Questão 1 (Semântica denotational do laço while)
A denotação do laço while é dada pela seguinte equação;

$$C[\![\texttt{while b do c}]\!] = \text{fix}\, F \qquad \text{com } F(g) = \lambda\sigma.se\ [\![\mathbf{b}]\!]\sigma\ \mathit{então}\ g([\![\mathbf{c}]\!]\sigma)\ \mathit{senão}\ \sigma$$

A semântica do laço é definida como menor ponto fixo do funcional F. F tem como argumento uma função entre estados e retorna uma outra função entre estados. Pelo Teorema do Ponto Fixo sabemos que esse menor ponto fixo existe e é igual ao menor limite superior da cadeia

$$F^0 \bot_{\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot} \sqsubseteq F^1 \bot_{\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot} \sqsubseteq F^2 \bot_{\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot} \sqsubseteq \ldots$$

que é escrito utilizando a seguinte notação:

$$\bigsqcup_{n=0}^{\infty} F^n \bot_{\Sigma_\bot \to \Sigma_\bot}$$

Questão 2 (Semântica axiomática: Média)
(a) $x \leq y + 1 \wedge x + y = x_0 + y_0$

(b)
$\{\ x \leq y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0\ \}$
$\{\ x \leq y + 1 \wedge x + y = x_0 + y_0\ \}$
while x<y **do** (
  $\{\ x < y \wedge x \leq y + 1 \wedge x + y = x_0 + y_0\ \}$
  $\{\ x + 1 \leq y \wedge x + y = x_0 + y_0\ \}$
  x:=x+1
  $\{\ x \leq y \wedge x + y - 1 = x_0 + y_0\ \}$
  y:=y−1
  $\{\ x \leq y + 1 \wedge x + y = x_0 + y_0\ \}$
)
$\{\ x \geq y \wedge x \leq y + 1 \wedge x + y = x_0 + y_0\ \}$
$\{\ (x = y \vee x = y + 1) \wedge x + y = x_0 + y_0\ \}$

E as seguintes implicações são verdadeiras:

- $x \geq y \wedge x \leq y + 1 \wedge x + y = x_0 + y_0 \longrightarrow (x = y \vee x = y + 1) \wedge x + y = x_0 + y_0$
- $x < y \wedge x \leq y + 1 \wedge x + y = x_0 + y_0 \longrightarrow x + 1 \leq y \wedge x + y = x_0 + y_0$
- $x \leq y \wedge x = x_0 \wedge y = y_0 \longrightarrow x \leq y + 1 \wedge x + y = x_0 + y_0$

(c) $y - x + 1$

Questão 3

1. Se $\vdash \{\psi\}P\{\phi\}$ então $\models \{\psi\}P\{\phi\}$, ou seja: se com as regras da semântica axiomática é possível provar que um programa P está correto em relação a sua especificação então de fato, ele é correto em relação a essa especificação
2. Se $\models \{\psi\}P\{\phi\}$ então $\vdash \{\psi\}P\{\phi\}$, ou seja: se um programa P é correto em relaçao a sua especificação então, com as regras da semântica axiomática, é possível provar esse fato
3. Um problema é decidível se existe algoritmo que o resolva. O problema da verificação de programas *IMP* é indecidível pois, dado $\{\psi\}P\{\phi\}$ não existe algoritmo que decida se $\{\psi\}P\{\phi\}$ é verdadeiro ou falso.

Questão 4 (Semântica Denotational)

$$\begin{array}{rcll}
[\![\texttt{(if } \mathbf{b} \texttt{ then } \mathbf{c_0} \texttt{ else } \mathbf{c_1}\texttt{) ; } \mathbf{c_2}]\!]\sigma & = & [\![\mathbf{c_2}]\!]([\![\texttt{if } \mathbf{b} \texttt{ then } \mathbf{c_0} \texttt{ else } \mathbf{c_1}]\!]\sigma) & \text{(eq. p/ ;)} \\
& = & [\![\mathbf{c_2}]\!](se\ [\![\mathbf{b}]\!]\sigma\ \mathit{então}\ [\![\mathbf{c_0}]\!]\sigma\ \mathit{senão}\ [\![\mathbf{c_1}]\!]\sigma) & \text{(eq. p/ if)} \\
& = & se\ [\![\mathbf{b}]\!]\sigma\ \mathit{então}\ [\![\mathbf{c_2}]\!]([\![\mathbf{c_0}]\!]\sigma)\ \mathit{senão}\ [\![\mathbf{c_2}]\!]([\![\mathbf{c_1}]\!]\sigma) & \\
& = & se\ [\![\mathbf{b}]\!]\sigma\ \mathit{então}\ [\![\mathbf{c_2}; \mathbf{c_0}]\!]\sigma\ \mathit{senão}\ [\![\mathbf{c_2}; \mathbf{c_1}]\!]\sigma & \text{(eq. p/ ;)} \\
& = & [\![\texttt{if } \mathbf{b} \texttt{ then } \mathbf{c_0}; \mathbf{c_2} \texttt{ else } \mathbf{c_1}; \mathbf{c_2}]\!] & \text{(eq. p/ if)}
\end{array}$$

Questão 5 (Semântica denotational)
A equação semântica do laço é $C[\![\texttt{while n>0 do n:=2*n-3}]\!] = \text{fix}\, F$ com

$$F(f)\sigma = se\ \sigma(n) > 0\ \mathit{então}\ f(\sigma[n \mapsto 2\sigma(n) - 3])\ \mathit{senão}\ \sigma$$

(a) Com as equações acima, temos

$$F^0(\bot) = \bot$$

$$F^1(\bot)\sigma = \begin{cases} \bot & \text{se } \sigma(n) > 0 \\ \sigma & \text{se } \sigma(n) \leq 0 \end{cases}$$

$$F^2(\bot)\sigma = \begin{cases} \bot & \text{se } \sigma(n) \geq 2 \\ \sigma[n \mapsto -1] & \text{se } \sigma(n) = 1 \\ \sigma & \text{se } \sigma(n) \leq 0 \end{cases}$$

$$F^3(\bot)\sigma = \begin{cases} \bot & \text{se } \sigma(n) \geq 3 \\ \sigma[n \mapsto -1] & \text{se } 1 \leq \sigma(n) \leq 2 \\ \sigma & \text{se } \sigma(n) \leq 0 \end{cases}$$

(b) Na próxima iteração obtemos

$$F^4(\bot)\sigma = \begin{cases} \bot & \text{se } \sigma(n) \geq 3 \\ \sigma[n \mapsto -1] & \text{se } 1 \leq \sigma(n) \leq 2 \\ \sigma & \text{se } \sigma(n) \leq 0 \end{cases}$$

e logo achamos o menor ponto fixo do F que é o limite superior mínimo da cadeia $F^i(\bot)$.

Questão 6 (Execução inversa)

(a) $C[\![\texttt{reverse}\ \mathbf{c_1}\ \mathbf{c_2}]\!] = C[\![\mathbf{c_1}]\!] \circ C[\![\mathbf{c_2}]\!]$

(b) Prova

$$\begin{array}{rcll} C[\![\texttt{reverse}\ \mathbf{c_1}\ \texttt{(reverse}\ \mathbf{c_2}\ \mathbf{c_3}\texttt{)}]\!] & = & C[\![\mathbf{c_1}]\!] \circ C[\![\texttt{reverse}\ \mathbf{c_2}\ \mathbf{c_3}]\!] & \text{(eq. para reverse)} \\ & = & C[\![\mathbf{c_1}]\!] \circ (C[\![\mathbf{c_2}]\!] \circ C[\![\mathbf{c_3}]\!]) & \text{(eq. para reverse)} \\ & = & C[\![\mathbf{c_3}\texttt{;(}\mathbf{c_2}\texttt{;}\mathbf{c_1}\texttt{)}]\!] & \text{(eq. para ;)} \end{array}$$