**Nome:**
**Cartão:**

# Prova 3

Dicas gerais:

- Lê todas as questões antes de começar e pergunta em caso de dúvidas.
- Sempre justifique a sua resposta.
- Responde a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.

**Questão 1 (2 pt)**
Encontra uma desigualdade válida do conjunto $X$ que o ponto $x$ não satisfaz.

a) $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Z}_+ \mid x_1 \leq 9, x_1 \leq 4x_2\}$, $x = (9\ 9/4)$.

b) $X = \{x \in \mathbb{Z}_+^5 \mid 9x_1 + 12x_2 + 8x_3 + 17x_4 + 13x_5 \geq 50\}$, $x = (0\ 25/6\ 0\ 0\ 0)$.

**Questão 2 (2.5 pt)**
Queremos maximizar uma função objetivo linear sobre uma partição das arestas de um grafo não-direcionado $G = (V, A)$. Nenhum dos dois partes da partição pode conter um triângulo do grafo. Seja $x_a \in \mathbb{B}, a \in A$ uma variável tal que, para $x_a = 0$ a aresta está no primeiro parte, e para $x_a = 1$ no segundo. A restrição acima pode ser formulada por

$$\begin{aligned} & x_a + x_b + x_c \leq 2 && \forall\{a, b, c\} \in \Delta \\ & (1 - x_a) + (1 - x_b) + (1 - x_c) \leq 2 && \forall\{a, b, c\} \in \Delta \end{aligned}$$

com $\Delta$ o conjunto de triângulos de grafo $G$. Um triângulo é representado pelo seu conjunto de arestas. Supondo isso é a única restrição do problema, as matrizes resultantes são totalmente unimodulares, para cada instância $G$?

**Questão 3 (2 pt)**
A solução da relaxação linear de

$$\begin{aligned} \textbf{maximiza} \quad & 2x_1 + x_2 \\ \textbf{sujeito a} \quad & 7x_1 + x_2 \leq 28 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ & -8x_1 - 9x_2 \leq -32 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_+ \end{aligned}$$

possui o dicionário ótimo

$$\begin{array}{rlll} z = & 21/2 & -7/22x_3 & -5/22x_4 \\ \hline x_5 = & 55/2 & -3/2x_3 & -5/2x_4 \\ x_2 = & 7/2 & -1/22x_3 & -7/22x_4 \\ x_1 = & 7/2 & -3/22x_3 & +1/22x_4 \end{array}$$

a) Quais os cortes de Gomory correspondentes com a três linhas do dicionário final?

b) Escreve os cortes no espaço da variáveis originais.

**Questão 4 (2.5 pt)**
Você está resolvendo um programa inteira de maximização com variáveis $x_1$, $x_2$ e$x_3$ usando branch-and-bound. O valor atual do limite inferior é $-\infty$. A lista dos subproblemas ativas é

| Subproblema | $z^*$ | $x_1^*$ | $x_2^*$ | $x_3^*$ |
|---|---|---|---|---|
| PI com $x_1 \geq 6, x_2 \leq 3$ | 90.50 | 6.00 | 3.00 | 0.50 |
| PI com $x_1 \leq 5, x_2 \leq 13$ | 165.25 | 5.00 | 13.00 | 5.75 |
| PI com $x_1 \leq 5, x_2 \geq 14, x_3 \geq 1$ | 138.00 | 4.25 | 16.00 | 1.00 |
| PI com $x_1 \leq 5, x_2 \geq 14, x_3 \leq 0$ | 121.25 | 3.75 | 15.25 | 0.00 |

com $x^*$ a solução ótima da relaxação linear do subproblema e $z^*$ o valor de $x^*$.

a) Qual o valor atual do limite superior? Explique.

b) O algoritmo já encontrou uma solução inteira? Explique.

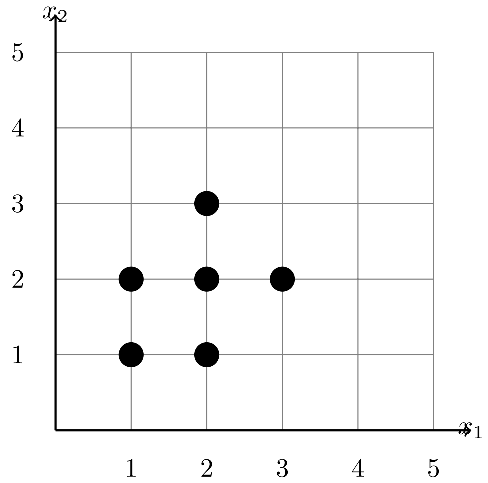
c) O algoritmo já descartou um subproblema por corte por limite ou corte por otimalidade? Explique.

**Questão 5 (2.5 pt)**
Prove ou mostre um contra-exemplo.

a) Se $A$ é totalmente unimodular, então $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ também.

b) Se $A$ é totalmente unimodular, então $\left(\begin{smallmatrix} A & A^t \end{smallmatrix}\right)$ também.

**Questão 6 (2.5 pt)**
Considera o conjunto de pontos $S$




a) Mostra que $S$ é igual ao conjunto de pontos inteiros que satisfaz

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq 3/2 \\ x_1 + x_2 &\leq 11/2 \\ 2/5\, x_1 + 4x_2 &\geq 2 \\ -16/9x_1 + x_2 &\geq -4 \\ -x_1 + x_2 &\leq 3/2 \end{aligned}$$

b) Encontra uma descrição linear da envoltória convexa de $S$ (i.e. o menor conjunto convexo que contém $S$). A descrição deve ser mínima, i.e. sem restrições redundantes.