



Teoria dos Grafos

Edson Prestes



Teoria dos Grafos

Introdução

Em um grafo qualquer, o número de vértices com grau ímpar tem que ser par

Prova por indução no número de arestas

B. I. Suponha um grafo sem arestas, neste caso temos a soma dos graus de todos os vértices sendo par.

Como a quantidade de vértices com grau ímpar é igual a zero. Então temos uma quantidade par de vértices de grau ímpar.

H. I. Suponha um grafo com n arestas e um número par de vértices com grau ímpar



Teoria dos Grafos

Introdução

P. I. Seja G um grafo com $n+1$ arestas. Seja G' , o grafo resultante da retirada de uma aresta (v,w) . Pela H.I. G' tem um número par de vértices com grau ímpar

Vamos analisar o grafo G , baseado nas seguintes situações dos vértices v e w em G' :

- ✓ **v tem grau ímpar e w tem grau ímpar**
- ✓ **v tem grau ímpar e w tem grau par**
- ✓ **v tem grau par e w tem grau par**

A adição da aresta (v,w) em G' pode resultar nas seguintes situações:

- ***v tem grau ímpar e w tem grau ímpar em G' .***

A adição da aresta (v,w) faz com que v passe a ter grau par assim como w . Como a quantidade de vértices de grau ímpar é par e como transformamos 2 vértices de grau ímpar em vértices de grau par, G tem uma quantidade par de vértices de grau ímpar.



Teoria dos Grafos

Introdução

- *v tem grau ímpar e w tem grau par em G' .*

A adição da aresta (v,w) faz com que v passe a ter grau par e w passe a ter grau ímpar. Logo, G tem uma quantidade par de vértices com grau ímpar.

- *v tem grau par e w tem grau par em G' .*

A adição da aresta (v,w) faz com que tanto v quanto w passem a ter grau ímpar. Como tínhamos em G' uma quantidade par de vértices de grau ímpar, e como aumentou em 2 esta quantidade, temos que a quantidade de vértices de grau ímpar em G é par.

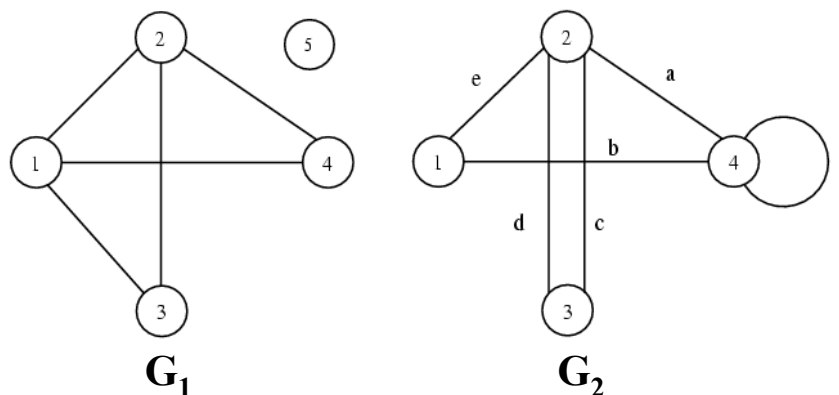




Teoria dos Grafos

Introdução

Um passeio entre os nós i e j é uma seqüência alternada de nós e arestas que começa no nó i e termina no nó j .



Um exemplo de passeio entre os nós 1 e 4 do grafo G_1 é

$(1, (1,3), 3, (2,3), 2, (1,2), 1, (1,4), 4)$.

Poderíamos pensar que apenas a ordem dos nós é importante. Entretanto, podemos ter passeios diferentes com a mesma seqüência de nós.

Por exemplo, no grafo G_2 temos os seguintes passeios entre os nós 3 e 4:

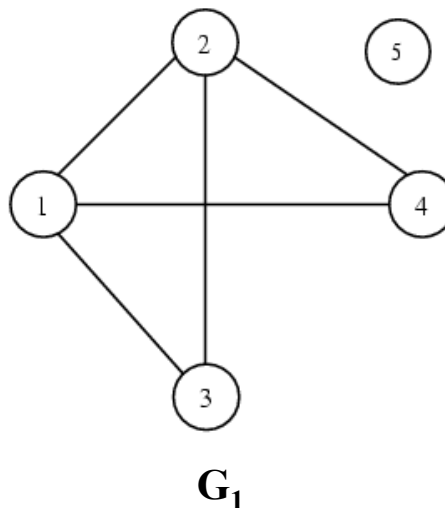
$(3, d, 2, a, 4)$, $(3, c, 2, a, 4)$



Teoria dos Grafos

Introdução

Um caminho é um passeio que não contém nós repetidos. Entre os nós 1 e 4 do grafo G_1 temos os seguintes caminhos (1,4),(1,2,4),(1,3,2,4).



O *comprimento* de um caminho entre os vértices u e v é a quantidade de arestas presentes no caminho.

Se existirem mais de um caminho de u a v , então o comprimento do caminho de u a v será igual ao menor comprimento dentre todos os caminhos de u a v .



Teoria dos Grafos

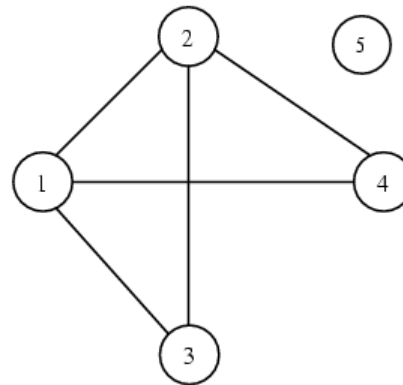
Introdução

Um *circuito* é um passeio fechado, ou seja, o nó de partida é igual ao nó de chegada.

Um *ciclo* é um caminho fechado, isto é, um passeio que contém exatamente dois nós iguais: o primeiro e o último.

Ciclos de comprimento 1 são laços(*loops*).

Uma característica interessante de um ciclo é que o número de arestas pertencentes a ele é igual a número de vértices.





Teoria dos Grafos

Introdução - Subgrafo

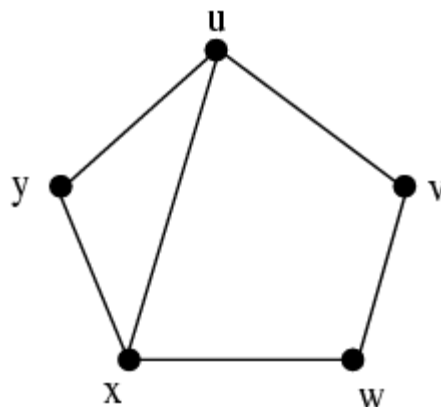
O grafo H é um *subgrafo* de G , denotado por

$$H \subseteq G$$

se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$

Se $H \neq G$, temos $H \subset G$, ou seja, H é um subgrafo próprio de G .

Um subgrafo gerador de G é um subgrafo H , com $V(H)=V(G)$.





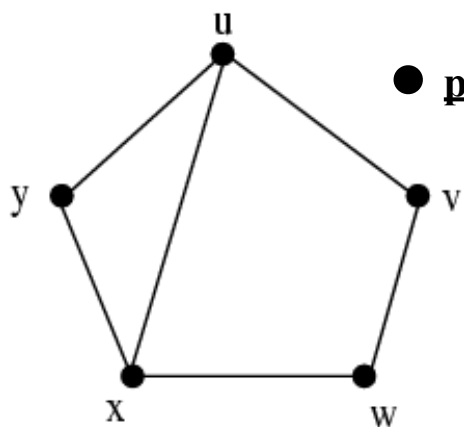
Teoria dos Grafos

Introdução – Grafo Conexo/Desconexo

Um grafo é conexo se existe *um caminho* entre qualquer par de nós, caso contrário ele é chamado desconexo.

Por exemplo, se não existir um caminho entre um nó p e qualquer outro nó do grafo, então este grafo é chamado desconexo.

Dois nós estão conectados se *existe um caminho* entre eles no grafo.



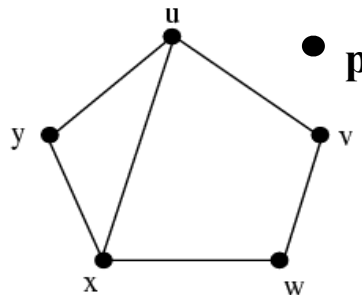


Teoria dos Grafos

Introdução – Componentes Conexos

Os componentes conexos de um grafo são os subgrafos conexos maximais deste grafo, ou seja, são os subgrafos conexos que *não estão estritamente* contidos em outros subgrafos conexos.

O subgrafo formado pelos vértices u e v juntamente com a aresta (u,v) corresponde a componente conexo ?



Não, pois ele está contido no subgrafo formado pelos nós u,v,w,x,y e arestas (u,v) , (v,w) , (w,x) , (x,y) , (y,u) e (u,x) .

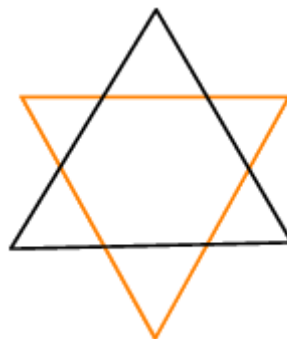
O grafo possui 2 componentes conexos. O primeiro é formado pelos nós u,v,w,x,y e arestas (u,v) , (v,w) , (w,x) , (x,y) , (y,u) e (u,x) e o segundo unicamente formado pelo nó p .



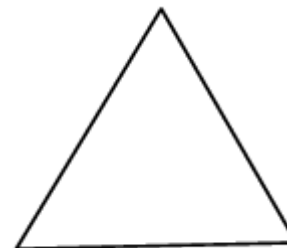
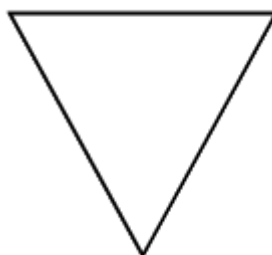
Teoria dos Grafos

Introdução – Componentes Conexos

Quantos componentes conexos o grafo abaixo possui ?



Dois!



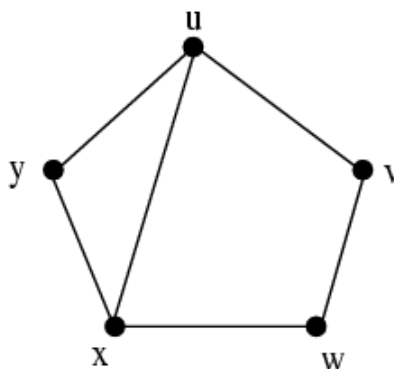


Teoria dos Grafos

Introdução – Conjunto Independente

Um conjunto independente (maximal) em um grafo é um conjunto de vértices não adjacentes entre si que *não está estritamente* contido em outros conjuntos independentes.

O Grafo abaixo mostra um conjunto independente de tamanho 2 formado pelos vértices $\{u, w\}$



Existe mais algum ?



Teoria dos Grafos

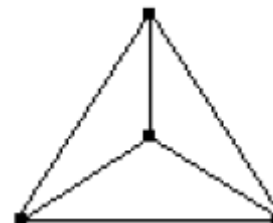
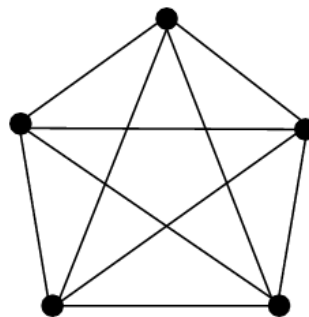
Introdução – Grafo totalmente conexo/desconexo

Grafo Totalmente desconexo

Um grafo totalmente desconexo tem todos os seus vértices com grau zero.

Grafo Completo ou Completamente Conexa

Um grafo completo de n vértices, denotado por K_n , possui a característica de que todo vértice do grafo é adjacente aos demais.



Quantas arestas um grafo completo (K_n) com n vértices possui ?

Ele possui exatamente $n(n-1)/2$ arestas.



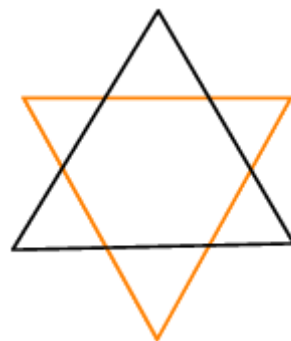
Teoria dos Grafos

Introdução – Cliques

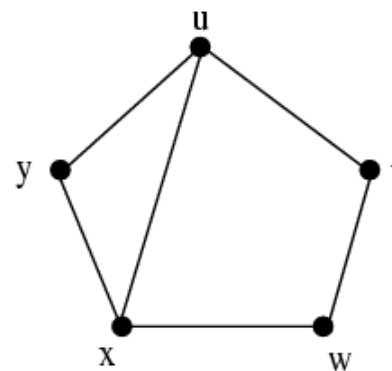
Um clique (clique maximal) de um grafo é um conjunto de vértices adjacentes entre si que *não está estritamente* contido em outros cliques.

Um clique de G é um subgrafo completo de G .

Quantos cliques os grafos abaixo possuem ?



2 cliques



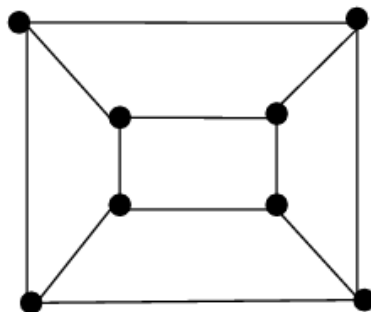
4 cliques



Teoria dos Grafos

Introdução – Grafo Regular

Um grafo G é regular se todos os vértices de G possuírem o mesmo grau.



Observe que todo grafo completo é regular de grau $n-1$, onde n corresponde ao número de vértices

Quantas arestas são necessárias para desenhar um grafo regular de 9 vértices, onde o grau de cada vértice é igual a 3 ?

Não é possível !

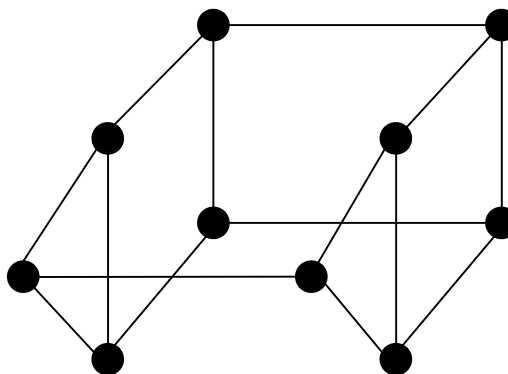
E um grafo com 10 vértices ? Desenhe!



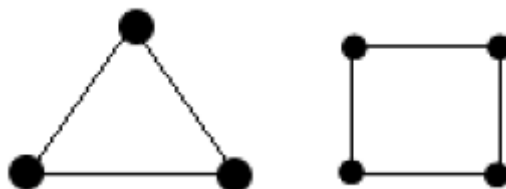
Teoria dos Grafos

Introdução – Grafo Regular

Um grafo regular com 10 vértices, onde cada vértice tem grau 3, também é chamado de 3-regular.



Outro exemplo : grafo 2 - regular

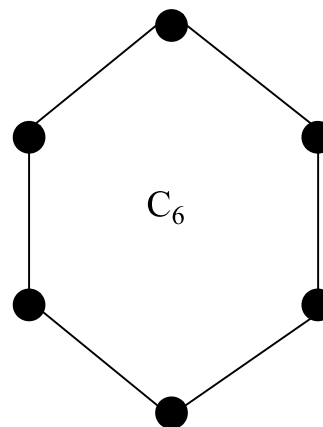
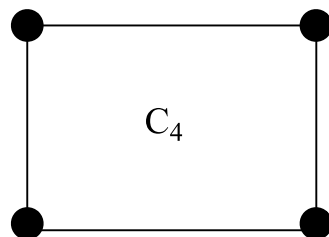




Teoria dos Grafos

Introdução – Grafo Circuito

Um grafo circuito de n vértices, C_n , é um grafo simples 2-regular



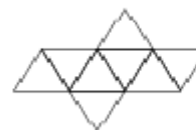
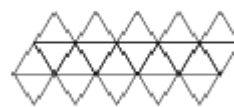
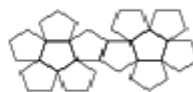
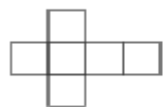
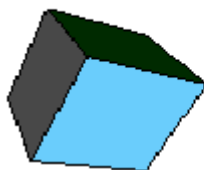


Teoria dos Grafos

Introdução – Grafo Platônico

Um grafo G é platônico se forma com seus vértices e arestas a estrutura de um dos cinco sólidos platônicos (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro).

Um sólido é platônico se é convexo e se suas faces correspondem a polígonos regulares convexos.

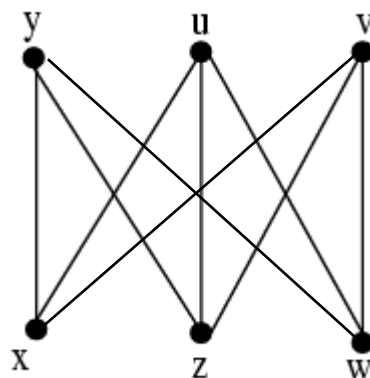




Teoria dos Grafos

Introdução – Grafo Bipartido

Um grafo G é bipartido se seus vértices podem ser separados em dois conjuntos disjuntos (independentes) de tal forma que toda a aresta do grafo liga sempre dois vértices, um de cada conjunto.



Neste caso, o conjunto de vértices pode ser dividido em dois conjuntos

$$V_1 = \{y, u, v\} \text{ e } V_2 = \{x, z, w\}.$$

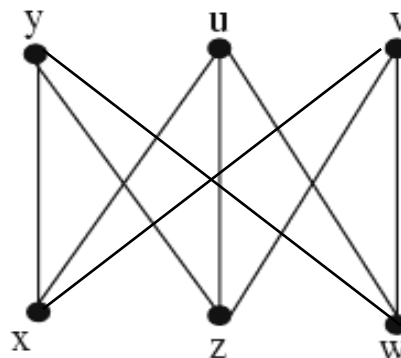


Teoria dos Grafos

Introdução – Grafo Bipartido

Considere um grafo bipartido constituído dos conjuntos V_j e V_k .

Se todo vértice $v \in V_j$ estiver ligado a todo vértice $u \in V_k$ então temos um grafo bipartido completo G , chamado de biclique e denotado por $K_{r,s}$, onde $r = |V_j|$ e $s = |V_k|$.



Quantos vértices e quantas arestas possui um biclique ?

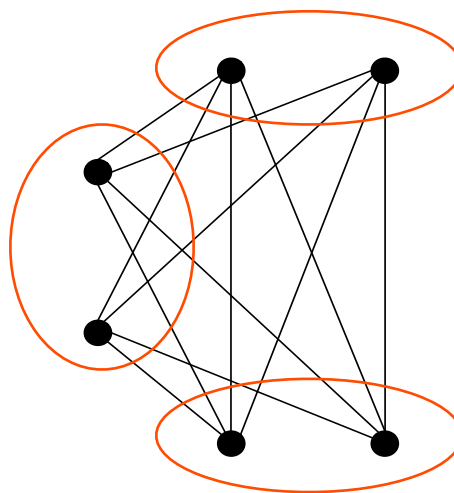
Ele possui $r+s$ vértices e $r.s$ arestas.



Teoria dos Grafos

Introdução – Grafos K-partido

Um grafo G é K-partido se ele possuir k conjuntos independentes. Logo, um grafo G bipartido é um grafo com 2 conjuntos independentes, portanto, ele é 2-partido.

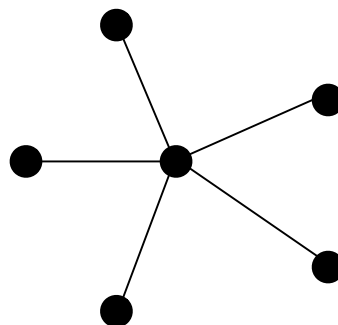




Teoria dos Grafos

Introdução – Grafos Estrela

Um grafo estrela é um grafo bipartido de n vértices que possui um conjunto independente com um único vértice e o outro com $n-1$ vértices



Quantos grafos estrelas podemos construir com um conjunto de n vértices.
Assumindo que todos os vértices têm um rótulo diferente ?

n grafos

E se considerarmos que todos os vértices são iguais, ou seja, possuem um mesmo rótulo ?

1 grafo.

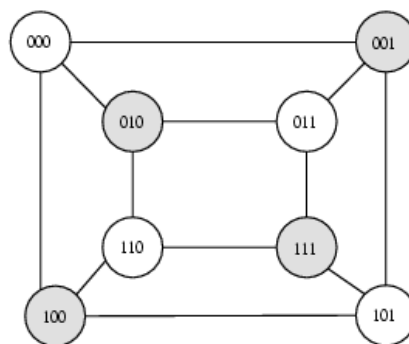


Teoria dos Grafos

Introdução – Grafos K-Cubos

Um k -cubo, Q_k , são grafos bipartidos cujos vértices são k -tuplas de 0's e 1's, onde os vértices adjacentes diferem em exatamente uma coordenada.

O grafo abaixo ilustra um 3-cubo.



Quantos vértices e quantas arestas possui um k -cubo ?

Ele possui 2^k vértices e $k 2^{k-1}$ arestas.