Lista de exercícios: Modelagem matemática
Otimização Combinatória

Nas questões abaixo:

i) Formule e apresente o modelo matemático. Caso não esteja, coloque na forma padrão.

ii) Especificar as variáveis, número de váriáveis e número de restrições (desconsiderar as restrições triviais $x \in \mathbb{R}^+$).

Questão 1:

Certa empresa fabrica 2 produtos $P1$ e $P2$. O lucro por unidade de $P1$ é de 100 reais e o lucro unitário de $P2$ é de 150 reais. A empresa necessita de 2 horas para fabricar uma unidade de $P1$ e 3 horas para fabricar uma unidade de $P2$. O tempo mensal disponível para essas atividades é de 120 horas. As demandas esperadas para os dois produtos levaram a empresa a decidir que os montantes produzidos de $P1$ e $P2$ não devem ultrapassar 40 unidades de $P1$ e 30 unidades de $P2$ por mês. Construa o modelo do sistema de produção mensal com o objetivo de maximizar o lucro da empresa. (Assumir que as quantidades podem ser fracionárias)

Resposta:
Variáveis:
x_1 = Quantidade do produto $P1$ produzido por mês.
x_2 = Quantidade do produto $P2$ produzido por mês.

$$\begin{aligned} max \quad & 100x_1 + 150x_2 \\ s.a. \quad & 2x_1 + 3x_2 \leq 120 \\ & x_1 \leq 40 \\ & x_2 \leq 30 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Nº de variáveis: 2
Nº de Restrições: 3

Questão 2:

Sabe-se que uma pessoa necessita, em sua alimentação diária, de um mínimo de 15 unidades de proteínas e 20 unidades de carboidratos. Suponhamos que, para satisfazer esta necessidade, ela disponha dos produtos A e B. Um Kg do produto A contém 3 unidades de proteínas, 10 unidades de carboidrato e custa R$ 2,00. Um Kg do produto B contém 6 unidades de proteínas, 5 unidades de carboidrato e custa R$ 3,00. Formule o modelo matemático das quantidade que deverão ser compradas de cada produto de modo que as exigências da alimentação sejam satisfeitas a custo mínimo?

Resposta:
Variáveis:
x_a = Quantidade do produto A em kg.
x_b = Quantidade do produto B em kg.

$$\begin{aligned} min \quad & 2x_a + 3x_b \\ s.a. \quad & 3x_a + 6x_b \geq 15 \\ & 10x_a + 5x_b \geq 20 \\ & x_a, x_b \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Na forma padrão:

$$\begin{aligned} max \quad & -2x_a - 3x_b \\ s.a. \quad & -3x_a - 6x_b \leq -15 \\ & -10x_a - 5x_b \leq -20 \\ & x_a, x_b \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Nº de variáveis: 2
Nº de Restrições: 2

Questão 3:

Uma empresa de aço tem um rede de distribuição conforme a Figura 1. Duas minas $M1$ e $M2$ produzem 40t e 60t de mineral de ferro, respectivamente, que são distribuídos para dois estoques intermediários S_1 e S_2. A planta de produção P tem uma demanda de 100t de mineral de ferro. As vias de transporte têm limites de toneladas de mineral de ferro que podem ser transportadas e custos de transporte por toneladas de mineral de ferro (veja figura). A direção da empresa quer determinar a transportação que minimiza os custos.

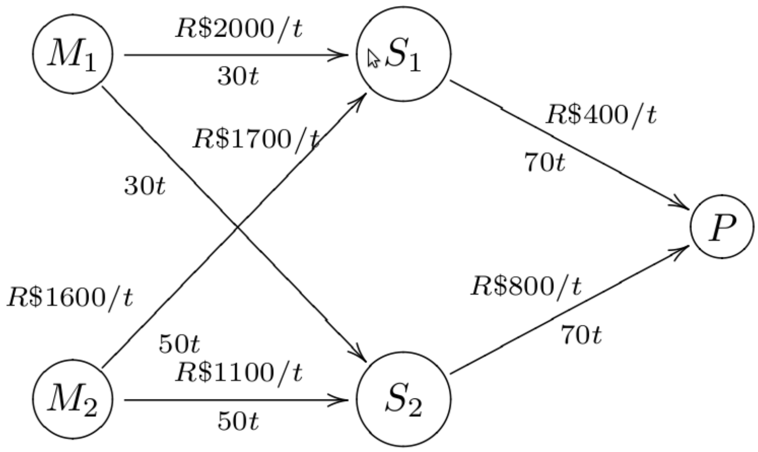

Fig. 1: Rede de distribuição de uma empresa de aço.

Resposta:
Variáveis:
x_{ij} = Quantidade transportada da mina i para o depósito j.
y_1 = Quantidade do depósito j para a planta de produção P.
*quantidade em toneladas.

$$\begin{aligned} min \quad & 2000x_{11} + 1700x_{12} + 1600x_{21} + 1100x_{22} + 400y_1 + 800y_2 \\ s.a. \quad & x_{11} + x_{12} = 40 \\ & x_{21} + x_{22} = 60 \\ & x_{11} \leq 30 \\ & x_{12} \leq 30 \\ & x_{21} \leq 50 \\ & x_{22} \leq 50 \\ & y_1 \leq 70 \\ & y_2 \leq 70 \\ & x_{11} + x_{21} - y_1 = 0 \\ & x_{12} + x_{22} - y_2 = 0 \\ & y_1 + y_2 = 100 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Na forma padrão:

$$
\begin{array}{ll}
max & -2000x_{11} - 1700x_{12} - 1600x_{21} - 1100x_{22} - 400y_1 - 800y_2 \\
s.a. & x_{11} + x_{12} \leq 40 \\
& -x_{11} - x_{12} \leq -40 \\
& x_{21} + x_{22} \leq 60 \\
& -x_{21} - x_{22} \leq -60 \\
& x_{11} \leq 30 \\
& x_{12} \leq 30 \\
& x_{21} \leq 50 \\
& x_{22} \leq 50 \\
& y_1 \leq 70 \\
& y_2 \leq 70 \\
& x_{11} + x_{21} - y_1 \leq 0 \\
& -x_{11} - x_{21} + y_1 \leq 0 \\
& x_{12} + x_{22} - y_2 \leq 0 \\
& -x_{12} - x_{22} + y_2 \leq 0 \\
& y_1 + y_2 \leq 100 \\
& -y_1 - y_2 \leq -100 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^+
\end{array}
$$

Nº de variáveis: 6
Nº de Restrições: 16

Questão 4:

Um fabricante de rações quer determinar a fórmula mais econômica de uma certa ração. A composição nutritiva dos ingredientes disponíveis no mercado e os seus custos são os seguintes:

	Ingredientes		
Nutrientes	Soja	Milho	Cana
Cálcio	0,2%	1%	3%
Proteína	50%	9%	0%
Carbo-Hidratos	0,8%	2%	2%
Custo/quilo	15,00	20,00	8,00

O fabricante deve entregar 1000 quilos de ração por dia e garantir que esta contenha:

no máximo	no mínimo	de
1,2%	0,8%	Cálcio
-	22%	Proteína
20%	-	Carbo-Hidratos

Resposta:
Variáveis:
x_s = Quantidade de soja na composição da ração.
x_m = Quantidade de milho na composição da ração.
x_c = Quantidade de cana na composição da ração.

$$
\begin{array}{ll}
min & 15x_s + 20x_m + 8x_c \\
s.a. & 0,8 \leq 0,2x_s + x_m + 3x_c \leq 1,2 \\
& 22 \leq 50x_s + 9x_m \\
& 0,8x_s + 2x_m + 2x_c \leq 20 \\
& x_s, x_m, x_c \in \mathbb{R}^+
\end{array}
$$

Na forma padrão:

$$\begin{array}{rl} max & -15x_s - 20x_m - 8x_c \\ s.a. & 0,2x_s + x_m + 3x_c \leq 1,2 \\ & -0,2x_s - x_m - 3x_c \leq -0,8 \\ & -50x_s - 9x_m \leq -22 \\ & 0,8x_s + 2x_m + 2x_c \leq 20 \\ & x_s, x_m, x_c \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Nº de variáveis: 3
Nº de Restrições: 4

Questão 5:

Um fazendeiro está estudando a divisão de sua propriedade nas seguintes atividades produtivas:
a) Arrendamento - Destinar certa quantidade de alqueires Para a plantação de cana de açúcar, a uma usina local, que se encarrega da atividade e paga pelo aluguel da terra R$ 300,00 por alqueire por ano;
b) Pecuária - Usar outra parte para a criação de gado de corte. A recuperação das pastagens requer adubação (100 kg/alqueire) e irrigação(100.000 litros de água/alqueire) por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R$400,00 por alqueire por ano.
c) Plantio de Soja - Usar uma terceira parte para o plantio de soja. Essa cultura requer 200 kg por alqueire de adubos e 200.000 litros de água por alqueire para irrigação por ano. O lucro estimado nessa atividade é de R$500,00 por alqueire por ano.
A disponibilidade de recursos por ano é de 12.750.000 litros de água,14.000 kg de adubo e 100 alqueires de terra. Quantos alqueires deverá destinar a cada atividade para proporcionar o melhor retorno? Construa o modelo de decisão.

Resposta:
Variáveis:
x_A = Área destinada ao arrendamento.
x_P = Área destinada a pecuária.
x_S = Área destinada ao plantio de soja.
*Área de plantio em alqueires.

$$\begin{array}{rl} max & 300x_A + 400x_P + 500x_S \\ s.a. & 100x_P + 200x_S \leq 14.000 \\ & 100.000x_P + 200.000x_S \leq 12.750.000 \\ & x_A + x_P + x_S \leq 100 \\ & x_A, x_P, x_S \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Nº de variáveis: 3
Nº de Restrições: 3

Questão 6:

Uma fábrica produz dois artigos A e B, que devem passar por duas máquinas diferentes $M1$ e $M2$. $M1$ tem 12 horas de capacidade diária disponível e $M2$ tem 5 horas. Cada unidade de produto A requer 2 horas em ambas as máquinas. Cada unidade de produto B requer 3 horas em $M1$ e 1 hora em $M2$. O lucro líquido de A é de R$ 60,00 por unidade e o de B, R$ 70,00 por unidade. Formular o modelo matemático de modo a determinar a quantidade a ser produzida de A e B a fim de se ter um lucro máximo. (Assumir que as quantidades podem ser fracionárias)

Resposta:
Variáveis:
x_A = Quantidade do artigo A.
x_B = Quantidade do artigo B.

$$
\begin{aligned}
max \quad & 60x_A + 70x_B \\
s.a. \quad & 2x_A + 3x_B \leq 12 \\
& 2x_A + x_B \leq 5 \\
& x_A, x_B \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}
$$

Nº de variáveis: 2
Nº de Restrições: 2

Questão 7:

Um sitiante está planejando sua estratégia de plantio para o próximo ano. Por informações obtidas nos órgãos governamentais, sabe que as culturas de trigo, arroz e milho serão as mais rentáveis na próxima safra. Por experiência, sabe que a produtividade de sua terra para as culturas desejadas é a constante na tabela abaixo. Por falta de um local de armazenamento próprio, a produção máxima, em toneladas, está limitada a 60. A área cultivável do sítio é de 200.000 m^2. Para atender as demandas de seu próprio sítio, é imperativo que se plante 400 m^2 de trigo, 800 m^2 de arroz e 10.000 m^2 de milho.

Cultura	Produtividade em kg/m^2	Lucro/kg de produção
Trigo	0,2	10,8 centavos
Arroz	0,3	4,2 centavos
Milho	0,4	2,03 centavos

Formule o modelo matemático de modo a maximizar o lucro obtido na produção do próximo ano.
Resposta:
Variáveis:
x_T = Produção em kg de Trigo.
x_A = Produção em kg de Arroz.
x_M = Produção em kg de Milho.

$$
\begin{aligned}
max \quad & 10,8x_T + 4,2x_A + 2,03x_M \\
s.a. \quad & x_T/0,2 + x_A/0,3 + x_M/0,4 \leq 200.000 \\
& x_T + x_A + x_M \leq 60.000 \\
& x_T/0,2 \geq 400 \\
& x_A/0,3 \geq 800 \\
& x_M/0,4 \geq 10.000 \\
& x_T, x_A, x_M \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}
$$

Colocando na forma padrão:

$$
\begin{aligned}
max \quad & 10,8x_T + 4,2x_A + 2,03x_M \\
s.a. \quad & x_T/0,2 + x_A/0,3 + x_M/0,4 \leq 200.000 \\
& x_T + x_A + x_M \leq 60.000 \\
& -x_T \leq -80 \\
& -x_A \leq -240 \\
& -x_M \leq -4.000 \\
& x_T, x_A, x_M \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}
$$

Nº de variáveis: 3
Nº de Restrições: 5

Questão 8:

Uma empresa mineradora possui duas jazidas diferentes que produzem um dado tipo de minério. Depois do minério ser triturado ele é classificado em três classes: superior, médio e inferior. Existe uma certa demanda para cada classe de minério. A empresa de mineração possui uma fábrica de beneficiamento com a capacidade para 12 toneladas da classe superior, 8 da média e 24 da inferior por semana. A empresa gasta UM 900,00 por dia para operar a primeira jazida e UM 720,00 para operar a segunda. Essas jazidas têm contudo, capacidades diferentes. Durante um dia de operação, a primeira jazida produz 6 toneladas de minério de classe superior, 2 de classe média e 4 de classe inferior, enquanto que a segunda jazida produz diariamente 2 toneladas de minério de classe superior, 2 de classe média e 12 de classe inferior. Pergunta-se quantos dias por semana deve operar cada jazida para satisfazer, da maneira mais econômica, as encomendas feitas à empresa?

Resposta:
Variáveis:
x_a = Tempo em dias de operação da jazida A
x_b = Tempo em dias de operação da jazida B

$$\begin{array}{rl} min & 900x_a + 720x_b \\ s.a. & 6x_a + 2x_b \geq 12 * 7 \\ & 2x_a + 2x_b \geq 8 * 7 \\ & 4x_a + 12x_b \geq 24 * 7 \\ & x_a, x_b \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Colocando na forma padrão:

$$\begin{array}{rl} max & -900x_a - 720x_b \\ s.a. & -6x_a - 2x_b \leq -84 \\ & -2x_a - 2x_b \leq -56 \\ & -4x_a - 12x_b \leq -168 \\ & x_a, x_b \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Nº de variáveis: 2
Nº de Restrições: 3

Questão 9:

O departamento de marketing de uma empresa estuda a forma mais econômica de aumentar em 30% as vendas de seus dois produtos P1 e P2. As alternativas são:

- Investir em um programa institucional com outras empresas do mesmo ramo. Esse programa deve proporcionar um aumento de 3% nas vendas de cada produto, para cada $ 1.000,00 investidos.
- Investir diretamente na divulgação dos produtos. Cada $ 1.000,00 investidos em P1 retornam um aumento de 4% nas vendas, enquanto que para P2 o retorno é de 10%.

A empresa dispõe de $ 10.000,00 para esse empreendimento. Quanto deverá destinar a cada atividade? Construa o modelo do sistema descrito.

Resposta:
Variáveis:
x_1 = valor investido no P1 em R$1.000,00.
x_2 = valor investido no P2 em R$1.000,00.

$$\begin{array}{rl} min & x_1 + x_2 \\ s.a. & 0,03x_1 + 0,04x_2 \geq 0,3 \\ & 0,03x_1 + 0,1x_2 \geq 0,3 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Colocando na forma padrão:

$$\begin{array}{rl} max & -x_1 - x_2 \\ s.a. & -0,03x_1 - 0,04x_2 \leq -0,3 \\ & -0,03x_1 - 0,1x_2 \leq -0,3 \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Nº de variáveis: 2
Nº de Restrições: 3

Questão 10:

Um estudante, na véspera de seus exames finais, dispõe de 100 horas de estudo para dedicar às disciplinas A, B e C. Cada um dos 3 exames é formado por 100 questões cada uma valendo 1 ponto, e ele (aluno) espera acertar, alternativamente, uma questão em A, duas em B ou três em C, por cada hora de estudo. Suas notas nas provas anteriores foram 6, 7 e 10 respectivamente, e sua aprovação depende de atingir uma média mínima de 5 pontos em cada disciplina. O aluno deseja distribuir seu tempo de forma a ser aprovado com a maior soma total de notas.

Resposta:
Variáveis:
x_a = Tempo dedicado para a disciplina A.
x_b = Tempo dedicado para a disciplina B.
x_c = Tempo dedicado para a disciplina C.
*tempo em horas.

$$\begin{array}{rl} max & x_a + 2x_b + 3x_c \\ s.a. & x_a + x_b + x_c \leq 100 \\ & (x_a/10 + 6)/2 \geq 5 \\ & (2x_b/10 + 7)/2 \geq 5 \\ & (3x_c/10 + 10)/2 \geq 5 \\ & x_a, x_b, x_c \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Colocando na forma padrão:

$$\begin{array}{rl} max & x_a + 2x_b + 3x_c \\ s.a. & x_a + x_b + x_c \leq 100 \\ & -x_a \leq 40 \\ & -x_b \leq 15 \\ & -x_c \leq 0 \\ & x_a, x_b, x_c \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Nº de variáveis: 3
Nº de Restrições: 4

Questão 11:

Um fundo de investimento tem até R$300.000,00 para aplicar nas ações de duas empresas. A empresa D tem 40% do seu capital aplicado em produção de cerveja e o restante aplicado em refrigerantes. Espera-se que a empresa D distribua bonificações de 12%. A empresa N tem todo o seu capital aplicado apenas na produção de cerveja. Espera-se que a empresa N distribua bonificações de 20%. Para o investimento considerado, a legislação impõe as seguintes restrições:
a) O investimento na empresa D pode atingir R$270.000,00, dada a sua diversificação de capital aplicado.
b) O investimento na empresa N pode atingir R$150.000,00, dada a sua condição de empresa com capital concentrado em apenas um produto.
c) O investimento em cada produto (cerveja ou refrigerante) pode atingir R$180.000,00.
Para as condições do problema, qual deve ser o investimento que maximiza o lucro?

Resposta:
Variáveis:
D = valor investido na empresa D.
N = valor investido na empresa N.

$$
\begin{array}{ll}
max & 0,12D + 0,2N \\
s.a. & D \leq 270.000 \\
 & N \leq 150.000 \\
 & 0.4D + N \leq 180.000 \\
 & 0.6D \leq 180.000 \\
 & D, N \in \mathbb{R}^+
\end{array}
$$

Nº de variáveis: 2
Nº de Restrições: 4

Questão 13:

Uma empresa siderúrgica possui 3 usinas e cada uma delas requer uma quantidade mensal mínima de minério para operar. A empresa compra minério de 2 minas diferentes. Cada uma das minas tem uma capacidade máxima de produção mensal estabelecida. O custo do minério para a empresa é variável de acordo com a distância entre as minas e usinas (cada par mina/usina tem um custo diferente). Os dados referentes à capacidade máxima de produção das minas, requisições mínimas de minério para as usinas e custos de transporte entre minas e usinas são mostrados na tabela 1. Por questões técnicas, a usina 1 deve comprar no mínimo 20% de minério da mina 1, a usina 2 deve comprar no mínimo 30% da mina 2 e a usina 3 deve comprar no mínimo 35% da mina 1. Posto isso, construir um modelo de otimização para determinar a quantidade de minério a ser comprada de cada mina e levada a cada usina de forma a minimizar o custo total de compra de minério.

Mina/Usina	Usina 1	Usina 2	Usina 3	Cap. da mina (t/mês)
Mina1	8	9	15	30000
Mina2	7	16	23	25000
Req. das usinas (t/mês)	15000	17000	19000	

Resposta:
Variáveis:
x_{ij} = quantidade de minério da mina i para a usina j

$$
\begin{array}{ll}
min & 8x_{11} + 7x_{21} + 9x_{12} + 16x_{22} + 15x_{13} + 23x_{23} \\
s.a. & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30.000 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 25.000 \\
 & x_{11} + x_{21} \geq 15.000 \\
 & x_{12} + x_{22} \geq 17.000 \\
 & x_{13} + x_{23} \geq 19.000 \\
 & x_{11} \geq +0,2x_{11} + 0,2x_{21} \\
 & x_{22} \geq +0,3x_{12} + 0,3x_{22} \\
 & x_{13} \geq +0,35x_{13} + 0,35x_{23} \\
 & x_{ij} > 0 \forall i = \{1,2\}, j = \{1,2,3\}.
\end{array}
$$

Colocando na forma padrão:

$$
\begin{array}{ll}
max & -8x_{11} - 7x_{21} - 9x_{12} - 16x_{22} - 15x_{13} - 23x_{23} \\
s.a. & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30.000 \\
 & x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 25.000 \\
 & -x_{11} - x_{21} \leq -15.000 \\
 & -x_{12} - x_{22} \leq -17.000 \\
 & -x_{13} - x_{23} \leq 19.000 \\
 & -0,8x_{11} + 0,2x_{21} \leq 0 \\
 & 0,3x_{12} - 0,7x_{22} \leq 0 \\
 & -0,65x_{13} + 0,35x_{23} \leq 0 \\
 & x_{ij} > 0 \forall i = \{1,2\}, \forall j = \{1,2,3\}.
\end{array}
$$

Nº de variáveis: 6
Nº de Restrições: 8

Questão 15:

A Varig precisa decidir a quantidade de querosene para combustível de seus jatos que adquire de 3 companhias vendedoras. Seus jatos são regularmente abastecidos nos aeroportos de Congonhas, Viracopos, Galeão e Pampulha. As companhias vendedoras poderão fornecer no próximo mês as seguintes quantidades de combustível:

Companhia	Galões
1	250.000
2	500.000
3	600.000

As necessidades da Varig nos diferentes aeroportos são:

Aeroporto	Quantidade
Congonhas	100.000
Viracopos	200.000
Galeão	300.000
Pampulha	400.000

O custo por galão, incluindo o preço do transporte, de cada vendedor para cada aeroporto é:

	Cia1	Cia2	Cia3
Congonhas	12	9	10
Viracopos	10	11	14
Galeão	8	11	13
Pampulha	11	13	9

Formule este problema como um modelo de programação linear.

Resposta:
Variáveis:
x_{ij} = Quantidade comprada de combustível no aeroporto i da companhia j.

Constantes:
N={1,...,j,...,n}: conjunto de companhias de abastecimento.
M={1,...i,...,m}: conjunto de aeroportos.
q_{ij} = custo do combustível por galão na aeroporto i pela companhia j.
D_j = Disponibilidade de combustível da companhia j.
Q_i = Demanda de combustível no aeroporto i.

$$\begin{aligned}
min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} \\
s.a. \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq D_j, \forall j \in N \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = Q_i, \forall i \in M \\
& x_{ij} \geq 0, \forall i \in N, \forall j \in M.
\end{aligned}$$

Colocando na forma padrão:

$$
\begin{aligned}
max \qquad & -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} q_{ij}x_{ij} \\
s.a. \qquad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leq D_j, \forall j \in N \\
& \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq Q_i, \forall i \in M \\
& -\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq -Q_i, \forall i \in M \\
& x_{ij} \geq 0, \forall i \in N, \forall j \in M.
\end{aligned}
$$

Nº de variáveis: $n * m$=3*4=12
Nº de Restrições: $n + m$=3+4+4=11