Lista 1 – Ex 2.

$p \vee q \Leftrightarrow \sim(\sim p \wedge \sim q)$
$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim(p \wedge \sim q)$
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow \sim(\sim(p \wedge q) \wedge \sim(\sim p \wedge \sim q))$

Ex 4.

a) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
b) $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$ (contraposição)
c) $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \sim q \rightarrow F$ (redução ao absurdo)
d) $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
e) $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
f) $\sim q \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow \sim p$
g) $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$
h) $p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$
i) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$

Lista 3 – Ex 1.

a) A soma de dois pares é um par
b) A soma de dois ímpares é um par
c) A soma de um par com um ímpar é um ímpar
d) A soma de 3 ímpares é um ímpar
e) A soma de 4 ímpares é um par
f) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n\ par \Leftrightarrow n^2 par$
g) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n\ ímpar \Leftrightarrow n^2\ ímpar$
h) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n\ par \Leftrightarrow n+1\ ímpar$
i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n\ ímpar \Leftrightarrow n = soma\ de\ dois\ \mathbb{N}\ consecutivos$

2. A soma de três números naturais consecutivos é um número natural múltiplo de três
3. $(\forall n \in \mathbb{N});\ n! > n+1 \Rightarrow n > 2$
4. Se a soma de dois primos é um primo, então um deles é dois.
5. Existem infinitos números primos
6. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n\ múltiplo\ de\ 3 \Leftrightarrow n^2\ múltiplo\ de\ 3$
7. $\sqrt{3}$ é $irracional$
8. $(\forall n \in \mathbb{N})\ n\ múltiplo\ de\ 5 \Leftrightarrow n^2\ múltiplo\ de\ 5$
9. $\sqrt{5}$ é $irracional$

Propriedades da Equivalência

Sejam p, q e r proposições, V tautologia e F contradição

1. Idempotência: $p \vee p \Leftrightarrow p,\ q \wedge q \Leftrightarrow q$
2. Comutatividade: $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p,\ p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
3. Associatividade: $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
   $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
4. Distributividade: $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
5. Identidade:
   Elemento Neutro: $p \wedge V \Leftrightarrow p,\ p \vee F \Leftrightarrow p$
   Elemento Absorvente: $p \vee V \Leftrightarrow V,\ p \wedge F \Leftrightarrow F$
6. Complementares: $p \vee \sim p \Leftrightarrow V,\ p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$
7. Dupla Negação / Involução: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
8. Leis de De Morgan: $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$
   $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$
9. Absorção: $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p,\ p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$
10. Transitividade: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \rightarrow r)$
    $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \leftrightarrow r) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$

Para conjuntos, $p = A, q = B, r = C, V = \mathbb{U}\ e\ F = \emptyset$
$\vee = \cup, \wedge = \cap, \rightarrow = \subseteq, \leftrightarrow = =, \sim A = \bar{A}$

R é $funcional \Leftrightarrow (\forall a \in A)(\forall b_1, b_2 \in B); (a, b_1) \wedge (a, b_2) \in R \rightarrow b_1 = b_2$
Cada elemento de A está relacionado com, no máximo, um elemento de B.
Matriz: Existe, no máximo, um 1 por linha
Grafo: Existe, no máximo, uma aresta partindo de cada nodo

R é $injetora \Leftrightarrow (\forall a_1, a_2 \in A)(\forall b \in B); (a_1, b) \wedge (a_2, b) \in R \rightarrow a_1 = a_2$
Cada elemento de B está relacionado com, no máximo, um elemento de A.
Matriz: Existe, no máximo, um 1 por coluna
Grafo: Existe, no máximo, uma aresta chegando em cada nodo

Seja R uma relação não-simétrica. Fecho simétrico = menor relação que contém R e é simétrica

Adição: $p \Rightarrow p \vee q$
Simplificação: $p \wedge q \Rightarrow p$

Seja R uma relação não-transitiva. Fecho transitivo = menor relação que contém R e é transitiva

Lista 4 – Ex 9.

$Sejam\ A, B, C \subseteq \mathbb{U}\ conjuntos$

a) $(A \cap B) \subseteq A$
b) $A - B \subseteq A$
c) $A \cap (B - A) = \emptyset$
d) $A \cup (B - A) = A \cup B$
e) $\bar{A} - \bar{B} = B - A$
f) $(A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}) = A$
g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
h) $(A \cap B \cap C) \subseteq (A \cap B)$
i) $(B - A) \cup (C - A) = (B \cup C) - A$
j) $\underline{(A - C) \cap (C - B)} = \emptyset$
k) $\overline{(A \cap B \cap C)} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$
l) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$
m) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

Seja R uma relação.
R é $de\ equivalência \Leftrightarrow R$ é $reflexiva, simétrica\ e\ transitiva$
R é $bijetora \Leftrightarrow R$ é $funcional, injetora, total\ e\ sobrejetora$

$(R^n, \preccurlyeq)$ é $um\ conjunto\ totalmente\ ordenado$
$(A, \preccurlyeq)\ totalmente\ ordenado \Rightarrow (A^n, \preccurlyeq_l)\ totalmente\ ordenado$
$(A, \preccurlyeq)\ bem\ ordenado \Rightarrow (A^n, \preccurlyeq_l)\ bem\ ordenado$
$(A, \preccurlyeq)\ estritamente\ ordenado \Rightarrow (A^n, \preccurlyeq_l)\ estritamente\ ordenado$
$(A, \preccurlyeq)\ parcialmente\ ordenado \Rightarrow (A^n, \preccurlyeq_l)\ parcialmente\ ordenado$
Todo conjunto finito totalmente ordenado é bem ordenado

Podemos representar uma ordem parcial em um conjunto finito procedendo do seguinte modo:
Iniciamos com o grafo que representa a relação

I. Como a relação é reflexiva, temos um loop em cada nodo. Remova-os.
II. Como a relação é transitiva, temos várias arestas só de transitividade. Remova-as
II. Rearranje os nodos de modo que os nodos iniciais fiquem abaixo dos finais
IV. Remova todas as setas.

O diagrama final é chamado DIAGRAMA DE HASSE da relação, e contém informação suficiente para determinar a ordem

Sejam $(A, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $B \subseteq A$
$u \in A$ é $uma\ cota\ superior\ de\ B \Leftrightarrow (A\ b \in B)\ b \preccurlyeq u$
$v \in A$ é $uma\ cota\ inferior\ de\ B \Leftrightarrow (A\ b \in B)\ v \preccurlyeq b$
$t \in A$ é $o\ supremo\ de\ B\ (t = supB)$
$\Leftrightarrow t$ é $a\ menor\ das\ cotas\ superiores\ de\ B$
$r \in A$ é $o\ ínfimo\ de\ B\ (r = infB)$
$\Leftrightarrow t$ é $a\ maior\ das\ cotas\ inferiores\ de\ B$

Vacuidade:
p é F $\Rightarrow$ p $\rightarrow$ q é V
Trivial:
q é $V \Rightarrow p \rightarrow q$ é V

Seja S um conjunto qualquer.
Uma seqüência é uma função de um subconjunto de $\mathbb{Z}$ em S.

$P.G.$
$(a_0, a_0 \cdot r, a_0 \cdot r^2, a_0 \cdot r^3, \ldots)$
Termo inicial = a_0
Razão = r
$a_n = a_{n-1} \cdot r = a_0 \cdot r^n$
$$S_n = \frac{a_0(r^{n+1} - 1)}{r - 1}$$

$P.A.$
$(a_0, a_0 + r, a_0 + 2r, a_0 + 3r, \ldots)$
Termo inicial = a_0
Razão = r
$a_n = a_{n-1} + r = a_0 + nr$
$$S_n = \frac{(a_0 + a_n)n}{2}$$

$R = \{(a, b) \in A \times B | aRb\}$
$\mathcal{P}(A) = 2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$
Conjunto das partes de A

$\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto

Distributividade do produto cartesiano sobre a união e a intersecção:
$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$Contrapositiva\ de\ p \rightarrow q = q \rightarrow p$

Associatividade da composição de relações:
$R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T = R \circ S \circ T$

R é $reflexiva \Leftrightarrow (\forall x \in A); (x, x) \in R$
Diagonal principal da matriz possui somente 1
R é $irreflexiva \Leftrightarrow (\forall x \in A); (x, x) \notin R$
R é $simétrica \Leftrightarrow (\forall x, y \in A); (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R$
Matriz simétrica em relação à diagonal principal
R é $assimétrica \Leftrightarrow (\forall x, y \in A); (x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R$
R é $antisimétrica \Leftrightarrow (\forall x, y \in A); (x, y) \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$
R é $transitiva \Leftrightarrow (\forall x, y, z \in A); (x, y) \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \in R$
R é $intransitiva \Leftrightarrow (\forall x, y, z \in A); (x, y) \wedge (y, z) \in R \rightarrow (x, z) \notin R$
R é $de\ equivalência \Leftrightarrow R$ é $reflexiva, simétrica\ e\ transitiva$

R é $total \Leftrightarrow (\forall a \in A)(\exists b \in B); (a, b) \in R$
Domínio = Origem
Cada elemento de A está relacionado com ao menos um elemento de B.
Matriz: Existe, ao menos, um 1 por linha
Grafo: Existe, ao menos, uma aresta partindo de cada nodo

R é $sobrejetora \Leftrightarrow (\forall b \in B)(\exists a \in A); (a, b) \in R$
Imagem = Destino
Cada elemento de B está relacionado com, ao menos, um elemento de A.
Matriz: Existe, ao menos, um 1 por coluna
Grafo: Existe, ao menos, uma aresta chegando em cada nodo

Relação Dual = Inversa $Seja\ R: A \rightarrow B, sua\ dual$ é $R^{-1}: B \rightarrow A = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$
Matriz: Transposta. Grafo: Sentidos opostos.
Funcional é o dual de injetora e vice-versa
Total é o dual de sobrejetora e vice-versa

Seja R uma relação não-reflexiva. Fecho reflexivo = menor relação que contém R e é reflexiva.
Matriz: Troca-se os 0s da diagonal principal de R por 1s

Seja $R \subseteq AxA$
R é $de\ ordem\ parcial\ ou\ (A, R) = (A, \preccurlyeq)$
$\Leftrightarrow R$ é $reflexiva, antisimétrica\ e\ transitiva$
$(A, \prec)$ é $estritamente\ ordenado$
$\Leftrightarrow R$ é $irrefleiva, antisimétrica\ e\ transitiva$
$(A, \preccurlyeq)$ é $totalmente\ ordenado \Leftrightarrow (\forall\ a, b \in A), a \preccurlyeq b\ \vee b \preccurlyeq a$
$(A, \preccurlyeq)$ é $bem\ ordenado \Leftrightarrow todo\ subconjunto\ não\ vazio\ de\ A\ possui\ menor\ elemento$

Ordem Lexicográfica
$A = alfabeto = \{a, b, c, d, e, f, \ldots, x, y, z\}$
$(A, \prec)$ é $um\ conjunto\ estritamente\ ordenado$
$\preccurlyeq$ é $o\ fecho\ reflexivo\ de\ \prec$
$(A, \preccurlyeq)$ é $um\ conjunto\ bem\ ordenado$
$A* = \{*, a, b, c, d, e, f, \ldots, x, y, z\}$
$* \prec a \prec b \prec c \prec d \prec e \prec f \prec \cdots \prec x \prec y \prec z$
É a ordem lexicográfica induzida de A* em A

Seja $(A, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado.
$a \in A$ é $um\ elemento\ minimal\ de\ (A, \preccurlyeq)$
$\Leftrightarrow (\nexists b \in A)\ b \preccurlyeq a\ e\ b \neq a$
$a \in A$ é $um\ elemento\ maximal\ de\ (A, \preccurlyeq)$
$\Leftrightarrow (\nexists b \in A)\ a \preccurlyeq b\ e\ b \neq a$
Os elementos minimais e maximais não são necessariamente únicos.
$a \in A$ é o "maior" $elemento\ de\ (A, \preccurlyeq)$
$\Leftrightarrow a$ é $o\ único\ elemento\ maximal$
$a \in A$ é o "menor" $elemento\ de\ (A, \preccurlyeq)$
$\Leftrightarrow a$ é $o\ único\ elemento\ minimal$

n par $\Rightarrow$ n = 2k
n ímpar $\Rightarrow$ n = 2k + 1

Seja $(A, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado, dizemos que $(A, \preccurlyeq)$ é um RETICULADO se, e somente se, o conjunto formado por quaisquer dois elementos de A possui sup e inf. Ou seja:

$$(A, \preccurlyeq) \text{ é } um\ reticulado \iff (\forall\, x, y \in A)\ \exists \sup \{x, y\} \wedge\ \exists \inf \{x, y\}$$

Dados $(a, b \in A)$ se $a \preccurlyeq b$, entao inf {a,b} = a e sup {a,b} = b

Logo, se dois elementos estão relacionados, seu sup e seu inf sempre existem. Desse modo, para mostrar que um conjunto $(A, \preccurlyeq)$ é um reticulado, basta mostrar que cada par de elementos não comparáveis (não relacionados) possui sup e inf.

$$(\mathbb{P}(A), \subseteq) \text{ é } reticulado, onde \left(\forall\, X, Y \in \mathbb{P}(A)\right), \sup\{X, Y\} = X \cup Y\ e \inf\{X, Y\} = X \cap Y$$

$$(\mathbb{N}, |) \text{ é } reticulado, onde\ (\forall\, a, b \in \mathbb{N}), \sup\{a, b\} = MMC(a, b) e \inf\{a, b\} = MDC(a, b)$$

Dizemos que uma ordem total T é compatível com uma ordem parcial R se, e somente se, aTb sempre que aRb.

Lema: Seja $(A, \preccurlyeq)$ um conjunto parcialmente ordenado e finito, então A possui pelo menos um elemento minimal

Procedimento:

Dados $(A \neq \emptyset)$ e finito, $(A, \preccurlyeq)$ conjunto parcialmente ordenado

Tomamos a1=elemento minimal de A (existe pelo lema)

$(A - \{a1\}, \preccurlyeq)$ é um conjunto finito parcialmente ordenado

Se $(A - \{a1\}\ \neq \emptyset)$, existe, pelo lema, um elemento minimal de $(A - \{a1\})$.

Tomamos a2=elemento minimal de $(A - \{a1\})$

Somas e séries

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$$

$$a_t + a_{t+1} + a_{t+2} + \cdots + a_{t+r} = \sum_{i=t}^{t+r} a_i$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_0 \cdot r^i = \frac{a_0(r^{n+1} - 1)}{r - 1} = P.G.$$

Somas duplas

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} i \cdot j = \sum_{i=1}^{4} (i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{4} 6i$$

Troca de Índices

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)^2 = \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)^2$$

Propriedades das somas

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = 1 \cdot \sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Soma Telescópica

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

Dado um conjunto A e dada uma operação binária e interna $*$, dizemos que $(A,*)$ é um:

$$GRUPÓIDE \iff * \text{ é } fechada\ em\ A$$

$$SEMI-GRUPO \iff * \text{ é } fechada\ em\ A\ e\ \text{é}\ associativa$$

$$MONÓIDE \iff * \text{ é } fechada\ em\ A, \text{é}\ associativa\ e\ possui\ elemento\ neutro\ em\ A$$

$$GRUPO \iff * \text{ é } fechada\ em\ A, \text{é}\ associativa, possui\ elemento\ neutro\ em\ A\ e\ inverso\ em\ A$$

$$GRUPO\ ABELIANO\ ou\ COMUTATIVO \iff (A,*) \text{ é } um\ GRUPO\ e\ possui\ a\ propriedade\ comutativa$$

(sua tabela de operações é simétrica em relação à diagonal principal)

Princípio da Indução

$$\left[p(1) \wedge \left((\forall\, n \in \mathbb{N})\ p(n) \Rightarrow p(n+1)\right)\right] \Rightarrow (\forall\, n \in \mathbb{N})\ p(n)$$

Uma construção é definida indutivamente ou recursivamente se:

- A base de indução explica casos elementares
- O passo de indução determina como os demais casos são definidos em termos dos anteriores

Uma operação binária (domínio = dois conjuntos), interna (domínio = conjuntos iguais) e fechada (contradomínio = domínio) em um conjunto A é uma relação $R: A \times A \to A$

Dada uma operação $*$

$$* \text{ é } comutativa\ em\ A \iff (\forall\, a, b \in A)\ a * b = b * a$$

$$* \text{ é } associativa\ em\ A \iff (\forall\, a, b, c \in A)\ a * (b * c) = (a * b) * c$$

$$*\ possui\ elemento\ neutro\ em\ A \iff (\exists\ e \in A)(\forall\ a \in A)\ a * e = a = e * a$$

$$*\ possui\ inverso\ em\ A \iff (\forall\ a \in A)(\exists\ a' \in A)\ a * a' = e = a' * a$$

Proposições:

7.2.1: O elemento neutro de um grupo é único

7.2.2: Seja $(G,*)$ um grupo e $a \in G$, então o inverso de a é único

7.2.3: (Lei do Cancelamento) Seja $(G,*)$ um grupo e $a, x, y \in G$, então

$$a * x = a * y \Rightarrow x = y$$
$$x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

Se G é um conjunto finito, dizemos que $(G,*)$ é um grupo finito

Se $|G| = n$, dizemos que a ordem do grupo $(G,*)$ é n.

Pela lei do cancelamento, $a * b = d = a * c \Rightarrow b = c$. Logo, na tabela de operações de um grupo finito não pode haver elementos repetidos na mesma linha ou coluna. Além disso, em cada linha e coluna deve aparecer o elemento neutro, e onde este aparecer, temos o inverso do elemento.

Lista 10

1.Seja $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ uma álgebra de Boole:

a) $(\forall\, x, y \in \mathcal{B})\ x \wedge (x \vee y) = x$
b) $(\forall\, x, y \in \mathcal{B})\ x \vee (x \wedge y) = x$
c) $(\forall\, x, y \in \mathcal{B})\ x \vee y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$
d) $(\forall\, x, y \in \mathcal{B})\ x \vee y = 1 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 1$
e) $(\forall\, x, y \in \mathcal{B})\ \overline{(\bar{x} \vee \bar{y})} \vee \overline{(\bar{x} \vee y)} = x$

$x \wedge 1 = x$ (Elemento Neutro)
$x \vee 1 = 1$ (Elemento Absorvente)
$x \wedge 0 = 0$ (Elemento Absorvente)
$x \vee 0 = x$ (Elemento Neutro)

2.

a) $(\forall\, x, y \in \mathcal{B})\ x \wedge y = x \iff x \vee y = y$
b) $(\forall\, x, y, z \in \mathcal{B})\ (x \wedge y = x \wedge z) \wedge$
$(x \vee y = x \vee z) \Rightarrow y = z$