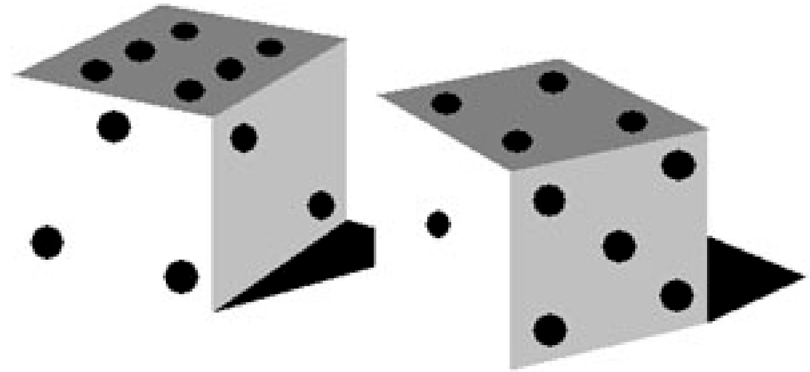
Probabilidade



Prof. Lorí Viali, Dr.

viali@mat.pucrs.br

http://www.pucrs.br/~viali/

Porto Alegre, agosto de 2002

1

Tipos de Modelos

Sistema Real → Modelo → Determinístico

Modelo → Probabilístico

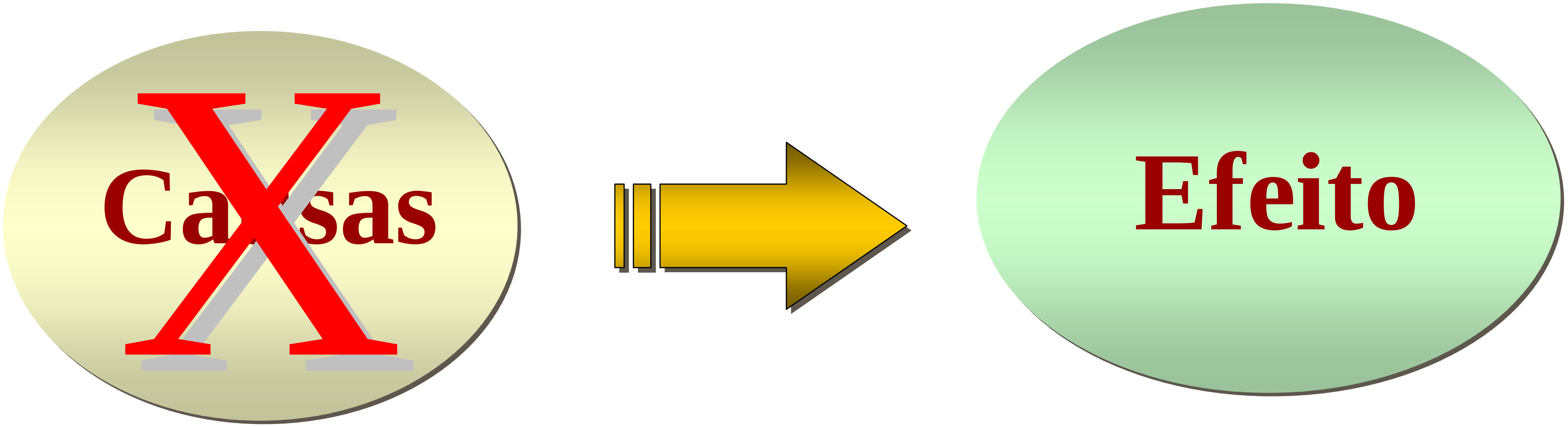
Modelo Determinnístico

Causas → **Efeito**

Exemplos

Gravitação	$F = GM_1M_2/r^2$
Aceleração clássica	$v = at$
Aceleração relativística	$v = \dfrac{at}{\sqrt{1 + \dfrac{a^2 t^2}{c^2}}}$

Modelo Probabilístico



Exemplos

Binomial

$$f(x)=\begin{cases}\binom{n}{x}.p^{x}.(1-p)^{n-x} & x\in\{0,1,\ldots,n\}\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

Poisson

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{x}.e^{-\lambda}}{x!} & x\in \mathrm{N}\\ 0 & c.c.\end{cases}$$

Normal

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{1}{2}.\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}},\quad x\in\Re$$

Experimento Aleatório

Experiência para o qual o modelo probabilístico é adequado.

Características

❶ Não é possível prever um resultado particular, mas pode-se enumerar todos os possíveis;

Características

❷ Podem ser repetidos inúmeras vezes sob as mesmas condições;

Características

❸ Quando repetidos um grande número de vezes apresentam regularidade em termos de freqüências.

Exemplos

E_1: Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.

Exemplos

E_2: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se o número de caras e coroas;

Exemplos

E_3: Joga-se uma moeda quatro vezes e observa-se a seqüência de caras e coroas ;

Exemplos

E_4: Uma lâmpada nova é ligada e conta-se o tempo gasto até queimar;

Exemplos

E_5: Joga-se uma moeda até que uma cara seja obtida. Conta-se o número de lançamentos necessários;

Exemplos

E_6: Uma carta de um baralho comum de 52 cartas é retirada e seu naipe registrado;

Exemplos

E_7: Jogam-se dois dados e observa-se o par de valores obtido;

Espaço Amostra(l)

É o conjunto de resultados de uma experiência aleatória.

Exemplos

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Exemplos

$$S_2 = \{1, 2, 3, 4\}$$

Exemplos

S_3 = { cccc, ccck, cckc, ckcc,

kccc, cckk, kkcc, ckkc,

kcck, ckck, kckc, kkkc,

kkck, kckk, ckkk, kkkk}

Exemplos

$$S_4 = \{t \in \mathbf{R} / t \geq 0\}$$

Exemplos

$$S_5 = \{1, 2, 3, ...\}$$

Exemplos

$$S_6 = \{\diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit, \heartsuit\}$$

Exemplos

$$S_7 = \{ (1, 1), (1, 2), (1,3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)$$

$$(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$$

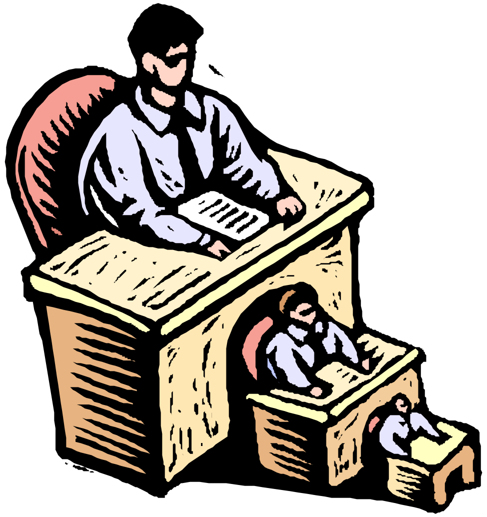
$$(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$$

$$(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)$$

$$(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)$$

$$(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \}$$

Eventos



Um evento é um subconjunto de um espaço amostra.

Exemplo

Seja $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ um espaço amostra.

Então são eventos:

$A = \{ 1, 3, 5\}$ $B = \{ 6 \}$

$C = \{ 4, 5, 6\}$ $D = \varnothing$ $E = S$

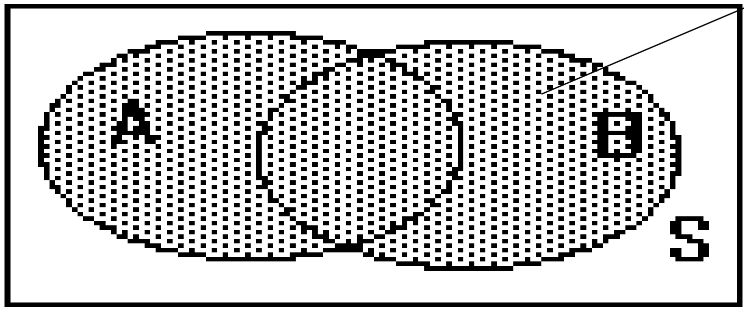
Ocorrência de um evento

Seja E um experimento com espaço amostra associado S. Diremos que o evento A ocorre se realizado E o resultado é um elemento de A.

Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A união B, A soma B ou A mais B, se e só se A ocorre ou B ocorre.

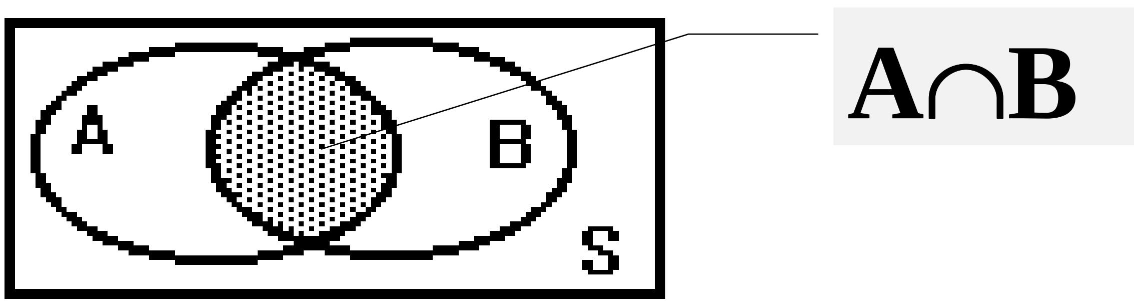


$A \cup B$

Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

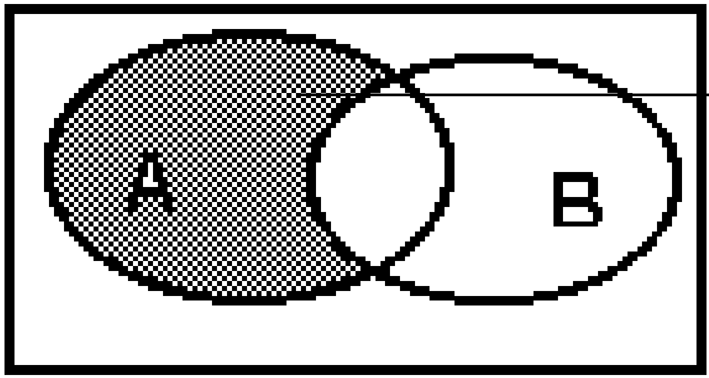
A produto B, A vezes B ou A interseção B, se e só se A ocorre e B ocorre.



Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

A menos B, A diferença B, se e só se A ocorre e B não ocorre.

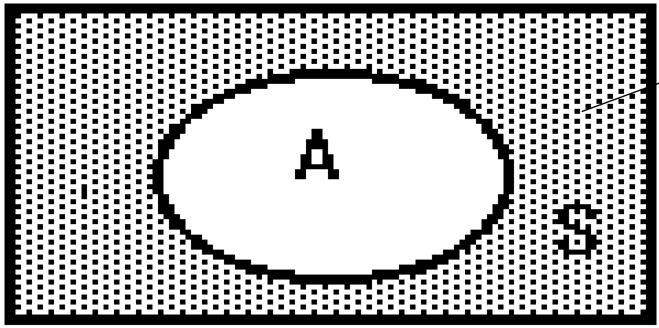


A - B

Combinação de eventos

Sejam A e B eventos de um espaço S. Diremos que ocorre o evento:

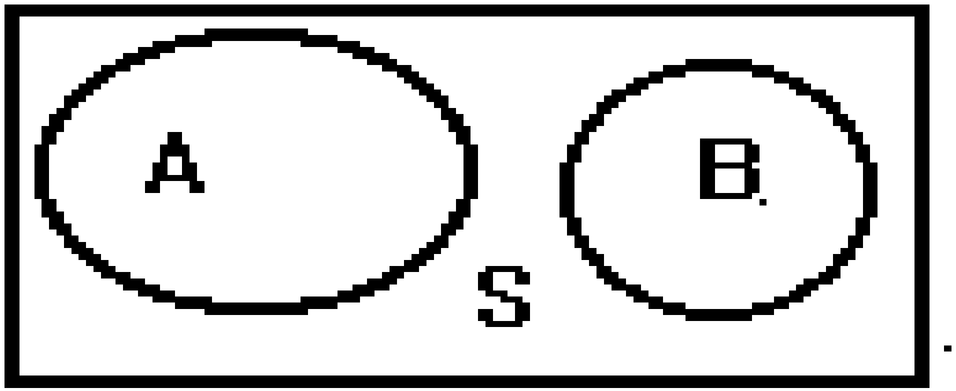
Complementar de A (não A) se e só se A não ocorre.



$$A' = A^C = \overline{A}$$

Eventos mutuamente excludentes

Dois eventos A e B são mutuamente excludentes se não puderem ocorrer juntos.



Propriedades das operações entre eventos

Leis Comutativas

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Leis Associativas

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Leis Distributivas

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Leis de De Morgan

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Outras Propriedades

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{B} = A - B$$

$$\overline{A} \cap B = B - A$$

Conceitos de Probilidade

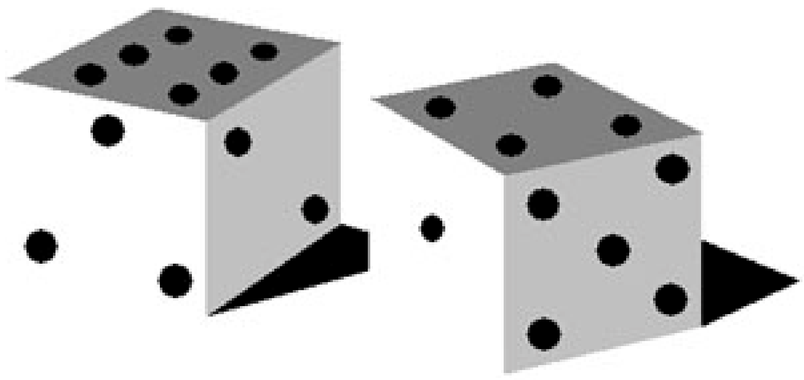
♣ **CLÁSSICO**

♥ **FREQÜENCIAL**

♠ **AXIOMÁTICO**

CLÁSSICO

$$P(A) = \frac{\text{(número de casos favoráveis)}}{\text{(número de casos possíveis)}}$$



Exemplo

Qual a probabilidade de ganhar no Toto-Bola?

Solução:

Casos favoráveis = 1

Casos possíveis:

$$\binom{25}{15} = 3268760$$

Solução:

$$P(\text{Toto\_Bola}) =$$

$$= \frac{\text{Número de favoráveis}}{\text{Número de possíveis}} =$$

$$= \frac{1}{\binom{25}{15}} = \frac{1}{3268760} = 0{,}000031\%$$

Freqüência Relativa

$$fr_A = \frac{\text{(número de vezes que A ocorre)}}{\text{(número de vezes que E é repetido)}}$$

Exemplo

Um dado é lançado 120 vezes e apresenta “FACE SEIS” 18 vezes.

Então, a freqüência relativa de “FACE SEIS” é:

Exemplo

$$fr_6 =$$

$$= \frac{\text{número de vezes que "f\_seis" ocorre}}{\text{número de vezes que o dado é jogado}}$$

$$= \frac{18}{120} = 0{,}15 = 15\%$$

Conceito freqüencial de probabilidade

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} fr_A$$

Conceito Axiomático

P(A) é um número real que deve satisfazer as seguintes propriedades:

(1) $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) $P(S) = 1$

(3) $P(AUB) = P(A) + P(B)$

se $A \cap B = \varnothing$

Conseqüências dos Axiomas

(1) $P(\varnothing) = 0$

(2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

(3) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Conseqüências dos Axiomas

(4) $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(5) $P(AUBUC) = P(A) + P(B) + P(C) -$

$- P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) +$

$+ P(A \cap B \cap C)$

Probabilidade Condicionada

Motivação

Considere uma urna com 50 fichas, onde 40 são pretas e 10 são brancas.

Suponha que desta urna são retiradas "duas" fichas, ao acaso e sem reposição:

Sejam os eventos:

A = { a primeira ficha é branca}

B = { a segunda ficha é branca}

Então:

P(A) = 10/50 = 0,20 = 20%

P(B) = ?/49

Neste caso, não se pode avaliar P(B), pois para isto é necessário saber se A ocorreu ou não, isto é, se saiu ficha branca na primeira retirada.

Se for informado que A ocorreu, então a probabilidade de B, será:

$$P(B/A) = 9/49 = 0{,}1837 = 18{,}37\%$$

Observe a notação

Esta representação é lida:

P de B dado A;

P de B dado que A ocorreu;

P de B condicionada a A.

Probabilidade Condicionada

Definição

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Teorema da multiplicação

$$P(A \cap B) = P(A).P(B/A) = P(A/B).P(B)$$

Independência

Dois eventos A e B são independentes se a probabilidade de um ocorrer não altera a probabilidade do outro ocorrer, isto é:

Independência

(1) $P(A/B) = P(A)$

(2) $P(B/A) = P(B)$

(3) $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

Partição de um espaço amostra

Diz-se que os conjuntos:

$A_1, A_2, ..., A_n$

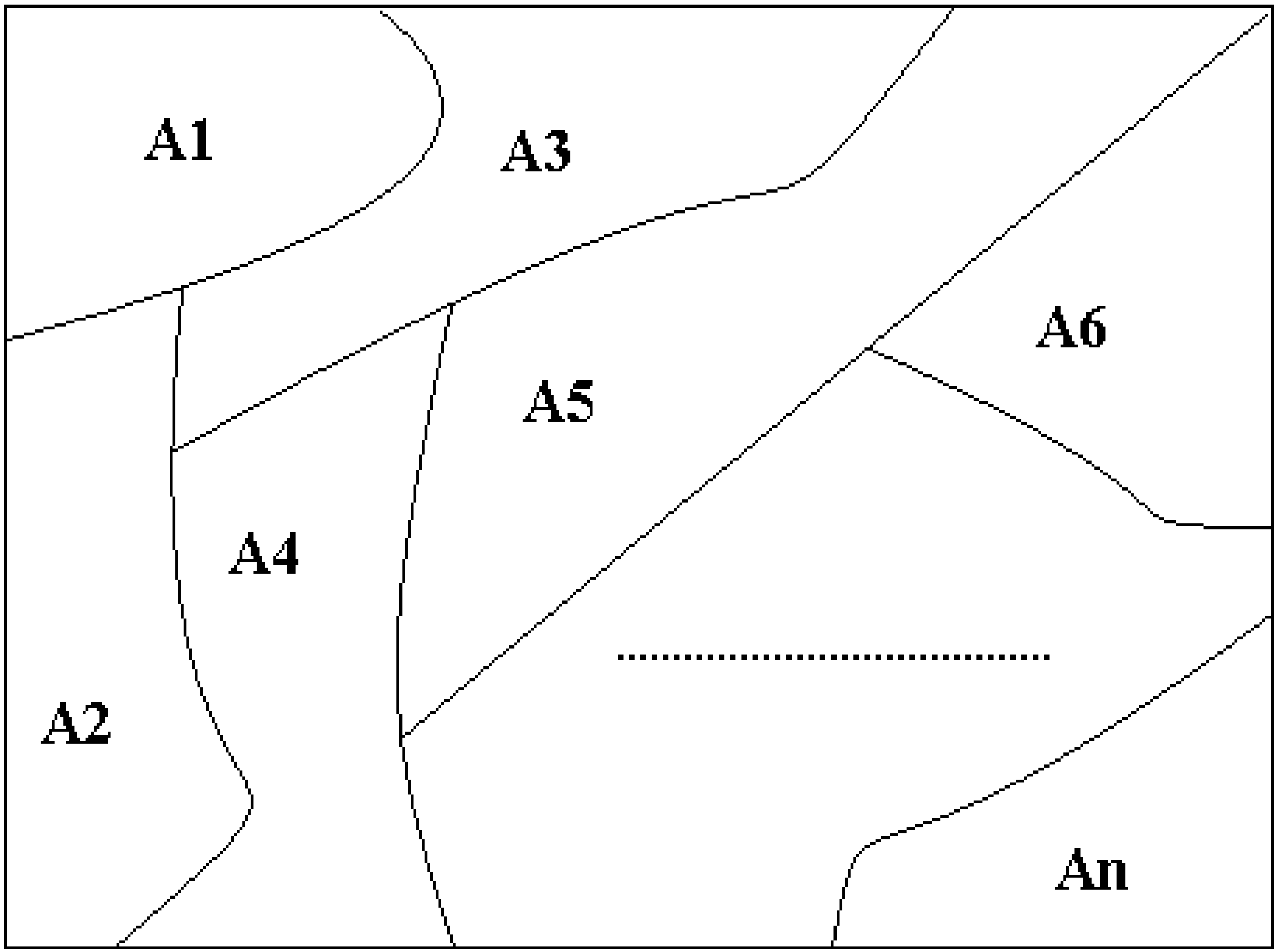
eventos de um mesmo espaço amostra S, formam uma partição deste espaço se:

(1) $A_i \cap A_j = \varnothing$, **para todo** $i \neq j$

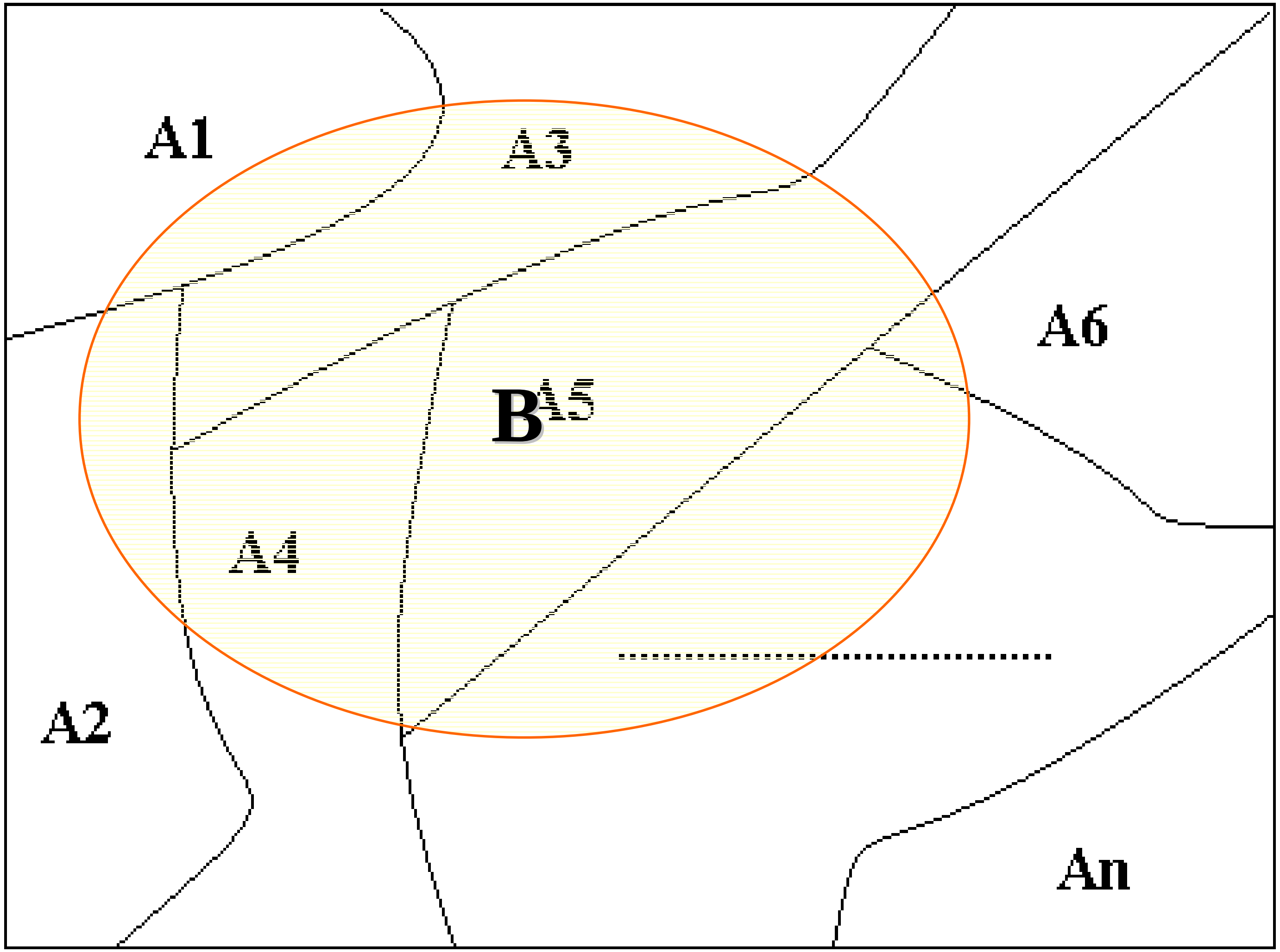
(2) $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$, **para todo** $i \neq j$

(3) $P(A_i) > 0$, **para todo** i

Partição de um espaço amostra



Teorema da probabilidade total

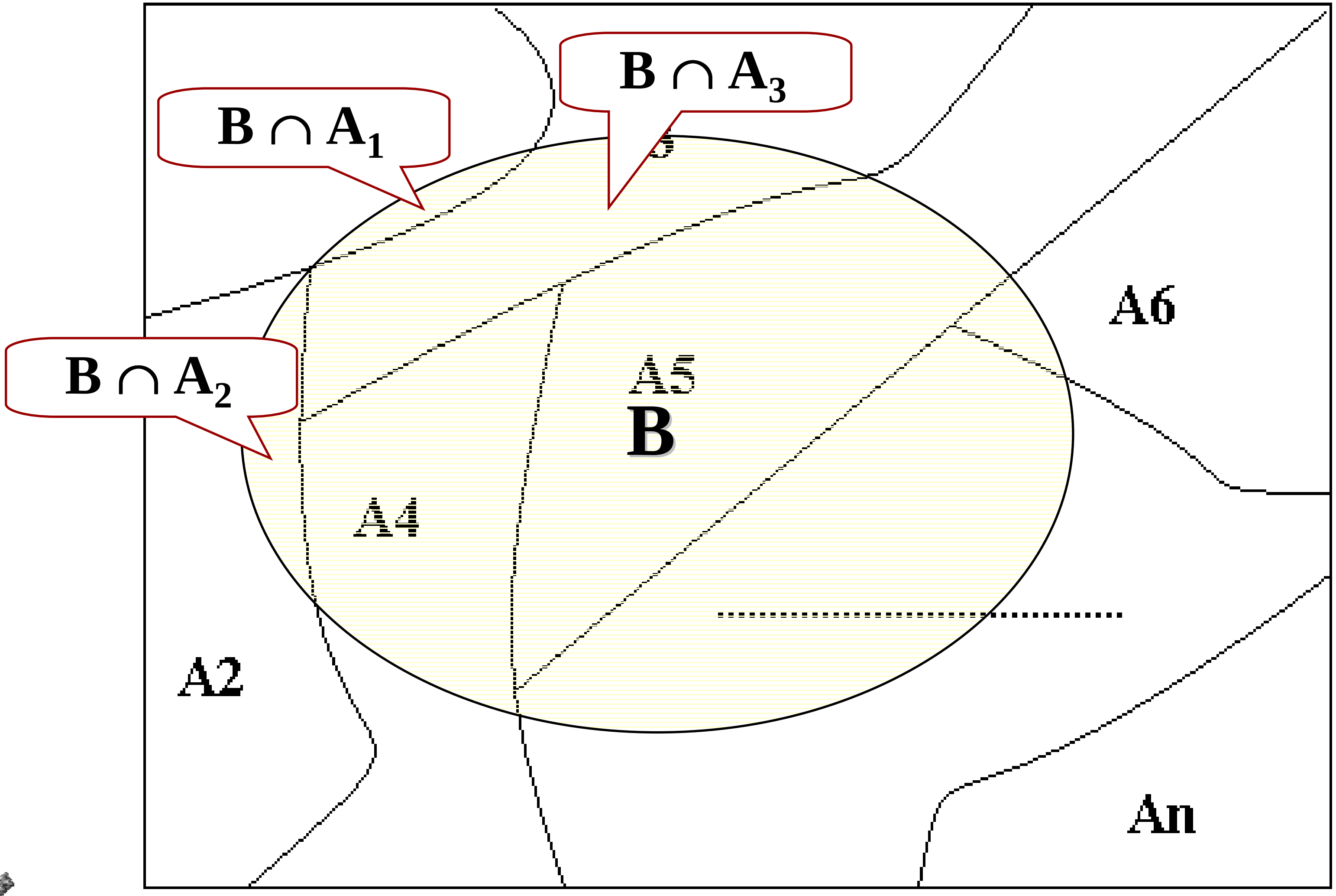


Teorema da probabilidade total

B pode ser escrito como:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_n)$$

Teorema da probabilidade total



Teorema da probabilidade total

P(B) será então:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_1) \cup ... \cup (B \cap A_n)]$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n) =$$

$$= \sum P(B \cap A_i) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$$

$$P(B) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$$

Exemplo

Uma peça é fabricada por três máquinas diferentes. A máquina "A" participa com 20% da produção, a "B" com 30% e a "C" com 50%.

Exemplo

Das peças produzidas por “A”, 5% são defeituosas, das de “B” 3% e das de “C” 1%.

Selecionada uma peça ao acaso da produção global qual a probabilidade de ela ser defeituosa.

Solução

Tem-se:

$P(A) = 20\%$ $\quad$ $P(D/A) = 5\%$

$P(B) = 30\%$ $\quad$ $P(D/B) = 3\%$

$P(C) = 50\%$ $\quad$ $P(D/C) = 1\%$

$$P(B) = \sum P(A_i).P(B/A_i)$$

Solução

Então: $P(D) = P(A).P(D/A) +$

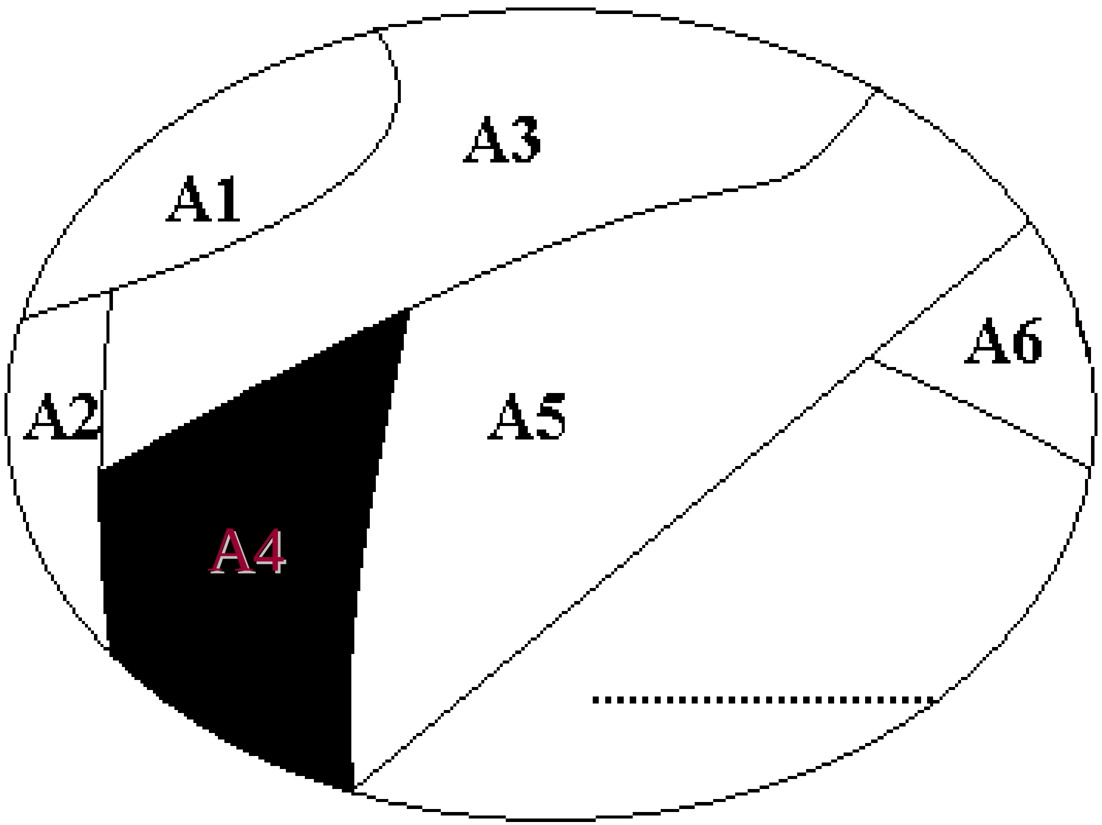
$+ P(B).P(D/B) + P(C).P(D/C) =$

$= 0{,}20.0{,}05 + 0{,}30.0{,}03 + 0{,}50.0{,}01 =$

$= 0{,}01 + 0{,}009 + 0{,}005 =$

$= 0{,}024 = 2{,}40\ \%$

Teorema de Bayes



Teorema de Bayes

Calcula a probabilidade de ocorrência de um dos “A_i” (que formam a partição) dado que ocorreu um evento qualquer “B”.

Teorema de Bayes

Aplicando a expressão da probabilidade condicionada vem:

$$P(A_i / B) = P(A_i \cap B) / P(B) =$$

$$= P(A_i).P(B/A_i) / P(B)$$

Teorema de Bayes

Na expressão

$$P(A_i /B) = P(A_i).P(B/A_i) / P(B)$$

o valor de P(B) é obtido através do Teorema da Probabilidade Total

Exemplo

Considerando o exercício anterior, suponha que uma peça seja selecionada e se verifique que ela é defeituosa. Qual a probabilidade de ela ter sido produzida pela máquina A?

Solução

Tem-se:

P(A) = 20% **P(D/A) = 5%**

P(B) = 30% **P(D/B) = 3%**

P(C) = 50% **P(D/C) = 1%**

P(D) = 2,40%

Então:

$$P(A/D) =$$

$$= \frac{P(A).P(D/A)}{P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) + P(C).P(D/C)} =$$

$$= \frac{0{,}20.0{,}05}{0{,}20.0{,}05 + 0{,}30.0{,}03 + 0{,}50.0{,}01} =$$

$$= \frac{0{,}01}{0{,}024} = 41{,}67\%$$

Até a próxima!