Inteligência Artificial

Lógica Fuzzy
Sistemas Fuzzy

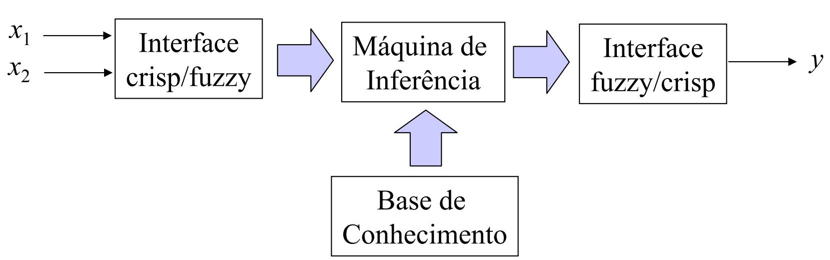
Prof. Paulo Martins Engel

Paradigmas de Computação

- Sistemas baseados em inferência nebulosa (*fuzzy*): estende os SBC incorporando naturalmente conceitos incertos e imprecisos.
- O conhecimento é representado por conceitos lingüísticos mais flexíveis, similares aos da linguagem natural.
- A solução é mais flexível que em um SBC.
- Incorpora mais facilmente a variabilidade do domínio.
- O conhecimento necessita ser extraído de especialistas no domínio da aplicação.

Sistema de Inferência Fuzzy

- Um Sistema de Inferência Fuzzy (SIF) é um tipo especial de Sistema Baseado em Conhecimento (SBC).
- A Base de Conhecimento é composta de um conjunto de regras fuzzy.
- A Máquina de Inferência implementa um mecanismo de inferência fuzzy.
- Em geral, as entradas são valores medidos de variáveis de entrada e a saída é um valor de uma variável real.



Conceitos sobre a Lógica Fuzzy

- A origem da lógica fuzzy (LF) ou *lógica nebulosa*, remonta a 1965 com a publicação do artigo “Fuzzy Sets” do Prof. Lotfi Zadeh, da University of California, Berkeley.
- Zadeh reconheceu que em sistemas complexos *precisão* e *significado* se tornam incompatíveis, abrindo espaço para as noções de *vagueza*, *imprecisão* e *incerteza* na área de controle.
- A *teoria dos conjuntos fuzzy* é uma extensão da teoria dos conjuntos (*crisp*) convencional.
- A *lógica fuzzy* é uma extensão da lógica binária (booleana).
- A *medida fuzzy* é uma extensão da medida de probabilidade.

Representando conhecimento impreciso

- Na LF, o conhecimento é expresso através de uma representação simbólica para uma expressão em linguagem natural, envolvendo variáveis lingüísticas.
- Estas expressões formam proposições que podem ser avaliadas segundo o conhecimento de um especialista, e usadas para efetuar ações de controle.
- Por exemplo, a expressão "*a água está muito fria*" é uma proposição que pode receber um valor correspondente ao grau de sua validade, estimado por um determinado avaliador.
- Este grau representa o valor-verdade da proposição, para este avaliador e é chamado de grau de pertinência.
- Na LF, os graus de pertinência podem assumir um valor no intervalo [0, 1].
- O valor 0, corresponde ao valor lógico "*falso*"; todos os outros valores correspondem a diferentes graus de "*verdadeiro*", sendo 1 o grau máximo, expressando a idéia de "*certamente verdadeiro*".
- A LF difere, portanto, da lógica booleana, por ser uma lógica multivalorada, com valores-verdade contínuos.

Conjuntos fuzzy

- Os conjuntos fuzzy expressam o *significado* dos valores lingüísticos relacionados a uma variável lingüística.
- Uma variável lingüística, por exemplo, *temperatura*, pode estar associada a um conjunto de valores lingüísticos, como *muito frio*, *frio*, *morna*, *quente*, *muito quente*.
- Cada valor lingüístico está associado a um conjunto fuzzy, que expressa o grau de pertinência (valor-verdade) correspondente de um determinado valor de temperatura, p. ex. em ºC.
- Os conjuntos fuzzy são utilizados para quantificar os graus de incerteza correspondentes à avaliação de um determinado conceito (instância).
- Os valores lingüísticos correspondem a predicados imprecisos, por exemplo:

  muito_frio (x)

  jovem (x)

  bem_mais_alto_que (x,y)

Conjuntos Fuzzy (cont.)

- Cada predicado impreciso de uma variável define um conjunto fuzzy de objetos.
- Os elementos que pertencem ao conjunto fuzzy podem ter graus de pertinência no intervalo (0,1].
- Os elementos com grau de pertinência nulo, não pertencem ao conjunto fuzzy.
- No exemplo do valor lingüístico *muito frio* associado à variável *temperatura*, os objetos do universo são os valores de temperatura em ºC.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ,15, → grau de certeza 1

16, 17, 18, 19, 20 → grau de certeza 0.5

21, 22, 23, 24 → grau de certeza 0.2

25, 26, 27, 28, …., 100 → grau de certeza 0

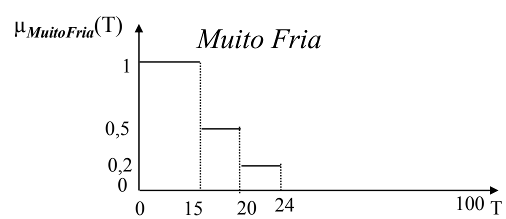
Exemplo de Conjunto Fuzzy

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 ,15, → grau de certeza 1

16, 17, 18, 19, 20 → grau de certeza 0.5

21, 22, 23, 24 → grau de certeza 0.2

25, 26, 27, 28, …., 100 → grau de certeza 0



Funções de Pertinência

- É uma extensão do conceito de função característica de conjuntos crisp.
- O valor desta função expressa o grau de pertinência do objeto (variável) ao conjunto fuzzy correspondente.
- $\mu_i(x)$ indica a função de pertinência relativa ao conjunto fuzzy i, sendo x a variável correspondente do universo de discurso.

$\mu_{Jovem}(Maria) = 0.7$ "*Maria* pertence ao conjunto fuzzy *Jovem*, com grau de pertinência 0.7 "

$\mu_{Fria}(21°C) = 0.5$ "A temperatura de 21°C é *Fria* com grau de pertinência 0.5"

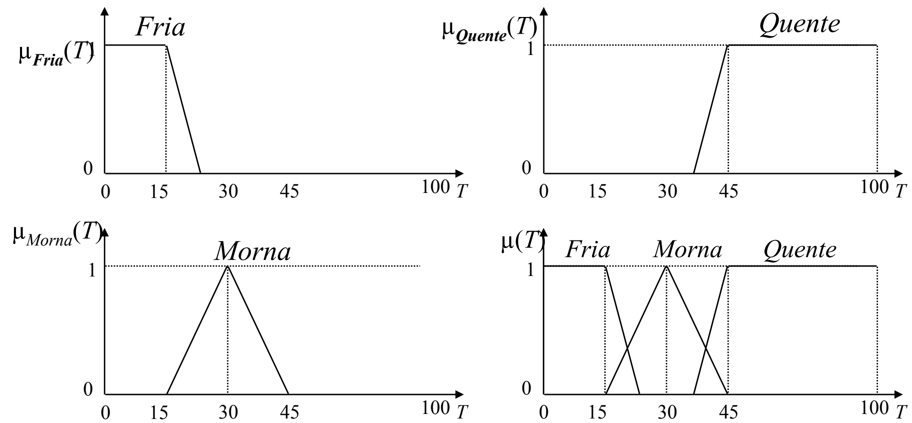
ou ainda: "21°C pertence ao conjunto fuzzy *Fria* com grau de pertinência 0.5"

$\mu_{bem\_mais\_alto\_que}(Antonio, José) = 0.3$ "*Antonio* é bem mais alto que *José* com grau de pertinência 0.3"

ou ainda: "(*Antonio*, *José*) pertence à relação fuzzy *bem_mais_alto_que* com grau de pertinência 0.3"

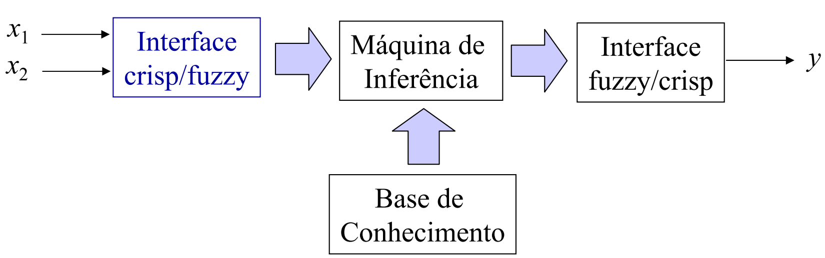
Exemplo de Conjuntos Fuzzy representados por funções de pertinência

- Variável Lingüística: *Temperatura*
- Termos lingüísticos: *Fria*, *Morna*, *Quente*
- Conjuntos Fuzzy: $\mu_{Fria}(T)$, $\mu_{Morna}(T)$, $\mu_{Quente}(T)$



Interface crisp/fuzzy

- A interface que transforma valores crisp em conjuntos fuzzy aplica a operação *fuzzificação*.
- O resultado são conjuntos fuzzy unitários: *singletons*



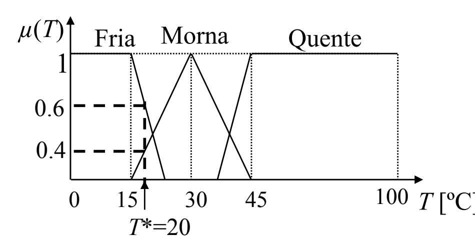
Operação de fuzzificação: conjunto fuzzy singleton

- Dado um valor real do universo de discurso (instância), queremos encontrar a sua representação dentro da estrutura fuzzy correspondente.
- Equivale a formar um conjunto fuzzy correspondente a este único elemento do universo de discurso com o seu grau de pertinência correspondente ao valor lingüístico (conjunto fuzzy original).
- Este conjunto fuzzy de um único elemento é chamado de *singleton*.

Ex.: a fuzzificação da instância T^* =20ºC gera os graus de pertinência:

$\mu_{\mathbf{Fria}}(T^*) = 0{,}6$, $\mu_{\mathbf{Morna}}(T^*) = 0{,}4$, $\mu_{\mathbf{Quente}}(T^*) = 0$

e os singletons correspondentes: $A^* = 0{,}6/20$; $B^* = 0{,}4/20$; $C^* = 0/20$



Operações com conjuntos fuzzy

COMPLEMENTO

É especificada por uma função $c : [0, 1] \to [0, 1]$

$$\overline{A} \therefore \mu_{\overline{A}}(x) = c(\mu(x))$$

A função retorna o grau de pertinência de x ao conjunto complemento.

Corresponde à noção lógica de Negação: "Não A"

Complemento standard $c(a) = 1 - a$

INTERSEÇÃO

Especificada por uma função i, norma triangular T $i : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$

$$A \cap B \therefore \mu_{A \cap B}(x) = i(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

A função retorna o grau de pertinência de x no conjunto interseção.

Corresponde à noção E lógico: "A e B"

Mínimo:

min (a, b) ou $a \wedge b$ (menos pessimista)

União Fuzzy

Especificada por uma função u, co-norma triangular : norma S

$$u : [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$$

$$A \cup B \therefore \mu_{A \cup B}(x) = u(\mu_A(x), \mu_B(x))$$

A função retorna o grau de pertinência de x no conjunto união.

Corresponde à noção OU lógico: "A ou B"

Máximo:

max (a, b) ou $a \vee b$ (menos otimista)

Relações Fuzzy (RF)

- Um predicado impreciso de mais de uma variável representa uma relação fuzzy: bem_mais_alto_que(x,y) : "x é bem mais alto que y"
- Uma relação fuzzy R entre os conjuntos crisp $X_1, X_2, \ldots, X_n$ é um subconjunto do produto cartesiano (PC) $\times_{i \in \mathbf{N}_n} X_i$, representada por $R(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, caracterizada por uma função de pertinência μ_R, tal que

$$\mu_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to [0, 1]$$

- Uma RF é um conjunto de tuplas, cada uma tendo um grau de pertinência entre 0 e 1.
- Uma forma conveniente de se representar uma RF é através de uma matriz, a *Matriz Fuzzy*.

Matriz Fuzzy

- Matriz da Relação Fuzzy: representa os graus de pertinência de todas as tuplas do universo frente à relação como uma matriz.
- Exemplo: considere a relação fuzzy $R(x,y)$: "x é bem maior que y"
- Universo: {Antonio, Maria, José, Carla} e alturas A(*Antonio*) = 185 ; A(*Maria*) = 168; A(*José*) = 178; A(*Carla*) = 165;

$R(x,y) =$

	A	M	J	C
A	0	0.7	0.3	0.8
M	0	0	0	0.1
J	0	0.5	0	0.6
C	0	0	0	0

Neste exemplo, a matriz fuzzy (MF) equivale à enumeração:

$R(x,y)$ = 0,7/(Antonio, Maria) + 0,3/(Antonio, José) + 0.8/(Antonio, Carla) + 0,1/(Maria, Carla) + 0,5/(José, Maria) + 0,6/(José, Carla)

Operações com Relações Fuzzy

- Como uma relação fuzzy R de X para Y é um conjunto fuzzy em $X \times Y$, as funções para conjuntos fuzzy podem ser utilizadas nas operações de relações fuzzy.
- Dessa forma podemos estender todas as operações de CF para as RF.
- Considere que R e S sejam duas relações fuzzy em $X \times Y$ e que c, u, e i, sejam as funções definidas para as respectivas operações com conj. fuzzy.
- Então, nós podemos definir as operações básicas com relações fuzzy como:

Complemento: $\bar{R} \therefore \mu_{\bar{R}}(x,y) = c(\mu_R(x,y))$

União: $R \cup S \therefore \mu_{R \cup S}(x,y) = u(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y))$

Interseção: $R \cap S \therefore \mu_{R \cap S}(x,y) = i(\mu_R(x,y), \mu_S(x,y))$

- Além dessas, a operação de composição de um conjunto fuzzy com uma relação fuzzy é a base teórica para os mecanismos inferência fuzzy.

Composição de um conjunto com uma relação fuzzy

- A combinação de um conjunto fuzzy A, definido em X, com uma relação R definida em $X \times Y$, com a ajuda da extensão cilíndrica e da projeção é chamada *composição*, representada por o, e gera um conjunto fuzzy B, definido em Y.
- Na sua forma mais comum, conhecida como *composição max-min* de A e R, AoR, é calculada por:

$$\mu_B(y) = \max_x \min(\mu_A(x), \mu_R(x, y))$$

- Por esta definição, o conjunto fuzzy B pode ser calculado pelo produto do vetor (linha) A pela matriz R., substituindo a multiplicação pelo mínimo e a soma pelo máximo.

Exemplo da composição de um conjunto com uma relação

- Dados o conjunto fuzzy A e a relação R abaixo, calcule o conjunto fuzzy B originado da operação composição $B = AoR$

$X = \{x_1, x_2, x_3\}$; $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$

$$A(x) = 1/x_1 + 0.6/x_2 + 0.2/x_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$R(x, y) = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Utilize a composição max-min

$$\mu_B(y) = \max_x \min(\mu_A(x), \mu_R(x, y))$$

Exemplo de Composição

$$B(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} o \begin{bmatrix} 0.8 & 1 & 0.7 & 0.1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

min(1,0.8) = 0.8	min(1,1) = 1	min(1,0.7) = 0.7	min(1,0.1) = 0.1
min(0.6,0.6) = 0.6	min(0.6,0.6) = 0.6	min(0.6,0.6) = 0.6	min(0.6,0.1) = 0.1
min(0.2,0.2) = 0.2	min(0.2,0.2) = 0.2	min(0.2,0.2) = 0.2	min(0.2,0.1) = 0.1
(Máximo em x) 0.8	1	0.7	0.1

$$B(y) = 0.8/y_1 + 1/y_2 + 0.7/y_3 + 0.1/y_4$$

Regra de Inferência Composicional

- Regra de inferência composicional de Zadeh:

Se R é uma relação fuzzy de X para Y e A é um subconjunto fuzzy de X, então o subconjunto B de Y que é induzido por A é dado pela composição de R e A; i.e

$$B = A \text{ o } R$$

onde A desempenha o papel de uma relação unária.

Sendo S_1 e S_2 nomes simbólicos para objetos e P e Q propriedades de objetos, então a forma simbólica da inferência composicional é:

S_1 é P, $S_1\ R\ S_2$, $\therefore\ S_2$ é Q	$\longleftrightarrow$	Maria é *alta*, Maria é *um pouco maior* que Carla, $\therefore$ Carla é *mais ou menos alta*

Exemplo da regra de inferência composicional

- Dado que o valor lingüístico *alto* seja representado pelo conjunto fuzzy A e que a propriedade *x é um pouco maior que y* seja representada pela relação fuzzy $R(x,y)$, determine o conjunto fuzzy B que é induzido por A e R.
- Considere o universo das alturas em *cm* {150, 160, 170, 180} e

$A = 0{,}2/160 + 0{,}5/170 + 1/180$

$R =$

	150	160	170	180
150	0	0	0	0
160	1	0	0	0
170	0,6	1	0	0
180	0,3	0,6	1	0

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}2 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix} \text{ o } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 1 & 0 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ B = A \text{ o } R = 0{,}5/150 + 0{,}6/160 + 1/170$$

Raciocínio aproximado

- Raciocínio aproximado é a forma mais conhecida de lógica fuzzy, cobrindo várias regras de inferência cujas premissas contêm *proposições fuzzy*.
- Uma proposição fuzzy é uma representação simbólica para uma expressão em linguagem natural, envolvendo variáveis lingüísticas.
- As regras de inferência são expressas como declarações “Se - Então”.
- Existem dois métodos diretos importantes de raciocínio fuzzy: o método direto de Mamdani e a modelagem fuzzy de Takagi-Sugeno (T-S).
- O método de Mamdani é o mais popular baseado numa estrutura simples de operações min-max, envolvendo regras de inferência do tipo:

  Se x é A e y é B Então z é C

  onde A, B e C são conjuntos fuzzy
- O método de T-S modela o consequente da regra como uma equação linear

  Se x é A e y é B Então $z = ax + by + c$

  Neste caso, devemos aplicar técnicas de modelagem usando dados de entrada-saída para obter as regras.

Mecanismos de raciocínio fuzzy

- O raciocínio fuzzy pode ser visto como uma generalização do raciocínio da lógica binária, baseado no mecanismo “modus ponens” MP.
- Este mecanismo é utilizados para raciocinar com regras de produção (RP) baseadas na implicação : “Se A, então B” ou $A \rightarrow B$.
- No MP, se a regra $A \rightarrow B$ for válida e se A for verdadeiro, então nós podemos deduzir que B também é verdadeiro.

premissa 1:	$A \rightarrow B$	Se x é A Então y é B
premissa 2:	A	x é A
conseqüência:	B	y é B

Exemplo de MP

- Considere o seguinte exemplo de MP em forma de regra

P_1: Se *temperatura* é *menor que* 10°C Então *aumente o aquecedor*
P_2: *Temperatura* é 5°C

C: *Aumente o aquecedor*

- A premissa 2 satisfaz completamente a condição da premissa 1 e assim concluimos "aumente o aquecedor".
- O raciocínio fuzzy é baseado no *modus ponens generalizado* MPG:

P_1: Se x é A Então y é B
P_2: x é A'

C: y é B'

onde A, A', B e B' são conjuntos fuzzy, sendo A e A' conjuntos diferentes, assim como B e B' são também diferentes.

Exemplo de MPG

- No MPG A e A' são conjuntos fuzzy diferentes mas, apesar disso, podemos inferir a conclusão y é B' da premissa y é B, com base na sua similaridade.
- Por causa disso o raciocínio fuzzy é algumas vezes chamado de "raciocínio aproximado".
- Na lógica binária, A e A' nas premissas 1 e 2 devem ser exatamente iguais.
- O raciocínio humano é parecido com o raciocínio fuzzy. Se, por exemplo, aplicarmos o MPG ao exemplo anterior obteríamos:

P_1: Se *temperatura* é *baixa* Então *aumente o aquecedor*
P_2: *Temperatura* é *muito baixa*

C: *Aumente muito o aquecedor*

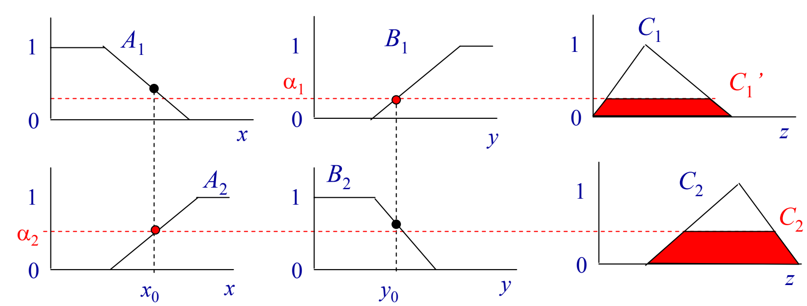
- O raciocínio fuzzy é particularmente flexível quando está baseado em múltiplas regras. Neste caso, a adequação do antecedente de cada regra é usada para estabelecer a conclusão de cada regra. Finalmente, as conclusões individuais devem ser agregadas obtendo-se uma conclusão global.

Implicação fuzzy

- A declaração condicional "Se - Então" representa uma regra de produção (RP) envolvendo predicados imprecisos.
- Uma regra de produção é expressa por uma relação fuzzy representando uma implicação fuzzy (IF).
- A escolha da função IF reflete critérios intuitivos e o efeito do conectivo *também* utilizado para conectar as diversas regras da base de conhecimento.
- No raciocínio fuzzy segundo método direto de Mandami,a implicação é o *mínimo* (conjunção).
- Neste método, a conclusão é calculada como a composição do antecedente com a relação de implicação entre o antecedente e o conseqüente.
- Devido à escolha das operações, o cálculo do conseqüente se torna simples.

Exemplo do raciocínio pelo método direto de Mamdani

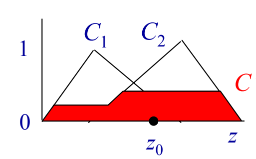
R_1: Se x é A_1 e y é B_1, então z é C_1 $\longrightarrow$ $\alpha_1 = \mu_{A_1}(x_0) \wedge \mu_{B_1}(y_0)$
R_2: Se x é A_2 e y é B_2, então z é C_2 $\longrightarrow$ $\alpha_2 = \mu_{A_2}(x_0) \wedge \mu_{B_2}(y_0)$



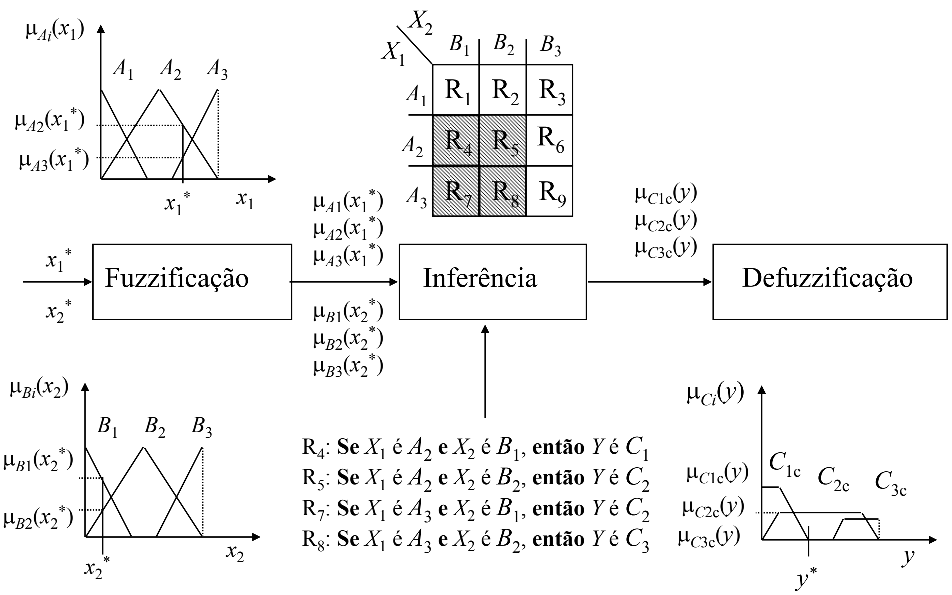
$\mu_{C_1}'(z) = \alpha_1 \wedge \mu_{C_1}(z) \quad \forall z \in Z$

$\mu_{C_2}'(z) = \alpha_2 \wedge \mu_{C_2}(z) \quad \forall z \in Z$

$\mu_{C}'(z) = \mu_{C_1}'(z) \vee \mu_{C_2}'(z) \quad \forall z \in Z$

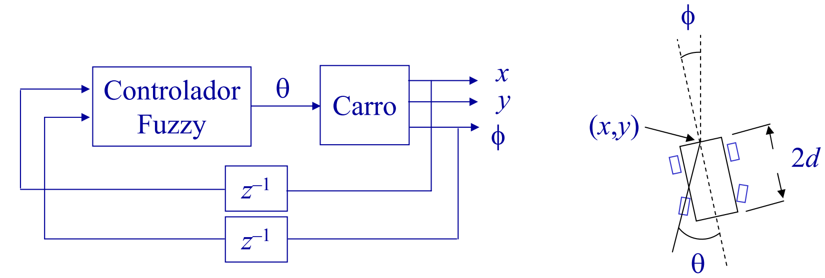


9. Arquitetura de um Sistema Fuzzy

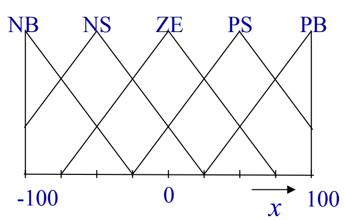


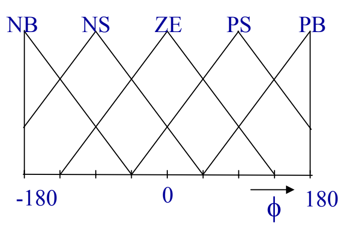
Exemplo de Aplicação
Truck Backer Upper (TBU)

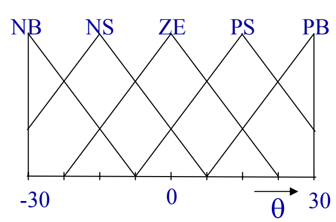
- Problema: estacionar um carro de ré em um local especificado
- Variável de controle: ângulo das rodas dianteiras (θ)
- Estado do carro:
  - Posição central da traseira (x,y)
  - Ângulo do carro em relação ao eixo dos y (ϕ)
- Estado final: (x_f, y_f, ϕ_f)



Conjuntos fuzzy



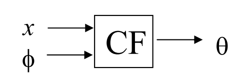


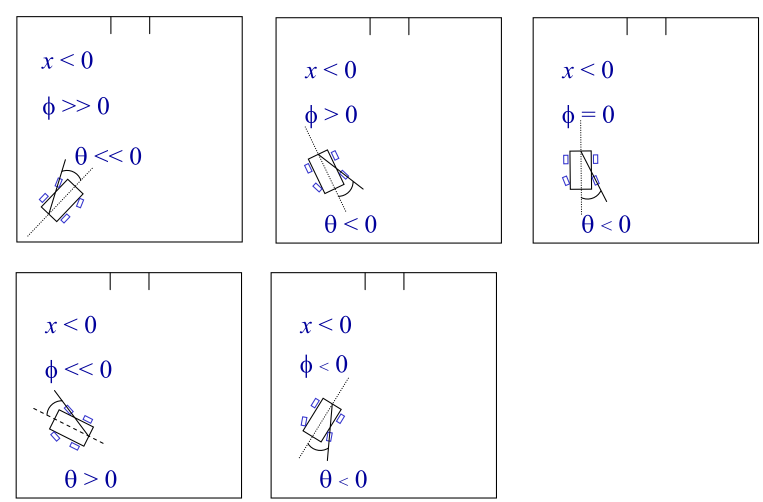


R_i: Se x é A_i e ϕ é B_i então θ é C_i

Base de Regras

Considera-se o sistema independente de y:





Matriz Associativa Fuzzy (FAM)

x \ ϕ	NB	NS	ZE	PS	PB
NB	1 PS	2 NS	3 NS	4 NB	5 NB
NS	6 PS	7 ZE	8 NS	9 NS	10 NB
ZE	11 PB	12 PS	13 ZE	14 NS	15 NB
PS	16 PB	17 PS	18 PS	19 ZE	20 NS
PB	21 PB	22 PB	23 PS	24 PS	25 NS

Resultados