Introdução a Funções Recursivas

Teoria da Computação

INF05501

Formalismos para Descrever Algoritmos

- Operacional
- Axiomático
- Denotacional ou Funcional

Operacional

- Definição de um máquina abstrata, baseada em **estados** e **instruções primitivas**

- Especificação do **efeito das instruções na mudança de estado**

- **Exemplos:** Máquina Norma e Máquina de Turing

Axiomático

- Associam-se regras às componentes da linguagem
- Cada regra determina **o quê é verdadeiro após cada cláusula**, sendo o resultado **dependente do quê era verdadeiro antes da aplicação da regra**
- **Exemplos:** Gramáticas

Axiomático (cont.)

- Dependendo das restrições na definição da gramática, é possível estabelecer-se a Hierarquia de Chomsky
  - Autômatos Sem Pilhas $\Leftrightarrow$ Gramáticas Regulares
  - Autômatos Não-Determinísticos com Uma Pilha $\Leftrightarrow$ Gramáticas Livres de Contexto
  - Máquinas Universais $\Leftrightarrow$ Gramáticas Irrestritas

Denotacional ou Funcional

- Construção de uma função a partir de funções elementares de maneira **composicional**

- **Algoritmo representado pela função é determinado por suas funções componentes**

- **Exemplos:** Funções recursivas parciais (Kleene, 1936)

Funções Recursivas Parciais como Formalismo para Algoritmos

- Classe das Funções Turing-Computáveis é igual à Classe das Funções Recursivas Parciais

- Forma **compacta** e **natural** de definir funções

- **Funções elementares:**
  - Constante zero
  - Sucessor
  - Projeção
  - Recursão
  - Minimização

Linguagem Lambda

- Introduzida por **Alonzo Church** em 1941
- Notação do Cálculo Lambda
- Objetivo de evitar ambiguidades de notação

Linguagem Lambda: Funções

- Função parcial $f \subseteq A \times B$
  - **Denotada por** $f : A \to B$
  - **Tipo** de f é $A \to B$
  - $(a, b) \in f$ é denotado por $f(a) = b$

Linguagem Lambda: Funções (cont.)

- Exemplos:

$$f(x) = x^3 + 4$$

$$g(x, y) = (x^2, y - x)$$

$$h(f, x) = f(f(x))$$

Linguagem Lambda: Funções (cont.)

- Exemplos:

$$f(x) = x^3 + 4 \Rightarrow f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g(x, y) = (x^2, y - x)$$

$$h(f, x) = f(f(x))$$

Linguagem Lambda: Funções (cont.)

- Exemplos:

$$f(x) = x^3 + 4 \Rightarrow f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g(x, y) = (x^2, y - x) \Rightarrow g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$$

$$h(f, x) = f(f(x))$$

Linguagem Lambda: Funções (cont.)

- Exemplos:

$$f(x) = x^3 + 4 \Rightarrow f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$g(x, y) = (x^2, y - x) \Rightarrow g : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2$$

$$h(f, x) = f(f(x)) \Rightarrow h : (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

Linguagem Lambda: Funcional

- Função que possui **uma ou mais funções como argumento**

- Comum em programas

- **Exemplo:** Dado um arranjo A de naturais e um natural n, calcular o valor máximo entre $A(1), A(2), ..., A(n)$

  - Arranjo pode ser visto como uma função $A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - Função computada: $f(A, n) = max\{A(i) | 1 \leq i \leq n\}$
  - Tipo: $f : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Linguagem Lambda: Funcional (cont.)

- Funcionais podem ser usados para **substituir funções com mais de um argumento**

- **Exemplo:** Considere a função $g'(x)(y) = (x^2, y - x)$

  - g' é um funcional onde cada natural x define uma função $g'(x)$, tal que $g'(x) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$
  - Uma vez fixado o natural x, uma função é definida a qual associa um par de naturais $(x^2, y - x)$ a cada natural y $\Rightarrow g' : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2)$
  - Note que, embora de tipos diferentes, g e g' têm o mesmo efeito (são isomorfas)

Linguagem Lambda: Motivação

- Considere novamente a função $f(x) = x^3 + 4$, de tipo $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$
- Não se está propriamente definindo f, mas o **resultado de f aplicada ao parâmetro x**
- $f(x)$ **não é uma função**, mas um **polinômio**: $x^3 + 4 - f(x) = 0$

Linguagem Lambda: Introdução

- Linguagem Lambda permite a **definição de funções com mais rigor**

- Abstração Lambda: Permite abstrair a definição da função

  Para f, temos o seguinte termo lambda: $\lambda x.x^3 + 4$

  Interpretação: Função tal que, para um argumento arbitrário x, resulta em $x^3 + 4$

- Aplicação Lambda: Determina o valor da função aplicada a um parâmetro

  Para $f(2)$, temos o seguinte termo lambda: $(\lambda x.x^3 + 4)(2)$

  Interpretação: Aplicação da função $\lambda x.x^3 + 4$ ao valor 2

Linguagem Lambda: Introdução (cont.)

- **Termos** da Linguagem Lambda são geralmente **denotados por letras maiúsculas**:

  M pode denotar $x^3 + 4$

  N pode denotar $\lambda x.x^3 + 4$

  P pode denotar 2

  Logo, $(\lambda x.x^3 + 4)(2)$ pode ser denotado por

  $(\lambda x.M)(P)$

  $(N)(P)$

Linguagem Lambda: Introdução (cont.)

- Semântica da aplicação da função é determinada pela Regra de Redução Beta

  $(\lambda x.M)(P) = [P/x]M$ (Substituição de x por P em M)

- **Exemplo:**

  $(\lambda x.x^3 + 4)(2) =$

  $[2/x]x^3 + 4 =$

  $2^3 + 4 =$

  12

Termo Lambda

Sejam X e C conjuntos contáveis de variáveis e de constantes, respectivamente. Um termo (expressão/palavra) lambda sobre X e C é definido indutivamente:

- *Toda variável $x \in X$ é um termo;*
- *Toda constante $c \in C$ é um termo;*
- *Se M e N são termos e x é uma variável, então:*
  - (MN) *é um termo*
  - $(\lambda x.M)$ *é um termo (abstração lambda)*

Termo Lambda (cont.)

- Termos lambda não possuem qualquer **nomeação**, mas podem ser nomeados **usando-se o sinal de igualdade**:

$$cubo = (\lambda x.x^3)$$

- **Parênteses** podem ser eliminados seguindo-se a **regra de associatividade à esquerda**

$$((MN)P) \Rightarrow MNP$$

Termo Lambda (cont.)

- Parênteses também podem ser eliminados respeitando-se o **escopo de uma variável em uma abstração**

$$(\lambda x.(MNP)) \Rightarrow \lambda x.MNP$$

- **Identificadores não são importantes**

$$\lambda(x, y).x + y \quad \Leftrightarrow \quad \lambda(r, s).r + s$$

- Entretanto, identificadores **devem ser diferentes**

$$\lambda(x, x).x + x \Rightarrow \text{Não é um termo bem formado!}$$

Linguagem Lambda: Definição

Sejam X e C conjuntos contáveis de variáveis e de constantes, respectivamente. Uma Linguagem Lambda sobre X e C é o conjunto de todos os termos lambda sobre estes conjuntos.

- Exemplos de termos lambda:

$$f(x) = x^3 + 4 \;\Rightarrow\; f = \lambda x.x^3 + 4$$

$$g(x, y) = (x^2, y - x) \;\Rightarrow\; g = \lambda(x, y).(x^2, y - x)$$

$$g'(x)(y) = (x^2, y - x) \;\Rightarrow\; g' = \lambda x.\lambda y.(x^2, y - x)$$

$$h(f, x) = f(f(x)) \;\Rightarrow\; h = \lambda(f, x).f(f(x))$$

$$h'(f)(x) = f(f(x)) \;\Rightarrow\; h' = \lambda f.\lambda x.f(f(x))$$

Linguagens Tipadas e Não-Tipadas

- Linguagem Lambda inspirou a linguagem de programação LISP
  - Linguagem **sem tipos**
  - **Programas e dados não são distinguíveis**
  - Usa **exclusivamente funções** como estruturas de dados elementares

- Introdução posterior da linguagem Algol, onde **variáveis são associadas a tipos**, criou discussão entre **vantagens e desvantagens do uso de tipos** em linguagens de programação

Linguagens Tipadas e Não-Tipadas (cont.)

- Associação de tipos a termos lambda:

$f = \lambda x.x^3 + 4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$g = \lambda(x, y).(x^2, y - x) : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^2$

$g' = \lambda x.\lambda y.(x^2, y - x) : \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N}^2)$

$h = \lambda(f, x).f(f(x)) : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$h' = \lambda f.\lambda x.f(f(x)) : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$

Semântica de Termos Lambda

- Relacionada aos conceitos de variável livre e variável ligada:

  *Uma variável é **ligada** se estiver **dentro do escopo de uma abstração lambda**. Ela é **livre, caso contrário**.*

  Exemplos:

  $\lambda x.x^k \;\Rightarrow x$ é ligada e k é livre

  $\lambda k.\lambda x.x^k \;\Rightarrow x$ e k são ligadas

Substituição de Variável Livre

Sejam x uma variável e M e P termos lambda. A substituição de uma variável livre x por P em M, denotada por:

$$[P/x]M$$

é simplesmente a substituição de todas as ocorrências de x em M pelo termo P.

Exemplo:

$[5/x]\lambda k.x^k = \lambda k.5^k$

Regra de Redução Beta

Sejam x uma variável e M e P termos lambda. A regra de redução beta de um termo $(\lambda x.M)(P)$ é dada pela substituição de x por P em M. Ou seja:

$$[P/x]M$$

Note que x é ligada em $\lambda x.M$, mas é livre em M

Semântica de um Termo Lambda

- **Semântica de um termo lambda**, definido por uma **função aplicada a parâmetro**, é dada pelas **possíveis aplicações sucessivas da regra de redução beta**

- **Exemplo:** Semântica do termo $(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2)$

  $(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2) =$

Semântica de um Termo Lambda

- **Semântica de um termo lambda**, definido por uma **função aplicada a parâmetro**, é dada pelas **possíveis aplicações sucessivas da regra de redução beta**

- **Exemplo:** Semântica do termo $(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2)$

  $(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2) =$

  $[2/k](\lambda x.x^k)(5) =$

Semântica de um Termo Lambda

- **Semântica de um termo lambda**, definido por uma **função aplicada a parâmetro**, é dada pelas **possíveis aplicações sucessivas da regra de redução beta**

- **Exemplo:** Semântica do termo $(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2)$

$(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2) =$

$[2/k](\lambda x.x^k)(5) =$

$(\lambda x.x^2)(5) =$

Semântica de um Termo Lambda

- **Semântica de um termo lambda**, definido por uma **função aplicada a parâmetro**, é dada pelas **possíveis aplicações sucessivas da regra de redução beta**

- **Exemplo:** Semântica do termo $(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2)$

  $(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2) =$

  $[2/k](\lambda x.x^k)(5) =$

  $(\lambda x.x^2)(5) =$

  $[5/x](x^2) =$

Semântica de um Termo Lambda

- **Semântica de um termo lambda**, definido por uma **função aplicada a parâmetro**, é dada pelas **possíveis aplicações sucessivas da regra de redução beta**

- **Exemplo:** Semântica do termo $(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2)$

$$(\lambda k.(\lambda x.x^k)(5))(2) =$$

$$[2/k](\lambda x.x^k)(5) =$$

$$(\lambda x.x^2)(5) =$$

$$[5/x](x^2) =$$

$$5^2 = 25$$

Exercícios

1. Dada a função:

$$f(g,x) = g(g(x,x),x)$$

   descreva-a usando a Linguagem Lambda, apresentando o seu tipo (considere somente valores em $\mathbb{N}$ e que g é do tipo $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$)

2. Qual é a semântica do termo lambda

   $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.x - y/z)(1))(2))(4)$