\forall s \in S)\,[\,s \leq M\,]$

Exemplos

Em cada caso, verifique se existe um máximo e também se existe um mínimo nos seguintes conjuntos PO. Justifique suas respostas.

a) $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ e $(\mathbb{R}, \leq)$, onde $\leq$ é a ordem usual dos números.

Em $(\mathbb{N}, \leq)$, o mínimo , pois

e o máximo , pois

Em $(\mathbb{Z}, \leq)$, o mínimo , pois

e o máximo , pois

Em $(\mathbb{R}, \leq)$, o mínimo , pois

e o máximo , pois

b) $(\{1,2,3,4,6,12\},|)$;

Em $(\{1,2,3,4,6,12\},|)$, o máximo e o mínimo pois,

c) $(\mathbb{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$

Em $(\mathbb{P}(\{a,b,c\}),\subseteq)$ o máximo e o mínimo pois,

d) Faça o diagrama de Hasse do conjunto PO $(\{1,2,4,5,10,12,20,25\},|)$ e verifique se existe máximo e também mínimo neste conjunto.

e) Faça o diagrama de Hasse do conjunto PO $(\{2,4,5,10,12,20,25,100\},|)$ e verifique se existe máximo e também mínimo neste conjunto.

f) Faça o diagrama de Hasse do conjunto PO $(\{2,4,5,10,12,20,25\},|)$ e verifique se existe máximo e também mínimo neste conjunto.

Definições

Seja $(S, \leq)$ um conjunto PO e $m, M \in S$.

a) m é um *elemento minimal* de $S \iff (\nexists\, s \in S)\,[\, s \neq m \,\wedge\, s \leq m\,]$

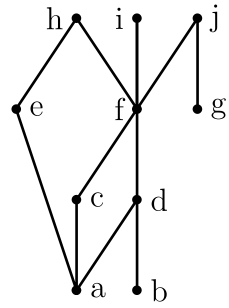
b) M é um *elemento maximal* de $S \iff (\nexists\, s \in S)\,[\, s \neq M \wedge M \leq s\,]$

Exemplos

a) Em cada um dos exemplos anteriores, determine os elementos maximais e os elementos minimais, caso existam.

b) Considere o conjunto PO $(\, S, \leq \,)$, cujo diagrama de Hasse é dado ao lado.

Determine os elementos maximais e os elementos minimais de $(\, S, \leq \,)$.



Proposição: Seja $(\, S, \leq \,)$, um conjunto PO.

a) Se $(\, S, \leq \,)$ possui um mínimo, então ele é único.

b) Se $(\, S, \leq \,)$ possui um máximo, então ele é único.

d) Se $(\, S, \leq \,)$ é um conjunto PO, $S \neq \emptyset$ e finito, então existe pelo menos um elemento minimal e um elemento maximal em S.

Em particular, se além das hipóteses acima temos também que S é uma cadeia, então S possui máximo e mínimo.

Definições

Seja $(S, \leq)$ um conjunto PO e $T \subseteq S$.

a) $m \in S$ é *cota inferior* de $T \iff (\forall t \in T)\,[m \leq t]$

b) $M \in S$ é *cota superior* de $T \iff (\forall t \in T)\,[t \leq M]$

c) $m \in S$ é *ínfimo* de $T \iff (\forall m^*$cota inferior de T$)\,[m^* \leq m]$ Notação: $m = inf\,(T)$.

d) $M \in S$ é *supremo* de $T \iff (\forall M^*$cota superior de T$)\,[M \leq M^*]$ Notação: $M = sup\,(T)$.

Observações:

Usando a notação das definições acima, quando o conjunto T possui apenas dois elementos, digamos, $T = \{a, b\}$, costumamos notar:

$$inf\,(T) = inf\,(\{a, b\}) = a \wedge b \qquad \text{e} \qquad sup\,(T) = sup\,(\{a, b\}) = a \vee b.$$

Exemplos:

a) No conjunto PO $(\mathbb{N}^*, |)$, onde $|$ é a relação de divisibilidade, determine as cotas inferiores dos conjuntos dados e também as cotas superiores. Verifique se os conjuntos possuem supremo ou ínfimo e, em caso afirmativo, determíne-os.

i) $\{12\}$ ii) $\{12, 20\}$

b) Se X é um conjunto qualquer, no conjunto PO $(\mathbb{P}(X), \subseteq)$, temos $A \bigcap B = inf\{A, B\}$ e $A \bigcup B = sup\{A, B\}$, onde A e B são subconjuntos de X. Justifique.

Proposição: Seja $(S, \leq)$, um conjunto PO e $T \subseteq S$.

a) $inf(T)$, caso exista, é único.

b) $sup(T)$, caso exista, é único.

Definição: Seja $(S, \leq)$, um conjunto PO.

$(S, \leq)$ é um reticulado $\iff (\forall a, b \in S)\,[\{a, b\}$ possui supremo e ínfimo$]$
$\iff (\forall a, b \in S)\,[a \vee b$ e $a \wedge b$ existem$]$