Instituto de Matemática - UFRGS - Mat01355 - Álgebra Linear
Primeira Verificação 2009/1

Nome: **Cartão:**

Instruções: (1) Essa prova tem duração de 1h e 50min. Ao término do tempo, pare de escrever e a entregue. (2) A correta interpretação dos enunciados faz parte da verificação. Leia atentamente.

Questão 1. (2.5 pt) Encontre, escrevendo todo o desenvolvimento, a solução geral do sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & -9 & 15 & -4 \\ 0 & 6 & -6 & -7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 21 \end{bmatrix}$$

Questão 2. (2.5 pt) Determine, escrevendo todo o desenvolvimento, os valores de h para os quais os vetores abaixo são linearmente dependentes

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ h \\ -8 \end{bmatrix}$$

Questão 3. (2.5 pt) Encontre, escrevendo todo o desenvolvimento, a fatoração LU da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ -6 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Questão 4. (2.5 pt) Queremos saber se o conjunto W abaixo é um espaço vetorial. Conforme foi feito em aula, MOSTRE que isso é verdade OU apresente uma justificativa por contra-exemplo.

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} b - 2d \\ d \\ b + 3d \\ d \end{bmatrix} : b, d \text{ reais} \right\}$$

Suas observações sobre a prova: ______________________________________

____

UFRGS – Instituto de Matemática
Departamento de Matemática Pura e Aplicada
MAT01355 – Álgebra Linear I A
Prova 1 – 07 de maio de 2009 – 20h30min

Nome:________________________________ **Cartão:**__________ **Turma:**____

Questão 1: Classifique as afirmações abaixo em verdadeiras ou falsas e justifique a sua resposta.

a) Os vetores $(1,1,1)$ $(1,2,1)$ e $(1,0,1)$ formam uma base de $\Re^3$.

b) As coordenadas do vetor (3,-1,1) do R^3 na base ordenada $\{v_1 = (1,0,0); (1,1,0); (1,1,1)\}$ são $x_1 = 4$, $x_2 = -2$ e $x_3 = 1$, onde x_i é a coordenada em relação ao vetor v_i.

c) No sistema de equações

$$3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0$$
$$6x_1 - 10x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0$$

é possível definir as variáveis x_2 e x_3 como funções das variáveis x_1 e x_4.

Questão 2: Resolva o sistema abaixo usando a fatoração LU.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 6x_1 + x_2 &= -10 \\ -x_1 + 2x_2 - 10x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Questão 3: Determine se a transformada T(x) = 5.x é uma transformada linear. Justifique a sua resposta.

Questão 4: Considere as base B = $\{b_1, b_2\}$ e C = $\{c_1, c_2\}$, onde $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $c_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $c_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine a matriz mudança de base de B para C e a matriz mudança de base de C para B.

Questão 5: Determine uma base para o espaço nulo (Nul A) e para o espaço das colunas (Col A) da matriz A abaixo e determine também a dimensão de cada um desses espaços vetoriais.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 6 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -3 & -3 & -4 \\ 4 & -6 & 9 & 5 & 9 \\ -2 & 3 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

QUESTÃO 1.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

a) Determine a solução geral do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Verifique se $\mathbf{b}$ é uma combinação linear dos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 2)$, $v_2 = (3, 0, 6, 6)$ e $V_3 = (0, 1, 2, 2)$. Em caso afirmativo, escreva $\mathbf{b}$ como uma tal combinação linear. Em caso negativo, justifique sua resposta.

c) Verifique se a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, definida por

$$T(x, y, z) = (x + 3y, -x + z, 6y + 2z, 2x + 6y + 2z)$$

é injetora, justificando sua resposta.

d) Classifique os vetores $p_1 = 1 - X + 2X^3$, $p_2 = 3 + 6X^2 + 6X^3$ e $p_3 = X + 2X^2 + 2X^3$ de $\mathbb{P}_3$ em L. I ou L. D., justificando sua resposta.

QUESTÃO 2.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

a) Determine uma base para o espaço $Nul\, A$.

b) Determine a dimensão do espaço $Col\, A$ e determine uma base para o espaço $Lin\, A$, justificando cada uma das respostas.

c) É possível encontrar um vetor de $\mathbb{R}^4$ que não pertença ao espaço $Col\, A$? Justifique. Em caso afirmativo, encontre um tal vetor.

d) Apresente uma solução particular não-trivial para o sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e use-a para escrever a última coluna da matriz A como uma combinação linear das quatro primeiras.

QUESTÃO 3.

a) Determine a matriz canônica da transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ que primeiro reflete um vetor em relação a reta $y = x$ (bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes), depois roda o vetor de um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ no sentido anti-horário e, finalmente, dilata o vetor de três unidaes.

b) Se A é uma matriz 5×7, então todo sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem infinitas soluções, para qualquer escolha do vetor $\mathbf{b}$ de termos independentes? Justifique sua resposta.