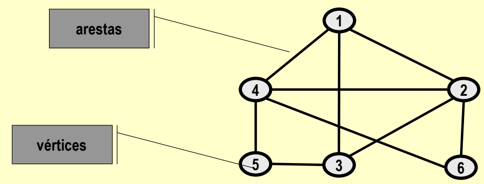
Grafos

Aplicações

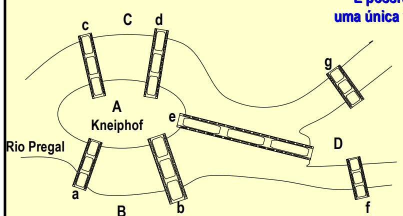
Associando-se significados aos **vértices** e às **linhas**, o grafo passa a constituir um **modelo** de uma situação ou informação real

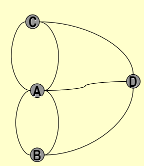


Exemplos de aplicações

- 1a. Aplicação conhecida (1736)
  - Problema da ponte de Koenigsberg (na Prússia oriental)
    - Resolvido por Euler

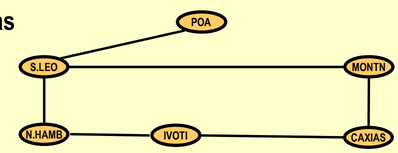
É possível atravessar todas as pontes uma única vez, voltando ao lugar de partida?



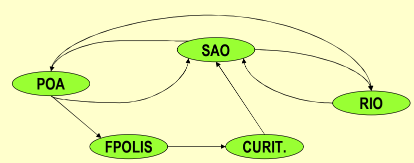


Exemplos de aplicações

- Cidades e estradas

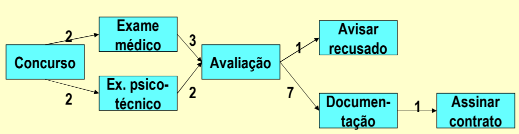


- Tráfego aéreo



Exemplos de aplicações

- Atividades e tempo de execução



Outras Aplicações

- Cada vértice é uma *tarefa de um grande projeto*. Há um arco de *x* a *y* se *x* é pré-requisito de *y*, ou seja, se *x* deve estar pronta antes que *y* possa começar. Análise de circuitos elétricos
- Cada vértice é um *arquivo de um sistema de software*. Cada arco é uma "dependência": um arquivo *v* é construído a partir de todos os arquivos *w* para os quais existe um arco da forma (*v*,*w*).
  - O utilitário *make* do UNIX trabalha sobre grafos deste tipo
- Cada vértice é uma *página na teia WWW*. Cada arco é um link que leva de uma página a outra.

Outras Aplicações

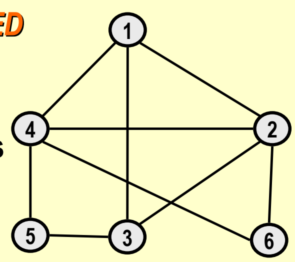
- Os vértices são *times de futebol* e os arcos são os jogos entre os times durante um campeonato.
- Os vértices são as casas de um *tabuleiro de xadrez*. Há um arco de *x* para *y* se um cavalo do jogo pode ir de *x* a *y* em um só movimento.

Outras Aplicações

- Outras aplicações
  - Análise de circuitos elétricos
  - Verificação de caminhos mais curtos
  - Análise de planejamento de projetos
  - Identificação de compostos químicos
  - Mecânica estática
  - Genética
  - Cibernética
  - Linguística
  - Ciências sociais
  - ...

Grafos

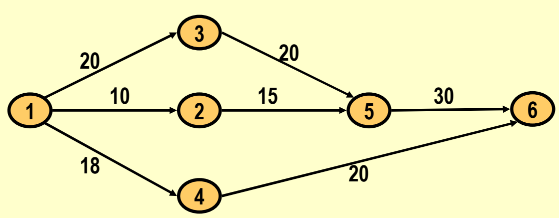
- **Representação**
  - **implementação da *ED***
  - ***HOJE!!!***
- **Principais Algoritmos**



Problemas típicos

- **planaridade**
- **árvore geradora (máxima e mínima)**
- **caminho crítico (máximo e mínimo)**
- **número cromático**

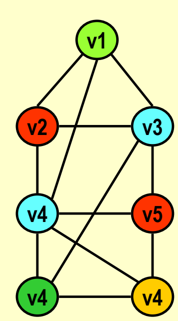
Caminho Mínimo



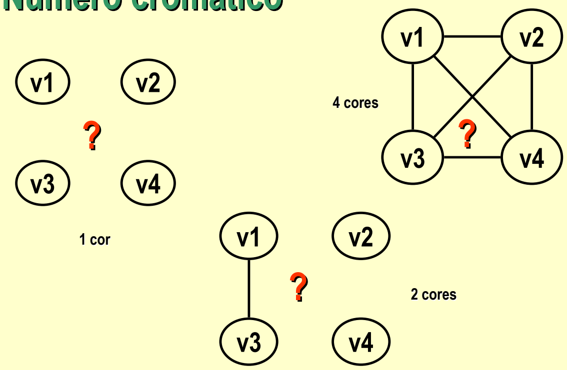
O *caminho mínimo* entre dois vértices *u* e *w*, em um grafo orientado *G*, é o caminho de menor custo de *u* até *w* em *G*

Número cromático

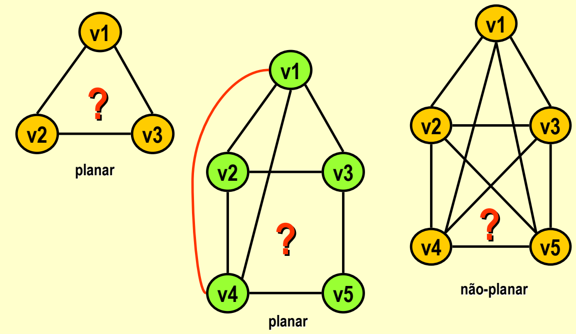
É o número mínimo de cores suficiente para que os vértices do grafo sejam coloridos sem que se atribua a mesma cor a dois vértices adjacentes



Número cromático



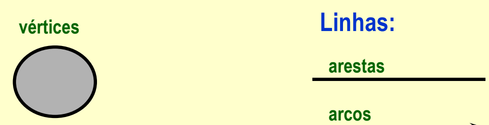
Planaridade



GRAFOS - Definições

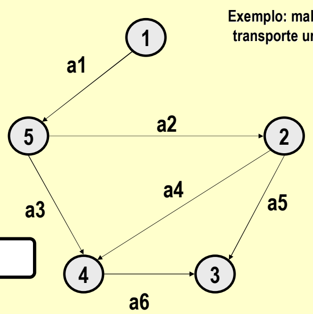
Definição formal

Um grafo é uma tripla *(V,A,f)*, onde *V* é um conjunto não-vazio de nodos (vértices), *A* é um conjunto possivelmente vazio de relacionamentos (linhas) e *f* é uma função de incidência que representa um relacionamento



Grafo orientado

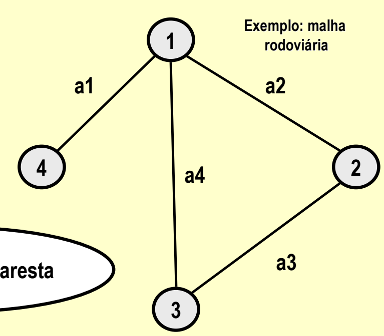
Exemplo: malha de transporte urbano



a = (v1,v2) é um arco

Grafo não-orientado

Exemplo: malha rodoviária



a = {v1,v2} é uma aresta

Grafos orientados x não-orientados

Um grafo expressa uma relação binária *R*

Grafo orientado:

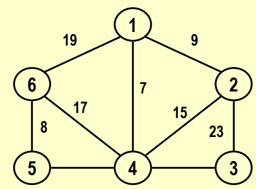
(v1, v2) є G ↔ v1 R v2

Grafo não orientado:

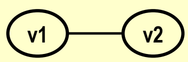
{ v1, v2 } є G ↔ v1 R v2 ^ v2 R v1

Definições e terminologia

Um grafo é ***valorado*** se possuir valores associados às linhas e/ou aos vértices.



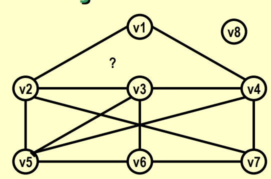
Definições e terminologia



Dois vértices **v1** e **v2** são ditos ***adjacentes*** em **G**, se neste existe a aresta **{v1,v2}** ou um dos arcos **(v1,v2)** e **(v2,v1)**

Uma linha ***a*** é ***incidente*** a um vértice ***v***, se ***v*** for uma das extremidades de ***a***.

Definições e terminologia



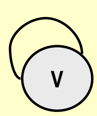
Grau de um vértice é igual ao número de linhas que nele incidem

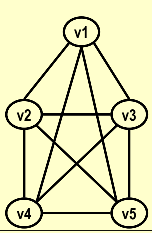
Vértices com grau igual a zero são ditos ***isolados***

A ***ordem*** de um grafo é igual ao número de vértices do mesmo

Definições e terminologia

Uma linha que tem ambas extremidades em um mesmo vértice é chamada ***laço***

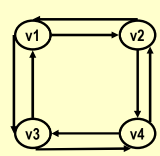


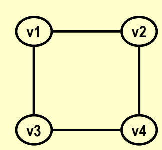


Um grafo é dito ***completo*** se todos os seus pares de vértices forem adjacentes

Definições e terminologia

Um grafo é dito ***simétrico*** se para cada arco da forma (v,w) existe um arco da forma (w,v).





Representação física de grafos

- matriz de adjacência
- matriz de incidência
- lista de adjacência
- lista de incidência

Matriz de adjacência

Matriz de adjacência A(n x n) de um grafo G de ordem n, é uma matriz onde cada elemento $a_{i,j}$ é:

Grafos orientados:

$a_{i,j} = 1$ se (v_i,v_j) ε G

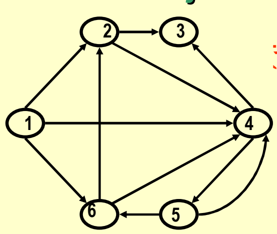
$a_{i,j} = 0$ se (v_i,v_j) ~ε G

Grafos não orientados:

$a_{i,j} = 1$ se $\{v_i,v_j\}$ ε G

$a_{i,j} = 0$ se $\{v_i,v_j\}$ ~ε G

Matriz de adjacência

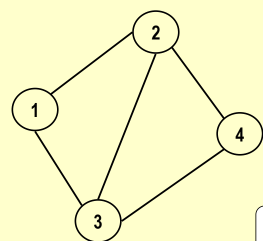


vértices

vértices	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	1	1	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0
5	0	0	0	1	0	1
6	0	1	0	1	0	0

A **matriz de adjacência** é uma forma de representação de grafos simples, econômica e adequada para muitos problemas que envolvem apenas a estrutura do grafo.

Matriz de adjacência



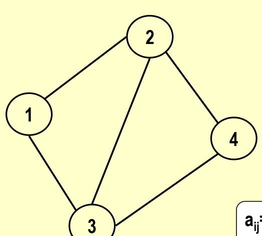
	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	0

a_{ij}=1 se $\{v_i,v_j\}$ ε G

a_{ij}=0 se $\{v_i,v_j\}$ ~ε G

Matriz de adjacência

Não-orientado - SIMÉTRICO



	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2		0	1	1
3			0	1
4				0

a_{ij}=1 se $\{v_i,v_j\}$ ε G

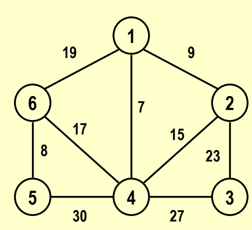
a_{ij}=0 se $\{v_i,v_j\}$ ~ε G

Matriz de adjacência

Valores associados às linhas podem ser representados por uma extensão simples da Matriz de Adjacência

a_{ij}=k se (v_i,v_j) ε G

a_{ij}=* se (v_i,v_j) ~ε G



	1	2	3	4	5	6
1	*	9	*	7	*	19
2	9	*	23	15	*	*
3	*	23	*	27	*	*
4	7	15	27	*	30	17
5	*	*	*	30	*	8
6	19	*	*	17	8	*

Matriz de adjacência (MA)

- Matriz binária: ocupa pouco espaço, especialmente para grafos densos
- Manipulação simples: recursos p/matrizes em qualquer linguagem
- Fácil determinar se (v_i,v_j) ε G
- Fácil determinar {Adjacentes(v,G)}
- Quando o grafo é não orientado, a MA é simétrica (mais econômica)
- Inserção de novos vértices é difícil

Matriz de incidência

É uma matriz B(n x m), sendo n o número de vértices, m o número de linhas e:

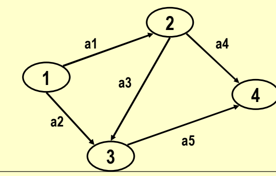
b_{ij}= -1 se o vértice i é a origem da linha j

b_{ij}= 1 se o vértice i é o término da linha j

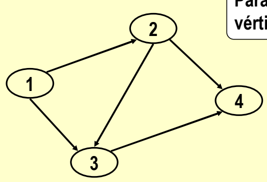
Para grafos não orientados, b_{ij}= 1 se a aresta j é incidente ao vértice i.

arcos

vértices	a1	a2	a3	a4	a5
1	-1	-1	0	0	0
2	1	0	-1	-1	0
3	0	1	1	0	-1
4	0	0	0	1	1



Listas de adjacência



Para cada vértice v é representada a lista de vértices u tais que (v,u) ε G

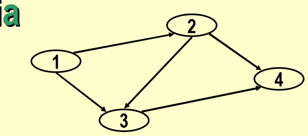
Contigüidade Física

Grau máximo

vértices	1	2
1	2	3
2	3	4
3	4	0
4	0	0

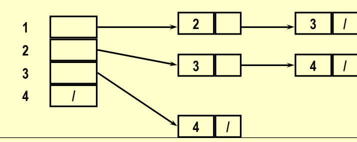
- Muito rígida
- Requer previsão do tamanho máximo das listas
- Eficiente para grafos pouco densos, com graus uniformes

Listas de adjacência



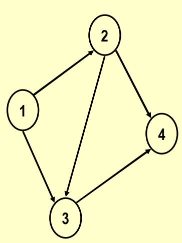
Representação mista

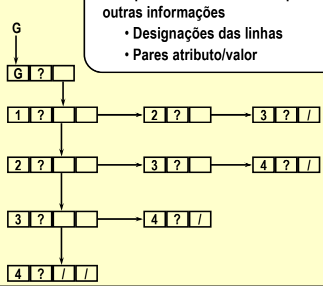
- Uso mais racional do espaço
- Inserção/exclusão de linhas mais fácil
- Inserção de vértices problemática



Listas de adjacência

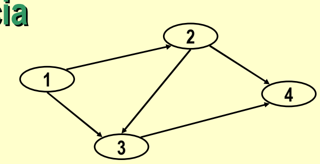
Encadeamento





- Uso racional do espaço
- Flexibilidade
- Nós podem ser estendidos para representar outras informações
  - Designações das linhas
  - Pares atributo/valor

Listas de incidência

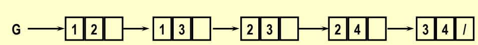


Contigüidade Física

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	1	3	2	3	2	4	3	4		

Encadeamento

1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	2	3			
2	3	3	4	4			



Exercício

Exercício 01. Os Turistas Jensen, Leuzingner, Dufour e Medeiros se encontram em um bar de Paris e começam a conversar. As línguas disponíveis são o inglês, o francês, o português e o alemão. Jensen fala todas. Leuzingner não fala apenas o português. Dufour fala francês e alemão. Medeiros fala inglês e português. Represente por meio de um grafo todas as possibilidades de **um deles dirigir a palavra a outro, sendo compreendido.**

Exercício 02

	1	2	3	4	5	6	7
1		5					
2			2	6	10		
3					33	4	
4			1		14		9
5							19
6				8	33		
7							

2. Representar o grafo por **Matriz de Adjacência**

3. Representar o grafo por **Matriz de Incidência**

3. Representar o grafo por **Lista de Adjacência**

3. Representar o grafo por **Lista de Incidência**