Problema da Mochila Binária

0/1 Knapsack Problem

Jonathas Gabriel Dipp Harb – Turma A
Raphael de Leon Ferreira Lupchinski – Turma B

INF05515 - Complexidade de Algoritmos B
Profa. Dra. Mariana Luderitz Kolberg

Objetivo

Provar que o problema da Mochila Binária pertence a classe NP-Completo

- Mostrar que o problema da mochila pertence a classe NP, apresentando um algoritmo não-determinista em tempo polinomial ou mostrando que uma dada solução pode ser verificada em tempo polinomial;
- Apresentar um redução em tempo polinomial de um problema já provado ser NP-Completo para o problema da mochila.

Caracterização do Problema

- Pertence a classe dos problemas de otimização

  Maximizar algum valor respeitando limites.

- Pode ser interpretado como:

  Um caroneiro deseja ***encher sua mochila*** *selecionando determinados objetos dentre um* ***conjunto de objetos.*** *Sabe-se que cada objeto tem um determinado* ***peso*** *e gera um determinado* ***lucro****. A mochila do caroneiro tem um determinado* ***limite de peso****.*

  Como os objetos podem ser selecionados para preencher a mochila de maneira que o ***lucro gerado*** *seja o* ***máximo respeitando-se*** *o* ***peso máximo*** *da* ***mochila****?*

Digamos que existam 4 objetos (A, B, C e D) e uma mochila, qual seria a melhor escolha respeitando os valores da tabela abaixo?

	W	V	V/W
A	3	5	1,67
B	2	3	1,5
C	4	4	1
D	4	5	1,25
Mochila	8		

	W	V
A	3	5
B	2	3
C	4	4
D	4	5
AB	5	8
AC	7	9
AD	7	10
BC	6	7
BD	6	8
CD	8	9
ABC	9	12
ABD	9	13
ACD	11	14
BCD	10	12
ABCD	13	17

		Wi	MAX W	
1,667	A	3	8	OK
1,5	B	5	8	OK
1,25	D	9	8	
1	C	13	8	

Otimização x Decisão

- O problema de otimização diz:
  - Achar, dados um conjunto *S* de objetos e o peso *W* da mochila, a configuração que gere mais lucro, respeitando o limite de peso *W*.
  - Não possui algoritmo polinomial que o resolva (é intuitivo que devem ser testadas todas combinações possíveis, o que não é feito em tempo polinomial).

- O problema de decisão diz:
  - Decidir se existe ou não uma “solução” com um lucro não menor do que *V*, sendo *V* o lucro desejado, respeitando *W*.

Definição Formal

Problema: Mochila Binária - Decisão

Instância:

- Um conjunto finito de objetos *S*;
- Um inteiro *n* representando a quantidade de objetos;
- Para cada objeto *i* em {1, … , n}:
  - Um valor $v_i \geq 0$ representando o valor do objeto;
  - Um número $w_i \geq 0$ representando o peso do objeto;
- Um inteiro positivo *W* representando a capacidade da mochila;
- Um inteiro positivo *V* representando o lucro desejado.

Questão:

- Existe um subconjunto *S'* de *S* tal que:

Prova que pertence à NP

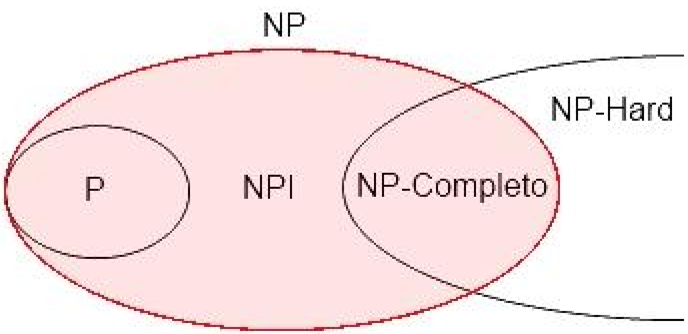
- Utilizar um algoritmo que verifica uma entrada em tempo polinomial.

```
NONDET_KNAPSACK( cBP, vBP, n, w[1,...,n], v[1,...,n], x[1,...,n] )
if (Σ1ton w[i]*x[i] > cBP) or (Σ1ton v[i]*x[i] < vBP) then
    return FAIL
else
    return SUCCESS
endif
```

Cálculo da Complexidade

```
 NONDET_KNAPSACK( cBP, vBP, n, w[1,...,n], v[1,...,n], x[1,...,n] )
1.   if (Σ1ton w[i]*x[i] > cBP) or (Σ1ton v[i]*x[i] < vBP) then
2.       return FAIL
3.   else
4.       return SUCCESS
5.   endif
```

$cp[1\text{-}5] = (\Sigma_{1ton}\ (1)) + 1 = n+1 = O(n)$



Prova que pertence à NP-Completo

- Apresentar um redução em tempo polinomial de um problema já provado ser NP-Completo para o problema da mochila.

Para a prova iremos fazer uma redução, em tempo polinomial, do problema já provado ser NP-Completo:

SUBSET SUM (Soma dos Subconjuntos)

Subset Sum

- Consiste em verificar se existe um subconjunto não-vazio de números inteiros de um conjunto *S* cuja soma seja igual a um determinado valor *n*.
- É sabido que esse problema é NP-Completo.
- *“Dados um **conjunto de inteiros T** de **tamanho n** (onde cada elemento de **T possui** um valor associado t_i e um inteiro **U** , **existe** um **subconjunto não-vazio** de **T** cuja **soma** vale **U**?”*.
- Pode-se perceber que tal problema é um caso especial do problema da Mochila Binária.

Redução

- Para o Problema da Mochila (INST B) temos:
  - Um conjunto *S* de *n* itens, cada um associado a um valor v_i e a um peso w_i.
  - A mochila tem capacidade máxima de peso *W* e temos um número *V* (positivo) que representa o lucro (valor).
  - Existe um subconjunto *S* em *n* tal que:
    - $\Sigma_{i \in S}\, w_i \leq W$ sendo que $\Sigma_{i \in S}\, v_i \geq V$?

- Para o Subset Sum Problem (INST A) temos:
  - Um conjunto *T* de *n* elementos, cada um associado a um valor t_i.
  - Um número natural *U*.
  - Existe um subconjunto *T'* em *T* que satisfaça:
    - $\Sigma_{i \in T'}\, t_i = U$?

Podemos fazer a redução das instâncias do problema A (SUBSET SUM) em instâncias do problema B (0/1 KNAPSACK PROBLEM).

Podemos começar reduzindo:

- Os conjuntos: S = T
- Os pesos, valores e tamanhos: $w_i = v_i = t_i$
- Os números delimitadores: W = V = U

Dar uma resposta "*sim*" para B implica que existe um conjunto S que satisfaz tais regras. Com isso, se tivermos "*sim*" para o problema B (0/1 Knapsack Problem), teremos uma resposta "*sim*" para o problema A (Subset Sum).

Cálculo da Complexidade

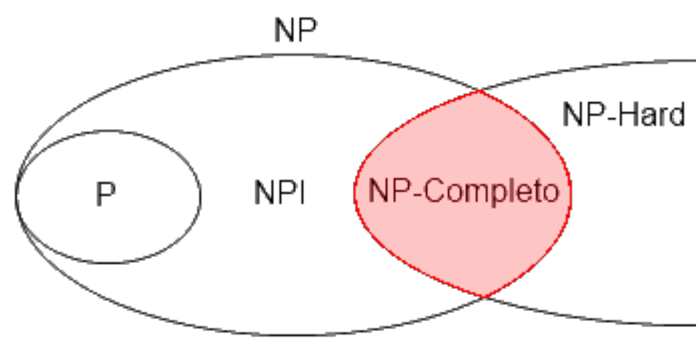
```
    REDUÇÃO_KNAPSACK( T.t[1,...,n], n, U )
1.     for i = 1 to n do
2.         S.w[i] = S.v[i] = T.t[i]
3.     endfor
4.     W = V = U
```

cp[1-4] = cp[1-3] + cp[4]

    cp[1-3] = $\Sigma_{1\text{to}n}$ (1+1) = 2n

    cp[4] = 1+1

cp[1-8] = 2n + 2 = O(n)



Referências

[1] CALDAS, Ruiter Braga. Projeto de Análise de Algoritmos. **Universidade Ferederal de Minas Gerais.** Disponível em <http://homepages.dcc.ufmg.br/~nivio/cursos/pa04/tp2/tp22/tp22.pdf>. Acesso em 29 de Maio de 2012.

[2] ZIVIANE, Nivio. Projeto de Algoritmos: com implementações em Pascal e C. **Pioneira Thomson Learning, 2ed., 2004**.

[3] NP-Complete. Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/NP-complete>. Acesso em 31 de Maio de 2012.

[4] Knapsack Problem. Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem>. Acesso em 31 de Maio de 2012.

[5] Subset Sum Problem. Disponível em <http://en.wikipedia.org/wiki/Subset_sum_problem>. Acesso em 31 de Maio de 2012.

[6] RIBEIRO, Celso Carneiro. Metaheurísticas e Aplicações. **Departamento de Ciência da**