

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo, Brasil

Caminhos mais longos em grafos

Susanna Figueiredo de Rezende
susanna@ime.usp.br

Orientadora: Y. Wakabayashi
yw@ime.usp.br

17 de fevereiro de 2012

Resumo

Em teoria dos grafos, problemas sobre caminhos são uns dos mais fundamentais. Dentre estes, destaca-se o problema da existência e busca de caminhos de certos comprimentos. Nesse trabalho daremos enfoque a problemas sobre caminhos mais longos em grafos. Consideraremos basicamente duas classes de problemas: os de natureza algorítmica e os de natureza estrutural.

Sumário

I	Objetiva	4
1	Introdução	4
2	Preliminares	6
2.1	Classes de grafos	7
3	O Problema algorítmico	11
3.1	Árvores	11
3.1.1	Complexidade	12
3.1.2	Corretude	12
3.2	Grafos de intervalos	13
3.2.1	Fase 1: construindo o grafo auxiliar H	14
3.2.2	Fase 2: encontrando um caminho mais longo em H	15
3.2.3	Fase 3: encontrando um caminho mais longo em G	17
3.2.4	Complexidade	17
3.3	Outros resultados	18
4	O Problema estrutural	19
4.1	Primeiro exemplo	20
4.2	Exemplo minimal	21
4.3	Grafos planares	22
4.4	Grafos k -conexos	23
4.4.1	Grafos 2-conexos	23
4.4.2	Grafos 3-conexos	23
4.4.3	Grafos 4-conexos	24
5	Número fixo de caminhos mais longos	25
5.1	Dois caminhos mais longos	25
5.2	Três caminhos mais longos	26
6	Todos os caminhos mais longos	27
6.1	Árvores	27
6.2	Uma condição necessária e suficiente	27
6.3	Grafos divididos	29
6.4	Grafos de intervalos	30
7	Resultados novos	32
7.1	Primeiro resultado	32
7.2	Segundo resultado	33
8	Alguns problemas em aberto	37

9 Conclusão	39
Bibliografia	40
 II Subjetiva	 43
10 Desafios e frustrações	43
11 Disciplinas relevantes	44
12 Trabalhos futuros	44

Parte I

Objetiva

1 Introdução

Três políticos, cada um com seu projeto de lei, decidiram que o projeto com maior número de assinaturas seria aprovado. Com seus escassos conhecimentos de tecnologia, cada um resolveu mandar seu projeto por e-mail, pedindo para assinar abaixo.

Para evitar a multiplicação do número de abaixo-assinados, enviaram o projeto para apenas uma pessoa e pediram que cada pessoa que recebesse o e-mail assinasse e repassasse para apenas um de seus contatos que ainda não tivesse assinado. Caso não houvesse nenhum de seus contatos que ainda não tivesse assinado, enviasse o e-mail de volta ao político que criou o projeto. Vamos supor que quem recebe um e-mail de fato assina (mesmo que já tenha assinado outro projeto) e repassa, conforme pedido.

Diante desse problema poderíamos fazer algumas perguntas. Supondo que os políticos tenham acesso à lista de contatos de cada pessoa, será que conseguiriam construir um algoritmo que determinasse o caminho que o e-mail deve percorrer para garantir o maior número de assinaturas? Supondo que cada político consiga o maior número possível de assinaturas, será que podemos garantir que existe ao menos uma pessoa que assinou os três projetos?

Essas perguntas podem ser reformuladas matematicamente como: Existe um algoritmo que encontra um caminho mais longo em um grafo? É verdade que quaisquer três caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum?

Nesta monografia, apresentaremos estes e alguns outros problemas relacionados a caminhos mais longos em grafos. Consideraremos basicamente duas classes de problemas: os de natureza algorítmica e os de natureza estrutural.

Na primeira parte, investigaremos o problema de encontrar um caminho mais longo em um grafo. Este problema é \mathcal{NP} -difícil para grafos arbitrários [9]. Porém, para algumas classes específicas de grafos existem algoritmos polinomiais para encontrar um caminho mais longo. Nesse trabalho estudaremos algumas dessas classes e os respectivos algoritmos.

Na segunda parte, apresentaremos uma resenha sobre problemas de enfoque mais estrutural relativos à intersecção de caminhos mais longos em um grafo. Mais precisamente, investigaremos problemas motivados pela seguinte questão levantada por Gallai [8] em 1966: *é verdade que em um grafo conexo existe um vértice comum a todos os seus caminhos mais longos?* Sabe-se que a resposta a essa pergunta é negativa. Há, porém, algumas classes de grafos para os quais a resposta é positiva. Estudaremos o caso em que se considera a intersecção de todos os caminhos mais longos, e também o caso em que se considera apenas um número fixo de caminhos mais longos. Investigaremos essas questões em grafos arbitrários, e também em certas classes especiais de grafos. Mencionaremos alguns resultados conhecidos, e apresentaremos a prova de alguns deles. Além da resenha, apresentaremos alguns resultados que obtivemos recentemente sobre este tópico.

O material a ser apresentado aqui está organizado da seguinte forma. Na Seção 2 apresentamos os conceitos básicos e a notação utilizada nesta monografia. Também definimos várias classes de grafos que mencionamos neste trabalho. Na Seção 3 tratamos do problema

de encontrar um caminho mais longo num grafo. Discutimos sua complexidade computacional, e apresentamos dois algoritmos, um que resolve este problema para árvores e outro para grafos de intervalo. Também mencionamos outras classes de grafos para os quais existe algoritmo polinomial que encontra um caminho mais longo.

Na Seção 4 tratamos da intersecção de todos os caminhos mais longos em um grafo. Exibimos alguns exemplos que mostram que essa intersecção pode ser vazia, mesmo quando impomos algumas restrições nos grafos. Na Seção 5 mencionamos alguns resultados quando se considera a intersecção de apenas um número fixo de caminhos mais longos. Na Seção 6 apresentamos as classes de grafos para os quais sempre existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos e na Seção 7, alguns resultados que obtivemos recentemente. Finalmente, na Seção 8, mencionamos alguns problemas em aberto de especial interesse.

2 Preliminares

Vamos apresentar algumas definições que serão usadas nesta monografia. Para maiores detalhes, recomendamos consultar o livro *Graph Theory*, de Bondy e Murty [4].

Um **grafo** é um par ordenado (V, E) , onde V e E são conjuntos disjuntos, e cada elemento de E corresponde a um par não-ordenado de elementos necessariamente distintos de V . Os elementos do conjunto V são chamados **vértices** e os elementos do conjunto E são chamados **arestas**. Observamos que os objetos definidos como grafos, em muitos textos, são chamados de grafos simples. Trataremos apenas de grafos **finitos**: aqueles que têm um número finito de vértices e de arestas.

Se G é um grafo, então também denotamos o seu conjunto de vértices por $V(G)$, e o seu conjunto de arestas por $E(G)$. Assim, tendo o nome de um grafo, ainda que os nomes do seu conjunto de vértices e do seu conjunto de arestas não sejam explicitados, podemos sempre nos referir a esses objetos. Chamamos $\|V(G)\|$ de **ordem** do grafo G .

Quando uma aresta a corresponde a um par $\{u, v\}$ de vértices, denotamos isso escrevendo $a = uv$ e dizemos que a **vai de u para v** , ou **liga** os vértices u e v , ou **incide em u** (e em v). Também dizemos que u e v são os **extremos** (ou as **pontas**) de a ; que u e v são **adjacentes** (ou **vizinhos**), e que u é **adjacente** a v . Denotamos por $N(v)$ o conjunto dos vizinhos de v .

Um vértice é dito **isolado** se não tem vizinhos no grafo. Um vértice é dito **dominante** se é vizinho de todos os demais vértices do grafo. Pares de vértices não-adjacentes são ditos **independentes**. Um conjunto de vértices é chamado **independente** (ou **estável**) se forem dois a dois independentes.

Sejam G e H dois grafos. Dizemos que G é **isomorfo** a H se existe uma bijeção $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$ para todo $u, v \in V(G)$. A bijeção φ é chamada um **isomorfismo**.

Um grafo H é um **subgrafo** de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$; escrevemos $H \subseteq G$. Neste caso, também dizemos que H **está contido** em G , ou que G **contém** H , ou que G é um **supergrafo** de H . Se $H \subseteq G$, mas $H \neq G$ então dizemos que H é um **subgrafo próprio** de G , e escrevemos $H \subset G$.

Se G é um grafo e $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$ então o subgrafo de G **induzido** (ou **gerado**) por X é o subgrafo H de G tal que $V(H) = X$ e $E(H)$ é precisamente o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em X . Neste caso, H é denotado por $G[X]$. Denotamos por $G - X$ o subgrafo induzido por $V(G) \setminus X$; é o subgrafo obtido de G removendo-se todos os vértices em X e todas as arestas que incidem neles.

Se G é um grafo e $\emptyset \neq F \subseteq E(G)$ então denotamos por $G - F$ o subgrafo de G obtido removendo-se as arestas em F . Para simplificar, em vez de $G - \{a\}$ escrevemos $G - a$, onde a é um vértice ou uma aresta de G .

Um grafo **completo** é um grafo em que quaisquer dois de seus vértices distintos são adjacentes. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n . Uma **clique** é um subgrafo de G que é um grafo completo.

Um **passeio** em um grafo é uma seqüência finita não vazia $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, onde $v_{i-1}v_i \in E(G)$ para todo $1 \leq i \leq k$. Dizemos que P é um passeio **de v_0 a (para) v_k** , e P **passa** pelos vértices v_i e pelas arestas $v_{i-1}v_i$. Os vértices v_0 e v_k são a **origem** e o **término** de P , respectivamente; e os vértices v_1, \dots, v_{k-1} são chamados **vértices internos**.

de P . O conjunto dos vértices e das arestas que definem P é denotado por $V(P)$ e $E(P)$, respectivamente. O **comprimento** de P , denotado por $\|P\|$, é o número de arestas de P .

Um **caminho** é um passeio sem vértices repetidos. Um **circuito** é um passeio em que, a menos da origem e do término, que necessariamente coincidem, todos os vértices são distintos. Um **caminho hamiltoniano** (**circuito hamiltoniano**) em um grafo G é um caminho (circuito) que passa por todos os vértices de G .

O **inverso** de um caminho $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$, denotado por P^{-1} , é o caminho (v_k, \dots, v_1, v_0) . A **concatenação** de dois caminhos $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ e $Q = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, definida se $v_k = u_0$, é o passeio $(v_0, v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_n)$. Denotamos esta operação por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Note que $P \cdot Q$ forma um caminho se, a menos de v_k e u_0 que necessariamente coincidem, os demais vértices de P são distintos dos demais vértices de Q . Dado dois vértices x e y , denotaremos por \mathbf{P}_{xy} um caminho mínimo de x a y .

A **união** (a **intersecção**) de dois grafos G e G' forma um grafo H tal que $V(H) = V(G) \cup V(G')$ ($= V(G) \cap V(G')$) e $E(H) = E(G) \cup E(G')$ ($= E(G) \cap E(G')$). Dizemos que dois grafos se **intersectam** se têm intersecção não vazia. Dizemos que dois grafos são **disjuntos** se têm intersecção vazia.

O termo passeio (respectivamente caminho, circuito) também será usado para denotar um grafo ou subgrafo cujos vértices e arestas são os termos de um passeio (respectivamente caminho, circuito).

Um grafo G é **conexo** se, para todo par de vértices distintos u, v , existe em G um caminho de u a v . Um grafo G é **k -conexo** ($k \geq 1$) se, para todo par de vértices distintos u, v , existem em G , k caminhos disjuntos de u a v . Se um grafo G é k -conexo e outro grafo H é l -conexo e $k > l$ dizemos que G tem maior conectividade que H .

Um (sub)grafo G é dito **maximal** (respectivamente **minimal**) em relação a uma certa propriedade \mathcal{P} (por exemplo, ser conexo) se G tem a propriedade \mathcal{P} , mas nenhum supergrafo (respectivamente subgrafo) próprio de G tem a propriedade \mathcal{P} . Por exemplo, dizer que H é *um subgrafo conexo maximal de G* equivale a dizer que H é *um subgrafo conexo de G e além disso, não existe nenhum supergrafo próprio de H que é um subgrafo conexo de G* . Note que, nada impede que G tenha um outro subgrafo conexo de tamanho maior ou igual ao de H .

Um subgrafo conexo maximal de um grafo é chamado **componente**. Dizemos que um vértice v de um grafo G é um **vértice-de-corte** se o número de componentes de $G - v$ é maior do que o número de componentes de G . Uma aresta e tal que $G - e$ tem mais componentes que G é chamada **ponte** ou **aresta-de-corte**.

Um **bloco** é um subgrafo 2-conexo maximal ou um K_2 ou um vértice isolado. Um **bloco trivial** é um K_2 ou um vértice isolado.

2.1 Classes de grafos

Uma classe de grafos é um conjunto de grafos que satisfazem determinadas propriedades. Definimos algumas classes que serão usadas mais adiante.

- Um grafo é **planar** se é possível desenhá-lo no plano sem cruzamento de arestas.
- Um grafo é uma **árvore** se é conexo e não contém circuitos.

- Um grafo G é **bipartido** se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y ($X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$) de modo que cada aresta de G tenha um extremo em X e outro em Y . Uma tal partição é chamada uma **bipartição** do grafo.
- Um grafo é um **grafo dividido** (ou um grafo split) se o conjunto de seus vértices pode ser particionado em dois conjuntos X e Y , tais que X induz uma clique e Y um conjunto independente.
- Um grafo é **hamiltoniano-conexo** se, para todo par de vértices distintos u, v , existe em G um caminho hamiltoniano de u a v .

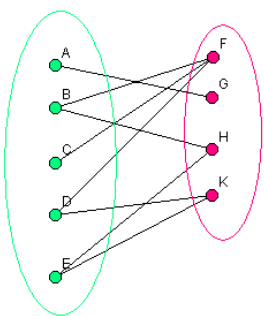
Vamos introduzir aqui duas classes de grafos que têm uma estrutura semelhante a árvores.

- Um grafo G é um **grafo de blocos** se G é conexo e todo subgrafo 2-conexo maximal é uma clique. Grafos de blocos podem ser obtidos a partir de uma árvore substituindo cada aresta da árvore por uma clique e de modo que as cliques tenham no máximo um vértice em comum.
- Um grafo G é um **cacto** se cada aresta pertence a no máximo um circuito em G . Um cacto pode ser obtido a partir de uma árvore, substituindo cada aresta da árvore por um circuito e de modo que os circuitos tenham no máximo um vértice em comum. (Ou seja, um catus é composto por blocos que são circuitos ou caminhos).
- Um grafo é **exoplanar** se é possível desenhá-lo no plano sem cruzamento de arestas de forma que todos os seus vértices estejam na face externa do desenho. Observe que todo cacto é um grafo exoplanar.
- Para uma coleção de conjuntos, o **grafo de intersecção** é o grafo com um vértice para cada conjunto, em que vértices são adjacentes se os conjuntos se intersectam.
- Dada uma permutação $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n)$ dos números $1, 2, 3, \dots, n$, um **grafo de permutação** tem um vértice para cada número $1, 2, 3, \dots, n$ e uma aresta entre dois números que estão em ordem invertida na permutação. Também é possível representar um grafo de permutação como um grafo intersecção de segmentos retas entre duas retas paralelas.
- Um grafo é um **grafo de intervalos** se for um grafo de intersecção de conjuntos de intervalos na reta real. Ele possui um vértice para cada intervalo na reta e um aresta entre quaisquer dois pares de vértices correspondentes a intervalos que se intersectam.
- Um grafo G é um **grafo arco-circular** se ele for o grafo intersecção de arcos em um círculo. Ele possui um vértice para cada arco no círculo e um aresta entre quaisquer dois pares de vértices correspondentes a arcos que se intersectam.
- Um grafo é **limiar** se pode ser contruído a partir de um grafo com apenas um vértice através de repetições das seguintes operações:

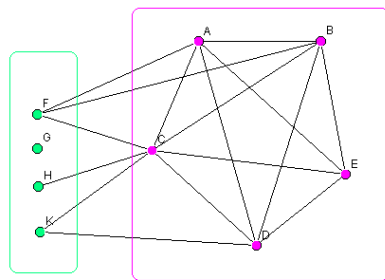
1. Adição de um único vértice isolado no grafo.

2. Adição de um único vértice dominante no grafo.

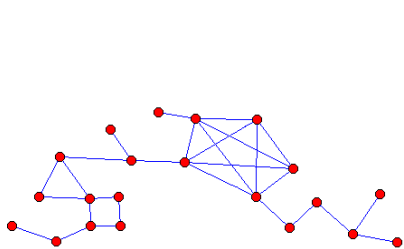
- Um grafo é um grafo **ptolemaico** se, para cada quatro vértices u, v, w, x , vale a desigualdade ptolemaica: $d(u, v)d(w, x) \leq d(u, w)d(v, x) + d(u, x)d(v, w)$.



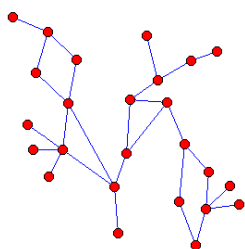
Grafo bipartido



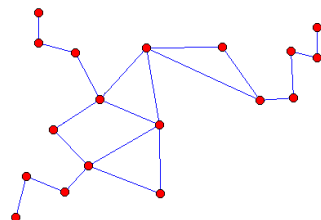
Grafo dividido



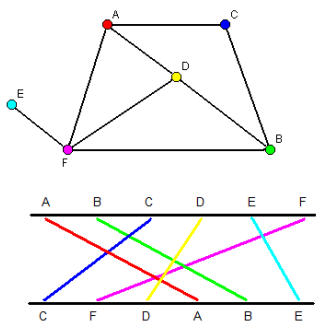
Grafo de blocos



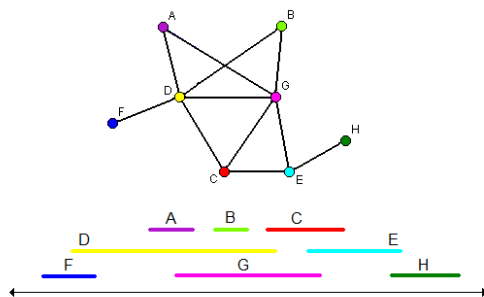
Cacto



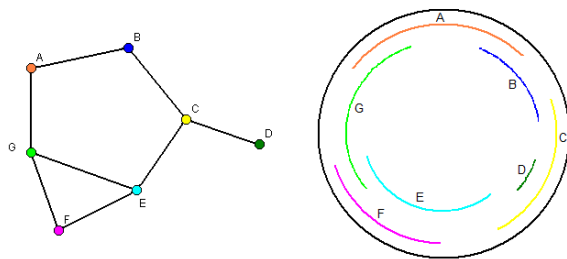
Grafo exoplanar



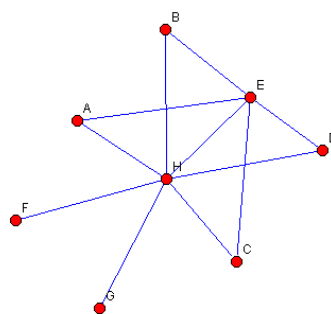
Grafo de permutação



Grafo de intervalos



Grafo arco-circular



Grafo limiar

3 O Problema algorítmico

Em teoria dos grafos, “o problema do caminho mais longo” se refere, usualmente, ao problema de encontrar um caminho de comprimento máximo em um dado grafo. A versão deste problema que pode ser chamada de problema de decisão é a seguinte:

Problema Caminho(k, G): Dado um grafo G e um natural k , decidir se existe em G um caminho de comprimento maior ou igual a k .

Se houvesse um algoritmo polinomial para resolver este problema de decisão, então haveria um algoritmo polinomial para resolver o problema do caminho mais longo (e, como provaremos a seguir, para resolver todos os problemas \mathcal{NP} -completos). Suponha que a função CAMINHO(k, G) receba um inteiro k e um grafo G e devolva *sim* se existe um caminho de comprimento maior ou igual a k em G e devolva *não*, caso contrário. Se esta função fosse polinomial, então o seguinte algoritmo, que encontra um caminho de comprimento máximo em um grafo G , seria polinomial.

```
CAMINHO MAIS LONGO( $G$ )
1   $k \leftarrow \|V(G)\| - 1$ 
2  enquanto (CAMINHO( $k, G$ ) = não)
3       $k \leftarrow k - 1$ 
4   $H \leftarrow G$ 
5  para  $i$  em  $E(H)$ 
6      remova  $i$  de  $H$ 
7      se (CAMINHO( $k, H$ ) = não)
8          insira  $i$  de volta em  $H$ 
9  devolva  $H$ 
```

Note que as linhas 2 e 3 são executadas no máximo $\|V(G)\|$ vezes e o bloco de linhas 5-8 no máximo $\|E(G)\|$ vezes. Portanto a função CAMINHO(k, G) é chamada no máximo $\|V(G)\| + \|E(G)\|$ vezes.

Proposição 1 O problema Caminho(k, G) é \mathcal{NP} -completo.

Prova. A \mathcal{NP} -completude do problema de decisão pode ser provada através da redução do problema do caminho hamiltoniano (que é conhecidamente \mathcal{NP} -completo, veja [9]). Além disso, é necessário provar que o problema está em \mathcal{NP} . Mas isto é trivial, pois um certificado para a instância *sim* do problema é a descrição de um caminho de comprimento maior ou igual a k . ■

3.1 Árvores

Como acabamos de ver, o problema de encontrar um caminho mais longo de um grafo é \mathcal{NP} -difícil para o caso geral. No entanto, para algumas classes especiais de grafos, existem algoritmos polinomiais que resolvem o problema. Por exemplo, se o grafo for uma árvore, é possível fazê-lo em tempo linear. Este algoritmo foi proposto por Dijkstra por volta de 1960. É interessante notar que a prova formal só foi apresentada em 2002 por Bulterman e outros [5].

CAMINHO MAIS LONGO EM ÁRVORE (G)

- 1 Escolha um vértice qualquer da árvore G e nomeie-o X .
- 2 Encontre um caminho mais longo em G com início X .
- 3 Chame a outra extremidade deste caminho de Y .
- 4 Encontre um caminho mais longo em G com início Y .
- 5 Chame a outra extremidade deste caminho de Z .
- 6 Devolva o caminho de Y a Z . Este é um caminho mais longo em G .

Para compreender melhor o algoritmo, Bulterman e outros [5] descreveram-no de uma forma muito tangível. Imagine que nos é dado um modelo físico da árvore em que cada dois vértices adjacentes são ligados por um pedaço de barbante de mesmo comprimento. Agora escolha um vértice X qualquer da árvore física e segure a árvore a partir de X , deixando o restante pendurado. Chame de Y o vértice mais distante de X (o que está mais em baixo no modelo físico). Segure a árvore a partir de Y e chame de Z o vértice mais distante de Y . O caminho entre Y e Z é um caminho mais longo na árvore.

3.1.1 Complexidade

Note que a complexidade do passo 2 é $\theta(c * n)$, onde $(0.5 \leq c \leq 1)$. E a complexidade do passo 4 é $\theta(n)$. Portanto a complexidade do algoritmo inteiro é $\theta(n)$.

3.1.2 Corretude

Observe que em árvores, dado quaisquer dois vértices x e y , só existe um caminho de x a y que denotaremos por \overline{xy} .

Pelo algoritmo sabemos que

- (1) $\forall z \in V(G), \|\overline{zX}\| \leq \|\overline{YX}\|$ e
- (2) $\forall z \in V(G), \|\overline{zY}\| \leq \|\overline{YZ}\|$.

Para provar a corretude do algoritmo precisamos provar que

- (3) $\forall v, w \in V(G), \|\overline{vw}\| \leq \|\overline{YZ}\|$.

Prova. Sejam $v, w \in V(G)$ dados. Vamos provar que $\|\overline{vw}\| \leq \|\overline{YZ}\|$.

Suponha que existe m que está simultaneamente no caminho \overline{vX} e no caminho \overline{Yw} . Por (1), temos que $\|\overline{vX}\| \leq \|\overline{YX}\|$. Como m está no caminho \overline{vX} , então $\|\overline{vm}\| + \|\overline{mX}\| \leq \|\overline{Ym}\| + \|\overline{mX}\|$ e portanto $\|\overline{vm}\| \leq \|\overline{Ym}\|$. Como m está no caminho \overline{Yw} , então $\|\overline{vm}\| + \|\overline{mw}\| \leq \|\overline{Ym}\| + \|\overline{mw}\|$ e portanto $\|\overline{vw}\| \leq \|\overline{Yw}\|$.

Ou seja, se existe m que está simultaneamente no caminho \overline{vX} e no caminho \overline{Yw} , então $\|\overline{vw}\| \leq \|\overline{Yw}\|$. Analogamente, podemos provar que, se existe m que está simultaneamente no caminho \overline{wX} e no caminho \overline{Yv} , então $\|\overline{vw}\| \leq \|\overline{Yv}\|$.

Para ver que ou existe $m \in (\overline{vX} \cap \overline{Yw})$ ou existe $m \in (\overline{wX} \cap \overline{Yv})$, basta observar que isso é uma instância de uma propriedade geral de árvores que $\forall A, B, C, D \in V(G)$ ou existe $m \in (\overline{AB} \cap \overline{CD})$ ou existe $m \in (\overline{AD} \cap \overline{CB})$.

Essa propriedade vale pois: (a) se \overline{AB} e \overline{CD} se intersectam, então, qualquer vértice na intersecção é um candidato para a primeira disjunção; (b) se \overline{AB} e \overline{CD} são totalmente

disjuntos, então existe um único caminho minimal ligando \overline{AB} a \overline{CD} e qualquer vértice desse caminho é um candidato para segunda disjunção.

Portanto, temos que $\|\overline{vw}\| \leq \|\overline{Yw}\|$ ou $\|\overline{vw}\| \leq \|\overline{Yv}\|$. Isso implica que existe z tal que $\|\overline{vw}\| \leq \|\overline{Yz}\|$. Por (2) concluímos que $\|\overline{vw}\| \leq \|\overline{Yz}\| \leq \|\overline{YZ}\|$. Logo a afirmação (3), que queríamos provar, vale e portanto o algoritmo está correto. ■

3.2 Grafos de intervalos

Existem outras classes de grafos para os quais já se conhece algoritmo polinomial para resolver o problema. Uehara e Uno [26, 27] provaram isso para grafos de blocos, cactos, grafos de permutação bipartido, grafos limiares e algumas outras classes de grafos. Uehara e Valiente [28] melhoraram o algoritmo para grafos de permutação bipartido. Ghosh e outros [10] provaram o mesmo fato para grafos biconvexos, uma super-classe dos grafos de permutação bipartido. Estes autores estavam trabalhando em subclasses de grafos de intervalos, mas finalmente, em 2009, Ioannidou, Mertzios, e Nikolopoulos [14] [15] provaram que para os grafos de intervalos, existe um algoritmo polinomial que encontra um caminho mais longo.

Apresentaremos aqui o algoritmo para encontrar um caminho mais longo em grafos de intervalos. Para a prova formal da corretude do algoritmo, veja [15]. Aqui apenas enunciaremos alguns lemas que ajudam a compreender o algoritmo e que são usados para a prova de corretude, mas não os provaremos.

Antes de apresentar o algoritmo precisamos de algumas definições. Seja G um grafo de intervalos. É interessante notar que todo subgrafo induzido de G é também um grafo de intervalos.

Definição 2 Uma **r-ordenação** (ou “right-end ordering”) dos vértices de G é uma ordenação $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ tal que se $i < j < k$ e $v_i v_k \in E(G)$, então $v_j v_k \in E(G)$. Ademais, se $i < j$ então dizemos que $v_i <_\pi v_j$.

Essa ordenação (veja Figura 1) foi proposta por Ramalingam e Rangan [21], que também provaram o seguinte lema.

Lema 3 Todo grafo de intervalos possui uma r-ordenação.

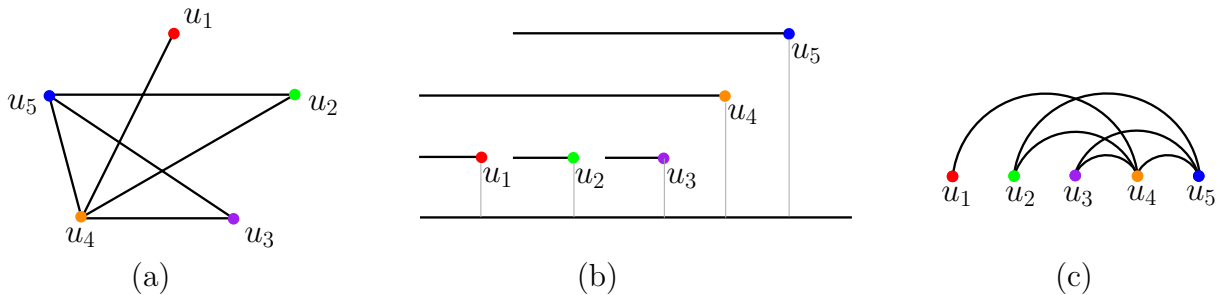


Figura 1: (a) Um grafo de intervalos G , (b) o modelo de intersecção de G , (c) a r-ordenação $\pi = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ de G

Ramalingam e Rangan [21] mostraram que é possível conseguir essa ordenação em tempo proporcional a $\|V(G)\| + \|E(G)\|$. Essa ordenação tem sido útil para provar diversas propriedades para grafos de intervalos [21] [1].

O algoritmo que chamaremos de Algoritmo CML-Intervalos (abreviação para Caminho Mais Longo em Grafos de Intervalos) encontra um caminho mais longo em um dado grafo de intervalos. Esse algoritmo é composto de três fases:

- Fase 1: Recebe um grafo de intervalos G e constrói um grafo de intervalos auxiliar H ;
- Fase 2: Encontra o caminho mais longo P de H pelo Algoritmo CML-em- H ;
- Fase 3: Encontra o caminho mais longo \hat{P} de G a partir de P .

Esse algoritmo encontra o caminho mais longo P de H usando técnicas de programação dinâmica e depois encontra um caminho mais longo \hat{P} de G a partir de P . Descreveremos em mais detalhe cada uma das três etapas e apresentaremos os resultados mais importantes para compreensão do algoritmo.

3.2.1 Fase 1: construindo o grafo auxiliar H

Apresentamos aqui a primeira fase do algoritmo: dado um grafo de intervalos G e uma r -ordenação π de G , construímos o grafo de intervalos H e uma r -ordenação σ de H .

Construção do grafo auxiliar H e da r -ordenação σ de H : Seja $n = \|V(G)\|$ e seja $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ uma r -ordenação de G . Inicialmente seja H uma cópia de G , $\sigma = \pi$ e $A(H) = \emptyset$. Percorra os vértices de π da esquerda para a direita e faça: para cada v_i , adicione dois vértices $a_{i,1}$ e $a_{i,2}$ a $V(H)$ e faça ambos serem adjacentes a v_i e a todo $v_j \in N(v_i)$ se $j > i$. Adicione $a_{i,1}$ e $a_{i,2}$ ao conjunto $A(H)$. Atualize σ tal que $a_{1,1} <_\sigma a_{1,2} <_\sigma v_1$ e $v_{i-1} <_\sigma a_{i,1} <_\sigma a_{i,2} <_\sigma v_i$ para todo i , $2 \leq i \leq n$. A Figura 2 mostra o modelo de intersecção do grafo H construído a partir do grafo G da Figura 1.

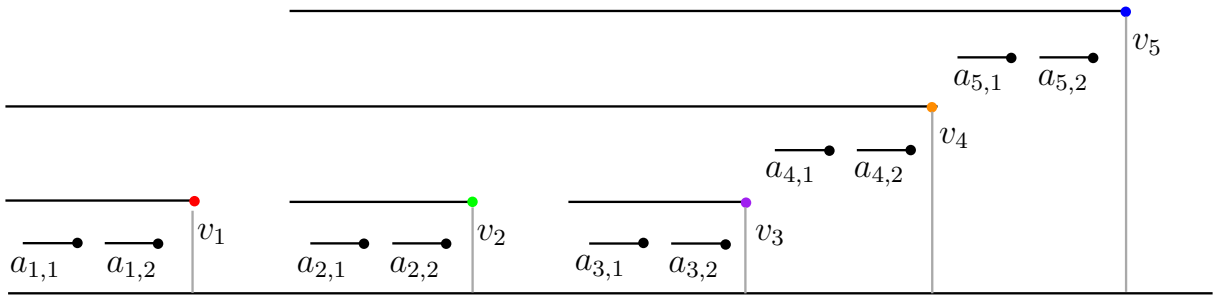


Figura 2: Modelo de intersecção do grafo H

Chamaremos o grafo construído H de o **grafo estável-conexo** de G . Pela construção, o conjunto dos vértices de H é formado pelo conjunto $C(H) = V(G)$ e os vértices do conjunto $A(H)$. Chamaremos $C(H)$ o conjunto de **vértices conectores** do H e $A(H)$ o conjunto de **vértices estáveis** de H . Observe que $\|A(H)\| = 2\|V(G)\|$.

Lema 4 Se G é um grafos de intervalos, então o grafo estável-conexo H de G é um grafo de intervalos e σ é uma r -ordenação para H .

Note que os vértices estáveis de H formam um conjunto estável, ou seja, não existe dois vértices estáveis adjacentes. Observe também que os vizinhos de um vértice estável formam um clique em G .

3.2.2 Fase 2: encontrando um caminho mais longo em H

Definição 5 Seja H um grafo estável-conexo e seja $\sigma = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a r -ordenação de H . Para todo vértice conector $c \in C(H)$, seja $f(c) = \min\{i : u_i \in N(c)\}$. Para cada par de índices i, j , $1 \leq i \leq j \leq n$, definimos o grafo $H(i, j)$ como o subgrafo $H[S]$ de H , induzido pelo conjunto $S = \{u_i, u_{i+1}, \dots, u_j\} \setminus \{U_k \in C(H) : u_{f(u_k)} <_\sigma u_i\}$ (veja Figura 3).

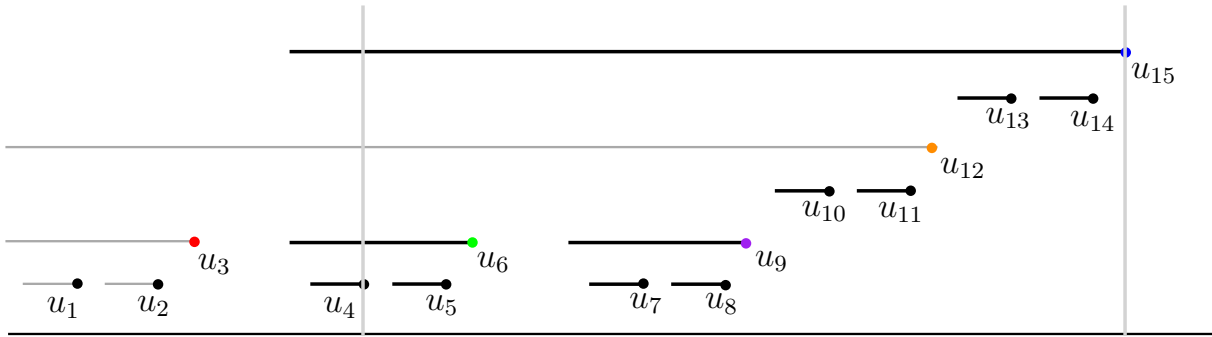


Figura 3: O subgrafo $H(4, 15)$, sendo $\sigma = (u_1, u_2, \dots, u_{15})$

Definição 6 Seja π uma r -ordenação de G . Um caminho $P = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ de G é um **caminho normal** se satisfaz: (a) para todo $2 \leq i \leq k$, $w_1 <_\pi w_i$; e (b) para todo $2 \leq i < j \leq k$, se $w_j \in N(w_{i-1})$, então $w_i <_\pi w_j$. Chamaremos w_1 de origem de P .

Definição 7 Seja H um grafo estável-conexo e seja P um caminho de $H(i, j)$, $2 \leq i < j \leq n$. O caminho P é **binormal** se P é um caminho normal de $H(i, j)$, ambas as extremidades de P são vértices estáveis e não existem dois vértices conectores que aparecem consecutivamente em P .

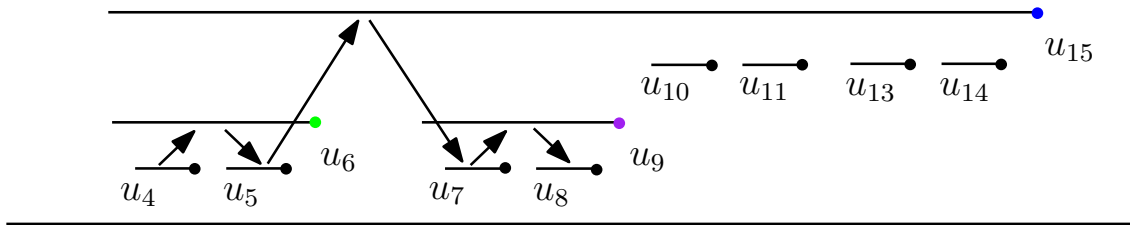


Figura 4: O caminho $P(u_4; 4, 15) = (u_4, u_5, u_6, u_{15}, u_7, u_8, u_9)$ é um caminho binormal mais longo em $H(4, 15)$ com origem em u_4

Notação 8 *Seja H um grafo estável-conexo e seja $\sigma = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ a r -ordenação de H . Para todo vértice estável $u_k \in A(H(i, j))$, denotamos por $P(u_k; i, j)$ o caminho binormal mais longo de $H(i, j)$ com origem u_k e por $l(u_k; i, j)$ o comprimento de $P(u_k; i, j)$.*

O Algoritmo CML_em_H calcula, para cada vértice estável $u_k \in A(H(i, j))$, o comprimento $l(u_k; i, j)$ e o caminho correspondente $P(u_k; i, j)$ (veja Figura 4). Como $H(1, n) = H$, segue que o maior dos valores dentre $l(u_k; 1, n)$, onde $u_k \in A(H)$, é comprimento do maior caminho binormal $P(u_k; 1, n)$ de H . O seguinte lema garante que o caminho binormal mais longo computado pelo Algoritmo CML_em_H é um caminho mais longo em H .

Lema 9 *Seja P um caminho binormal mais longo de H e seja P' um caminho mais longo de H . Então $\|P\| = \|P'\|$.*

Algoritmo CML_em_H

Entrada: um grafo estável-conexo H , e uma r -ordenação σ de H

Saída: um caminho mais longo binormal de H

1. **para** $j = 1$ **até** n
 2. **para** $i = j$ **decrecendo até** 1
 3. **se** $i = j$ e $u_i \in A(H)$ **então**
 4. $l(u_i; i, i) \leftarrow 1$; $P(u_i; i, i) = (u_i)$;
 5. **se** $i \neq j$ **então**
 6. **para** cada vértice $u_k \in A(H)$, $i \leq k \leq j - 1$
 7. $l(u_k; i, j) \leftarrow l(u_k; i, j - 1)$; $P(u_k; i, j) = P(u_k; i, j - 1)$;
 8. **se** $u_j \in A(H)$ **então**
 9. $l(u_j; i, j) \leftarrow 1$; $P(u_j; i, j) = (u_j)$;
 10. **se** $u_j \in C(H)$ e $i \leq f(u_j)$ **então**
 11. execute o *processa*($H(i, j)$)
 12. **compute** o $\max\{l(u_k; 1, n) : u_k \in A(H)\}$ e o caminho correspondente $P(u_k; 1, n)$;
- processa**($H(i, j)$)
1. **para** $y = f(u_j) + 1$ **até** $j - 1$
 2. **para** $x = f(u_j)$ **até** $y - 1$
 3. **se** $u_x, u_y \in A(H)$ **então**
 4. $w_1 \leftarrow l(u_x; i, j - 1)$; $P'_1 = P(u_x; i, j - 1)$;
 5. $w_2 \leftarrow l(u_y; x + 1, j - 1)$; $P'_2 = P(u_y; x + 1, j - 1)$;
 6. **se** $w_1 + w_2 + 1 > l(u_y; i, j)$ **então**
 7. $l(u_y; i, j) \leftarrow w_1 + w_2 + 1$; $P(u_y; i, j) = (P'_1, u_j, P'_2)$;
 8. **devolva** o valor $l(u_k; i, j)$ e o caminho $P(u_k; i, j)$, $\forall u_k \in A(H(f(u_j) + 1, j - 1))$;

3.2.3 Fase 3: encontrando um caminho mais longo em G

Nesta fase, computamos o caminho \hat{P} a partir do caminho binormal mais longo P de H , que foi devolvido pelo Algoritmo CML_em_H, simplesmente removendo todos os vértices estáveis de P .

Para verificar que \hat{P} é de fato um caminho mais longo precisamos do seguinte lema.

Lema 10 *Seja H um grafo estável-conexo de G . Se P é um caminho binormal mais longo de H e P' um caminho mais longo de G , então $\|P\| = 2\|P'\| + 1$.*

Seja P é um caminho binormal mais longo de H . Pela construção de H , todos os vizinhos de um vértice estável a são vértices conectores e formam um clique em G . Logo os vizinhos de a em P são vértices de G e são adjacentes em G . Portanto \hat{P} é de fato um caminho. Ademais, como P é binormal, P tem k vértices conectores e $k + 1$ vértices estáveis. Segue que $\|P\| = 2k + 1$ e $\|\hat{P}\| = k$. Pelo Lemma 10, \hat{P} é um caminho mais longo em G .

Apresentamos abaixo o Algoritmo CML_Inteval, que encontra um caminho mais longo de um grafo de intervalos G .

Algoritmo CML_Intevalos

Entrada: um grafo de intervalos G e uma r -ordenação π de G

Saída: um caminho mais longo \hat{P} de G

1. A partir de G e π , construir H o grafo estável-conexo de G e σ uma r -ordenação de H ; seja $V(H) = C \cup A$, onde $C = V(G)$ e A são os conjuntos dos vértices conectores e estáveis de H , respectivamente.
 2. Compute P um caminho binormal de H , usando o Algoritmo CLM_em_H; seja $P = (v_1, v_2, \dots, v_{2k}, v_{2k+1})$, onde $v_{2i} \in C$, $1 \leq i \leq k$ e $v_{2i+1} \in A$, $0 \leq i \leq k$.
 3. Compute o caminho mais longo $\hat{P} = (v_2, v_4, \dots, v_{2k})$ de G , removendo os vértices $\{v_1, v_3, \dots, v_{2k+1}\}$ do caminho binormal mais longo P de H .
-

3.2.4 Complexidade

Seja G um grafo de intervalos com n vértice e m arestas. A construção de uma r -ordenação de G pode ser feita em tempo $O(n + m)$ [21] [1].

A Fase 1 leva tempo $O(n^2)$, pois, para cada um dos n vértices conectores, adicionamos dois vizinhos em tempo $O(1)$ e calculamos sua vizinhança em tempo $O(n)$.

Para determinar o tempo da Fase 2, observe que a subrotina *processa()* leva tempo $O(n^2)$ devido aos $O(n^2)$ pares de vizinhos do vértice conector u_j no grafo $H(i, j)$. Além disso, a subrotina *processa()* é executada no máximo uma vez para cada subgrafo $H(i, j)$, $1 \leq i \leq j \leq n$, ou seja é excutada $O(n^2)$ vezes. Portanto a Fase 2 leva tempo $O(n^4)$.

A Fase 3 pode ser feita em tempo $O(n)$, pois basta percorrer o caminho P construído pelo Algoritmo CML_em_H uma vez, removendo os vértices estáveis. Portanto, a complexidade do algoritmo inteiro é $O(n^4)$.

3.3 Outros resultados

Em 2010, Corneil e Mertzios [20] e Ioannidou e Nikolopoulos [16], independentemente desenvolveram algoritmos polinomiais que encontram um caminho mais longo em grafos de co-comparabilidade, que é uma super-classe dos grafos de intervalos.

Em 2011, Bezáková e Mertzios [19] também encontraram algoritmos polinomiais que resolvem o problema para os grafos arco-circulares, outra super-classe dos grafos de intervalos.

Também existe um algoritmo polinomial, proposto por Takahara e outros em 2008 [24], que encontra um caminho mais longo em grafos ptolemaicos.

4 O Problema estrutural

Agora vamos tratar de outro problema sobre caminhos mais longos. Obviamente, um grafo pode ter mais de um caminho mais longo. O que podemos afirmar sobre a intersecção destes caminhos?

Em 1966, em um colóquio sobre teoria dos grafos, Gallai [8] perguntou:

Problema \mathcal{P}_∞ : *Seja G um grafo conexo qualquer. Existe em G um vértice comum a todos os caminhos mais longos?*

Em outras palavras, Gallai perguntava se a intersecção de todos os caminhos mais longos é sempre não-vazia. Essa pergunta é natural, pois como veremos mais adiante (na Seção 5.1), é fácil provar que em um grafo conexo quaisquer dois caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum. O mesmo vale para quaisquer dois circuitos mais longos em grafos 2-conexos. (Para entender a razão da exigência da 2-conectividade do grafo quando tratamos de circuitos, basta observar o grafo da Figura 5, no qual todos seus circuitos mais longos são dois a dois disjuntos.)

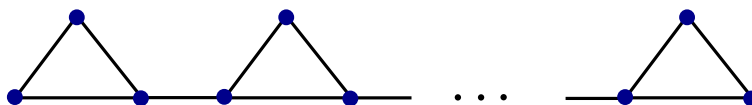


Figura 5: Grafo cujos circuitos mais longos são dois a dois disjuntos

Porém nessa época já se conhecia um exemplo de um grafo 2-conexo em que todos os circuitos mais longos não têm um vértice em comum. Esse exemplo trata-se do grafo de Petersen (veja Figura 6), que é sabidamente hypohamiltoniano, ou seja, não possui um circuito hamiltoniano, mas o grafo obtido pela remoção de qualquer um de seus vértices é hamiltoniano. Portanto existe um circuito mais longo que deixa qualquer dado vértice de fora. Mas até então ninguém conhecia um exemplo equivalente para caminhos mais longos.

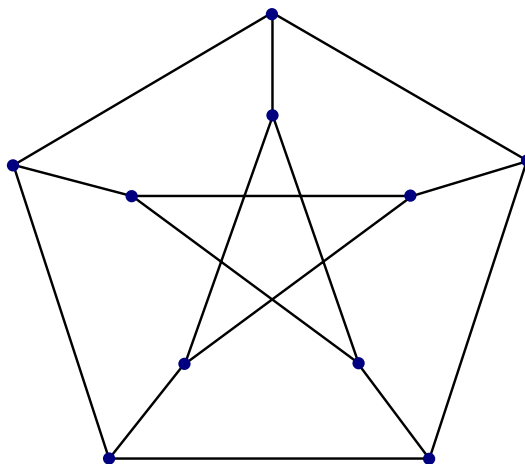


Figura 6: Grafo de Petersen

4.1 Primeiro exemplo

Pouco tempo depois, em 1969, Walther [30] construiu um grafo provando que não é sempre verdade que existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos. O grafo, reproduzido abaixo, tem 25 vértices e é planar.

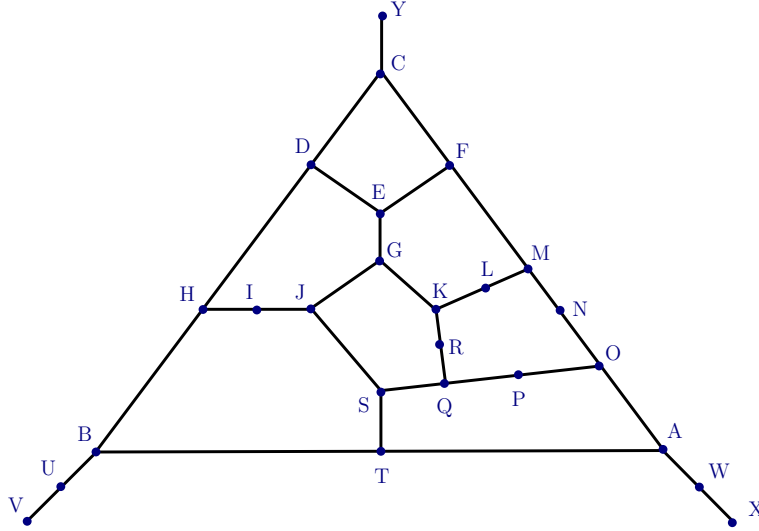


Figura 7: Primeiro grafo, encontrado por Walther, que não tem vértice comum a todos os caminhos mais longos

Neste grafo, existem muitos caminhos mais longos distintos, porém os 13 apresentados abaixo são suficientes para provar que a intersecção dos caminhos mais longos é vazia:

1. V-U-B-H-I-J-G-E-D-C-F-M-L-K-R-Q-P-O-A-W-X
2. V-U-B-T-S-J-I-H-D-C-F-M-L-K-R-Q-P-O-A-W-X
3. V-U-B-T-S-J-I-H-D-E-F-M-L-K-R-Q-P-O-A-W-X
4. V-U-B-T-S-J-I-H-D-C-F-E-G-K-R-Q-P-O-N-M-L
5. X-W-A-T-S-Q-P-O-N-M-L-K-G-J-I-H-D-E-F-C-Y
6. V-U-B-T-S-J-G-E-D-C-F-M-L-K-R-Q-P-O-A-W-X
7. V-U-B-T-S-J-I-H-D-C-F-E-G-K-L-M-N-O-A-W-X
8. V-U-B-T-S-J-I-H-D-C-F-E-G-K-R-Q-P-O-A-W-X
9. V-U-B-H-D-C-F-E-G-K-L-M-N-O-P-Q-S-T-A-W-X
10. V-U-B-H-I-J-G-E-D-C-F-M-L-K-R-Q-S-T-A-W-X
11. V-U-B-H-I-J-G-E-D-C-F-M-N-O-P-Q-S-T-A-W-X
12. X-W-A-O-N-M-L-K-R-Q-S-T-B-H-I-J-G-E-D-C-Y

13. X-W-A-O-N-M-L-K-R-Q-S-T-B-H-I-J-G-E-F-C-Y

De fato, note que cada vértice tem pelo menos um desses caminhos que não passa por ele. Na tabela abaixo indicamos, para cada vértice do grafo, um dos caminhos que não passa por ele.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y
4	5	3	13	2	12	2	6	6	9	11	8	8	1	10	7	7	7	1	1	5	5	4	4	1

Deste resultado surgiram novas perguntas:

Este exemplo é minimal? E se impusermos restrições nos grafos (planaridade, maior conectividade)? E se em vez de tomarmos a intersecção de todos os caminhos mais longos, tomarmos apenas a de alguns deles?

Algumas destas perguntas foram levantadas por Zamfirescu [32] em 1972, pedindo explicitamente por exemplos de ordem minimal. Vamos tratar aqui do que se sabe sobre estas perguntas.

Chamamos de \mathcal{P}_∞ o problema original de Gallai. Chamaremos de \mathcal{P}_n , para $n \geq 2$, o problema análogo mas olhando a intersecção de apenas n caminhos mais longos. Em qualquer um dos casos, se tivermos considerando alguma restrição no problema, escreveremos $\mathcal{P}\{\alpha\}$, onde α é a restrição imposta.

4.2 Exemplo minimal

Alguns anos depois do primeiro exemplo que resolve \mathcal{P}_∞ ser apresentado, Walther [31] e Zamfirescu [35], independentemente, encontraram um exemplo menor com 12 vértices.

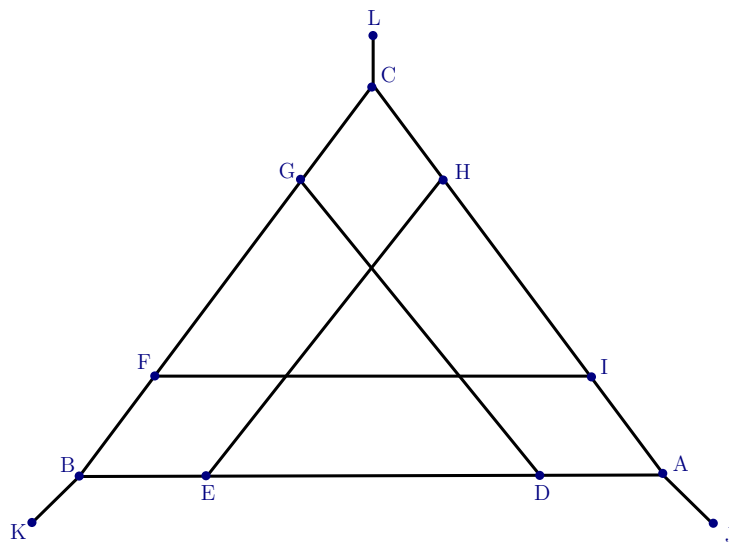


Figura 8: Menor grafo conhecido cuja intersecção de todos os caminhos mais longos é vazia

Observe que se identificarmos os vértices de grau 1, temos o grafo de Petersen da Figura 6. Assim, é fácil ver que não existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos.

Primeiramente, observe que o caminho mais longo necessariamente não passa por um dos vértices de grau 1 e que se ele passasse por todos os demais vértices, então esse caminho corresponderia a um circuito hamiltoniano no grafo de Petersen. Portanto, o caminho mais longo tem no máximo 10 vértices. Agora, para cada um dos 9 vértices de grau maior que 1, construa o caminho correspondente ao circuito mais longo do grafo Petersen, que não passa por esse vértice. Esses caminhos têm 10 vértices e portanto são caminhos mais longos. Além disso, observe que quando um caminho não passa pelo vizinho de um vértice de grau 1, então também não passa pelo vértice de grau 1. Logo esses 9 caminhos não possuem um vértice em comum.

Indicamos abaixo 9 caminhos mais longos do grafo da Figura 8 com intersecção vazia.

1. L-C-G-D-E-H-I-F-B-K
2. J-A-I-F-G-D-E-H-C-L
3. K-B-E-H-I-F-G-D-A-J
4. K-B-E-H-C-G-F-I-A-J
5. J-A-D-G-C-H-I-F-B-K
6. L-C-G-D-A-I-H-E-B-K
7. K-B-F-I-A-D-E-H-C-L
8. J-A-I-F-B-E-D-G-C-L
9. L-C-H-E-B-F-G-D-A-J

Os 3 primeiros caminhos são simétricos e não passam por: A e J; B e K; C e L, nesta ordem. Os 6 últimos também são simétricos e não passam por: D; E; F; G; H; I, nesta ordem.

4.3 Grafos planares

O primeiro exemplo obtido que resolve \mathcal{P}_∞ tem 25 vértices e é planar, mas o menor exemplo planar conhecido, encontrado por Schmitz [22] em 1975, possui 17 vértices.

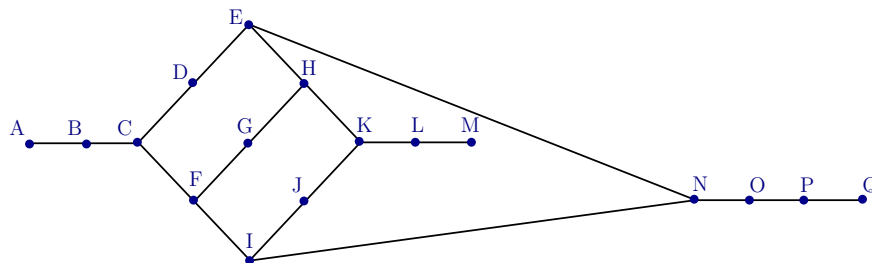


Figura 9: Menor grafo planar cuja intersecção de todos os caminhos mais longos é vazia

Exibimos abaixo 7 caminhos mais longos do grafo da Figura 9 cuja intersecção é vazia:

1. A-B-C-D-E-H-G-F-I-J-K-L-M
2. A-B-C-D-E-H-G-F-I-N-O-P-Q
3. M-L-K-H-G-F-C-D-E-N-O-P-Q
4. M-L-K-J-I-F-C-D-E-N-O-P-Q
5. M-L-K-J-I-F-G-H-E-N-O-P-Q
6. A-B-C-F-G-H-K-J-I-N-O-P-Q
7. A-B-C-D-E-H-K-J-I-N-O-P-Q

Na tabela abaixo indicamos, para cada vértice do grafo, um caminho que não passa por ele.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
3	3	5	5	6	7	4	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1

Zamfirescu [34] conjecturou que o grafo da Figura 8 e o grafo da Figura 9 são minimais para os problemas \mathcal{P}_∞ e $\mathcal{P}_\infty\{planar\}$, respectivamente.

4.4 Grafos k -conexos

A seguinte pergunta surge de maneira natural: “Para que valores de k existem exemplos de grafos k -conexos em que a intersecção dos caminhos mais longos é vazia?” Exigindo-se maior conectividade, é de se esperar que, se existirem tais exemplos, então serão de maior ordem.

4.4.1 Grafos 2-conexos

O primeiro exemplo para grafos 2-conexos, construído em 1972 por Zamfirescu [32], tem 82 vértices e é planar. Quatro anos mais tarde o próprio Zamfirescu [35] descobriu os menores exemplos conhecidos até hoje, tanto para o problema $\mathcal{P}_\infty\{2-conexo\}$ quanto para o $\mathcal{P}_\infty\{2-conexo, planar\}$, com 26 (veja Figura 10(a)) e 32 (veja Figura 10(b)) vértices respectivamente.

4.4.2 Grafos 3-conexos

Para grafos 3-conexos, o primeiro exemplo foi construído por Grünbaum [12] em 1974 e tem 484 vértices. Mas Zamfirescu [35] produziu uma resposta melhor, sem exigir planaridade, com 36 vértices (veja Figura 11). Exigindo-se planaridade, o melhor exemplo foi obtido por Hatzel [13], em 1979, com 224 vértices.

4.4.3 Grafos 4-conexos

Para grafos 4-conexos a pergunta correspondente, conforme Zamfirescu [36], continua em aberto:

Existe um grafo 4-conexo cuja intersecção de todos os caminhos mais longos é vazia?

Para grafos planares 4-conexos sabe-se que a resposta é negativa. Isso é consequência direta do conhecido Teorema de Tutte [25] que afirma que qualquer grafo planar 4-conexo é hamiltoniano.

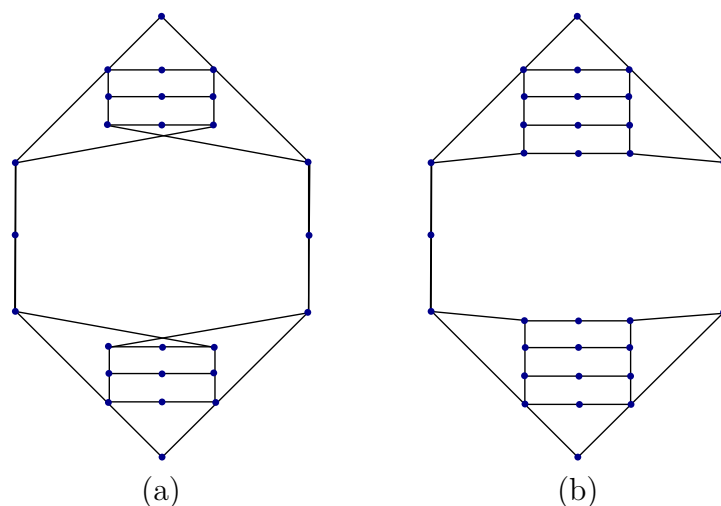


Figura 10: (a) Menor grafo 2-conexo conhecido que não possui vértice comum a todos os caminhos mais longos. (b) Menor grafo 2-conexo planar conhecido que não possui vértice comum a todos os caminhos mais longos.

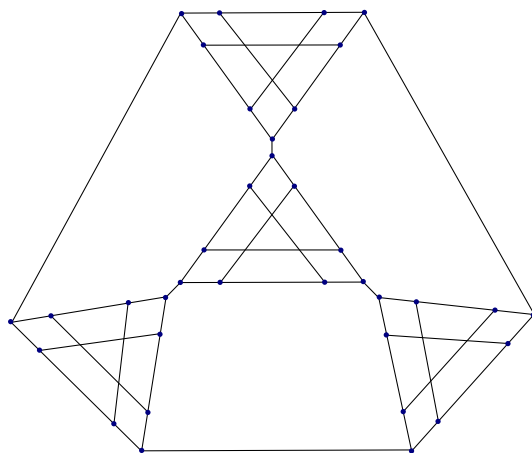


Figura 11: Menor grafo 3-conexo conhecido cuja intersecção de todos os caminhos mais longos é vazia

5 Número fixo de caminhos mais longos

O que sabemos do problema \mathcal{P}_n para n fixo? O grafo da Seção 4.3 mostra que \mathcal{P}_7 não é sempre verdade. Skupień [23] obteve, para $n \geq 7$, um grafo conexo no qual existem n caminhos mais longos cuja intersecção é vazia, mas quaisquer $n - 1$ caminhos mais longos têm um vértice em comum. Até hoje, esta é a maior cota inferior para n tal que se sabe que \mathcal{P}_n não é sempre verdade.

5.1 Dois caminhos mais longos

Além disso, para $n < 7$, só sabemos que:

Asserção 11 *Se G é um grafo conexo, então quaisquer 2 caminhos mais longos de G têm um vértice em comum.*

Prova. Seja G um grafo conexo e suponha, por contradição, que P_1 e P_2 sejam dois caminhos mais longos de comprimento L cuja intersecção é vazia. Como G é conexo, existe um caminho de P_1 a P_2 . Escolha um caminho minimal M que liga P_1 a P_2 , ou seja, escolha M tal que sua origem, x , esteja em P_1 , o seu término, y , em P_2 e nenhum vértice interno de M pertença a P_1 ou a P_2 (veja Figura 12).

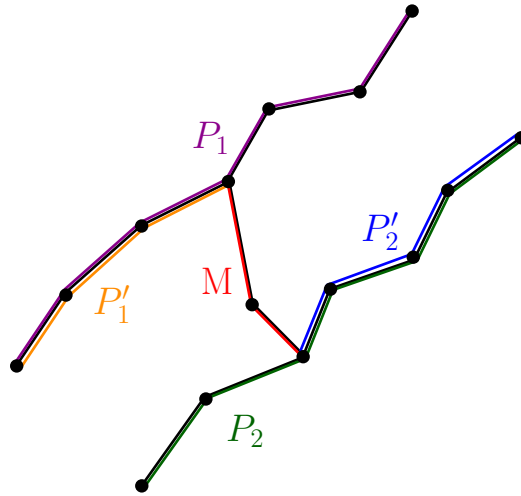


Figura 12: Dois caminhos mais longos sempre se intersectam

O vértice x divide P_1 em dois caminhos. Seja P_1' o maior desses caminhos. Analogamente, y divide P_2 em dois caminhos. Seja P_2' o maior desses caminhos. Agora, seja P o caminho $P_1' \cdot M \cdot P_2'$. Como $\|M\| \geq 1$, $\|P_1'\| \geq \frac{1}{2}L$ e $\|P_2'\| \geq \frac{1}{2}L$, então $\|P\| \geq L + 1$, o que contradiz o fato de P_1 e P_2 serem caminhos mais longos. ■

5.2 Três caminhos mais longos

Como vimos anteriormente, o seguinte problema continua em aberto:

Em um grafo conexo, existe um vértice comum a quaisquer três caminhos mais longos?

Em 2009, Axenovich [2] provou que isto é verdade para uma classe especial de grafos, mais especificamente para triplas de caminhos mais longos cuja união pertence a uma classe especial de grafos, os exoplanares. Mais formalmente, o resultado provado por Axenovich é o seguinte:

Teorema 12 *Seja G um grafo conexo e P_1, P_2, P_3 caminhos mais longos de G . Se $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ forma um grafo exoplanar, então existe um vértice v pertencente a $V(P_1) \cap V(P_2) \cap V(P_3)$.*

A principal técnica usada para provar o Teorema 12 foi a de estabelecer configurações que não ocorrem quando se considera a união de três caminhos mais longos, mostrando que se ocorressem, então seria possível construir um caminho de comprimento maior que o mais longo. A partir dessas configurações foi possível obter alguns outros resultados interessantes, como por exemplo:

Lema 13 *Seja G um grafo conexo que é a união de três caminhos mais longos, digamos P_1, P_2, P_3 . Se $P_1 \cup P_2$ tem no máximo um circuito, então existe um vértice comum a P_1, P_2, P_3 .*

Além da técnica citada acima, outro método utilizado foi o de considerar um contra-exemplo minimal no qual três caminhos mais longo não têm um vértice em comum. Isso pode ser feito somente para classes de grafos que são fechadas para operações de remoção/contração de aresta, como é o caso da classe dos grafos exoplanares ou a classe que abrange todos os grafos. Axenovich provou que um contra-exemplo minimal possui apenas um bloco não trivial. Essa técnica também foi explorada por Kensell [17] que obteve outros resultados, dentre eles algumas configurações que não ocorrem num contra-exemplo minimal.

Não reproduziremos aqui a prova de Axenovich para o Teorema 12, pois é muito extensa. Veremos que este segue como corolário do Teorema 19 e também do Teorema 21 que provaremos na Seção 7.

6 Todos os caminhos mais longos

Apesar de termos visto vários exemplos de grafos nos quais a intersecção de todos caminhos mais longos é vazia, podemos impor algumas condições aos grafos para garantir que exista pelo menos um vértice nesta intersecção.

6.1 Árvores

Um primeiro resultado, fácil de se provar, é que em árvores todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum. Isso é um corolário da seguinte proposição, que pode ser demonstrada por indução no número de vértices de G .

Proposição 14 *Seja G uma árvore e seja \mathcal{P} um conjunto de subárvores de G . Se duas a duas todos as árvores de \mathcal{P} se intersectam, então todas se intersectam em pelo menos um vértice.*

6.2 Uma condição necessária e suficiente

Klavžar e Petkovšek [18] apresentaram uma caracterização para grafos que possuem um vértice comum a todos os caminhos mais longos. Essa caracterização permite tornar uma pergunta global numa pergunta local. Para provar que todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum em G , basta provar que para todo bloco B de G , todos os caminhos mais longos que têm uma aresta em B , têm um vértice em comum. Na realidade, Klavžar e Petkovšek provam o seguinte teorema, que é um pouco mais forte do que o resultado que enunciam.

Teorema 15 *Seja G um grafo e seja \mathcal{P} um conjunto qualquer de caminhos mais longos. Se não existe um vértice comum a todos os caminhos de \mathcal{P} , então existe um bloco B de G em que todos caminhos de \mathcal{P} têm pelo menos uma aresta.*

O resultado de Klavžar e Petkovšek, enunciado abaixo, segue como corolário.

Corolário 16 *Seja G um grafo conexo. Então existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G se e somente se para todo bloco B de G , todos os caminhos mais longos em G que têm pelo menos uma aresta em B têm um vértice em comum.*

Chamaremos de \mathcal{P}_B o subconjunto de \mathcal{P} formado pelos caminhos que possuem pelo menos uma aresta de B . O Corolário 16 pode ser escrito como: seja \mathcal{P} o conjunto de todos os caminhos mais longos de G . Então $\bigcap \mathcal{P} \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap \mathcal{P}_B \neq \emptyset$ para todo bloco B de G .

Observe que o fato da condição ser suficiente é consequência do Teorema 15 e de ser necessária vem de $\mathcal{P}_B \subseteq \mathcal{P}$.

Prova do Teorema 15. Queremos provar que ou todos os caminhos de \mathcal{P} se intersectam ou existe um bloco B tal que $\mathcal{P}_B = \mathcal{P}$. Vamos distinguir dois casos.

Caso 1: Para cada par de caminhos, existe um bloco no qual ambos têm uma aresta.

Nesse caso, seja $T(G)$ a árvore associada a G , em que os vértices de $T(G)$ são os blocos e os vértices de corte de G e as arestas de $T(G)$ representam intersecção (veja Figura 13).

Denote por $f(P)$ a imagem do caminho mais longo P em $T(G)$. Sejam $f(P_1)$ e $f(P_2)$ um par de caminhos em $\{f(P)|P \in \mathcal{P}\}$. Pela hipótese, existe um bloco em G no qual P_1 e P_2 têm uma aresta e portanto $f(P_1)$ e $f(P_2)$ se intersectam em $T(G)$. Como isso vale para qualquer par de caminhos em $\{f(P)|P \in \mathcal{P}\}$, então, pela Proposição 14, existe $v \in \bigcap \{f(P)|P \in \mathcal{P}\}$. Se v corresponde a um vértice de corte c de G , então $c \in \bigcap \mathcal{P}$. Se v corresponde a um bloco B de G , então $\mathcal{P} = \mathcal{P}_B$.

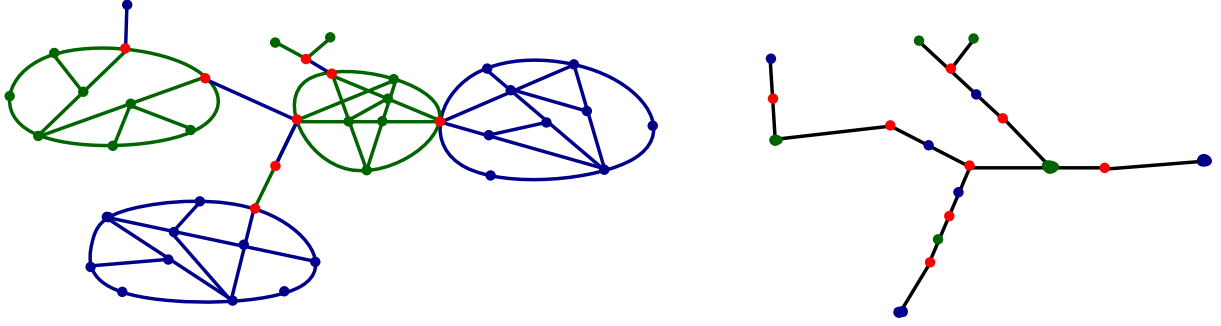


Figura 13: Grafo G à esquerda e $T(G)$, árvore associada a G , à direita. A cor vermelha representa vértices de corte, e as cores azul e verde representam blocos.

Caso 2: Existem dois caminhos $P, Q \in \mathcal{P}$ tal que não existe nenhum bloco no qual ambos têm uma aresta.

Nesse caso, P e Q não têm mais de um vértice em comum, pois se tivessem, ou teriam uma aresta em comum ou existiria um circuito em G formado pelas arestas de P e Q . Em ambos os casos, existiria um bloco no qual ambos têm uma aresta. Logo, seja x o único vértice em $P \cap Q$. Afirmamos que $x \in \bigcap \mathcal{P}$. Suponha, por contradição, que $R \in \mathcal{P}$ não contenha x . Sabemos pela Asserção 11 que R intersecta P e Q . Seja $y \in P \cap R$ tal que P_{xy} é mínimo (não existe nenhum vértice interno de P_{xy} que pertence a R) e $z \in Q \cap R$ tal que Q_{xz} é mínimo. Como R não contém x , temos que $x \neq y$ e $x \neq z$. Além disso, como x é o único vértice que pertence a P e Q , então $y \neq z$ (veja Figura 14).

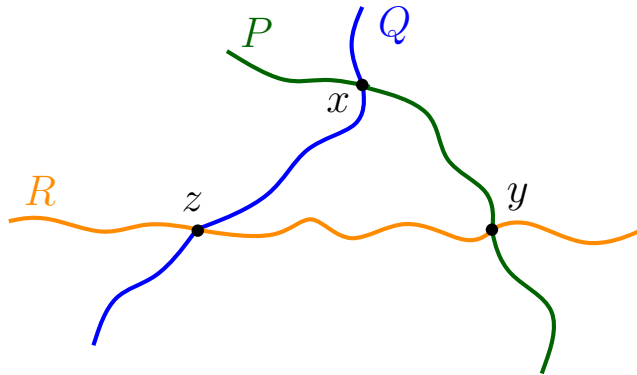


Figura 14: Circuito $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$

Observe que $P_{xy} \cdot R_{yz} \cdot Q_{zx}$ forma um circuito. Como $\|P_{xy}\| \geq 1$ e $\|Q_{zx}\| \geq 1$, temos que existe um bloco que contém pelo menos uma aresta de P e de Q , o que é uma contradição. Logo todo caminho em \mathcal{P} necessariamente contém x . ■

Como consequência da Corolário 16, temos que se todo bloco de um grafo G é hamiltoniano-conexo, quase hamiltoniano-conexo ou um circuito, então todos os caminhos mais longos em G têm um vértice em comum.

6.3 Grafos divididos

Klavžar e Petkovšek [18] também provaram que grafos divididos têm pelo menos um vértice na intersecção de todos os caminhos mais longos.

Teorema 17 *Se G é um grafo dividido conexo, então existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos de G .*

Prova. Seja \mathcal{P} o conjunto de todos os caminhos mais longos de G . Seja $V(G) = K \cup S$ uma partição dos vértices de G em um clique K e um conjunto independente S tal que $\|S\|$ é maximal. Seja $x \in K$ (se não existisse tal x , como G é conexo, G possuiria apenas um vértice e a afirmação seria óbvia). Suponha que existe um caminho mais longo P que não passa por x . Como S é um conjunto independente maximal, existe um vértice $y \in S$ tal que xy é uma aresta de G .

Suponha que P não passa por y . Observe que ambas as extremidades de P pertencem a S , pois caso contrário Px ou xP seria um caminho mais longo que P . Portanto $P = P'uv$, onde $u \in K$ e $v \in S$. Mas, então $Q = P'uxy$ é um caminho maior que P (veja Figura 15).

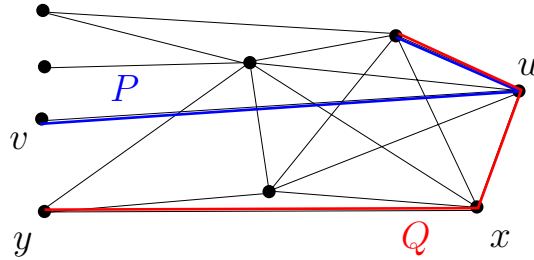


Figura 15: P não passa por y

Suponha então que P passa por y . Seja $w \in K$ um vizinho de y em P . Nesse caso é possível construir um caminho Q maior que P inserindo x entre w e y (veja Figura 16).

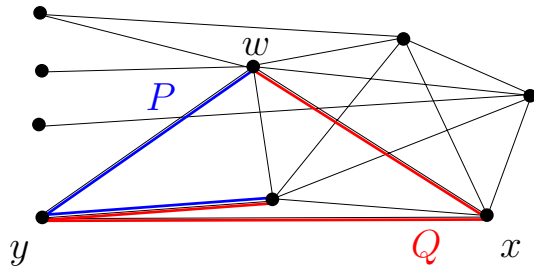


Figura 16: P passa por y

Em ambos os casos, a suposição de que x não está no caminho P levou a uma contradição. Segue que $K \subseteq \bigcap \mathcal{P}$, e portanto a intersecção dos caminhos mais longos não é vazia. ■

6.4 Grafos de intervalos

Balister e outros [3] provaram que grafos de intervalos têm pelo menos um vértice na intersecção de todos os caminhos mais longos.

Teorema 18 *Seja G um grafo de intervalos conexo. Então todos os caminhos mais longos de G têm um vértice em comum.*

Prova. Seja \mathcal{F} uma coleção de intervalos abertos na reta real associados ao grafo G . $\mathcal{C} = (I_1, I_2, \dots, I_t)$ é chamado uma t -cadeia em \mathcal{F} se para $I_i, I_j \in \mathcal{F}$ temos que $I_i \neq I_j$, se $i \neq j$, e $I_k \cap I_{k+1} \neq \emptyset$ para todo $1 \leq k \leq t-1$. Uma cadeia contendo o maior número de intervalos é chamada de cadeia mais longa de \mathcal{F} . Observe que cadeias em \mathcal{F} correspondem a caminhos em G (veja Figura 17).

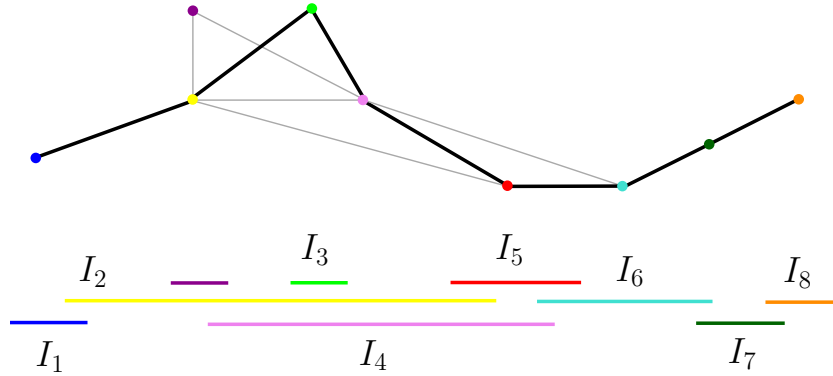


Figura 17: Caminho mais longo em G e respectiva cadeia mais longa em \mathcal{F}

O *suporte* de uma cadeia \mathcal{C} (veja Figura 18) é definido como o conjunto

$$\text{Supp } \mathcal{C} = I_1 \cup (I_1 \cap I_2) \cup (I_2 \cap I_3) \cup \dots \cup (I_{t-2} \cap I_{t-1}) \cup (I_{t-1} \cap I_t) \cup I_t.$$

Observe que para uma cadeia mais longa \mathcal{C} e um intervalo $J \in \mathcal{F}$, temos que $J \in \mathcal{C}$ se e somente se $J \cap \text{Supp } \mathcal{C} \neq \emptyset$. Pela definição de $\text{Supp } \mathcal{C}$ é fácil ver que se $J \in \mathcal{C}$ então $J \cap \text{Supp } \mathcal{C} \neq \emptyset$. Para provar a outra direção, observe que se $J \notin \mathcal{C}$ e $J \cap \text{Supp } \mathcal{C} \neq \emptyset$, então é possível aumentar a cadeia \mathcal{C} . De fato, se $J \cap (I_k \cap I_{k+1}) \neq \emptyset$, para algum $1 \leq k \leq t-1$, então J pode ser inserido entre I_k e I_{k+1} ; se $J \cap I_1 \neq \emptyset$, então J pode ser inserido ao início de \mathcal{C} ; e se $J \cap I_t \neq \emptyset$, então J pode ser inserido ao final de \mathcal{C} . Isso contradiz o fato de \mathcal{C} ser maximal.

Vamos mostrar que existe um intervalo comum a todas as cadeias mais longas de \mathcal{F} . Suponha que t é o maior número de intervalos de uma cadeia em \mathcal{F} , e seja N o número de t -cadeias em \mathcal{F} . Vamos mostrar, por indução em n , que para cada $n = 2, \dots, N$, todo conjunto de n t -cadeias de \mathcal{F} têm um intervalo em comum. Pela correspondência entre cadeias e caminhos, temos pela Asserção 11 que isso é verdade para $n = 2$.

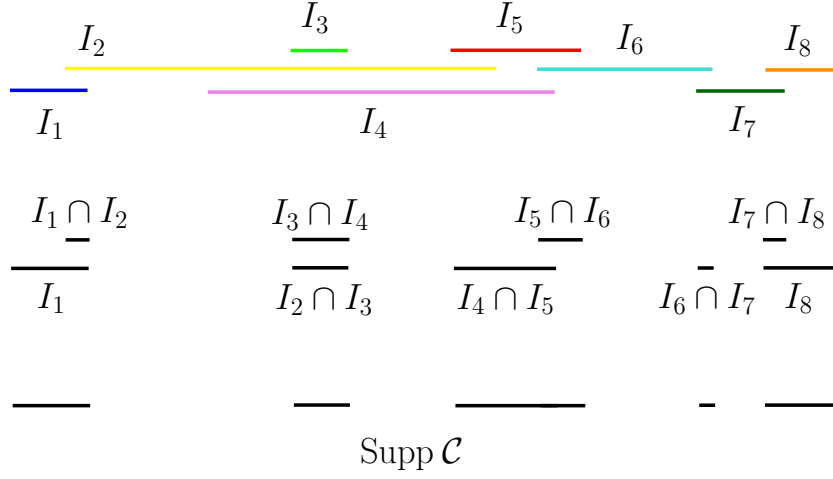


Figura 18: Suporte de \mathcal{C}

Agora seja $n \geq 3$, e sejam $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$ n cadeias mais longas de \mathcal{F} . Seja $\mathcal{C}_k = (I_1^k, \dots, I_t^k)$, $1 \leq k \leq n$. Pela hipótese de indução temos que para cada $1 \leq k \leq n$, existe um intervalo $J_k \in \mathcal{F}$ tal que

$$J_k \in \bigcap \{\mathcal{C}_i : 1 \leq i \leq n \text{ e } i \neq k\}.$$

Claramente podemos assumir que $J_k \cap \text{Supp } \mathcal{C}_k = \emptyset$, caso contrário $J_k \in \mathcal{C}_k$, e a prova está completa. Na realidade podemos assumir algo mais forte, $J_k \cap \text{Conv}(\text{Supp } \mathcal{C}_k) = \emptyset$, onde $\text{Conv}(\text{Supp } \mathcal{C}_k)$ é o fecho convexo de $\text{Supp } \mathcal{C}_k$, ou seja o menor intervalo contendo $\text{Supp } \mathcal{C}_k$.

De fato, suponha que $J_k \cap \text{Conv}(\text{Supp } \mathcal{C}_k) \neq \emptyset$, então existem pontos de $\text{Supp } \mathcal{C}_k$ de ambos os lados de J_k . Portanto existe $1 < r < t$ tal que J_k está entre os intervalos $I_{r-1}^k \cap I_r^k$ e $I_r^k \cap I_{r+1}^k$. Em particular, temos $I_r^k \supseteq J_k$. Para cada $1 \leq i \leq n$ e $i \neq k$, como $J_k \in \mathcal{C}_i$, temos $I_r^k \cap \text{Supp } \mathcal{C}_i \neq \emptyset$ o que implica que $I_r^k \in \mathcal{C}_i$. Ademais, $I_r^k \in \mathcal{C}_k$, então concluímos que $I_r^k \in \bigcap \{\mathcal{C}_i : 1 \leq i \leq n\}$.

Agora suponha $J_k \cap \text{Conv}(\text{Supp } \mathcal{C}_k) = \emptyset$, para cada $1 \leq k \leq n$. Isso significa que ou $J_k < \text{Supp } \mathcal{C}_k$ ou $J_k > \text{Supp } \mathcal{C}_k$, onde a desigualdade representa a ordenação da esquerda para direita de intervalos disjuntos. Como $n \geq 3$, existem dois índices para os quais a desigualdade vale no mesmo sentido. Sem perdas de generalidade, vamos assumir que $\text{Supp } \mathcal{C}_1 < J_1$ e $\text{Supp } \mathcal{C}_2 < J_2$. Assim temos que $\text{Supp } \mathcal{C}_1 < J_2$ ou $\text{Supp } \mathcal{C}_1 < J_1$. Em qualquer caso, isso contradiz a hipótese de indução que $J_2 \in \mathcal{C}_1$ e $J_1 \in \mathcal{C}_2$. ■

A partir desse resultado, Balister e outros [3] também provaram que o mesmo resultado vale para grafos arco-circulares, uma classe de grafos que inclui os grafos de intervalos. Outra classe de grafos que inclui os grafos de intervalos são os grafos cordais. Estes também contêm a classe dos grafos divididos, para a qual o resultado já foi provado na Seção 6.3. Embora esses autores também tenham estudado esse problema nessa classe, não conseguiram generalizar a prova apresentada acima, assim o problema continua aberto para grafos cordais.

7 Resultados novos

Nesta seção apresentamos dois novos resultados que obtivemos relacionados com a intersecção de caminhos mais longos. Para ambas as demonstrações considere que, se G é um grafo e B é um bloco de G , um **caminho pendente** de B é um caminho de G que intersecta B em um único vértice que denominaremos sua **origem**. Além disso, se C é um circuito, então para vértices x e y em C , denotaremos por \mathbf{C}_{xy} o caminho em sentido horário de x a y em C .

7.1 Primeiro resultado

Apresentamos aqui um novo resultado que permitiu tanto a simplificação da prova do Teorema 12 quanto sua generalização.

Teorema 19 *Se G é um grafo exoplanar conexo, então existe um vértice comum a todos os caminhos mais longos em G .*

Prova. Pelo Teorema 15, podemos assumir que existe um bloco B de G em que todos os caminhos mais longos têm pelo menos uma aresta. Se B é um bloco trivial, o resultado é imediato. Então, suponha que B seja um bloco não trivial. Seja C um circuito hamiltoniano de B . Seja R^* um caminho pendente mais longo de B (ou seja, um caminho de G que intersecta B apenas na sua origem), e seja v sua origem. Provaremos o seguinte fato:

Asserção 20 *Todos os caminhos em \mathcal{P}_B contêm v .*

Suponha, por contradição, que exista um caminho P em \mathcal{P}_B que não contém v . Considere uma representação planar de G de forma que todos os vértices pertençam a face externa de G . Seja x o vértice em $V(P) \cap V(B)$ tal que $\|C_{xv}\|$ é mínimo, e seja y o vértice em $V(P) \cap V(B)$ tal que $\|C_{vy}\|$ é mínimo. Note que $x \neq y$; caso contrário, P intersectaria B só no vértice x .

Agora chame de z o vértice tal que $xz \in E(P) \cap E(B)$ e $\|C_{yz}\|$ é mínimo. Suponha $y = z$, ou seja, suponha que existe uma aresta ligando x a y (veja Figura 19). Neste caso, considere o caminho P' obtido de P através da substituição da aresta xy pelo caminho C_{xy} , ou seja, $P' = (P - xy) \cup C_{xy}$. Note que P' é de fato um caminho pois C_{xy} só intersecta P nos vértices x e y . Assim $\|P'\| = \|P - xy\| + \|C_{xy}\| = \|P\| - 1 + \|C_{xv}\| + \|C_{vy}\|$. Mas $\|C_{xv}\| \geq 1$ e $\|C_{vy}\| \geq 1$. Portanto, $\|P'\| > \|P\|$, o que contradiz a maximalidade de P .

Agora suponha que $y \neq z$. Chame de P_1 e P_2 os dois caminhos de P tais que $P = P_1 \cdot P_2$, $V(P_1) \cap V(P_2) = z$, $x \in V(P_1)$ e $y \in V(P_2)$ (veja Figura 20). Como G é exoplanar, P_2 só usa vértices de C_{yz} e possivelmente de um caminho pendente, digamos R . Considere, agora, o caminho $P' = P_1 \cdot C_{vz}^{-1} \cdot R^*$. Então $\|P'\| = \|P_1\| + \|C_{vy}\| + \|C_{yz}\| + \|R^*\|$. Como $\|C_{yz}\| \geq \|P_2\| - \|R\|$, $\|R^*\| \geq \|R\|$ e $\|C_{vy}\| > 0$, concluímos que $\|P'\| > \|P_1\| + \|P_2\| = \|P\|$. Mas isto contradiz a maximalidade de P . Portanto, todos os caminhos de comprimento máximo passam por v . ■

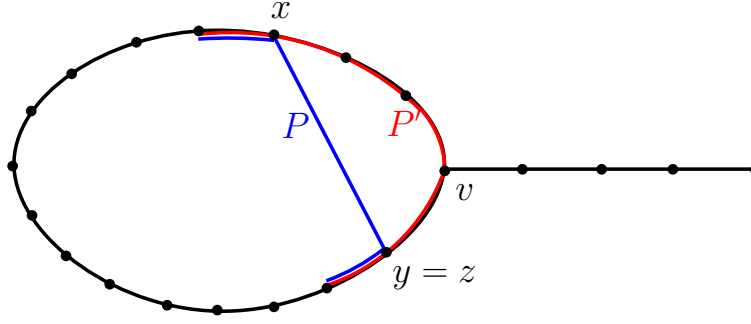


Figura 19: Caso $y = z$

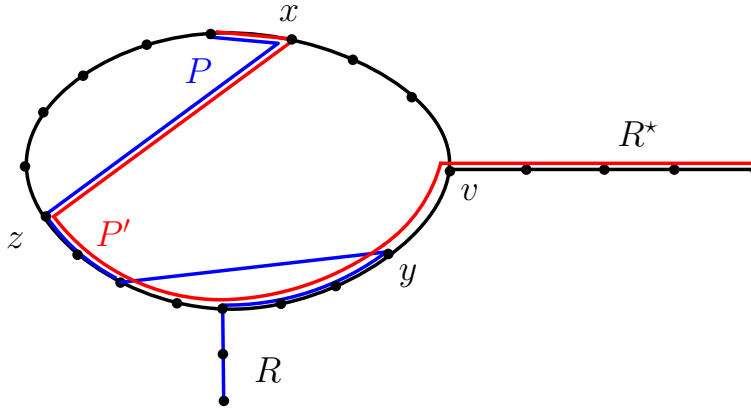


Figura 20: Caso $y \neq z$

Após os estudos preliminares que permitiram a demonstração desse resultado, foram feitas reuniões periódicas com os professores Yoshiko Wakabayashi, Cristina G. Fernandes e Daniel M. Martin, que se interessaram pelo assunto, e obtivemos resultados novos. Apresentamos um desses resultados na Seção 7.2. Estes dois resultados (Teorema 19 e Teorema 21) foram submetidos e aceitos no *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications 2011* [7]. Atualmente estamos preparando a versão completa desse artigo.

7.2 Segundo resultado

Teorema 21 *Se G é um grafo conexo em que todos os blocos não triviais são hamiltoniano, então quaisquer três caminhos mais longos em G têm um vértice em comum.*

Este teorema apresenta uma classe de grafos para os quais quaisquer três caminhos mais longos têm um vértice em comum. Em particular, essa classe inclui os grafos exoplanares.

Prova. Seja $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ um conjunto de três caminhos mais longos de G . Pelo Teorema 15, podemos considerar que existe um bloco B de G que contém pelo menos uma aresta de cada caminho em \mathcal{P} . Vamos assumir que esse bloco é não trivial, caso contrário o resultado é imediato.

Para todo caminho P , seja $B(P) = B \cap P$ e seja C um circuito hamiltoniano de B . Considere $P_i = T_i^{-1} \cdot B(P_i) \cdot T'_i$.

Queremos mostrar que:

$$(1) \quad \|B(P_1)\| + \|B(P_2)\| + \|B(P_3)\| \geq 2\|C\|.$$

Observe que, pelo Princípio da Casa de Pombos, isto implica que pelo menos um vértice aparecerá nos três caminhos de \mathcal{P} .

Antes de prosseguir a prova, observe que, se um caminho de \mathcal{P} contiver todos os vértices de B , então o resultado segue do fato de os outros dois caminhos se intersectarem em B . Portanto, podemos assumir que todos os caminhos em \mathcal{P} usam dois caminhos pendentes de B .

Doravante, consideraremos somente caminhos pendentes de B que estão contidos nos caminhos de \mathcal{P} . Observe que possivelmente existem dois caminhos pendentes com a mesma origem (nesse caso eles têm o mesmo comprimento). Se todos os caminhos pendentes intersectam o bloco B em apenas dois vértices, então o resultado é imediato.

Então sejam T_a , T_b e T_c três caminhos pendentes disjuntos que são o mais longo possível e seja v_x a origem de T_x , para $x \in \{a, b, c\}$.

Caso 1: Existe uma função f bijetora de $\{v_a, v_b, v_c\}$ para \mathcal{P} tal que $f(v_x)$ não contém um caminho pendente com origem v_x . Ou seja, existe um mapeamento f entre os vértices $\{v_a, v_b, v_c\}$ e os caminhos em \mathcal{P} tal que para cada v_x existe um caminho $f(v_x) \in \mathcal{P}$ que não contém um caminho pendente com origem v_x e além disso $f(v_x) \neq f(v_y)$, para $x \neq y$.

Para simplificar a notação, suponha que v_a , v_b e v_c apareçam em sentido horário em C e que $f(v_a) = P_1$, $f(v_b) = P_2$ e $f(v_c) = P_3$. Para provar (1), vamos encontrar um limite inferior para cada $\|B(P_i)\|$ e mostrar que a soma dos três limites inferiores é maior ou igual a $2\|C\|$. Para encontrar esses limites inferiores, vamos construir, para cada i , um caminho $Q_i = R_i^{-1} \cdot B(R_i) \cdot R'_i$ tal que

$$\|R_i\| + \|R'_i\| \geq \|T_i\| + \|T'_i\|.$$

Isso, juntamente com o fato de

$$\|Q_i\| \leq \|P_i\|$$

nos dá um limite inferior para $\|B(P_i)\|$, a saber, $\|B(P_i)\| \geq \|B(Q_i)\|$.

Considere os caminhos

$$\begin{aligned} Q_1 &= T_c^{-1} \cdot C_{v_c v_a} \cdot C_{v_a v_b} \cdot T_b, \\ Q_2 &= T_a^{-1} \cdot C_{v_a v_b} \cdot C_{v_b v_c} \cdot T_c, \\ Q_3 &= T_b^{-1} \cdot C_{v_b v_c} \cdot C_{v_c v_a} \cdot T_a. \end{aligned}$$

A Figura 21 mostra a configuração de Q_1 . Observe que para cada i , $\|R_i\| + \|R'_i\| \geq \|T_i\| + \|T'_i\|$, pois R_i , R'_i e o caminho pendente associado a $f^{-1}(P_i)$ formam o conjunto dos três caminhos pendentes mais longos que estamos considerando. Como P_i não utiliza o caminho pendente associado a $f^{-1}(P_i)$, então a soma dos comprimentos dos caminhos pendentes de P_i certamente não ultrapassa a soma dos outros dois caminhos pendentes mais longos. Por exemplo, para $i = 1$, $\|R_1\| + \|R'_1\| = \|T_c\| + \|T_b\| \geq \|T_1\| + \|T'_1\|$.

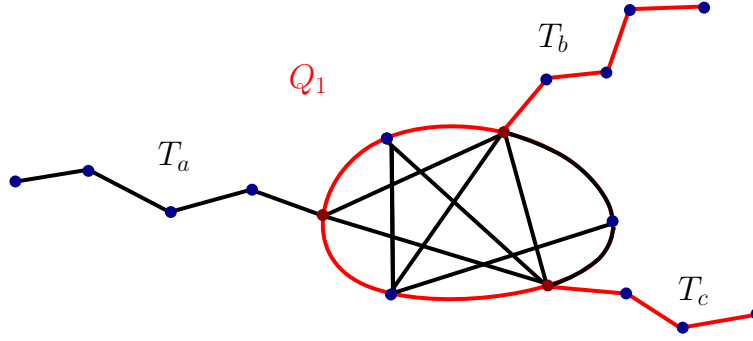


Figura 21: Configuração de Q_1

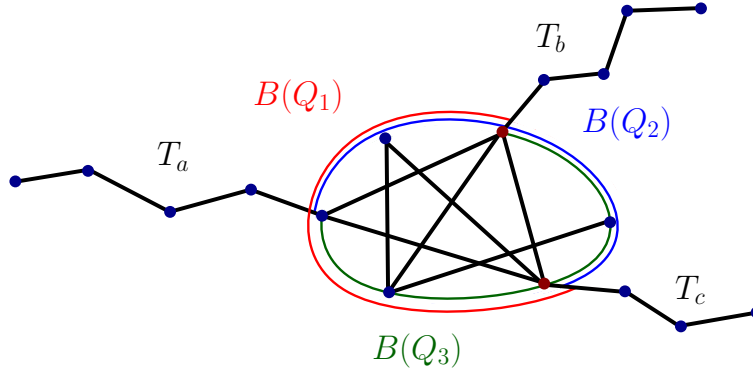


Figura 22: $\|B(Q_1)\| + \|B(Q_2)\| + \|B(Q_3)\| = 2\|C\|$

Portanto, considerando que $\|P_i\| \geq \|Q_i\|$, temos que $\|B(P_i)\| \geq \|B(Q_i)\|$. Isto implica que $\|B(P_1)\| + \|B(P_2)\| + \|B(P_3)\| \geq \|B(Q_1)\| + \|B(Q_2)\| + \|B(Q_3)\|$.

Observe que $\|B(Q_1)\| + \|B(Q_2)\| + \|B(Q_3)\| = 2\|C\|$ (veja Figura 22). Logo (1) vale.

Caso 2: Não existe tal função f .

Nesse caso, existem dois caminhos de \mathcal{P} , digamos P_1 e P_2 , cujos caminhos pendentes T_1 e T_2 possuem a mesma origem, assim como T'_1 e T'_2 . O terceiro caminho de \mathcal{P} , P_3 , possui dois caminhos pendentes com origem distintas das origens de T_1 e T'_1 , pois, caso contrário, já teríamos o vértice comum aos três.

Suponha que as origens v_a , v_b , v_c e v_d dos caminhos pendentes de B apareçam em sentido horário em C . Seja T_x um caminho pendente maximal com origem em v_x , para $x \in \{a, b, c\}$. Analogamente ao caso 1, vamos construir caminhos que forneçam um limite inferior para $\|B(P_1)\| + \|B(P_2)\| + \|B(P_3)\|$, mas, nesse caso, não para cada $\|B(P_i)\|$ separadamente.

Considere os caminhos

$$\begin{aligned} Q_1 &= T_c^{-1} \cdot C_{v_c v_d} \cdot C_{v_d v_a} \cdot C_{v_a v_b} \cdot T_b, \\ Q_2 &= T_d^{-1} \cdot C_{v_d v_a} \cdot C_{v_a v_b} \cdot C_{v_b v_c} \cdot T_c, \\ Q_3 &= T_a^{-1} \cdot C_{v_a v_b} \cdot C_{v_b v_c} \cdot C_{v_c v_d} \cdot T_d, \\ Q_4 &= T_b^{-1} \cdot C_{v_b v_c} \cdot C_{v_c v_d} \cdot C_{v_d v_a} \cdot T_a. \end{aligned}$$

A Figura 23 mostra a configuração de Q_1 . Somando os comprimentos, e considerando que $\|B(Q_1)\| + \|B(Q_2)\| + \|B(Q_3)\| + \|B(Q_4)\| = 3\|C\|$ (veja Figura 24), temos

$$(2) \quad \|Q_1\| + \|Q_2\| + \|Q_3\| + \|Q_4\| = 2(\|T_a\| + \|T_b\| + \|T_c\| + \|T_d\|) + 3\|C\|$$

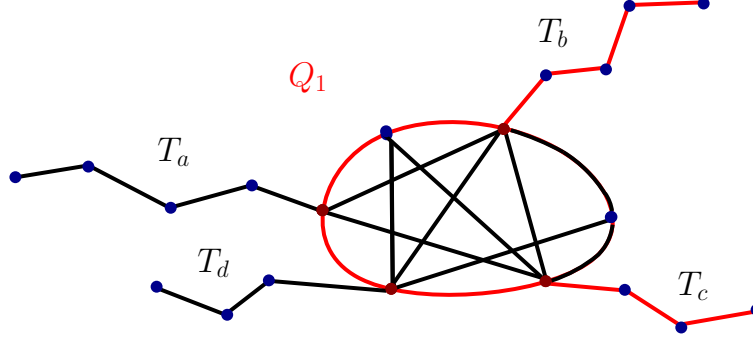


Figura 23: Configuração de Q_1

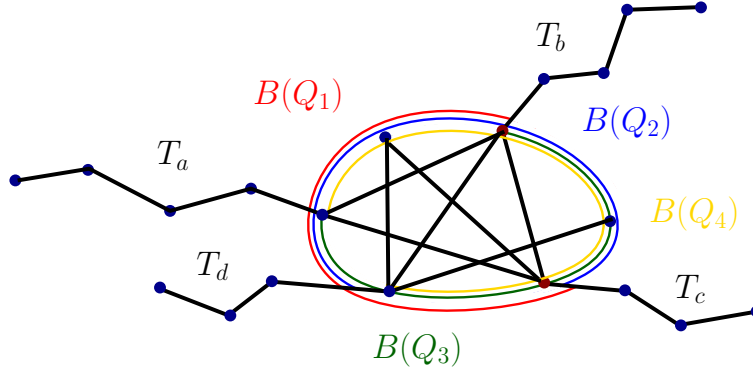


Figura 24: $\|B(Q_1)\| + \|B(Q_2)\| + \|B(Q_3)\| + \|B(Q_4)\| = 3\|C\|$

Observe que $\{T_1, T'_1, T_3, T'_3\}$ são quatro caminhos pendentos maximais disjuntos e que $\|T_1\| = \|T_2\|$ e $\|T'_1\| = \|T'_2\|$. Portanto,

$$(3) \quad \|P_1\| + \|P_2\| + 2\|P_3\| = 2(\|T_a\| + \|T_b\| + \|T_c\| + \|T_d\|) + \|B(P_1)\| + \|B(P_2)\| + 2\|B(P_3)\|$$

Como $\|P_i\| \geq \|Q_j\|$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2, 3, 4\}$, então

$$(4) \quad \|P_1\| + \|P_2\| + 2\|P_3\| \geq \|Q_1\| + \|Q_2\| + \|Q_3\| + \|Q_4\|$$

Por (2), (3), e (4), concluímos que $\|B(P_1)\| + \|B(P_2)\| + 2\|B(P_3)\| \geq 3\|C\|$. Como $\|B(P_3)\| < \|C\|$, então (1) vale. Logo existe necessariamente um vértice comum a P_1 , P_2 e P_3 . ■

8 Alguns problemas em aberto

Nessa seção apresentamos uma síntese dos problemas em aberto mencionados ao longo da monografia, e alguns outros de especial interesse. Existem muitas outras perguntas que podem ser feitas sobre este assunto. A seleção apresentada aqui traz apenas algumas das perguntas que achamos mais interessantes.

A maioria dessas questões aparecem em [36], [32] e [29]. É realmente muito intrigante o fato de existirem tantos problemas elementares que ainda não foram resolvidos. Embora nessa monografia mencionamos apenas de passagem o problema da intersecção de circuitos mais longos, o problema é tão difícil quanto o de caminhos mais longos e as perguntas citadas a seguir podem ser feitas trocando “caminhos” por “circuitos” e exigindo que o grafo seja 2-conexo.

Citamos anteriormente que foi provado que todos os caminhos mais longos de grafos divididos [18] e de grafos de intervalos [3] necessariamente têm um vértice em comum. Essas são subclasses de grafos cordais, mas para grafos cordais em geral o problema continua em aberto.

Pergunta 22 *Todos os caminhos mais longos de um grafo cordal têm um vértice em comum?*

Mencionamos essa pergunta em particular, mas existem muitas outras classes de grafos para as quais o problema está em aberto.

Mencionamos anteriormente que existem exemplos que mostram que para grafos 2-conexos e 3-conexos nem sempre todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum. Mas para grafos 4-conexos o problema está em aberto.

Pergunta 23 *Todos os caminhos mais longos de um grafo 4-conexos têm um vértice em comum?*

Como dissemos anteriormente, pelo Teorema de Tutte [25] sabe-se apenas que isso é verdade quando se trata de grafos 4-conexos planares. Podemos também fazer a seguinte pergunta, mais geral:

Pergunta 24 *Existe um inteiro k tal que se um grafo é k -conexo, então todos os caminhos mais longos têm um vértice em comum? Se existe, qual é o menor k que satisfaz essa propriedade?*

A pergunta se a intersecção de caminhos mais longos é sempre não vazia é essencialmente a mesma que a pergunta se é verdade que existe um grafo tal que, para todo vértice do grafo, é possível encontrar um caminho mais longo que evita esse vértice. Vimos que existem tais grafos. Também é possível encontrar um grafo que, dado quaisquer 2 vértices, existe um caminho mais longo que evita esses 2 vértices [33] [30]. Porém não se sabe se o mesmo é verdade para 3 vértices.

Pergunta 25 *Existe um grafo cujos caminhos mais longos evitam quaisquer 3 vértices?*

Uma pergunta mais geral seria:

Pergunta 26 *Existe um inteiro k tal que todo grafo tem um conjunto de k vértices que cobrem todos os caminhos mais longos? Se existe, qual é o menor k que satisfaz a propriedade?*

Aludimos anteriormente ao fato de que 2 caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum, e que o mesmo não vale para 7 caminhos mais longos. Portanto as seguintes perguntas continuam sem respostas.

Pergunta 27 *Quaisquer 3 caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum?*

Pergunta 28 *Existe um exemplo onde 6 caminhos mais longos não têm um vértice em comum?*

Pergunta 29 *Qual é o menor inteiro k tal que quaisquer k caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum?*

O resultado de Skupień [23] implica que $2 \leq k \leq 6$.

Vimos que dois caminhos mais longos sempre se intersectam. Mas em quantos vértices? Isto obviamente depende da conectividade do grafo. Se o grafo for 2-conexo, então é fácil ver que existem pelo menos 2 vértices nesta intersecção. De fato, a prova disto seria semelhante à prova da Asserção 11. Em um grafo 3-conexo, são pelo menos 3 vértices. Em 1979, Smith levantou a seguinte questão (se referindo especificamente a circuitos) e conjecturou que a resposta é afirmativa.

Pergunta 30 *Em um grafo k -conexo, quaisquer 2 circuitos mais longos têm pelo menos k vértices em comum?*

Este é um problema que ainda está em aberto. Por um Teorema de Grötschel [11] sabe-se que a afirmação é válida para $k \leq 6$; para $k \geq 7$ Chen e outros [6] provaram que o número de vértices em comum é $O(\sqrt{k})$.

9 Conclusão

Apresentamos aqui alguns dos tópicos que estudamos sobre dois problemas relacionados com caminhos mais longos em grafos: busca de um caminho mais longo e intersecção de caminhos mais longos. Não se trata aqui de uma resenha completa sobre esses assuntos, que são bem vastos, mas procuramos apresentar alguns dos resultados mais relevantes para esses problemas. Buscamos reproduzir as provas de maneira didática, explicando cada passo e ilustrando as demonstrações com algumas figuras.

Na primeira parte, discutimos sobre a complexidade do problema de encontrar um caminho mais longo em um grafo. Também mencionamos algumas classes de grafos para as quais é possível encontrar um caminho mais longo em tempo polinomial e apresentamos dois desses algoritmos.

Na segunda parte, concentramo-nos na questão da existência ou não de um vértice comum a caminhos mais longos. As variantes sobre este tópico consideram todos os caminhos mais longos, ou um certo número fixo deles; também consideram a mesma pergunta para diferentes classes de grafos.

Esse trabalho levou-nos ao estudo de vários artigos e ao aprendizado de diversos conceitos sobre grafos, algoritmos, redutibilidade e complexidade de problemas. No final, foi esse aprendizado que nos permitiu chegar aos resultados novos que apresentamos na Seção 7.

NOTA: As figuras deste texto são coloridas. Caso a impressão deste texto não seja colorida, o texto pode ser visualizado em cores em:

<http://www.ime.usp.br/~susanna/mac499/final/monografia.pdf>

Referências

- [1] S.R. Arikati and C.P. Rangan. Linear algorithm for optimal path cover problem on interval graphs. *Inf. Process. Lett.*, 35(3):149–153, 1990.
- [2] M. Axenovich. When do three longest paths have a common vertex? *Discrete Mathematics, Algorithms and Applications*, 1:115–120, 2009.
- [3] P.N. Balister, E. Györi, J. Lehel, and R.H. Schelp. Longest paths in circular arc graphs. *Combin. Probab. Comput.*, 13(3):311–317, 2004.
- [4] J.A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008.
- [5] R.W. Bulterman, F.W. van der Sommen, G. Zwaan, T. Verhoeff, A.J.M. van Gasteren, and W.H.J. Feijen. On computing a longest path in a tree. *Inform. Process. Lett.*, 81(2):93–96, 2002.
- [6] G. Chen, R.J. Faudree, and R.J. Gould. Intersections of longest cycles in k-connected graphs. *J. Comb. Theory Ser. B*, 72:143–149, January 1998.
- [7] S.F. de Rezende, C.G. Fernandes, D.M. Martin, and Y. Wakabayashi. Intersection of longest paths in a graph. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 38(0):743 – 748, 2011. The Sixth European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, EuroComb 2011.
- [8] T. Gallai. Problem 4. In *Theory of Graphs*, page 362, Proceedings of the colloquium held at Tihany Hungary (ed: Erdős, P. and Katona, G.), 1968. Academic Press, New York.
- [9] M.R. Garey and D.S. Johnson. *Computers and intractability*. W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.
- [10] E. Ghosh, N. S. Narayanaswamy, and C. P. Rangan. A polynomial time algorithm for longest paths in biconvex graphs. In *Proceedings of the 5th international conference on WALCOM: algorithms and computation*, WALCOM’11, pages 191–201, Berlin, Heidelberg, 2011. Springer-Verlag.
- [11] M. Grötschel. On intersections of longest cycles. In B. Bollobás, editor, *Graph Theory and Combinatorics*, pages 171 – 189, 1984.
- [12] B. Grünbaum. Vertices missed by longest paths or circuits. *J. Combinatorial Theory Ser. A*, 17:31–38, 1974.
- [13] W. Hatzel. Ein planarer hypohamiltonscher Graph mit 57 Knoten. *Math. Ann.*, 243(3):213–216, 1979.

- [14] K. Ioannidou, G.B. Mertzios, and S.D. Nikolopoulos. The longest path problem is polynomial on interval graphs. In *Proceedings of the 34th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science 2009*, pages 403–414, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.
- [15] K. Ioannidou, G.B. Mertzios, and S.D. Nikolopoulos. The longest path problem has a polynomial solution on interval graphs. *Algorithmica*, 61(2):320–341, 2011.
- [16] K. Ioannidou and S.D. Nikolopoulos. The longest path problem is polynomial on co-comparability graphs. In *WG*, pages 27–38, 2010.
- [17] S. Kensell. Intersection of longest paths. Master’s thesis, Alfréd Rényi Institute of Math, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, Hungary, 2011.
- [18] S. Klavžar and M. Petkovšek. Graphs with non empty intersection of longest paths. *Ars. Combin.*, 29:13–52, 1990.
- [19] G.B. Mertzios and I. Bezáková. Computing and counting longest paths on circular-arc graphs in polynomial time. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 37:219–224, 2011.
- [20] G.B. Mertzios and D.G. Corneil. A simple polynomial algorithm for the longest path problem on cocomparability graphs. *CoRR*, abs/1004.4560, 2010.
- [21] G. Ramalingam and C.P. Rangan. A unified approach to domination problems on interval graphs. *Inf. Process. Lett.*, 27(5):271–274, 1988.
- [22] W. Schmitz. Über längste Wege und Kreise in Graphen. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 53:97–103, 1975.
- [23] Z. Skupień. Smallest sets of longest paths with empty intersection. *Combin. Probab. Comput.*, 5(4):429–436, 1996.
- [24] Y. Takahara, S. Teramoto, and R. Uehara. Longest path problems on ptolemaic graphs. *IEICE - Trans. Inf. Syst.*, E91-D:170–177, February 2008.
- [25] W.T. Tutte. A theorem on planar graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82(1):99–116, 1956.
- [26] R. Uehara and Y. Uno. Efficient algorithms for the longest path problem. In Rudolf Fleischer and Gerhard Trippen, editors, *Algorithms and Computation*, volume 3341 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1547–1553. Springer Berlin / Heidelberg, 2005.
- [27] R. Uehara and Y. Uno. On computing longest paths in small graph classes. *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, 18(5):911–930, 2007.
- [28] R. Uehara and G. Valiente. Linear structure of bipartite permutation graphs and the longest path problem. *Inf. Process. Lett.*, 103:71–77, July 2007.

- [29] H.J. Voss. *Cycles and bridges in graphs*. Mathematics and its applications (East European Series). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht; VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1991.
- [30] H. Walther. Über die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle längsten Wege eines Graphen gehen. *J. Combinatorial Theory*, 6:1–6, 1969.
- [31] H. Walther and H.-J. Voss. Über Kreise in Graphen. *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*, 1974.
- [32] T. Zamfirescu. A two-connected planar graph without concurrent longest paths. *J. Combinatorial Theory*, 13:116–121, 1972.
- [33] T. Zamfirescu. Graphen, in welchen je zwei eckpunkte von einem längsten weg vermieden werden. *Ann. Univ. Ferrara*, 21:17–24, 1975.
- [34] T. Zamfirescu. L’histoire et l’état présent des bornes connues pour p_k^j , c_k^j , \overline{P}_k^j et \overline{C}_k^j . *Cahiers Centre Études Recherche Opér.*, 7:427–439, 1975.
- [35] T. Zamfirescu. On longest paths and circuits in graphs. *Math. Scand.*, 38(2):211–239, 1976.
- [36] T. Zamfirescu. Intersecting longest paths or cycles: a short survey. *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 28:1–9, 2001.

Parte II

Subjetiva

Estes estudos tiveram como ponto de partida a leitura de um artigo, como parte da iniciação científica. Essa leitura foi feita com o objetivo de ter um primeiro contato com artigos especializados, pois até então os estudos concentraram-se em livros, e acabou trazendo um grande aprendizado. Nesta seção trataremos dos desafios e frustrações encontrados ao longo do trabalho, das disciplinas mais relevantes e do plano de estudo para o futuro.

10 Desafios e frustrações

Na minha iniciação científica já havia começado a estudar conceitos mais avançados de teoria dos grafos, que não temos a chance de ver durante a graduação. Embora essa área sempre tenha me interessado muito, depois de um ano de estudo, queria poder estudar mais a fundo um problema em concreto. No início de 2010, a professora Yoshiko me sugeriu a leitura de um artigo de Axenovich [2] sobre intersecção de 3 caminhos mais longos.

Talvez pela minha inexperiência com artigos especializados, tive algumas dificuldades para compreendê-lo. Vi que nem todas as passagens são fáceis de serem entendidas, e além disso, algumas afirmações nem são provadas. No final, o esforço em tentar ‘completar’ essas lacunas foi muito proveitoso. Foi possível perceber que a prova apresentada neste artigo (com análise de casos) podia ser bem simplificada. Mas o mais surpreendente foi quando percebemos que tínhamos conseguido obter um resultado um pouco mais geral.

Também interessaram-se pelo problema, além da professora Yoshiko, os professores Daniel Martin (UFABC) e Cristina Fernandes. Reunimo-nos para discutir o problema e, após alguns desses encontros, chegamos ao outro resultado que apresentamos nesse trabalho. Essa oportunidade de trabalhar com problemas em aberto, me motivou mais a estudar outros artigos. Comecei por pesquisar a história do problema e os resultados conhecidos.

Após ter escrito uma primeira resenha com alguns dos resultados encontrados, selecionamos alguns dos artigos que seriam lidos mais atentamente, e cujos principais resultados apresentamos nesse trabalho. Isso foi, de fato, um verdadeiro desafio. Precisei estudar diversos conceitos de teoria dos grafos, algoritmos e complexidade. Percebi que o esforço por tentar reproduzir de maneira didática as demonstrações (que nem sempre eram fáceis de compreender) foi muito proveitoso, pois cada vez que relia e reescrevia a prova, entendia melhor cada passo e a idéia que possivelmente motivou a descoberta do resultado em questão.

Mesmo as duas demonstrações dos resultados novos que conseguimos foram sendo progressivamente simplificadas. Um fato que ajudou nesse processo foi a oportunidade de apresentar esses resultados no EuroComb’11. O tempo de apresentação era curto, e portanto era necessário que as explicações fossem as mais sucintas possíveis.

Durante esse último ano, a minha principal frustração foi a de não ter tido tempo de trabalhar mais em cima de alguns dos problemas que tínhamos esperança de conseguir algum resultado novo. Mas espero poder fazê-lo no próximo ano.

11 Disciplinas relevantes

Diversas disciplinas cursadas foram relevantes para o trabalho, de maneira mais ou menos direta. Muitas, como por exemplo Cálculo, Álgebra, Programação linear, simplesmente por proporcionarem uma experiência maior com demonstrações, rigorismo matemático, abstração, além da maturidade que adquirimos ao cursá-las. As disciplinas Topologia e Teoria dos Números, cursadas como optativas, além de proporcionarem essa experiência, foram de especial importância por ocasionarem, talvez por sua beleza, um gosto maior pelo estudo.

Outras disciplinas, como Introdução à Computação e Princípios de Desenvolvimento de Algoritmos, foram especialmente relevantes por ensinarem conhecimentos básicos de computação, sem os quais seria impossível acompanhar as demais disciplinas.

As disciplinas que influenciaram de forma mais direta esse trabalho estão listadas a baixo.

- **MAC0338 Análise de Algoritmo:** esse aprendizado sobre análise de complexidade e prova de corretude de algoritmos tornou possível acompanhar e reproduzir os resultados dos artigos que tratam do problema de encontrar um caminho mais longo num grafo.
- **MAC0328 Algoritmo em Grafos:** esse contato com algoritmos em grafos também ajudou a compreender melhor os algoritmos estudados, além de entender a dificuldade de encontrar um caminho mais longo.
- **MAC0325 Otimização Combinatória:** também aprendemos alguns algoritmos em grafos, e mais uma vez tivemos a oportunidade de analisar a complexidade e provar que estavam corretos.
- **MAC0320 Introdução à Teoria dos Grafos:** essa disciplina foi extremamente importante, pois foi através dela que aprendi várias caracterizações de grafos, como se relacionam e como demonstrar propriedades estruturais de grafos.

12 Trabalhos futuros

Pretendemos continuar a pesquisa na área, buscando respostas aos problemas em aberto apresentados na Seção 8, em especial à Pergunta 27: “Quaisquer 3 caminhos mais longos sempre têm um vértice em comum?” e ao estudo de classes de grafos para os quais é verdade que todos os caminhos mais longos sempre se intersectam.