MAT 01375 – Matemática Discreta B 2009/2

Lista de Exercícios 11

1. Seja $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ uma álgebra de Boole. Mostre que:

   a) $(\forall x, y \in \mathcal{B})\ x \wedge y = 1 \iff x = 1 \text{ e } y = 1$

   b) $(\forall x, y \in \mathcal{B})\ \overline{(\ x\ \wedge\ y\ )}\ =\ \overline{x}\ \vee\ \overline{y}$

   c) $(\forall x, y \in \mathcal{B})\ \overline{(\ \overline{x}\ \vee\ \overline{y}\ )}\ \vee\ \overline{(\ \overline{x}\ \vee y\ )} = x$

   d) $(\forall x, y \in \mathcal{B})\ (\ x\ \wedge\ y\ ) \vee (\ x\ \wedge\ \overline{y}\ ) \vee (\ \overline{x}\ \wedge\ y\ ) \vee (\ \overline{x}\ \wedge\ \overline{y}\ ) = 1$

   e) $(\forall x, y \in \mathcal{B})\ \ [(\ x\ \wedge\ \overline{y}\ ) \vee (\ \overline{x}\ \wedge\ y\ ) = y \iff x = 0]\,.$

2. Seja $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ uma álgebra de Boole. Mostre, se for preciso usando alguns dos itens anteriores, que:

   a) $(\forall x, y \in \mathcal{B})\ \ [x = y \iff (\ \overline{x}\ \wedge\ y\ ) \vee (\ \overline{x}\ \wedge\ \overline{y}\ ) = 0]$

   b) $(\forall x, y, z \in \mathcal{B})\ \ [(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z) = (\overline{x} \wedge y) \vee (x \wedge z)]\,.$

3. Seja $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, -, 0, 1)$ uma álgebra de Boole. Em $\mathcal{B}$ definimos a relação $\leq$ por $(\forall a, b \in \mathcal{B})\ a \leq b \iff a \wedge b = a$. Mostre que:

   a) $(\mathcal{B}, \leq)$ é um conjunto PO;

   b) $(\forall a, b \in \mathcal{B})\ inf\,\{a, b\} = a \wedge b$;

   c) $(\forall a, b \in \mathcal{B})\ sup\,\{a, b\} = a \vee b$;

   d) $(\forall a, b \in \mathcal{B})\ y \leq \overline{x} \iff x \wedge y = 0$.

   Note que segue imediatamente dos três primeiros itens demonstrados neste exercício que $(\mathcal{B}, \leq)$ é um reticulado.

4. Construa uma função Booleana que compara dois números inteiros descritos na base 2, $(x_1x_0)_2$ e $(y_1y_0)_2$ e retorna 1, quando o primeiro destes dois números é o maior (na ordem natural dos inteiros) e 0 nos demais casos.