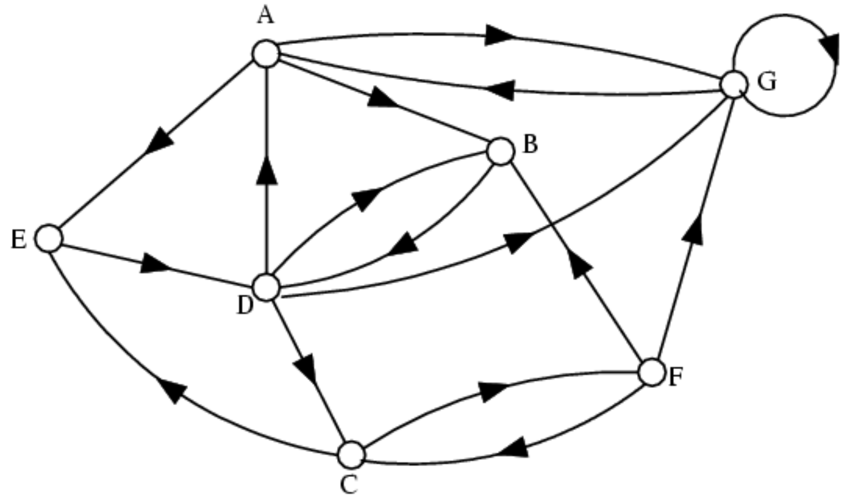
Teoria dos Grafos

Edson Prestes

Teoria dos Grafos

Dígrafos – Contagem de Caminhos/Passeios

Considere o dígrafo abaixo e sua matriz de adjacência M



	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	1	0	1
B	0	0	0	1	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	0
D	1	1	1	0	0	0	1
E	0	0	0	1	0	0	0
F	0	1	1	0	0	0	1
G	1	0	0	0	0	0	1

Matriz de adjacência M

Determine a quantidade de passeios de comprimento 1, 2, 3 e 4.

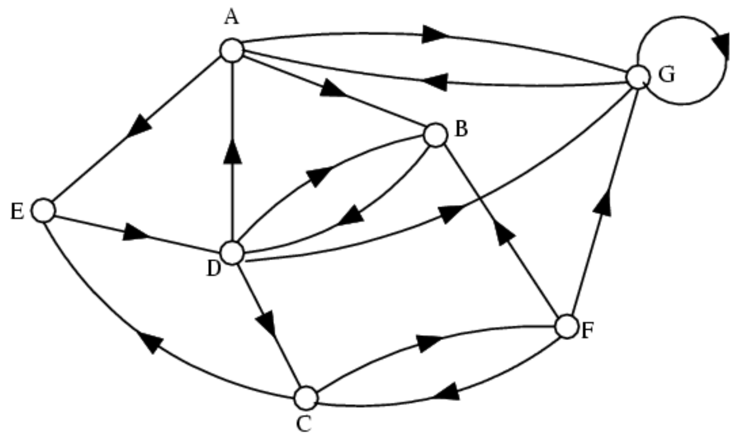
Teoria dos Grafos

Dígrafos – Contagem de Caminhos/Passeios

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	1	0	1
B	0	0	0	1	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	0
D	1	1	1	0	0	0	1
E	0	0	0	1	0	0	0
F	0	1	1	0	0	0	1
G	1	0	0	0	0	0	1

Note que a matriz M já indica a quantidade de passeios de comprimento 1.

A quantidade de passeios de comprimento 2 é obtida calculando M^2=M.M.



M^2=

	A	B	C	D	E	F	G
A	1	0	0	2	0	0	1
B	1	1	1	0	0	0	1
C	0	1	1	1	0	0	1
D	1	1	0	1	2	1	2
E	1	1	1	0	0	0	1
F	1	0	0	1	1	1	1
G	1	1	0	0	1	0	2

Teoria dos Grafos

Dígrafos – Contagem de Caminhos/Passeios

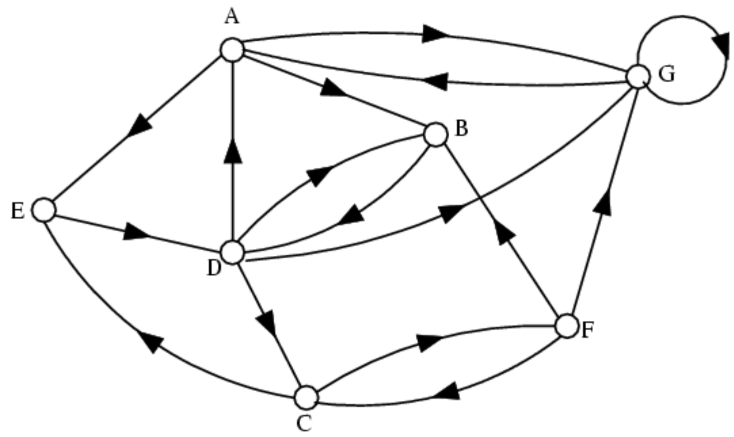
A quantidade de passeios de comprimento 3 é obtida calculando $M^3=M^2.M$.

M=

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	0	0	1	0	1
B	0	0	0	1	0	0	0
C	0	0	0	0	1	1	0
D	1	1	1	0	0	0	1
E	0	0	0	1	0	0	0
F	0	1	1	0	0	0	1
G	1	0	0	0	0	0	1

M^2=

	A	B	C	D	E	F	G
A	1	0	0	2	0	0	1
B	1	1	1	0	0	0	1
C	0	1	1	1	0	0	1
D	1	1	0	1	2	1	2
E	1	1	1	0	0	0	1
F	1	0	0	1	1	1	1
G	1	1	0	0	1	0	2



M^3=

	A	B	C	D	E	F	G
A	3	3	2	0	1	0	4
B	1	1	0	1	2	1	2
C	2	1	1	1	1	1	2
D	3	3	2	3	1	0	5
E	1	1	0	1	2	1	2
F	2	3	2	1	1	0	4
G	2	1	0	2	1	0	3

Teoria dos Grafos

Dígrafos – Conjunto Independente de Vértices

Relembrando, dado um grafo G=(V,A), um subconjunto de vértices S é independente, se a seguinte restrição for satisfeita

$$S \cap \tau\{\, S\} = \emptyset$$

Ou seja, S não pode conter vértices adjacentes.

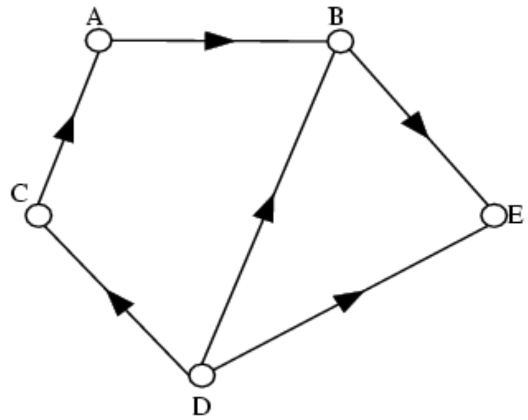
O subconjunto S é maximal se ele não estiver incluído em nenhum outro subconjunto de vértices que satifaça a restrição acima.

Para enumerar estes subconjuntos será utilizado um método proposto por Maghout.

Teoria dos Grafos

Dígrafos – Conjunto Independente de Vértices

Considere o dígrafo abaixo



Este método atua sobre em cima da matriz de adjacência de um grafo ou dígrafo sem loops. Portanto, se o dígrafo em questão possuir laços devemos omití-los em sua matriz de adjacência.

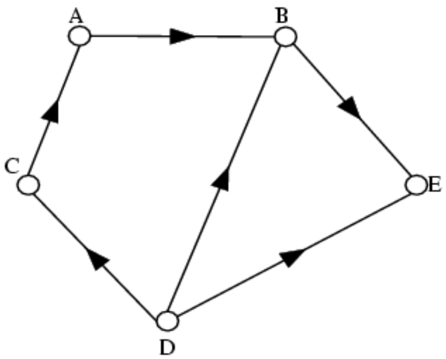
Para cada vértice $x_i \in V(G)$ devemos criar uma variável lógica $\bar{x}_i$ e para cada aresta $a = (x_i, x_j) \in A(G)$ devemos criar a seguinte soma $(\bar{x}_i + \bar{x}_j)$.

Teoria dos Grafos

Dígrafos – Conjunto Independente de Vértices

Em seguida devemos calcular o seguinte produtório

$$\prod_{(x_i, x_j) \in A(G)} (\bar{x_i} + \bar{x_j})$$



Para o dígrafo ao lado, temos o seguinte produto

$$(\bar{a} + \bar{b})(\bar{b} + \bar{e})(\bar{c} + \bar{a})(\bar{d} + \bar{b})(\bar{d} + \bar{c})(\bar{d} + \bar{e})$$

Devemos lembrar que a expressão x+xy, onde x e y são duas variáveis lógicas, pode ser simplificada da seguinte maneira

$$x+xy = x(1+y) = x$$

onde 1 corresponde ao valor *true*.

Teoria dos Grafos

Dígrafos – Conjunto Independente de Vértices

$$(\bar{a}+\bar{b})(\bar{b}+\bar{e})(\bar{c}+\bar{a})(\bar{d}+\bar{b})(\bar{d}+\bar{c})(\bar{d}+\bar{e})$$

Analisando a multiplicação dos últimos três termos $(\bar{d}+\bar{b})(\bar{d}+\bar{c})(\bar{d}+\bar{e})$ temos,

$$(\bar{d}+\bar{d}\bar{c}+\bar{d}\bar{b}+\bar{b}\bar{c})(\bar{d}+\bar{e}) = (\bar{d}+\bar{b}\bar{c})(\bar{d}+\bar{e})$$

$$= (\bar{d}+\bar{d}\bar{e}+\bar{b}\bar{c}\bar{d}+\bar{b}\bar{c}\bar{e}) = (\bar{d}+\bar{b}\bar{c}\bar{e})$$

Observamos que para x e a_i, variáveis lógica, temos

$$\prod_{i=1}^{n}(x+a_i) = x + \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Usando esta informação no produto inicial, temos

$$\boxed{(\bar{a}+\bar{b})(\bar{b}+\bar{e})}(\bar{c}+\bar{a})\boxed{(\bar{d}+\bar{b})(\bar{d}+\bar{c})(\bar{d}+\bar{e})}$$

$$(\bar{b}+\bar{a}\bar{e})(\bar{c}+\bar{a})(\bar{d}+\bar{b}\bar{c}\bar{e})$$

Teoria dos Grafos

Dígrafos – Conjunto Independente de Vértices

$$(\bar{b} + \bar{a}\bar{e})(\bar{c} + \bar{a})(\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{e}) \Rightarrow (\bar{b}\bar{c} + \bar{b}\bar{a} + \bar{a}\bar{e})(\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{e})$$

$$\Rightarrow (\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{e} + \bar{b}\bar{a}\bar{d} + \mathbf{\bar{b}\bar{a}\bar{c}\bar{e}} + \bar{a}\bar{e}\bar{d} + \mathbf{\bar{a}\bar{e}\bar{b}\bar{c}})$$

$$\Rightarrow (\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \mathbf{\bar{b}\bar{c}\bar{e}} + \bar{b}\bar{a}\bar{d} + \mathbf{\bar{b}\bar{a}\bar{c}\bar{e}} + \bar{a}\bar{e}\bar{d})$$

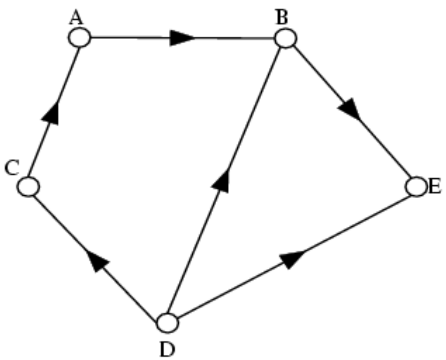
$$\Rightarrow (\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{b}\bar{c}\bar{e} + \bar{b}\bar{a}\bar{d} + \bar{a}\bar{e}\bar{d})$$

Após este processo, encontramos 4 termos que representam 4 conjuntos indepedentes.

Cada um dos termos encontrados define um subconjunto estável constituidos dos vértices cujas variáveis lógicas não aparecem naquele termo.

Logo, temos os seguintes conjuntos independentes.

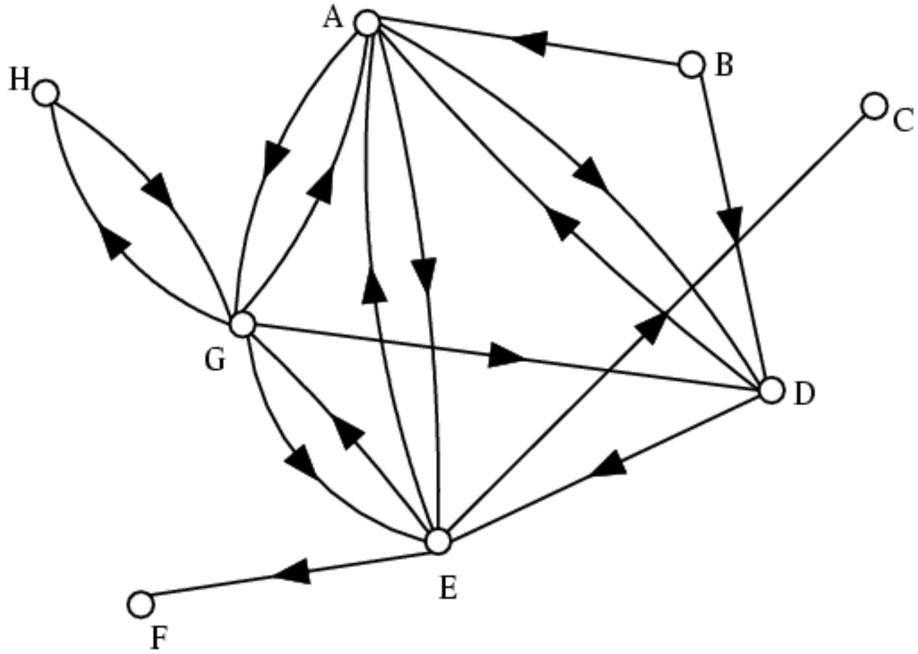
{a,e},{a,d},{c,e},{b,c}



Teoria dos Grafos

Dígrafos – Conjunto Independente de Vértices

Calcule os conjuntos independentes de vértices do dígrafo abaixo



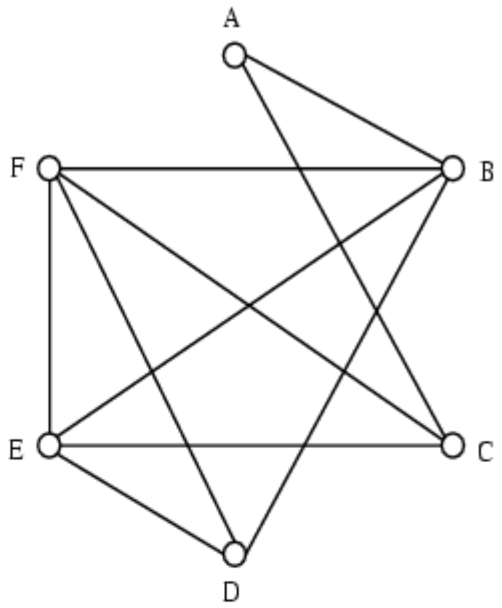
{c,d,f,h},{b,c,f, h},{a,c,f,h},{b,c,f,g}, {b,e,h}

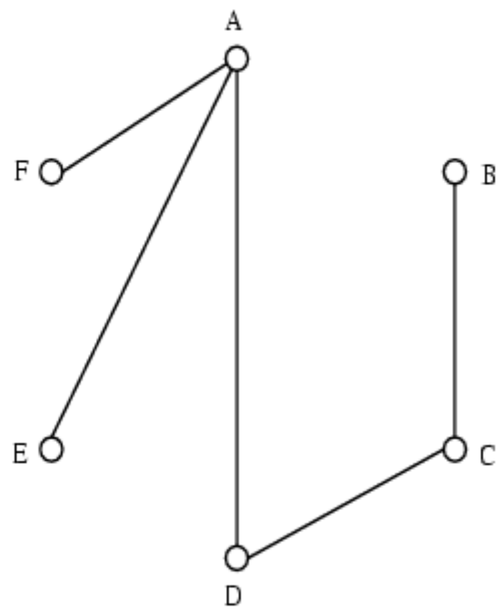
Teoria dos Grafos

Grafos– Cliques Maximais

Para determinar os cliques maximais de um grafo G podemos usar o método de Maghout em $\bar{G}$

Dado o grafo abaixo, calcule $\bar{G}$



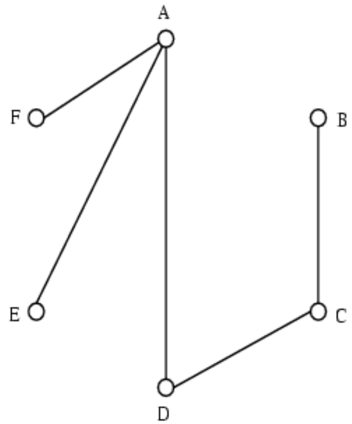


Determine os conjuntos independentes maximais em $\bar{G}$

Teoria dos Grafos

Grafos– Cliques Maximais

Para o grafo abaixo temos $(\bar{a}+\bar{d})(\bar{a}+\bar{e})(\bar{a}+\bar{f})(\bar{c}+\bar{d})(\bar{c}+\bar{b})$

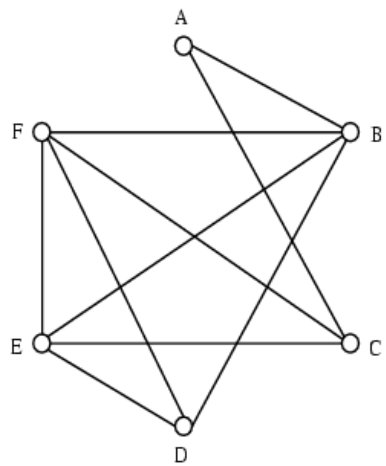


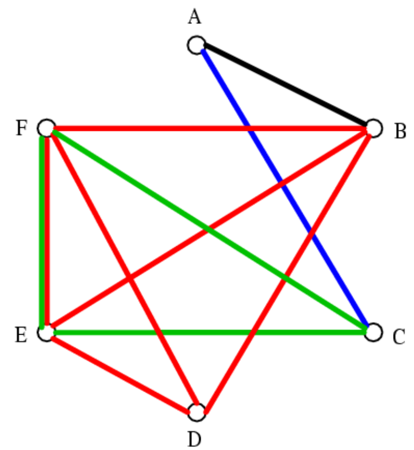
$$(\bar{a}+\bar{d}\bar{e}\bar{f})(\bar{c}+\overline{db})$$

$$\bar{a}\bar{c}+\bar{a}\overline{db}+\bar{d}\bar{e}\bar{f}\bar{c}+\bar{d}\bar{e}\overline{fb}$$

Os conjuntos independentes de $\bar{G}$ são

{b,d,e,f}; {c,e,f}, {a,b}, {a,c}

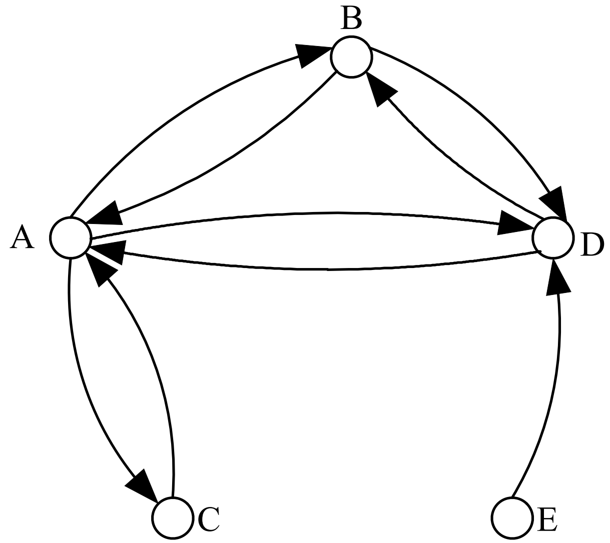




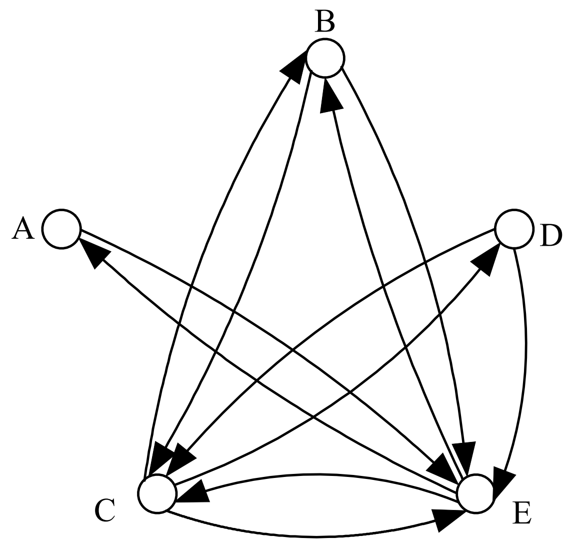
Teoria dos Grafos

Grafos– Cliques Maximais

Dado o dígrafo abaixo, calcule os seus cliques maximais



D

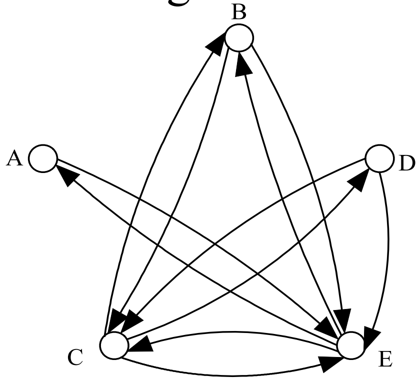


$\overline{D}$

Teoria dos Grafos

Grafos– Cliques Maximais

Para o dígrafo abaixo temos $(\bar{a}+\bar{e})(\bar{b}+\bar{c})(\bar{b}+\bar{e})(\bar{c}+\bar{d})(\bar{c}+\bar{e})(\bar{d}+\bar{e})$

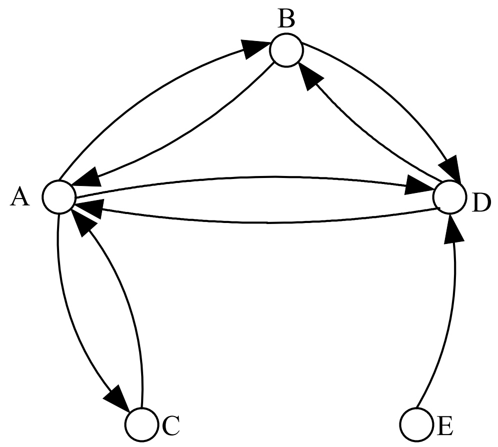


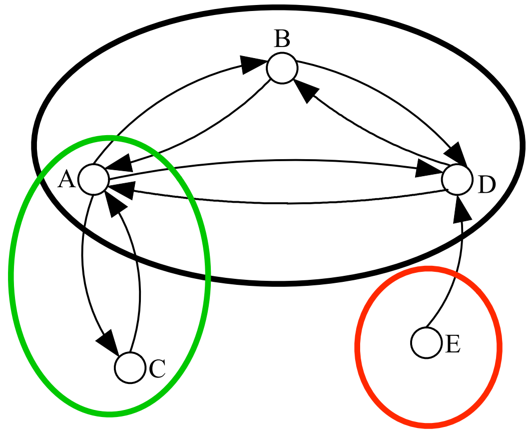
$$(\bar{e}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d})(\bar{c}+\bar{b}\bar{d})$$

$$(\bar{e}\bar{c}+\bar{e}\bar{b}\bar{d}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d})$$

$$(\bar{e}\bar{c}+\bar{e}\bar{b}\bar{d}+\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d})$$

Os cliques maximais são {a,b,d}, {a, c}, {e}

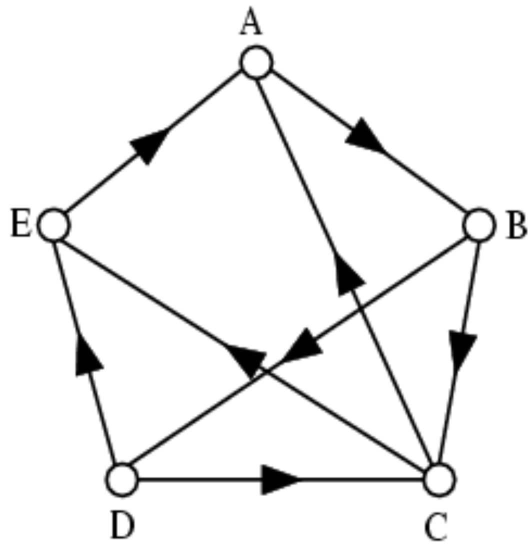




Teoria dos Grafos

Grafos– Enumeração de Passeios/Caminhos

O processo associado à enumeração de caminhos de um grafo/dígrafo é semelhante ao processo de contagem com a diferença de que usaremos uma matriz de adjacência modificada, chamada matriz latina.



Matriz de Adjacência

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	0	0
B	0	0	1	1	0
C	1	0	0	0	1
D	0	0	1	0	1
E	1	0	0	0	0

Matriz Latina

	A	B	C	D	E
A		AB			
B			BC	BD	
C	CA				CE
D			DC		DE
E	EA				

Note que a Matriz Latina contém todos os passeios de comprimento 1

Teoria dos Grafos

Grafos– Enumeração de Passeios/Caminhos

Vimos que a quantidade de caminhos de comprimento 2 era obtida através de M^2=M.M, onde M é a matriz de adjacência de G. Aqui calcularemos L^2 através de L.L', onde L é a matriz latina e L' é uma matriz latina modificada construida da seguinte maneira.

Matriz Latina L

	A	B	C	D	E
A		AB			
B			BC	BD	
C	CA				CE
D			DC		DE
E	EA				

Remoção 1o. elemento de cada entrada

Matriz L'

	A	B	C	D	E
A		B			
B			C	D	
C	A				E
D			C		E
E	A				

Teoria dos Grafos

Grafos– Enumeração de Passeios/Caminhos

Cada elemento (i,j) de L^2 é igual a

$$L^2(i,j) = \bigcup_{k=1}^{n} L(i,k) \bullet L'(k,j)$$

onde n=V(G) e a operação $\bullet$ é uma operação binária não comutativa que obedece as seguintes regras:

Se L(i,j)=p e L'(j,m)=p' são dois subcaminhos, então

L(i,j) $\bullet$ L'(j,m)=pp'.

Se L(i,j) ou L'(j,m) forem iguais ao conjunto vazio,
então L(i,j) $\bullet$ L'(j,m)= $\emptyset$

Teoria dos Grafos

Grafos– Enumeração de Passeios/Caminhos

Se quisermos enumerar todos os caminhos de comprimento 3 em um grafo G basta calcularmos

$$L^3 = L^2 \bullet L'$$

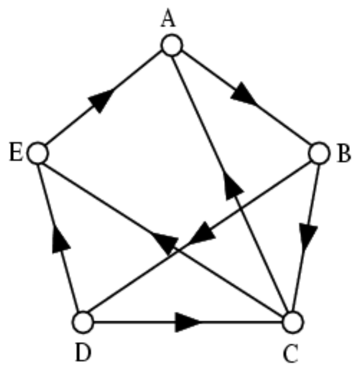
Generalizando, os caminhos de comprimento n são determinados por

$$L^n = L^{n-1} \bullet L'$$

Teoria dos Grafos

Grafos– Enumeração de Passeios/Caminhos

Enumere os caminhos de comprimento 2 e 3 do dígrafo abaixo



Matriz de Latina L

	A	B	C	D	E
A		AB			
B			BC	BD	
C	CA				CE
D			DC		DE
E	EA				

Matriz L'

	A	B	C	D	E
A		B			
B			C	D	
C	A				E
D			C		E
E	A				

Matriz Latina L^2

	A	B	C	D	E
A			ABC	ABD	
B	BCA		BDC		BCE,BDE
C	CEA	CAB			
D	DCA,DEA				DCE
E		EAB			

Matriz Latina L^3

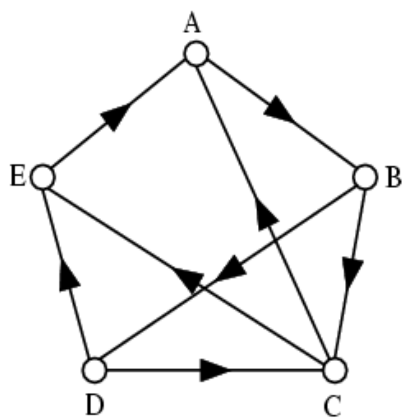
	A	B	C	D	E
A	ABCA		ABDC		ABCE,ABDE
B	BDCA,BCEA,BDEA	BCAB			BDCE
C		CEAB	CABC	CABD	
D	DCEA	DCAB,DEAB			
E			EABC	EABD	

Se o preenchimento de L' fosse igual ao de L, teriamos algumas distorções. Por exemplo, se L(i,j)=ab e L'(j,m)=bc, teriamos L(i,j) ● L'(j,m)=abbc, o que na verdade corresponde ao caminho abc.

Teoria dos Grafos

Grafos– Enumeração de Passeios/Caminhos

Para determinar todos os passeios/caminhos de um dado comprimento que não passam por um vértice v, basta gerar as matrizes latinas L e L', sem considerar a linha e a coluna associada ao vértice v. Por exemplo, quais são os caminhos de comprimento 3 que não possuem o vértice d?



Matriz de Latina L

	A	B	C	D	E
A		AB			
B			BC	BD	
C	CA				CE
D			DC		DE
E	EA				

Matriz L'

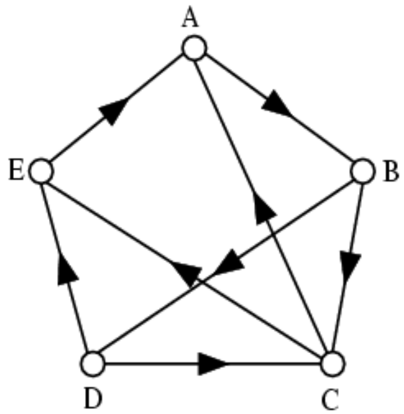
	A	B	C	D	E
A		B			
B			C	D	
C	A				E
D			C		E
E	A				

	A	B	C	E
A		AB		
B			BC	
C	CA			CE
E	EA			

	A	B	C	E
A		B		
B			C	
C	A			E
E	A			

Teoria dos Grafos

Grafos– Enumeração de Passeios/Caminhos



Matriz de Latina L

	A	B	C	E
A		AB		
B			BC	
C	CA			CE
E	EA			

Matriz de Latina L’

	A	B	C	E
A		B		
B			C	
C	A			E
E	A			

Matriz de Latina L^2

	A	B	C	E
A			ABC	
B	BCA			BCE
C	CEA	CAB		
E		EAB		

Matriz de Latina L^3

	A	B	C	E
A	ABCA			ABCE
B	BCEA	BCAB		
C		CEAB	CABC	
E			EABC	

Teoria dos Grafos

Grafos– Enumeração de Passeios/Caminhos

Para determinar todos os passeios/caminhos que não passam por um determinado arco/aresta (x,y), basta gerar as matrizes latinas L e L‘ deixando vazia a entrada (x,y). Por exemplo, se quisermos calcular os caminhos de comprimento 3 que não passam pelo arco (b,c) devemos usar as seguintes matrizes

Matriz de Latina L

	A	B	C	D	E
A		AB			
B				BD	
C	CA				CE
D			DC		DE
E	EA				

Matriz L’

	A	B	C	D	E
A		B			
B				D	
C	A				E
D			C		E
E	A				

Matriz de Latina Original

	A	B	C	D	E
A		AB			
B			BC	BD	
C	CA				CE
D			DC		DE
E	EA				