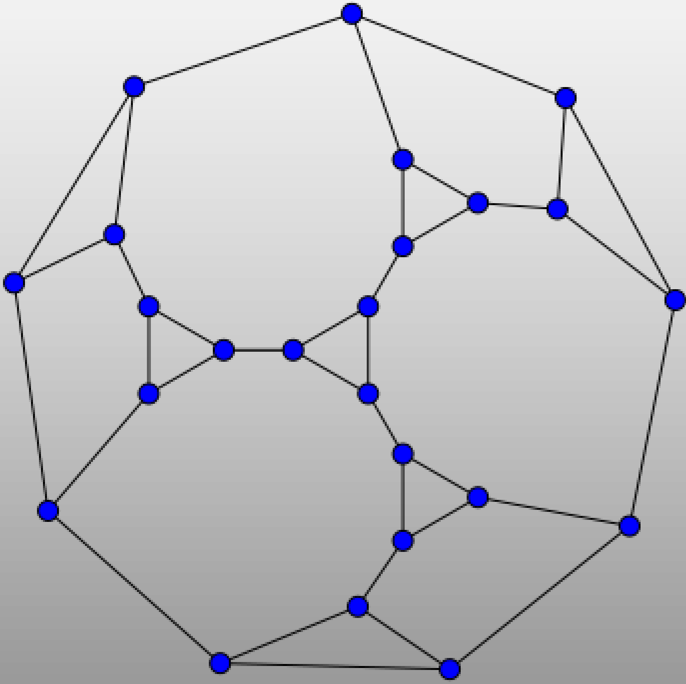
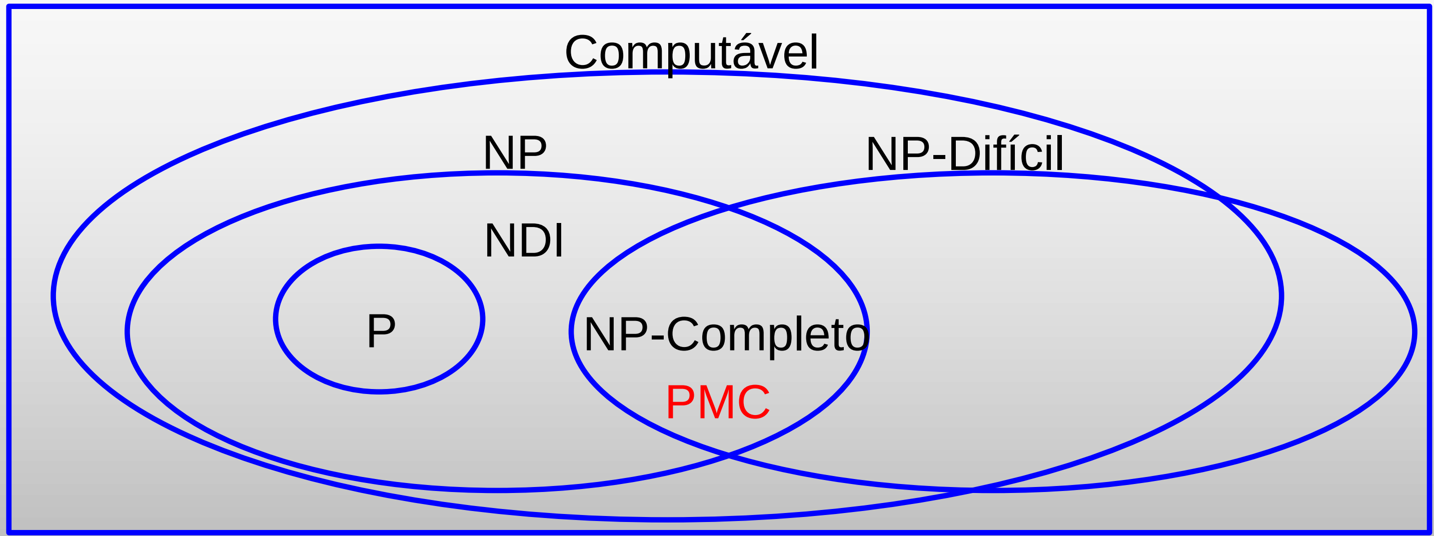
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL
INSTITUTO DE INFORMÁTICA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA TEÓRICA

# PROBLEMA DO MAIOR CAMINHO



**Complexidade de Algoritmos**
**Profª. Mariana Kolberg**
**Grupo: Cléber Gugel Machado, João Luiz Grave Gross**

# Universo de Problemas




- P ⟶ Problema de Decisão que podem ser resolvidos por algoritmo determinístico em tempo polinomial.
- NP ⟶ Problema de Decisão que podem ser resolvidos por algoritmo não determinístico em tempo polinomial, podem ser certificados em tempo polinomial.
- NP-Completo ⟶ Subconjunto de problema de decisão NP os quais tem soluções que podem ser verificadas em tempo polinomial.
- NP-difíceis ⟶ São problemas de decisão, problemas de pesquisa ou problemas de otimização tão difíceis quanto os problemas mais difíceis em NP.
- NDI ⟶ (NP – P) – NP-Completo
- PMC ⟶ Problema do Maior Caminho ∈ NP-Completo

# Caracterização do problema

- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.

# Caracterização do problema

- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.
  - Caminho simples: caminho que não contém vértices repetidos.
  - Maior comprimento: maior quantidade de arestas entre dois vértices, desde que respeite o caminho simples.

# Caracterização do problema

- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.
  - Caminho simples: caminho que não contém vértices repetidos.
  - Maior comprimento: maior quantidade de arestas entre dois vértices, desde que respeite o caminho simples.

- O problema do maior caminho em grafos é NP-completo.

# Caracterização do problema

- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.
  - Caminho simples: caminho que não contém vértices repetidos.
  - Maior comprimento: maior quantidade de arestas entre dois vértices, desde que respeite o caminho simples.

- O problema do maior caminho em grafos é NP-completo.
  - Não possui solução em tempo polinomial, a não ser que P = NP.
  - Pode ser verificado em tempo polinomial.

# Caracterização do problema

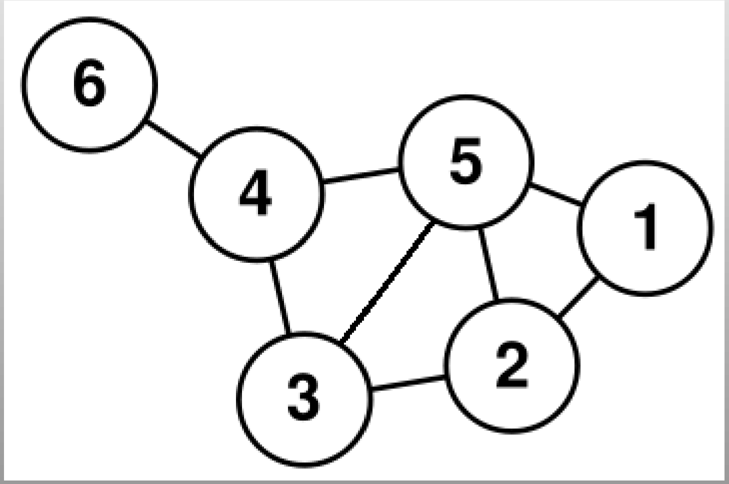
- Problema: encontrar o caminho simples de maior comprimento em um grafo.
  - Caminho simples: caminho que não contém vértices repetidos.
  - Maior comprimento: maior quantidade de arestas entre dois vértices, desde que respeite o caminho simples.

- O problema do maior caminho em grafos é NP-completo.
  - Não possui solução em tempo polinomial, a não ser que P = NP.
  - Pode ser verificado em tempo polinomial.

- Versão padrão do problema:
  - Dado um grafo conexo, encontrar um caminho simples de comprimento maior ou igual a k.

# Caracterização do problema

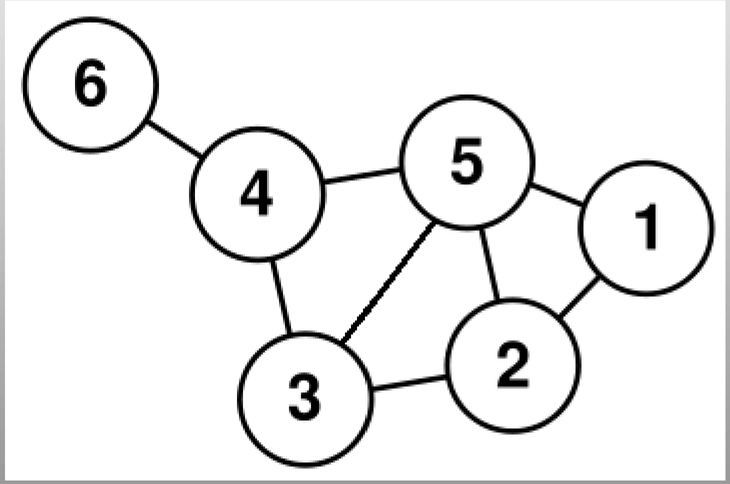
- Exemplo

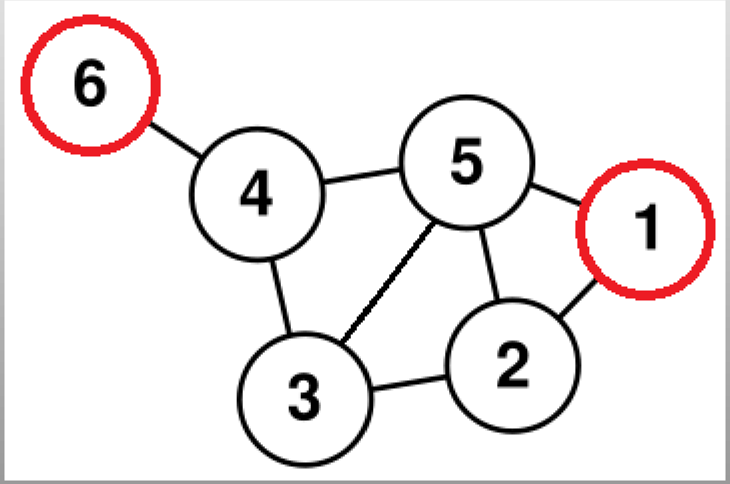



Qual o maior caminho simples deste grafo?

# Caracterização do problema

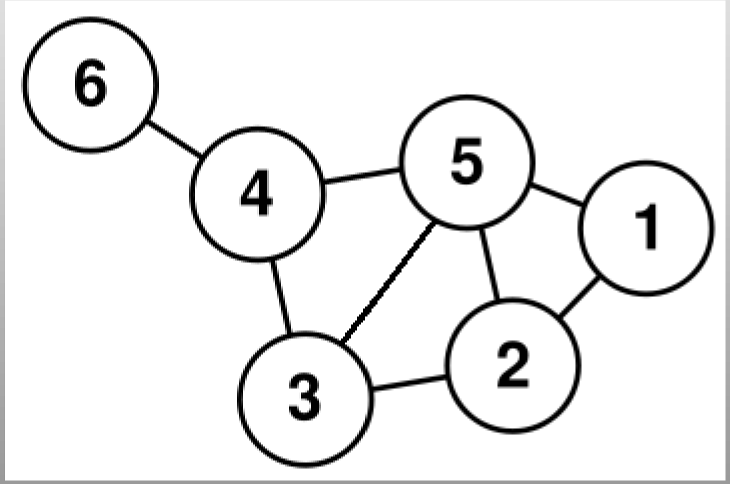
- Exemplo

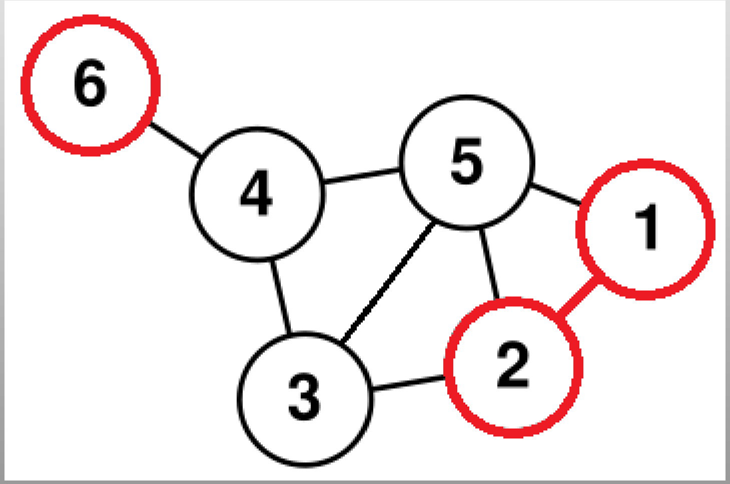


# Caracterização do problema

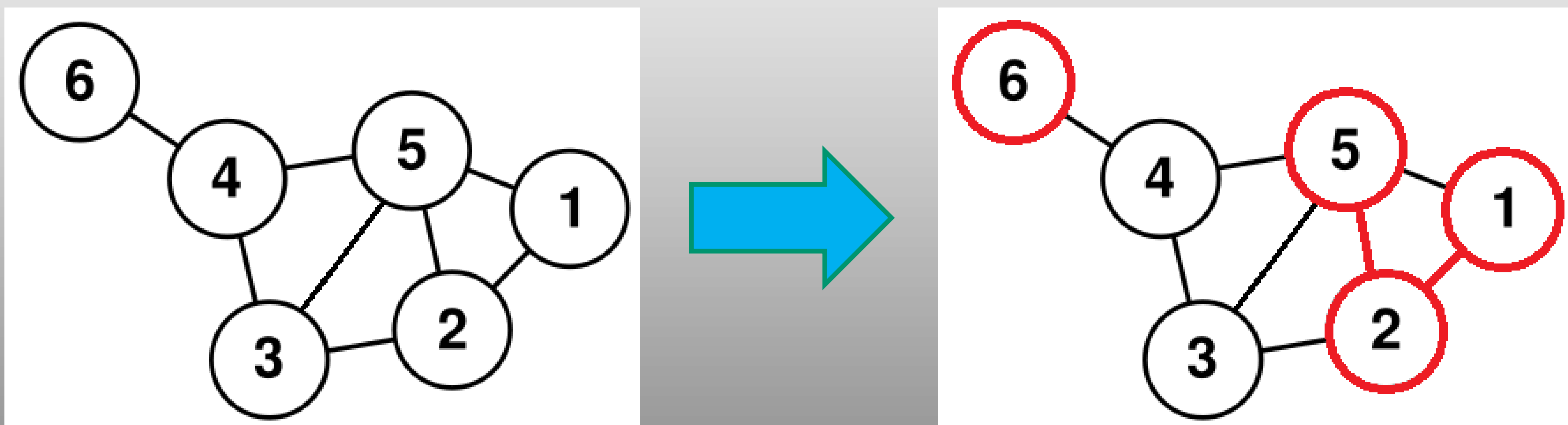
- Exemplo



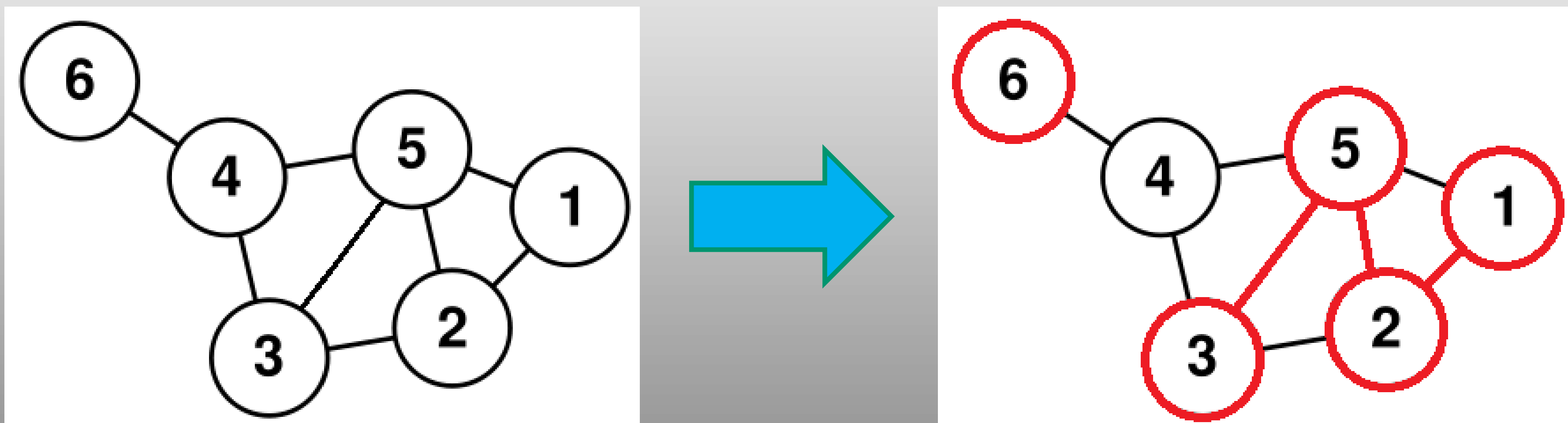
# Caracterização do problema

- Exemplo



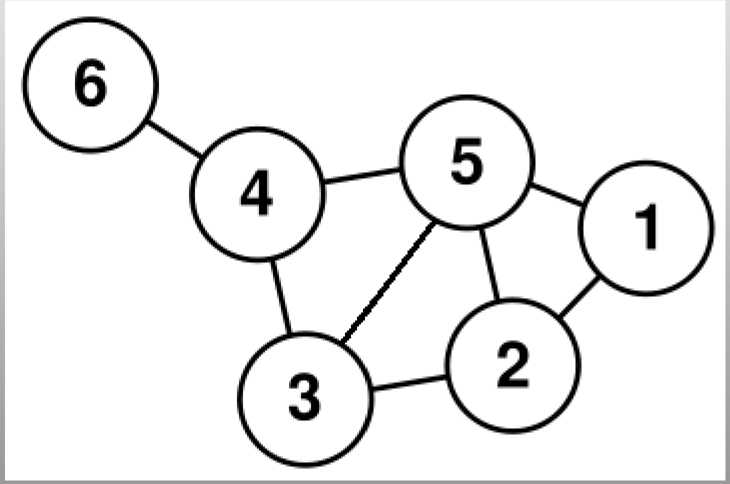
# Caracterização do problema

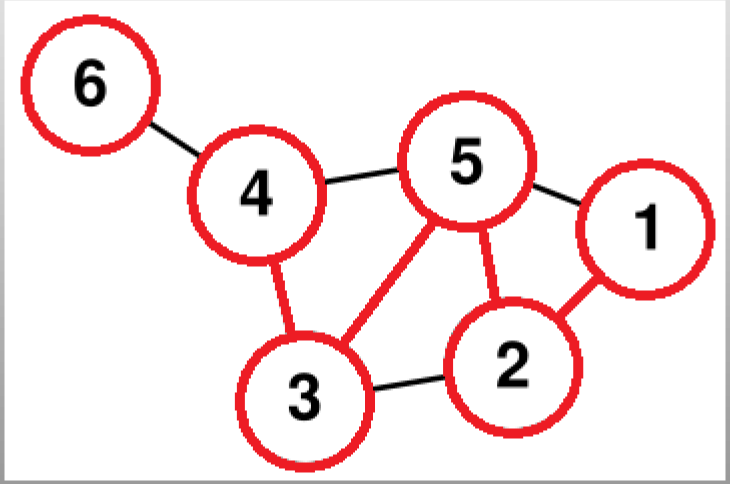
- Exemplo



# Caracterização do problema

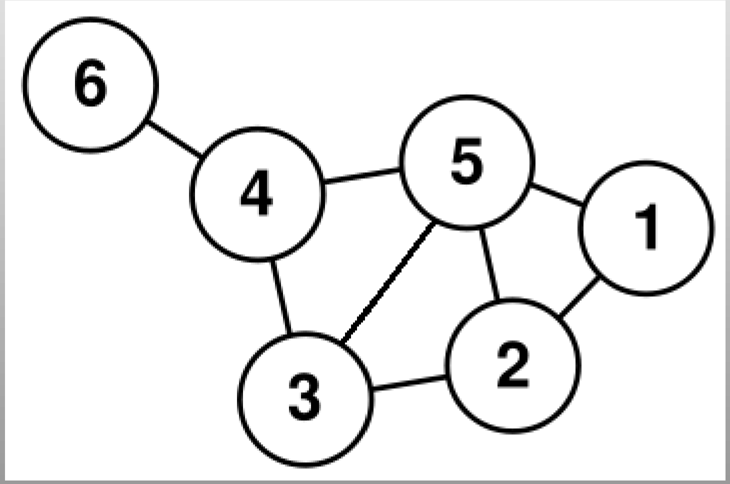
- Exemplo

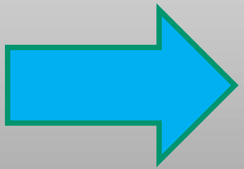


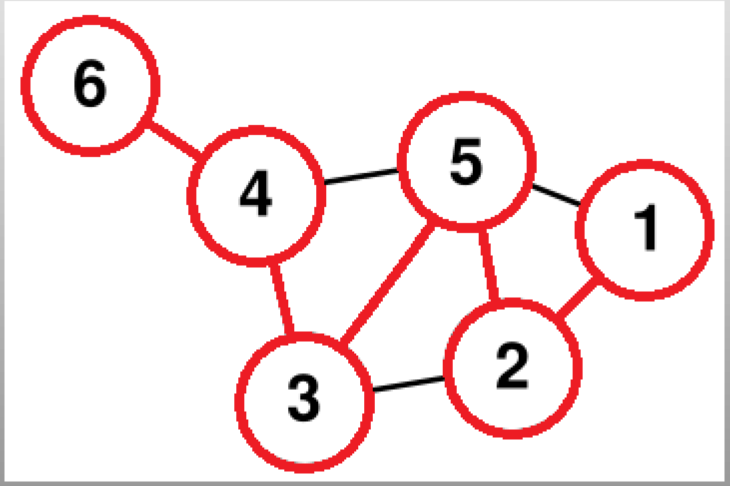



# Caracterização do problema

- Exemplo



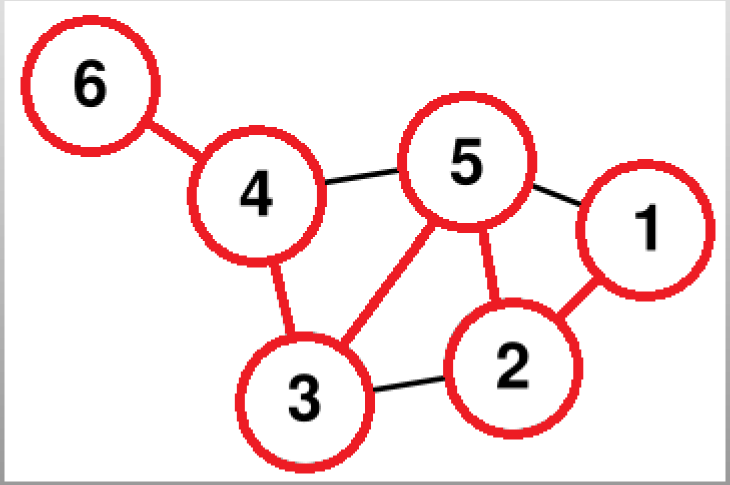


# Caracterização do problema

- Exemplo

Qual o maior caminho simples deste grafo?

- Comprimento: 5



# Caracterização do problema

- Considerações
  - Em um grafo G, com n vértices, o maior caminho simples possível será **sempre** de comprimento n – 1 ou menor.
  - Um caminho com comprimento n – 1 em um grafo G com n vértices é um caminho Hamiltoano.
  - Um caminho Hamiltoniano é um caminho que contempla **todos** os vértices de um grafo.

- O conceito de caminho Hamiltoniano é de suma importância para a prova do problema.

# Prova que pertence a NP

- Para a prova assumimos que existe um algoritmo que recebe uma entrada e verifica em tempo polinomial se ela é solução do problema.

- Para este algoritmo, dado um inteiro k e um grafo G, queremos saber se existe um caminho de comprimento maior ou igual a k em G.

- A possível solução chamamos de certificado.

# Prova que pertence a NP

- Algoritmo de Verificação
  - Dado u grafo G e um natural k, decidir se existe em G um caminho de comprimento maior ou igual a k.
  - Suponha que a função **CAMINHO(k, G)** receba um inteiro k e um grafo G e devolva **sim** se existe um caminho de comprimento maior ou igual a k em G e devolva **não**, caso contrário.

```
CAMINHO MAIS LONGO(G)
    k ← ||V(G)|| - 1
    enquanto (CAMINHO(k, G) = nao)
        k ← k - 1
    H ← G
    para i em E(H)  //seleciona uma aresta i de H
        remova i de H
        se (CAMINHO(k, H) = nao)  //chama recursivamente CAMINHO
            insira i de volta em H
    retorne H
```

# Prova que pertence a NP

- Prova
  - A prova de que o problema pertence a NP é trivial.
  - Um certicado para a instância sim do problema é a descrição de um caminho de comprimento maior ou igual a k. [RSK]

- Análise de complexidade
  - $C_{algoritmo} = O(n^2)$

# Prova que pertence a NP-Completo

- Definições para a prova
  - G = (V, A) é um grafo, onde V e o conjunto de vértices e A o conjunto de arestas.
  - f(<G>) = <G, n - 1> é uma função, onde n é o número de vértices em G, ou seja, n = ||V||.
    - Claramente f é computavel em tempo polinomial: um algoritmo para computar f simplesmente conta o número de vértices do grafo G e anexa o valor decrescido de uma unidade ao seu resultado (saída), n - 1.

# Prova que pertence a NP-Completo

- Definições para a prova
  - G = (V, A) é um grafo, onde V e o conjunto de vértices e A o conjunto de arestas.
  - f(<G>) = <G, n - 1> é uma função, onde n é o número de vértices em G, ou seja, n = ||V||.
    - Claramente f é computavel em tempo polinomial: um algoritmo para computar f simplesmente conta o número de vértices do grafo G e anexa o valor decrescido de uma unidade ao seu resultado (saída), n - 1.

- Prova
  - Assumimos que G possui um caminho hamiltoniano e aplicamos a redução:

Caminho-Hamiltoniano $\leq_p$ Caminho-Mais-Longo

# Prova que pertence a NP-Completo

- Prova (continuação)

  - Se <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano, então G tem um caminho hamiltoniano.
    - implica que f(<G>) = <G, n - 1> ∈ Caminho-Mais-Longo.

  - Se f(<G>) = <G, n - 1> ∈ Caminho-Mais-Longo, então G tem um caminho simples com n - 1 arestas.
    - Implica que <G> possui um caminho hamiltoniano, logo <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano.

# Prova que pertence a NP-Completo

- Prova (continuação)

  - Se <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano, então G tem um caminho hamiltoniano.
    - implica que f(<G>) = <G, n - 1> ∈ Caminho-Mais-Longo.

  - Se f(<G>) = <G, n - 1> ∈ Caminho-Mais-Longo, então G tem um caminho simples com n - 1 arestas.
    - Implica que <G> possui um caminho hamiltoniano, logo <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano.

  - Mostrou-se que f é computável em tempo polinomial.
  - Para todos os grafos G, <G> ∈ Caminho-Hamiltoniano e f(<G>) ∈ Caminho-Mais-Longo.
  - Logo, Caminho-Hamiltoniano ≤p Caminho-Mais-Longo e como Caminho-Hamiltoniano é NP-completo, Caminho-Mais-Longo é NP-completo.

# Prova que pertence a NP-Completo

- Algoritmo de Redução

```
ReduceHamiltonianToLongestPath(G)
    path ← vazio
    se (CAMINHO-HAMILTONIANO-EXISTE(G) = sim)
        path ← ||V(G)|| - 1
    retorna <G, path>
```

# Prova que pertence a NP-Completo

- Algoritmo de Redução

```
ReduceHamiltonianToLongestPath(G)
    path ← vazio
    se (CAMINHO-HAMILTONIANO-EXISTE(G) = sim)
        path ← ||V(G)|| - 1
    retorna <G, path>
```

- Análise de complexidade
  - $C_{algoritmo} = O(n^m)$

# Aplicações

- O problema do maior caminho é equivalente a achar o maior tempo necessário para cumprir todas as tarefas ou a sequência de atividades que devem ser concluídas nas datas programadas para que um projeto possa ser concluído dentro de um prazo estipulado, o chamado caminho crítico.
- É objeto de estudos em Pesquisa Operacional.
- É um problema recorrente da Gerência de Projetos que aparece nas duas técnicas para controle e planejamento de projetos usadas atualmente:
  - CPM(Critical Path Method): atividades com durações e custos determinísticos (dados são oriundos de projetos passados)
  - PERT(Program Evaluation and Review Technique): atividades com durações e custos probabilísticos/estocásticos (probabilidade utilizada para estimar tempos e custos).

# Conclusão

- Conseguimos realizar a prova de que o problema do maior caminho em grafos e um problema NP-completo, pois não possui solução em tempo polinomial.

- As provas e reduções nos mostraram que o problema em questão apenas é verificável em tempo polinomial.

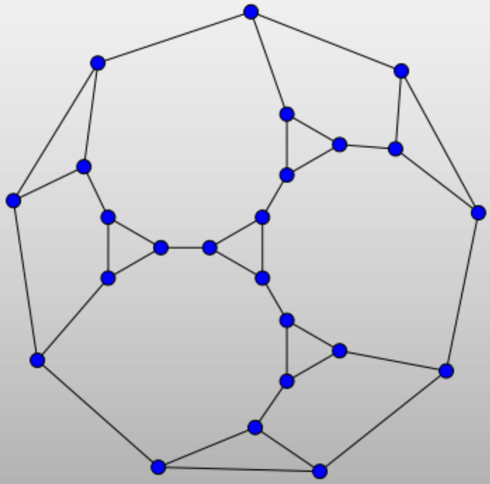
- Ótima opotunidade para exercitar os conteúdos apresentados na disciplina.

# Referências


- [KHM] Khan, Mumit. CSE 221: Longest path in a directed acyclic graph (DAG). April 10, 2011.
- [MCP] McCabe, Paul. University of Toronto. Professor of CSC363, Computational Complexity and Computability on Spring 2005. (http://www.cs.toronto.edu/~pmccabe/csc363-2005S/)
- [RSF] Rezende, Susanna Figueiredo. Caminhos mais longos em grafos. Instituto de Matematica e Estatstica, Universidade de Sao Paulo, Brasil. 17 de fevereiro de 2012.
- [URUY] Uehara, Ryuhei and Uno, Yushi. On Computing Longest Paths in Small Graph Classes. Department of Information Processing, School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology (JAIST). Japan, July 28, 2005.

# Dúvidas?

## PROBLEMA DO MAIOR CAMINHO



# Obrigado!!!