Prova P1 de Otimização Combinatória - 04/04/2013 - Profa. Luciana S. Buriol

Nome:

Cartão:

Dicas gerais:

- Sempre justifique a sua resposta.
- Responda a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Não deixe rascunho na prova.
- A prova pode ser a lápis ou à caneta. No entanto, provas a lápis não poderão ter correção após a prova sair da sala de aula quando elas forem entregues aos alunos após a correção.

1. (5 pontos) **Relatório DataCAPES**. A PPGC (Programa de Pós-Graduação em Computação) da UFRGS tem um relatório muito importante para entregar neste mês de abril à CAPES. Há uma série de atividades que devem ser realizadas para que o relatório possa ser bem feito e enviado no prazo. Para tanto, um grupo de professores e alunos está ajudando neste processo. Entre alunos e professores somos em n pessoas, sendo que temos m atividades para realizar. As pessoas gastam tempos diferentes para realizar uma mesma tarefa. Como cada tarefa deve ser realizada uma única vez (embora possa ser realizada em partes por diferentes pessoas), criou-se uma tabela T que contém em cada célula t_{ij} o tempo estimado que a pessoa i gasta para executar a tarefa j. Dado que a tabela T, n e m são dados passados para o problema, indique quanto tempo cada pessoa deve dedicar a cada tarefa de forma que todas as tarefas sejam integralmente realizadas e a soma de tempo gasto por todas as pessoas seja a mínima possível?

   a) Formule este problema como um problema de Programação Linear.

   Variáveis:
   x_{ij}: percentagem do tempo estimado da pessoa i para realizar a tarefa j.

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij}T_{ij} \\
s.a \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, ..., m \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}^{+}
\end{aligned}
$$

   b) Quantas restrições e variáveis a sua formulação possui?

   Nº de variáveis: n*m
   Nº de Restrições não triviais: m

   c) Suponha que cada pessoa $i = 1, .., n$ possua uma restrição de número de horas total h_i que ela possa dedicar à realização das tarefas, como alterar a formulação do problema de forma a atender esta restrição?

   Adicionar a seguinte restrição ao problema:

$$
\sum_{j=1}^{m} x_{ij}T_{ij} \le h_i \quad \forall i = 1, ..., n
$$

d) Como o relatório é MUITO IMPORTANTE, além de realizar as tarefas, cada tarefa também será conferida uma única vez, mas podendo ser em partes por pessoas diferentes. Suponha que seja fornecida uma tabela R similar à T, mas com o tempo estimado que cada pessoa i gasta para conferir a tarefa j. Resolva o problema de decidir quanto tempo cada pessoa vai gastar realizando e conferindo cada tarefa, sendo que incluindo o trabalho de conferência de tarefas h_i pode ser extrapolado em no máximo 50%. O objetivo continua o mesmo: finalizar o relatório o mais rápido possível. OBS: por simplicidade, é permitido que uma pessoa confira uma tarefa por era realizada.

$$
\begin{array}{ll}
min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_{ij}T_{ij} + y_{ij}R_{ij}) \\
s.a & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, ..., m \\
s.a & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, ..., m \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} x_{ij}T_{ij} \leq h_i \quad \forall i = 1, ..., n \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} (x_{ij}T_{ij} + y_{ij}R_{ij}) \leq 1.5h_i \quad \forall i = 1, ..., n \\
 & x_{ij} \in \mathbb{R}^{+}, y_{ij} \in \mathbb{R}^{+} \quad \forall j = 1, ..., m, i = 1, ..., n
\end{array}
$$

2. (5 pontos) **Simplex**. Considere o sistema abaixo.

$$
\begin{array}{rl}
\textbf{max} & x_1 - 2x_2 \\
\textbf{s.a} & 4x_1 - 2x_2 \leq -2 \\
 & x_1 - x_2 \leq -2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$

a) Resolva o sistema acima usando o algoritmo simplex. Caso houver solução ótima, indique claramente o valor da função objetivo e variáveis da solução ótima.

Dicionário inicial:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & & \downarrow \\
z = & & & -x_0 \\
\leftarrow w_1 = -2 & -4x_1 & +2x_2 & +x_0 \\
w_2 = -2 & -x_1 & +x_2 & +x_0
\end{array}
$$

Dicionário com pivô x_0 e w_1:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & \downarrow & \\
z = -2 & -4x_1 & +2x_2 & -w_1 \\
x_0 = 2 & +4x_1 & -2x_2 & +w_1 \\
\leftarrow w_2 = 0 & +3x_1 & -x_2 & +w_1
\end{array}
$$

Dicionário com pivô x_2 e w_2:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & \downarrow & & \\
z = -2 & +2x_1 & -2w_2 & +w_1 \\
\leftarrow x_0 = 2 & -2x_1 & +2w_2 & -w_1 \\
x_2 = 0 & +3x_1 & -w_2 & +w_1
\end{array}
$$

Dicionário com pivô x_1 e x_0:

$$\begin{array}{rllll}
z = 0 & -x_0 & & \\
x_1 = 1 & -1/2x_0 & +w_2 & -1/2w_1 \\
x_2 = 3 & -3/2x_0 & +2w_2 & -1/2w_1
\end{array}$$

O primeiro dicionário da fase 2 é:

$$\begin{array}{rrll}
 & & & \downarrow \\
 & z = -5 & -3w_2 & +1/2w_1 \\
\leftarrow & x_1 = 1 & +w_2 & -1/2w_1 \\
 & x_2 = 3 & +2w_2 & -1/2w_1
\end{array}$$

Dicionário com pivô w_1 e x_1: O segundo dicionário da fase 2 é:

$$\begin{array}{rll}
z = -4 & -2w_2 & \\
w_1 = 2 & -2x_1 & +2w_2 \\
x_2 = 2 & +x_1 & +w_2
\end{array}$$

Dicionário ótimo com solução final $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, e valor final de função objetivo $z = -4$.

Uma resolução alternativa e mais simples do item a) é:
Dicionário inicial (considerando que a inequação $4x_1 - 2x_2 \leq -2$ pode ser simplificada para $2x_1 - x_2 \leq -1$):

$$\begin{array}{rrlll}
 & & & & \downarrow \\
 & z = & & & -x_0 \\
 & w_1 = -1 & -2x_1 & +x_2 & +x_0 \\
\leftarrow & w_2 = -2 & -x_1 & +x_2 & +x_0
\end{array}$$

Dicionário com pivô x_0 e w_2:

$$\begin{array}{rrlll}
 & & & \downarrow & \\
 & z = -2 & -x_1 & +x_2 & -w_2 \\
 & w_1 = 1 & -x_1 & & +w_2 \\
\leftarrow & x_0 = 2 & +x_1 & -x_2 & +w_2
\end{array}$$

Dicionário com pivô x_2 e x_0:

$$\begin{array}{rlll}
z = & & -x_0 & \\
w_1 = 1 & -x_1 & & +w_2 \\
x_2 = 2 & +x_1 & -x_0 & +w_2
\end{array}$$

O primeiro dicionário da fase 2 é:

$$\begin{array}{rll}
z = -4 & & -w_2 \\
w_1 = 1 & -x_1 & +w_2 \\
x_2 = 2 & +x_1 & +w_2
\end{array}$$

Dicionário ótimo com solução final $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, e valor final de função objetivo $z = -4$.

b) Há alguma diferença na resolução do sistema usando ou não a regra de Bland? Não. Como não há mais de uma opção de variável de entrada ou saída em qualquer pivô, a resolução do sistema usando a regra de Bland resultaria exatamente na resolução sem a regra de Bland.

c) Resolva o sistema com a função objetivo max $x_1 + 2x_2$ em vez da função apresentada.

Pode-se usar o resultado da fase I neste caso. O primeiro dicionário da fase 2 é:

$$\begin{array}{rll}
z = 4 & +2x_1 & +2w_2 \\
w_1 = 1 & -x_1 & +w_2 \\
x_2 = 2 & +x_1 & +w_2
\end{array}$$

Como w_2 pode aumentar infinitamente, o sistema correspondente é ilimitado.