Revisão

- Logaritmos - propriedades

$\log_a(1) = 0$	
$a^{\log_a(n)} = n$	por definição
$\log_a(n \cdot m) = \log_a(n) + \log_a(m)$	propriedade do produto
$\log_a(\frac{n}{m}) = \log_a(n) - \log_a(m)$	propriedade da divisão
$\log_a(n^m) = m \cdot \log_a(n)$	propriedade da potência
$\log_a(n) = \log_b(n) \cdot \log_a(b)$	troca de base
$\log_a(n) = \dfrac{\log_c(n)}{\log_c(a)}$	mudança de base
$\log_b(a) = \dfrac{1}{\log_a(b)}$	
$a^{\log_c(b)} = b^{\log_c(a)}$	expoentes

Revisão – somatórios

Para k uma constante arbitrário temos

$$\sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$$ Distributividade

$$\sum_{i=1}^{n} k = nk$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{m} b_j \right)$$ Distributividade generalizada

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$ AssociatiIviade

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{p-i} = \sum_{i=p-n}^{p} a_i$$

Revisão – séries

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

série aritmética

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

série geométrica

se $|x| < 1$ então

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}$$

série geométrica infinitamente decrescente

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}$$

Revisão – indução matemática

- Importante para provar resultados envolvendo inteiros
  - Seja P(n) uma propriedade relativa aos inteiros.
  - Se P(n) é verdadeira para n=1 e
  - se P(k) verdadeira implica que P(k+1) é verdadeira
  - então P(n) é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$

- Para aplicarmos indução matemática deve-se:
  - Passo inicial: verificar se P(n) é verdadeira para a base n_0
  - Hipótese: assumir P(n) válida
  - Prova: provar que P(n) é valida para qualquer valor de $n \geq n_0$
  - Se os passos acima forem verificados, conclui-se que P(n) é valida para qualquer valor de $n \geq n_0$

  - Idéia da indução matemática é semelhante a idéia de uma **função recursiva**!!

Exercícios

- mostre que $n! \leq n^n$
- mostre que $\frac{1}{\log_a(c)} = \log_c(a)$
- Demonstre a propriedade dos expoentes
- Encontre uma fórmula alternativa para

$$\sum_{i=1}^{n} (2 \cdot i - 1)$$

  e prove seu resultado via indução matemática.
- Use indução matemática para provar que

$$\sum_{i=0}^{n-1} a \cdot q^i = \frac{a \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$$

- Dica: theoretical computer science cheat sheet:
  http://www.tug.org/texshowcase/cheat.pdf

Complexidade de Algoritmos

1. Mostre ou dê um contra-exemplo

$$\text{Para } n > 0 \;\; : n! \leq n^n$$

Complexidade de Algoritmos

1. Mostre ou dê um contra-exemplo

$$\text{Para } n > 0 \ : n! \leq n^n$$

$$n! = 1.2.3 \ldots n$$

Complexidade de Algoritmos

1. Mostre ou dê um contra-exemplo

$$\text{Para } n > 0 \ : n! \leq n^n$$

$$n! = 1.2.3 \ldots n$$

$$n! \leq \underbrace{n.n.n \ldots n}_{n}$$

Complexidade de Algoritmos

1. Mostre ou dê um contra-exemplo

$$\text{Para } n > 0 \ : n! \leq n^n$$

$$n! = 1.2.3 \ldots n$$

$$n! \leq \underbrace{n.n.n \ldots n}_{n}$$

$$n! \leq n^n$$

3. Demonstre a seguinte propriedade

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Complexidade de Algoritmos

3. Demonstre a seguinte propriedade

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}}$$

3. Demonstre a seguinte propriedade

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}}$$

$$a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = b^{\frac{1}{\log_a c}}$$

3. Demonstre a seguinte propriedade

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}}$$

$$a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = b^{\frac{1}{\log_a c}}$$

$$b^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\frac{\log_a a}{\log_a c}}$$

Complexidade de Algoritmos

3. Demonstre a seguinte propriedade

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

$$a^{\log_c b} = a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}}$$

$$a^{\frac{\log_a b}{\log_a c}} = b^{\frac{1}{\log_a c}}$$

$$b^{\frac{1}{\log_a c}} = b^{\frac{\log_a a}{\log_a c}}$$

$$b^{\frac{\log_a a}{\log_a c}} = b^{\log_c a}$$

6. Qual é o valor de x que satisfaz a seguinte equação:

$$\log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = \frac{13}{4}$$

7. Prove por indução

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Complexidade de Algoritmos

- Prove por indução

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$