Teoria dos Grafos

Edson Prestes

Teoria dos Grafos

Referências

- P. O. Boaventura Netto, “Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos”, São Paulo, E. Blucher 2001;
- R. J. Trudeau, “Introduction to Graph Theory”, New York, Dover Publications, 1993;
- Kaufmann, Arnold. “Exercices de combinatorique avec solutions”. Paris: Dunod, 1969-1972 3v.
- Harary, Frank. “Graph theory”. Reading, Mass.: Addison-Wesley, c1969. 274 p. : il.
- West, Douglas B.. “Introduction to graph theory”. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, c2001. 588 p.

Teoria dos Grafos

Introdução

- A teoria dos Grafos surgiu com os trabalhos de L. Euler, G. Kirchhoff e A. Cayley.
- Esta teoria tem sido utilizada largamente em diferentes áreas da biologia, química e na matemática aplicada.
- O problema das pontes de Königsberg é o primeiro e mais famoso problema em teoria dos grafos resolvido por Euler em 1736.

Teoria dos Grafos

Introdução

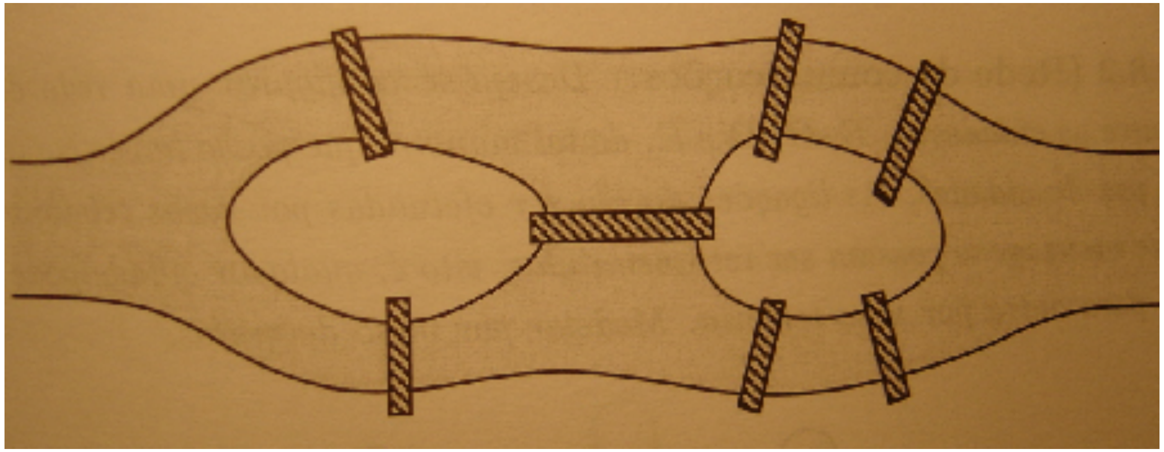
O problema das pontes de Königsberg

- **Na cidade de Königsberg existiam sete pontes que cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio.**

- **O problema consiste em determinar se é possível ou não fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez.**

Teoria dos Grafos

Introdução



pontes de Königsberg

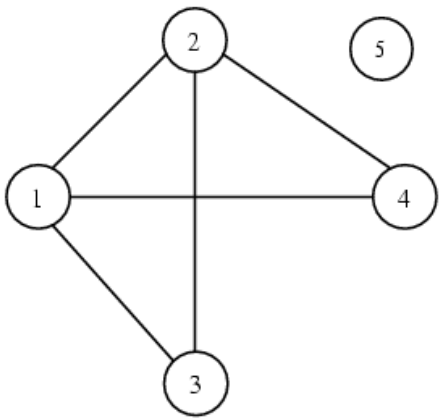
Teoria dos Grafos

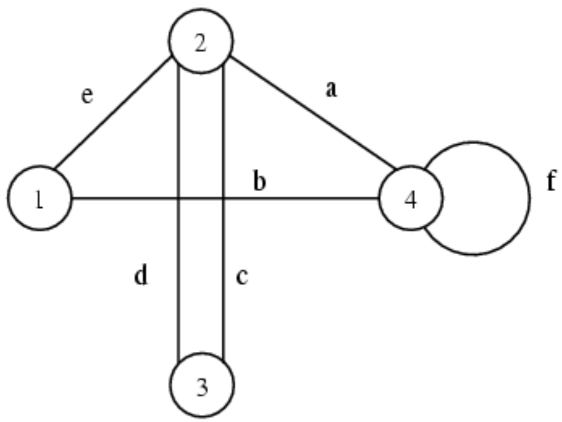
Introdução

- **Um grafo G consiste de um conjunto finito e não vazio de n nós, denotado por, V(G) e m arestas, denotado por, A(G).**

- **O termo grafo foi criado pelo químico E. Frankland e adotado em 1884. Ele vem da contração de *notação gráfica*.**

- **Cada aresta corresponde a um par não ordenado de nós.**

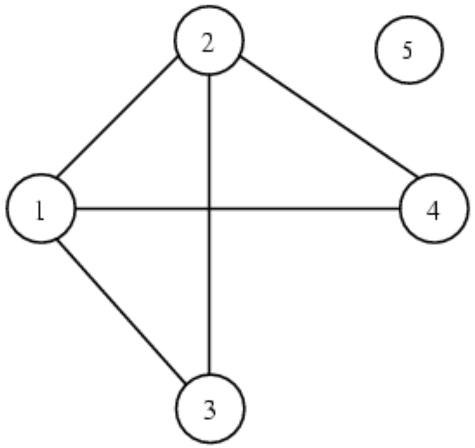


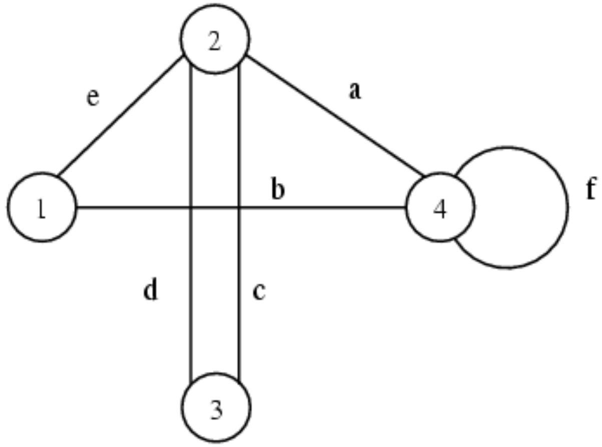


Teoria dos Grafos

Introdução

- Os nós constituintes de uma aresta podem ser diferentes ou não.
- Se não forem diferentes então a aresta forma um laço.

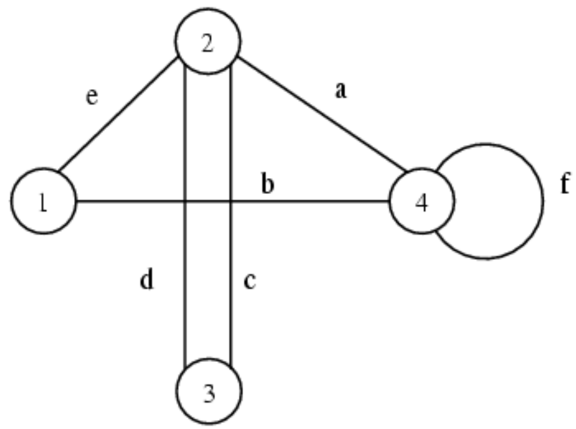




Teoria dos Grafos

Introdução

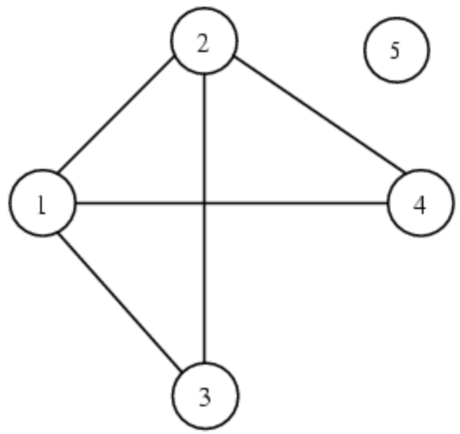
- **Harary define um *multigrafo* como aquele grafo que possui mais de uma aresta conectando dois vértices, mas que *não possui loops*.**
- **Se o grafo possui loop e múltiplas linhas conectando dois vértices então ele é chamado *pseudografo*.**
- **Em multigrafos/pseudografos, convém rotular as arestas para distingui-las entre si, devido a multiplicidade de conexões entre os vértices.**



Teoria dos Grafos

Introdução

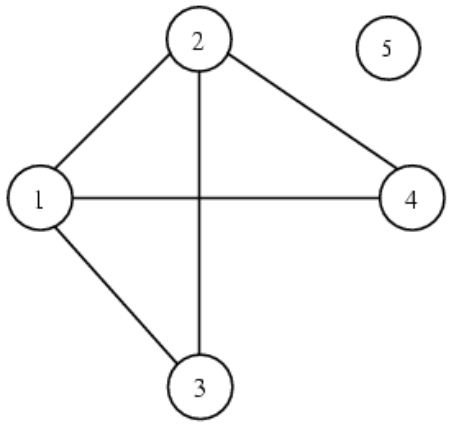
- **Dizemos que uma aresta é *incidente* aos nós aos quais está associada.**
- ***Arestas incidentes* em um mesmo nó são chamadas arestas adjacentes.**
- ***Nós incidentes* em uma mesma aresta são chamados nós adjacentes.**
- **Um nó pode estar *isolado* dos demais, caso ele não esteja ligado através de uma aresta aos restantes.**



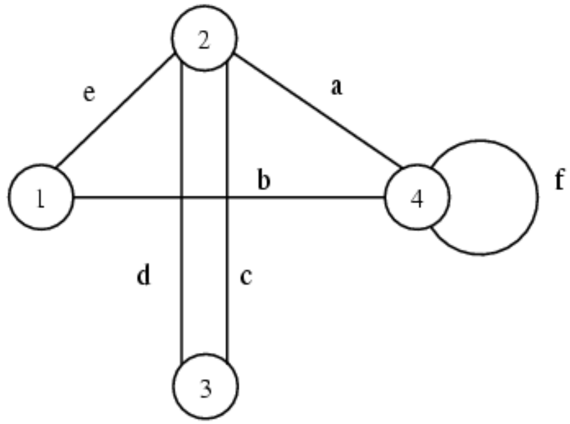
Teoria dos Grafos

Introdução

Dados os grafos abaixo



G_1



G_2

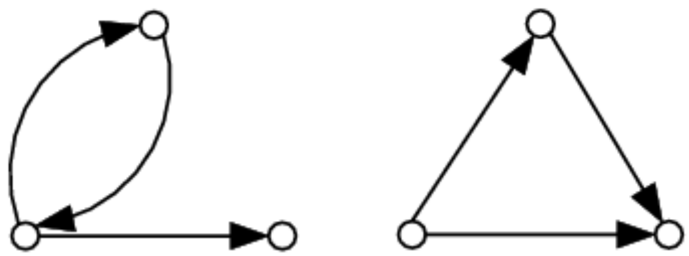
- **O grafo G_1 é descrito por $V(G_1)$={1,2,3,4,5} e $A(G_1)$={(1,2),(1,3), (1,4), (2,3),(2,4)}.**
- **O grafo G_2 é descrito por $V(G_2)$={1,2,3,4} e $A(G_1)$={a,b,c,d,e,f}.**

Teoria dos Grafos

Introdução

- Um grafo dirigido, ou *dígrafo*, é um grafo cujas arestas são *pares ordenados,* comumente chamados de arcos ou arestas direcionadas.

- Os dígrafos diferem dos grafos orientados por possuírem pares simétricos de arestas direcionadas.

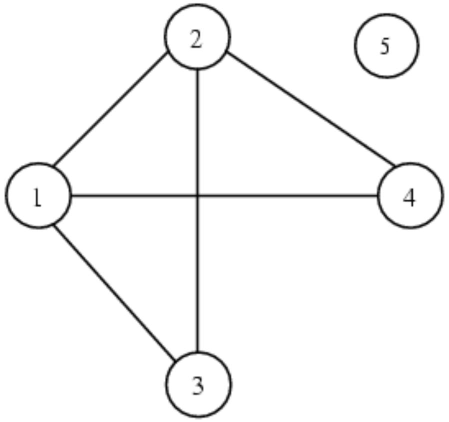


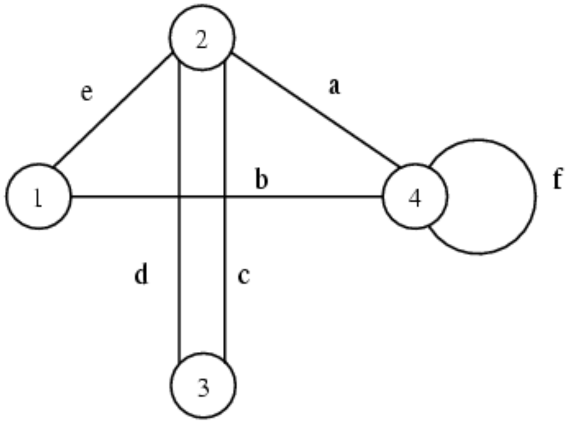
Dígrafo **Grafo Orientado**

Teoria dos Grafos

Introdução

- **O grau de um nó corresponde ao número de arestas incidentes a ele.**
- **Cada laço conta como duas arestas.**
- **O menor grau presente em um grafo G é denotado por** $\delta(G)$
- **O maior grau presente em um grafo G é denotado por** $\Delta(G)$





Teoria dos Grafos

Introdução

A soma total dos graus de todos os vértices de um grafo é sempre par

Prova por indução no número de arestas

B.I. : Suponha um grafo sem arcos. Todos os seus vértices têm grau zero e portanto a soma geral dos graus dos vértices é zero (par)

H.I. : Suponha que para todo grafo de n arestas a soma dos graus de todos os vértices é par.

P.I. : Suponha um grafo G de n+1 arestas. Seja G' um grafo igual a G exceto com menos uma aresta. Portanto G' tem n arestas e pela H.I. tem como soma total dos graus de seus vértices um número par.

A inclusão da aresta removida faz com a soma dos graus seja incrementada de 2 (é incrementado de 1 o grau dos vértices constituintes da aresta), portanto a soma dos graus dos vértices de G é um número par.