Conjunto independente máximo Com variáveis indicadores x_v, $v \in V$ temos o programa inteiro

$$\begin{aligned}
\textbf{max} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\textbf{s.a} \quad & x_u + x_v \leq 1 \quad \forall \{u, v\} \in A && \text{cada aresta tem no máximo um nó incidente} \\
& x_v \in \mathbb{B} \quad \forall v \in V
\end{aligned}$$

O matriz de coeficientes dois coeficientes igual 1 em cada linha, que correspondem às arestas, e, em geral, não é totalmente unimodular. Por exemplo, o grafo completo com três vértices K_3

gera a matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é -2, não é TU. A solução ótima da relaxação inteira $0 \leq x_i \leq 1$ é $x_1 = x_2 = x_3 = 1/2$ com valor $3/2$.

Casamento perfeito com peso máximo Sejam x_a, $a \in A$ variáveis indicadores para a seleção de cada aresta. Com isso, obtemos o programa inteiro

$$\begin{aligned}
\textbf{max} \quad & \sum_{a \in A} p(x_a) \\
\textbf{s.a} \quad & \sum_{u \in N(v)} x_{\{u,v\}} = 1 \quad \forall v \in V && \text{Cada nó tem exatamente um vizinho}
\end{aligned}$$

A matriz obviamente satisfaz critério (i). Ela tem uma linha para cada vértice e uma coluna para cada aresta do grafo. Como cada aresta é incidente a exatamento dois vértices, ela também satisfaz (ii). Finalmente, a bi-partição $V_1 \dot\cup V_2$ do grafo gera uma bi-partição das linhas que satisfaz (iii). Portanto, a matriz é TU, e o *Casamento perfeito com peso máximo* pode ser resolvido em tempo polinomial usando a relaxão linear.

Problema de transporte Sejam x_{ij} variáveis inteiras, que correspondem ao número de produtos transportados do depósito i para cliente j. Então

$$\begin{aligned}
\textbf{min} \quad & \sum_{ij} c_{ij} x_{ij} \\
\textbf{s.a} \quad & \sum_{j} x_{ij} = p_i \quad \forall 1 \leq i \leq n && \text{cada depósito manda todo estoque} \\
& \sum_{i} x_{ij} = d_j \quad \forall 1 \leq j \leq m && \text{cada cliente recebe a sua demanda} \\
& x_{ij} \in \mathbb{Z}^+
\end{aligned}$$

A matriz obviamente satisfaz critério (i). Podemos representar o problema como grafo bi-partido completo $K_{n,m}$ entre os depósitos e os clientes. Desta forma, com o mesmo argumento que no último problema, podemos ver, que os critérios (ii) e (iii) são satisfeitos.

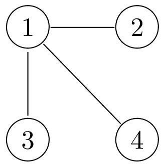
Conjunto dominante Sejam x_v, $v \in V$ variáveis indicadores para seleção de vértices. Temos o programa inteiro

$$
\begin{aligned}
\textbf{min} \quad & \sum_{v \in V} x_v \\
\textbf{s.a} \quad & x_v + \sum_{u \in N(v)} x_u \geq 1 \quad \forall v \in V && \text{nó ou vizinho selecionado} \\
& x_v \in \mathbb{B} \quad \forall v \in V
\end{aligned}
$$

A matriz de coeficientes satisfaz critério (i), mas não critério (ii): cada linha e coluna correspondente com vértice v contém $|N(v)| + 1$ coeficientes não-nulos. Mas, não é óbvio que a matriz mesmo assim não é TU (lembre que o critério é suficiente, mas não necessário). O K_3 acima, por exemplo, gera a matriz

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$

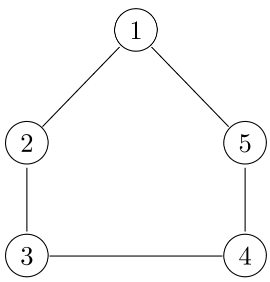
que *é* TU. Um contra-exemplo seria o grafo bi-partido $K_{1,3}$



que gera a matriz de coeficientes

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

com determinante -2. Isso não prova, que (por outra razões) a relaxação linear não produz resultados inteiros ótimos. De fato, nesse exemplo a solução ótima da relaxação inteira é a solução ótima interia $D = \{1\}$.
Um verdadeiro contra-exemplo é um ciclo com cinco vértices C_5



com matriz

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

(cujo determinante é 3). A relaxação linear desse sistema tem a solução ótima $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 1/3$ com valor $5/3$, que não é inteira.