

INF01 118



# Técnicas Digitais para Computação

**Minimização de Funções Booleanas**

**Aula 10**

## 1. Mapas de Karnaugh com 2 variáveis

- Diagrama onde cada célula corresponde a um mintermo
- Exemplo com 2 variáveis

X \ Y	0	1
0	$\bar{X}\bar{Y}$ m0	$\bar{X}Y$ m1
1	$XY$ m2	$XY$ m3

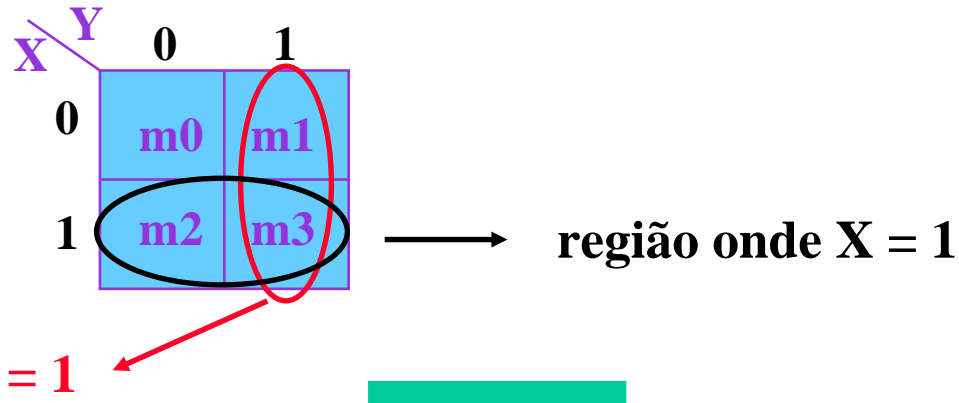
X	Y	F
0	0	m0
0	1	m1
1	0	m2
1	1	m3

- Representação de uma função como soma de mintermos
- Cada célula recebe valor 1 ou 0, conforme valor da função para aquele mintermo
- Exemplo:

$$F = \Sigma m(1,2,3) = X\bar{Y} + XY + \bar{X}Y$$

X \ Y	0	1
0	0	1
1	1	1

- Células => mintermos
- Regiões retangulares => termos-produto



- Exemplo:  $F = \Sigma m(1,2,3)$

lei  
distributiva

$$F = X\bar{Y} + \bar{X}Y + XY = \bar{X}Y + X(\bar{Y} + Y) = \bar{X}Y + X = (X + \bar{X})(X + Y) = X + Y$$

X \ Y	0	1
0	0	1
1	1	1

**Portanto:**

$F$  = soma de mintermos

ou

$F$  = soma de termos-produto que cobrem a região

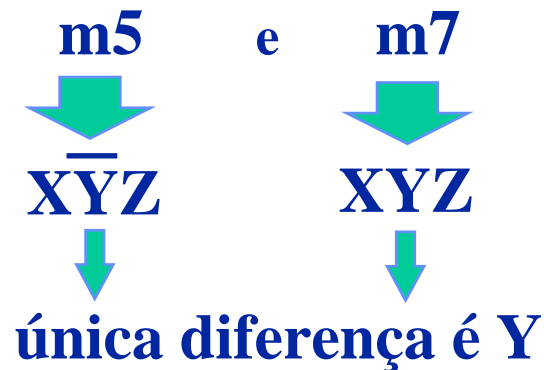
cada mintermo tem que ser coberto por pelo menos 1 termo

## 2. Mapas de Karnaugh com 3 variáveis

YZ		00	01	11	10
X	0	m0	m1	m3	m2
	1	m4	m5	m7	m6

Concatenar bit da linha com bits da coluna para identificar mintermo

- **Mintermos não seguem a ordem crescente**  
=> útil para simplificação
- 2 células vizinhas (adjacentes): mintermos diferem por uma variável



- Atenção: vizinhança através das bordas

$m_0 \longleftrightarrow m_2$

$m_4 \longleftrightarrow m_6$

YZ		00	01	11	10
X	0	m0	m1	m3	m2
	1	m4	m5	m7	m6

- Soma de 2 mintermos adjacentes pode ser simplificada eliminando-se a variável que difere nos mintermos

$$m_5 + m_7 = X\bar{Y}Z + XYZ = XZ(\bar{Y} + Y) = XZ$$

É o que há de comum entre os mintermos = região do mapa

- Portanto: região com 2 células adjacentes  
célula isolada

=> termo com 2 literais  
=> mintermo com 3 literais

- Exemplo de simplificação

YZ		00	01	11	10
X	0	0	0	1	1
	1	1	1	0	0

$$F = \sum m(2,3,4,5)$$

$$F = \bar{X}Y + X\bar{Y}$$

- Exemplo de simplificação

		YZ			
		00	01	11	10
X	0	0	0	1	0
	1	1	0	1	1

$$F = \sum m(3,4,6,7)$$

$$F = YZ + X\bar{Z}$$

- Soma de 4 mintermos adjacentes também pode ser simplificada

		YZ			
		00	01	11	10
X	0	m0	m1	m3	m2
	1	m4	m5	m7	m6

$$m2 + m3 + m6 + m7$$



$$\bar{X}Y$$



$$XY$$

$$= (\bar{X} + X) Y = Y$$

É o que há de comum  
entre os 4 mintermos



- Portanto: região com 4 células adjacentes => termo com 1 literal
- Exemplo de simplificação

		YZ			
		00	01	11	10
X	0	1	0	0	1
	1	1	1	0	1

$$F = \Sigma m(0,2,4,5,6)$$

Solução 1:  $F = \bar{Z} + X\bar{Y}Z$  (não otimizada)

Solução 2 (com redundância) :  $F = \bar{Z} + X\bar{Y}$   
ou seja, mintermo m4 coberto pelos 2 termos  
quando  $X=1, Y=0, Z=0$

- Situações onde existem 2 soluções mínimas possíveis

$$F = \Sigma m(1,3,4,5,6)$$

		YZ			
		00	01	11	10
X	0		1	1	
	1	1	1		1

Solução 1:  $F = \bar{X}Z + X\bar{Z} + X\bar{Y}$

Solução 2:  $F = \bar{X}Z + X\bar{Z} + \bar{Y}Z$

2 alternativas para cobrir  
o mintermo  $X\bar{Y}Z$

## 3. Mapas de Karnaugh com 4 variáveis

WX \ YZ	YZ			
	00	01	11	10
00	m0	m1	m3	m2
01	m4	m5	m7	m6
11	m12	m13	m15	m14
10	m8	m9	m11	m10

Concatenar bits da linha com bits da coluna para identificar mintermos

- Notar adjacências através das bordas

m0 ↔ m8

m0 ↔ m2

m1 ↔ m9

m4 ↔ m6



célula isolada



termo com 4 literais

região com 2 células



termo com 3 literais

região com 4 células



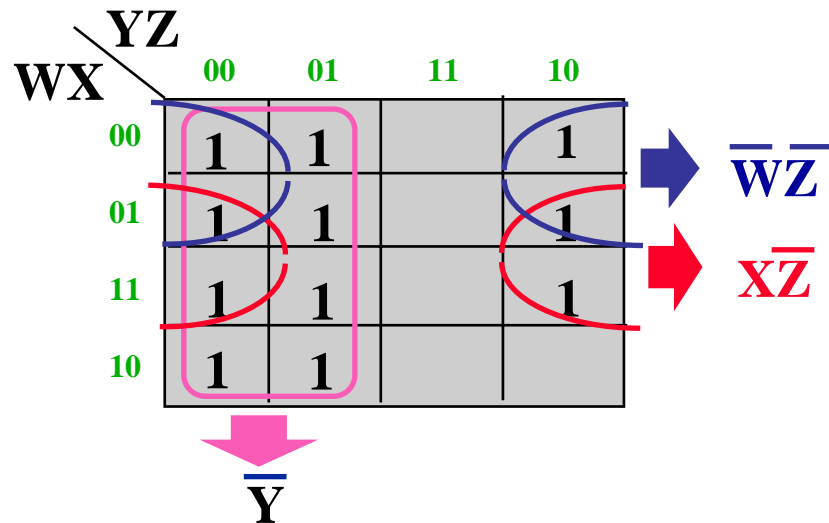
termo com 2 literais

região com 8 células



termo com 1 literal

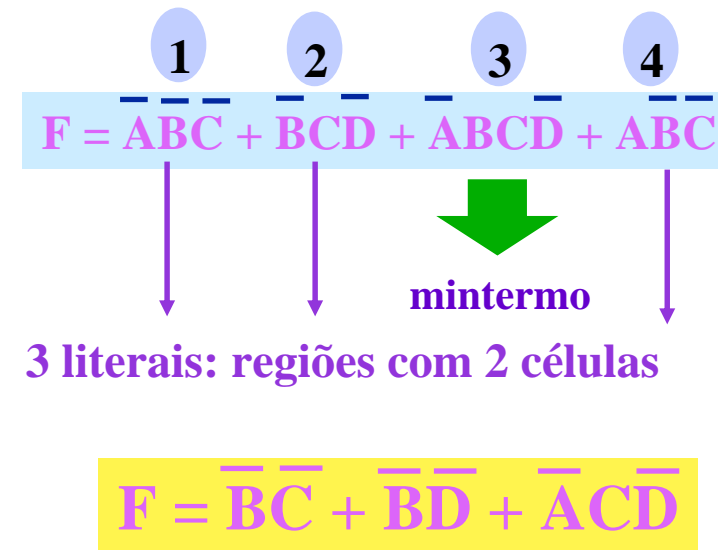
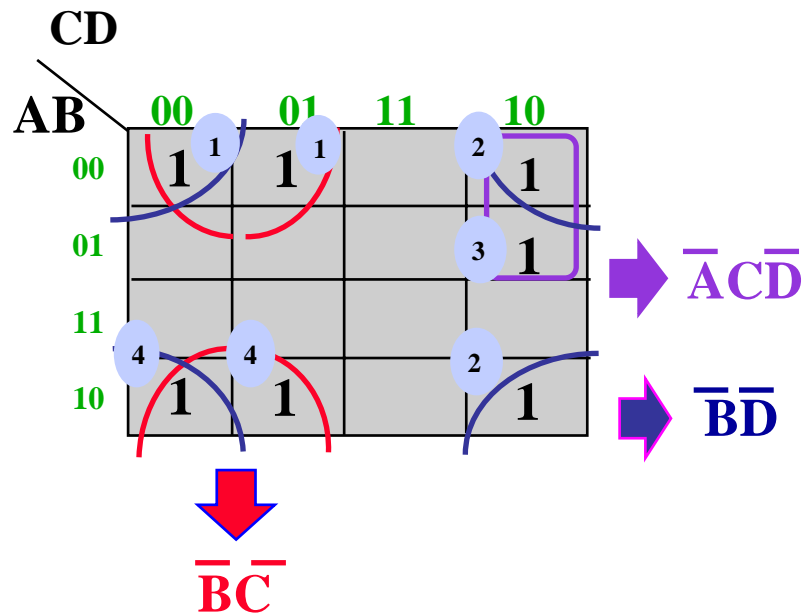
## • Exemplo de simplificação



$$F = \sum m(0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)$$

$$F = \bar{Y} + \bar{W}\bar{Z} + X\bar{Z}$$

- Exemplo de simplificação partindo de uma soma-de-produtos qualquer (não de uma soma de mintermos)



## 4. Implicantes Primos

- Implicante Primo = termo-produto obtido considerando-se o maior número possível de células adjacentes

- Se mintermo é coberto por um único implicante primo =>

IMPLICANTE PRIMO ESSENCIAL

- Exemplo

YZ	00	01	11	10
X 0		1	1	
X 1	1	1		1

Implicantes Primos

$\bar{X}Z$   
 $X\bar{Y}$   
 $X\bar{Z}$   
 $\bar{Y}Z$

Implicantes Primos Essenciais

$\bar{X}Z$   
 $X\bar{Z}$

- Obtenção dos implicantes primos

Mintermo isolado



se não for contido numa região com 2 mintermos adjacentes

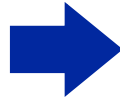
Região com 2 termos adjacentes



se não for contida numa região com 4 mintermos adjacentes

- Obtenção dos implicantes primos essenciais

Verificar cada mintermo com 1



se for coberto só por 1 implicante primo, então este é implicante primo essencial

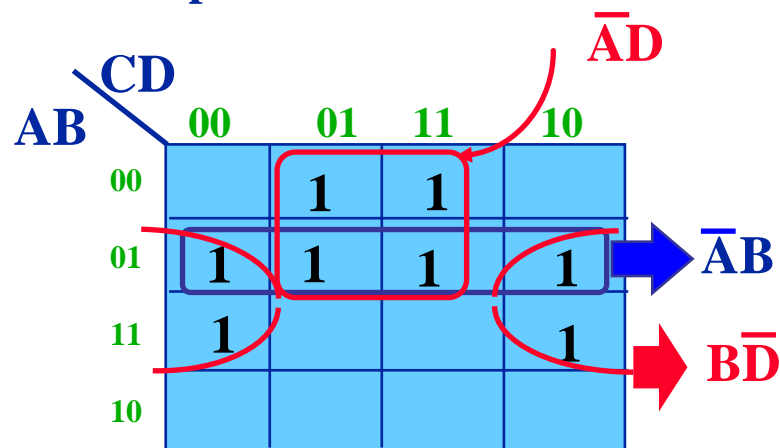
- Algoritmo para obtenção da expressão simplificada para a função

1. Obter implicantes primos
2. Obter implicantes primos essenciais
3. Expressão = soma lógica dos implicantes primos essenciais

+

outros implicantes primos necessários para cobrir outros mintermos

- Exemplo 1



3 implicantes primos

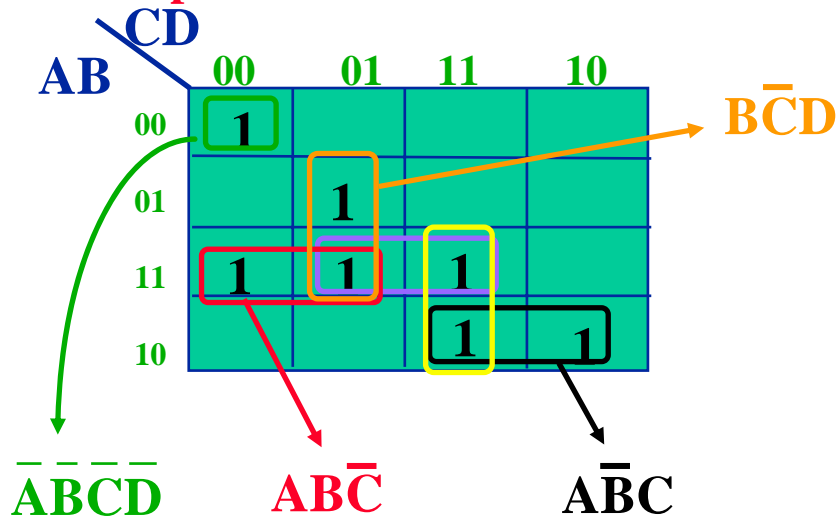
$\overline{A}D$  → essencial

$\overline{A}B$   
 $B\overline{D}$  → essencial

Não é essencial - todos seus mintermos são cobertos por mais de 1 implicante primo

$$F = \overline{A}D + B\overline{D}$$

• Exemplo 2



$$F = \Sigma m (0,5,10,11,12,13,15)$$

6 implicants primos

p1	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	→	essencial	m0
p2	$\bar{B}\bar{C}\bar{D}$	→	essencial	m5
p3	$AB\bar{C}$	→	essencial	m12
p4	$ABD$	→	escolher entre 1 destes	
p5	$ACD$	→		
p6	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	→	essencial	m10

• Tabela de Cobertura

	m0	m5	m10	m11	m12	m13	m15	
p1	X							essencial
p2		X				X		essencial
p3					X	X		essencial
p4						X	X	escolher entre 1 destes
p5				X			X	
p6		X	X					essencial

falta cobrir só m15 - pode-se escolher p4 ou p5

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} + \bar{B}\bar{C}\bar{D} + AB\bar{C} + \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \text{ou } ABD + ACD$$

## Exercicio 1:

- Simplifique o mapa de karnaugh, indique os implicants primos essenciais e extraia a função por soma de produtos.

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	1
	01	0	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

## Exercicio 1:

- Simplifique o mapa de karnaugh, indique os implicants primos essenciais e extraia a função por soma de produtos.

		CD			
AB		00	01	11	10
	00	1	1	0	1
	01	0	1	1	0
	11	0	1	1	0
	10	1	0	0	1

$$F(A,B,C,D) = \underbrace{BD + \overline{B}\overline{D}}_{B \text{ xor } D} + \overline{A}\overline{B}\overline{C}$$

## Exercício 2:

- Vamos tentar agora fazer uma extração por produto de somas. Isso quer dizer que teremos que simplificar os maxitermos (valem 0).

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	0	0	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	0	0



## Exercício 2:

- Vamos tentar agora fazer uma extração por produto de somas. Isso quer dizer que teremos que simplificar os maxitermos (valem 0).

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	0	0	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	0	0

$$F(A,B,C,D) = (B + \overline{C}) \cdot (\overline{B} + D).$$

$$(\overline{A} + C) \cdot (\overline{B} + C)$$

## Exercício 2:

- E se tivéssemos extraído os mintermos para a soma de produto.

		CD			
		00	01	11	10
AB	00	1	1	0	0
	01	0	0	1	0
	11	0	0	1	0
	10	0	0	0	0

$$F(A,B,C,D) = (\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}) + (B.C.D)$$

Logo ela é equivalente a,  
 $F(A,B,C,D) = (B+\overline{C}) . (\overline{B}+D).$

$$(\overline{A}+C) . (\overline{B}+C)$$