Lista de exercícios - Formulação Matemática de Problemas de PI

Formule os problemas abaixo como problemas de PI. Informe o número de variáveis e de restrições da sua formulação, bem como apresente uma breve explicação sobre o que elas representam. Use latex para editar a sua lista. Indique com F e D os 3 exercícios que você considerou mais fáceis e os 3 exercícios mais difíceis, respectivamente.
OBS: Os exercícios abaixo foram formulados pela Profa Luciana, retirados do material de aula em conjunto com o Prof. Marcus Ritt, ou propostos pelos seus alunos de atividade didática (Árton Dorneles e Fernando Stefanello).

Exercício 0.1
Uma empresa possui dois produtos P_1 e P_2. O seu departamento de marketing estuda a forma mais econômica de aumentar em 30% as vendas de cada um dos produtos. As alternativas são:

- Investir em um programa institucional com outras empresas do mesmo ramo. Esse programa deve proporcionar um aumento de 3% nas vendas de cada produto, para cada $ 1.000,00 investidos.
- Investir diretamente na divulgação de cada produto:
  - Cada $ 1.000,00 investidos em P1 retornam um aumento de 4% em sua venda.
  - Cada $ 1.000,00 investidos em P2 retornam um aumento de 10% em sua venda.

A empresa dispõe de $ 10.000,00 para esse empreendimento. Quanto deverá destinar a cada atividade? Construa o modelo do sistema descrito.
Resposta:
Variáveis:
x = valor investido no programa institucional em R$1.000,00.
y_1 = valor investido diretamente no P1 em R$1.000,00.
y_2 = valor investido diretamente no P2 em R$1.000,00.

$$
\begin{array}{ll}
min & x + y_1 + y_2 \\
s.a. & x + y_1 + y_2 \leq 10 \\
& 0,03x + 0,04y_1 \geq 0,3 \\
& 0,03x + 0,1y_2 \geq 0,3 \\
& x, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+
\end{array}
$$

Na verdade o problema é de PL.

Exercício 0.2
Resolva o problema de locação de facilidades capacitado (versão não capacitada vista em aula), ou seja, cada fábrica tem uma capacidade (c_j), cada cliente tem uma demanda d_i, cada link possui um custo de transporte (w_{ij}) de uma unidade do produto pelo link (i,j). Um cliente pode ser atendido por mais de uma fábrica. No entanto, considere que a demanda parcial que uma fábrica atende de um cliente é sempre uma quantia inteira. Uma fábrica tem um custo f_j para instalação e deve-se decidir quais fábricas instalar de forma que toda a demanda dos clientes seja atendida, sem extrapolar a capacidade das fábricas, e minimizando o custo total de instalação e transporte dos produtos.
Variáveis de decisão: $x_{ij} \in \mathbb{N}$ indica a quantidade da demanda do cliente i atendida pela fábrica em j.

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{min} & \sum_{1 \leq j \leq n} f_j y_j + \sum_{1 \leq i,j \leq n} w_{ij} x_{ij} & \\
\textbf{s.a} & \sum_{1 \leq j \leq n} x_{ij} = d_i, & 1 \leq i \leq n \text{(demanda de cada cliente atendida)} \\
& \sum_{1 \leq i \leq n} x_{ij} \leq c_j, & 1 \leq j \leq n \text{(capacidade de cada fábrica atendida)} \\
& x_{ij} \leq K y_j, & 1 \leq i, j \leq n \text{(só fábricas existentes atendem)} \\
& K = \sum_{i=1}^{n} d_i & \text{(define valor de k)} \\
& x_{ij} \in Z^+, 1 \leq i, j \leq n & \\
& y_j \in B, 1 \leq j \leq n. &
\end{array}
$$

Exercício 0.3
Os projetistas de móveis fazem os projetos em tempo de atendimento ao cliente. Uma dada loja possui m projetos diários, sendo que t_{ij} representa o tempo em minutos estimado que o projetista i demora para executar o projeto j, para $i = 1, ...n$ e $j = 1, ..., m$. Observe que os projetistas gastam tempo diferenciando dependendo do projeto, ou seja, dois projetistas diferentes têm tempos estimados diferentes de execução de um mesmo projeto. Ainda, um projetista não pode gastar mais do que 6h diárias projetando móveis. Ainda, infelizmente, alguns projetistas deverão ser despedidos. Dos n projetistas atualmente disponíveis, apenas k permanecerão no emprego. O dono da loja de móveis quer saber qual projeto atribuir a qual projetista, de forma que o tempo total gasto em projeto (e portanto de atendimento a cliente) seja minimizado, além do que quer saber quais projetistas serão mantidos no emprego. E você ainda deve prever a seguinte situação: dois projetistas recentemente brigaram, e o clima na loja está insustentável. Então o dono da loja resolveu que um deles, ou os dois, serão despedidos. Para facilitar a resolução do problema, eles estão elencados como o primeiro ($i = 1$) e o segundo ($i = 2$) na entrada de dados.
Considere que cada projeto deva ser integralmente resolvido por apenas um projetista, e que todos os projetos sejam atendidos.

$$
\begin{aligned}
\textbf{min} \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} * t_{ij} \\
\textbf{s.a} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} * t_{ij} \leq 6 * 60 \quad i = 1, ..., m \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, ..., n \\
& \sum_{i=1}^{n} y_i = k \\
& x_{ij} \leq y_i \quad j = 1, ..., n, j = 1, ..., m \\
& x_{ij} \in B \quad \forall i, j
\end{aligned}
$$

A variável x_{ij} indica se o projeto i foi feito pelo projetista j. O objetivo é minimizar a soma de tempo gasta em projeto. A primeira restrição **??** assegura que a disponibilidade de tempo de cada projetista seja atendida, enquanto a segunda restrição assegura que todos os projetos sejam executados. O sistema possui $m * n$ variáveis e $m + n$ restrições, além das $m * n$ restrições triviais.

Exercício 0.4
Um frota de m caminhões é usada para abastecer n clientes a partir de um único depósito. Cada cliente deve ser visitado uma vez. Cada caminhão faz no máximo uma viagem, visitando clientes, e volta ao depósito. O tempo para o caminhão k ir do cliente ao i ao cliente j é c_{ijk}. O tempo máximo de uma viagem do caminhão k é L_k. Formule um modelo para encontrar uma solução viável.
Resposta:
Variáveis:

$$
x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se o caminhão } k \text{ visitar o cliente } i \text{ depois do cliente } j. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij}^k \\
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}^k x_{ij}^k \leq L_k, \forall k = 1, ..., m \\
& \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = 1, \forall i = 1, ..., n \\
& x_{ij}^k \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

N° de variáveis: n*m*k
N° de restrições: m+n

Exercício 0.5
Há um conjunto de m mochilas, cada qual com uma capacidade b_j em peso, e uma lista de n objetos. Sabendo-se que existe d_i unidades de cada objeto i, que cada um deles custa c_i e pesa w_i unidades, formule um modelo que maximize a soma total do valor dos objetos a serem alocados às mochilas.
Resposta:
Variáveis:
x_{ij}= número de itens do tipo i na mochila j

$$
\begin{aligned}
max \quad & \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} c_i x_{ij} \\
& \sum_{i=1}^{n} w_i x_{ij} \leq b_j, \forall j = 1, ..., m \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq d_i, \forall i = 1, ..., n \\
& x_{ij}^k \geq 0 \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}
$$

N° de variáveis: mn
N° de restrições: mn

Exercício 0.6
Formular os modelo de Programação Inteira para determinar o máximo número de rainhas que poderão ser colocados em um tabuleiro do jogo de xadrez de tamanho nxn (assumir $n \geq 3$), de modo que nenhuma rainha seja ameaçada pelas demais.
Resposta:
Variáveis:

$$
x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a uma rainha é colocada na posição } i, j \text{ do tabuleiro.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
max \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \forall j = 1, ..., n \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1, \forall i = 1, ..., n \\
& \sum_{i=1}^{k} x_{k-i+1,i} \leq 1, \forall k = 2, ..., n \\
& \sum_{i=k}^{n} x_{n-i+k,i} \leq 1, \forall k = 2, ..., n-1 \\
& \sum_{i=1}^{k} x_{n+i-k,i} \leq 1, \forall k = 2, ..., n \\
& \sum_{i=k}^{n} x_{i-k+1,i} \leq 1, \forall k = 2, ..., n-1 \\
& x_{ij} \in \{0, 1\}.
\end{aligned}
$$

N° de variáveis: n^2
N° de restrições: 6(n-1)

Exercício 0.7
No problema de empacotamento com restrições de conflito (bin packing problem with conflicts - BPPC), cada item $i = \{1, ..., n\}$ possui um peso não negativo w_i. Tais itens devem ser colocados em caixas idênticas de capacidade C. Além disso, temos um grafo G=(V,E) onde E é um conjunto de arestas tal que se $(i,j) \in E$ então os itens i e j estão em conflito e não poddem ser colocados na mesma caixa. Existem no máximo m caixas disponíveis. O objetivo do problema é minimizar a quantidade de caixas utilizadas para empacotar todos os itens.
Resposta:
Variáveis:

$$x_{ih} = \begin{cases} 1, & \text{se o item } i \text{ é colocado na caixa } h. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$y_h = \begin{cases} 1, & \text{se a caixa } h \text{ é usada.} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} min \quad & \sum_{h=1}^{n} y_h \\ & \sum_{h=1}^{n} x_{ih} = 1, \forall i = 1, ..., n \\ & \sum_{i=1}^{n} w_i x_{ih} \le C y_h, \forall h = 1, ..., m \\ & x_{ih} + x_{jh} \le y_h, \; (i,j) \in E, h = 1, ..., m \\ & y_h \in \{0,1\}, h = 1, ..., m \\ & x_{ih} \in \{0,1\}, i = 1, ..., n, h = 1, ..., m \end{aligned}$$

Nº de variáveis:$m(n+1)$
Nº de Restrições: $n + m(|E| + 1)$

Exercício 0.8
O problema da árvore geradora mínima
Problema: Árvore Geradora Mínima
Entrada: Um grafo não-direcionado pesado $G = (V, A, w)$ com $|V| = n$, $|A| = m$
Solução: Árvore T que interliga todos os nós de cada componente.
Objetivo: Minimizar o custo de T.

Resposta:

- $x_{i,j}$: 1 se o arco (i,j) está na solução e 0 caso contrário.

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & \sum_{1 \le i \le N} \sum_{1 \le j \le N} x_{ij} c_{ij} \\ \textbf{s.a} \quad & \sum_{1 \le i \le N} x_{ij} \ge 1 \quad \forall i \in V \quad \{\text{todo nó deve ser conectado por um arco da solução}\} \\ & \sum_{1 \le i \le N} \sum_{1 \le j \le N} x_{ij} = 2(n-1) \quad \forall i \ne j \in V \quad \{\text{garante que os arcos selecionados formem uma árvore geradora}\} \\ & x_{ij} \in B \quad \forall i, j \in V \end{aligned}$$

Exercício 0.9
Problema das p-medianas. São dados n locais potenciais para instalação de facilidades, m clientes para serem atendidos e um valor não negativo C_{ij} associado ao custo do cliente i ser atendido pela facilidade instalada no local j. O problema das p-medianas pergunta onde as p facilidades devem ser instaladas para minimizar o custo total de atendimento de todos os clientes.
Resposta:
Problema: Problema das p-medianas

Entrada: N, M, $c_{ij} \forall i, j \in N$
Solução: Em que locais instalar cada facilidade
Objetivo: Minimizar o custo de atendimento dos clientes
Variáveis do Modelo:

- $x_{i,j}$: 1 se o cliente i é atendido pelo local j e 0 caso contrário
- y_j: 1 se a faciliade é instalada no local j e 0 caso contrário

$$
\begin{aligned}
\textbf{min} \quad & \sum_{1 \leq i \leq N} \sum_{1 \leq j \leq M} x_{ij} c_{ij} \\
\textbf{s.a} \quad & \sum_{1 \leq j \leq N} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in M \quad \{\text{todo cliente é atendido, e é atendido por apenas um local}\} \\
& \sum_{1 \leq j \leq N} y_j = p \quad \{\text{garante que p facilidades serão instaladas}\} \\
& 0 \leq x_{ij} \leq y_j \leq 1 \quad \forall i, j \\
& x_{ij}, y_j \in B \quad \forall i, j \in V
\end{aligned}
$$

N° de variáveis:$n(m+1)$
N° de Restrições: $mn + m + 1$

Exercício 0.10
Problema de *cutting-stock*: Uma fábrica dispõe de barras de comprimento L que são particionadas para atender suas demandas. Tal fábrica deve atender um pedido de N_i barras de comprimento l_i, sabendo que $l_i \leq L$, ou seja, qualquer barra do pedido é menor ou de mesmo comprimento que a barra fabricada. O problema consiste em satisfazer o pedido minimizando o número total de barras de tamanho L utilizadas.
Resposta:

Problema: Cutting-Stock
Instância: l_i (comprimento da barra i), N_i (número de barras de comprimento l_i solicitadas), L_k (comprimento da barra k), C_j (custo da barra L_k particionada com o padrão de corte j), r (número de barras disponíveis para corte), m (número de tamanhos de barras), n (número de padrões de cortes disponíveis)
Solução: padrões de corte, e número de vezes que cada um foi usado, para produzir as N_i barras
Objetivo: minimizar o custo total da produção do pedido
Variáveis do Modelo:

- $y_{i,j}$: 1 se a barra L_k for cortada pelo padrão de corte j; 0 caso contrário
- $A_{i,j}$: número de barras de comprimento l_i produzidas pelo j-ésimo padrão de corte
- x_j: número de vezes que o j-ésimo padrão de corte é utilizado

$$
\begin{aligned}
\textbf{min} \quad & \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n} y_{kj} c_j \\
\textbf{s.a} \quad & \sum_{1 \leq i \leq n} A_{ij} x_j \geq B_i \quad \forall i \in M \quad \{\text{o número de barras } N_i \text{ para cada tamanho } l_i \text{ do pedido será atendido}\} \\
& \sum_{1 \leq j \leq n} y_{kj} \leq 1 \quad \forall k \in R \\
& y_{ij} \in B \quad \forall i, j \in V \\
& A_{ij}, x_j \in Z^+ \quad \forall i, j \in V
\end{aligned}
$$

A restrição (2) garante que ou o corte da barra L_k não será necessário, ou a barra L_k será particionada por apenas um padrão de corte.

Exercício 0.11
Enuncie um problema de criação sua, que você considere difícil, e apresente a formulação linear inteira para o mesmo.

Exercício 0.12
Encontre em livros ou Internet um problema de PI que você achou interessante. Coloque aqui o problema, bem como sua formulação matemática. Não esqueça de informar a fonte (link ou referência)!