

# Número Cromático

Estruturas de Dados - Grafos

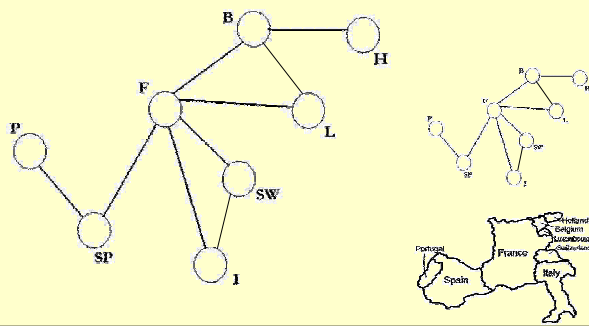
## Problema

- Quantas cores são necessárias para pintar este mapa?



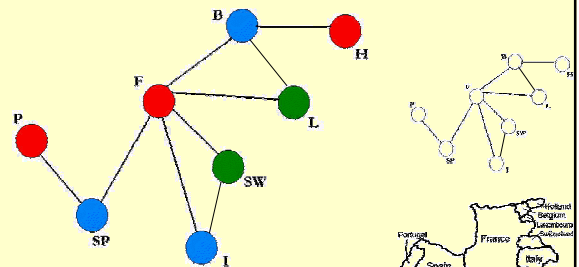
Estruturas de Dados - Grafos

## Problema



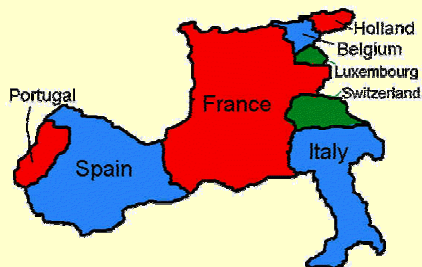
Estruturas de Dados - Grafos

## Problema



Estruturas de Dados - Grafos

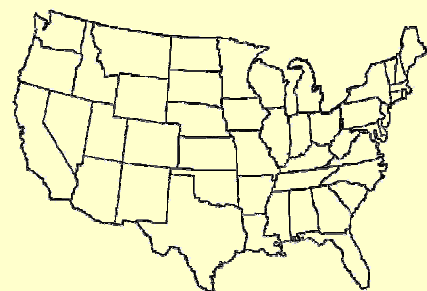
## Problema



Estruturas de Dados - Grafos

## Um problema mais complicado

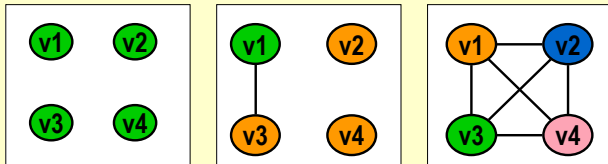
- E este?



Estruturas de Dados - Grafos

## Número cromático Coloridos ótimos

- menor número de cores necessárias para colorir todos os vértices de um grafo, de modo que nodos adjacentes tenham cores diferentes



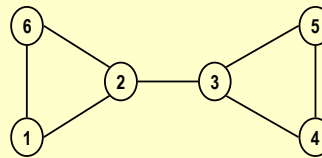
Estruturas de Dados - Grafos

## Cliques

Um clique é um subgrafo completo máximo

Quando todos os pares de vértices são adjacentes

Não contido em outro subgrafo completo



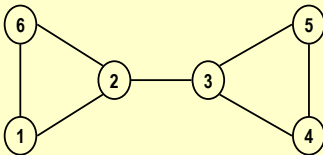
Estruturas de Dados - Grafos

## Cliques

Um clique é um subgrafo completo máximo

Quando todos os pares de vértices são adjacentes

Não contido em outro subgrafo completo

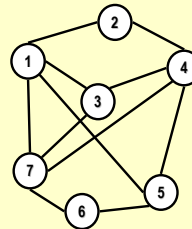


~~{1 6}~~

{1 2 6}  
{2 3}  
{3 4 5}

Estruturas de Dados - Grafos

## Cliques

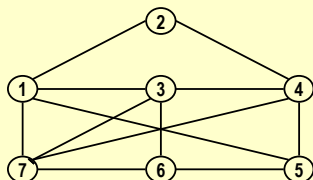


Estruturas de Dados - Grafos

## Conjunto de vértices independentes máximo (CVIM)

Vértices não adjacentes entre si

Não contido em outro conjunto de vértices independentes



Conjunto Independente (maximal)

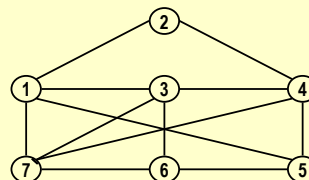
Estruturas de Dados - Grafos

## Conjunto de vértices independentes máximo (CVIM)

Vértices não adjacentes entre si

Não contido em outro conjunto de vértices interiormente estável

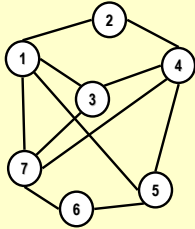
~~{2 3}~~



S1 = {1 4 6}  
S2 = {2 3 5}  
S3 = {2 5 7}  
S4 = {2 6}

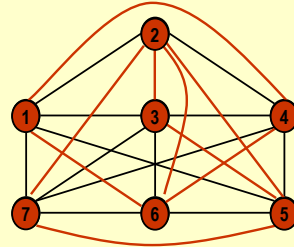
Estruturas de Dados - Grafos

## Conjunto de vértices independentes máximo (CVIM)



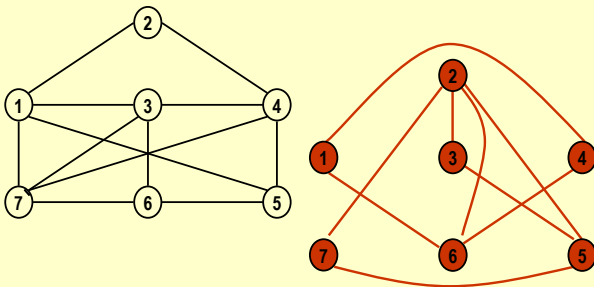
Estruturas de Dados - Grafos

## Grafo complemento de um grafo



Estruturas de Dados - Grafos

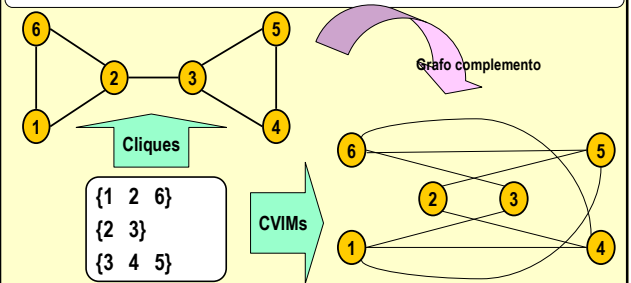
## Grafo complemento de um grafo



Estruturas de Dados - Grafos

## Cliques x CVIMs

Os CVIMs são os cliques do grafo complemento, para grafos não orientados



Estruturas de Dados - Grafos

## Algoritmo para gerar os cliques de um grafo

```

Procedimento cliques()
// VC: Conjunto de vértices de um clique
// CAND: Candidatos a inclusão em VC
// ANT: Vértices já esgotados
início
    VC = {};
    ANT = {};
    CAND = V(G);
    rCliques(VC, CAND, ANT)
fim; // cliques
    
```

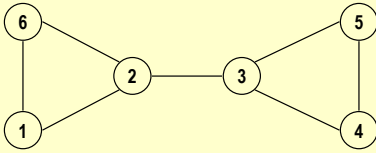
Estruturas de Dados - Grafos

```

Procedimento rCliques (Conjunto VC, Conjunto CAND,
Conjunto ANT)
// Determina os cliques de G
// Se todos os candidatos foram examinados e VC é
// independente dos cliques já formados, então VC é um clique
Vértice v;
Conjunto VC1, CAND1, ANT1;
início
    se CAND = {} e ANT = {}
    então *** Encontrou Clique VC ***;
    // Examina candidato para estender VC
    senão enquanto CAND ≠ {}
        faça início
            v = CAND.escolhe();
            VC1 = VC ∪ {v};
            CAND1 = CAND ∩ adj(v);
            ANT1 = ANT ∩ adj(v);
            rCliques(VC1, CAND1, ANT1);
            CAND = CAND - {v};
            ANT = ANT ∪ {v};
        fim
    fim
fim; // rCliques
    
```

Estruturas de Dados - Grafos

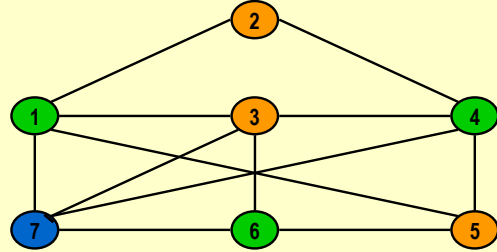
## Exemplo



```
<VC, ANT, CAND>
v=2 <{2}, {}, {1,3,6}>
v=1 <{2,1}, {}, {6}>
v=6 <{2,1,6}, {}, {}> Clique {2,1,6}
      <{2,1}, {6}, {}>
      <{2}, {1}, {3,6}>
v=3 <{2,3}, {}, {}> Clique {2,3}
v=6 <{2,6}, {1}, {}>
```

Estruturas de Dados - Grafos

## Número cromático??



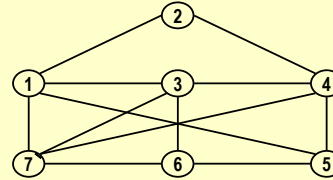
Estruturas de Dados - Grafos

## Algoritmo para determinar o número cromático de um grafo

1. Determinar os conjuntos de vértices independentes máximos (CIVMs) (cliques do grafo complemento)
2. Escolher um dos conjuntos – analisar os vértices que sobram  
Se existe algum conjunto dentro deles, pode ser de outra cor  
Repetir até esgotar todos os vértices
2.  $S_{ij}$  – conjunto a ser colorido com uma cor

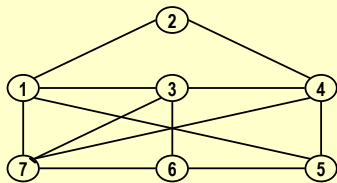
Estruturas de Dados - Grafos

## Exemplo de determinação do número cromático de um grafo



Estruturas de Dados - Grafos

## Exemplo de determinação do número cromático de um grafo



CVIMs:

$S_{11}=\{1,4,6\}$

$S_{12}=\{2,3,5\}$

$S_{13}=\{2,7,5\}$

$S_{14}=\{2,6\}$

$S_{11}=\{1,4,6\}$

sobra:  $\{2,3,5,7\}$

$S_{21}=\{1,4,6 \mid 2,3,5\}$

sobra:  $\{7\}$

$S_{31}=\{1,4,6 \mid 2,3,5 \mid 7\}$

3 cores

1 possibilidade

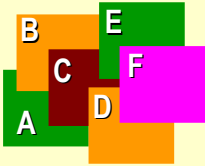
Estruturas de Dados - Grafos

## Exemplo de determinação do número cromático de um grafo

- $\{1,4,6\} \mid \{1,4,6 \mid 2,3,5\} \mid \{1,4,6 \mid 2,3,5 \mid 7\}$  # 3
- $\{1,4,6 \mid 2,7,5\} \mid \{1,4,6 \mid 2,7,5 \mid 3\}$  # 3
- $\{2,3,5\} \mid \{2,3,5 \mid 1,4,6\} \mid \{2,3,5 \mid 1,4,6 \mid 7\}$  # 3
- $\{2,7,5\} \mid \{2,7,5 \mid 1,4,6\} \mid \{2,7,5 \mid 1,4,6 \mid 3\}$  # 3
- $\{2,6\} \mid \{2,6 \mid 1 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 7\}$  # 6

Estruturas de Dados - Grafos

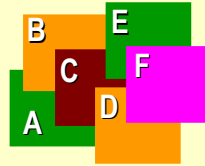
## Algoritmos



Procurar um número **próximo** ao número cromático!!!!

Estruturas de Dados - Grafos

## Algoritmos

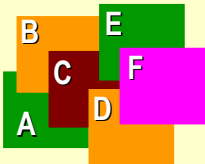


Solução : lista de adjacências  
– vetor com as regiões que devem ser coloridas;

A  
B  
C  
D  
E  
F

Estruturas de Dados - Grafos

## Algoritmos

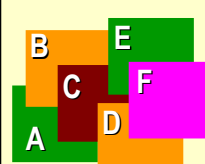


Solução : lista de adjacências  
– vetor com as regiões que devem ser coloridas;  
– lista com os demais elementos que são as **regiões adjacentes** a este.

A [B, C, D]  
B [A, C, E]  
C [A, B, D, E, F]  
D [A, C, F]  
E [B, C, F]  
F [D, E, C]

Estruturas de Dados - Grafos

## Algoritmos



– Escolhe-se uma região inicial (exemplo: A) e atribui uma cor;  
– Para atribuir cor a B, é verificado se dentre as cores existentes, existe uma que não esteja colorindo nenhuma região adjacente a B, então essa cor deverá ser escolhida. Se todas as cores existentes estiverem sendo utilizadas em regiões vizinhas a B, então uma nova cor é criada.

*o raciocínio é repetido analogamente para cada uma das regiões subsequentes.*

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Profundidade

### Programa Principal

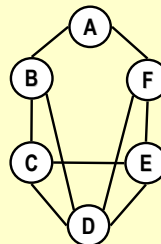
Montar a lista de adjacências  
Inicializar a estrutura de cores  
Escolher o vertice  $V_i$  de maior grau para ser colorido primeiro  
Chamar a sub-rotina `Colore_Vertice` para colorir o vertice  $V_i$  escolhido

### Sub-rotina COLORE-VERTICE

```
se o vertice  $V_k$  ainda nao foi colorido
    procurar a cor C apropriada
    se nao existir cor apropriada para colorir o vertice  $V_k$ 
        criar uma nova cor C
    fim se
    colorir o vertice  $V_k$  com a cor C
    para todo vertice  $V_j$  adjacente a  $V_k$  faça
        chamar a sub-rotina Colore_Vertice para colorir o vertice  $V_j$ 
fim se
```

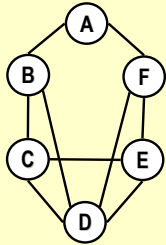
Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Profundidade



Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Profundidade

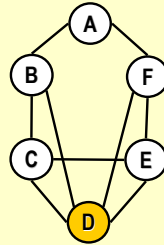


### Adjacência:

Vértice A: [B, F]  
 Vértice B: [A, C, D]  
 Vértice C: [B, D, E]  
 Vértice D: [B, C, E, F]  
 Vértice E: [C, D, F]  
 Vértice F: [A, D, E]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Profundidade

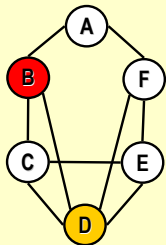


### Adjacência:

Vértice A: [B, F]  
 Vértice B: [A, C, D]  
 Vértice C: [B, D, E]  
 Vértice D: [B, C, E, F]  
 Vértice E: [C, D, F]  
 Vértice F: [A, D, E]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Profundidade

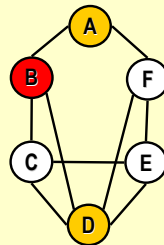


### Adjacência:

Vértice A: [B, F]  
 Vértice B: [A, C, D]  
 Vértice C: [B, D, E]  
 Vértice D: [B, C, E, F]  
 Vértice E: [C, D, F]  
 Vértice F: [A, D, E]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Profundidade

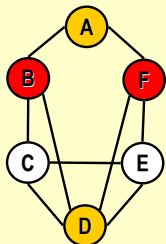


### Adjacência:

Vértice A: [B, F]  
 Vértice B: [A, C, D]  
 Vértice C: [B, D, E]  
 Vértice D: [B, C, E, F]  
 Vértice E: [C, D, F]  
 Vértice F: [A, D, E]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Profundidade

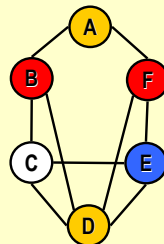


### Adjacência:

Vértice A: [B, F]  
 Vértice B: [A, C, D]  
 Vértice C: [B, D, E]  
 Vértice D: [B, C, E, F]  
 Vértice E: [C, D, F]  
 Vértice F: [A, D, E]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Profundidade

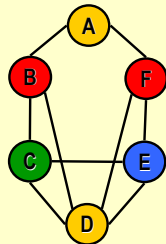


### Adjacência:

Vértice A: [B, F]  
 Vértice B: [A, C, D]  
 Vértice C: [B, D, E]  
 Vértice D: [B, C, E, F]  
 Vértice E: [C, D, F]  
 Vértice F: [A, D, E]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Profundidade



número cromático 4

### Adjacência:

Vértice A: [ B, F ]  
 Vértice B: [ A, C, D ]  
 Vértice C: [ B, D, E ]  
 Vértice D: [ B, C, E, F ]  
 Vértice E: [ C, D, F ]  
 Vértice F: [ A, D, E ]

Estruturas de Dados - Grafos

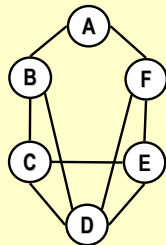
## Busca em Largura

**Programa Principal**  
 montar a lista de adjacências  
 inicializar a estrutura de cores  
 escolher o vértice  $V_i$  de maior grau para ser colorido primeiro  
 chamar a sub-rotina `Colore_Vértice` para colorir o vértice  $V_i$  escolhido  
 inserir o vértice  $V_i$  na fila  $Q$   
 enquanto a fila  $Q$  não estiver vazia faça  
     remove o vértice  $V_k$  da fila  
     para todo vértice  $V_j$  adjacente a  $V_k$  faça  
         chamar a sub-rotina `Colore_Vértice` para colorir o vértice  $V_j$   
         inserir  $V_j$  na fila  
 fim para  
 fim enquanto

**Sub-rotina COLORE-VERTICE**  
 se o vértice  $V_k$  ainda não foi colorido  
     procurar a cor  $C$  apropriada  
     se não existir cor apropriada para colorir o vértice  $V_k$   
         criar uma nova cor  $C$   
 fim se  
 colorir o vértice  $V_k$  com a cor  $C$   
 fim se

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Largura

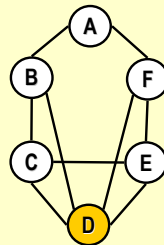


### Adjacência:

Vértice A: [ B, F ]  
 Vértice B: [ A, C, D ]  
 Vértice C: [ B, D, E ]  
 Vértice D: [ B, C, E, F ]  
 Vértice E: [ C, D, F ]  
 Vértice F: [ A, D, E ]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Largura

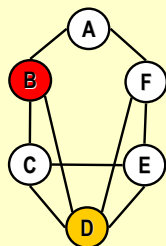


### Adjacência:

Vértice A: [ B, F ]  
 Vértice B: [ A, C, D ]  
 Vértice C: [ B, D, E ]  
 Vértice D: [ B, C, E, F ]  
 Vértice E: [ C, D, F ]  
 Vértice F: [ A, D, E ]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Largura

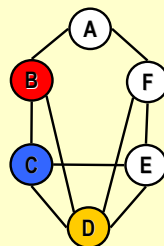


### Adjacência:

Vértice A: [ B, F ]  
 Vértice B: [ A, C, D ]  
 Vértice C: [ B, D, E ]  
 Vértice D: [ B, C, E, F ]  
 Vértice E: [ C, D, F ]  
 Vértice F: [ A, D, E ]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Largura

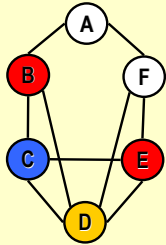


### Adjacência:

Vértice A: [ B, F ]  
 Vértice B: [ A, C, D ]  
 Vértice C: [ B, D, E ]  
 Vértice D: [ B, C, E, F ]  
 Vértice E: [ C, D, F ]  
 Vértice F: [ A, D, E ]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Largura

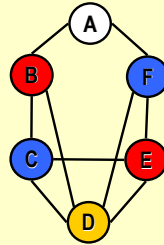


### Adjacência:

Vértice A: [B, F]  
 Vértice B: [A, C, D]  
 Vértice C: [B, D, E]  
 Vértice D: [B, C, E, F]  
 Vértice E: [C, D, F]  
 Vértice F: [A, D, E]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Largura

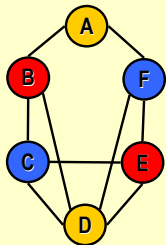


### Adjacência:

Vértice A: [B, F]  
 Vértice B: [A, C, D]  
 Vértice C: [B, D, E]  
 Vértice D: [B, C, E, F]  
 Vértice E: [C, D, F]  
 Vértice F: [A, D, E]

Estruturas de Dados - Grafos

## Busca em Largura



### Adjacência:

Vértice A: [B, F]  
 Vértice B: [A, C, D]  
 Vértice C: [B, D, E]  
 Vértice D: [B, C, E, F]  
 Vértice E: [C, D, F]  
 Vértice F: [A, D, E]

número cromático 3

Estruturas de Dados - Grafos

## Exercício

Considere a relação de exames requeridos, na mesma época, pelos alunos de uma universidade:

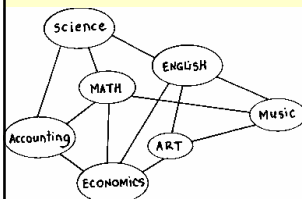
Código Aluno	Disciplinas
1	A, B
2	A, D
3	D, E, F
4	B, C
5	A, C
6	B, E
7	C, F
8	E, G

–Admitindo que um aluno pode executar, no máximo, 1 exame por dia, qual é o menor número de dias necessários para executar todos os exames?

- Montar o **grafo** para a situação descrita acima, considerando:
  - os vértices representam as disciplinas oferecidas
  - uma aresta entre duas disciplinas indica que pelo menos um aluno estará cursando as duas disciplinas
  - Conclusão: elas não podem acontecer no mesmo período
- Definir o número de **cliques** do grafo
- Definir o **CVIM** do grafo
- Definir o **número cromático ótimo** para o grafo gerado no item 1
- Simular o algoritmo de coloração em **largura** e em **profundidade** para verificar o número de cores gerado para o grafo.

Estruturas de Dados - Grafos

## Outro problema: como organizar um horário com o menor número possível de períodos?



- Os vértices representam disciplinas oferecidas
- Uma aresta entre duas disciplinas indica que pelo menos um aluno estará cursando ambas
- Conclusão: elas não poderão acontecer no mesmo período

Estruturas de Dados - Grafos

# Fim

Estruturas de Dados - Grafos