Teoria dos Grafos

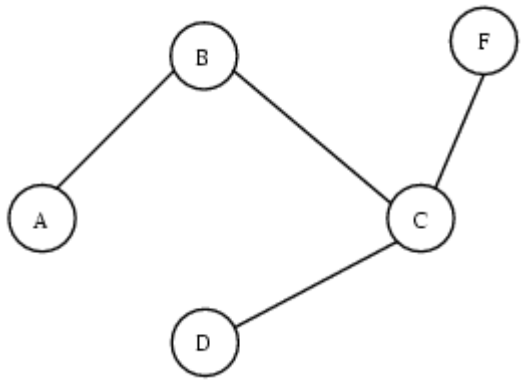
Edson Prestes

Teoria dos Grafos

Introdução – Aplicações

Redes de Computadores

Qual é a melhor maneira de interligarmos um conjunto de computadores de forma a minimizar o tempo de transmissão de dados?



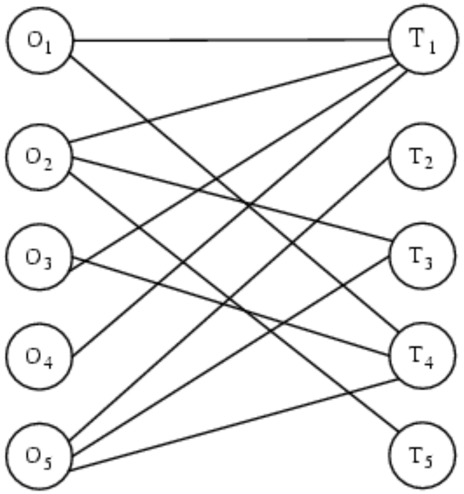
Teoria dos Grafos

Introdução – Aplicações

Atribuição de Tarefas

Dado um conjunto de m tarefas e m operários, é possível atribuir exatamente uma tarefa para cada operário de modo que todas as tarefas sejam realizadas?

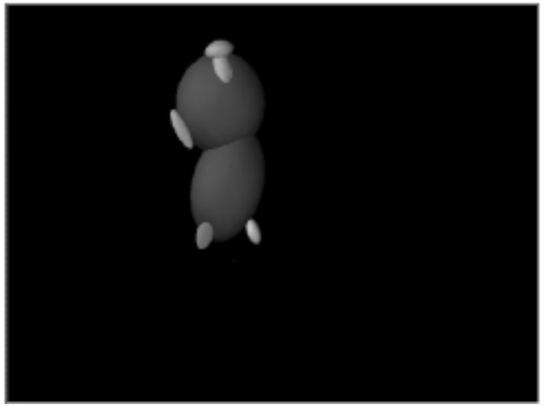
Cada operário tem um conjunto de habilidades $\{O_i\}$ para realizar um sub conjunto de tarefas.



Teoria dos Grafos

Introdução – Aplicações

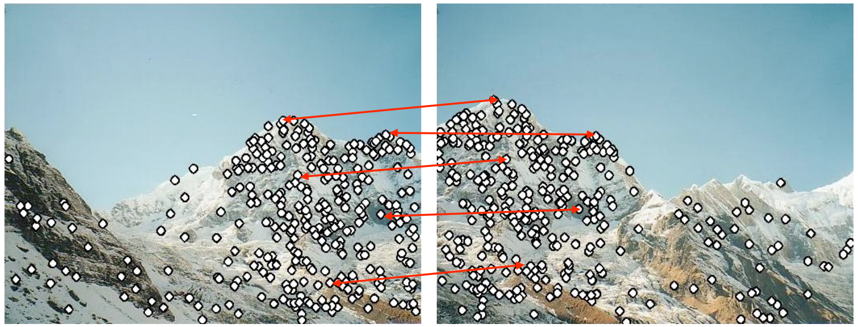
Reconhecimento de Gestos



Teoria dos Grafos

Introdução – Aplicações

Reconstrução de Panoramas



Teoria dos Grafos

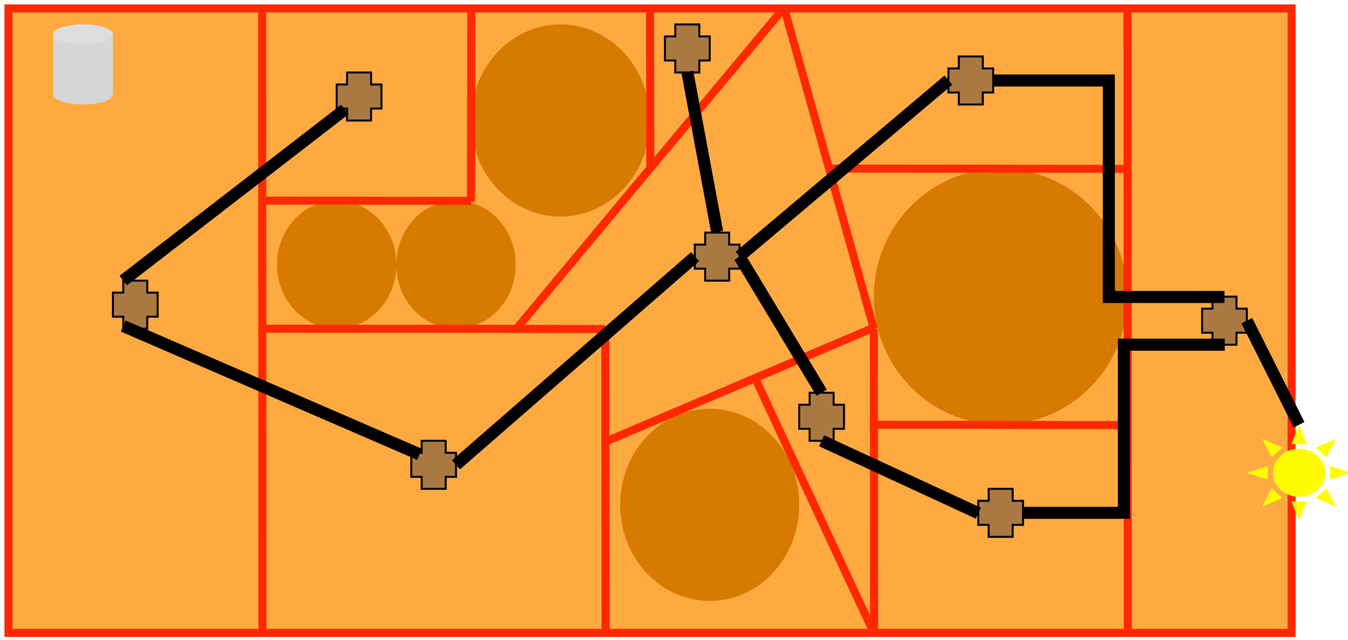
Introdução – Aplicações

Detecção de *landmarks* no ambiente.

Teoria dos Grafos

Introdução – Aplicações

Mapas Topológicos



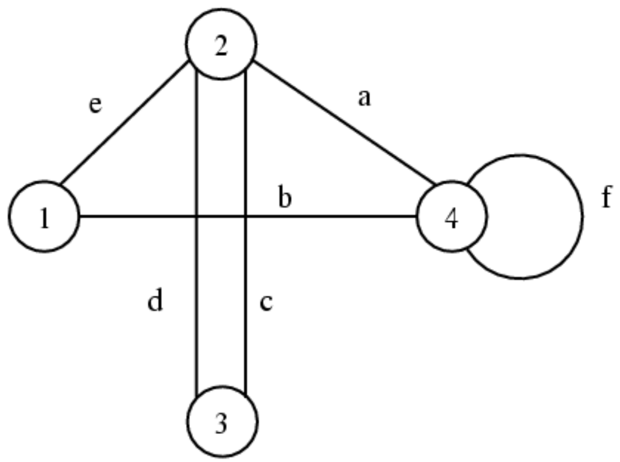
Teoria dos Grafos

Introdução – Representação

Um grafo pode ser descrito através de matrizes ou listas

A matriz de incidência de um grafo G associa os vértices de grafo às arestas do grafo. Cada entrada (a,b) desta matriz pode assumir os valores 0,1 ou 2.

O valor 0 indica que a aresta b não é incidente ao vértice a.
O valor 1 informa que o vértice a é incidente à aresta b e que a aresta b não é um laço.
O valor 2 indica que a aresta b é incidente ao vértice a e que ela é um laço



Matriz de Incidência

	a	b	c	d	e	f
1	0	1	0	0	1	0
2	1	0	1	1	1	0
3	0	0	1	1	0	0
4	1	1	0	0	0	2

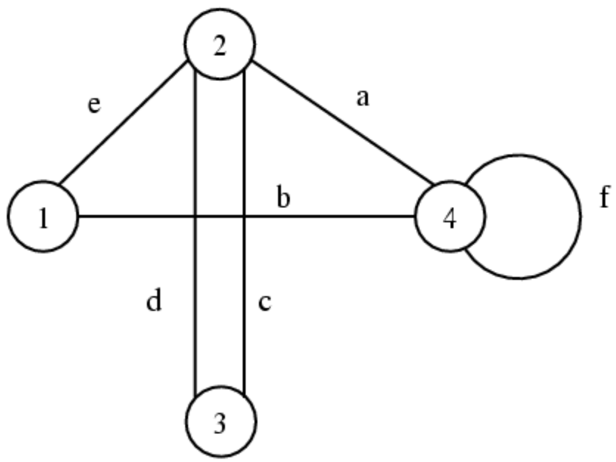
Teoria dos Grafos

Introdução – Representação

A matriz de adjacência mostra o relacionamento entre os nós de um grafo.

Se um nó a for adjacente a um nó b, então na matriz de adjacência M as entradas M[a,b] e M[b,a] serão diferentes de 0.

O valor armazenado nestas entradas indicará a quantidade de arestas existentes entre os vértices a e b



Matriz de Adjacência

	1	2	3	4
1	0	1	0	1
2	1	0	2	1
3	0	2	0	0
4	1	1	0	1

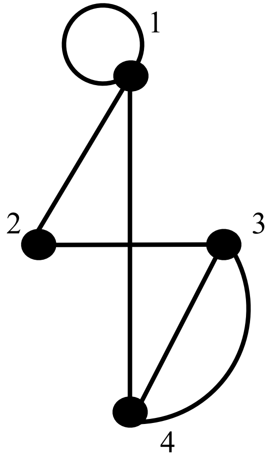
Teoria dos Grafos

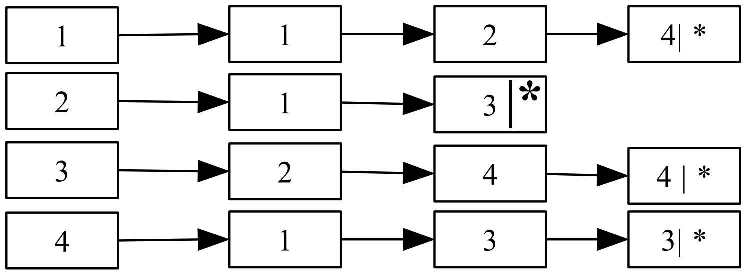
Introdução – Representação

Uma lista de adjacência armazena o relacionamento entre os vértices de um grafo em uma estrutura de listas.

Note que para listar todos os nós adjacentes a um nó n_i bastar percorrermos a sua lista encadeada.

Se quisermos saber se um nó n_i é adjacente ao nó n_k, basta realizar uma busca linear na lista associada a n_i.





Teoria dos Grafos

Introdução – Representação

Mostre que com que n vértices distintos podemos formar $2^{\binom{n}{2}}$ grafos simples (aquele que não possui laços ou mais de duas arestas ligando o mesmo par de vértices).

Em um grafo simples, cada par de vértices dá origem ou não a uma aresta.

Sabemos que um grafo de n vértices possui no máximo $m = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$ ***arestas.***

Logo, temos $\binom{m}{0}$ ***grafos com nenhuma aresta,*** $\binom{m}{1}$ ***grafos com 1 aresta,...,*** $\binom{m}{m}$ ***grafos com m arestas (grafo completo).***

Somando estes resultados,

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m$$

$$2^m = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = 2^{\binom{n}{2}}$$

Teoria dos Grafos

Introdução – Representação

Mostre que todo passeio de u até v contém um caminho de u até v.

Considere um passeio de comprimento l de u até v.

Se l = 0 então temos um passeio sem nenhuma aresta. Isto denota que o caminho entre u e v também tem comprimento igual a 0.

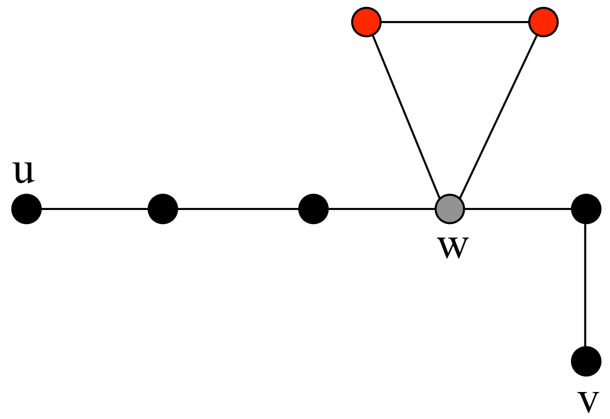
Se l > 0, temos que considerar o seguinte. Se o passeio de u a v não possuir nenhum vértice que tenha sido visitado duas vezes, então ele corresponde a um caminho entre u e v.

Teoria dos Grafos

Introdução – Representação

Se existe um vértice w que tenha sido visitado mais que uma vez, podemos remover as arestas e vértices entre as duas aparições de w.

Se existirem mais vértices que tenham sido visitados mais que uma vez o processo é repetido. Isto produz um passeio mais curto onde cada vértice é visitado uma única vez. Logo existe nesta situação um caminho entre u e v.



Teoria dos Grafos

Introdução – Representação

Mostre que todo grafo com n vértices e k arestas, onde n > k, tem no mínimo n-k componentes

Um grafo com n vértices com nenhuma aresta tem n componentes. Cada aresta reduz a quantidade de componentes em 1 unidade. Então, quando k arestas tiverem sido adicionadas ao grafo, o número de componentes será no mínimo n-k.

Teoria dos Grafos

Introdução – Representação

Mostre que um grafo G com n vértices e c componentes, tem uma quantidade de arestas k que satisfaz a seguinte desigualdade

$$n - c \le k \le \frac{(n-c)(n-c+1)}{2}$$

O limite inferior foi mostrado anteriormente.

O limite superior é definido da seguinte maneira. Considere a situação extrema, onde temos (c-1) componentes correspondendo a (c-1) vértices de grau igual a 0; e n-c+1 vértices constituindo um grafo completamente conexo.

Este grafo irá possuir

$$\tfrac{1}{2}(n-c+1)(n-c+1-1) = \tfrac{1}{2}(n-c+1)(n-c) \text{ arestas.}$$