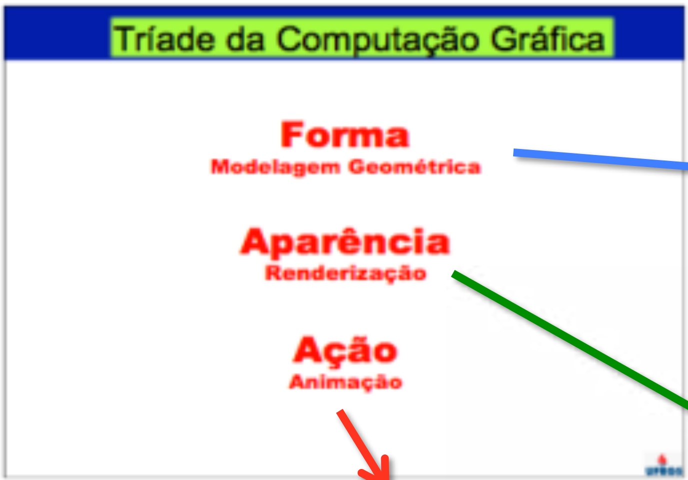
- INF01047 -

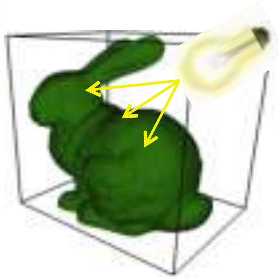
Fundamentos Matemáticos da Computação Gráfica

UFRGS

Problemas



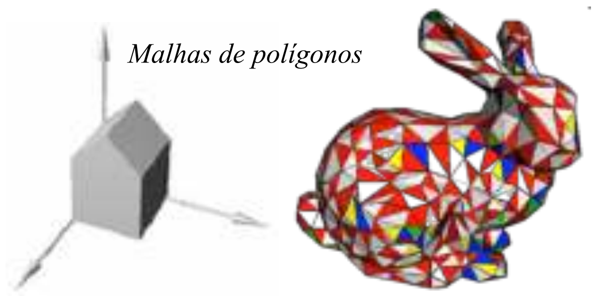
Stanford bunny
http://www.cc.gatech.edu/~turk/bunny/bunny.html



UFRGS

Problemas x conceitos

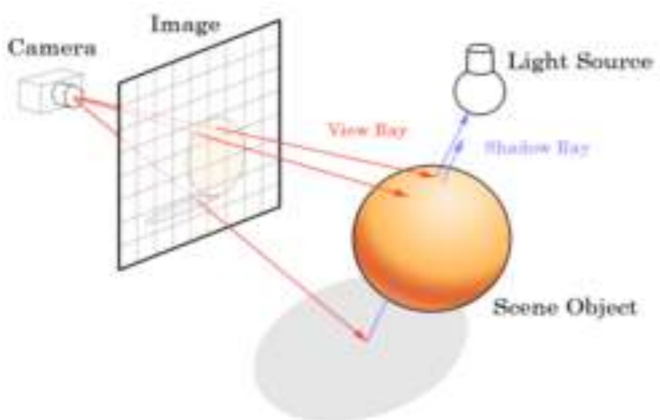
- Representação de forma



- Ponto como localização
- Plano, espaço 3D
- Sistemas de coordenadas

Problemas x conceitos

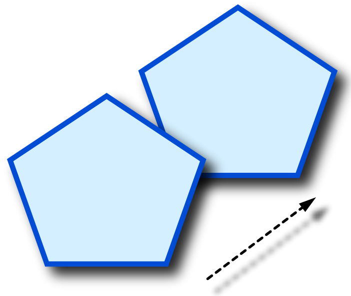
- Determinação da aparência dos objetos



- Vetores
- Relação espacial entre objetos

Problemas x conceitos

- Representação de ação



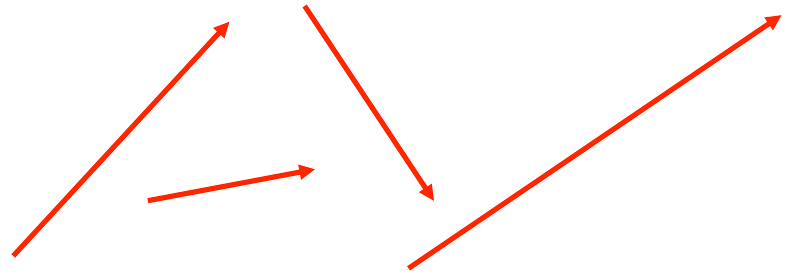
- Vetores
- Sistemas de coordenadas
- …

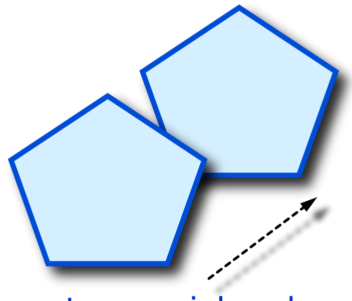
Fundamentos Matemáticos de CG

- Vetores, espaços vetoriais
- Pontos e espaços afins
- Sistemas de coordenadas
- Linhas e planos

Vetores

- Um **vetor v** é uma entidade geométrica com magnitude (comprimento) e direção, representado graficamente por um segmento de linha orientado



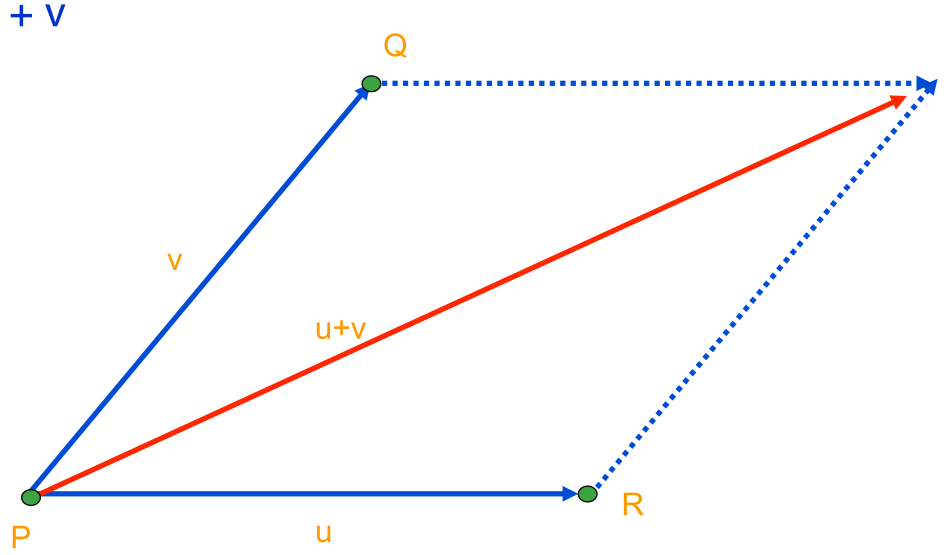


- Aplicações em CG ?
  - Representação de direção (onde está a luz, para onde estou caminhando num jogo, qual a orientação de uma parede)
  - Mudanças de posições: posições de objetos podem ser modificadas por vetores
  - Associação de velocidade a objetos

Operações sobre Vetores

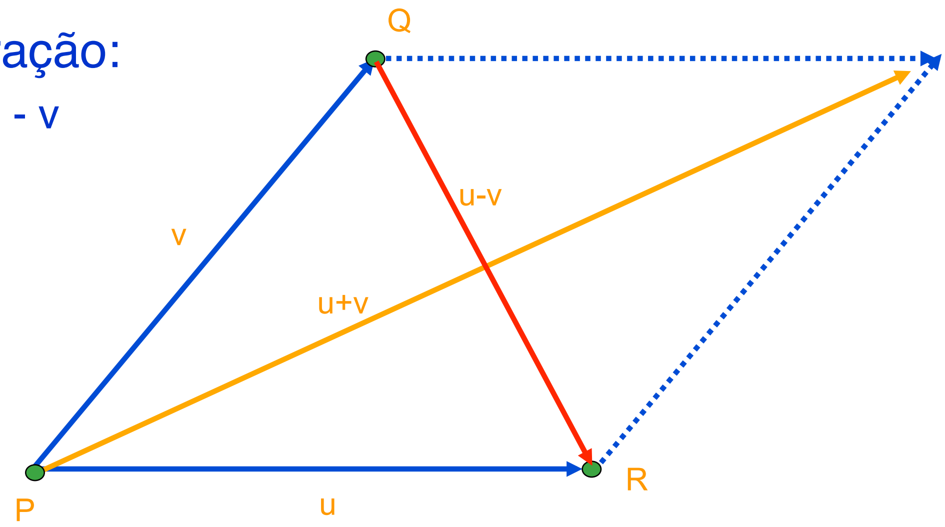
- Adição:

  w = u + v



Operações sobre Vetores

- Adição:
  w = u + v
- Subtração:
  w = u - v



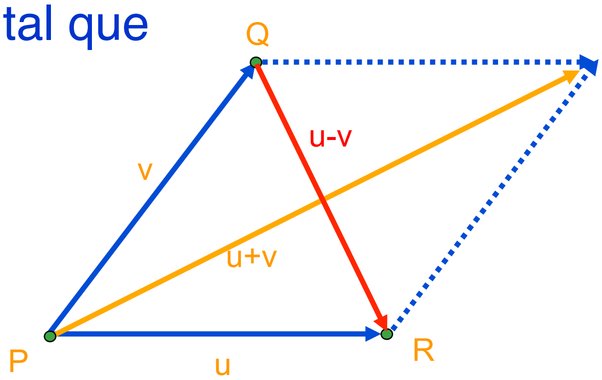
Propriedades da Adição de Vetores

v + w = w + v (comutativa)

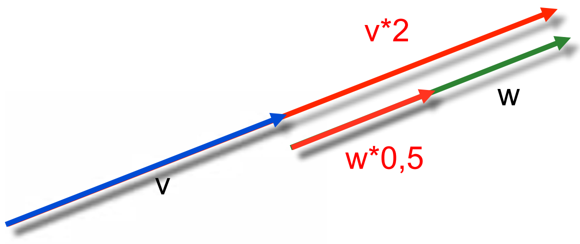
u + (v+w) = (u+v) + w (associativa)

v + 0 = v (identidade aditiva)

Para cada vetor v, existe –v tal que
v + (-v) = 0 (inverso aditivo)



Multiplicação por Escalar



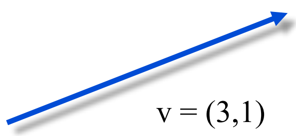
Aplicação num jogo?

Propriedades:

(ab) **v**	=	a(b**v**)	associativa
(a+b)**v**	=	a**v** + b**v**	distributiva
a(**v**+**w**)	=	a**v** + a**w**	distributiva
1.**v**	=	**v**	identidade multiplicativa

Espaços Vetoriais Reais

- Representação gráfica x formalismo
- Espaços Vetoriais:
  - Elementos: conjunto não vazio de vetores
    - $R^2 = \{(x, y) \mid x, y \in R\}$
    - $R^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in R\}$
    - $R^4 = \{(w, x, y, z) \mid w, x, y, z \in R\}$
    - ...
    - $R^n = \{(x_0,\ldots,x_{n-1}) \mid x_0,\ldots,x_{n-1} \in R\}$



Espaços Vetoriais Reais

- Operações fundamentais:
  - Adição entre vetores
  - Multiplicação de escalares por vetores

- Adição no R^2

  $(x_0, y_0) + (x_1, y_1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1)$
- Multiplicação por escalar

  $a\,(x_0, y_0) = (a.x_0, a.y_0)$

Combinações Lineares e Base Vetorial

- Seja S um conjunto de n vetores

  $S = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$
- Podemos usar estes vetores para criar um novo vetor v usando uma combinação linear:

  $v = a_0v_0 + a_1v_1 + \ldots + a_{n-1}v_{n-1}$

  onde $a_0, \ldots, a_{n-1}$ são reais escalares

Exemplo:

$S = \{(0,2), (4,0), (4,8)\}$

* podemos gerar o vetor (0,2) a partir de (4,0) e (4,8)?

* e o vetor (4,8) pode ser gerado a partir dos outros?

Combinações Lineares e Base Vetorial

- Se um dos vetores do conjunto S é expresso como uma combinação linear dos demais membros de S

  $v_i = a_0v_0 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} \ldots + a_{n-1}v_{n-1}$

  v_i é linearmente dependente

- Se nenhum dos vetores em S é linearmente dependente dos demais ...

  $v_o, \ldots, v_{n-1}$ são linearmente independentes

  S1 = {(0,2), (4,0)}   S2 = {(0,2), (4,8)}   S3= {(4,0),(4,8)}

Base

- Para um dado espaço vetorial V, podemos achar o conjunto β de vetores linearmente independentes em V que gera V: a base β
  - Mais de uma base pode ser encontrada
- Todas as bases possuem o mesmo número de elementos
  - Dimensão do espaço vetorial
- Para o R^3, base é composta de 3 elementos
  - Espaço tri-dimensional

Base Padrão (ou canônica)

$\{e_0, e_1, ..., e_{n-1}\}$

$e_0 = (1, 0, ..., 0)$

$e_1 = (0, 1, ..., 0)$

...

$e_{n-1} = (0, 0, ..., 1)$

- Propriedade Fundamental da Base:
  - Para cada vetor v no espaço vetorial V, existe somente uma combinação linear de vetores de β que é igual a v

$$v = a_0v_0 + a_1v_1 + ... + a_{n-1}v_{n-1}$$

Abreviatura na representação

$$v = a_0v_0 + a_1v_1 + ... + a_{n-1}v_{n-1}$$

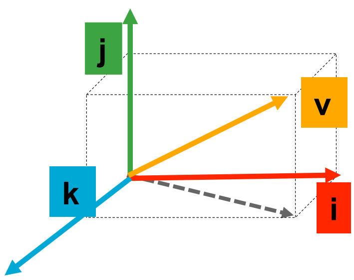
por

$$(a_0, a_1, ..., a_{n-1})$$

- Exemplo em 3D:
  - Base (1, 0, 0) (0, 1, 0) (0, 0, 1)

    i **j** **k**

$$v = xi + yj + zk$$



Operações sobre Vetores

$v_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$v_1 = (x_1, y_1 , z_1)$

- Adição:

  $v_0 + v_1 \quad = \quad x_0 i + y_0 j + z_0 k + x_1 i + y_1 j + z_1 k$

  $\quad = \quad (x_0 + x_1)i + (y_0 + y_1)j + (z_0 + z_1)k$

- Multiplicação por Escalar:

  $av \quad = \quad a(xi + yj + zk)$

  $\quad = \quad (ax)i + (ay)k + (az)k$

Comprimentos de Vetores

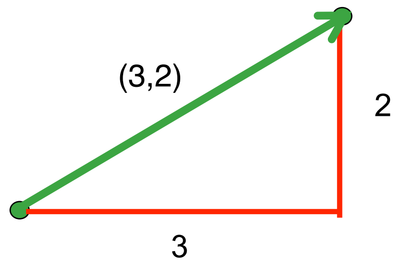
- Norma de um vetor
  - função de comprimento do vetor, com as seguintes propriedades:

1. $\| v \| \geq 0$, e $\| v \| = 0$, se e somente se, $v = 0$
2. $\| av \| = |a| \| v \|$
3. $\| v + w \| \leq \| v \| + \| w \|$

Exemplos de Normas

- Distância Euclideana

  $\| u \| = d = \mathrm{sqrt}\ (x^2 + y^2)$

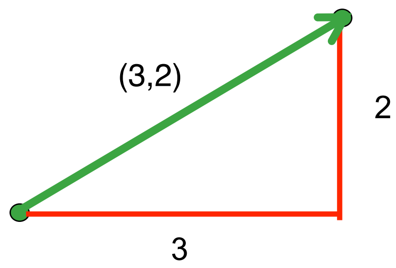


$\| (3,2) \| = \mathrm{sqrt}(9 + 4) = 3.6055$

Exemplo de Normas

- Distância de Manhattan

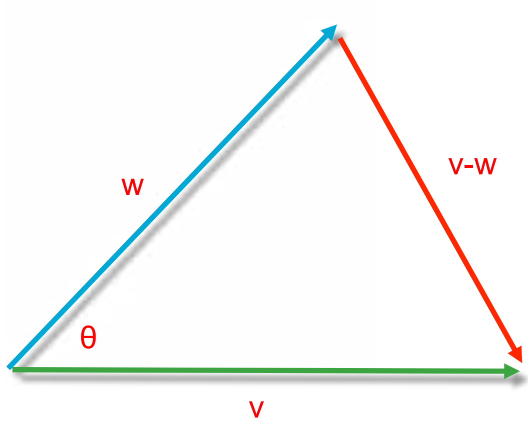
  $\| v \|_{l1} = \Sigma_i \| v_i \|$



$\| (3,2) \|_{l1} = 3 + 2 = 5$

Problemas

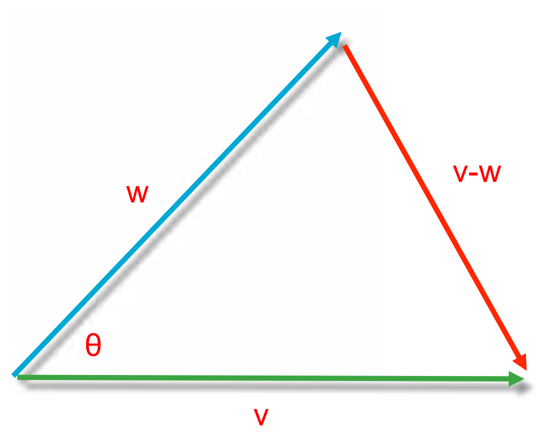
Ângulo entre vetores



Lei dos Cossenos

$||v-w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 - 2||v|| \, ||w|| \cos\theta$

Ângulo entre vetores



$\|v-w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\,\|w\| \cos\theta$

$\rightarrow\ -2\|v\|\,\|w\| \cos\theta = \|v-w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2$

$\rightarrow\ -2\|v\|\,\|w\| \cos\theta = (v_x-w_x)^2 + (v_y-w_y)^2 + (v_z-w_z)^2 - (v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2) - (w_x{}^2+w_y{}^2+w_z{}^2)$

$\rightarrow\ -2\|v\|\,\|w\| \cos\theta = -2v_xw_x - 2v_yw_y - 2v_zw_z$

$\rightarrow\ \|v\|\,\|w\| \cos\theta = v_xw_x + v_yw_y + v_zw_z$

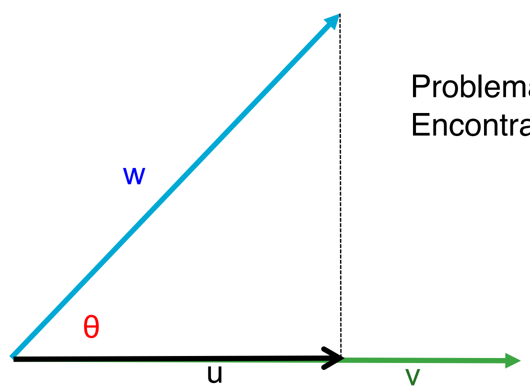
produto escalar

$\rightarrow\ \cos\theta = (v_xw_x + v_yw_y + v_zw_z) / \|v\|\,\|w\|$

Produto Escalar

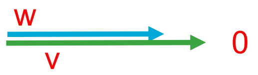
- Referenciado por v . w
- Definido como:

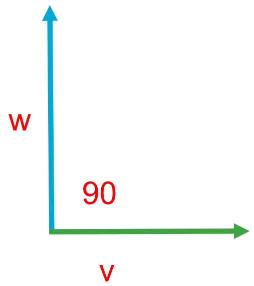
$$v \bullet w = \|v\|\,\|w\| \cos\theta$$



Problema:
Encontrar a projeção do vetor w sobre v

Propriedades do Produto Escalar





$v \cdot w = \|v\| \, \|w\| \cos 0 = \|v\| \, \|w\|$

$v \cdot v = \|v\| \, \|v\| \cos 0 = \|v\|^2$

$v \cdot w = \|v\| \, \|w\| \cos 90 = 0$

$$v \cdot w \;=\; w \cdot v$$

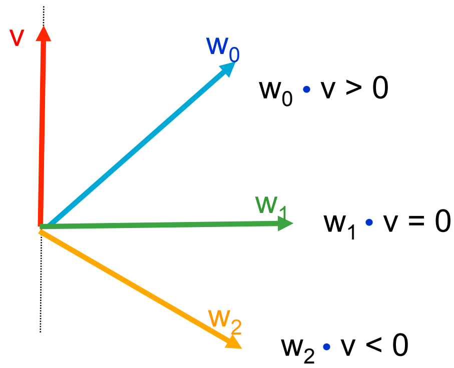
$$w \cdot (u+v) = (u \cdot w) + (v \cdot w)$$

$$a(v \cdot w) = av \cdot w$$

$$v \cdot v \geq 0, \quad v \cdot v = 0 \text{ se se somente se } v = 0$$

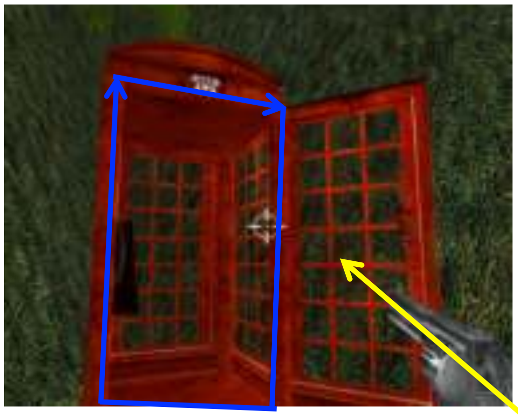
Aplicações do Produto Escalar

- Usar produto escalar como medida de ângulo entre dois vetores:
  - verificar se dois vetores estão apontando na mesma direção
  - verificar se dois objetos estão se deslocando na mesma direção



Problema

- Estou andando em direção à cabine telefônica ou me afastando dela?

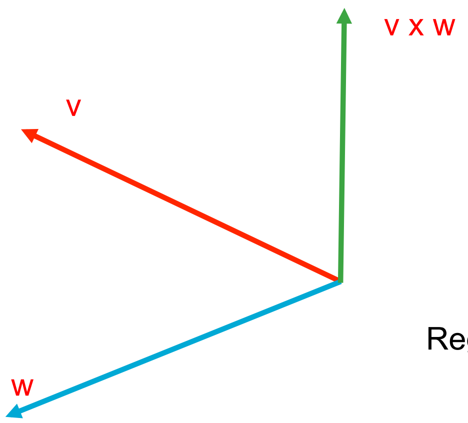


Que vetor usar para comparar com o da minha direção?

Produto Vetorial

- Encontrar um vetor ortogonal a outros dois

$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (y_v.z_w - y_w.z_v, z_v.x_w - x_v.z_w, x_v.y_w - x_w.y_v)$



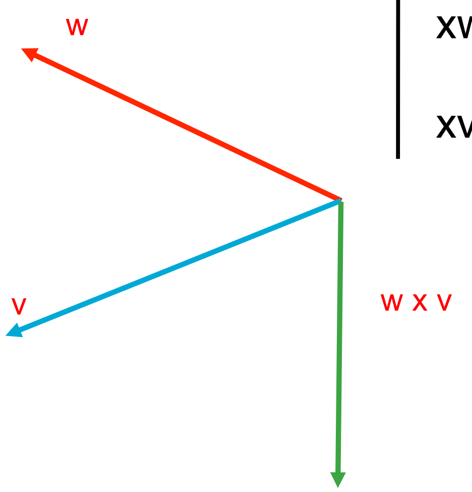
Regra da mão direita

Produto Vetorial

- Encontrar um vetor ortogonal a outros dois

  w x **v** = ?

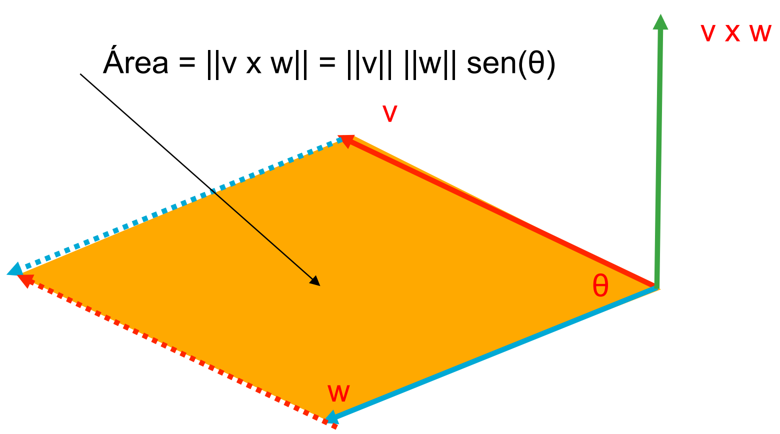
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ xw & yw & zw \\ xv & yv & zv \end{vmatrix}$$



Produto Vetorial

- Encontrar um vetor ortogonal a outros dois

  $v \times w = (v_y w_z - w_y v_z,\ v_z w_x - w_z v_x,\ v_x w_y - w_x v_y)$



Propriedades do Produto Vetorial

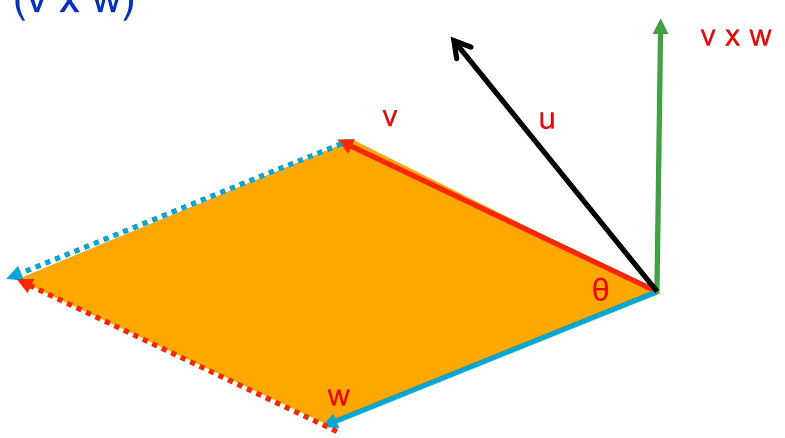
1. **v** x **w** = - **w** x **v**
2. **u** x (**v** + **w**) = (**u** x **v**) + (**u** x **w**)
3. (**u** + **v**) x **w** = (**u** x **w**) + (**v** x **w**)
4. a (**v** x **w**) = (a**v**) x **w** = **v** x (a**w**)
5. **v** x **0** = **0** x **v** = **0**
6. **v** x **v** = **0**

i x j = k
j x k = i
k x i = j

Produto Misto

- Produto misto

u . (v x w)



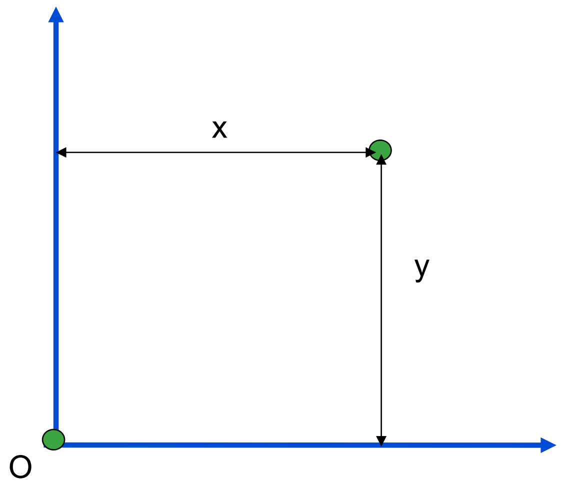
- O módulo do produto vetorial é a área do paralelogramo
- O produto misto é o volume do paralelepípedo induzido por u, v e w

Fundamentos Matemáticos de CG

- Vetores, espaços vetoriais
- Pontos e espaços afins
- Sistemas de coordenadas
- Linhas e planos

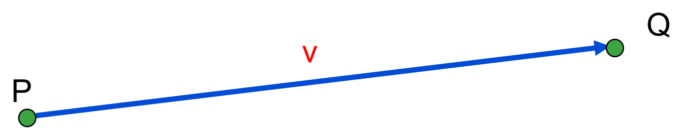
Pontos

- Ponto como localização
- Sistema de coordenadas Cartesiano



Espaço Afim

- Conjunto de pontos W e Espaço vetorial V
- Relacionamento entre Vetores e Pontos
  – Para cada par de pontos P e Q em W, existe um único vetor v em V tal que:
    - v = Q – P
  – Para cada ponto P em W e cada vetor v em V, existe um único ponto Q tal que:
    - Q = P + v

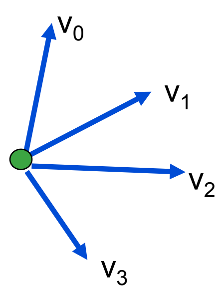


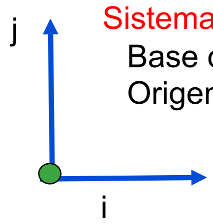
Sistemas de referência

– Dada a origem O e expressando qq ponto P em W:
  - P = O + v

– Escrevendo v como combinação linear de vetores de uma base de V
  - $P = O + a_0v_0 + a_1v_1 + \dots + a_{n-1}v_{n-1}$
  - $P = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, coordenadas do ponto P

Sistema de referência
$S = (O, \beta)$
$\beta = (v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$





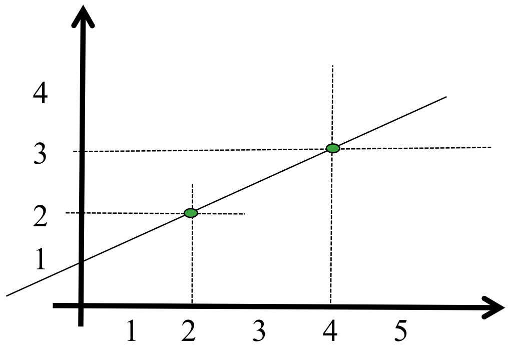
Sistema cartesiano
Base ortonormal
Origem O

Retas

- Equação implícita:

  $y = mx + b$

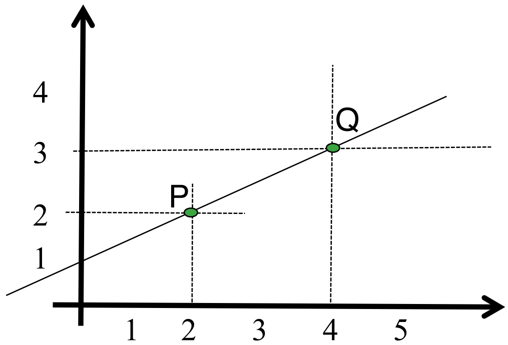
  - onde m = coeficiente angular da reta
  - onde b = coordenada onde a reta cruza o eixo y
- Exemplo: $y = 0{,}5\,x + 1$



Retas

- Como obter a equação da reta que passa por dois pontos?

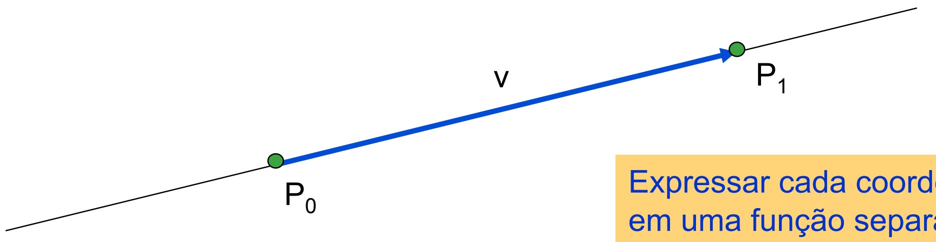
  $P = (2,2)$ $Q = (4,3)$



Retas

- Equação Paramétrica:

$$L(t) = P_0 + t\,(P_1 - P_0)$$
$$= (1\text{-}t)\,P_0 + t\,P_1$$
$$= P_0 + tv \text{ , onde } v = (dx,dy)$$
$$dx = x1\text{-}x0$$
$$dy = y1\text{-}y0$$



Expressar cada coordenada em uma função separada

Retas

- Representação genérica de retas:
  - $x = Px + t\,dx$ (1)
  - $y = Py + t\,dy$ (2)
- Encontrando t a partir de x:
  - $t = (x - Px) / dx$ (1)
- Substituindo em y (2)
  - $y = dy\,(x\text{-}Px)/dx + Py$
- Re-escrevendo:

$$0 = (y\text{-}Py)/dy - (x\text{-}Px)/dx$$
$$= (\text{-}dy)x + (dx)\,y + (dyPx - dxPy)$$
$$= ax + by + c$$

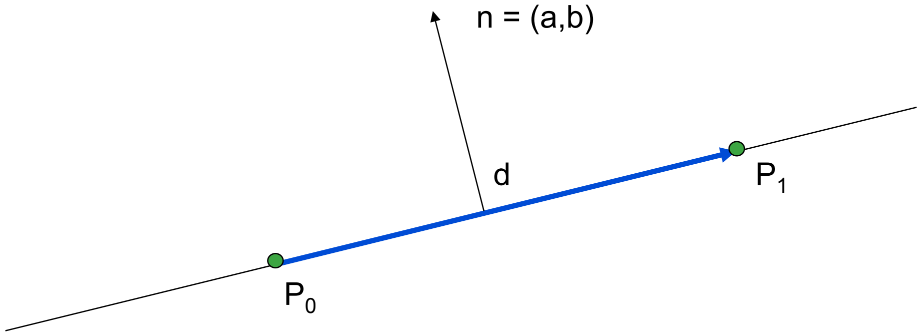
a = -dy
b = dx
c = dyPx - dxPy = -aPx - bPy

Note que (a,b) é perpendicular à direção da linha. Por que?

(c) J. Comba; C. Freitas; L. Nedel

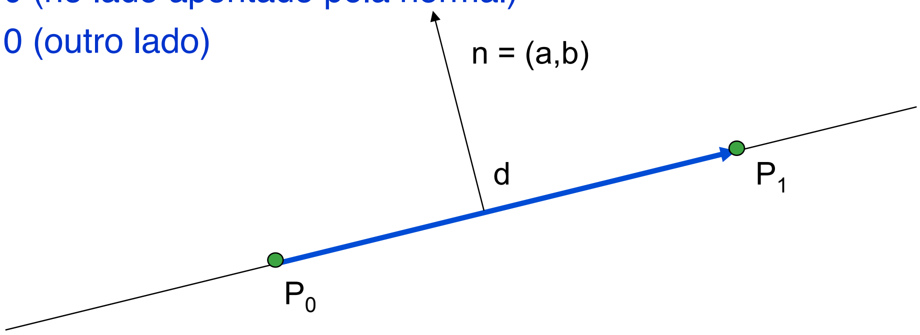
Retas

- Como testar em qual lado da linha um ponto está?



Retas

- Como testar em qual lado da linha um ponto está?
  - substituir (x, y) na equação da reta $ax+by+c = 0$
    - $= 0$ (sobre a linha)
    - > 0 (no lado apontado pela normal)
    - < 0 (outro lado)



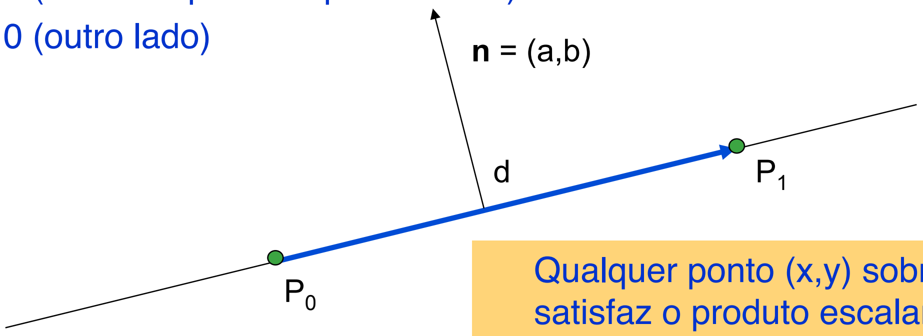
Retas

- Como testar em qual lado da linha um ponto está?
  - substituir (x, y) na equação da linha ax + by + c = 0

    = 0 (sobre a linha)

    > 0 (no lado apontado pela normal)

    < 0 (outro lado)



Qualquer ponto (x,y) sobre a reta satisfaz o produto escalar

$$(x-x_0, y-y_0) \cdot (a, b) = 0$$

> 0 (no lado apontado por **n**)

< 0 (outro lado)

Planos

- 3 pontos não-colineares
- 1 ponto e uma normal
- Equação genérica:
  - P_0 (x_0, y_0, z_0), ponto conhecido
  - Normal (a, b, c)
  - Se um ponto P pertence ao plano, **v** = (P – P_0) também pertence ao plano
  - Para **v** e **n** serem ortogonais, n•v = 0

    $a (x - x_0) + b (y - y_0) + c (z - z_0) = 0$
  - Rearranjando:

    $0 = ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0)$

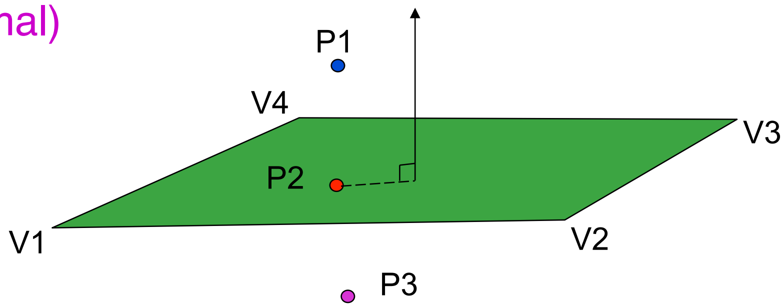
    $= ax + by + cz + d$

Planos

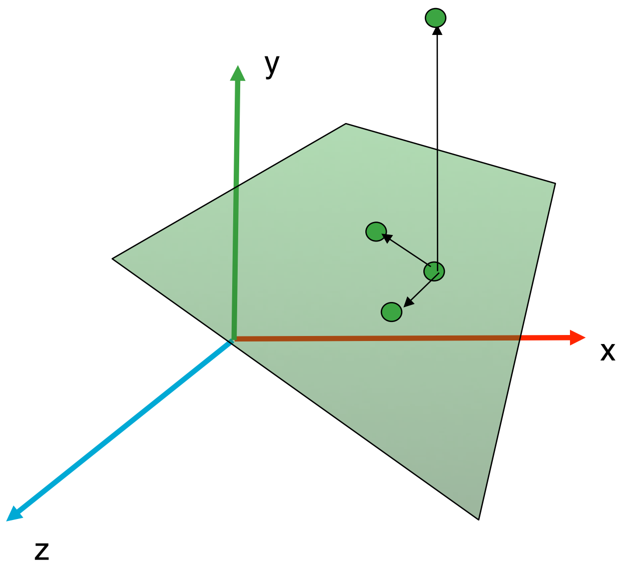
- Como calcular eq. genérica dados 3 pontos P, Q e R ?
  - Formar 2 vetores sobre o plano
    - u = Q – P
    - v = R – P
  - Calcular o produto vetorial para achar a normal
    - n = u x v
  - Normalizar a normal obtida
    - conveniente para cálculos de distâncias
    - Usar coordenadas da normal como a, b e c
  - Usar um ponto no plano (P por exemplo), calcular d:
    - d = - (aPx + bPy + cPz)

Planos

- Verificar a situação de um ponto P (x,y,z) em relação a um plano:
  - ax + by + cz + d = 0 (P sobre o plano)
  - ax + by + cz + d > 0 (P no semi-espaço apontado pela normal)
  - ax + by + cz + d < 0 (P no semi-espaço contrário a direção da normal)



Encontrando a normal de um polígono



Exercício!

Pontos e vetores

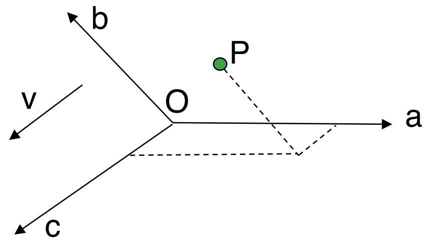
- Qual a diferença entre pontos e vetores ?

  v = (3, 5, 7)

  P = (5, 3, 1)

  – Pontos possuem uma localização, mas não tamanho ou direção
  – Vetores possuem tamanho e direção, mas não localização
  – Tanto pontos como vetores são relativos a um sistema de coordenadas

Confusão qdo. temos vários sistemas de coordenadas → comum em CG



Coordenadas Homogêneas

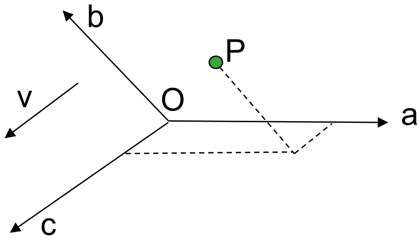
- Qual a diferença entre pontos e vetores ?

  $v = (v_1, v_2, v_3) = v_1a + v_2b + v_3c$

  $P = (p_1, p_2, p_3) = O + p_1a + p_2b + p_3c$
- Como representar pontos e vetores usando a mesma notação ?
  - Usar $(a, b, c, \Omega) \rightarrow$ Coordenadas Homogêneas

  $v = (v_1, v_2, v_3, 0)$

  $p = (p_1, p_2, p_3, 1)$



Coordenadas Homogêneas

- Propriedades:
  - Diferença entre 2 pontos gera 1 vetor:
    - $(x_0, y_0, z_0, 1) - (x_1, y_1, z_1, 1) = (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1, 0)$
  - Soma de 1 ponto e 1 vetor gera 1 ponto:
    - $(x, y, z, 1) + (v_1, v_2, v_3, 0) = (x+v_1, y+v_2, z+v_3, 1)$
  - Dois pontos não podem ser somados:
    - $\cancel{(x_0, y_0, z_0, 1) + (x_1, y_1, z_1, 1) = (x_0+x_1, y_0+y_1, z_0+z_1, 1+1)}$
  - Dois vetores somados geram 1 vetor:
    - $(v_1, v_2, v_3, 0) + (w_1, w_2, w_3, 0) = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3, 0)$
  - A escala de um vetor gera outro vetor:
    - $3 * (v_1, v_2, v_3, 0) = (3v_1, 3v_2, 3v_3, 0)$
  - Combinação linear de vetores:
    - $av + bw = (av_1 + bw_1, av_2 + bw_2, av_3 + bw_3, 0)$,

      para $v = (v_1,v_2,v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$

Coordenadas Homogêneas

- Coordenadas ordinárias para homogêneas
  – Ponto: acrescente 1 na tupla
  – Vetor: acrescente 0 na tupla
- Coordenadas homogêneas para ordinárias
  – Ponto: remova a última coordenada que é 1
  – Vetor: remova a última coordenada que é 0