Prova P2 de Otimização Combinatória - 14/05/2013 - Profa. Luciana S. Buriol

Nome:

Cartão:

Dicas gerais:

- Sempre justifique a sua resposta.
- Responda a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Não deixe rascunho na prova.
- A prova pode ser a lápis ou à caneta. No entanto, provas a lápis não poderão ter correção após a prova sair da sala de aula quando elas forem entregues aos alunos após a correção.

1. (2.5 pontos) **Relatório DataCAPES**. O PPGC (Programa de Pós-Graduação em Computação) da UFRGS tem um relatório anual muito importante para entregar à CAPES. Para tanto, há m tarefas que devem ser realizadas. Um grupo de n professores se colocou à disposição para ajudar neste processo. No entanto, os professores gastam tempos diferentes para executar uma mesma tarefa. Como cada tarefa deve ser executada uma única vez e por uma única pessoa, criou-se uma tabela E que contém em cada célula e_{ij} o tempo estimado que a pessoa i gasta para executar a tarefa j. Cada tarefa também é conferida uma única vez, por apenas uma pessoa. Uma tarefa não pode ser executada e conferida pela mesma pessoa. Suponha que seja fornecida uma tabela C similar à E, mas com o tempo estimado que cada pessoa i gasta para conferir a tarefa j. Ainda, uma pessoa não pode executar ou conferir tarefas se ela não atualizar uma série de informações no seu curriculum lattes. A atualização do curriculum lattes da pessoa i toma tempo l_i. Por fim, cada pessoa i tem um tempo disponível t_i para atualizar o lattes, executar e conferir tarefas. O tempo total gasto não pode extrapolar o seu tempo disponível.

   Quanto tempo cada pessoa deve dedicar executando ou conferindo cada tarefa de forma que a soma de tempo total gasto atualizando o lattes, executando e conferindo tarefas por todas as pessoas seja a mínima possível? Formule este problema como um problema de Programação Linear Inteira descrevendo claramente as variáveis utilizadas na sua modelagem.

   Variáveis:

$$z_i \in \mathbb{B} = \begin{cases} 1: & \text{se pessoa i atualizou curriculum lattes} \\ 0: & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_{ij} \in \mathbb{B} = \begin{cases} 1: & \text{se pessoa i executa a tarefa j} \\ 0: & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad y_{ij} \in \mathbb{B} = \begin{cases} 1: & \text{se pessoa i confere a tarefa j} \\ 0: & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{n} (z_i l_i + \sum_{j=1}^{m} (x_{ij} E_{ij} + y_{ij} C_{ij})) \\
s.a \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, ..., m \qquad \text{(toda tarefa é executada)} \\
& \sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, ..., m \qquad \text{(toda tarefa é conferida)} \\
& l_i z_i + \sum_{j=1}^{m} (x_{ij} E_{ij} + y_{ij} C_{ij}) \leq t_i \quad \forall i = 1, ..., n \qquad \text{(tempo de cada pessoa não é extrapolado)} \\
& x_{ij} + y_{ij} \leq z_i \quad \forall i = 1, ..., n \text{ and } \forall j = 1, ..., m \qquad \text{(executa/confere se atualizou lattes e por pessoas dif.)} \\
& x_{ij} \in \mathbb{B}, y_{ij} \in \mathbb{B}, z_i \in \mathbb{B} \quad \forall i = 1, ..., n \text{ and } \forall j = 1, ..., m
\end{aligned}$$

2. (2.5 pontos) Dado um grafo direcionado $G = (V, A, w)$ com valores não negativos $w_a \in A$ atribuídos aos arcos, e dois nós u e v deste grafo. Quer-se saber quais os 3 caminhos arco-disjuntos (caminhos não compartilham arcos, embora possam compartilhar nós) partindo de u e chegando em v cuja soma total do custo das arestas dos três caminhos seja mínima. Formule este problema como um problema de programação linear inteira.

Variáveis:

$$x_a \in \mathbb{B} = \begin{cases} 1: & \text{se } a \in A \text{ faz parte de algum caminho mínimo} \\ 0: & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} min \quad & \sum_{a \in A} c_a x_a \\ & \sum_{a \in N^+(s)} x_a - \sum_{a \in N^-(s)} x_a = 3 \\ & \sum_{a \in N^+(v)} x_a - \sum_{a \in N^-(v)} x_a = 0, \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\} \\ & \sum_{a \in N^+(t)} x_a - \sum_{a \in N^-(t)} x_a = -3 \\ & x_a \in \mathbb{B}, \quad \forall a \in A. \end{aligned}$$

3. (2.5 pontos) Considere a formulação matemática abaixo:

$$\begin{aligned} \textbf{max} \quad & -x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \textbf{s.a} \quad & 2x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

a) (1.5 pontos) Resolva o sistema acima pelo método dual simplex e indique claramente o valor da solução do mesmo, bem como o valor das variáveis no sistema ótimo.

O dicionário inicial é:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & \downarrow & \\ & z & = & -x_1 & -3x_2 & -x_3 \\ \hline \leftarrow & w_1 & = -5 & -2x_1 & +5x_2 & -x_3 \\ & w_2 & = 4 & -2x_1 & +x_2 & -2x_3 \end{array}$$

O sistema é dualmente viável, mas primalmente não viável.

$$\begin{array}{ccccc} z & = -3 & -11/5x_1 & -3/5w_1 & -8/5x_3 \\ \hline x_2 & = 1 & +2/5x_1 & +1/5w_1 & +1/5x_3 \\ w_2 & = 5 & -8/5x_1 & +1/5w_1 & -9/5x_3 \end{array}$$

O dicionário é ótimo com solução: z=-3, x_1=0, x_2=1.

b) (0.5 pontos) Qual o sistema dual correspondente?

$$\begin{aligned} \textbf{min} \quad & -5y_1 + 4y_2 \\ \textbf{s.a} \quad & 2y_1 + 2y_2 \geq -1 \\ & -5y_1 - y_2 \geq -3 \\ & y_1 + 2y_2 \geq -1 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

c) (0.5 pontos) Se o sistema dual correspondente fosse resolvido otimamente, qual seria o valor da função objetivo encontrado? Justifique a sua resposta. Seria -3, a mesma encontrada no item a). Isso é garantido pelo teorema forte da dualidade.

4. (2.5 pontos) Considere o sistema abaixo.

$$\begin{aligned}
\textbf{max} \quad & -10x_1 + 5x_2 + 15x_3 \\
\textbf{s.a} \quad & 1/2x_1 - 2x_3 \leq 0 \\
& -2x_1 - 1/2x_2 + x_3 \leq 1 \\
& 2x_2 + 1/2x_3 \leq 1/3 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

O dicionário ótimo correspondente é:

$$\begin{array}{rcccc}
z = & 10 & -10x_1 & -55x_2 & -30w_3 \\
w_1 = & 4/3 & -1/2x_1 & -8x_2 & -4w_3 \\
w_2 = & 1/3 & +2x_1 & +9/2x_2 & -2w_3 \\
x_3 = & 2/3 & & -4x_2 & -2w_3
\end{array}$$

Responda as seguintes perguntas em relação ao problema usando o que você aprendeu em análise de sensibilidade:

a) Qual o intervalo de valores que c_1 (o coeficiente de x_1) pode assumir de forma que o dicionário final atualizado permanece ótimo?

- Aumento das variáveis duais

$$\Delta y_N = (B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N = (B^{-1}N)^t \Delta c_B$$

- como Δc_N é um vetor nulo temos

$$\Delta y_N = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- e então

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 55 \\ 30 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

- Com isso tem-se: $-\infty \leq t \leq 10$ e portanto $-\infty \leq c_1 \leq 0$.

b) Qual o valor ótimo da função objetivo deste sistema caso c_1 mude para 0, ou seja c_1=0?

Pelo resultado da questão a) sabe-se que se $c_1 = 0$, o dicionário continuará ótimo. Ainda, como x_1 não faz parte da base, a alteração de c_1 não interfere no valor da função objetivo. Portanto, o valor ótimo será 10.