Teoria dos Grafos

Edson Prestes

Teoria dos Grafos

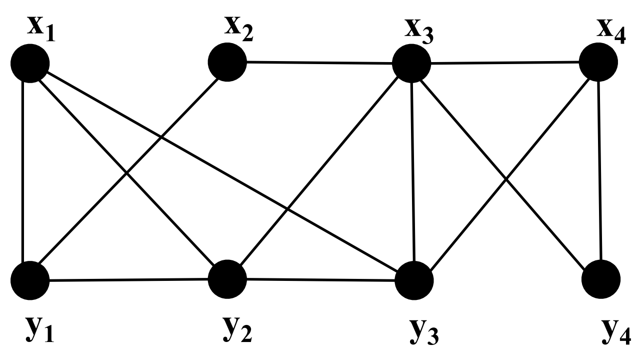
Matching

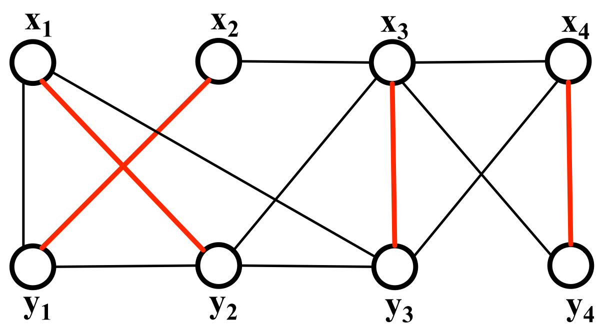
Um *matching* em um grafo G é um conjunto de arestas que não formam loops e que não compartilham vértices entre si.

Um vértice incidente às arestas de um *matching* M é dito saturado por M.

Um *matching perfeito* de G satura todos os vértices de G.

Determine um matching para o grafo abaixo





É um matching perfeito ? Sim!

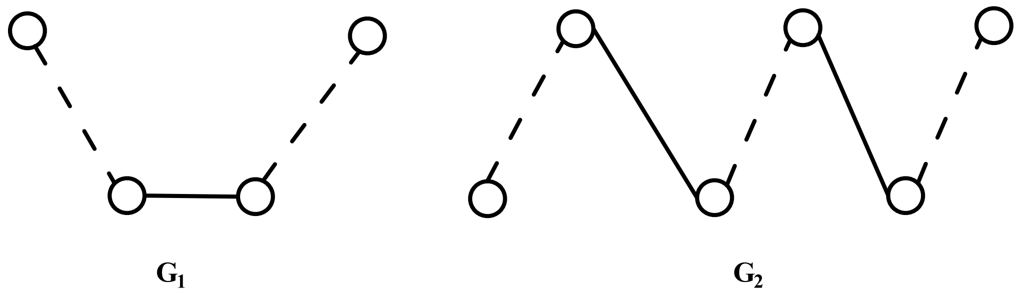
Teoria dos Grafos

Matching

O tamanho de um matching M é igual a quantidade de arestas de M.

Um matching M de um grafo G é *maximal* se toda aresta que não participa de M é incidente a alguma aresta em M.

Se M for o matching de maior cardinalidade de G então ele é chamado *matching máximo*.



Teoria dos Grafos

Matching

Um *caminho de alternante* em um matching M é um caminho cujas arestas alternam entre aquelas que estão em M e aquelas que não estão em M.

Um caminho alternante, cujos vértices extremos não são saturados por M, é um *caminho de aumento* de M.

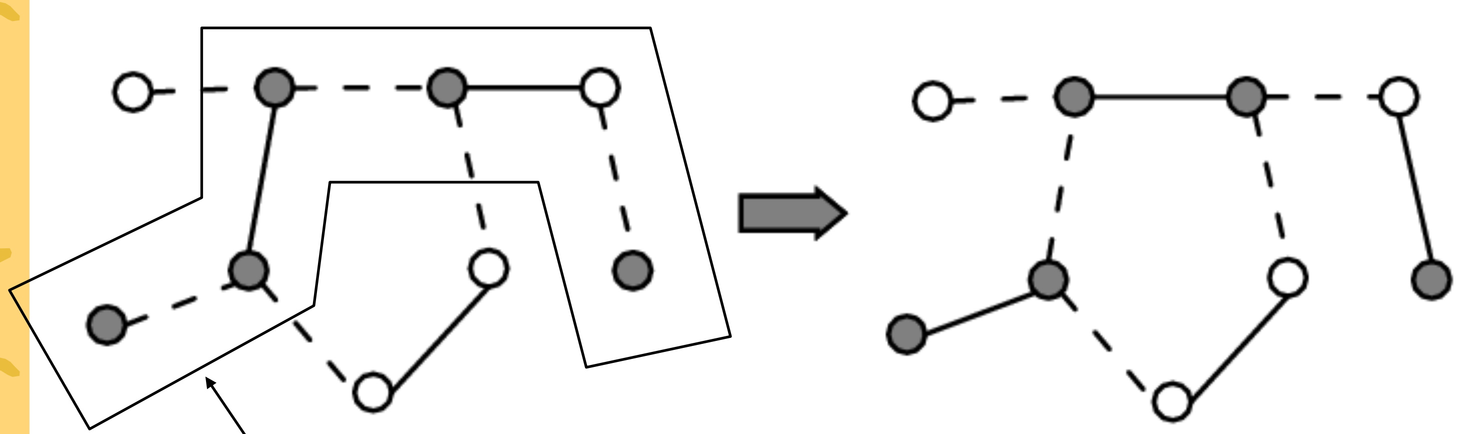
Quando M possuir um *caminho de aumento P podemos trocar as arestas deste caminho*, substituindo aquelas que não estão M pelas que estão. Isto irá aumentar em uma (1) unidade o tamanho do matching.

Uma observação importante é que o *matching máximo* é caracterizado pela ausência de caminhos de aumento.

Teoria dos Grafos

Matching

O matching do grafo abaixo, representado pelas arestas sólidas, é um matching maximal ou máximo ?



Caminho de aumento

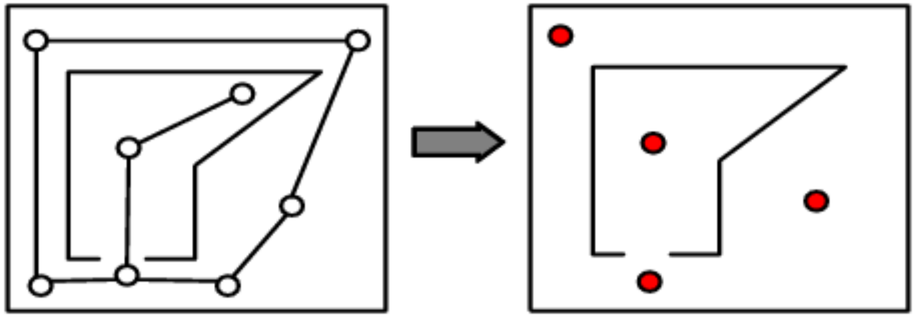
Maximal!

Teoria dos Grafos

Cobertura de Vértices

Uma cobertura de vértices de um grafo G é um subconjunto, Q, de vértices de G que contém no mínimo um vértice de cada aresta de G.

Logo, podemos dizer que os vértices em Q cobrem A(G).



Teoria dos Grafos

Cobertura de Vértices

Como nenhum vértice pode cobrir duas arestas de um matching, o tamanho de qualquer cobertura de vértices de um grafo G é no mínimo o tamanho do menor matching de G.

A relação entre os problemas de matching e da cobertura de vértices corresponde a uma relação min-max, quando tomados sob a mesma instância de um problema.

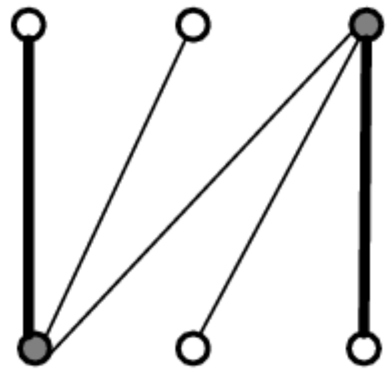
Quando a resposta para a maximização de um problema é igual a resposta para a minimização do outro sobre a mesma instância do problema então sabemos que o *valor encontrado é ótimo*. Ou seja, obtendo um matching e uma cobertura de vértices de mesmo tamanho provamos que cada um deles é ótimo.

O teorema que rege esta relação para os problemas de matching e de cobertura é o teorema de König-Egervary.

Teoria dos Grafos

Cobertura de Vértices

Na figura abaixo, tanto a cardinalidade do matching (denotado pelas arestas mais escuras) quanto a da cobertura de vértices (ilustrado pelos vértices cinzas) é a mesma e igual a 2.

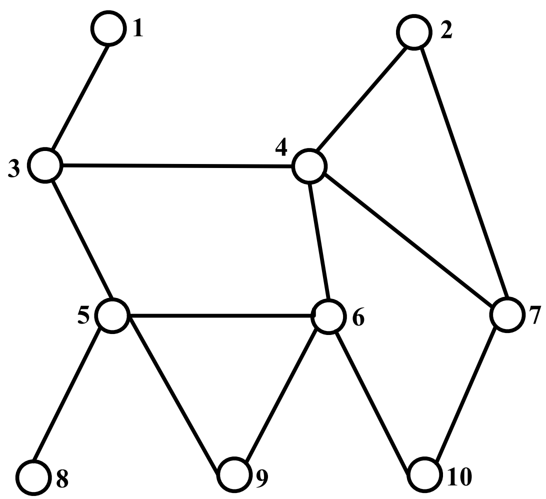


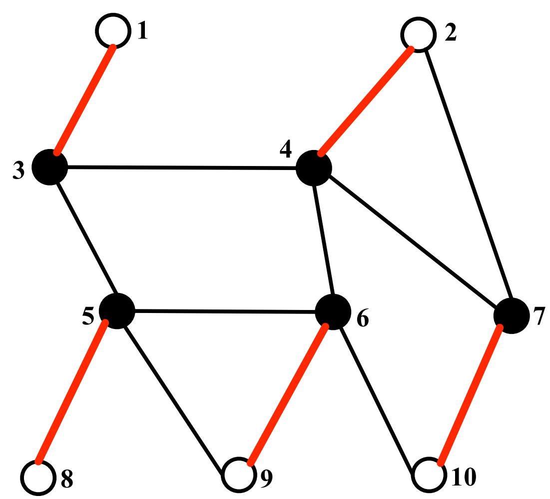
Note que a cardinalidade da cobertura proíbe matching com mais de 2 arestas; e o tamanho do matching proibe coberturas com menos que 2 vértices.

Teoria dos Grafos

Cobertura de Vértices

Encontre a menor cobertura e o maior matching do grafo abaixo ?



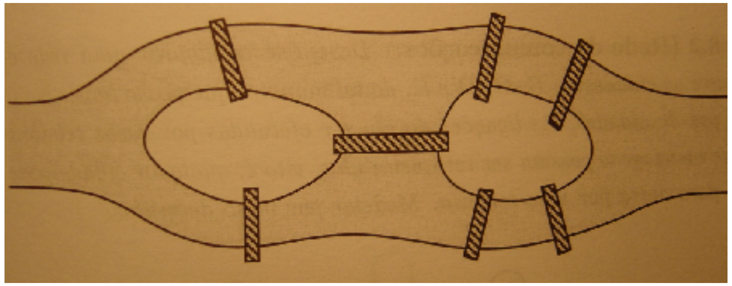


A cardinalidade da cobertura é igual a 5 enquanto que a cardinalidade do matching igual a 5 vértices.

Teoria dos Grafos

Grafos Eulerianos

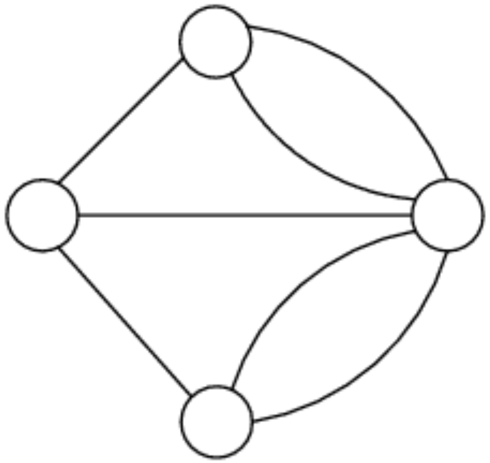
O problema das pontes de Königsberg é o primeiro e mais famoso problema em teoria dos grafos resolvido por Euler em 1736. Na cidade de Königsberg existiam sete pontes que cruzavam o rio Pregel estabelecendo ligações entre duas ilhas e entre as ilhas e as margens opostas do rio.



O problema consiste em determinar se é possível ou não fazer um passeio pela cidade começando e terminando no mesmo lugar, cruzando cada ponte exatamente uma única vez. Se isto for possível o grafo é chamado grafo Euleriano.

Teoria dos Grafos

Grafos Eulerianos



Este problema é similar ao problema do carteiro chinês. Neste último, as arestas correspondem a trechos de ruas que o carteiro deve percorrer para entregar as cartas.

O carteiro deve realizar a entrega das cartas de forma mais eficiente possível, ou seja, percorrendo o menor caminho.

Teoria dos Grafos

Grafos Eulerianos

Se o grafo G é euleriano então qualquer circuito euleriano é ótimo, caso contrário algumas arestas serão percorridas mais de uma vez.

Baseado na segunda situação, busca-se encontrar um percurso de peso mínimo no grafo que modela o problema.

Logo o nosso problema consiste em um problema de otimização onde devemos encontrar um circuito que contenha todas as arestas do grafo e cuja distância total seja mínima.

Teoria dos Grafos

Grafos Eulerianos

O teorema de Euler caracteriza uma classe de grafos e ao mesmo tempo mostra como construir um circuito Euleriano.

Teorema: Um grafo conexo G=(V,A) é euleriano, sse, os graus de todos os nós de G são pares.

Demonstração: *Suponha que o grafo seja euleriano. Então G possui um circuito (passeio fechado) euleriano. Se contarmos para cada nó, a entrada e saída dele, ao final de todo percurso teremos um conjunto de números pares.*

Suponha agora que temos um grafo G onde todos os seus nós têm grau par. Escolha um nó i qualquer e comece a percorre-lo sem repetir arestas, até não existirem arestas a serem percorridas, a partir do vértice corrente.

Como todos os nós têm grau par então o último nó alcançado é o nó i. Se o circuito C contiver todos as arestas de G então a demonstração está concluída. Caso contrário, existirão arestas não percorridas.

Teoria dos Grafos

Grafos Eulerianos

Como o grafo é conexo então existe um caminho entre qualquer par de vértices. Logo, existe algum caminho entre algum vértice do circuito até uma aresta ***q*** *não incluída em C.*

Imagine que este caminho seja formado pela aresta (j,k), onde j pertence ao circuito C e k pertence a aresta ***q****.*

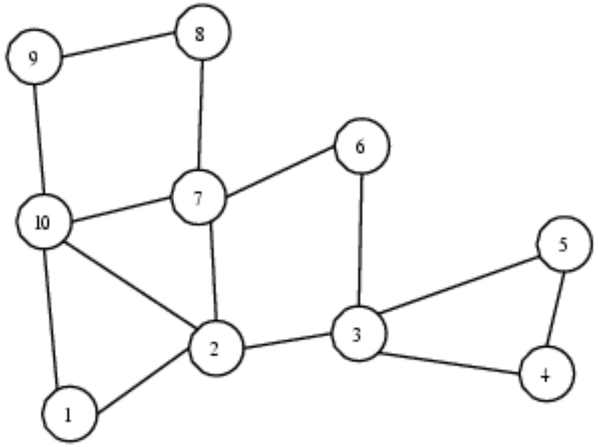
Se isto ocorrer devemos percorrer o grafo a partir de j visitando todas as novas arestas sem acessar nenhuma aresta em C. Este novo circuito C' pode ser unido ao circuito C formando um único circuito. Agora basta percorrer C a partir de j e quando retornar a j começar a percorrer C'.

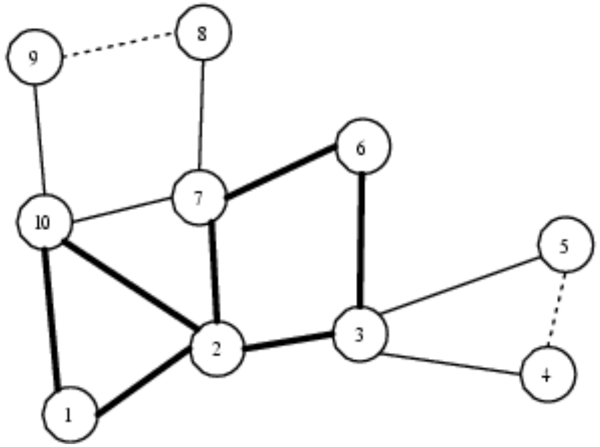
Repetimos este processo até que todas as arestas tenham sido visitadas. No final teremos um único circuito formado pela união de vários circuitos. O circuito resultante é chamado euleriano, assim como o grafo.

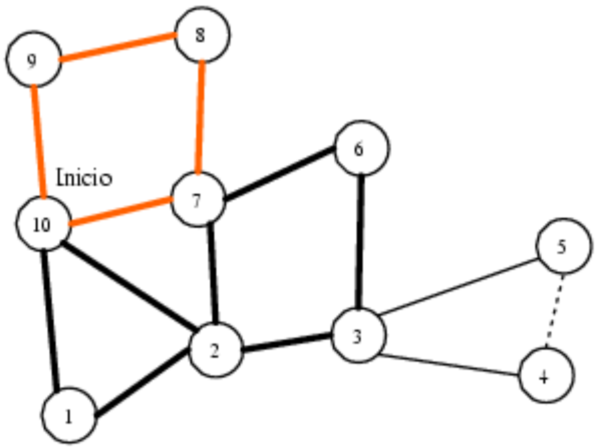
Teoria dos Grafos

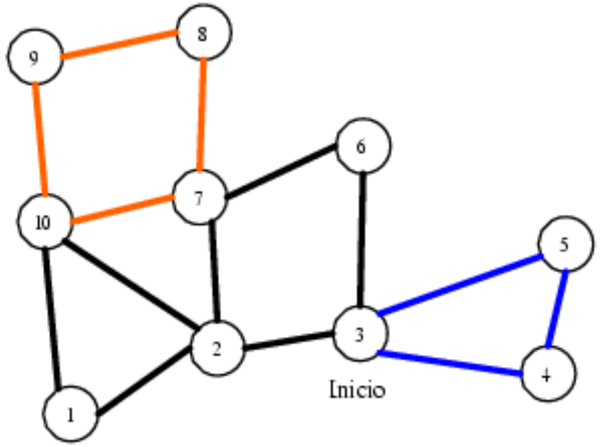
Grafos Eulerianos

O grafo abaixo é euleriano? Se sim decomponha em ciclos.









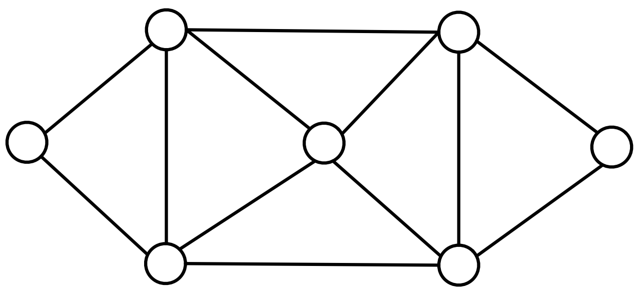
Teoria dos Grafos

Grafos Eulerianos

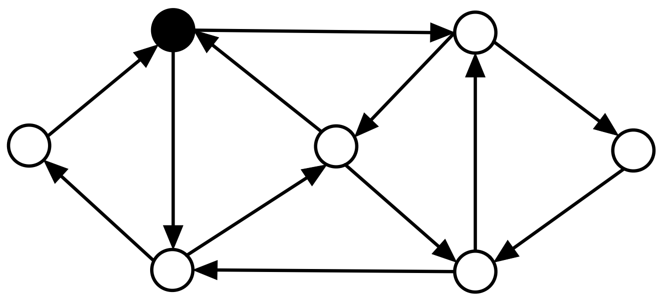
Baseado nesta idéia podemos afirmar que todo grafo par (cujos vértices possui grau par) pode ser decomposto em circuitos.

Se removermos a condição de que o circuito tem que ser fechado então temos um grafo semi-euleriano.

O grafo abaixo é euleriano ? Se sim determine um circuito euleriano.



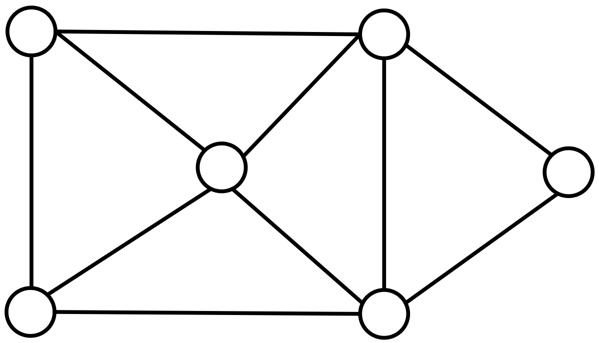
Euleriano



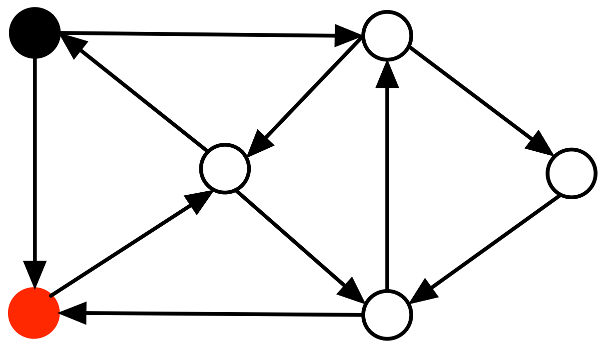
Teoria dos Grafos

Grafos Eulerianos

O grafo abaixo é euleriano ? Se sim determine um circuito euleriano.
Caso contrário se o grafo for semi-euleriano, determine um passeio que visite todos as arestas do grafo



semi-euleriano



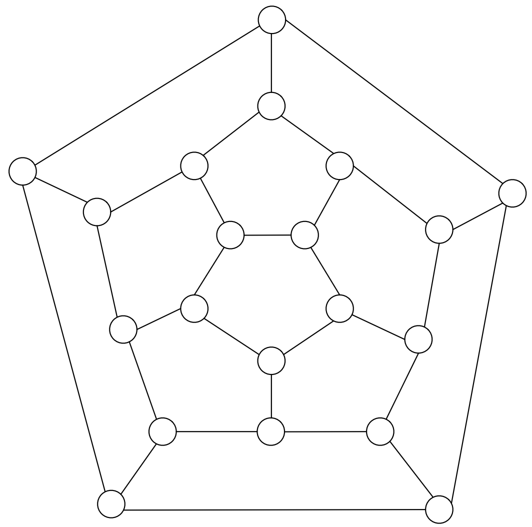
Um grafo semi-euleriano possui 2 vértices com grau impar. Um deles é o ponto de partida e o outro é o ponto de chegada.

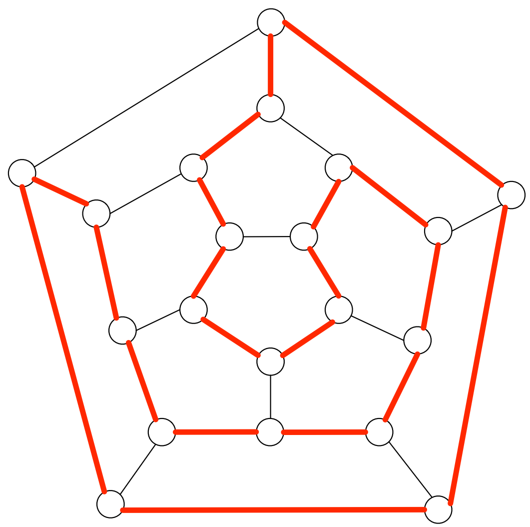
Teoria dos Grafos

Grafos Hamiltonianos

Um grafo G é chamado Hamiltoniano quando possui um ciclo que inclui todos os vértices de G, ou seja, neste ciclo cada vértice aparece uma única vez, com exceção do vértice de partida.

O grafo abaixo é hamiltoniano? Se sim, encontre o ciclo hamiltoniano.





Teoria dos Grafos

Grafos Hamiltonianos

O problema do cálculo do ciclo hamiltoniano, embora semelhante ao problema do cálculo do circuito euleriano, é muito mais complexo pois não são conhecidas todas as condições necessárias e suficientes para que um grafo genérico contenha um ciclo hamiltoniano nem tampouco métodos eficientes para construir tal ciclo.

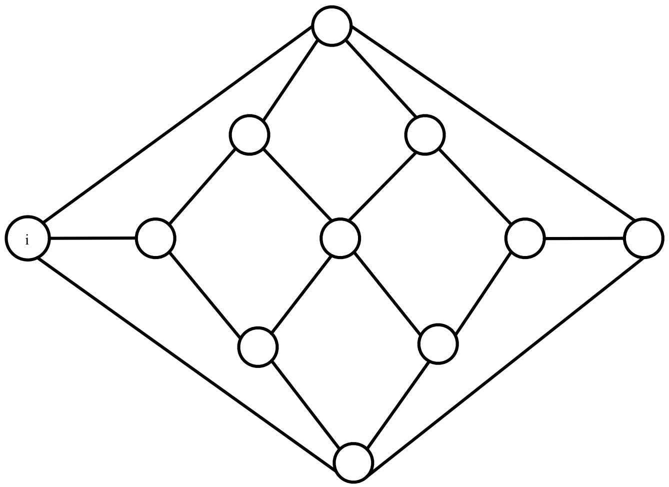
Este problema está intimamente relacionado ao problema do caixeiro viajante, o qual consiste em encontrar um caminho que passe por todas as cidades uma única vez e retorne ao ponto de partida escolhendo para isso um caminho de custo mínimo.

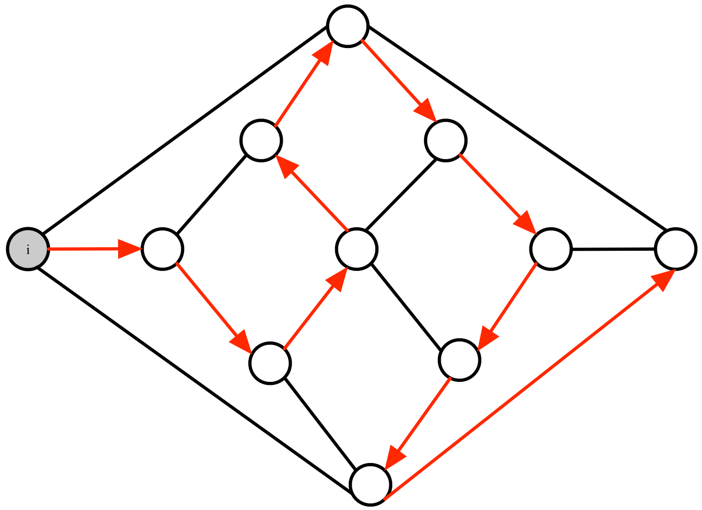
Este caminho consiste em um ciclo hamiltoniano de custo mínimo, onde a soma dos custos das arestas pertencentes ao ciclo é mínima.

Teoria dos Grafos

Grafos Hamiltonianos

Verifique se o grafo abaixo é Hamiltoniano. Se for, mostre um ciclo hamiltoniano.



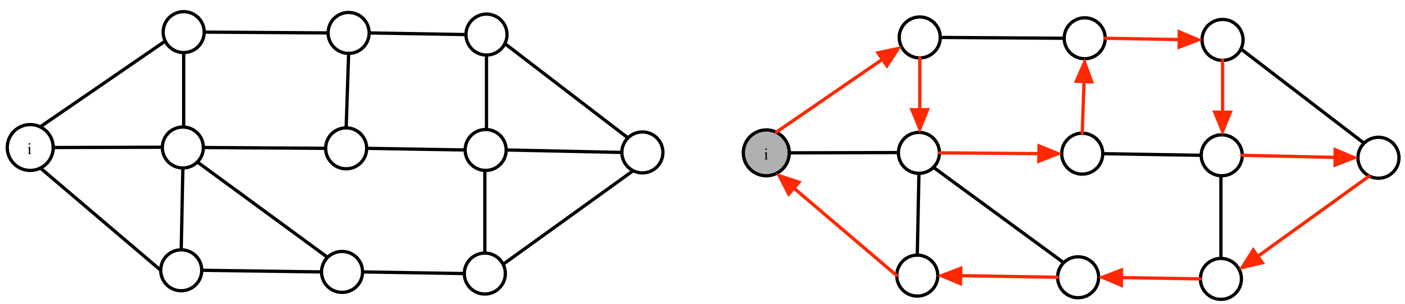


Não é hamiltoniano!

Teoria dos Grafos

Grafos Hamiltonianos

Verifique se o grafo abaixo é Hamiltoniano. Se for, mostre um ciclo hamiltoniano.



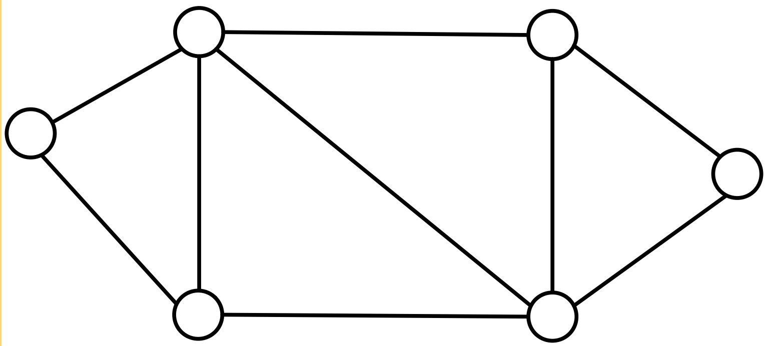
Hamiltoniano

Teoria dos Grafos

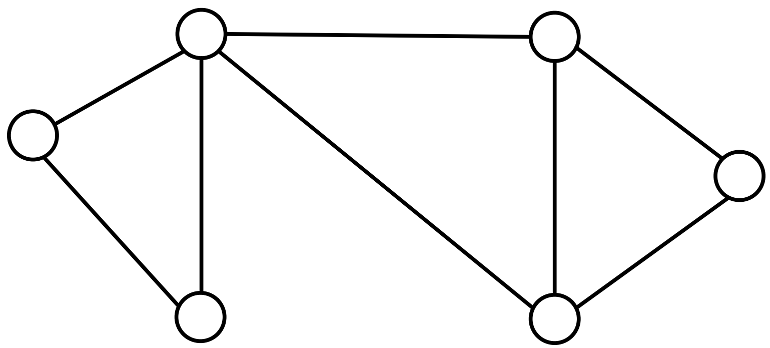
Grafos Hamiltonianos

Se o grafo não contiver um ciclo hamiltoniano, mas contiver um caminho entre dois vértices de forma que cada vértice do grafo seja visitado uma única vez, então este grafo é chamado semi-hamiltoniano.

O grafo abaixo é hamiltoniano ? semi-hamiltoniano, euleriano, semi-euleriano?



Hamiltoniano e semi-euleriano



semi-hamiltoniano e semi-euleriano

Teoria dos Grafos

Grafos Hamiltonianos

Traga na próxima aula as condições necessárias e suficientes para que um grafo seja hamiltoniano (Olhar livro do Harary ou West).

Teoria dos Grafos

Trabalho

Implementar um programa que recebe como entrada um grafo G, através de um arquivo texto, e calcula:

* o diâmetro de G, mostrando o caminho(ou um dos) que o determina;

* a cintura de G, mostrando o ciclo (ou um dos) que o determina.