Máquina de Turing como Reconhecedor de Linguagens

Teoria da Computação

INF05501

Recapitulando...

- Uma Máquina de Turing é composta por uma fita, uma unidade de controle e um programa (função de transição) e pode ser **representada por um grafo ou uma tabela de transição**

- **Processamento de uma palavra** w envolve operações de **leitura e gravação de símbolos**, **movimentos** à esquerda ou à direita e **mudanças de estado** da máquina

- A processar uma palavra w, **máquina pode parar ou entrar em *loop* infinito**

- **Se máquina para**, palavra pode ser **aceita** (programa atinge estado final) ou **rejeitada** (função indefinida ou movimento inválido)

Reconhecimento de Linguagens

- Uma das abordagens do estudo das Máquinas de Turing (MT) - ou das Máquinas Universais em geral - é como reconhecedores de linguagens

- **Reconhecer uma linguagem** significa determinar se uma dada palavra sobre um alfabeto de entrada **pertence ou não** a uma certa linguagem

Linguagem Aceita por uma MT

Seja $M = (\Sigma, Q, \Pi, q_0, F, V, \beta, \triangleright)$ *uma Máquina de Turing. A* ***linguagem aceita por*** M, *denotada por* $ACEITA(M)$ *ou* $L(M)$, *é o conjunto de todas as palavras pertencentes a* alf^* *aceitas por* M, *ou seja:*

$$ACEITA(M) = \{w|M, \text{ ao processar } w \in \Sigma^*, \text{ para em um estado } q_f \in F\}$$

A ***linguagem rejeitada por*** M, *denotada por* $REJEITA(M)$, *é o conjunto de todas as palavras de* Σ^* *rejeitadas por* M, *ou seja:*

$$REJEITA(M) = \{w|M, \text{ ao processar } w \in \Sigma^*, \text{ para em um estado } q \notin F\}$$

A ***linguagem para a qual*** M ***fica em loop infinito***, *denotada por* $LOOP(M)$ *é o conjunto de todas as palavras de* Σ^* *para as quais M fica processando indefinidamente*

Linguagem Aceita por uma MT (cont.)

- Portanto, as seguintes afirmações são verdadeiras:

$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) =$?

$ACEITA(M) \cap LOOP(M) =$?

$REJEITA(M) \cap LOOP(M) =$?

$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) \cap LOOP(M) =$?

$ACEITA(M) \cup REJEITA(M) \cup LOOP(M) =$?

Linguagem Aceita por uma MT (cont.)

- Portanto, as seguintes afirmações são verdadeiras:

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cap LOOP(M) = \text{?}$$

$$REJEITA(M) \cap LOOP(M) = \text{?}$$

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) \cap LOOP(M) = \text{?}$$

$$ACEITA(M) \cup REJEITA(M) \cup LOOP(M) = \text{?}$$

Linguagem Aceita por uma MT (cont.)

- Portanto, as seguintes afirmações são verdadeiras:

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cap LOOP(M) = \emptyset$$

$$REJEITA(M) \cap LOOP(M) = ?$$

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) \cap LOOP(M) = ?$$

$$ACEITA(M) \cup REJEITA(M) \cup LOOP(M) = ?$$

Linguagem Aceita por uma MT (cont.)

- Portanto, as seguintes afirmações são verdadeiras:

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cap LOOP(M) = \emptyset$$

$$REJEITA(M) \cap LOOP(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) \cap LOOP(M) = ?$$

$$ACEITA(M) \cup REJEITA(M) \cup LOOP(M) = ?$$

Linguagem Aceita por uma MT (cont.)

- Portanto, as seguintes afirmações são verdadeiras:

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cap LOOP(M) = \emptyset$$

$$REJEITA(M) \cap LOOP(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) \cap LOOP(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cup REJEITA(M) \cup LOOP(M) = \text{?}$$

Linguagem Aceita por uma MT (cont.)

- Portanto, as seguintes afirmações são verdadeiras:

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cap LOOP(M) = \emptyset$$

$$REJEITA(M) \cap LOOP(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cap REJEITA(M) \cap LOOP(M) = \emptyset$$

$$ACEITA(M) \cup REJEITA(M) \cup LOOP(M) = \Sigma^*$$

Linguagem Aceita por uma MT (cont.)

- Por consequência, o complemento de:

$ACEITA(M)$ é $REJEITA(M) \cup LOOP(M)$

$REJEITA(M)$ é $ACEITA(M) \cup LOOP(M)$

$LOOP(M)$ é $ACEITA(M) \cup REJEITA(M)$

Exemplo

- Considere a seguinte linguagem:

$$Duplo\_Bal = \{a^n b^n | n \geq 0\}$$

- Dada a Máquina de Turing:

$$MT\_Duplo\_Bal = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Pi, q_0, \{q_4\}, \{A, B\}, \beta, \triangleright)$$

quais são as respectivas linguagens?

$ACEITA(MT\_Duplo\_Bal) = ?$

$REJEITA(MT\_Duplo\_Bal) = ?$

$LOOP(MT\_Duplo\_Bal) = ?$

Exemplo

- Considere a seguinte linguagem:

$$Duplo\_Bal = \{a^n b^n | n \geq 0\}$$

- Dada a Máquina de Turing:

$$MT\_Duplo\_Bal = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Pi, q_0, \{q_4\}, \{A, B\}, \beta, \triangleright)$$

quais são as respectivas linguagens?

$ACEITA(MT\_Duplo\_Bal) = Duplo\_Bal$

$REJEITA(MT\_Duplo\_Bal) = ?$

$LOOP(MT\_Duplo\_Bal) = ?$

Exemplo

- Considere a seguinte linguagem:

$$Duplo\_Bal = \{a^n b^n | n \geq 0\}$$

- Dada a Máquina de Turing:

$$MT\_Duplo\_Bal = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Pi, q_0, \{q_4\}, \{A, B\}, \beta, \triangleright)$$

quais são as respectivas linguagens?

$ACEITA(MT\_Duplo\_Bal) = Duplo\_Bal$

$REJEITA(MT\_Duplo\_Bal) = \Sigma^* - Duplo\_Bal$

$LOOP(MT\_Duplo\_Bal) = ?$

Exemplo

- Considere a seguinte linguagem:

$$Duplo\_Bal = \{a^n b^n | n \geq 0\}$$

- Dada a Máquina de Turing:

$$MT\_Duplo\_Bal = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \Pi, q_0, \{q_4\}, \{A, B\}, \beta, \triangleright)$$

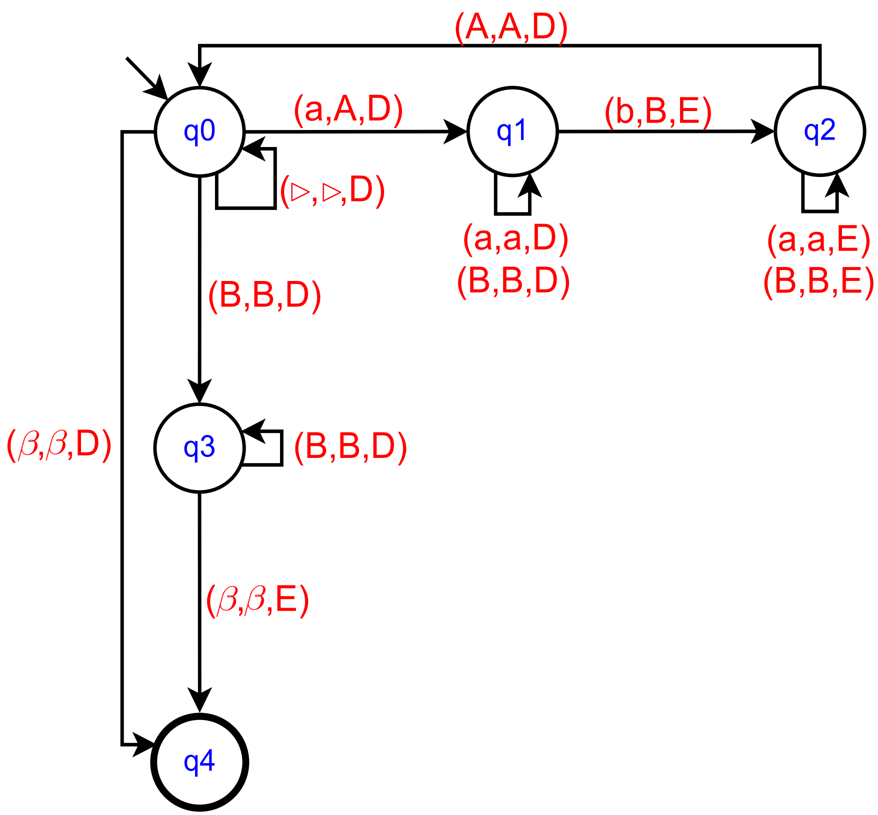
quais são as respectivas linguagens?

$ACEITA(MT\_Duplo\_Bal) = Duplo\_Bal$

$REJEITA(MT\_Duplo\_Bal) = \Sigma^* - Duplo\_Bal$

$LOOP(MT\_Duplo\_Bal) = \emptyset$

Exemplo (cont.)



Exemplo (cont.)

Π	$\triangleright$	a	b	A	B	β
q_0	$(q_0, \triangleright, D)$	(q_1, A, D)			(q_3, B, D)	(q_4, β, D)
q_1		(q_1, a, D)	(q_2, B, E)		(q_1, B, D)	
q_2		(q_2, a, E)		(q_0, A, D)	(q_2, B, E)	
q_3					(q_3, B, D)	(q_4, β, E)
q_4						

Exemplo (cont.)

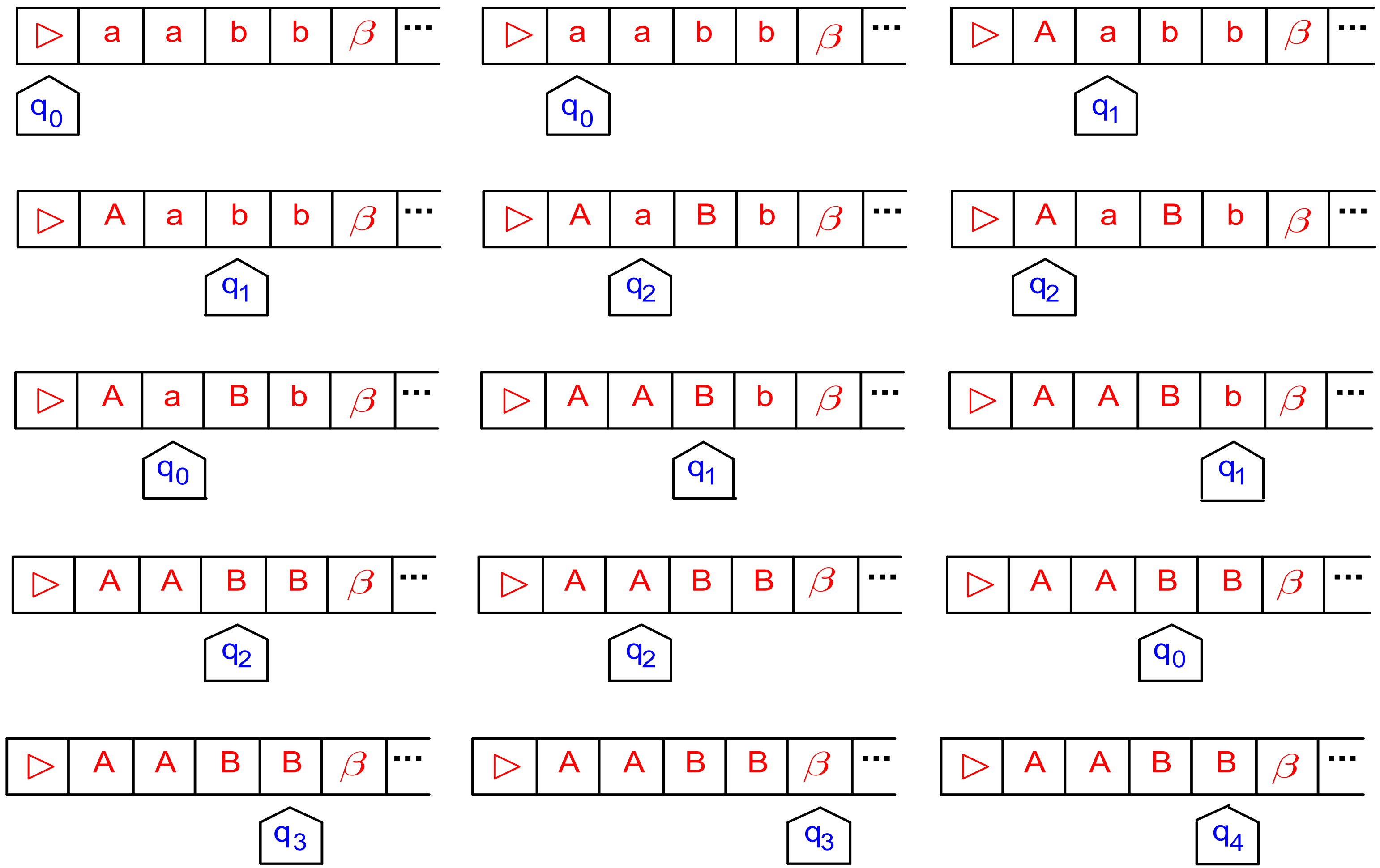
- Funcionamento:

  – Programa reconhece o primeiro símbolo a, o qual é marcado como A, e movimenta a cabeça da fita para a direita, procurando o b correspondente, o qual é marcado como B

  – Ciclo é repetido sucessivamente até identificar, **para cada a, o seu correspondente b**

  – Programa garante que qualquer outra palavra que não esteja na forma $a^n b^n$ é rejeitada

  – Note que o **símbolo de início de fita não tem influência na solução**


▷ a a b b β ...
q0
▷ a a b b β ...
q0
▷ A a b b β ...
q1
▷ A a b b β ...
q1
▷ A a B b β ...
q2
▷ A a B b β ...
q2
▷ A a B b β ...
q0
▷ A A B b β ...
q1
▷ A A B b β ...
q1
▷ A A B B β ...
q2
▷ A A B B β ...
q2
▷ A A B B β ...
q0
▷ A A B B β ...
q3
▷ A A B B β ...
q3
▷ A A B B β ...
q4

Critério de Reconhecimento de Linguagens

Se a máquina para para toda palavra da linguagem sobre o alfabeto de entrada, então ela é reconhecida pela Máquina de Turing (ou Turing-reconhecível)

Linguagens Enumeráveis Recursivamente

- Uma linguagem aceita por uma Máquina de Turing é dita enumerável recursivamente

- Enumerável deriva do fato de que as palavras de qualquer linguagem enumerável recursivamente podem ser enumeradas ou listadas por uma MT

- Recursivamente é um termo matemático, anterior ao computador, com significado similar ao de recursão, utilizado na Computação

Linguagens Enumeráveis Recursivamente (cont.)

- A Classe das Linguagens Enumeráveis Recursivamente define:
  - Todas as linguagens que podem ser reconhecidas mecanicamente (Ex.: linguagens livres de contexto)
  - Outras linguagens para as quais não se pode, mecanicamente, determinar se uma dada palavra pertence ou não à linguagem

Linguagens Enumeráveis Recursivamente (cont.)

*Seja L uma linguagem enumerável recursivamente que **não pode ser mecanicamente reconhecida**. Para qualquer máquina M que aceita a linguagem L, existe pelo menos **uma palavra** $w \notin L$, que, ao ser processada por M, resulta em que a máquina entre em loop infinito.*

Ou seja:

- *Se $w \in L$, M para e aceita a entrada*
- *Se $w \notin L$, M pode parar e rejeitar a palavra ou permanecer processando indefinidamente (loop)*

Linguagens Recursivas

- São uma subclasse das Linguagens Enumeráveis Recursivamente
- Linguagem é dita recursiva se existe pelo menos uma MT tal que:

  $ACEITA(M) = L$

  $REJEITA(M) = \Sigma^* - L$

  $LOOP(M) = \emptyset$

Linguagens Recursivas (cont.)

- Portanto, as linguagens recursivas definem **todas as linguagens que podem ser reconhecidas mecanicamente**

- Isto é, para cada linguagem recursiva, existe uma MT correspondente que sempre para para qualquer entrada, aceitando ou rejeitando a mesma

Propriedades de Linguagens Recursivas

- Se uma linguagem L sobre um alfabeto Σ qualquer é recursiva, então seu complemento $\Sigma^* - L$ também é uma linguagem recursiva

- Uma linguagem L sobre um alfabeto Σ qualquer é recursiva sss L e seu complemento são enumeráveis recursivamente

- A Classe das Linguagens Recursivas está contida propriamente na Classe das Linguagens Enumeráveis Recursivamente

Exercícios

1. Desenvolva Máquinas de Turing que reconheçam as seguintes linguagens:

   (a) $Triplo\_Bal = \{a^n b^n c^n | n \geq 0\}$

   (b) $Duplo\_Bal\_Duplo = \{w | w = a^n b^n$ ou $b^n a^n\}$

   (c) $Pal = \{w | w = w^R\}$, onde w^R representa a palavra w lida em reverso (i.e., da direita para a esquerda)

2. As linguagens definidas acima são recursivas? Justifique.