Relações de Ordem

13/10/2009 e 15/10/2009

Definição

Seja S um conjunto e R uma relação em S.

R é uma relação de ordem parcial em S $\Longleftrightarrow$R é Reflexiva, Anti-simétrica e Transitiva.

O par (S,R), onde S é um conjunto e R uma relação de ordem parcial em S é chamado um conjunto parcialmente ordenado, que resumiremos dizendo que é um conjunto PO.

Exemplos

1) Os pares $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$ e $(\mathbb{R}, \leq)$, onde $\leq$ é a ordem usual dos números são conjuntos PO.

2) Consideremos $S = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, o conjunto dos divisores inteiros positivos de 12, com a ordem $|$, definida por: $a|b \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\,[b = n \times a]$.

Mostremos que o par $(S, |)$ é um conjunto PO.

$|$ é reflexiva? $\Longleftrightarrow (\forall a \in S)\,[\,a|a\,] \Longleftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N})\,[\,a = n \times a\,]$?

Seja $a \in S$. Basta tomarmos $n = 1$ e teremos $a = 1 \times a$.

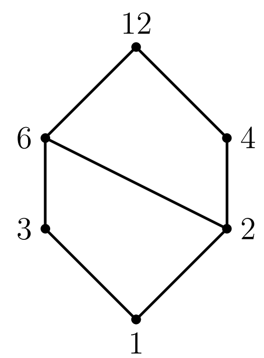
$|$ é simétrica? $\Longleftrightarrow (\forall a, b \in S)\,[\,a|b \, e \, b|a \Longrightarrow a = b\,]$?

Sejam $a, b \in S$, tais que $a|b$ e $b|a$. Então, existem $k, n \in \mathbb{N}$ tais que $b = k \times a$ e $a = n \times b$. Daí segue que $b = k \times n \times b$.

Portanto, cancelando b temos $1 = k \times n$, de onde segue que $k = n = 1$ pois ambos estão em $\mathbb{N}$. Assim, temos $a = b$.

$|$ é transitiva? $\Longleftrightarrow (\forall a, b, c \in S)\,[\,a|b \, e \, b|c \Longrightarrow a|c\,]$?

Sejam $a, b, c \in S$, tais que $a|b$ e $b|c$. Então, existem $k, m \in \mathbb{N}$ tais que $b = k \times a$ e $c = m \times b$. Daí segue que $c = m \times k \times a$. Portanto, $a|c$.



Ao lado temos o diagrama de Hasse desta relação.

3) Dados $a, b \in \mathbb{N}^*$, podemos definir $a|b$ como no exemplo anterior e teremos que $(\mathbb{N}^*, |\,)$ é um conjunto ordenado.

4) O par $(\mathbb{P}(X), \subseteq)$, onde X é um conjunto qualquer, é um conjunto PO.

Dados A, B e C em $\mathbb{P}(X)$, sabemos pelas propriedades da inclusão, que:

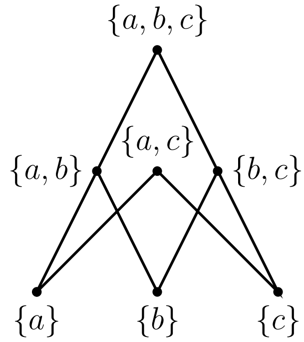
$A \subseteq A$;

$[\,A \subseteq B\, e\, B \subseteq A \implies A = B\,]$;

$[\,A \subseteq B\, e\, B \subseteq C \implies A \subseteq C\,]$

Portanto, $\subseteq$ é uma relação de ordem.

Tomando $X = \{a, b, c\}$, temos ao lado o diagrama de Hasse da ordem parcial $\subseteq$, definida em $\mathbb{P}(X)$.



Definições

Seja (S, R) um conjunto PO e sejam $a, b \in S$.

a) a e b são elementos *comparáveis* $\iff (a, b) \in R$ ou $(b, a) \in R \iff aRb$ ou bRa.

b) a e b são elementos *não comparáveis* $\iff (a, b) \notin R$ e $(b, a) \notin R$.

c) Um subconjunto C de S é uma *cadeia* de $S \iff$ os elementos de C são dois a dois comparáveis $\iff (\forall a, b \in C)\,[\,aRb$ ou $bRa\,]$

d) Um subconjunto A de S é uma *anticadeia* de $S \iff$ os elementos de C são dois a dois não-comparáveis $\iff (\forall a, b \in C)\,[\,(a, b) \notin R$ e $(b, a) \notin R\,]$.

d) A *altura* de S é o número de elementos da maior cadeia de S.

e) A *largura* de S é o número de elementos da maior anticadeia de S.

f) Quando S é uma cadeia de S, dizemos que (S, R) é um conjunto *totalmente ordenado.*

Exemplos

a) No exemplo 2 acima, os elementos 2 e 3 são não-comparáveis e também os elementos 6 e 4. No mesmo exemplo, o conjunto $C = \{1, 2, 4\}$ é uma cadeia de comprimento 3. A altura de S é 4 e sua largura é 2.

b) No exemplo 3 acima, os elementos $\{a\}$ e $\{b, c\}$ são não-comparáveis. No mesmo exemplo, o conjunto $C = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ é uma cadeia de comprimento 2 e o conjunto $A = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ é uma anticadeia de S de comprimento 3. A altura de S é 3 e sua largura é 3.

c) Se $\leq$ é a ordem usual dos números, então $(\mathbb{Z}, \leq)$ é um conjunto totalmente ordenado, mas $(\mathbb{Z}, |)$ não é totalmente ordenado, onde "|"é a relação de divisibilidade.

Observação: Em geral, usaremos o símbolo $\leq$ para representar uma relação de ordem qualquer em um conjunto S, não necessariamente a ordem usual dos números. Para evitarmos confusão, quando tivermos "$a \leq b$,"lemos "a antecede (ou precede) b".

Dados dois elementos $a, b \in S$, diremos que $a < b$ (lê-se "a"é estritamente menor que "b") se, e somente se, $a \leq b$ e $a \neq b$.

Definição: Sejam $(S_1, \leq_1)$ e $(S_2, \leq_2)$ conjuntos PO.

a) Definimos, no produto cartesiano $S_1 \times S_2$, a relação chamada de ordem *lexicográfica*, baseada no ordenamento das letras do alfabeto, que notaremos por $\leq_{lex}$, da seguinte maneira:

$$(a, b) \leq_{lex} (c, d) \Longleftrightarrow \begin{cases} [a = c \ \wedge \ b = d] \\ \qquad\qquad \vee \\ [(a <_1 \ b) \vee (a = b \ \wedge \ c <_2 d)] \end{cases}$$

b) No produto cartesiano $S_1 \times S_2$, também definimos a ordem produto, por:

$$(a, b) \leq_{pro} (c, d) \Longleftrightarrow [\, a \leq_1 c \ \wedge \ b \leq_2 d \,]$$