Complexidade de Algoritmos

Mariana Kolberg

Análise da complexidade pessimista

Plano

Uma hierarquia de abstrações:

Tempo de execução [s] $\longrightarrow$ Número de operações $\longrightarrow$ Operações no caso pessimista $\longrightarrow$ Complexidade pessimista assintótica

Análise de Complexidade Pessimista - ACP

- A complexidade pessimista é o critério mais utilizado para verificar a eficiência de algoritmos
- Lembrando que

$$C_p^{=}[a](n) = \max\{desemp[a](d) \in R_+ \mid tam(d) = n\}$$

$$C_p^{\leq}[a](n) = \max\{desemp[a](d) \in R_+ \mid tam(d) \leq n\}$$

- Iremos estudar a complexidade das seguintes estruturas:
  - Atribuição : **v← e**
  - Seqüência : **S;T**
  - Condicional : **se b então S senão T (ou se b então S)**
  - Iteração definida : **para i de j até m faça S**
  - Iteração indefinida : **enquanto b faça S**

Análise de Complexidade Pessimista - ACP

Para operarmos ponto a ponto com funções precisamos

Soma pontual: $(f+g)(d) := f(d) + g(d)$

Máximo pontual: $\max(f,g)(d) = \max[f(d), g(d)]$

Mínimo pontual: $\min(f,g)(d) = \min[f(d), g(d)]$

Considere $f(n) = n + 1$ e $g(n) = n^2$ de N em N

n	0	1	2	3	...	$n > 3$
f(n)	1	2	3	4		n+1
g(n)	0	1	4	9		n^2
(f+g)(n)	1	3	7	13		$n^2 + n + 1$
max(f,g)(n)	1	2	4	9		n^2
min(f,g)(n)	0	1	3	4		$n + 1$

Conceitos Preliminares

- O desempenho de um algoritmo é obtido a partir dos desempenhos das suas várias partes.
  - a complexidade de um algoritmo também

- Um algoritmo é composto basicamente de componentes conjuntivas

Por exemplo, no (trecho de) algoritmo

$j \leftarrow i + 1$; $k \leftarrow i - 1$;

essas duas atribuições são suas componentes conjuntivas.

- e componentes disjuntivas:

Por outro lado, no (trecho de) algoritmo

<u>se</u> $i \neq j$ <u>então</u> $j \leftarrow i + 1$ <u>senão</u> $k \leftarrow i - 1$;

essas duas atribuições são suas componentes disjuntivas.

Conceitos Preliminares

- Considere um algoritmo a_0 composto de duas componentes a_1 e a_2.

- Para uma entrada **d** com tam(d) ≤ **n**, a complexidade pessimista dá uma cota superior para a função ***desemp***

$$\mathit{desemp}[\ a_j\ ](d) \leq c_P^{\leq}\ [\ a_j\ ](n), \text{ para } j = 0, 1, 2.$$

Partes Conjuntivas

- Sabendo que a_1 e a_2 são componentes conjuntivas de a_0 temos

$$desemp[\ a_0\ ](d) = desemp[\ a_1\ ](d) + desemp[\ a_2\ ](d)$$

Usando as cotas superiores temos

$$desemp[\ a_0\ ](d) \leq c_P^{\leq}\ [\ a_1\ ](n) + c_P^{\leq}\ [\ a_2\ ](n).$$

(para uma entrada d específica)

pela definição de complexidade pessimista temos a seguinte cota

$$c_P^{\leq}\ [\ a_0\ ](n) \leq c_P^{\leq}\ [\ a_1\ ](n) + c_P^{\leq}\ [\ a_2\ ](n).$$

Partes Conjuntivas

- Sabendo que os custos das partes dão cotas inferiores, temos

$$\textit{desemp}[\ a_j\ ](d) \leq \textit{desemp}[\ a_0\ ](d), \text{ para cada } j = 1, 2.$$

Como a complexidade pessimista é cota superior para o custo temos

$$\textit{desemp}[\ a_i\ ](d) \leq c_P^{\leq}\ [\ a_0\ ](n), \text{ para cada } i = 1, 2.$$

Pela definição de complexidade pessimista temos a seguinte cota

$$c_P^{\leq}\ [\ a_j\ ](n) \leq c_P^{\leq}\ [\ a_0\ ](n), \text{ para cada } j = 1, 2.$$

Logo temos

$$\text{Máx}\ (c_P^{\leq}\ [\ a_1\ ], c_P^{\leq}\ [\ a_2\ ]\ )(n) \leq c_P^{\leq}\ [\ a_0\ ](n).$$

Por que não o minimo?

Partes Conjuntivas

- Sendo assim, a complexidade pessimista de um algoritmo com partes conjuntivas é limitada por

$$\text{Máx}\,(c_P^{\leq}[\,a_1\,],\, c_P^{\leq}[\,a_2\,]\,) \leq c_P^{\leq}[\,a_0\,] \leq c_P^{\leq}[\,a_1\,] + c_P^{\leq}[\,a_2\,].$$

- Portanto a_0 tem ordem $\Theta(c_P^{\leq}[\,a_1\,] + c_P^{\leq}[\,a_2\,])$.

Partes Conjuntivas

- Mostre que $c_P^{\leq}[a_0] = \Theta(c_P^{\leq}[a_1] + c_P^{\leq}[a_2])$

Partes Conjuntivas

- Mostre que $c_P^{\leq}[a_0] = \Theta(c_P^{\leq}[a_1] + c_P^{\leq}[a_2])$

$$(\exists\, c, c' \in \mathbb{R}_+)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0)(c_P^{\leq}[a_0](n) \leq c \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n)) \wedge$$
$$c_P^{\leq}[a_0](n) \geq c' \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n))$$

Partes Conjuntivas

- Mostre que $c_P^{\leq}[a_0] = \Theta(c_P^{\leq}[a_1] + c_P^{\leq}[a_2])$

$$(\exists\, c, c' \in \mathbb{R}_+)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0)(c_P^{\leq}[a_0](n) \leq c \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n)) \wedge$$

$$c_P^{\leq}[a_0](n) \geq c' \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n))$$

$$c_P^{\leq}[a_0](n) \qquad \geq \text{Máx}\,(c_P^{\leq}[a_1](n),\, c_P^{\leq}[a_2](n))$$

Partes Conjuntivas

- Mostre que $c_P^{\leq}[a_0] = \Theta(c_P^{\leq}[a_1] + c_P^{\leq}[a_2])$

$$(\exists\, c, c' \in \mathbb{R}_+)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0)(c_P^{\leq}[a_0](n) \leq c \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n)) \wedge$$

$$c_P^{\leq}[a_0](n) \geq c' \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n))$$

$$\begin{aligned} c_P^{\leq}[a_0](n) &\geq \text{Máx}\,(c_P^{\leq}[a_1](n),\ c_P^{\leq}[a_2](n)) \\ &\geq \left(\frac{1}{2}\right) c_P^{\leq}[a_1](n) + \left(\frac{1}{2}\right) c_P^{\leq}[a_2](n) \end{aligned}$$

Partes Conjuntivas

- Mostre que $c^{\leq}_{P}[a_0] = \Theta(c^{\leq}_{P}[a_1] + c^{\leq}_{P}[a_2])$

$$(\exists\, c, c' \in \mathbb{R}_{+})(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0)(c^{\leq}_{P}[a_0](n) \leq c \cdot (c^{\leq}_{P}[a_1](n) + c^{\leq}_{P}[a_2](n)) \wedge$$

$$c^{\leq}_{P}[a_0](n) \geq c' \cdot (c^{\leq}_{P}[a_1](n) + c^{\leq}_{P}[a_2](n))$$

$$\begin{aligned}
c^{\leq}_{P}[a_0](n) \quad & \geq \text{Máx}\,(c^{\leq}_{P}[a_1](n)\,,\; c^{\leq}_{P}[a_2](n)) \\
& \geq \left(\frac{1}{2}\right) c^{\leq}_{P}[a_1](n) + \left(\frac{1}{2}\right) c^{\leq}_{P}[a_2](n) \\
& \geq \left(\frac{1}{2}\right) (c^{\leq}_{P}[a_1](n) + c^{\leq}_{P}[a_2](n)), \text{ e}
\end{aligned}$$

Partes Conjuntivas

- Mostre que $c_P^{\leq}[a_0] = \Theta(c_P^{\leq}[a_1] + c_P^{\leq}[a_2])$

$$(\exists\, c, c' \in \mathbb{R}_+)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0)(c_P^{\leq}[a_0](n) \leq c \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n)) \wedge$$

$$c_P^{\leq}[a_0](n) \geq c' \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n))$$

$$\begin{aligned}
c_P^{\leq}[a_0](n) &\geq \text{Máx}\,(c_P^{\leq}[a_1](n),\ c_P^{\leq}[a_2](n)) \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\right) c_P^{\leq}[a_1](n) + \left(\frac{1}{2}\right) c_P^{\leq}[a_2](n) \\
&\geq \left(\frac{1}{2}\right) (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n)), \text{ e} \\
c_P^{\leq}[a_0](n) &\leq (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n))
\end{aligned}$$

Partes Conjuntivas

- Mostre que $c_P^{\leq}[a_0] = \Theta(c_P^{\leq}[a_1] + c_P^{\leq}[a_2])$

$$(\exists\, c, c' \in \mathbb{R}_+)(\exists\, n_0 \in \mathbb{N})(\forall\, n \geq n_0)(c_P^{\leq}[a_0](n) \leq c \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n)) \wedge$$

$$c_P^{\leq}[a_0](n) \geq c' \cdot (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n))$$

$$\begin{aligned}
c_P^{\leq}[a_0](n) \quad & \geq \text{Máx}\,(c_P^{\leq}[a_1](n),\ c_P^{\leq}[a_2](n)) \\
& \geq \left(\frac{1}{2}\right) c_P^{\leq}[a_1](n) + \left(\frac{1}{2}\right) c_P^{\leq}[a_2](n) \\
& \geq \left(\frac{1}{2}\right) (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n)), \text{ e} \\
c_P^{\leq}[a_0](n) \quad & \leq (c_P^{\leq}[a_1](n) + c_P^{\leq}[a_2](n))
\end{aligned}$$

$$n_0 = 1,\ c = 1,\ c' = 1/2$$

Partes Conjuntivas

- Exemplo: considere um algoritmo **a** que determina o máximo e o mínimo de uma seqüência de naturais

$$M \leftarrow \max(v); m \leftarrow \min(v)$$

O desempenho de **a** é dado por

$$desemp[a](v) = desemp[M \leftarrow \max(v)] + desemp[m \leftarrow \min(v)]$$

As complexidades das partes conjuntivas são

$$c_p[M \leftarrow \max(v)](n) = n$$

$$c_p[m \leftarrow \min(v)](n) = n$$

Portanto

$$desemp[a](d) \leq c_p[M \leftarrow \max(v)](n) + c_p[m \leftarrow \min(v)](n) = n + n$$

$$c_p[a](n) \leq 2n$$

Partes Conjuntivas

- Exemplo: considere um algoritmo **a** que ordena uma seqüência de naturais e determina seu somatório

$$v \leftarrow ordn(u); w \leftarrow soma(u)$$

O desempenho de **a** é dado por

$$desemp[a](d) = desemp[v \leftarrow ordn(u)](d) + desemp[w \leftarrow soma(u)](d)$$

Considere que as complexidades das partes conjuntivas são

$$c_p[v \leftarrow ordn(u)](n) = n^2$$

$$c_p[w \leftarrow soma(u)](n) = n$$

Sabemos que

$$desemp[a](d) \leq c_p[v \leftarrow ordn(u)](n) + c_p[w \leftarrow soma(u)](n) = n^2 + n$$

Portanto $c_p[a](n) \leq n^2 + n$

Partes Conjuntivas

Por outro lado, sabemos que para entrada **d** com $tam(d) \leq n$

$$desemp[v \leftarrow ordn(u)](d) \leq desem[a](d) \leq c_p[a](n)$$

$$desemp[w \leftarrow soma(u)](d) \leq desem[a](d) \leq c_p[a](n)$$

Lembrando que

$$c_p[a](n) \geq c_p[w \leftarrow soma(u)](n) = n$$

$$c_p[a](n) \geq c_p[v \leftarrow ordn(u)](n) = n^2$$

Temos

$$c_p[a](n) \geq \max\{c_p[v \leftarrow ordn(u)](n), c_p[w \leftarrow soma(u)](n)\}$$

$$c_p[a](n) \geq \max\{n^2, n\} = n^2$$

$$n^2 \leq c_p[a](n) \leq n^2 + n$$

$$c_p[a](n) = \Theta(n^2)$$

Partes Disjuntivas

Exemplo: considere um algoritmo **a** que recebe uma seqüência não nula e dependendo **de seu primeiro elemento**, ordena-a ou determina seu somatório

Se hd(u)=0 então $v \leftarrow ordn(u)$ senão $s \leftarrow soma(u)$

Como o algoritmo **a** executa um dos dois processos para cada entrada **u**, temos

$$\text{se hd(u)} = 0 : desemp[a](d) = desemp[v \leftarrow ordn(u)]$$

$$\text{se hd(u)} \neq 0 : desemp[a](d) = desemp[s \leftarrow soma(u)]$$

Logo,

$$desemp[a](d) \leq \max\{desemp[v \leftarrow ordn(u)], desemp[s \leftarrow soma(u)]\}$$

Considerando

$$c_p[v \leftarrow ordn(u)](n) = n^2 \quad \text{e} \quad c_p[s \leftarrow soma(u)](n) = n$$

temos

$$c_p[a](n) \leq \max\{c_p[v \leftarrow ordn(u)], c_p[s \leftarrow soma(u)]\} = n^2$$

Partes Disjuntivas

Considere um algoritmo $\mathbf{a_0}$ cujas duas componentes a_1 e a_2 sejam disjuntivas. É possível garantir que $c_P^{\leq}[\, a_0 \,](n) \leq \text{Máx}\,(c_P^{\leq}[\, a_1 \,], c_P^{\leq}[\, a_2 \,])(n)$.

Sabendo que a_1 e a_2 são componentes disjuntivas de a_0 temos

$$\textit{desemp}[\, a_0 \,](d) = \textit{desemp}[\, a_1 \,](d) \text{ ou } \textit{desemp}[\, a_0 \,](d) = \textit{desemp}[\, a_2 \,](d)$$

Como as complexidades dão cotas superiores temos

$$\textit{desemp}[\, a_0 \,](d) \leq c_P^{\leq}[\, a_1 \,](n) \text{ ou } \textit{desemp}[\, a_0 \,](d) \leq c_P^{\leq}[\, a_2 \,](n).$$

Logo

$$\textit{desemp}[\, a_0 \,](d) \leq \text{Máx}\,(c_P^{\leq}[\, a_1 \,], c_P^{\leq}[\, a_2 \,])(n)$$

Pela definição de complexidade pessimista temos, a seguinte cota superior

$$c_P^{\leq}[\, a_0 \,](n) \leq \text{Máx}\,(c_P^{\leq}[\, a_1 \,], c_P^{\leq}[\, a_2 \,])(n).$$

Partes Disjuntivas

É possível garantir que o mínimo das complexidades das componentes disjuntivas de um algoritmo **a** dá uma cota inferior para a complexidade pessimista deste algoritmo **?**

Sabendo que a_1 e a_2 são componentes disjuntivas de a_0 temos

se *desemp*[a_0](d) = *desemp*[a_1](d), então: *desemp*[a_1](d) $\leq c_P^{\leq}$ [a_0](n);

se *desemp*[a_0](d) = *desemp*[a_2](d), então: *desemp*[a_2](d) $\leq c_P^{\leq}$ [a_0](n).

Portanto

$$c_p^{\leq}[a_0](n) \geq c_p^{\leq}[a_1](n) \text{ ou } c_p^{\leq}[a_0](n) \geq c_p^{\leq}[a_2](n)$$

A cota inferior para a complexidade do algoritmo a_0 é

$$c_p^{\leq}[a_0](n) \geq \min(c_p^{\leq}[a_1], c_p^{\leq}[a_2])(n)$$

Partes Conjuntivas e Disjuntivas

- A complexidade pessimista de um algoritmo com partes conjuntivas é limitada por

$$\text{Máx}\,(c_P^{\leq}[a_1],\ c_P^{\leq}[a_2]) \leq c_P^{\leq}[a_0] \leq c_P^{\leq}[a_1] + c_P^{\leq}[a_2].$$

- Ou seja, tem ordem

$$\Theta(c_P^{\leq}[a_1] + c_P^{\leq}[a_2]).$$

- A complexidade pessimista de um algoritmo com partes disjuntivas é limitada por

$$\max(c_p^{\leq}[a_1](n), c_p^{\leq}[a_2](n)) \geq c_p^{\leq}[a_0](n) \geq \min(c_p^{\leq}[a_1](n), c_p^{\leq}[a_2](n))$$