

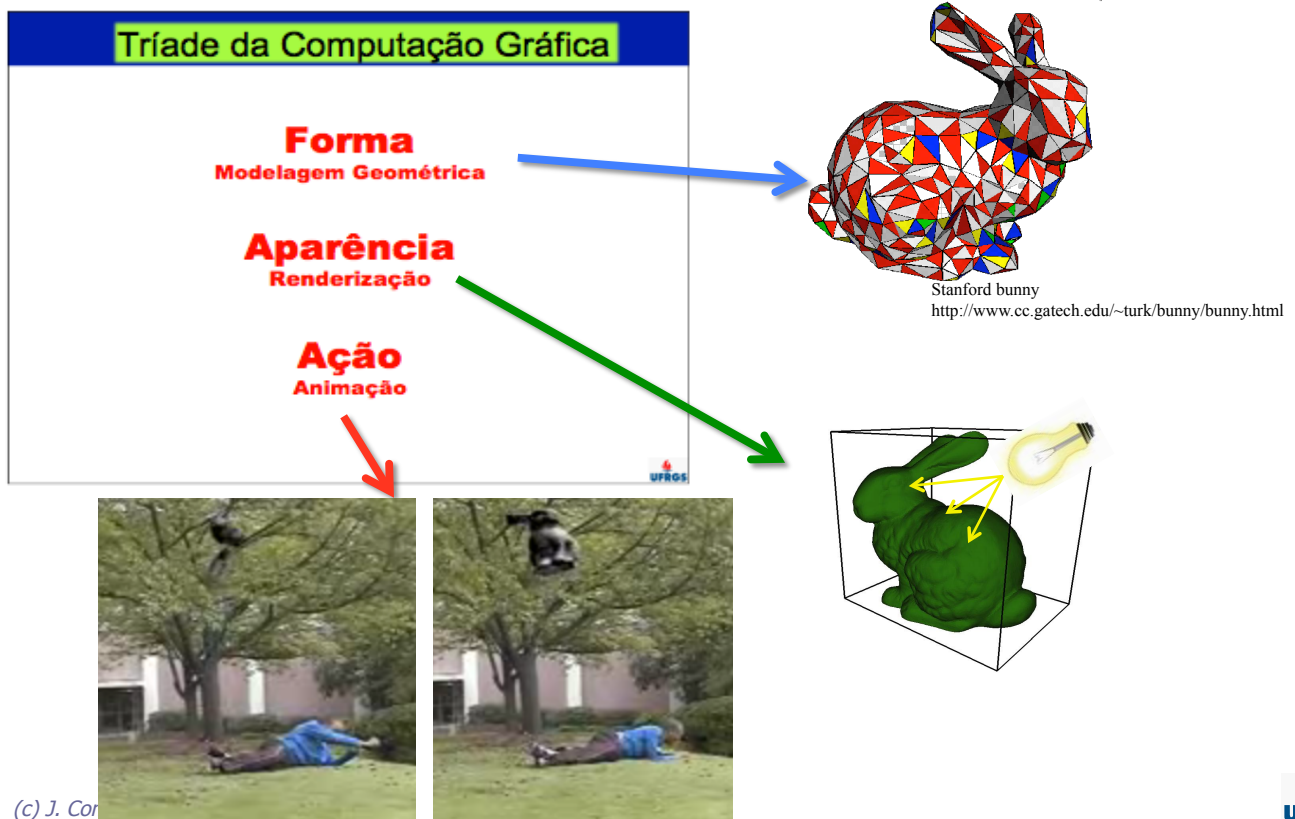
- INF01047 -

Fundamentos Matemáticos da Computação Gráfica

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel

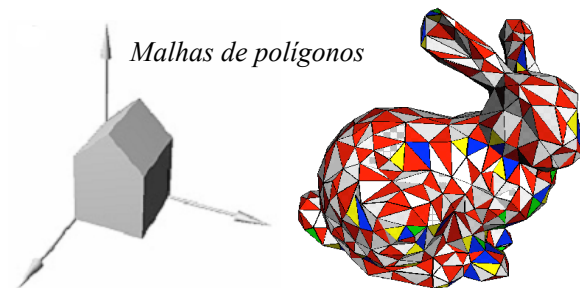


Problemas



Problemas x conceitos

- Representação de forma



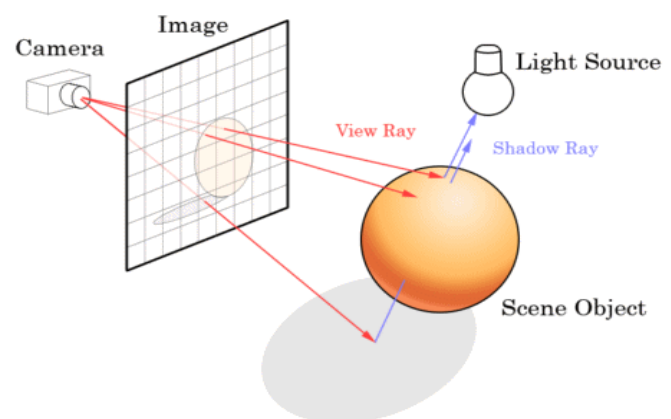
- Ponto como localização
- Plano, espaço 3D
- Sistemas de coordenadas

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Problemas x conceitos

- Determinação da aparência dos objetos



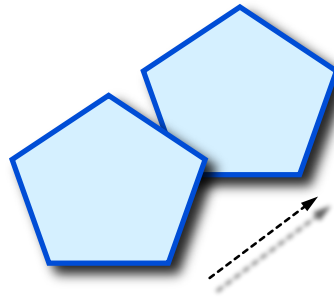
- Vetores
- Relação espacial entre objetos

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Problemas x conceitos

- Representação de ação



- Vetores
- Sistemas de coordenadas
- ...

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Fundamentos Matemáticos de CG

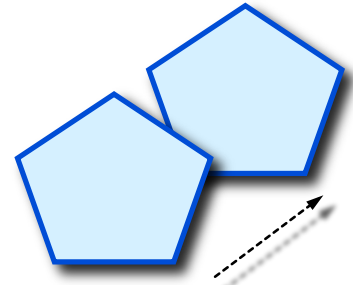
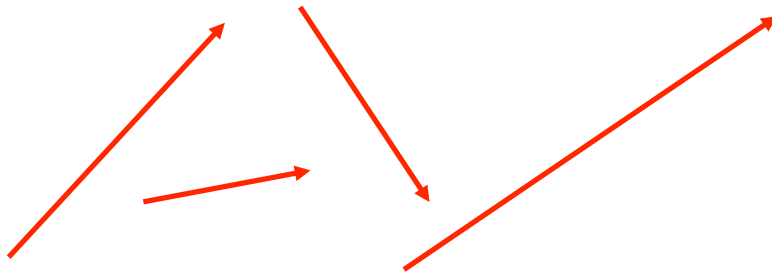
- **Vetores, espaços vetoriais**
- Pontos e espaços afins
- Sistemas de coordenadas
- Linhas e planos

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Vetores

- Um **vetor** **v** é uma entidade geométrica com magnitude (comprimento) e direção, representado graficamente por um segmento de linha orientado



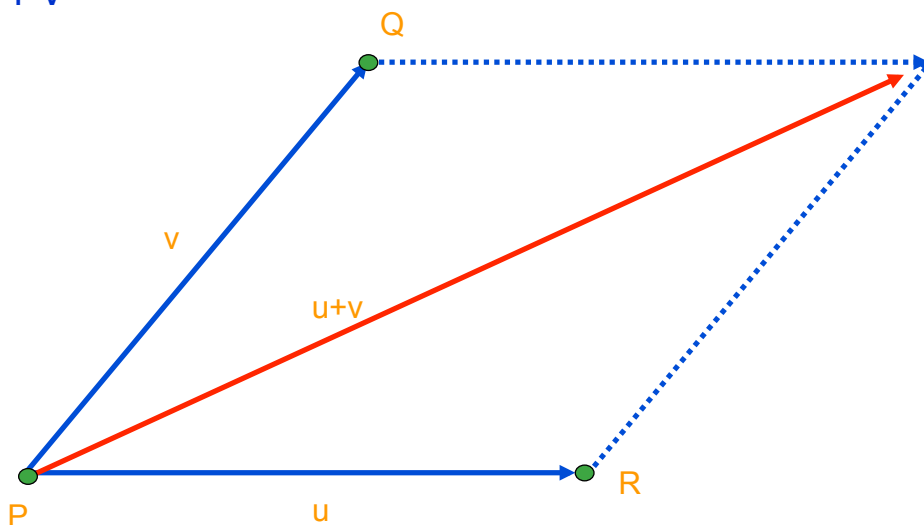
- Aplicações em CG ?**
 - Representação de direção (onde está a luz, para onde estou caminhando num jogo, qual a orientação de uma parede)
 - Mudanças de posições: posições de objetos podem ser modificadas por vetores
 - Associação de velocidade a objetos

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Operações sobre Vetores

- Adição:**
 $w = u + v$

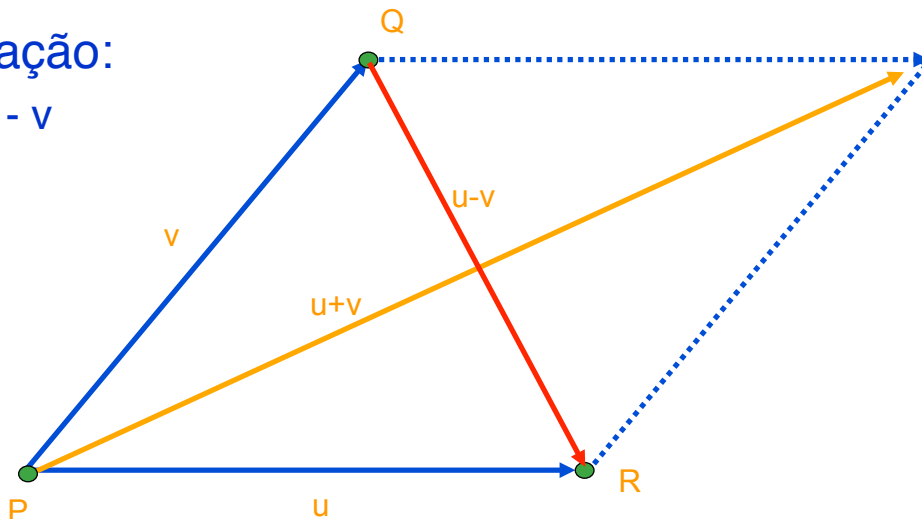


(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Operações sobre Vetores

- Adição:
 $w = u + v$
- Subtração:
 $w = u - v$



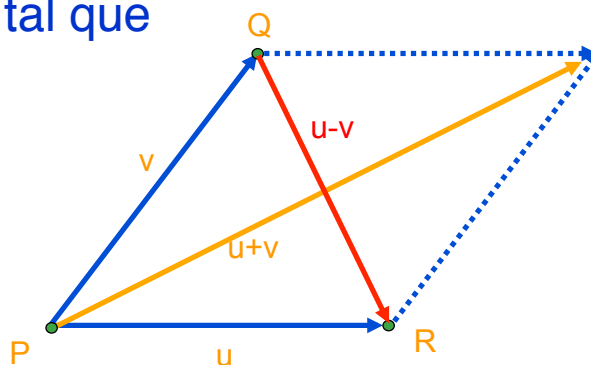
(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Propriedades da Adição de Vetores

- $v + w = w + v$ (comutativa)
- $u + (v+w) = (u+v) + w$ (associativa)
- $v + 0 = v$ (identidade aditiva)

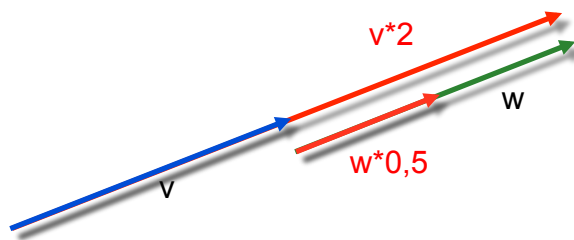
Para cada vetor v , existe $-v$ tal que
 $v + (-v) = 0$ (inverso aditivo)



(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Multiplicação por Escalar



Aplicação num jogo?

Propriedades:

$(ab) \mathbf{v}$	$=$	$a(b\mathbf{v})$	associativa
$(a+b)\mathbf{v}$	$=$	$a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$	distributiva
$a(\mathbf{v}+\mathbf{w})$	$=$	$a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$	distributiva
$1.\mathbf{v}$	$=$	\mathbf{v}	identidade multiplicativa

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Espaços Vetoriais Reais

- Representação gráfica x formalismo
- **Espaços Vetoriais:**
 - Elementos: conjunto não vazio de vetores
 - $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
 - $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
 - $\mathbb{R}^4 = \{(w, x, y, z) \mid w, x, y, z \in \mathbb{R}\}$
 - ...
 - $\mathbb{R}^n = \{(x_0, \dots, x_{n-1}) \mid x_0, \dots, x_{n-1} \in \mathbb{R}\}$



(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Espaços Vetoriais Reais

- Operações fundamentais:
 - Adição entre vetores
 - Multiplicação de escalares por vetores
- Adição no \mathbb{R}^2
 $(x_0, y_0) + (x_1, y_1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1)$
- Multiplicação por escalar
 $a(x_0, y_0) = (a.x_0, a.y_0)$

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Combinações Lineares e Base Vetorial

- Seja S um conjunto de n vetores
 $S = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$
- Podemos usar estes vetores para criar um novo vetor v usando uma combinação linear:

$$v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}$$

onde a_0, \dots, a_{n-1} são reais escalares

Exemplo:

$$S = \{(0,2), (4,0), (4,8)\}$$

- * podemos gerar o vetor $(0,2)$ a partir de $(4,0)$ e $(4,8)$?
- * e o vetor $(4,8)$ pode ser gerado a partir dos outros?

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Combinações Lineares e Base Vetorial

- Se um dos vetores do conjunto S é expresso como uma combinação linear dos demais membros de S

$$v_i = a_0 v_0 + \dots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} \dots + a_{n-1} v_{n-1}$$

v_i é linearmente dependente

- Se nenhum dos vetores em S é linearmente dependente dos demais ...

v_0, \dots, v_{n-1} são linearmente independentes

$$S1 = \{(0,2), (4,0)\} \quad S2 = \{(0,2), (4,8)\} \quad S3 = \{(4,0), (4,8)\}$$

Base

- Para um dado espaço vetorial V , podemos achar o conjunto β de vetores linearmente independentes em V que gera V : **a base β**
 - Mais de uma base pode ser encontrada
- Todas as bases possuem o mesmo número de elementos
 - Dimensão do espaço vetorial**
- Para o \mathbb{R}^3 , base é composta de 3 elementos
 - Espaço **tri-dimensional**

Base Padrão (ou canônica)

$$\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$$

$$e_0 = (1, 0, \dots, 0)$$

$$e_1 = (0, 1, \dots, 0)$$

...

$$e_{n-1} = (0, 0, \dots, 1)$$

- **Propriedade Fundamental da Base:**

- Para cada vetor v no espaço vetorial V , existe somente uma combinação linear de vetores de β que é igual a v

$$v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}$$

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Abreviatura na representação

$$v = a_0 v_0 + a_1 v_1 + \dots + a_{n-1} v_{n-1}$$

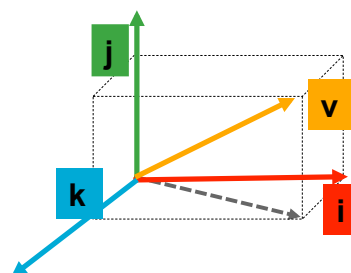
por

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$$

- **Exemplo em 3D:**

- Base $\underset{i}{(1, 0, 0)} \underset{j}{(0, 1, 0)} \underset{k}{(0, 0, 1)}$

$$v = xi + yj + zk$$



(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Operações sobre Vetores

$$V_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$V_1 = (x_1, y_1, z_1)$$

- **Adição:**

$$\begin{aligned} V_0 + V_1 &= x_0i + y_0j + z_0k + x_1i + y_1j + z_1k \\ &= (x_0 + x_1)i + (y_0 + y_1)j + (z_0 + z_1)k \end{aligned}$$

- **Multiplicação por Escalar:**

$$\begin{aligned} av &= a(xi + yj + zk) \\ &= (ax)i + (ay)j + (az)k \end{aligned}$$

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Comprimentos de Vetores

- **Norma de um vetor**

- função de comprimento do vetor, com as seguintes propriedades:

1. $\|v\| \geq 0$, e $\|v\| = 0$, se e somente se, $v = 0$
2. $\|av\| = |a| \|v\|$
3. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

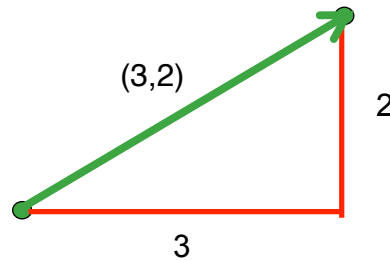
(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Exemplos de Normas

- Distância Euclideana

$$\|u\| = d = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$\|(3,2)\| = \sqrt{9 + 4} = 3.6055$$

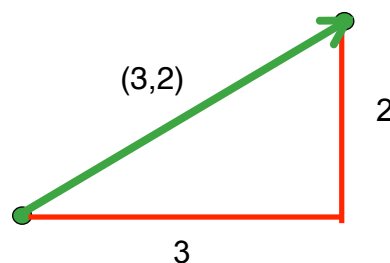
(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Exemplo de Normas

- Distância de Manhattan

$$\|v\|_{l_1} = \sum_i \|v_i\|$$



$$\|(3,2)\|_{l_1} = 3 + 2 = 5$$

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



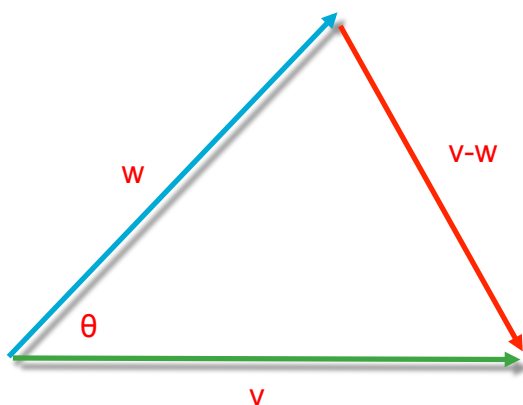
Problemas



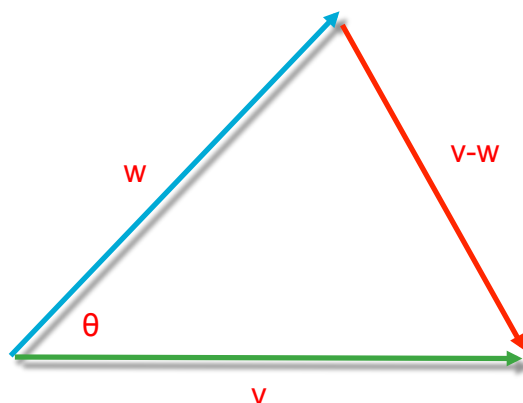
Ângulo entre vetores

Lei dos Cossenos

$$||v-w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 - 2||v|| ||w|| \cos \theta$$



Ângulo entre vetores



$$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\| \|w\| \cos \theta$$

$$\rightarrow -2\|v\| \|w\| \cos \theta = \|v-w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2$$

$$\rightarrow -2\|v\| \|w\| \cos \theta = (v_x-w_x)^2 + (v_y-w_y)^2 + (v_z-w_z)^2 - (v_x^2+v_y^2+v_z^2) - (w_x^2+w_y^2+w_z^2)$$

$$\rightarrow -2\|v\| \|w\| \cos \theta = -2v_x w_x - 2v_y w_y - 2v_z w_z$$

$$\rightarrow \|v\| \|w\| \cos \theta = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

produto escalar

$$\rightarrow \cos \theta = (v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z) / \|v\| \|w\|$$

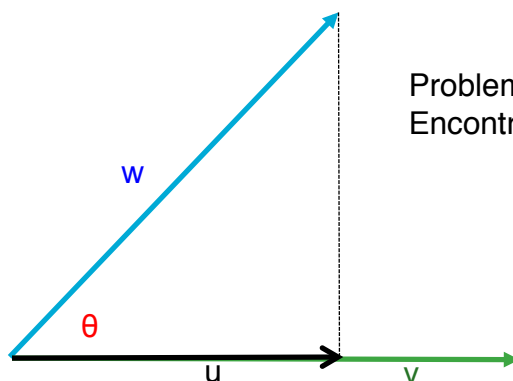
(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Produto Escalar

- Referenciado por $v \cdot w$
- Definido como:

$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos \theta$$



Problema:

Encontrar a projeção do vetor w sobre v

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel

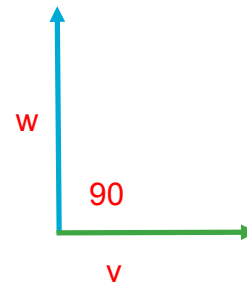


Propriedades do Produto Escalar



$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos 0 = \|v\| \|w\|$$

$$v \cdot v = \|v\| \|v\| \cos 0 = \|v\|^2$$



$$v \cdot w = \|v\| \|w\| \cos 90 = 0$$

$$v \cdot w = w \cdot v$$

$$w \cdot (u+v) = (u \cdot w) + (v \cdot w)$$

$$a(v \cdot w) = av \cdot w$$

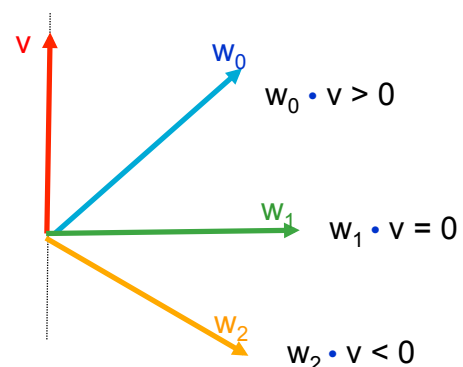
$$v \cdot v \geq 0, \quad v \cdot v = 0 \text{ se e somente se } v = 0$$

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Aplicações do Produto Escalar

- Usar produto escalar como medida de ângulo entre dois vetores:
 - verificar se dois vetores estão apontando na mesma direção
 - verificar se dois objetos estão se deslocando na mesma direção



(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Problema

- Estou andando em direção à cabine telefônica ou me afastando dela?



Que vetor usar para comparar com o da minha direção?

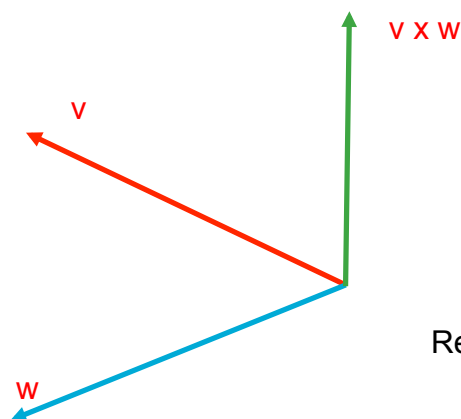
(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Produto Vetorial

- Encontrar um vetor ortogonal a outros dois

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (y_v \cdot z_w - y_w \cdot z_v, z_v \cdot x_w - x_v \cdot z_w, x_v \cdot y_w - x_w \cdot y_v)$$



Regra da mão direita

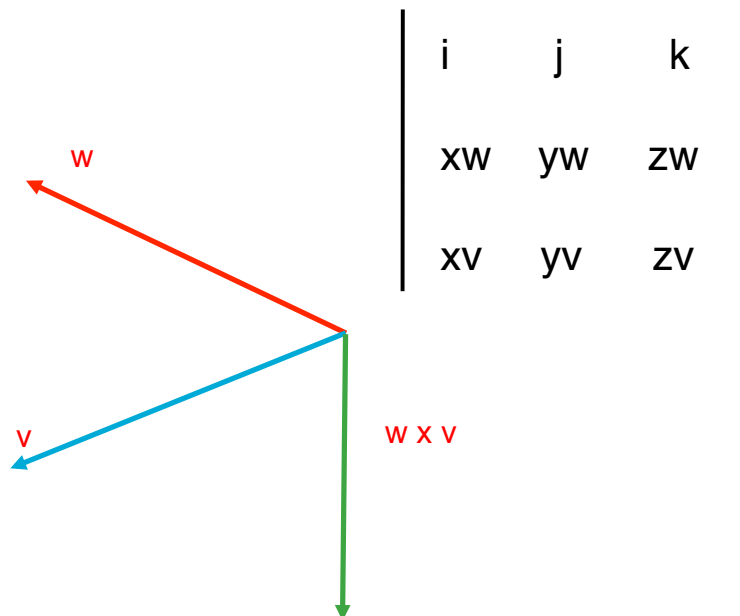
(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Produto Vetorial

- Encontrar um vetor ortogonal a outros dois

$$\mathbf{w} \times \mathbf{v} = ?$$



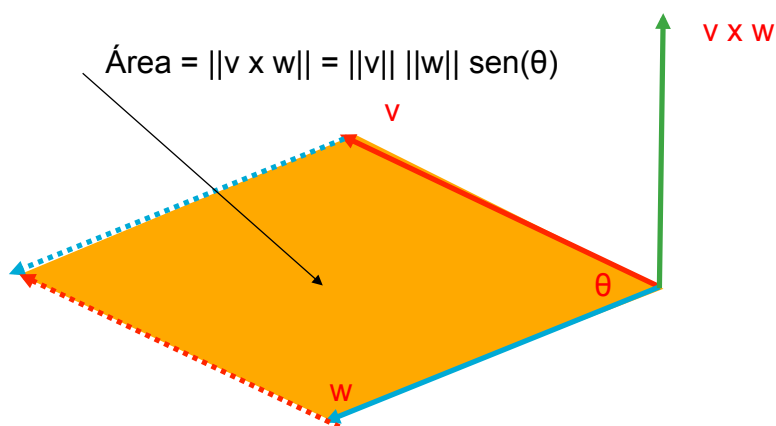
(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Produto Vetorial

- Encontrar um vetor ortogonal a outros dois

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_y w_z - w_y v_z, v_z w_x - w_z v_x, v_x w_y - w_x v_y)$$



(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Propriedades do Produto Vetorial

1. $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -\mathbf{w} \times \mathbf{v}$
2. $\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{u} \times \mathbf{w}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$
4. $a(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (a\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times (a\mathbf{w})$
5. $\mathbf{v} \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$
6. $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \end{aligned}$$

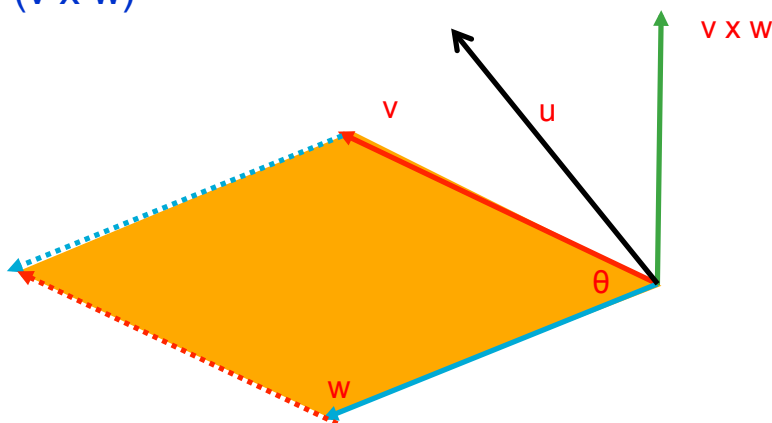
(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Produto Misto

- Produto misto

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$$



- O módulo do produto vetorial é a área do paralelogramo
- O produto misto é o volume do paralelepípedo induzido por \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w}

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Fundamentos Matemáticos de CG

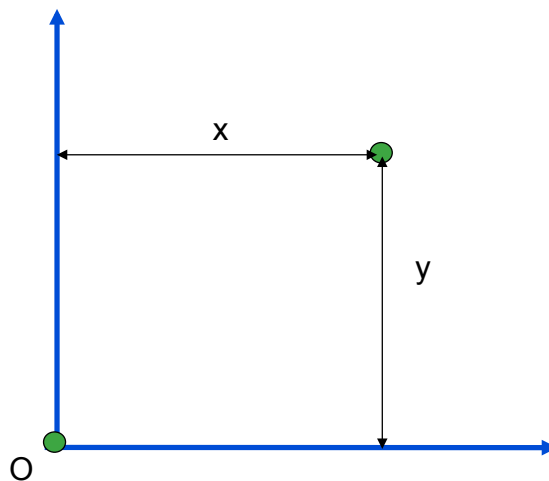
- Vetores, espaços vetoriais
- Pontos e espaços afins
- Sistemas de coordenadas
- Linhas e planos

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Pontos

- Ponto como localização
- Sistema de coordenadas Cartesiano

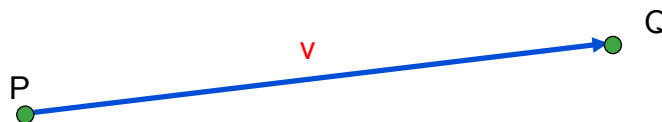


(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Espaço Afim

- Conjunto de pontos W e Espaço vetorial V
- Relacionamento entre Vetores e Pontos
 - Para cada par de pontos P e Q em W , existe um único vetor \mathbf{v} em V tal que:
 - $\mathbf{v} = Q - P$
 - Para cada ponto P em W e cada vetor \mathbf{v} em V , existe um único ponto Q tal que:
 - $Q = P + \mathbf{v}$



(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



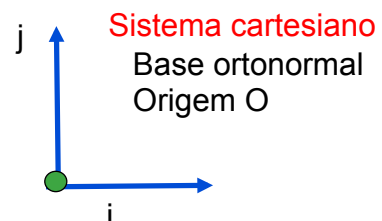
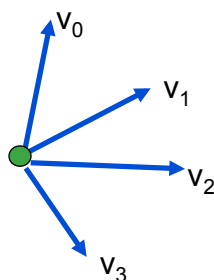
Sistemas de referência

- Dada a origem O e expressando qq ponto P em W :
 - $P = O + \mathbf{v}$
- Escrevendo \mathbf{v} como combinação linear de vetores de uma base de V
 - $P = O + a_0\mathbf{v}_0 + a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_{n-1}\mathbf{v}_{n-1}$
 - $P = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, coordenadas do ponto P

Sistema de referência

$S = (O, \beta)$

$\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$



Sistema cartesiano

Base ortonormal

Origem O

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



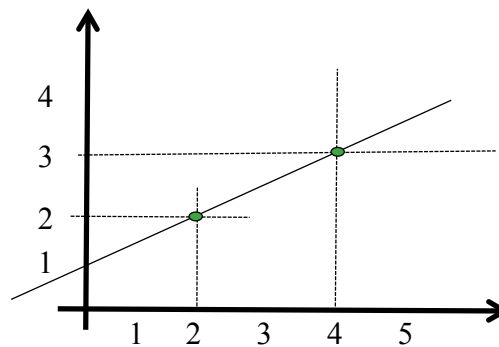
Retas

- Equação implícita:

$$y = mx + b$$

- onde m = coeficiente angular da reta
- onde b = coordenada onde a reta cruza o eixo y

- Exemplo: $y = 0,5x + 1$

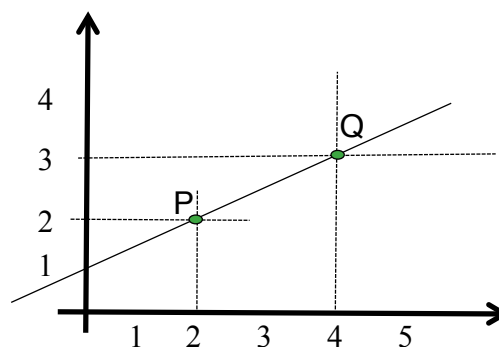


(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel

Retas

- Como obter a equação da reta que passa por dois pontos?

$$P = (2, 2) \quad Q = (4, 3)$$

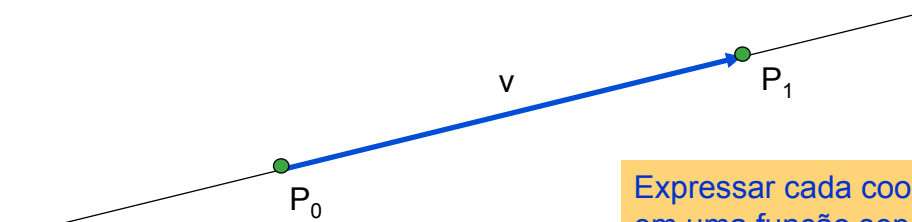


(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel

Retas

- Equação Paramétrica:

$$\begin{aligned}L(t) &= P_0 + t (P_1 - P_0) \\&= (1-t) P_0 + t P_1 \\&= P_0 + tv, \text{ onde } v = (dx, dy) \\dx &= x_1 - x_0 \\dy &= y_1 - y_0\end{aligned}$$



Expressar cada coordenada em uma função separada

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Retas

- Representação genérica de retas:

$$x = P_x + t dx \quad (1)$$

$$y = P_y + t dy \quad (2)$$

- Encontrando t a partir de x:

$$t = (x - P_x) / dx \quad (1)$$

- Substituindo em y (2)

$$y = dy (x - P_x) / dx + P_y$$

- Re-escrevendo:

$$\begin{aligned}0 &= (y - P_y) / dy - (x - P_x) / dx \\&= (-dy)x + (dx) y + (dyP_x - dxP_y) \\&= ax + by + c\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a &= -dy \\b &= dx \\c &= dyP_x - dxP_y = -aP_x - bP_y\end{aligned}$$

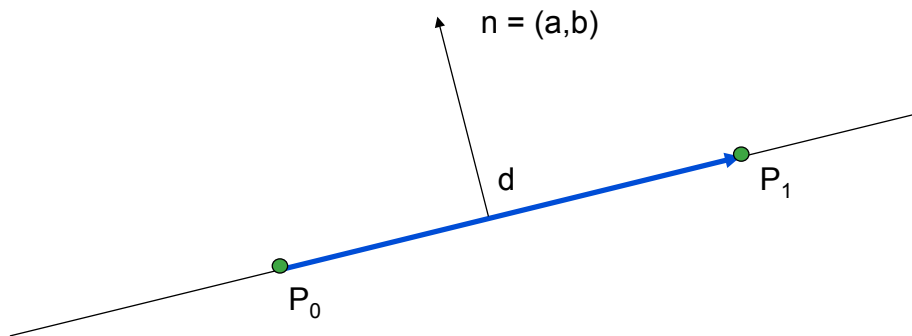
Note que (a,b) é perpendicular à direção da linha. Por que?

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Retas

- Como testar em qual lado da linha um ponto está?

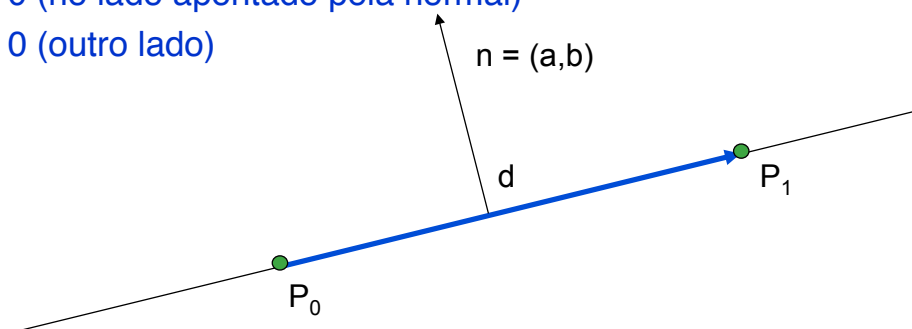


(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Retas

- Como testar em qual lado da linha um ponto está?
 - substituir (x, y) na equação da reta $ax+by+c = 0$
 - $= 0$ (sobre a linha)
 - > 0 (no lado apontado pela normal)
 - < 0 (outro lado)

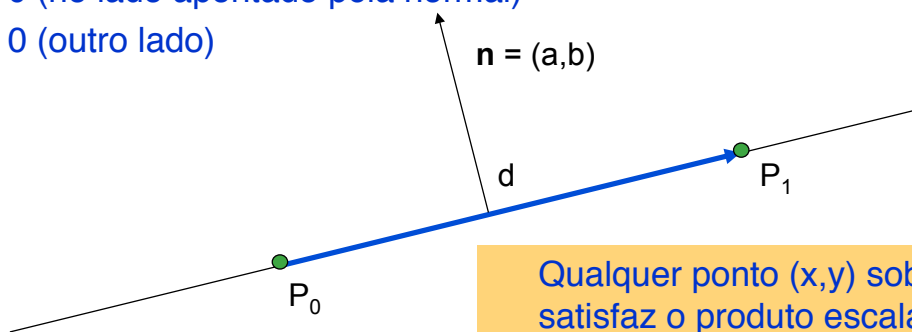


(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Retas

- Como testar em qual lado da linha um ponto está?
 - substituir (x, y) na equação da linha $ax + by + c = 0$
 - $= 0$ (sobre a linha)
 - > 0 (no lado apontado pela normal)
 - < 0 (outro lado)



Qualquer ponto (x, y) sobre a reta
satisfaz o produto escalar

$$(x - x_0, y - y_0) \cdot (a, b) = 0$$

> 0 (no lado apontado por \mathbf{n})

< 0 (outro lado)

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Planos

- 3 pontos não-colineares
- 1 ponto e uma normal
- Equação genérica:
 - $P_0(x_0, y_0, z_0)$, ponto conhecido
 - Normal (a, b, c)
 - Se um ponto P pertence ao plano, $\mathbf{v} = (P - P_0)$ também pertence ao plano
 - Para \mathbf{v} e \mathbf{n} serem ortogonais, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$
 - Rearranjando:
$$0 = ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)$$
$$= ax + by + cz + d$$

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Planos

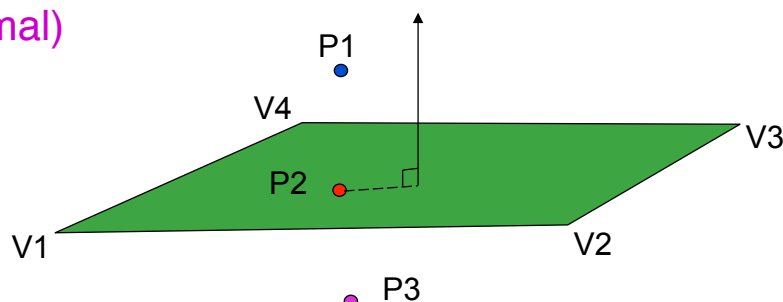
- Como calcular eq. genérica dados 3 pontos P, Q e R ?
 - Formar 2 vetores sobre o plano
 - $u = Q - P$
 - $v = R - P$
 - Calcular o produto vetorial para achar a normal
 - $n = u \times v$
 - Normalizar a normal obtida
 - conveniente para cálculos de distâncias
 - Usar coordenadas da normal como a , b e c
 - Usar um ponto no plano (P por exemplo), calcular d:
 - $d = - (aPx + bPy + cPz)$

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Planos

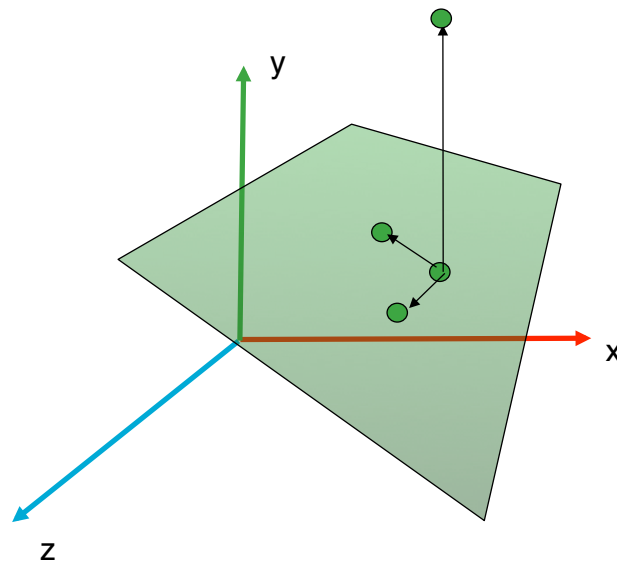
- Verificar a situação de um ponto P (x,y,z) em relação a um plano:
 - $ax + by + cz + d = 0$ (P sobre o plano)
 - $ax + by + cz + d > 0$ (P no semi-espço apontado pela normal)
 - $ax + by + cz + d < 0$ (P no semi-espço contrário a direção da normal)



(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Encontrando a normal de um polígono



Exercício!

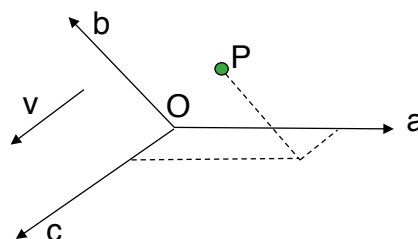
(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Pontos e vetores

- Qual a diferença entre pontos e vetores ?
 - $v = (3, 5, 7)$
 - $P = (5, 3, 1)$
 - Pontos possuem uma **localização**, mas não tamanho ou direção
 - Vetores possuem **tamanho e direção**, mas não localização
 - Tanto pontos como vetores são relativos a um sistema de coordenadas

Confusão qdo. temos vários sistemas de coordenadas → comum em CG

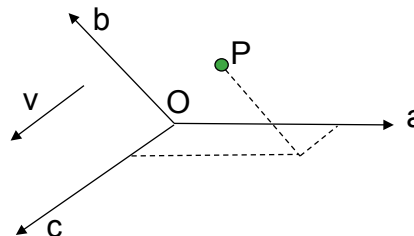


(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Coordenadas Homogêneas

- Qual a diferença entre pontos e vetores ?
 $v = (v_1, v_2, v_3) = v_1a + v_2b + v_3c$
 $P = (p_1, p_2, p_3) = O + p_1a + p_2b + p_3c$
- Como representar pontos e vetores usando a mesma notação ?
 - Usar $(a, b, c, \Omega) \rightarrow$ **Coordenadas Homogêneas**
 $v = (v_1, v_2, v_3, 0)$
 $p = (p_1, p_2, p_3, 1)$



(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Coordenadas Homogêneas

- Propriedades:
 - Diferença entre 2 pontos gera 1 vetor:
 - $(x_0, y_0, z_0, 1) - (x_1, y_1, z_1, 1) = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1, 0)$
 - Soma de 1 ponto e 1 vetor gera 1 ponto:
 - $(x, y, z, 1) + (v_1, v_2, v_3, 0) = (x + v_1, y + v_2, z + v_3, 1)$
 - Dois pontos não podem ser somados:
 - ~~$(x_0, y_0, z_0, 1) + (x_1, y_1, z_1, 1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1, 1 + 1)$~~
 - Dois vetores somados geram 1 vetor:
 - $(v_1, v_2, v_3, 0) + (w_1, w_2, w_3, 0) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, 0)$
 - A escala de um vetor gera outro vetor:
 - $3 * (v_1, v_2, v_3, 0) = (3v_1, 3v_2, 3v_3, 0)$
 - Combinação linear de vetores:
 - $av + bw = (av_1 + bw_1, av_2 + bw_2, av_3 + bw_3, 0)$,
para $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel



Coordenadas Homogêneas

- **Coordenadas ordinárias para homogêneas**
 - Ponto: acrescente 1 na tupla
 - Vetor: acrescente 0 na tupla
- **Coordenadas homogêneas para ordinárias**
 - Ponto: remova a última coordenada que é 1
 - Vetor: remova a última coordenada que é 0