INF01046 – Fundamentos de processamento de imagens

Aula 13 – Propriedades da DFT

Horacio E. Fortunato

Instituto de Informática
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Porto Alegre – RS

hefortunato@inf.ufrgs.br

Link do curso: http://www.inf.ufrgs.br/~hefortunato/cursos/INF01046

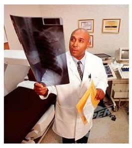
2° semestre de 2009

Processamento Digital de Imagens - Nesta disciplina

Sensores e Aquisição de Imagens

- Sistema visual Humano
- Modalidade de Imagens
- Câmeras Digitais

Processamento para a interpretação humana



- Realce de Imagens:
  - Processamento de histograma
  - Filtragem espacial
  - Filtragem no domínio da frequência
- Restauração de Imagens:
  - Remoção de ruído
  - Remoção de borramento
- Espaços de Cores
- Imagens em Alta Faixa Dinâmica

Percepção por máquina

- Detecção de linhas e bordas
- Limiarização
- Segmentação

Armazenamento e Comunicação

- Compressão de imagens

Transformada de Fourier bidimensional discreta e sua inversa

Na aula 10 apresentamos a transformada de Fourier bidimensional discreta como:

DFT:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \qquad u = 0,1,2...M\text{-}1 \quad v = 0,1,2...N\text{-}1$$

IDFT

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)} \qquad x = 0,1,2...M\text{-}1 \quad y = 0,1,2...N\text{-}1$$

A DFT como produto de matrizes

Se a matiz F é o produto de duas matrizes A e C, o elemento uv de F é: $F_{uv} = \sum_{x=0}^{M-1} A_{ux}\cdot C_{xv}$

Para o produto de 3 matrizes temos: $F = A\cdot f\cdot B \rightarrow F_{uv} = \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} A_{ux}\cdot f_{xy}B_{yv}$

Fazendo as substituições: $f_{xy} = f(x,y),\ \ A_{ux} = e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{M}\right)},\ \ B_{yv} = e^{-2\pi i\left(\frac{yv}{N}\right)}$

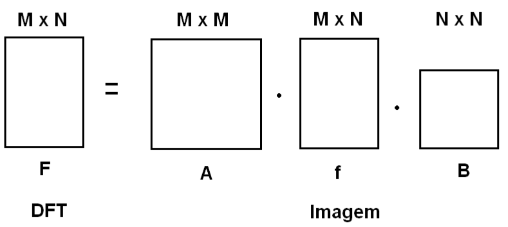
E multiplicando pelo fator 1/ (N.M) obtemos a expressão da transformada de Fourier bidimensional discreta:

$$F_{uv} = \frac{1}{N\cdot M}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\cdot e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

Concluímos que a DFT pode ser expressada como o produto de 3 matrizes: a imagem original e duas matrizes com elementos do tipo :

$A_{ux} = e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{M}\right)}$ (Raízes M-ésimas da unidade)

A DFT como produto de matrizes



$$F = \frac{1}{M\cdot N}A\cdot f\cdot B \rightarrow F_{uv} = \frac{1}{M\cdot N}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} A_{ux}\cdot f_{xy}B_{yv}$$

$$f_{xy} = f(x,y),\ \ A_{ux} = e^{-2\pi i\left(\frac{ux}{M}\right)},\ \ B_{yv} = e^{-2\pi i\left(\frac{yv}{N}\right)}$$

Algumas propriedades da DFT

Na aula 10 apresentamos algumas propriedades da DFT:

Separabilidade	$f(x,y) = f(x)f(y) \Leftrightarrow F(u,v) = F(u)F(v)$
Trafos lineares	$af(x,y) + bg(x,y) \Leftrightarrow aF(u,v) + bG(u,v)$
Rotação	O par de funções rota o mesmo ângulo
Translação	$f(x-x_0, y-x_0) \Leftrightarrow e^{-j2\pi(ux_0+vy_0)}F(u,v)$ $e^{j2\pi(u_0x+v_0y)}f(x,y) \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0)$
Convolução	$f(x,y)*g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)G(u,v)$ $f(x,y)g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$
Periodicidade	$F(u,v) = F(u+N,v) = F(u,v+M) = F(u+N,v+M)$
Simetria conjugada	$F(u,v) = F^{*}(-u,-v) \Rightarrow \lvert F(u,v)\rvert = \lvert F(-u,-v)\rvert$

Separabilidade da DFT

Demonstração:

$$F(u,v) = \frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right)}$$

u = 0,1,2...M-1
v = 0,1,2...N-1

$$F(u,v) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}\right)} \times \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{vy}{N}\right)}}$$

u = 0,1,2...M-1
v = 0,1,2...N-1

$$F(u,v) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} F(x,v)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}\right)}$$

u = 0,1,2...M-1
v = 0,1,2...N-1

Transformações lineares

A transformada de Fourier da combinação linear de duas funções é a combinação linear das transformadas

$$a\cdot f(x,y)+b\cdot g(x,y) \Leftrightarrow a\cdot F(u,v)+b\cdot G(u,v)$$

Demonstração:

$$\Im[a\cdot f(x,y)+b\cdot g(x,y)] = \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N}(a\cdot f(x,y)+b\cdot g(x,y))\cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$= \frac{a}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x,y)\cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} + \frac{b}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} g(x,y)\cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$= a\cdot\Im[f(x,y)]+b\cdot\Im[g(x,y)]$$

$$= a\cdot F(u,v)+b\cdot G(u,v)$$

Translação e a DFT

$$f(x,y)\cdot e^{2\pi i(\frac{u_0 x}{M}+\frac{v_0 y}{N})} \Leftrightarrow F(u-u_0, v-v_0) \qquad f(x-x_0, y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)\cdot e^{-2\pi i(\frac{u x_0}{M}+\frac{v y_0}{N})}$$

Demonstração:

$$\Im[f(x-x_0, y-y_0)] = \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x-x_0, y-y_0)\cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

definimos $\omega = x-x_0$ *e* $\lambda = y-y_0 \Rightarrow x = \omega+x_0$ *e* $y=\lambda+y_0$

$$= \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{\omega+x_0=0}^{M}\sum_{\lambda+y_0=0}^{N} f(\omega,\lambda)\cdot e^{-2\pi i(\frac{u\cdot(\omega+x_0)}{M}+\frac{v\cdot(\lambda+y_0)}{N})}$$

$$= \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{\omega+x_0=0}^{M}\sum_{\lambda+y_0=0}^{N} f(\omega,\lambda)\cdot e^{-2\pi i(\frac{u\cdot\omega}{M}+\frac{v\cdot\lambda}{N})}\cdot e^{-2\pi i(\frac{u x_0}{M}+\frac{v y_0}{N})}$$

Como consideramos a função f periódica com períodos M e N e a exponencial também é, podemos trocar o intervalo das somatórias.

$$= e^{-2\pi i(\frac{u x_0}{M}+\frac{v y_0}{N})}\frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{\omega+x_0=0}^{M}\sum_{\lambda+y_0=0}^{N} f(\omega,\lambda)\cdot e^{-2\pi i(\frac{u\cdot\omega}{M}+\frac{v\cdot\lambda}{N})} = F(u,v)\cdot e^{-2\pi i(\frac{u x_0}{M}+\frac{v y_0}{N})}$$

Periodicidade da DFT

$$F(u,v)=F(u+M,v)=F(u,v+N)=F(u+M,v+N)$$

Demonstração:

$$F(u,v) = \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x,y)\cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$F(u+M,v+N) = \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x,y)\cdot e^{-2\pi i(\frac{(u+M)x}{M}+\frac{(v+N)y}{N})}$$

$$= \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x,y)\cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\cdot e^{-2\pi i(\frac{Mx}{M}+\frac{Ny}{N})}$$

$$(e^{-2\pi i(\frac{Mx}{M}+\frac{Ny}{N})} = e^{-2\pi i(x+y)} = 1)$$

$$= \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x,y)\cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} = F(u,v)$$

Periodicidade da DFT

$$f(x,y)=f(x+M,y)=f(x,y+N)=f(x+M,y+N)$$

Demonstração:

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{M}\sum_{v=0}^{N} F(u,v)\cdot e^{2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$f(x+M,y+N) = \sum_{u=0}^{M}\sum_{v=0}^{N} F(u,v)\cdot e^{2\pi i(\frac{u(x+M)}{M}+\frac{v(y+N)}{N})}$$

$$= \sum_{u=0}^{M}\sum_{v=0}^{N} F(u,v)\cdot e^{2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}\cdot e^{2\pi i(\frac{Mu}{M}+\frac{Nv}{N})}$$

$$(e^{-2\pi i(\frac{Mu}{M}+\frac{Nv}{N})} = e^{-2\pi i(u+v)} = 1)$$

$$= \sum_{u=0}^{M}\sum_{v=0}^{N} F(u,v)\cdot e^{2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})} = f(x,y)$$

Simetria conjugada (válido para f real)

$$F(-u,-v)=F^{*}(u,v)\rightarrow|F(-u,-v)| = |F(u,v)|$$

Demonstração:

$$F(-u,-v) = \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x,y)\cdot e^{-2\pi i(\frac{-ux}{M}+\frac{-vy}{N})}$$

$$= \frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x,y)\cdot e^{2\pi i(\frac{-ux}{M}+\frac{-vy}{N})}$$

Se f for real então:

$$\frac{1}{(M\cdot N)}\sum_{x=0}^{M}\sum_{y=0}^{N} f(x,y)\cdot e^{2\pi i(\frac{-ux}{M}+\frac{-vy}{N})} = F^{*}(u,v)$$

Teorema da convolução

Na aula 08 definimos a convolução de uma imagem f (x, y) com uma máscara h de dimensão 3x3 como:

	-1	0	1
-1	.0625	.125	.0625
0	.125	.25	.125
+1	.0625	.125	.0625

h: kernel de convolução

	220	222	218	
	86	222	226	
	85	221	224	

Imagem *f* (x, y)

g(x,y) = h(-1, -1) f(x+1, y+1) +
h(0, -1) f(x, y+1) +
h(1, -1) f(x-1, y+1) +
h(-1, 0) f(x+1, y) +
h(0, 0) f(x, y) +
h(1, 0) f(x-1, y) +
h(-1, 1) f(x+1, y-1) +
h(0, 1) f(x, y-1) +
h(1, 1) f(x-1, y-1)

$$g(x,y)=\sum_{k=-1}^{k=1}\sum_{j=-1}^{1}h(j,k)f(x-j,y-k)$$

Para uma máscara h de dimensão: $(2\cdot\Delta+1)\times(2\cdot\Delta+1)$

$$g(x,y)=\sum_{k=-\Delta}^{k=\Delta}\sum_{j=-\Delta}^{j=\Delta}h(j,k)\cdot f(x-j,y-k)$$

Teorema da convolução - demostração

Nova definição de convolução onde trocamos o tamanho e a origem dos índices da mascara e consideramos a função f periódica com períodos M e N:

$$g(x,y)=h(x,y)*f(xy)=\sum_{j=-\Delta}^{\Delta}\sum_{k=-\Delta}^{\Delta}h(j,k)\cdot f(x-j,y-k)\rightarrow=\frac{1}{M\cdot N}\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}h(j,k)\cdot f(x-j,y-k)$$

$$G(u,v)=\frac{1}{(M\cdot N)^2}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}g(x,y)\cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$G(u,v)=\frac{1}{(M\cdot N)^2}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}h(j,k)\cdot f(x-j,y-k)\cdot e^{-2\pi i(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

$$definimos: \omega=x-j \ e \ \lambda=y-k \ então$$

$$G(u,v)=\frac{1}{(M\cdot N)^2}\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\omega+j=0}^{M-1}\sum_{\lambda+k=0}^{N-1}h(j,k)\cdot f(\omega,\lambda)\cdot e^{-2\pi i(\frac{u(\omega+j)}{M}+\frac{v(\lambda+k)}{N})}$$

Como consideramos a função f periódica com períodos M e N e a exponencial também é, podemos trocar o intervalo das 3ra e 4ta somatórias

$$G(u,v)=\frac{1}{(M\cdot N)^2}\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{\omega=0}^{M-1}\sum_{\lambda=0}^{N-1}h(j,k)\cdot f(\omega,\lambda)\cdot e^{-2\pi i(\frac{uj}{M}+\frac{vk}{N})}\cdot e^{-2\pi i(\frac{u\omega}{M}+\frac{v\lambda}{N})}$$

$$G(u,v)=\frac{1}{(M\cdot N)^2}\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1}h(j,k)\cdot e^{-2\pi i(\frac{uj}{M}+\frac{vk}{N})}\cdot\sum_{\omega=0}^{M-1}\sum_{\lambda=0}^{N-1}f(\omega,\lambda)\cdot e^{-2\pi i(\frac{u\omega}{M}+\frac{v\lambda}{N})}$$

$$G(u,v)=H(u,v)\cdot F(u,v)$$

Teorema da correlação

Definimos a correlação de f e h como

$$g(x,y)=f(x,y)\circ h(xy)=\frac{1}{M\cdot N}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}f^{x}(m,n)\cdot h(x+m,y+n)$$

O teorema da correlação é similar ao teorema da convolução:

$$f(x,y)\circ h(xy)\Leftrightarrow F^{x}(u,v)\cdot H(u,v)$$

$$f^{x}(x,y)\cdot h(xy)\Leftrightarrow F^{x}(u,v)\circ H(u,v)$$

Correlação

O principal uso da correlação é na área de casamento de "templates" ou protótipos

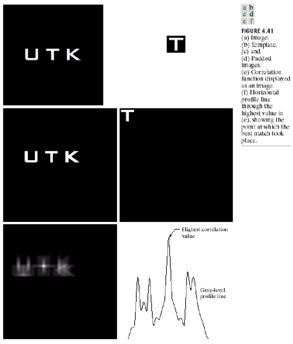


Imagem extraída do livro: Digital image processing 2ed, Gonzales e woods.

Processamento Digital de Imagens - Tarefas

Tarefas Acumuladas:
•Leia os Capítulo 1, 2, e 3 (aulas 01 a 09) do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)
•Faça os exercicios do Capítulos 1 a 3 do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)
•Leia as seções 4.1 a 4.5 do Capítulo 4 do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)
•Faça os exercícios do Capítulo 4,(Problemas 4.1 até 4.22) do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)
•Estude as seções 1, 2 e 3 do tutorial do MATLAB:
http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/pdf_doc/matlab/getstart.pdf

Tarefas Novas:
•Leia as seções 4.6.1 a 4.6.5 do Capítulo 4 (aula 13) do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)
•Faça os exercícios do Capítulo 4,(Problemas 4.23 até o fim) do livro Gonzalez, R. & Woods 2da Ed. (em Inglês)

Nota Importante: No livro Gonzalez, R.& Woods em português os capítulos possuem número diferente

Livro Gonzalez, R. & Woods 2ª Ed. (em Inglês):
Gonzalez, R. & Woods, R. Digital Image Processing 2ª Ed. Prentice Hall, 2002.
Link do curso: http://www.inf.ufrgs.br/~hefortunato/cursos/INF01046