INF01 118

Técnicas Digitais para Computação

Minimização de Funções Booleanas

Aula 12

1. Mapas de Karnaugh com 2 variáveis

- Diagrama onde cada célula corresponde a um mintermo
- Exemplo com 2 variáveis

X \ Y	0	1
0	$\bar{X}\bar{Y}$ m0	$\bar{X}Y$ m1
1	$X\bar{Y}$ m2	XY m3

- Representação de uma função como soma de mintermos
- Cada célula recebe valor 1 ou 0, conforme valor da função para aquele mintermo
- Exemplo:

$$F = \Sigma m(1,2,3) = X\bar{Y} + XY + \bar{X}Y$$

X \ Y	0	1
0	0	1
1	1	1

• Células => mintermos

• Regiões retangulares => termos-produto

X \ Y	0	1
0	m0	m1
1	m2	m3

região onde X = 1

região onde Y = 1

lei distributiva

• Exemplo: $F = \Sigma m\ (1,2,3)$

$$F = X\overline{Y} + \overline{X}Y + XY = \overline{X}Y + X(\overline{Y} + Y) = \overline{X}Y + X = (X + \overline{X})\ (X + Y) = X + Y$$

X \ Y	0	1
0	0	1
1	1	1

Portanto:

F = soma de mintermos
ou
F = soma de termos-produto que cobrem a região

cada mintermo tem que ser coberto por pelo menos 1 termo

2. Mapas de Karnaugh com 3 variáveis

X \ YZ	00	01	11	10
0	m0	m1	m3	m2
1	m4	m5	m7	m6

Concatenar bit da linha com bits da coluna para identificar mintermo

- Mintermos não seguem a ordem crescente
  => útil para simplificação
- 2 células vizinhas (adjacentes): mintermos diferem por uma variável

m5 e m7

$X\overline{Y}Z$ XYZ

única diferença é Y

- Atenção: vizinhança através das bordas

$$m0 \longleftrightarrow m2$$

$$m4 \longleftrightarrow m6$$

- Soma de 2 mintermos adjacentes pode ser simplificada eliminando-se a variável que difere nos mintermos

$$m5 + m7 = X\overline{Y}Z + XYZ = XZ(\overline{Y} + Y) = XZ$$

É o que há de comum entre os mintermos = região do mapa

- Portanto: região com 2 células adjacentes => termo com 2 literais
  célula isolada => mintermo com 3 literais

- Exemplo de simplificação

X \ YZ	00	01	11	10
0	0	0	1	1
1	1	1	0	0

$$F = \Sigma m(2,3,4,5)$$

$$F = \overline{X}Y + X\overline{Y}$$

- **Exemplo de simplificação**

X \ YZ	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	1	1

$F = \Sigma m(3,4,6,7)$

$F = YZ + X\overline{Z}$

- **Soma de 4 mintermos adjacentes também pode ser simplificada**

X \ YZ	00	01	11	10
0	m0	m1	m3	m2
1	m4	m5	m7	m6

É o que há de comum entre os 4 mintermos

$m2 + m3 + m6 + m7$

$\overline{X}Y \qquad XY = (\overline{X} + X)\,Y = Y$

- **Portanto: região com 4 células adjacentes => termo com 1 literal**

- **Exemplo de simplificação**

$F = \Sigma m(0,2,4,5,6)$

X \ YZ	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Solução 1: **$F = \bar{Z} + X\bar{Y}Z$** **(não otimizada)**

Solução 2 (com redundância) : **$F = \bar{Z} + X\bar{Y}$**
ou seja, mintermo m4 coberto pelos 2 termos quando **X=1, Y=0, Z=0**

- **Situações onde existem 2 soluções mínimas possíveis**

$F = \Sigma m(1,3,4,5,6)$

X \ YZ	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1		1

Solução 1: **$F = \bar{X}Z + X\bar{Z} + X\bar{Y}$**

Solução 2: **$F = \bar{X}Z + X\bar{Z} + \bar{Y}Z$**

2 alternativas para cobrir o mintermo $X\bar{Y}Z$

3. Mapas de Karnaugh com 4 variáveis

WX \ YZ	00	01	11	10
00	m0	m1	m3	m2
01	m4	m5	m7	m6
11	m12	m13	m15	m14
10	m8	m9	m11	m10

Concatenar bits da linha com bits da coluna para identificar mintermos

- Notar adjacências através das bordas

m0 ⟷ m8

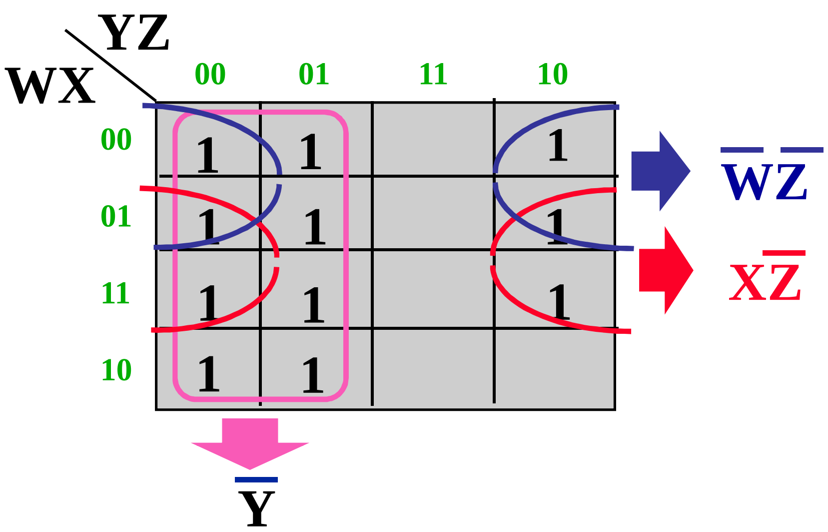
m1 ⟷ m9

m0 ⟷ m2

m4 ⟷ m6

célula isolada	→	termo com 4 literais
região com 2 células	→	termo com 3 literais
região com 4 células	→	termo com 2 literais
região com 8 células	→	termo com 1 literal

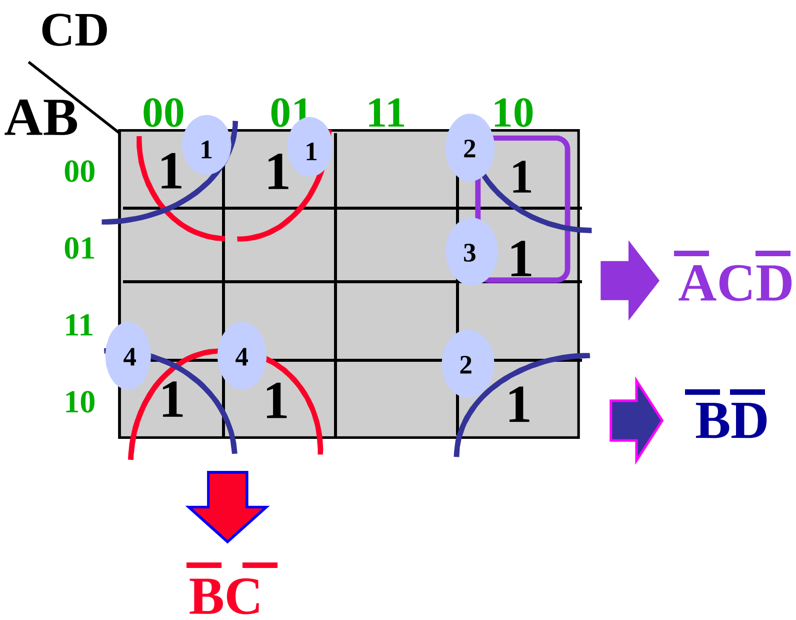
- Exemplo de simplificação



F = Σm (0, 1, 2, 4, 5, 6, 8, 9, 12, 13, 14)

$$F = \overline{Y} + \overline{W}\,\overline{Z} + X\overline{Z}$$

- **Exemplo de simplificação partindo de uma soma-de-produtos qualquer (não de uma soma de mintermos)**



1 2 3 4

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \bar{B}C\bar{D} + \bar{A}BC\bar{D} + A\bar{B}\bar{C}$$

mintermo

3 literais: regiões com 2 células

$$F = \bar{B}\bar{C} + \bar{B}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D}$$

4. Implicantes Primos

- Implicante Primo = termo-produto obtido considerando-se o maior número possível de células adjacentes

- Se mintermo é coberto por um único implicante primo => IMPLICANTE PRIMO ESSENCIAL

- Exemplo

X \ YZ	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1		1

Implicantes Primos

$\overline{X}Z$

$X\overline{Y}$

$X\overline{Z}$

$\overline{Y}Z$

Implicantes Primos Essenciais

$\overline{X}Z$

$X\overline{Z}$

- Obtenção dos implicantes primos

Mintermo isolado ➡ se não for contido numa região com 2 mintermos adjacentes

Região com 2 termos adjacentes ➡ se não for contida numa região com 4 mintermos adjacentes

- **Obtenção dos implicantes primos essenciais**

Verificar cada mintermo com 1 → **se for coberto só por 1 implicante primo, então este é implicante primo essencial**

- **Algoritmo para obtenção da expressão simplificada para a função**
  1. **Obter implicantes primos**
  2. **Obter implicantes primos essenciais**
  3. **Expressão = soma lógica dos implicantes primos essenciais**

+

outros implicantes primos necessários para cobrir outros mintermos

- **Exemplo 1**

AB \ CD	00	01	11	10
00		1	1	
01	1	1	1	1
11	1			1
10				

$\overline{A}D$

$\overline{A}B$ → Não é essencial - todos seus mintermos são cobertos por mais de 1 implicante primo

$B\overline{D}$

3 implicantes primos

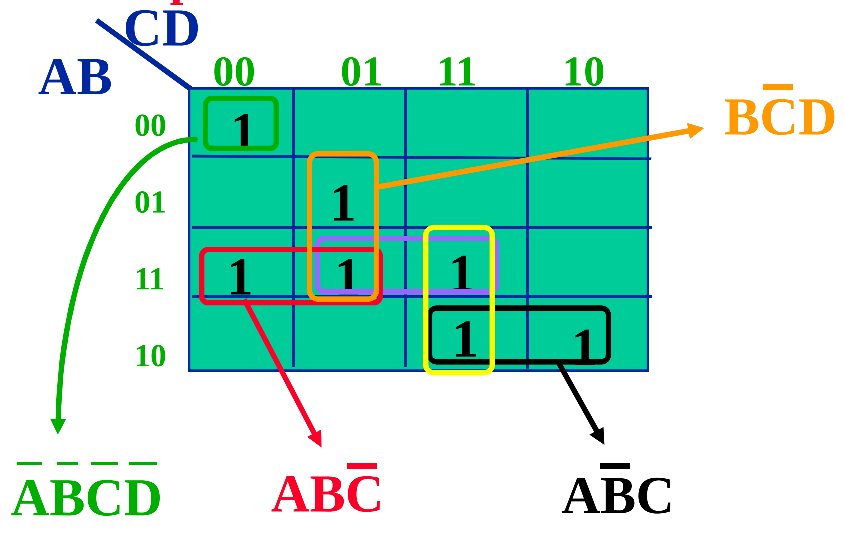
$\overline{A}D$ → essencial

$\overline{A}B$

$B\overline{D}$ → essencial

$F = \overline{A}D + B\overline{D}$

- **Exemplo 2**



$F = \Sigma\, m\,(0,5,10,11,12,13,15)$

6 implicantes primos

p1	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D}$	essencial	m0
p2	$B\overline{C}D$	essencial	m5
p3	$AB\overline{C}$	essencial	m12
p4	ABD	escolher entre 1 destes	
p5	ACD	escolher entre 1 destes	
p6	$A\overline{B}C$	essencial	m10

- Tabela de Cobertura

	m0	m5	m10	m11	m12	m13	m15	
p1	X							essencial
p2		X				X		essencial
p3					X	X		essencial
p4						X	X	escolher entre 1 destes
p5				X			X	escolher entre 1 destes
p6			X	X				essencial

falta cobrir só m15 - pode-se escolher p4 ou p5

$F = \overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{D} + B\overline{C}D + AB\overline{C} + A\overline{B}C +$ ABD ou ACD

O método de achar
os implicantes primos
é tratado na próxima aula.

Método de Quine - McCluskey. Veja Ferramenta Karma 2.0 .