Sequências Numéricas

Definição: Seja $n_0 \in \mathbb{N}$.

Uma função f, cujo domínio é $\{n \in \mathbb{N}/\, n \geq n_0\}$ ou $\{n \in \mathbb{N}/\, n \leq n_0\}$ e que associa a cada elemento deste conjunto um número real, é chamada uma sequência numérica. Quando o domínio é $\{n \in \mathbb{N}/\, n \geq n_0\}$ dizemos que a sequência é infinita e, no outro caso, dizemos que é finita.

Para sequências, o número real associado por f ao natural n é chamado termo geral da sequência e notado por a_n, em lugar de $f(n)$, como é usual para funções. Usamos a notação $\{a_n\}_{n\geq n_0}$ ou $\{a_n\}_{n\leq n_0}$ para representarmos a sequência de termo geral a_n.

Exemplos:

1. $\{(-1)^n\}_{n\geq 0}$. Desta forma representamos a sequência cujos termos são $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1, \ldots$, o que também podemos representar por $\{1, -1, 1, -1, 1, -1, ...\}$.

2. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n\geq 1}$. Desta forma representamos a sequência cujos termos são $a_1 = 1$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1/3$,

   $a_4 = 1/4, \ldots$, o que também podemos representar por $\{1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ 1/5,\ 1/6, \ldots\}$.

3. $\{n\}_{n\geq 0}$. Desta forma representamos a sequência cujos termos são $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4, \ldots$, o que também podemos representar por $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6, \ldots\}$.

4. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{(n+5)^2}\right\}_{n\geq 0}$. Desta forma representamos a sequência cujos termos são $a_0 = 1/25$, $a_1 = -1/36$,

   $a_2 = 1/49$, $a_3 = -1/64, \ldots$, o que também podemos representar por

   $\{1/25,\ -1/36,\ 1/49,\ -1/64, 1/81,\ -1/100, \ldots\}$.

5. Neste exemplo, a sequência está definida por *recorrência* e é denominada sequência de Fibonacci

   $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, e, para $n \geq 2$, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$. Os primeiros termos desta sequência são $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 3, ...$

   O termo a_n desta sequência representa o número de casais de coelhos que haverá no n-ésimo mês, supondo que iniciamos a criação com um casal de coelhos, que cada casal de coelhos precisa dois meses para amadurecer e que, passado este tempo, gera um novo casal a cada mês. Supõe-se também que não há mortes nem problemas de cruzamentos.

6. Fixados os números reais a e r, a sequência definida por $\{a + nr\}_{n\geq 0}$ é chamada *progressão aritmética* com primeiro termo "a" e razão "r". Neste caso, dois termos consecutivos da sequência diferem por r.

7. Fixados os números reais a e r, a sequência definida por $\{ar^n\}_{n\geq 0}$ é chamada *progressão geométrica* com primeiro termo "a" e razão "r". Neste caso, o quociente entre dois termos consecutivos da sequência é r.

8. $\{1+2+3+\cdots+n\}_{n\geq 1}$. Desta forma representamos a sequência cujos termos são $s_1 = 1$, $s_2 = 1+2$, $s_3 = 1+2+3$, $s_4 = 1+2+3+4$, ..., o que também podemos representar por $\{1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15, ...\}$. Neste caso, o termo geral da sequência representa a soma dos naturais de 1 até n. Podemos determinar uma fórmula para s_n. Para tanto, basta observarmos que reescrevendo s_n com as parcelas na ordem invertida e somando membro a membro, obtemos:

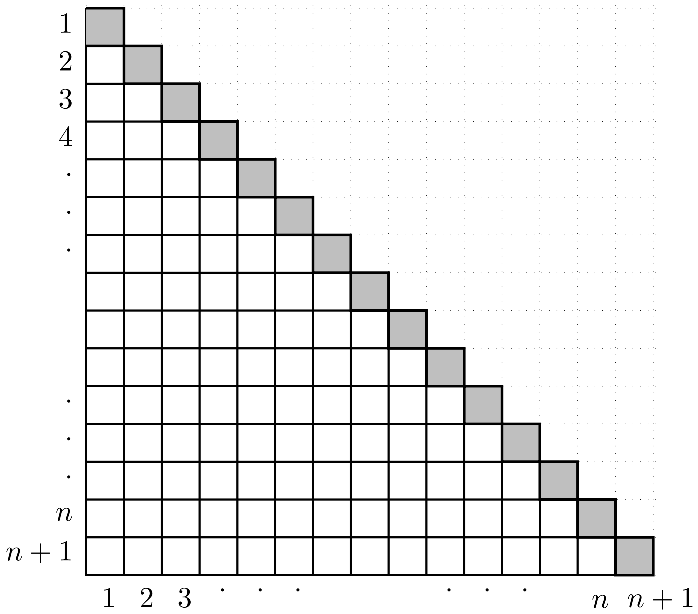
$$\begin{array}{rccccccccccc}
s_n = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\
+= & + & & + & & + & & \dots & & + & & + \\
s_n = & n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 2 & + & 1 \\
2s_n = & (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & + & (n+1)
\end{array}$$

Como no lado direito da última igualdade temos n parcelas, todas iguais a $n+1$, concluímos que

$$\text{soma dos números naturais de}\,1\,\text{até}\,n = s_n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Podemos também justificar a fórmula da soma obtida acima conforme descrito abaixo, usando fórmulas da geometria.

Para isto, construímos uma escada com “n + 1”degraus, empilhando quadradinhos iguais, cujos lados medem 1 unidade.



O número total de quadradinhos que formam a escada é

$$1+2+3+4+\cdots+n+(n+1)\,,$$

obtido somando-se o número de quadradinhos de cada coluna.
Vejamos como obter o valor de

$$s_n = 1+2+3+4+\cdots+n.$$

A escada está desenhada dentro do quadrado $(n+1)\times(n+1)$.

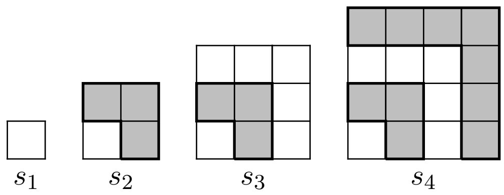
Observamos que a escada é formada por dois tipos de quadradinhos, os quadradinhos da diagonal, que estão pintados de cinza e os quadradinhos abaixo da diagonal, que são brancos. Quando retiramos os $n+1$ quadradinhos pintados de cinza do quadrado $(n+1)\times(n+1)$, sobram duas partes , aquela formada pelos quadradinhos brancos e a formada pelos quadradinhos hachurados, que têm a mesma área, pois cada uma destas partes contém um número de quadradinhos igual a $1+2+3+\cdots+n = s_n$.

Assim, temos que

área do quadrado de lado $(n+1) = 2\,(1+\,2+\,3+\,\cdots+\,n)$ + número de quadradinhos da diagonal, ou seja, $(n+1)^2 = 2\,(1+\,2+\,3+\,\cdots+\,n)\,+(n+1)\,.$

Daí concluímos que $s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)\,n}{2}$, conforme obtido anteriormente.

9. $\{1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)\}_{n \geq 1}$. Os primeiros termos desta sequência são $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 3$, $s_3 = 1 + 3 + 5$, $s_4 = 1 + 3 + 5 + 7, \ldots$, ou seja, s_n é a soma dos n primeiros números ímpares.



Na figura ao lado estão representados quadriláteros cuja área corresponde ao valor do termo s_n indicado abaixo da figura. Use este fato para obter uma fórmula para s_n.

Definição: Dada a sequência $\{a_n\}_{n \geq n_0}$, chamamos de *série numérica com termo geral* a_n, ou simplesmente série com termo geral a_n, a sequência $\{s_k\}_{k \geq n_0}$ cujos termos são $s_0 = a_{n_0}$, $s_1 = a_{n_0} + a_{n_0+1}$, $s_2 = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2}$, $\ldots$, $s_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots + a_{n_0+k}$ ou, expressando na forma de somatório, temos $s_k = \sum_{n=n_0}^{n=n_0+k} a_n$.

Cada um dos termos da sequência $\{s_k\}_{k \geq 1}$ é chamada de *soma parcial* da série com termo geral a_n.

Representamos a série numérica com termo geral a_n com a notação $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Exemplos:

1. Nos exemplos 6 e 7 anteriores, as sequências dadas são, de fato, séries numéricas, que podem ser representadas por $\sum_{n=1}^{\infty} n$, no exemplo 6 e por $\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$, no exemplo 7, e cujas sequências de somas parciais são $\left\{\sum_{n=1}^{n=k} n\right\}_{k \geq 1}$, no exemplo 6 e $\left\{\sum_{n=1}^{n=k} (2n-1)\right\}_{k \geq 1}$, no exemplo 7. Naqueles exemplos foram encontradas fórmulas para as sequências das somas parciais. Mostramos que $\sum_{n=1}^{n=k} n = \dfrac{k\,(k+1)}{2}$ e que $\sum_{n=1}^{n=k} (2n-1) = k^2$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. Os quatro primeiros termos da sequência das somas parciais desta série são $s_1 = 1$, $s_2 = 1 + 1 = 2$, $s_3 = 1 + 1 + 1 = 3$, $s_4 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$. É fácil ver que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $s_n = n$.

3. A série $\{\sum_{n=0} \infty\}\, ar^n$ é chamada série geométrica de razão r, pois as parcelas formam uma progressão geométrica de razão r. Para obtermos uma fórmula para a soma parcial s_n, iniciamos efetuando a subração $rs_n - s_n$.

$$
\begin{array}{rcccccccccccc}
rs_n = & ar & + & ar^2 & + & ar^3 & + & \ldots & + & ar^n & + & ar^{n+1} \\
- = & - & & - & & - & & \ldots & & - & & - \\
s_n = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \ldots & + & ar^{n-1} & + & ar^n \\
(r-1)\,s_n = & -a & & & & & & & & & + & ar^{n+1}
\end{array}
$$

Portanto, $s_n = \dfrac{a\left(r^{n+1} - 1\right)}{r - 1} = \dfrac{a\left(1 - r^{n+1}\right)}{1 - r}$

Observação:

Dada a sequência $\{a_n\}_{n\geq 1}$, formamos a série $\left\{\sum_{j=1}^{j=k}(a_{j+1}-a_j)\right\}$, chamada de série telescópica. As quatro primeiras somas parciais da série são $s_1 = a_2 - a_1$, $s_2 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) = a_3 - a_1$,
$s_3 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) = a_4 - a_1$, $s_4 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + (a_5 - a_4) = a_5 - a_1$.
É fácil ver que uma soma parcial de ordem n é dada por $s_n = a_{n+1} - a_1$.

Exemplos:

1. $\sum_{n=1}^{n=k} n^2$. As quatro primeiras somas parciais da série dada são $s_1 = 1^2 = 1$; $s_2 = 1^2 + 2^2 = 5$; $s_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$; $s_4 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30$.

   Vamos agora determinar uma fórmula para as somas parciais. Para isto usaremos a série telescópica e a fórmula já encontrada da soma dos n primeiros números naturais.

   Para $n \in \mathbb{N}$, temos:

   $$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \implies (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \implies$$

   $$\sum_{n=1}^{n=k}\left[(n+1)^3 - n^3\right] = 3\sum_{n=1}^{n=k} n^2 + 3\sum_{n=1}^{n=k} n + \sum_{n=1}^{n=k} 1 \implies$$

   $$(k+1)^3 - 1 = 3\sum_{n=1}^{n=k} n^2 + 3\frac{k(k+1)}{2} + k \implies$$

   $$(k+1)^3 - 1 - 3\frac{k(k+1)}{2} - k = 3\sum_{n=1}^{n=k} n^2 \implies$$

   $$\frac{2(k+1)^3 - 2 - 3k(k+1) - 2k}{6} = \sum_{n=1}^{n=k} n^2 \implies$$

   $$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} = \sum_{n=1}^{n=k} n^2.$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Usando que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, é fácil encontrar uma fórmula para a sequência das somas parciais, uma vez que a série dada é telescópica.