Complexidade de Algoritmos

Mariana Kolberg

Ordens assintóticas

Ordens Assintóticas

- A complexidade assintótica é definida pelo crescimento da complexidade para entradas suficientemente grandes;
- Um algoritmo **assintoticamente mais eficiente** é melhor para todas as entradas, exceto para entradas relativamente pequenas;
- Esta complexidade é comumente chamada de **COTA**;
- As cotas são maneiras de reduzir detalhes realçando apenas os aspectos relevantes de eficência.

Ordens Assintóticas - Notação *O*

- A notação *O* define a cota assintótica superior.

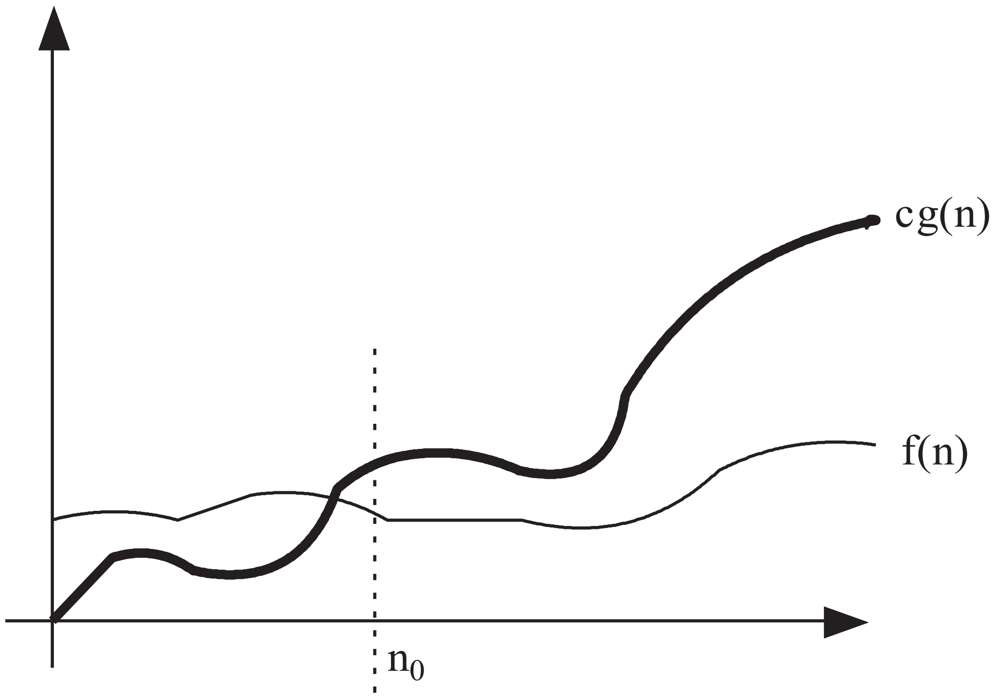
- Ela serve para limitar superiormente uma função dentro de um fator constante.

- Exemplo : uma função quadrática $g(n)=3n^2$ cresce mais rapidamente que uma linear $f(n)=7n+13$. Logo, dizemos que f(n) é *O*(g(n)).

f(n) é *O*(g(n)) sse

$$(\exists\, c \in \Re_+)(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0)(f(n) \leq c.g(n))$$

Ordens Assintóticas - Notação O



$$(\exists\, c \in \Re_+)(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0)(f(n) \leq c.g(n))$$

Para n grande, g(n) domina f(n). Logo g(n) é CAS de f(n)

Ordens Assintóticas - Notação O

- Pode-se afirmar que $n \log_2 n = O(n \log_{10} n)$? Se sim, mostre a prova.

Ordens Assintóticas - Notação O

- Pode-se afirmar que $n \log_2 n = O(n \log_{10} n)$? Se sim, mostre a prova.

$$n \log_2 n = O(n \log_{10} n)$$

Ordens Assintóticas - Notação O

- Pode-se afirmar que

$$n \log_2 n = O(n \log_{10} n)$$

$$n \log_2 n \leq cn \log_{10} n$$

Ordens Assintóticas - Notação O

- Pode-se afirmar que

$$n \log_2 n = O(n \log_{10} n)$$

$$n \log_2 n \leq cn \log_{10} n$$

$$n \log_2 n \leq cn \frac{\log_2 n}{\log_2 10}$$

Ordens Assintóticas - Notação O

- Pode-se afirmar que

$$n \log_2 n = O(n \log_{10} n)$$

$$n \log_2 n \leq cn \log_{10} n$$

$$n \log_2 n \leq cn \frac{\log_2 n}{\log_2 10}$$

$$n \log_2 n \leq \frac{c}{\log_2 10} n \log_2 n$$

Ordens Assintóticas - Notação O

- Pode-se afirmar que

$$n \log_2 n = O(n \log_{10} n)$$

$$n \log_2 n \leq cn \log_{10} n$$

$$n \log_2 n \leq cn \frac{\log_2 n}{\log_2 10}$$

$$n \log_2 n \leq \frac{c}{\log_2 10} n \log_2 n$$

Sim! Faça c=4 e n_0 =1

Ordens Assintóticas - Notação O

- Pode-se afirmar que

$$n^2 - n = O(n^2)$$

$$n^2 + n = O(n^2)$$

$$n \log_{10} n = O(n^2)$$

$$2^{n+1} = O(2^n)$$

$$5n + 7 = O(n^2)$$

Ordens Assintóticas - Notação O

- Pode-se afirmar que

$n^2 - n = O(n^2)$	Faça c=1 e n_0 =1
$n^2 + n = O(n^2)$	Faça c=2 e n_0 =1
$n \log_{10} n = O(n^2)$	Faça c=1 e n_0 =1
$2^{n+1} = O(2^n)$	Faça c=2 e n_0 =1
$5n + 7 = O(n^2)$	Faça c=1 e n_0 =7

Ordens Assintóticas - Notação O

Fato: Se $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0$ é um polinômio de grau **m** então $|f(n)|$ é $O(n^m)$.

Ordens Assintóticas - Notação O

Fato: Se $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0$ é um polinômio de grau **m** então $|f(n)|$ é $O(n^m)$.

Demonstração:

$$|f(n)| \leq |a_m| n^m + \ldots + |a_1| n + |a_0|$$

Ordens Assintóticas - Notação O

Fato: Se $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0$ é um polinômio de grau **m** então $|f(n)|$ é $O(n^m)$.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
|f(n)| &\leq |a_m| n^m + \ldots + |a_1| n + |a_0| \\
&\leq (|a_m| + |a_{m-1}|/n + \ldots + |a_0|/n^m) n^m
\end{aligned}
$$

Ordens Assintóticas - Notação O

Fato: Se $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0$ é um polinômio de grau **m** então $|f(n)|$ é $O(n^m)$.

Demonstração:

$$|f(n)| \leq |a_m| n^m + \ldots + |a_1| n + |a_0|$$

$$\leq (|a_m| + |a_{m-1}|/n + \ldots + |a_0|/n^m) n^m$$

- Quando n = 1, é igual a soma dos coeficientes
- Quando n tende ao infinito, a soma tende a $|a_m|$

Ordens Assintóticas - Notação O

Fato: Se $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0$ é um polinômio de grau **m** então $|f(n)|$ é $O(n^m)$.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
|f(n)| &\leq |a_m| n^m + \ldots + |a_1| n + |a_0| \\
&\leq (|a_m| + |a_{m-1}|/n + \ldots + |a_0|/n^m) n^m \\
&\leq (|a_m| + |a_{m-1}| + \ldots + |a_0|) n^m \text{, para } n \geq 1
\end{aligned}
$$

Ordens Assintóticas - Notação O

Fato: Se $f(n) = a_m n^m + \ldots + a_1 n + a_0$ é um polinômio de grau **m** então $|f(n)|$ é $O(n^m)$.

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
|f(n)| &\leq |a_m|\, n^m + \ldots + |a_1|\, n + |a_0| \\
&\leq (|a_m| + |a_{m-1}|/n + \ldots + |a_0|/n^m)n^m \\
&\leq (|a_m| + |a_{m-1}| + \ldots + |a_0|)n^m \text{, para } n \geq 1
\end{aligned}
$$

Fazendo $c = |a_m| + |a_{m-1}| + \ldots + |a_0|$ e $n_0 = 1$

Temos $|f(n)| \leq c\, n^m$ para todo $n \geq n^0$.

Ordens Assintóticas - Notação Ω

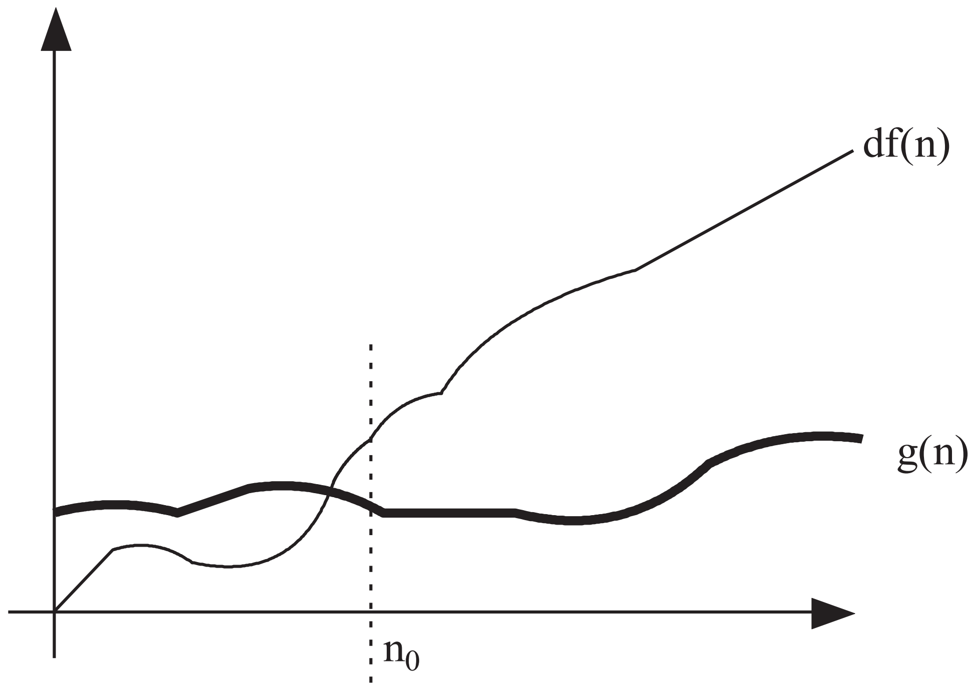
- A notação Ω (omega) define uma cota assintótica inferior.

- Por exemplo, uma função exponencial $g(n)= 2^n$ cresce menos rapidamente que uma exponencial $f(n)=10^n$, logo, f(n) é Ω(g(n)).

- De maneira geral f(n) é Ω (g(n)) sse

$$(\exists d \in \Re_+)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) g(n) \leq d.f(n)$$

Ordens Assintóticas - Notação Ω



$$(\exists d \in \Re_+)(\exists n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0) g(n) \leq d.f(n)$$

Ordens Assintóticas - Notação Θ

- A notação Θ (theta) define um limite assintótico exato.

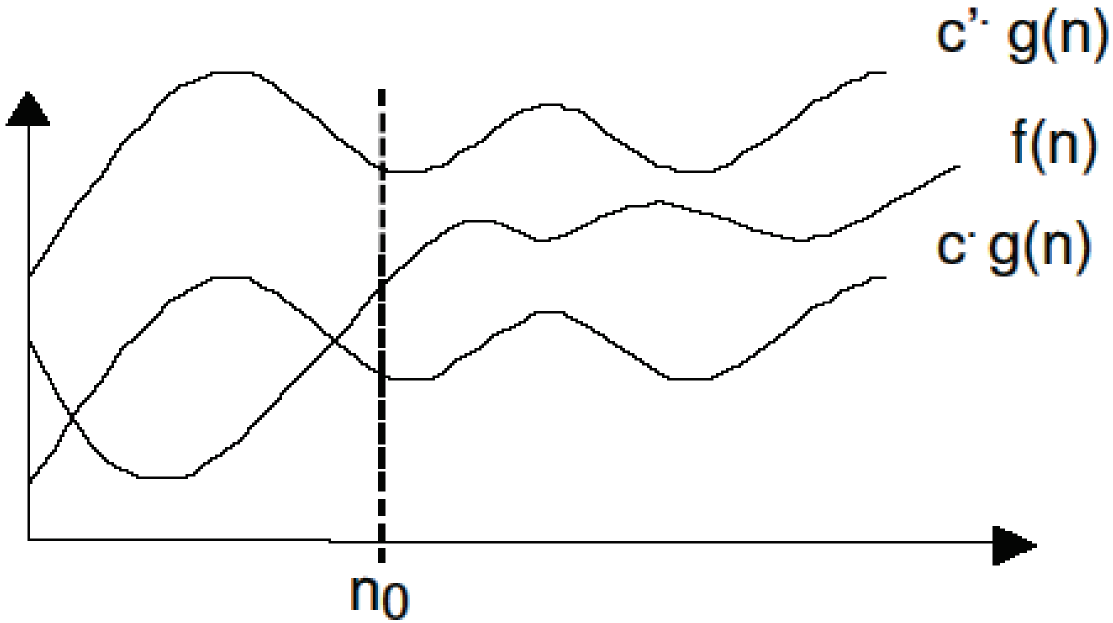
- Por exemplo, as funções quadráticas $f(n)=7n^2+5$ e $g(n)=n^2+3$ crescem com a mesma rapidez. Logo, diz-se que f(n) é Θ (g(n)).

- Em geral, f(n) é Θ(g(n)) sse

$$(\exists\, c, c' \in \Re_+)(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0)(f(n) \geq c.g(n) \wedge f(n) \leq c'.g(n))$$

- É comum dizer que g(n) é um **limite assintoticamente restrito** para f(n).

Ordens Assintóticas - Notação Θ



$$(\exists\, c, c' \in \Re_+)(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \geq n_0)(f(n) \geq c.g(n) \wedge f(n) \leq c'.g(n))$$

Ordens Assintóticas

- Mostre que se $f(n)=O(g(n))$ e $g(n)=O(h(n))$ então $f(n)=O(h(n))$

Exemplos

Seja $f, g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$

Mostre que

a) $\text{Máx}(f,g)(n) = O((f+g)(n))$

b) $(f+g)(n) = \Omega(\min(f,g)(n))$

Onde Max(f,g)(n)=Max{f(n),g(n)},

Min(f,g)(n)=Min{f(n),g(n)}

e (f+g)(n)=f(n)+g(n)