MAT 01375 – Matemática Discreta B 2009/2

Lista de Exercícios 3

1. Mostre os seguintes resultados sobre números pares e ímpares.

   a) A soma de dois números pares é um número par.
   b) A soma de dois números ímpares é um número par.
   c) A soma de um número par com um número ímpar é um número ímpar.
   d) A soma de três números ímpares é um número ímpar.
   e) A soma de quatro números ímpares é um número par.
   f) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n$ é par $\Longleftrightarrow n^2$ é par
   g) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n$ é ímpar $\Longleftrightarrow n^2$ é ímpar
   h) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n$ é par $\Longleftrightarrow n+1$ é ímpar
   i) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n$ é ímpar $\Longleftrightarrow n$ é soma de dois números naturais consecutivos.
   j) O produto de dois números pares é par.
   k) O produto de dois números ímpares é ímpar.

2. Prove ou dê um contra-exemplo para as seguintes proposições.

   a) O produto de dois números naturais é par se e somente se os dois números são pares.
   b) O produto de dois números naturais é ímpar se e só se os dois números são ímpares.
   c) O cubo de um número natural é ímpar se e somente se o número é ímpar.

3. Mostre que a soma de três números naturais consecutivos é um natural múltiplo de três.

4. Mostre que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n! > n+1 \Longrightarrow n > 2$.

5. Mostre que se a soma de dois primos é um número primo então um dos primos é 2.

6. Mostre que existem infinitos números primos.
   Dica: suponha que existe apenas um número finito de números primos.

7. Mostre que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n$ é um múltiplo de 3 $\Longleftrightarrow n^2$ é um múltiplo de 3.

8. Use o exercício anterior para mostrar que $\sqrt{3}$ é um número irracional.
   Dica: faça uma prova semelhante a feita em aula para $\sqrt{2}$.

9. Mostre que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ n$ é um múltiplo de 5 $\Longleftrightarrow n^2$ é um múltiplo de 5.

10. Mostre que $\sqrt{5}$ é um número irracional.

11. Sejam $n, k, a_k, a_{k-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{N}$ tais que
    $$n = a_k 10^k + a_{k-1}10^{k-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$
    e $0 \le a_i < 10\ \ \forall\ i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, k\}$, ou seja, $n = a_k a_{k-1} \ldots a_2 a_1 a_0$. Mostre que:

    a) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n$ é par $\Longleftrightarrow a_0 = 0 \vee a_0 = 2 \vee a_0 = 4 \vee a_0 = 6 \vee a_0 = 8$.
    b) $(\forall n \in \mathbb{N})\ n$ é divisível por 5 $\Longleftrightarrow a_0 = 0 \vee a_0 = 5$.