Mais sobre Problemas Indecidíveis

Teoria da Computação

INF05501

Relembrando

- Vimos que os problemas da Auto-Aplicação, da Parada, da Palavra Vazia, da Totalidade e da Equivalência são indecidíveis
- Podemos, portanto, usar tais problemas, através do Princípio da Redução para sabermos a solucionabilidade de outros problemas
- Outro problema muito famoso é o Problema da Correspondência de Post

Problema da Correspondência de Post

Dados dois grupos de palavras G_1 e G_2 sobre um alfabeto finito Σ, onde cada palavra de cada grupo é identificada por um índice numérico, descobrir se é possível concatenar palavras de G_1 para formar uma palavra p tal que, concatenando palavras de G_2 de índices correspondentes, na mesma ordem, obtenha-se a mesma palavra p

Problema da Correspondência de Post (cont.)

	1	2	3	4	5
G_1	abb	a	bab	baba	aba
G_2	bbab	aa	ab	aa	a

Aceita: 2,1,1,4,1,5 $\rightarrow$ aabbabbbabaabbaba

Sistema de Post

- Em descrições mais formais, o Problema da Correspondência é descrito por um Sistema de Post:

  Um Sistema de Post S é definido sobre um alfabeto Σ como um conjunto finito e não-vazio de pares ordenados de palavras sobre Σ

- Portanto, para o exemplo anterior, o Sistema de Post correspondente seria:

  $S = \{(abb, bbab), (a, aa), (bab, ab), (baba, aa), (aba, a)\}$

- **Soluções** para S são descritas por uma **sequência de índices que indicam a ordem dos pares no sistema**, assim como apresentado anteriormente

Exemplo 1

Dado o Sistema de Post:

$S_1 = \{(b, bbb), (babbb, ba), (ba, a)\}$

Existe uma solução?

Exemplo 1

Dado o Sistema de Post:

$S_1 = \{(b, bbb), (babbb, ba), (ba, a)\}$

Existe uma solução?

Sim: 2, 1, 1, 3, de forma que $babbbbbba = babbbbbba$

Exemplo 2

Dado o Sistema de Post:

$S_2 = \{(ab, abb), (b, ba), (b, bb)\}$

Existe uma solução?

Exemplo 2

Dado o Sistema de Post:

$S_2 = \{(ab, abb), (b, ba), (b, bb)\}$

Existe uma solução?

Não, pois, para qualquer par $(x, y) \in S_2$**,** $|x| < |y|$

Exemplo 3

Dado o Sistema de Post:

$S_3 = \{(a, ba), (bba, aaa), (aab, b), (ab, bba)\}$

Existe uma solução?

Exemplo 3

Dado o Sistema de Post:

$S_3 = \{(a, ba), (bba, aaa), (aab, b), (ab, bba)\}$

Existe uma solução?

Não, pois, para qualquer par $(x, y) \in S_3$, o primeiro símbolo de x é diferente do primeiro símbolo de y

Teorema

Problema da Correspondência de Post é Não-Solucionável

Teorema

Problema da Correspondência de Post é Não-Solucionável

Logo, a linguagem que descreve tal problema deve ser não recursiva

Teorema

Problema da Correspondência de Post é Não-Solucionável

Logo, a linguagem que descreve tal problema deve ser não recursiva

Esta linguagem pode ser descrita da seguinte forma:

$L_{CP} = \{s \mid s = codigo(S)$ e S é um Sistema de Post com pelo menos uma solução$\}$

Prova do Teorema

Dadas uma Máquina de Post M qualquer sobre um alfabeto Σ e uma palavra $w \in \Sigma^*$, constroi-se um **Sistema Normal de Post** baseado na sequência de comandos executados por M para a entrada w, tal que o **Sistema Normal de Post tem solução sss M para para a entrada w**

Prova do Teorema

Dadas uma Máquina de Post M qualquer sobre um alfabeto Σ e uma palavra $w \in \Sigma^*$, constroi-se um **Sistema Normal de Post** baseado na sequência de comandos executados por M para a entrada w, tal que o Sistema Normal de Post tem solução sss M para para a entrada w

Portanto, o Problema da Parada pode ser reduzido ao Problema da Correspondência de Post

Prova do Teorema (cont.)

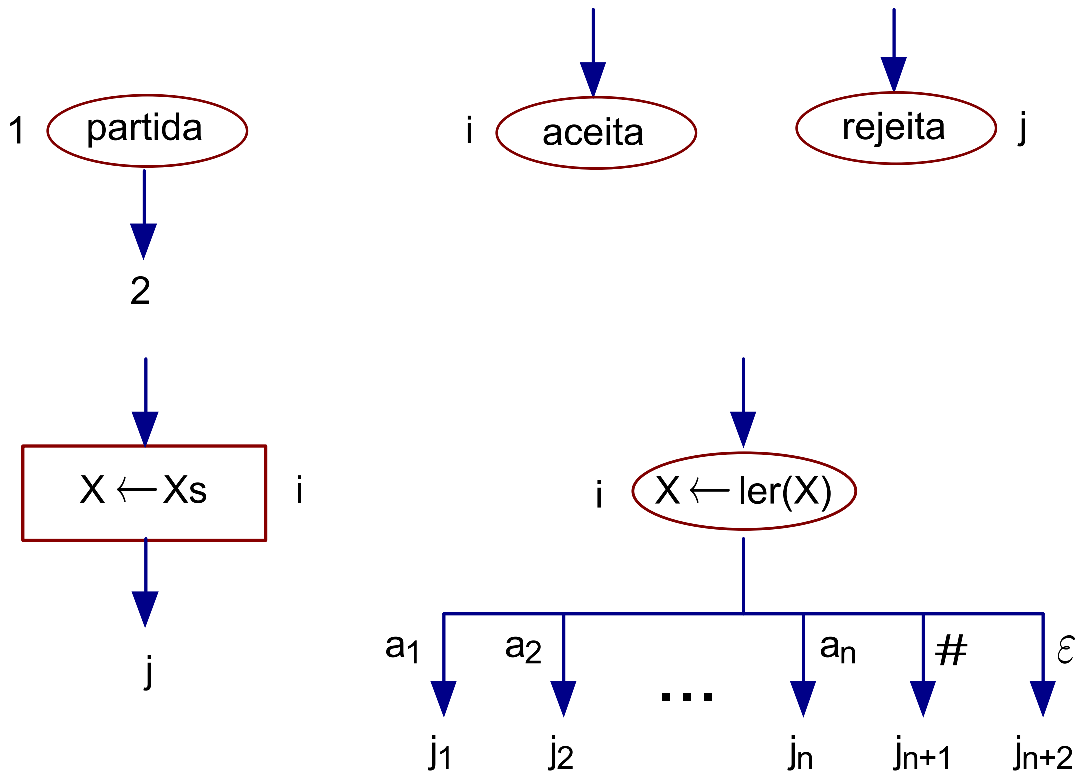
Prova se baseia na construção do Sistema Normal de Post através da enumeração dos comandos da máquina M

Para **cada ação sobre a variável** X, gera-se **um par do Sistema de Post**

Para isto, supõe-se que:

- $w \in \Sigma^*$ é uma palavra qualquer onde $w = a_1 a_2 ... a_n$
- Valor inicial de X é w
- Componentes elementares do diagrama de fluxos de M são enumerados sobre $\{1, 2, ..., m\}$

Prova do Teorema (cont.)



Prova do Teorema (cont.)

Partida $\Rightarrow$ Determina o par $(1, 1\ a_1\ a_2\ ...\ a_n\ 2)$

Desvio ou Teste $\Rightarrow$ Determina os seguintes pares:

$$(i\ a_1, j_1), (i\ a_2, j_2), ..., (i\ a_n, j_n), (i\ \#, j_{n+1}), (i\ \varepsilon, j_{n+2})$$

Atribuição $\Rightarrow$ Determina o seguinte par: $(i, s\ j)$

Parada $\Rightarrow$ Determina o seguinte par: (i, ε)

Símbolo $\Rightarrow$ Cada símbolo $s \in \Sigma \cup \{\#\}$ determina um par (s, s)

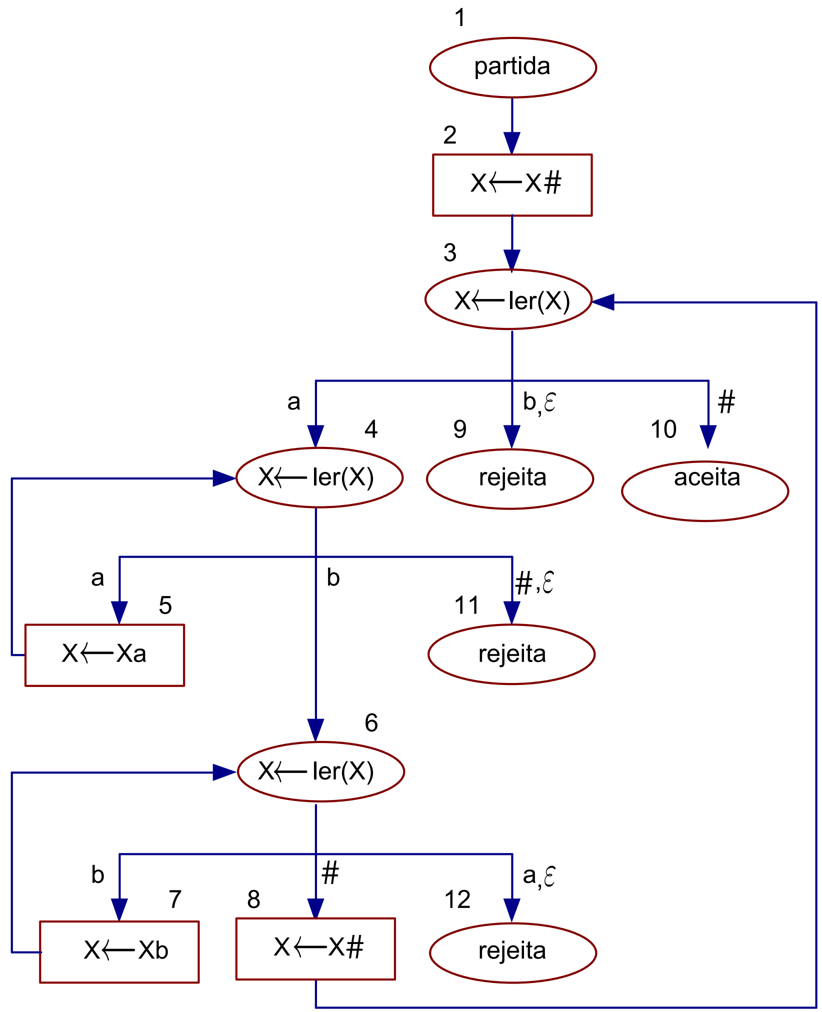
Prova do Teorema (cont.)

- Note que, no par correspondente à **partida**, a segunda componente tem um número de instrução a mais que a primeira
- Esta diferença só é compensada no par correspondente à instrução de **aceita/rejeita**
- Assim, o Sistema Normal de Post somente tem solução se a máquina parar para a entrada w

Prova do Teorema (cont.)

- Portanto, é possível reduzir-se o Problema da Parada ao Problema da Correspondência de Post
- Logo, o Problema da Correspondência de Post é não-solucionável

Exemplo: Post-Duplo-Bal


1
partida
2
X←X#
3
X←ler(X)
a
b,ε
#
4
9
10
X←ler(X)
rejeita
aceita
a
b
#,ε
5
11
X←Xa
rejeita
6
X←ler(X)
b
#
a,ε
7
8
12
X←Xb
X←X#
rejeita

Exemplo: Post-Duplo-Bal (cont.)

Pares definidos para $w = ab$:

$1 : (1, 1ab2)$	$9 : (4\#, 11)$	$17 : (8, \#3)$
$2 : (2, \#3)$	$10 : (4\varepsilon, 11)$	$18 : (9, \varepsilon)$
$3 : (3a, 4)$	$11 : (5, a4)$	$19 : (10, \varepsilon)$
$4 : (3b, 9)$	$12 : (6a, 12)$	$20 : (11, \varepsilon)$
$5 : (3\#, 10)$	$13 : (6b, 7)$	$21 : (12, \varepsilon)$
$6 : (3\varepsilon, 9)$	$14 : (6\#, 8)$	$22 : (a, a)$
$7 : (4a, 5)$	$15 : (6\varepsilon, 12)$	$23 : (b, b)$
$8 : (4b, 6)$	$16 : (7, b6)$	$24 : (\#, \#)$

Exemplo: Post-Duplo-Bal (cont.)

Processamento da Máquina de Post para $w = ab$ define a sequência de pares:

$1, 22, 23, 2, 22, 23, 24, 3, 23, 24, 8, 24, 14, 17, 24, 5, 19$

a qual corresponde a:

$1ab2\ a\ b\ \#3\ a\ b\ \#\ 4\ b\ \#\ 6\ \#\ 8\ \#3\ \#\ 10\ \varepsilon$

onde os símbolos entre cada dois números de instruções representa a evolução do conteúdo da variável X

Comentários sobre Problemas Indecidíveis

- O Problema da Correspondência de Post, como vimos, é indecidível
- A razão intuitiva é que o **número de palavras que precisam ser testadas** para se encontrar uma palavra composta comum é **infinito**
- No entanto, se **retiramos as restrições sobre a escolha das palavras** para compor a palavra final (correspondência de índice, ordem e número de palavras por grupo)...

Comentários sobre Problemas Indecidíveis

- O Problema da Correspondência de Post, como vimos, é indecidível
- A razão intuitiva é que o **número de palavras que precisam ser testadas** para se encontrar uma palavra composta comum é **infinito**
- No entanto, se **retiramos as restrições sobre a escolha das palavras** para compor a palavra final (correspondência de índice, ordem e número de palavras por grupo)...
  - ... o problema se torna decidível!!
  - Questão agora é só encontrar quaisquer palavras de G_1 que possam ser concatenadas para corresponder à concatenação de quaisquer palavras de G_2

Comentários sobre Problemas Indecidíveis (cont.)

- Problemas algorítmicos requerem a definição de um **conjunto de entradas válidas** (linguagem)
- Se este **conjunto for finito**, então o problema sempre tem solução
- Por exemplo, pode-se construir uma tabela com todas as entradas possíveis e testar-se cada uma delas, marcando na tabela com um “sim” ou “não”

Comentários sobre Problemas Indecidíveis (cont.)

- Portanto, **indecidibilidade** tem relação com um **conjunto infinito de possíveis entradas**
- Neste ponto, é importante notar que a ideia de que a **indecidibilidade** é uma consequência da **ausência de limitações** é, entretanto, **incorreta**
- O problema da correspondência de Post demonstra que, em certos casos, o relaxamento de restrições torna o problema decidível

Outros Problemas Indecidíveis Clássicos

- Problema da Equivalência Sintática
  - Dadas as gramáticas G e G' que descrevem as sintaxes das linguagens L e L', respectivamente, decidir se as duas gramáticas são equivalentes (i.e., se $L = L'$)
- Problema da Verificação
  - Dados a descrição de um problema algorítmico P e o texto de um algoritmo A, decidir se A resolve P