Teoria dos Grafos

Edson Prestes

Teoria dos Grafos

Planaridade

Existem três companhias que devem abastecer com gás, eletricidade e água três prédios diferentes através de tubulações subterrâneas. **Estas tubulações podem estar à mesma profundidade** ?

Isto corresponde a perguntar: **é possível desenhar um grafo bipartido com 2 conjuntos de três elementos cada, onde nenhuma aresta cruze outra**.

Podemos antecipar a resposta dizendo que é impossível !

Um **grafo é planar** se ele pode ser desenhado em um plano de tal forma que nenhuma aresta cruze as demais.

O desenho deste grafo é chamado *realização gráfica planar* do grafo, ou simplesmente, *realização planar*.

O estudo da planaridade é importante em diversas aplicações como, por exemplo, no desenvolvimento de circuitos impressos.

Teoria dos Grafos

Planaridade

K_5 e $K_{3,3}$ não podem ser desenhados sem que algumas arestas se cruzem.

Prova : Considere o desenho de K_5 e $K_{3,3}$ no plano. Seja C um *spanning circle* do grafo em questão. Se o desenho não tiver arestas que se cruzem, então C é desenhado como uma curva fechada.

As cordas de C devem ser desenhadas dentro ou fora da curva. U*ma corda é uma aresta cujos vértices final e inicial situam-se em uma curva C, ou seja, se C é um spanning circle de G então as cordas são as arestas de G que não foram incluidas em C*.

Duas cordas são conflitantes se elas têm seus pontos finais em uma **ordem alternante**. Quando este conflito existe, então estas cordas devem ser desenhadas **uma** dentro de C e a **outra fora** de C.

Quantas cordas conflitantes tem o *spanning circle* de $K_{3,3}$?

Ele tem três cordas conflitantes. Podemos colocar no máximo 1 corda dentro e outra fora de C, então é impossível desenhar $K_{3,3}$ sem que as cordas se cruzem.

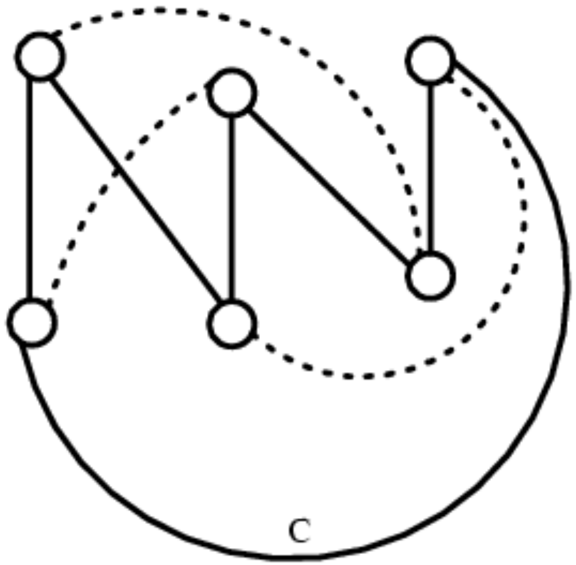
Quantas cordas conflitantes tem o spanning circle de K_5 ?

Ele possui 5 cordas conflitantes. No máximo duas cordas podem ficar dentro ou fora de C. Novamente é impossível desenha-las sem que elas se cruzem.

Teoria dos Grafos

Planaridade

As cordas conflitantes do grafo $K_{3,3}$ são ilustradas pelas linhas tracejadas. As linhas sólidas indicam o *spanning circle.*



Teoria dos Grafos

Planaridade

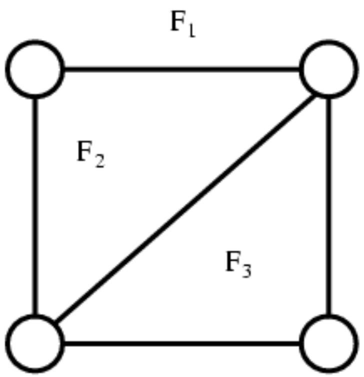
Um grafo planar G divide o plano R^2 em um conjunto regiões *maximais*, conhecidas como as ***faces*** de G. A região que engloba o grafo é chamada *face ilimitada.*

As ***fronteiras*** destas faces correspondem às arestas de G.

Cada aresta de G pertence à fronteira de uma ou duas faces de G.

O grau (comprimento), de uma face *f* de G, representado por *d(F)* é igual ao número de arestas da fronteira de F.

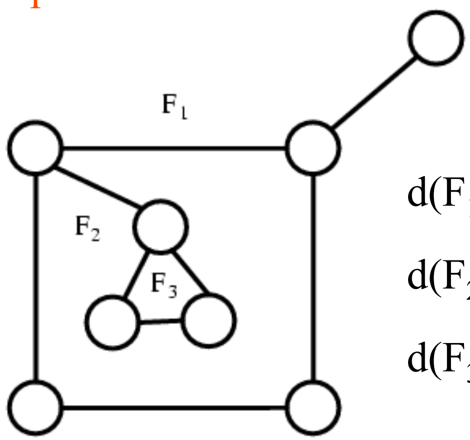
** Aquelas arestas que fazem fronteira com apenas uma face são contadas *duas vezes* **



$d(F_1)=4$

$d(F_2)=3$

$d(F_3)=3$



$d(F_1)=6$

$d(F_2)=9$

$d(F_3)=3$

Teoria dos Grafos

Planaridade

Se d(F_i) corresponde ao grau da face *i* em um grafo planar G então

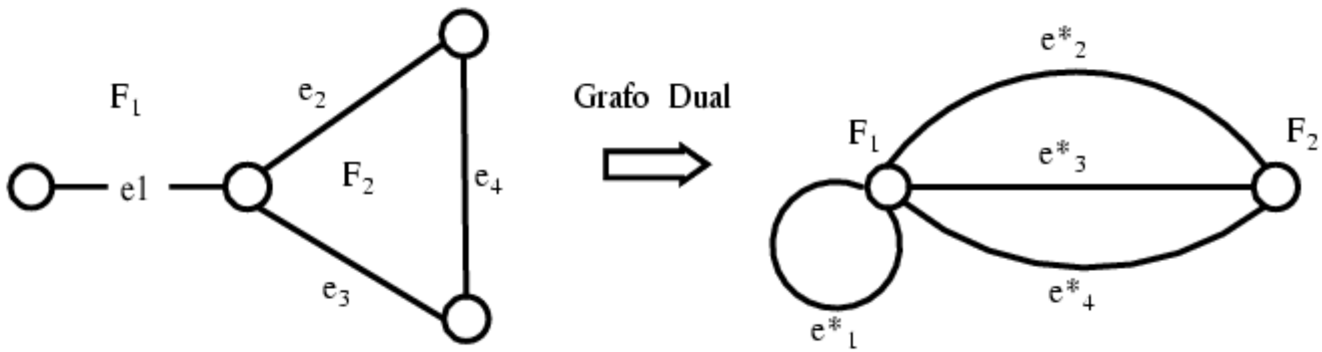
$$2|A(G)| = \sum_i d(F_i)$$

Teoria dos Grafos

Planaridade

Um grafo dual G* é um grafo obtido a partir de um grafo G.

As faces de G correspondem a vértices em G* e se **e** é uma aresta de G que situa-se entre as faces X e Y de G então a aresta dual **e*** será uma aresta que ligará os vértices **x** e **y**, correspondentes respectivamente às faces X e Y de G.



O grau de uma face em G corresponde ao grau do vértice G*

Proposição: todas as faces de um grafo G têm grau par sse o grafo dual G* é euleriano.

Teoria dos Grafos

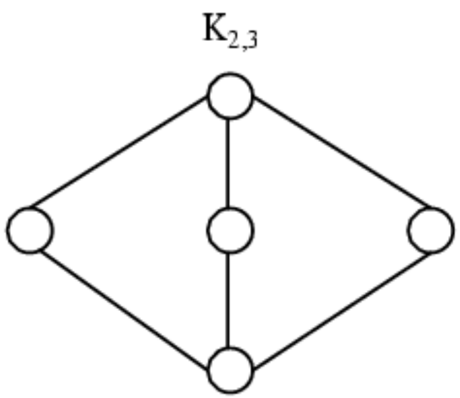
Planaridade

Um grafo é periplanar(outerplanar) se ele tem uma realização gráfica onde cada vértice do grafo faz fronteira com a face ilimitada.

Proposição: os grafos K_4 e $K_{2,3}$ não são periplanares.

Prova: Para mostrar que eles não são periplanares, um dos requisitos é mostrar que eles não possuem uma *spanning circle*. A existência de um *spanning circle* em um grafo G é condição necessária, mas **não suficiente**, para que G seja periplanar.

O grafo $K_{2,3}$ possui um *spanning circle* ?



Não ! Logo, $K_{2,3}$ não é um grafo periplanar.

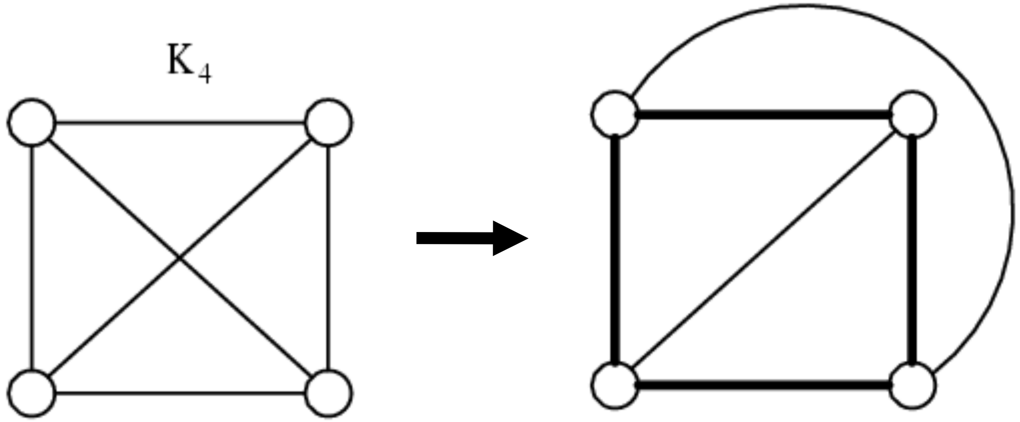
Teoria dos Grafos

Planaridade

O grafo K_4 é periplanar ?

O K_4 possui um *spanning circle*. Entretanto, ele possui duas cordas conflitantes. Isto faz com que ambas as cordas não possam ser desenhadas na parte interna do grafo.

Como uma corda é desenhada na parte externa do grafo, um dos vértices de G fica na parte interna de G e por conseguinte não faz fronteira com a face ilimitada



Teoria dos Grafos

Planaridade

Teorema de Euler: seja G=(V,A) um grafo planar com |V(G)|=*n* e |A(G)|=*m*, *p* sendo o número de *componentes conexos* de G e *f* o número de faces de uma realização planar de G. Logo

$$n-m+f=p+1$$

Prova: Considere inicialmente p=1. A prova utiliza indução no número de arcos. Para m=0 e um único vértice, n=1, temos apenas 1 face. Portanto, n-m+f=p+1 é igual a 1-0+1=1+1.

Suponha que a equação seja verdadeira para um grafo com m-1 arcos, com m $\geq$ 1. Construa a realização planar de G acrescentando arcos incidentes ao subgrafo construido.

Após a inserção do *m-1*-ésimo arco,

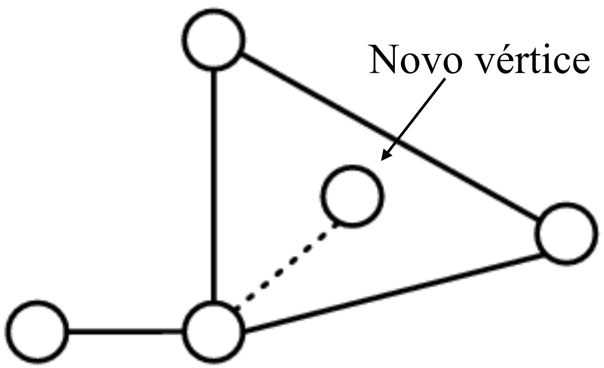
$$n_{m-1}-m_{m-1}+f_{m-1}=2$$

Teoria dos Grafos

Planaridade

Considere a inserção do m-ésimo arco. Este arco pode ser inserido de duas maneiras.

1a) assuma que uma de suas extremidades corresponde a um nó pertencente ao subgrafo existente e a outra extremidade corresponde a **um novo nó**.



Observe que o número de faces não se altera, logo

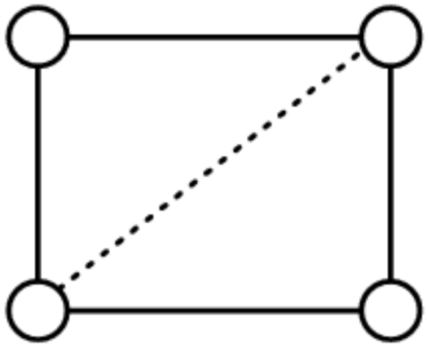
$$(n_{m-1}+1)-(m_{m-1}+1)+f_{m-1} = 2$$

$$n_m - m_m + f_m = 2$$

Teoria dos Grafos

Planaridade

2a) considere que as extremidades do m-ésimo arco correspondem aos nós já existentes no grafo em questão



Neste caso, as duas extremidades devem estar na fronteira de uma mesma face. Portanto, esta face é dividida em duas pelo m-ésimo arco. Como não criamos nenhum novo vértice, o número de vértices não se altera. Então temos,

$$n_{m-1}-(m_{m-1}+1)+(f_{m-1}+1)=2$$

$$n_m-m_m+f_m=2$$

A prova para p>1 fica como exercício!

Teoria dos Grafos

Planaridade

Seja G=(V,A) um grafo conexo planar, com |V(G)|=n e |A(G)|=m, onde m $\geq$ 2. Então

$$m \leq 3n\text{-}6$$

Cada face de um grafo é delimitada por mínimo três arestas. Logo

$$2m \geq 3f$$

pois cada aresta é compartilhada por duas faces

Usando a fórmula de Euler, temos

$$2m \geq 3(2 - n + m) \Leftrightarrow 2m \geq 6 - 3n + 3m$$

$$-m \geq 6 - 3n \Leftrightarrow m \leq 3n - 6$$

Teoria dos Grafos

Planaridade

Corolário k_5 não é planar.

Para provar que k_5 não é planar, basta usar a desigualdade $m \leq 3n-6$

Sabemos que o número de arestas **m** de k_5 é igual a $5.4/2=10$ e que ele possui $n=5$ vértices.

Usando a desigualdade temos $10 \leq 3.5-6$, vemos que k_5 não é planar.

Teoria dos Grafos

Planaridade

Corolário $k_{3,3}$ não é planar.

A desigualdade $m \leq 3n-6$ vale quando o grafo é planar e possui triangulos.

Se ele não possuir triangulos então devemos usar a seguinte desigualdade para verificar se ele é planar

$$m \leq 2n - 4$$

De forma análoga ao demonstrado anteriormente, agora cada face é delimitada por no mínimo 4 arestas, $2m \geq 4f$. Usando o Teorema de Euler, temos

$$2m \geq 4f \Leftrightarrow 2m \geq 4(2 - n + m) \Leftrightarrow 2m \geq 8 - 4n + 4m$$

$$-2m \geq 8 - 4n \Leftrightarrow m \leq 2n - 4$$

Sabemos que $k_{3,3}$ possui 9 arestas e 6 vértices. Usando a desigualdade acima, vemos que $9 \leq 2.6 - 4$ é falsa. Portanto, $k_{3,3}$ não é planar.

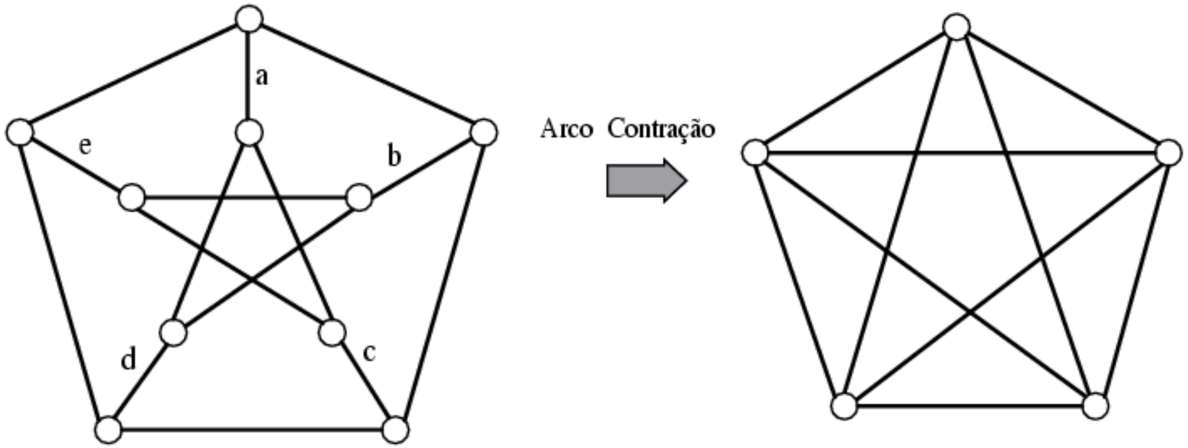
Teoria dos Grafos

Planaridade

Teorema de Kuratowski: um grafo G é planar sse não contém um subgrafo que é um grafo generalizado de K_5 ou $K_{3,3}$.

Um grafo é planar sse não contém um subgrafo o qual por contração chegaria a K_5 ou $K_{3,3}$.

O grafo de Petersen é planar ?

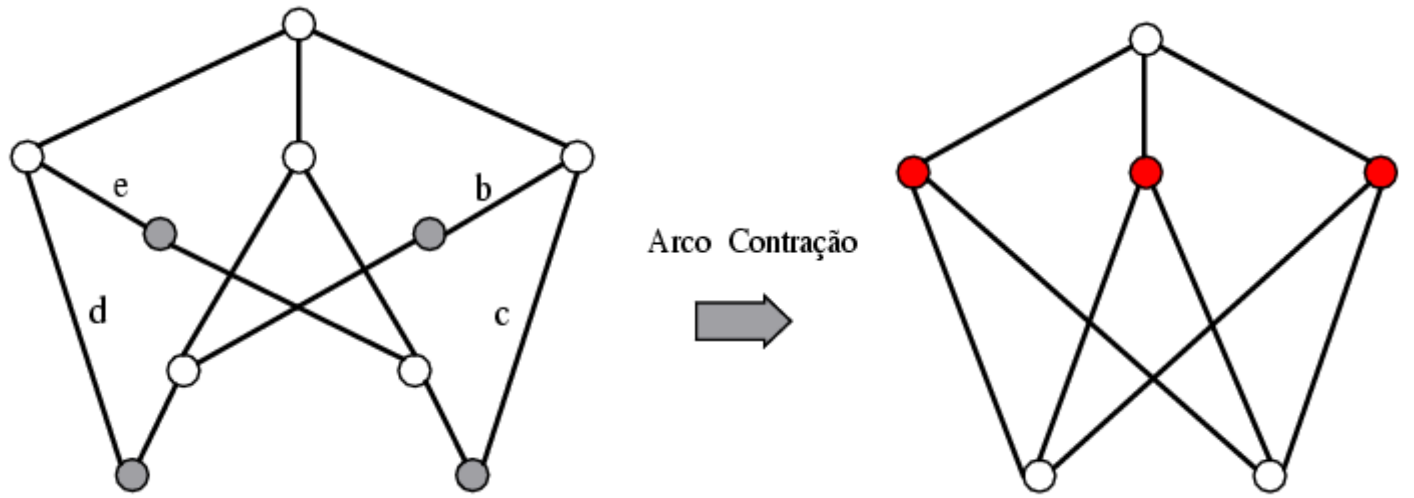


Não! Pois ele pode ser reduzido ao grafo K_5 por arco-contração.

Teoria dos Grafos

Planaridade

O grafo de abaixo é planar ?

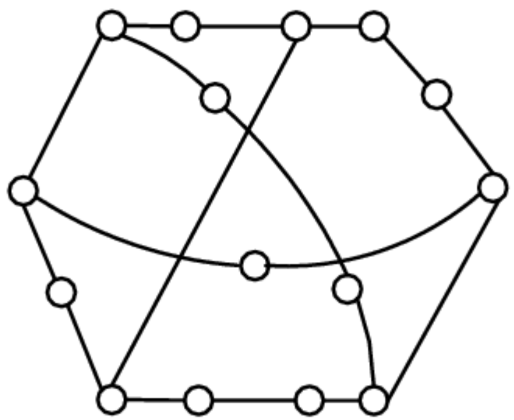


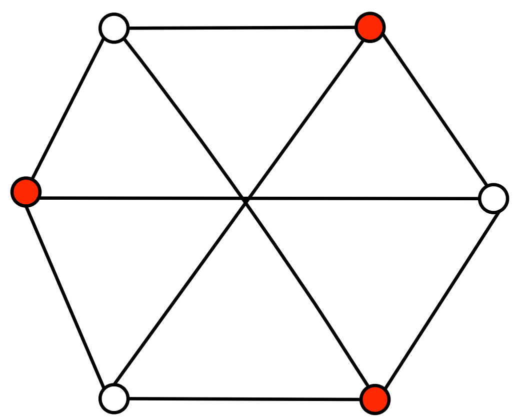
Não! Pois ele pode ser reduzido ao grafo $K_{3,3}$ por arco-contração.

Teoria dos Grafos

Planaridade

Dois grafos são homeomorfos se eles podem ser obtidos do mesmo grafo inserindo novos vértices de grau 2 nos arcos. Assim,





Teorema: um grafo é planar sse não contém subgrafo homeomorfo a k_5 ou $k_{3,3}$.

Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos

Imagine que devamos reunir pessoas para participarem de um ou mais comitês de avaliação em uma determinada conferência.

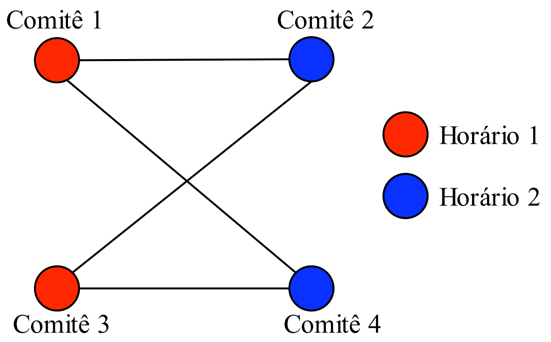
Qual deve ser o escalonamento de horários de atuações destes comitês para permitir que todos os membros inscritos participem de todas as atividades realizadas por seus respectivos comitês?

Este problema é comumente tratado na área de grafos através de técnicas de coloração de grafos.

Considere que existem pessoas que

participam dos Comitês:

1 e 2; 1 e 4; 2 e 3; e 3 e 4.



Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos

Definição: Uma k-coloração de um grafo G é uma uma função de rotulamento $f:V(G) \rightarrow S$, onde S correspondem a um conjunto de cores e $|S|=k$.

Os vértices associados a uma cor formam uma classe de cores. Uma **k-coloração é própria** se os vértices adjacentes do grafo têm rótulos (cores) diferentes.

Um grafo é **k-colorível** se ele tem uma **k-coloração própria**.

Em uma coloração própria, cada classe é um *conjunto independente*. Portanto, um grafo k-colorível é um grafo k-partido.

O **número cromático** $\chi(G)$ é o menor **k** de forma que G seja k-colorível.

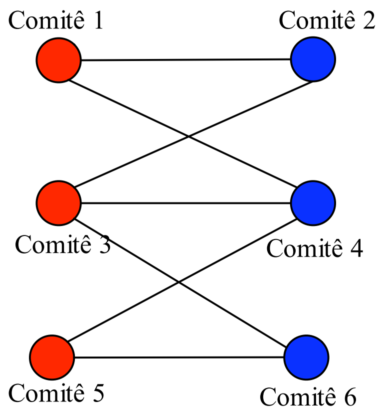
A coloração de um grafo deve seu nome à aplicação de coloração de mapas.

Grafos com loops não são coloríveis.

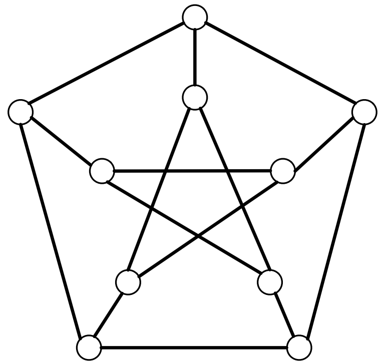
Teoria dos Grafos

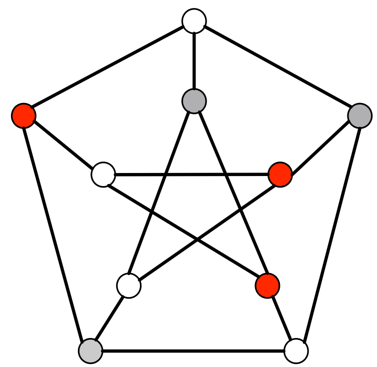
Coloração de Grafos

Um grafo é 2-colorível sse é ele um grafo bipartido.



Qual é o número cromático do grafo de Petersen ?





$$\chi(Petersen) = 3$$

Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos

Definição: Um grafo G é k-cromático se $\chi(G) = k$. Uma k-coloração de um grafo k-cromático é uma coloração ótima.

Se $\chi(G - v) < \chi(G) = k$ para todo $v \in V(G)$ então G é k-crítico, ou seja, se G é crítico então $\chi(G - v) = \chi(G) - 1$.

O grafo K_2 é o único grafo 2-crítico, enquanto que os únicos grafos 3-críticos são os grafos que constituem ciclos ímpares.

Teorema: Para qualquer grafo G, o número cromático $\chi(G)$ é no máximo uma unidade a mais que o maior grau Δ de G, ou seja, $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$

Exemplo: Qualquer grafo completo garante $\chi(G) = 1 + \Delta(G)$ e qualquer grafo estrela G com |V(G)|>2 garante $\chi(G) < 1 + \Delta(G)$

Teoria dos Grafos

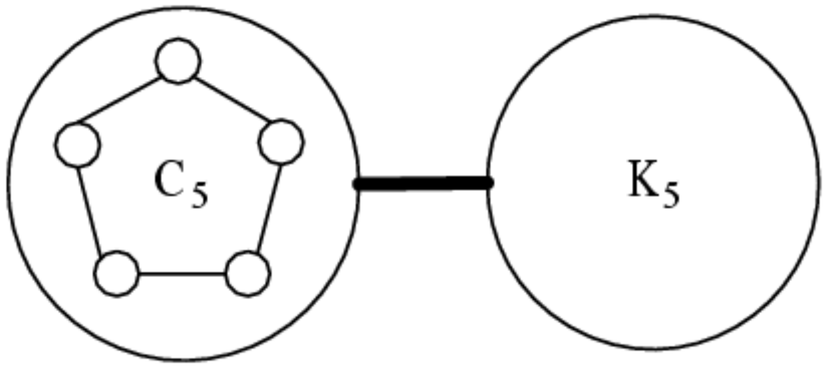
Coloração de Grafos

Proposição: Considere $\omega(G)$ o tamanho do maior clique de G; e $\alpha(G)$ o tamanho do maior conjunto independente de G.

Para qualquer grafo G,

$$\chi(G) \geq \omega(G) \text{ e } \chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$$

Em relação à primeira desigualdade, note que em um clique todos os vértices tem que ter cores distintas. Portanto se o grafo G possui um clique de tamanho máximo $\omega(G)$ então seu número cromático será no mínimo igual a $\omega(G)$, podendo ser maior.



Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos

$$\chi(G) \geq \omega(G) \text{ e } \chi(G) \geq |V(G)|/\alpha(G)$$

Em relação à segunda desigualdade, considere um grafo C_5. O maior conjunto independente tem tamanho $\alpha(C_5) = 2$

Sabemos que são necessárias 3 cores para colorir C_5, então a desigualdade

$$\chi(C_5) \geq |V(C_5)|/\alpha(C_5) \rightarrow 3 \geq 5/2$$

é verdadeira.

Teoria dos Grafos

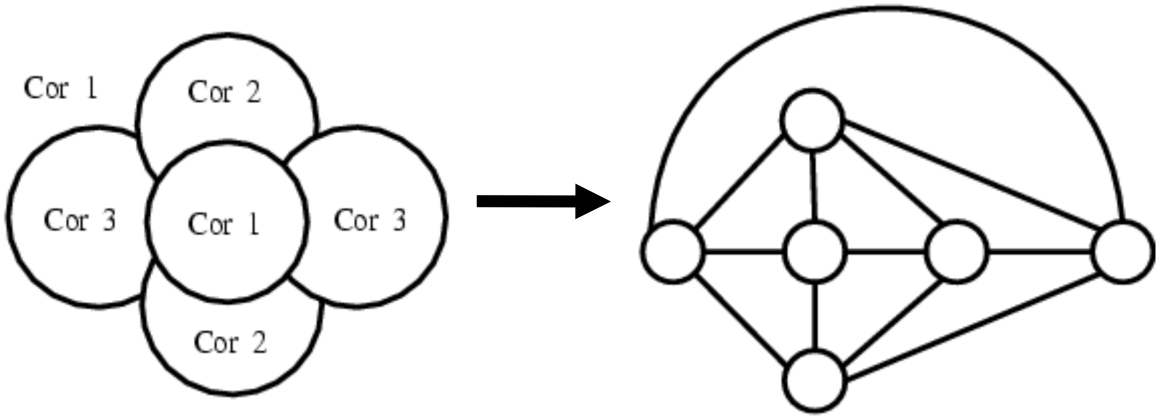
Coloração de Grafos

O problema das quatro cores.

A conjectura de colorir um mapa com no máximo quatro cores foi levantada em 1852 por Francis Guthrie; e provada em 1976 por K. Appel e W. Haken.

O teorema de quatro cores afirma que todo mapa **desenhado no plano** pode ser colorido com no máximo quatro cores, de maneira, que regiões adjacentes tenham cores diferentes.

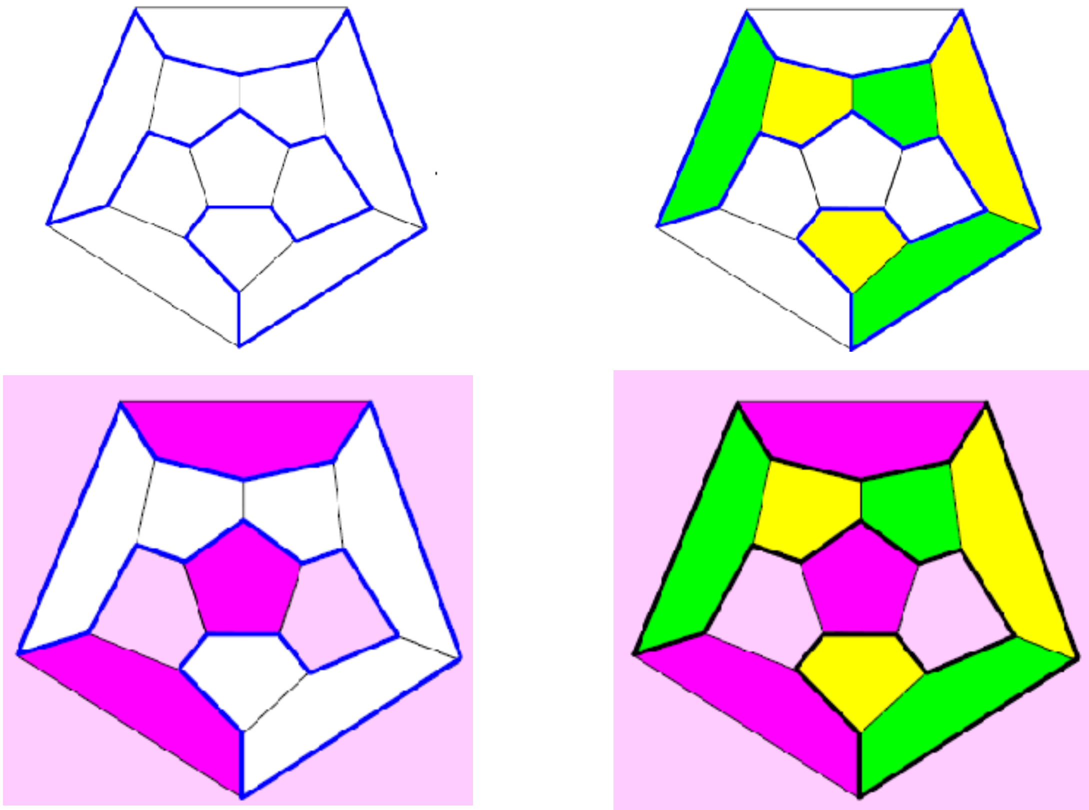
Este problema pode ser reescrito na forma de um grafo e verificada a adjacência de cada vértice.



Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos

Teorema : Se um grafo planar admite um circuito hamiltoniano, então suas faces podem ser coloridas com quatro cores. Extraido de “Quatro Cores e Matemática” João Carlos V. Sampaio.



Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos – Polinômio Cromático

Dado k ∈ N e um grafo G, o valor $\chi(G;k)$ é o número de maneiras que podemos colorir propriamente G com um conjunto [k]={1,2,…,k} de cores de forma que nem sempre todas as cores sejam usadas.

Determine $\chi(K_n,k)$

$$\chi(K_n,k) = k.(k-1).(k-2)\ldots(k-n+1)$$

$$\chi(K_n,k) = \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} n!$$

Determine $\chi(\bar{K}_n,k)$

$$\chi(\bar{K}_n,k) = k^n$$

A função $\chi(G;k)$ também é chamada função cromática ou polinômio cromático de G quando é dado em função de k.

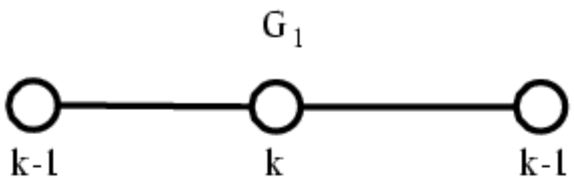
Note que $k < \chi(G)$ então $\chi(G,k) = 0$

Se $k \geq \chi(G)$ então $\chi(G,k) > 0$

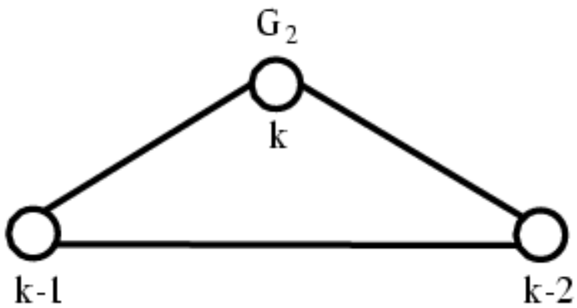
Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos – Polinômio Cromático

Determine o polinômio cromático dos grafos abaixo



$$\chi(G_1, k) = k(k-1)^2$$



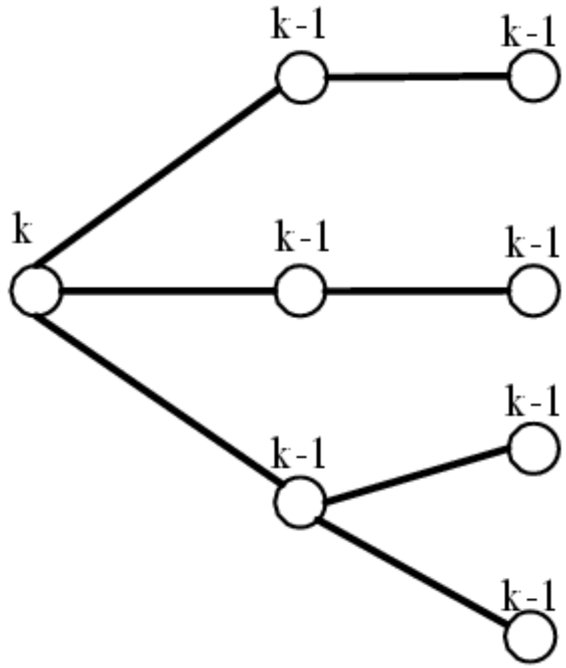
$$\chi(G_2, k) = k(k-1)(k-2)$$

Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos – Polinômio Cromático

Qual é o polinômio cromático de uma T com n vértices ?

Proposição: Se T é uma árvore com n vértices então $\chi(T, k) = k(k-1)^{n-1}$

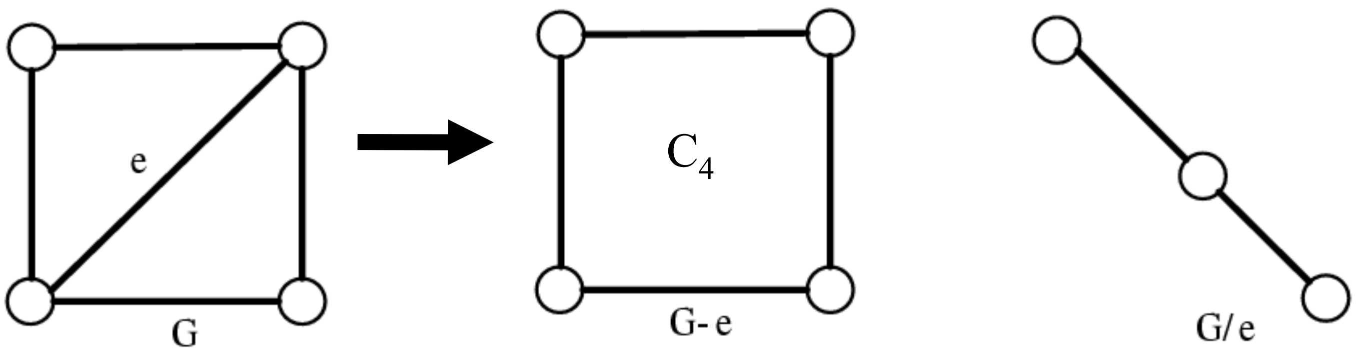


Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos – Polinômio Cromático

Teorema: Se G é um grafo simples e $e \in A(G)$ então

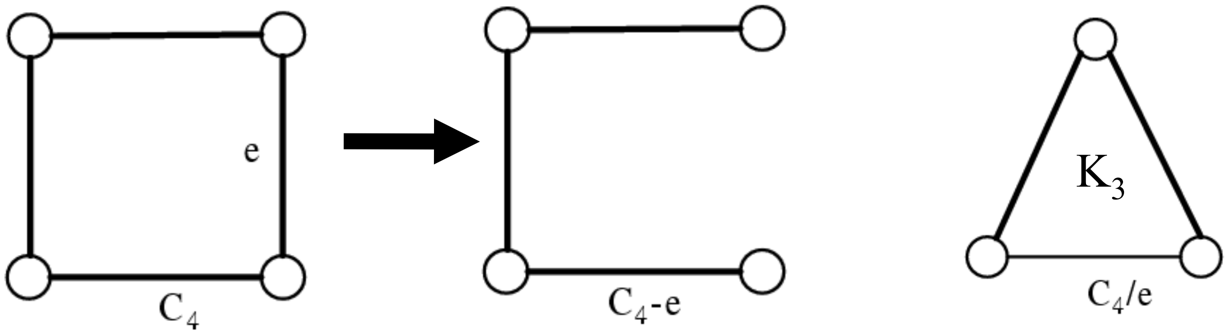
$$\chi(G;k) = \chi(G-e;k) - \chi(G/e;k)$$



$$\chi(G/e;k) = k(k-1)^2$$

Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos – Polinômio Cromático



$$\chi(C_4 - e; k) = k(k-1)^3$$

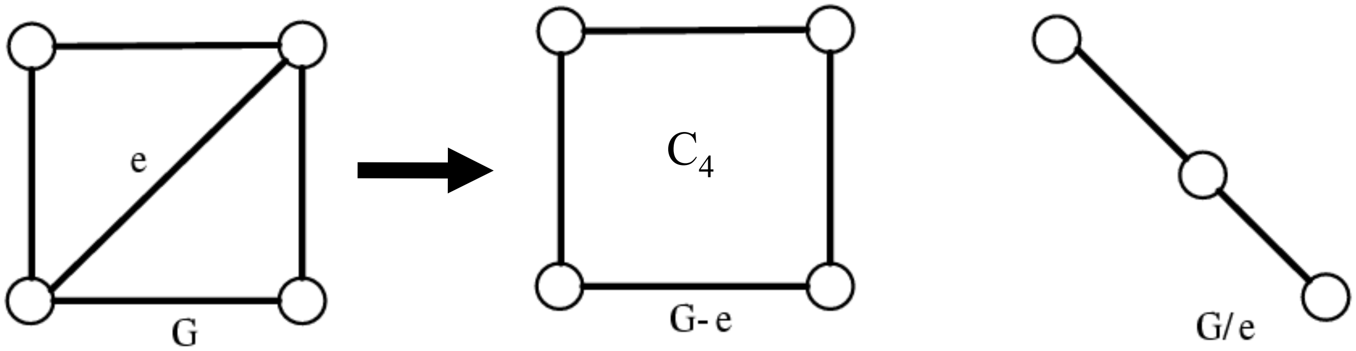
$$\chi(K_3; k) = k(k-1)(k-2)$$

$$\chi(C_4; k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2)$$

$$\chi(C_4; k) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

Teoria dos Grafos

Coloração de Grafos – Polinômio Cromático



$$\chi(G/e;k) = k(k-1)^2$$

$$\chi(C_4;k) = k(k-1)(k^2-3k+3)$$

$$\chi(G;k) = k(k-1)(k^2-3k+3)-k(k-1)^2$$

$$\chi(G;k) = k(k-1)(k^2-3k+3-k+1)$$

$$\chi(G;k) = k(k-1)(k^2-4k+4)$$