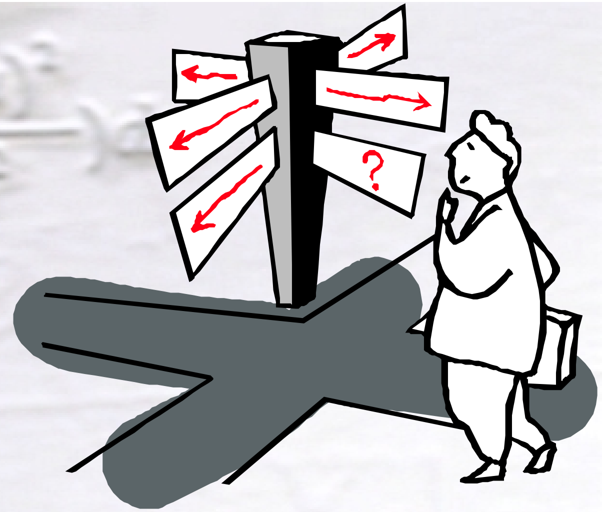
Testes de Hipóteses



3

Prof. Lorí Viali, Dr.

viali@pucrs.br

http://www.pucrs.br/~viali/

Testes para duas Amostras

Amostras

- **Dependentes**
  - Teste "t" para amostras emparelhadas
- **Independentes**
  - Variâncias Conhecidas
    - Teste "z"
  - Variâncias Desconhecidas
    - Supostas iguais
    - Supostas diferentes

(a)

Independentes

Diferença entre duas médias

$$(\mu_1 - \mu_2 = \Delta)$$

Diferença entre duas proporções

$$(\pi_1 - \pi_2 = \Delta)$$

Igualdade entre duas variâncias

$$(\sigma_X^2 = \sigma_Y^2)$$

Teste para a diferença entre duas médias

(a) variâncias conhecidas

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\sigma_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde z_c é tal que:

$$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\Phi(z_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\Phi(z_c) = \alpha/2 \text{ ou } \Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

Uma grande empresa quer comprar peças de dois fornecedores diferentes. O fornecedor "A" alega que a durabilidade é de 1000 horas com desvio de 120 horas, enquanto que o fornecedor "B" diz que a duração média é de 1050 horas com desvio padrão de 140 horas.

Para testar se a durabilidade de "B" é realmente maior, duas amostras de tamanho $n = m = 64$, de cada um dos fornecedores, foram obtidas. A duração média da amostra A foi de 995 horas e a B foi de 1025. Qual a conclusão a 5% de significância?

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$

H_0: $\mu_1 < \mu_2$

Dados:

$n = m = 64$

$\sigma_1 = 120$; $\sigma_2 = 140$

$\overline{X} = 995$ e $\overline{Y} = 1025$

$\alpha = 5\%$

Trata-se de um teste unilateral à esquerda com σ_1 e σ_2 conhecidos.

A variável teste é:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_{\overline{X}-\overline{Y}}}{\sigma_{\overline{X}-\overline{Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}}$$

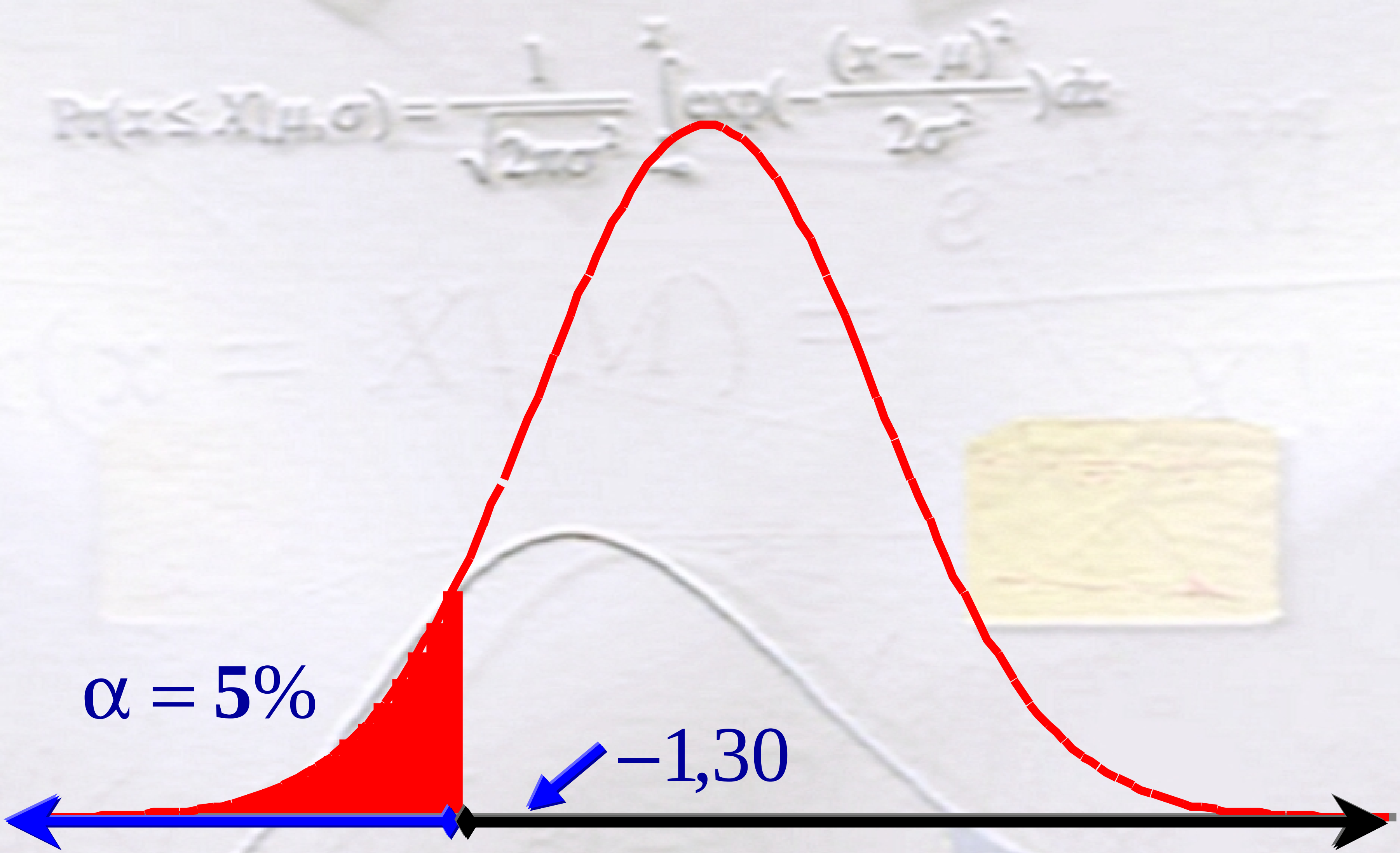
Então:

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}}} = \frac{995 - 1025 - 0}{\sqrt{\frac{120^2}{64} + \frac{140^2}{64}}} = -1{,}30$$

O valor crítico z_c é tal que: $\Phi(z_c) = \alpha =$ $= 0{,}05 = 5\%$*. Então* $z_c = \Phi^{-1}(0{,}05) =$ $= -1{,}645$. *Assim RC = (- ∞; -1,645]*

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como z = -1,30 ∉ RC ou -1,30 > -1,645, **Aceito** H_0, *isto é, a 5% de significância* **não** *se pode afirmar que a média de* ***A*** *é menor que a média de* ***B***



$RC = (-\infty; -1{,}645;]$

Região de Não Rejeição

OPÇÃO:

Trabalhar com a significância do resultado obtido (1,30), isto é, o valor-p. Para isto, deve-se calcular P(Z < 1,30), isto é, p = P(Z < -1,30) = Φ(-1,30) = 9,68%.

Como a significância do resultado (9,68%) é maior que a significância do teste (5%) não é possível rejeitar a hipótese nula.

(b) variâncias desconhecidas
(i) supostamente iguais

Neste caso a variável teste é:

$$t_{\upsilon} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{s\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

Onde s é dado por:

$$s = \sqrt{\frac{(n-1)s_X^2 + (m-1)s_Y^2}{n+m-2}}$$

e v é dado por: n + m - 2

Exemplo

Um relatório da defesa do consumidor mostrou que um teste com oito pneus da marca A apresentaram uma vida média de 37500 km com um desvio padrão de 3500 km e que doze de uma marca concorrente B, testados nas mesmas condições, tiveram uma durabilidade média de 41400 km com variabilidade de 4200 km.

Supondo que as variâncias populacionais sejam as mesmas e admitindo uma significância de 5%, verifique se é possível afirmar que as duas marcas diferem quanto a durabilidade média. E se a significância fosse 1% qual seria a conclusão?

Solução: Dados:

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_0: \mu_1 \neq \mu_2$

$n = 8; m = 12$

$s_A = 3500; \; s_B = 4200$

$\overline{X} = 37500; \; \overline{Y} = 41400$

$\alpha = 5\% \; ; \; \sigma_A^2 = \sigma_B^2$

Trata-se de um teste "t" bilateral com σ_1 e σ_2 supostamente iguais.

A variável teste é:

$$t_{n+m-2} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \mu_{\overline{X}-\overline{Y}}}{\hat{\sigma}_{\overline{X}-\overline{Y}}} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{s.\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

Onde:

$$s = \sqrt{\frac{(n-1)S_A^2 + (m-1)S_B^2}{n+m-2}}$$

$$s=\sqrt{\frac{7.3700^2+11.4200^2}{8+12-2}}=4012,9651$$

Então:

$$t_{18}=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-\Delta}{S.\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}}=\frac{37500-41300-0}{4012,9651\sqrt{\frac{1}{8}+\frac{1}{12}}}=$$

$$=-2,129$$

O valor crítico t_c é tal que: $\mathbf{P}(|T_{18}| > t_c) =$ $= \alpha = 0{,}05 = 5\%$. *Então* $t_c = \mathbf{F}^{-1}(0{,}9750) =$ $2{,}101$. *Assim RC = $(-\infty; -2{,}101] \cup [2{,}101; +\infty)$*

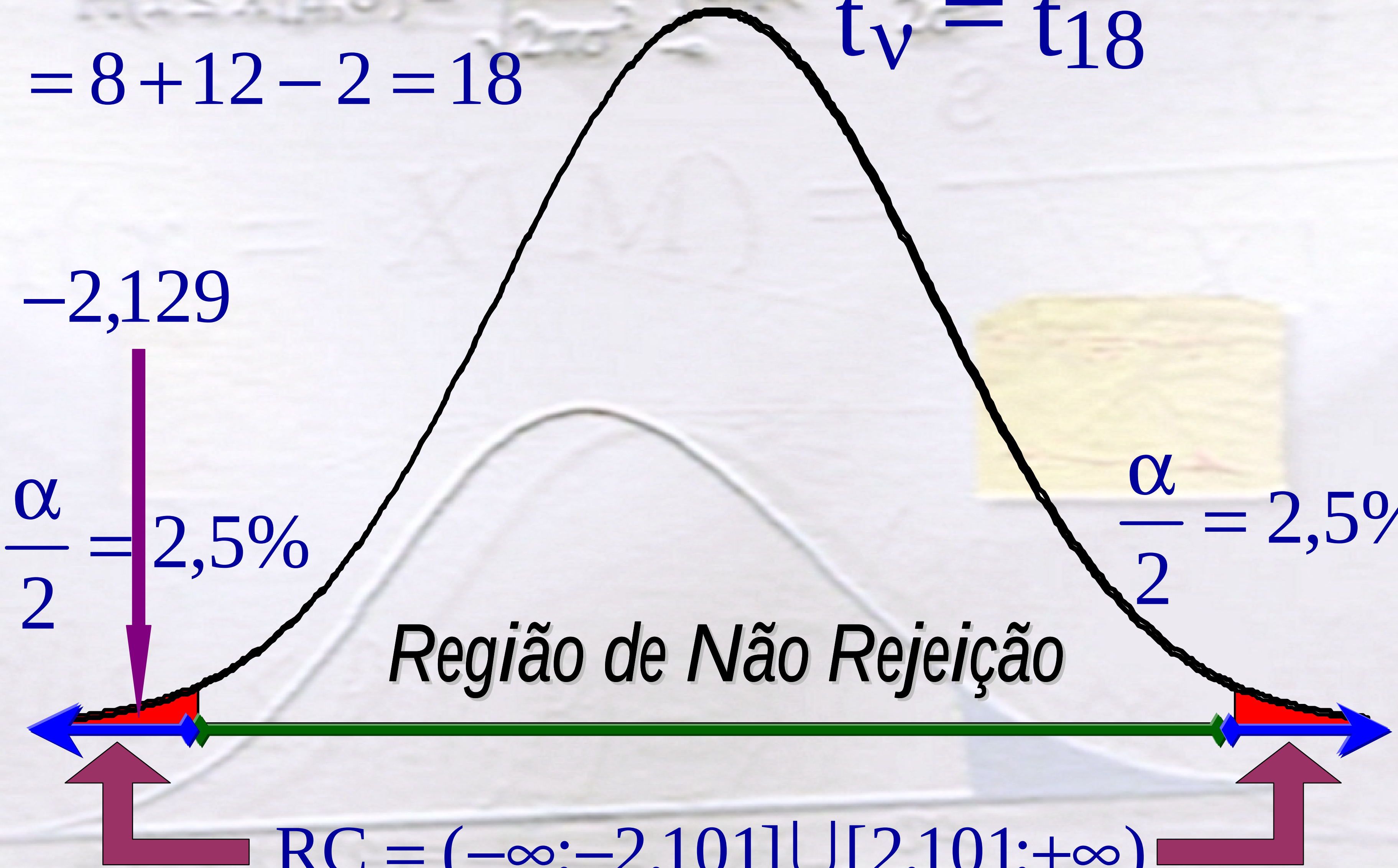
DECISÃO e CONCLUSÃO:

*Como **t** = -2,129 ∈ RC ou -2,129 < -2,101,* ***Rejeito** H_0, isto é, a 5% de significância posso afirmar que a vida média das duas marcas difere.*

$$\nu = n + m - 2 =$$

$$= 8 + 12 - 2 = 18$$

$$t_\nu = t_{18}$$



$$RC = (-\infty; -2{,}101] \cup [2{,}101; +\infty)$$

O valor crítico t_c é tal que: $P(|T_{18}| > t_c) =$ $= \alpha = 0{,}01 = 1\%$. *Então* $t_c = T^{-1}(0{,}9950) =$ $= 2{,}878$.

Assim RC = (- ∞; -2,878]∪[2,878; + ∞)

DECISÃO e CONCLUSÃO:

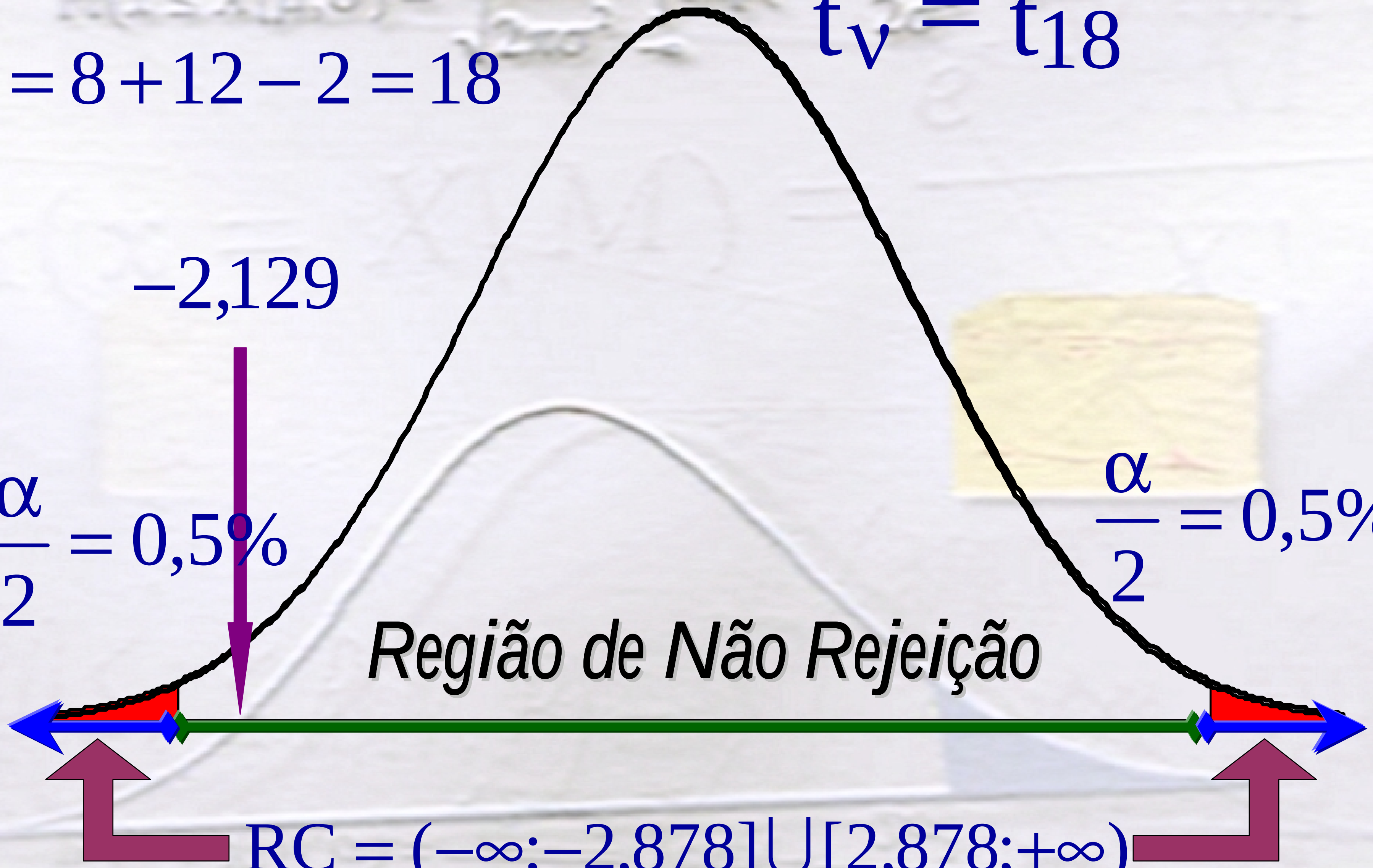
Como $t = -2{,}129 \notin RC$ *ou* $-2{,}129 > -2{,}878$,

Aceito H_0, *isto é, a 1% de significância **não** posso afirmar que a vida média das duas marcas difere.*

$$\nu = n + m - 2 =$$

$$= 8 + 12 - 2 = 18$$

$$t_\nu = t_{18}$$



$$\frac{\alpha}{2} = 0,5\%$$

$$\frac{\alpha}{2} = 0,5\%$$

$$RC = (-\infty; -2,878] \cup [2,878; +\infty)$$

(b) variâncias desconhecidas

(ii) supostamente desiguais

Neste caso a variável teste é:

$$t_{\upsilon} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$

Onde ν é dado por:

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_X^2}{n}\right)^2}{n-1} + \frac{\left(\frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{m-1}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$t_v > t_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$t_v < t_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|t_v| > t_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde t_c é tal que:

$$P(t_v < t_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(t_v < t_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(t_v < t_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(t_v > t_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal).

Exemplo

Uma empresa fabrica transistores do tipo A e do tipo B. A marca A, mais cara, é supostamente pelo menos 60 horas mais durável do que a marca B. Um usuário quer saber se vale a pena pagar mais pela marca A e resolve testar se, de fato, ela é mais durável.

Testa 20 itens de A encontrando uma vida média de 1000 horas com desvio de 60 horas, enquanto que 20 itens da marca B apresentam uma vida média de 910 horas com desvio de 40 horas. Qual a conclusão a 5% de significância?

Solução:

Hipóteses:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 60$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 > 60$

Dados:

$n = m = 20$

$s_A = 60; \; s_B = 40$

$\overline{X} = 1000; \; \overline{Y} = 910$

$\alpha = 5\% \; ; \; \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Trata-se de um teste "t" unilateral à direita com σ_1 e σ_2 supostamente desiguais.

A variável teste é:

$$t_{\upsilon} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_{\bar{X}-\bar{Y}}}{\hat{\sigma}_{\bar{X}-\bar{Y}}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}}$$

Onde:

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{\left(S_X^2/n\right)^2}{n-1} + \frac{\left(S_Y^2/m\right)^2}{m-1}}$$

$$t_{\upsilon} = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n} + \frac{s_Y^2}{m}}} = \frac{1000 - 910 - 60}{\sqrt{\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}}} = 1{,}861$$

E:

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{60^2}{20}\right)^2}{20 - 1} + \frac{\left(\frac{40^2}{20}\right)^2}{20 - 1}} \cong 33$$

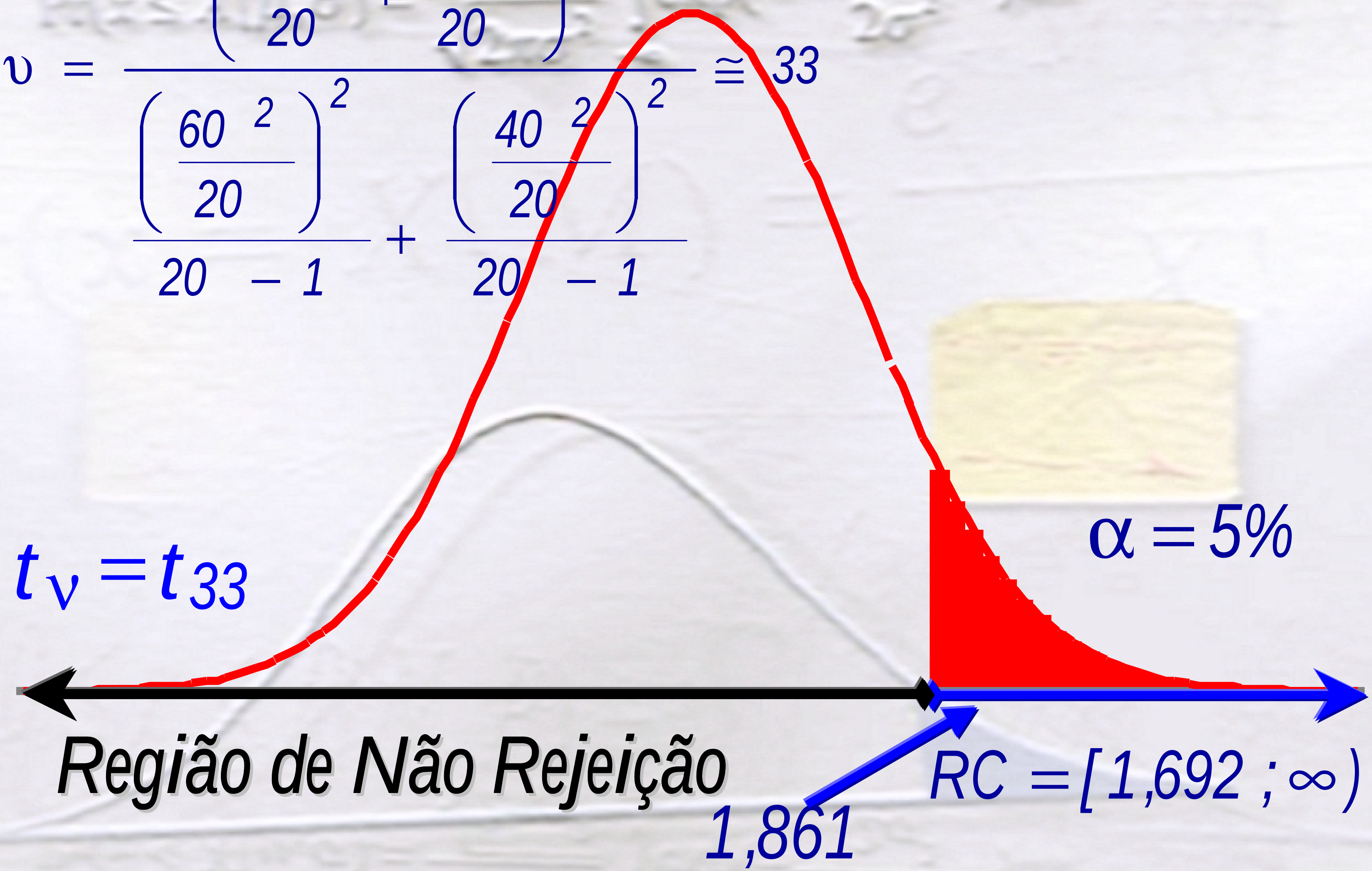
O valor crítico t_c é tal que: $P(T_{33} > t_c) = \alpha = 0{,}05 = 5\%$. *Então* $t_c = T^{-1}(0{,}95) = 1{,}692$.

Assim RC = [1,692; + ∞)

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = 1{,}861 \in RC$ *ou* $1{,}861 > 1{,}692$, ***Rejeito** H_0, isto é, a 5% de significância posso afirmar que a vida média da marca é pelo menos 60 horas maior que a marca B.*

$$\upsilon = \frac{\left(\frac{60^2}{20} + \frac{40^2}{20}\right)^2}{\frac{\left(\frac{60^2}{20}\right)^2}{20-1} + \frac{\left(\frac{40^2}{20}\right)^2}{20-1}} \cong 33$$



Teste para a diferença entre duas proporções

$$H_0: \pi_1 - \pi_2 = \Delta$$

$$H_1: \pi_1 - \pi_2 > \Delta$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\pi_1 - \pi_2 < \Delta$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\pi_1 - \pi_2 \neq \Delta$$

(teste bilateral/bicaudal) .

Neste caso a variável teste é:

$$Z = \frac{P_1 - P_2 - \mu_{P_1 - P_2}}{\hat{\sigma}_{P_1 - P_2}} =$$

$$= \frac{P_1 - P_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{P_1(1 - P_1)}{n} + \frac{P_2(1 - P_2)}{m}}}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$Z > z_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$Z < z_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|Z| > z_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde z_c é tal que:

$$\Phi(z_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$\Phi(z_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$\Phi(z_c) = \alpha/2 \text{ ou } \Phi(z_c) = 1 - \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

A reitoria de uma grande universidade entrevistou 600 alunos, 350 mulheres e 250 homens, para colher a opinião sobre a troca do sistema de avaliação da universidade. Da amostra 140 mulheres e 115 homens estavam a favor. Teste a 5% se existe diferença significativa de opinião entre homens e mulheres.

Solução:

Dados:

$n = 350; m = 250$

$p_1 = 140/350 = 40\%$

$p_2 = 115/250 = 46\%$

$\alpha = 5\%$;

Hipóteses:

$H_0: \pi_1 = \pi_2$

$H_0: \pi_1 \neq \pi_2$

Trata-se de um teste bilateral para a proporção.

A variável teste é:

$$Z = \frac{P_1 - P_2 - \Delta}{\sqrt{\frac{P_1(1-P_1)}{n} + \frac{P_2(1-P_2)}{m}}} =$$

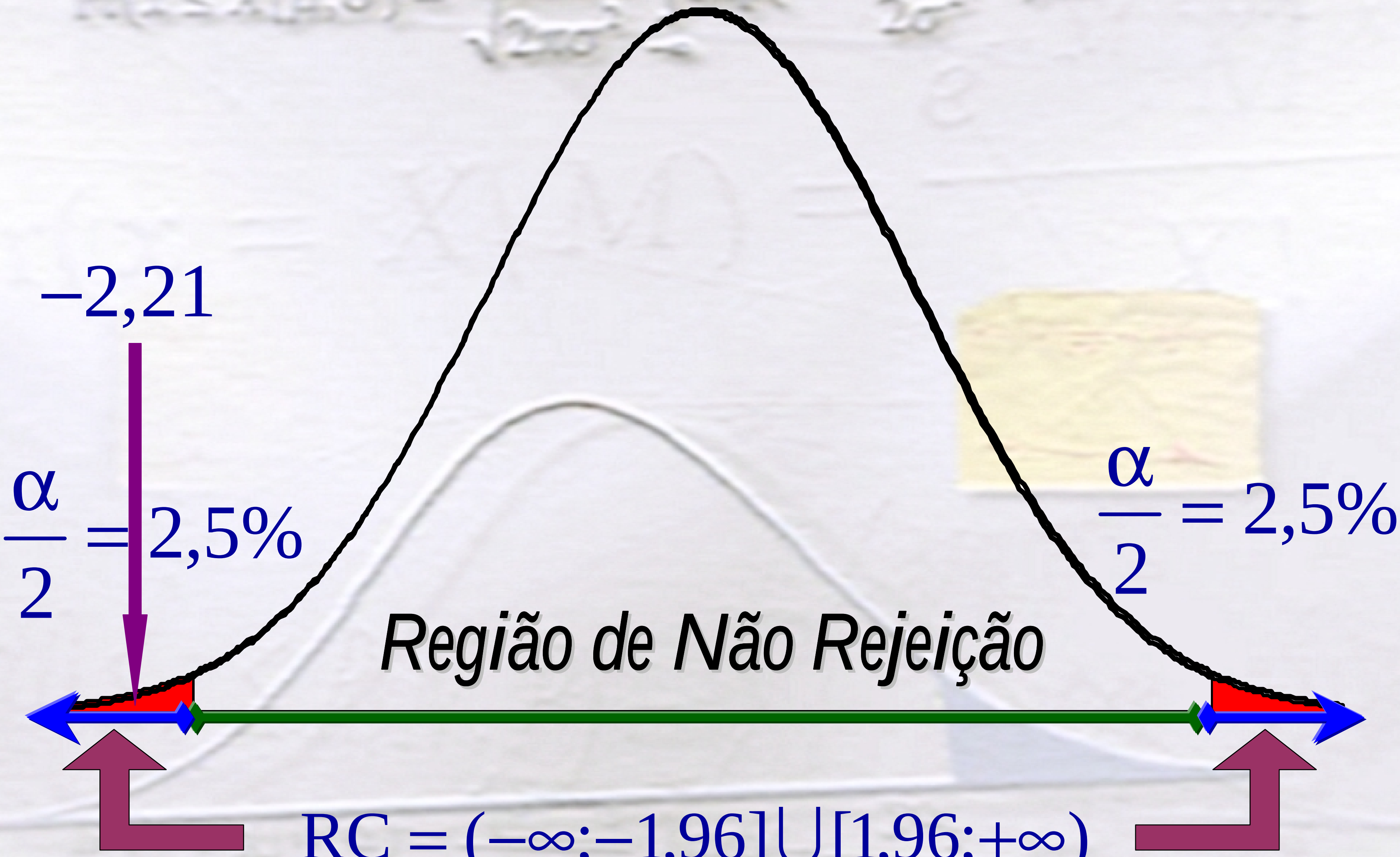
$$= \frac{0{,}40 - 0{,}46 - 0}{\sqrt{\frac{0{,}40(1-0{,}40)}{350} + \frac{0{,}46(1-0{,}46)}{250}}} =$$

$$= \frac{-0{,}06}{0{,}02718} = -2{,}21$$

O valor crítico z_c é tal que: $\mathbf{P}(|Z| > z_c) =$ $= \alpha = 0{,}05 = 5\%$. *Então* $z_c = \Phi^{-1}(0{,}05) =$ $-1{,}96$. *Assim RC =* $(-\infty; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty)$

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como z = -2,21 $\in$ *RC ou -2,21 < -1,96,* ***Rejeito*** H_0*, isto é, a 5% de significância posso afirmar que as opiniões diferem entre homens e mulheres.*



$$RC = (-\infty; -1{,}96] \cup [1{,}96; +\infty)$$

Teste para a igualdade entre duas variâncias

$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ *(teste unilateral/unicaudal à direita)*

$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ *(teste unilateral/unicaudal à esquerda)*

$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ *(teste bilateral/bicaudal)* .

Neste caso a variável teste é:

$$F_{n-1,\, m-1} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$$F_{n-1,m-1} > f_c$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$F_{n-1,m-1} < f_c$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$F_{n-1,m-1} > f_c \text{ ou } F_{n-1,m-1} < f_c$$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde $F_{n-1;m-1}$ é tal que:

$$P(F_{n-1,\,m-1} > F_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(F_{n-1,\,m-1} < F_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$P(F_{n-1,\,m-1} > F_c) = \alpha/2$ ou $P(F_{n-1,\,m-1} < F_c) = \alpha/2$

(teste bilateral/bicaudal) .

Exemplo

O desvio padrão de uma dimensão particular de um componente de metal é satisfatório para a montagem do componente. Um novo fornecedor está sendo considerado e ele será preferível se o desvio padrão é menor do que o do atual fornecedor. Uma amostra de 100 itens de cada fornecedor é obtido.

Fornecedor atual: $s_1^2 = 0{,}0058$

Novo fornecedor: $s_2^2 = 0{,}0041$

A empresa deve trocar de fornecedor se for considerado uma significância de 5%?

Solução:

Dados:

$n = m = 100$

$s_1^2 = 0{,}0058$

$s_2^2 = 0{,}0041$

$\alpha = 5\%$;

Hipóteses:

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_0: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Trata-se de um teste unilateral à direita para a igualdade de variâncias.

A variável teste é:

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

Que apresenta uma distribuição F com "n – 1" g.l. no numerador e "m – 1" g.l. no denominador.

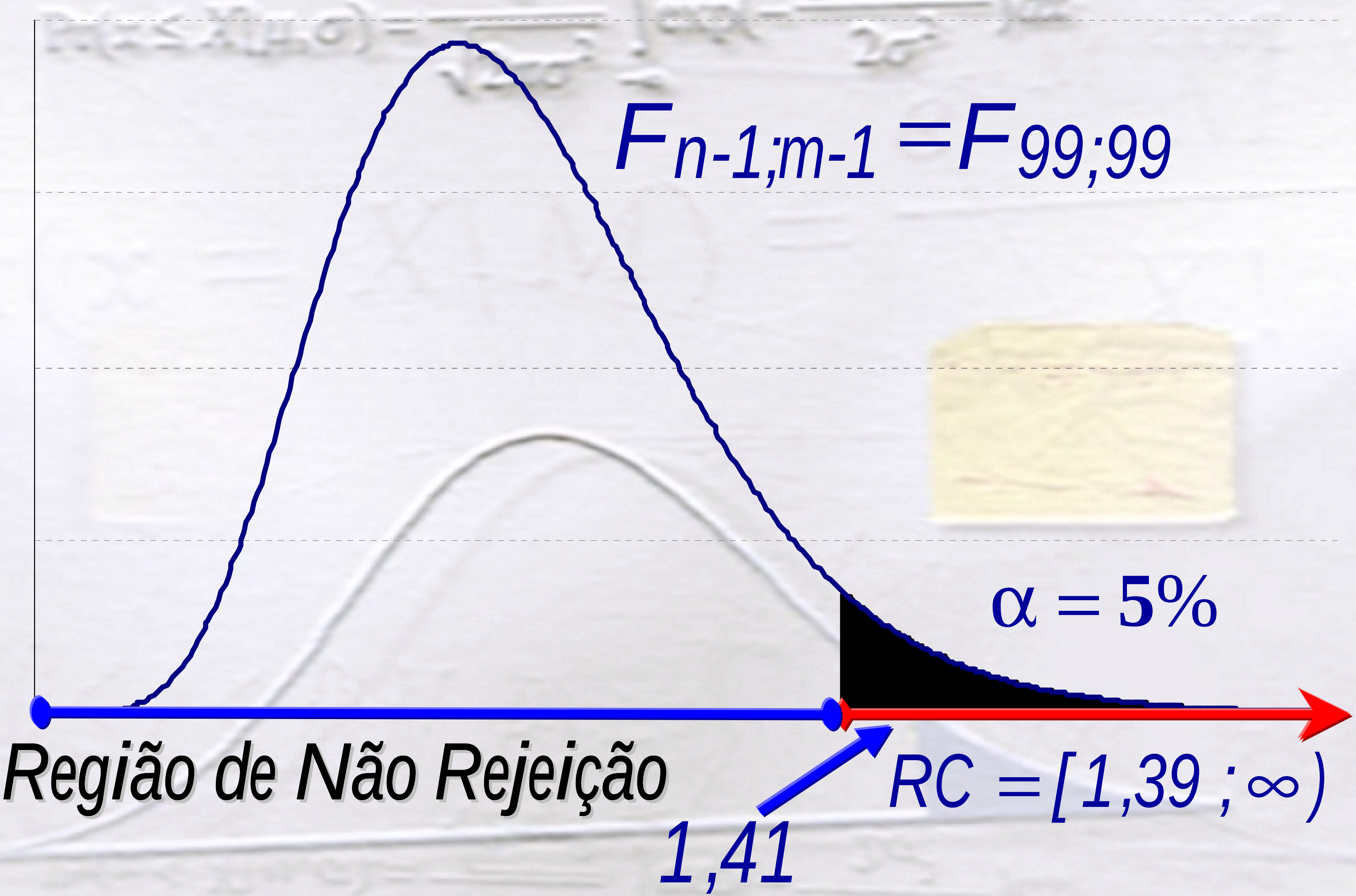
Então:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{0,0058}{0,0041} = 1,41$$

O valor crítico f_c *é tal que:* $\mathbf{P}(|F| > f_c) =$ $= \alpha = 0{,}05 = 5\%$. *Então* $f_c = F^{-1}(0{,}05) =$ *1,39. Assim RC = [1,39; + ∞)*

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como f = 1,41 $\in$ *RC ou 1,41 < 1,39,* ***Rejeito*** H_0*, isto é, a 5% de significância posso afirmar que a variância do fornecedor atual é maior do que a do novo fornecedor.*



$F_{n-1;m-1} = F_{99;99}$
$\alpha = 5\%$
Região de Não Rejeição
$RC = [1,39\ ; \infty)$
1,41

(6)
Dependentes (Emparelhadas)

Teste para a média

$H_0: \mu_D = \Delta$

$H_1: \mu_D > \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$\mu_D < \Delta$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$\mu_D \neq \Delta$

(teste bilateral/bicaudal) .

Neste caso a variável teste é:

$$t_{\upsilon} = \frac{\overline{D} - \mu_D}{\hat{\sigma}_{\overline{D}}} = \frac{\overline{D} - \Delta}{S_D / \sqrt{n}}$$

Onde :

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum(d_i - \bar{d})^2}{n-1}}$$

e v é dado por: $n - 1 = m - 1$

Rejeita-se a Hipótese nula se:

$t_{n-1} > t_c$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$t_{n-1} < t_c$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$|t_{n-1}| > t_c$

(teste bilateral/bicaudal) .

Onde t_c é tal que:

$$P(t_{n-1} < t_c) = 1 - \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à direita)

$$P(t_{n-1} < t_c) = \alpha$$

(teste unilateral/unicaudal à esquerda)

$$P(t_{n-1} < t_c) = \alpha/2 \text{ ou } P(t_{n-1} > t_c) = \alpha/2$$

(teste bilateral/bicaudal)

Exemplo

Um laboratório possui dois equipamentos de precisão. O diretor suspeita que existe uma pequena diferença de calibração entre os dois (ele não sabe em qual deles) de modo que um tende a dar leituras um pouco maiores do que o outro.

Ele propõe testar os dois aparelhos através da leitura de 10 medidas (tabela na próxima lâmina) em cada um dos aparelhos. Faça o teste adequado a uma significância de 5%.

Aparelho A	Aparelho B
12,2	12,5
12,1	12,2
10,55	10,57
13,33	13,32
11,42	11,47
10,30	10,30
12,32	12,36
13,27	13,29
11,93	11,91
12,50	12,61

Solução:

Hipóteses:

H_0: $\mu_D = 0$

H_1: $\mu_D \neq 0$

Dados:

$n = m = 10$

$\alpha = 5\%$

Uma vez que as amostras não são independentes, trata-se do teste "*t*" para amostras emparelhadas.

A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D} - \mu_D}{\hat{\sigma}_{\bar{D}}} = \frac{\bar{D} - \Delta}{s_D / \sqrt{n}}$$

Onde:

$$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}}$$

A	B	d_i	d_i^2
12,2	12,5	0,30	0,0900
12,1	12,2	0,10	0,0100
10,55	10,57	0,02	0,0004
13,33	13,31	-0,02	0,0004
11,42	11,44	0,02	0,0004
10,30	10,30	0,00	0,0000
12,32	12,36	0,04	0,0016
13,27	13,29	0,02	0,0004
11,93	11,90	-0,03	0,0009
12,50	12,61	0,11	0,0121
--	--	0,56	0,1162

Tem-se: $$\bar{d} = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{0,56}{10} = 0,0560$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum d_i^2 - n\bar{d}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{0,1162 - 10.0,0560^2}{10-1}} = 0,0971$$

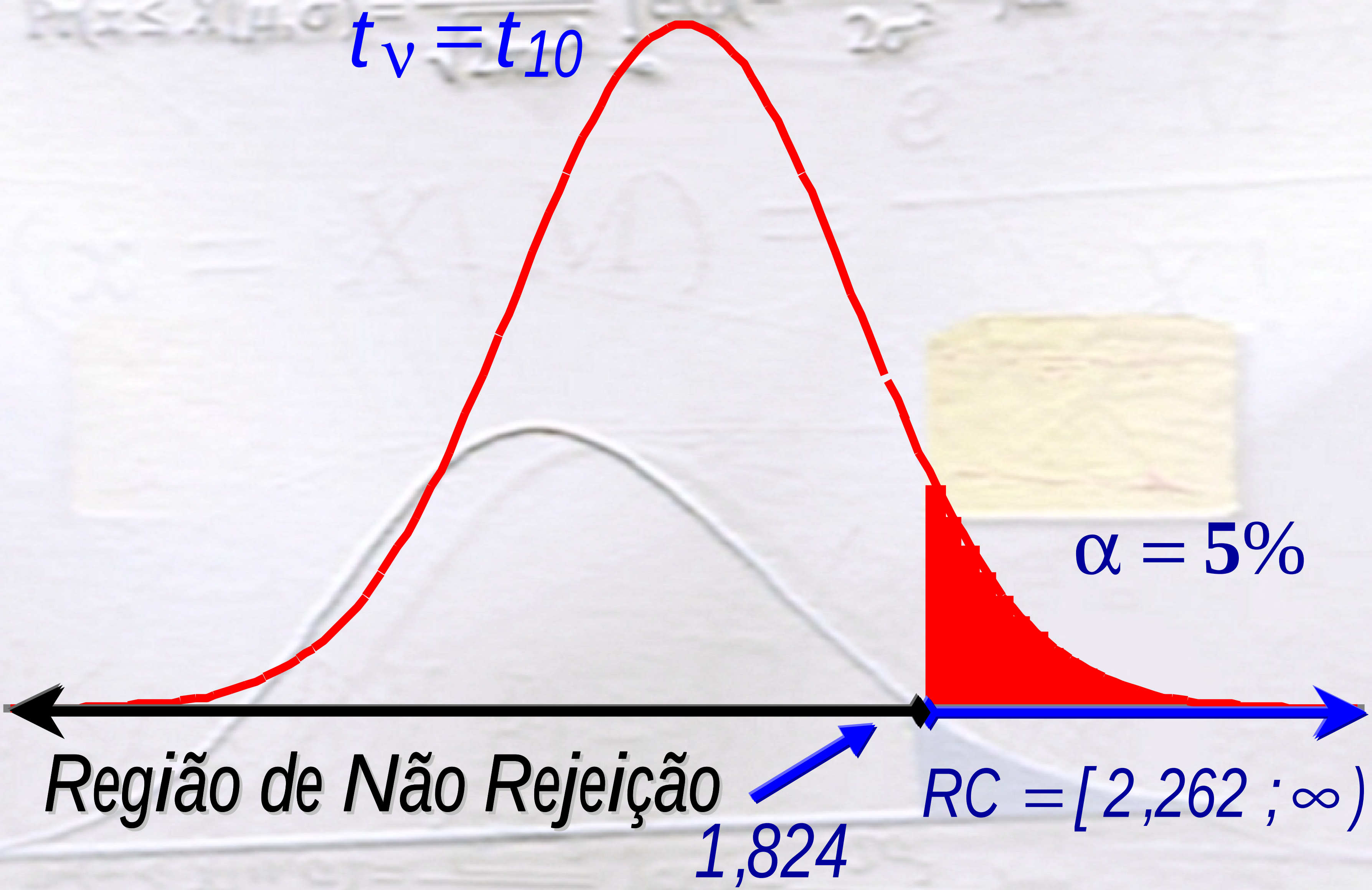
A variável teste é:

$$t_{n-1} = \frac{\bar{D} - \Delta}{s_D / \sqrt{n}} = \frac{0,056 - 0}{0,0971 / \sqrt{10}} = \frac{0,056.\sqrt{10}}{0,0971} = 1,824$$

O valor crítico z_c é tal que: $P(|T| > t_c) = \alpha$ $= 0{,}05 = 5\%$. *Então* $t_c = F^{-1}(0{,}05) =$ $= 2{,}262$. *Assim RC = [2,262; + ∞]*

DECISÃO e CONCLUSÃO:

Como $t = 1{,}824 \notin RC$ *ou* $1{,}824 < 2{,}262$, **Aceito H_0**, *isto é, a 5% de significância* **não** *se pode afirmar que as leituras são diferentes.*



$t_\nu = t_{10}$
$\alpha = 5\%$
Região de Não Rejeição
1,824
$RC = [2,262 ; \infty)$

Até a próxima ...