

- INF01047 -

Transformações Geométricas



Transformações
Modelagem

Iluminação
(*Shading*)

Transformação
Câmera

Recorte

Projeção

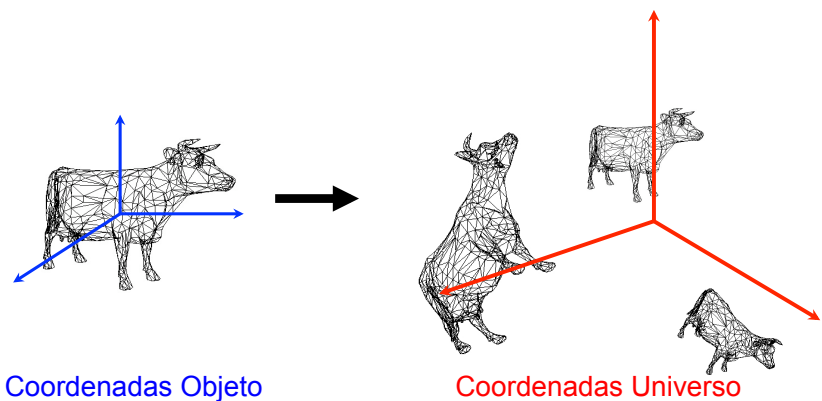
Rasterização

Visibilidade

Da última aula...

✓ Objetos definidos no seu próprio sistema de coordenadas

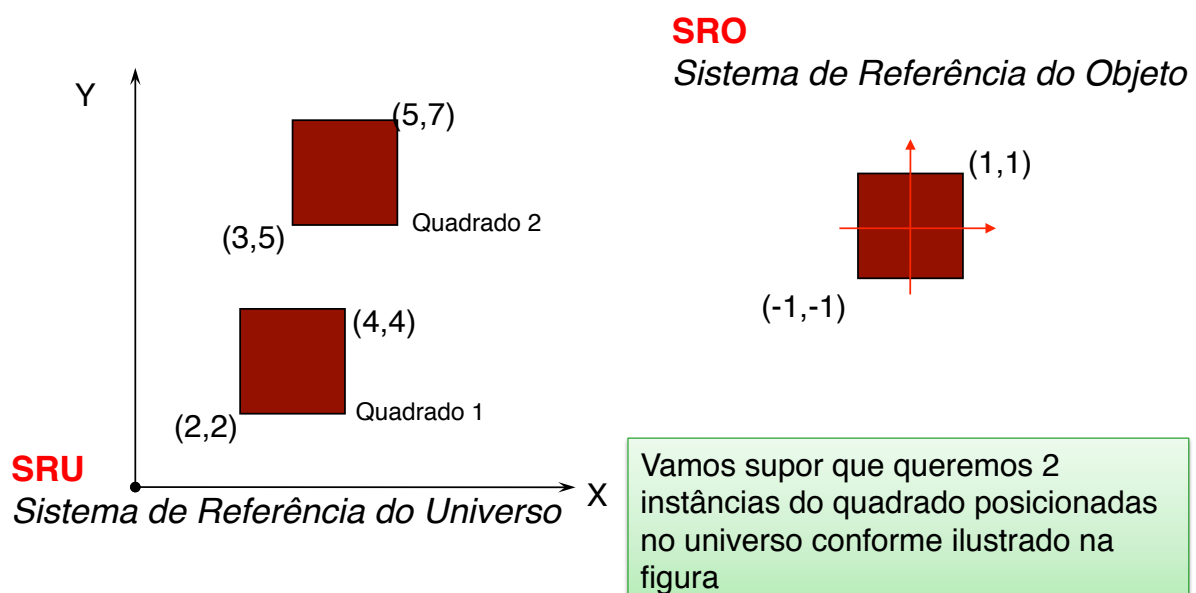
✓ Transformações de modelagem orientam os modelos geométricos num sistema comum de coordenadas (UNIVERSO)



O que são Transformações?

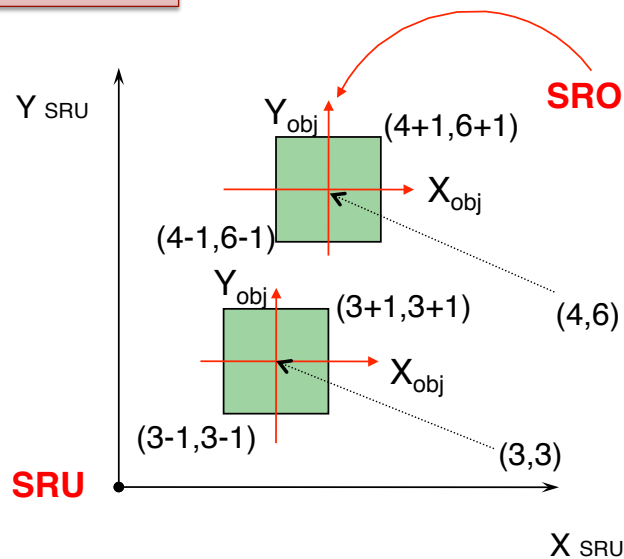
- Modificam os valores de pontos (x,y,z) para pontos (x',y',z')
- São utilizadas em CG para:
 - Posicionar objetos na cena
 - Mudar forma dos objetos
 - Criar múltiplas cópias (instâncias) dos objetos
 - Animações
 - Projeção para câmera virtual

Posicionamento de Objetos Gráficos

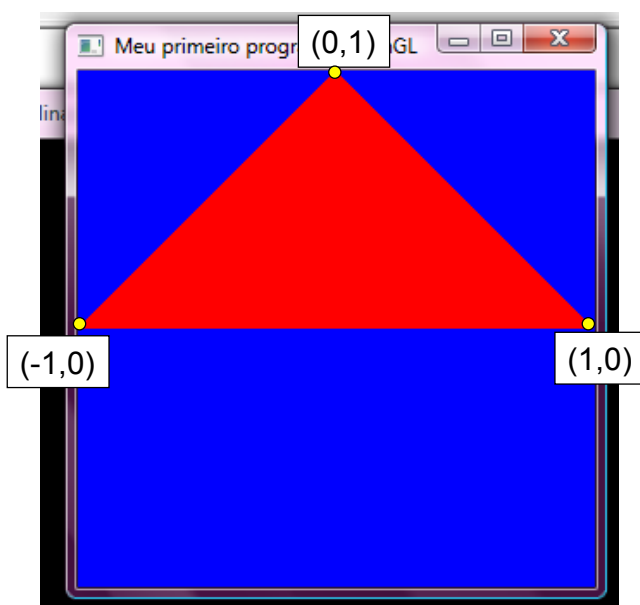


Posicionamento de Objetos Gráficos

Translação para a posição (4,6)
Translação para a posição (3,3)



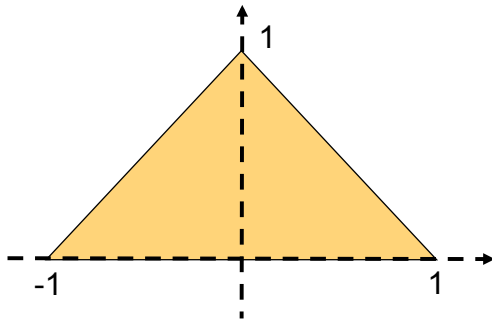
Objetos gráficos



```
P1.x = 0;    P1.y = 1;  
P2.x = -1;   P2.y = 0;  
P3.x = 1;    P3.y = 0;
```

```
glBegin (GL_TRIANGLES);  
glVertex2f (P1.x,P1.y);  
glVertex2f (P2.x,P2.y);  
glVertex2f (P3.x,P3.y);  
glEnd();
```

Representação de objetos gráficos



Geometria

P1	(-1,0)
P2	(1,0)
P3	(0,1)

vértices

Topologia

P1	P2
P2	P3
P3	P1

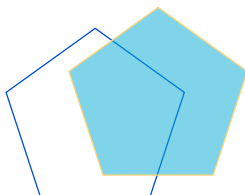
arestas

Ponto como matriz coluna:

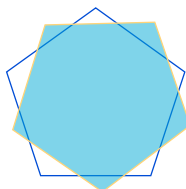
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Principais Transformações Geométricas

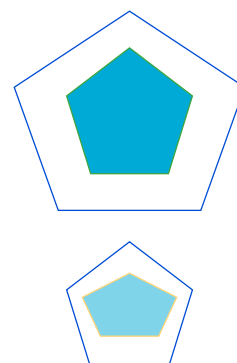
Translação



Rotação



Escala



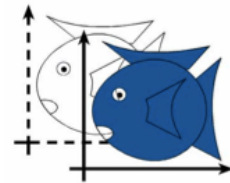
- Aplicadas aos vértices
- Modificam o objeto como um todo
- Não alteram a topologia!

Classes de Transformações

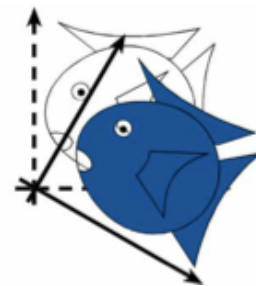
- **Corpos rígidos**
 - Preservam distância e ângulos

Corpos Rígidos

Translação Rotação



Translação



Rotação

Classes de Transformações

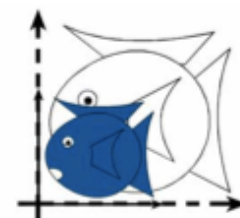
- **Similares**
 - Preservam ângulos

Similares

Corpos Rígidos

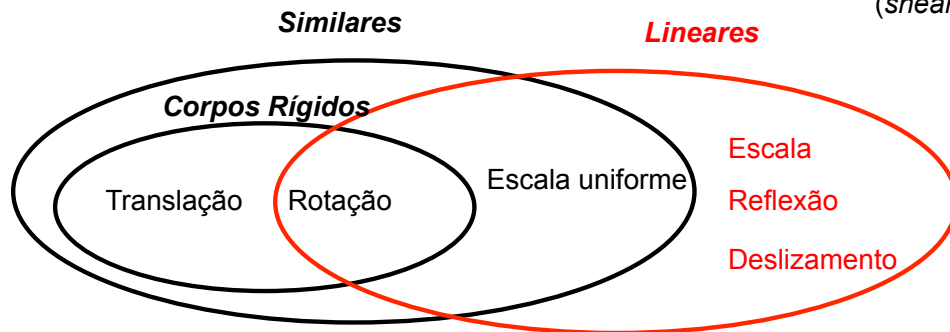
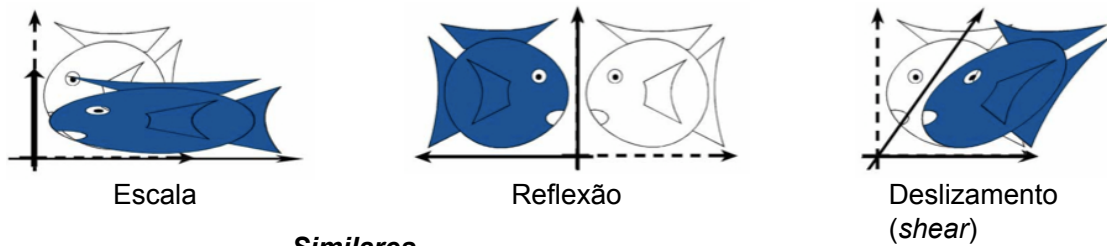
Translação Rotação

Escala uniforme



Escala Uniforme

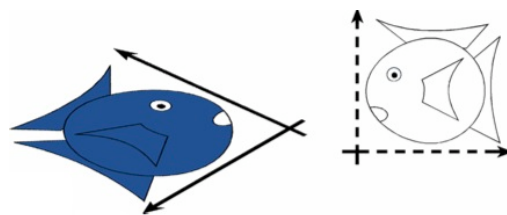
Transformações Lineares



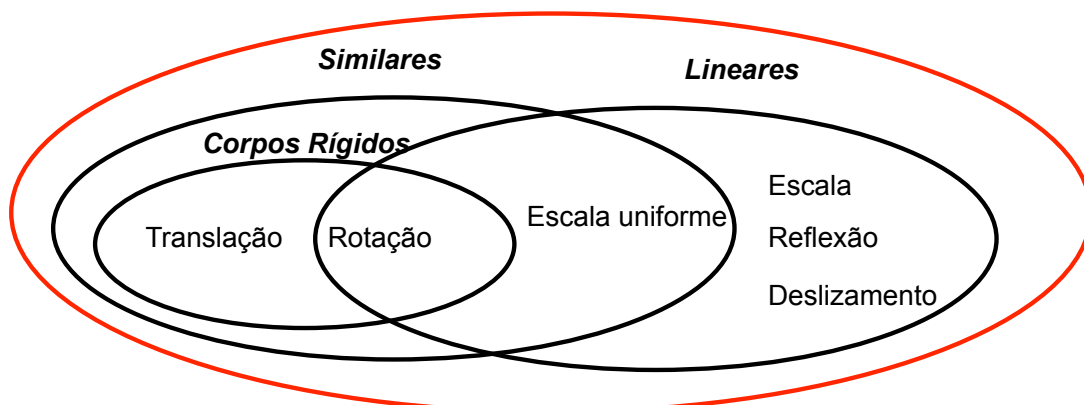
$$L(p+q) = L(p) + L(q)$$

$$L(ap) = aL(p)$$

Transformações Afim



Afim



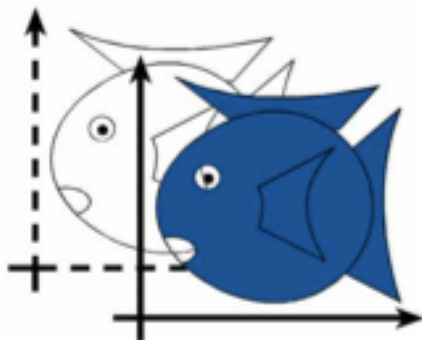
Preservam linhas paralelas

Transformações

- 2D
- 3D

Translação de um Objeto

- Modificamos a localização espacial do objeto
- Não modifica a forma
- Parâmetros da translação?
- Coordenadas após a translação?



$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

Transformações 2D - Translação

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Representação matricial

Transformações 2D - Escala

- Coordenadas são multiplicados pelos fatores de escala
- Modificam a forma do objeto

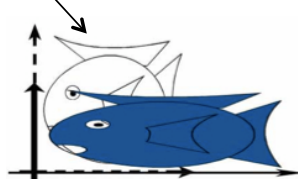
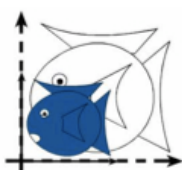
- Tipos de Escala

- Uniforme:

- $s_x = s_y$

- Não-Uniforme

- $s_x \neq s_y$



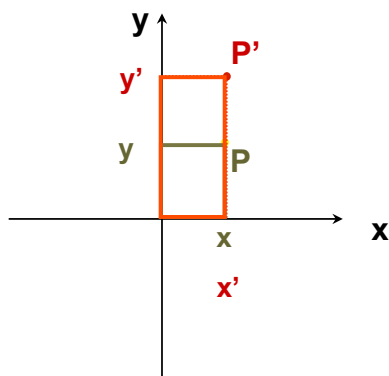
Fatores de Escala

$$x' = x \cdot s_x$$
$$y' = y \cdot s_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Representação matricial

Mudança de escala



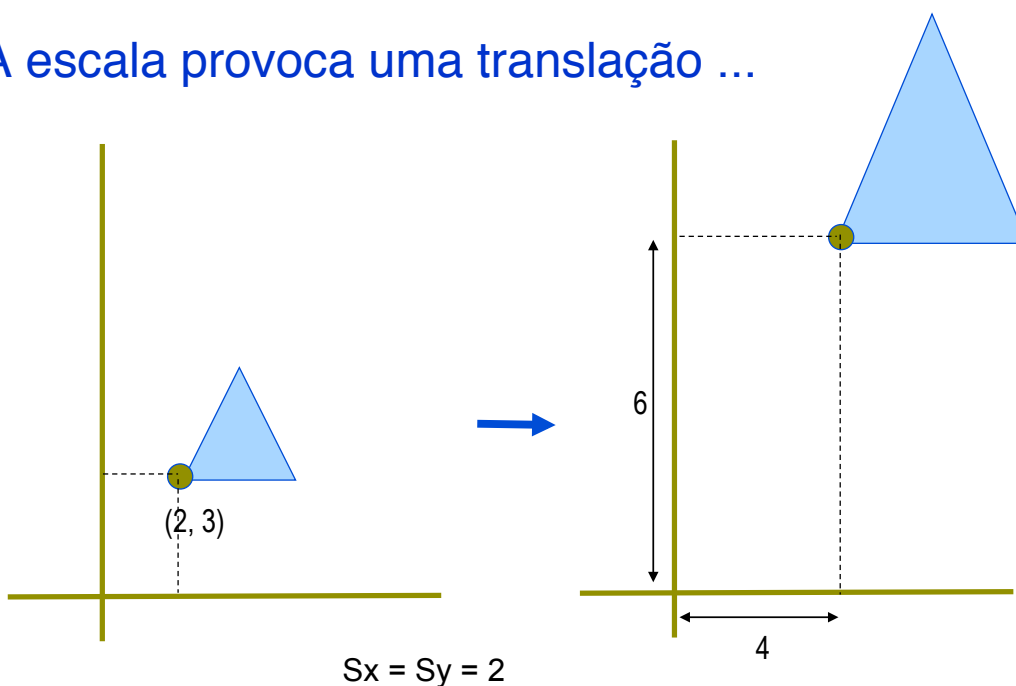
$$x' = x$$

$$y' = sy.y$$

Observar que a mudança de escala é realizada relativamente à origem do sistema de coordenadas!

Objeto não localizado na origem

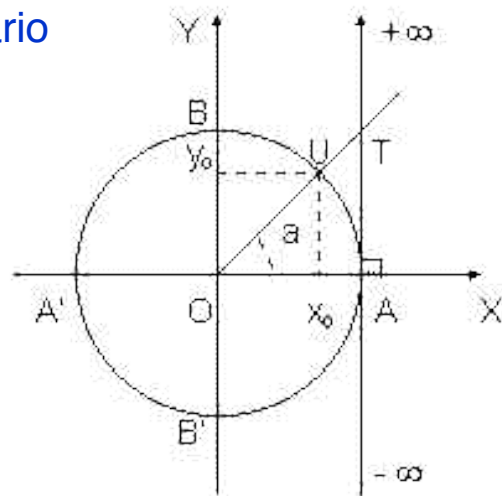
- A escala provoca uma translação ...



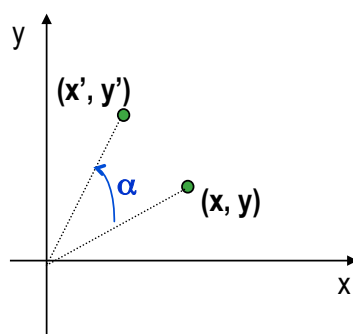
Veremos como consertar este problema daqui a pouco...

Rotação - revisão

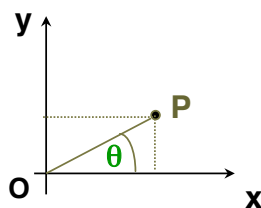
- Tomando o círculo de raio unitário
- Ângulos
 - Graus e Radianos
 - $1 \text{ grau} = \pi/180 \text{ radianos}$
 - Seno, cosseno, tangente
 - $\sin a = y_0$
 - $\cos a = x_0$
 - $\operatorname{tg} a = AT$
 - $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
 - $\operatorname{tg} a = \sin a / \cos a$



Rotação de um ponto



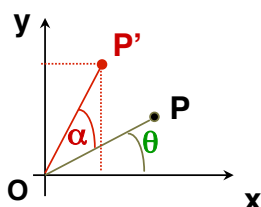
Rotação de um ponto



$$r = \overline{OP}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



$$r = \overline{OP}$$

$$x' = r \cos (\theta + \alpha)$$

$$y' = r \sin (\theta + \alpha)$$

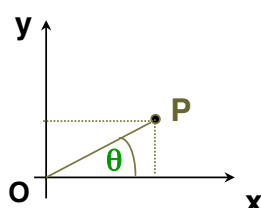
$$\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha$$

$$\sin \theta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \theta$$

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$

$$y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

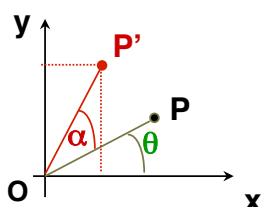
Rotação de um ponto



$$r = \overline{OP}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



$$r = \overline{OP}$$

$$x' = r \cos (\theta + \alpha)$$

$$y' = r \sin (\theta + \alpha)$$

Observar que a rotação é realizada em torno da origem do sistema de coordenadas!

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$

$$y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

Rotação – Representando Matricialmente

$$x' = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$

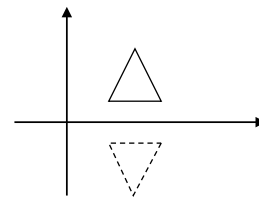
$$y' = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações 2D – Reflexão

- Ao redor do eixo X

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



Quais os valores de a,b,c,d?

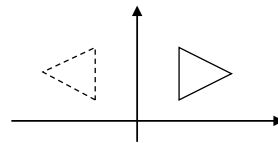
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

Transformações 2D – Reflexão

- Ao longo do eixo Y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Quais os valores de a,b,c,d?

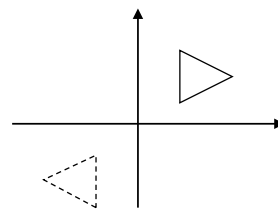


$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações 2D – Reflexão

- Ao redor do eixo XY

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$



Quais os valores de a,b,c,d?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

Transformações 2D

Deslizamento (Cisalhamento)

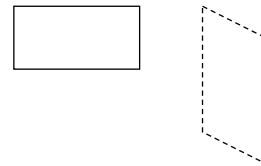
- Deslizamento na direção x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Sh_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \cdot Sh_x \\ y \end{pmatrix}$$

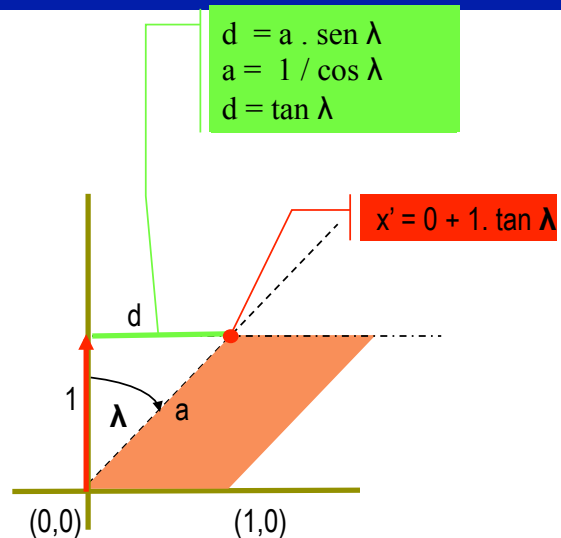
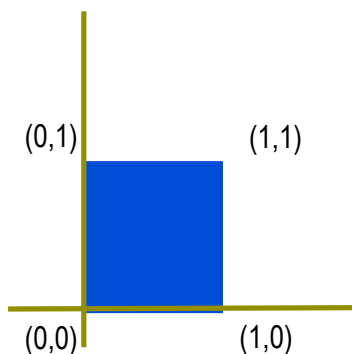


- Deslizamento na direção y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Sh_y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ Sh_y \cdot x + y \end{pmatrix}$$



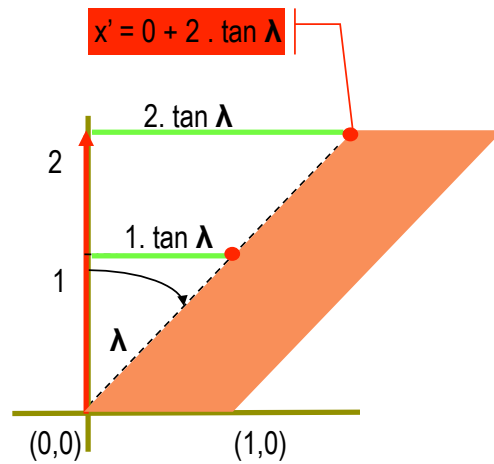
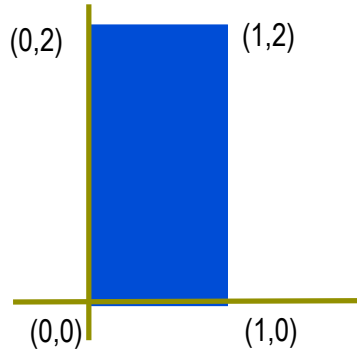
Cisalhamento (“shear”)



$$\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

Cisalhamento (“shear”)



$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

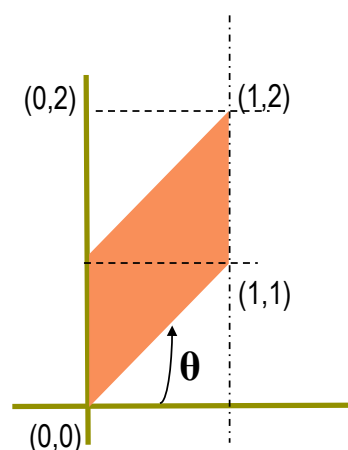
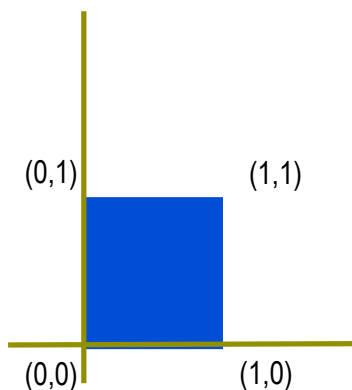
$$\begin{bmatrix} 1 & \tan \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento em X

$$x_p' = x_p + y_p \cdot \tan \lambda$$

$$y_p' = y_p$$

Cisalhamento (“shear”)



$$\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

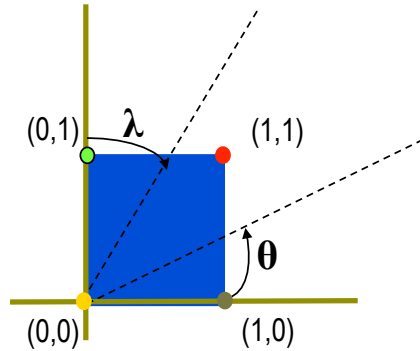
$$\begin{bmatrix} 1 & \tan \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento em X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento em Y

Cisalhamento

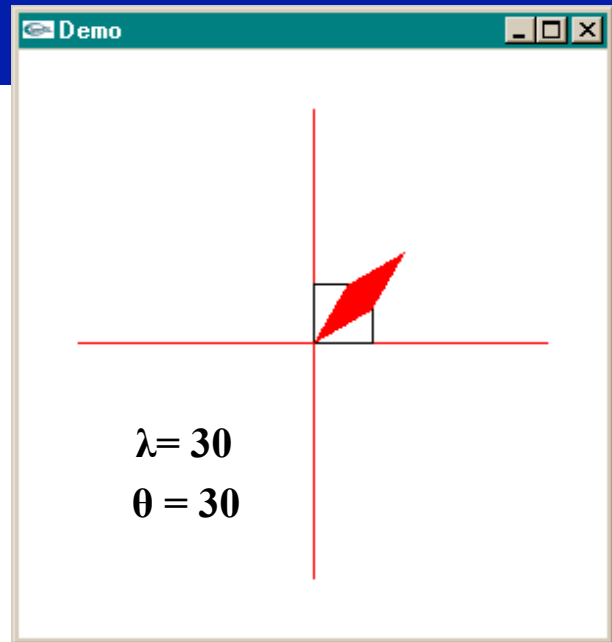


$$\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

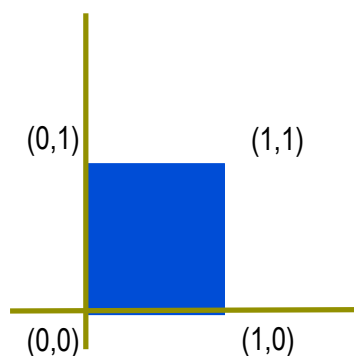
Escala

$$\begin{bmatrix} 1 & \tan \lambda & 0 \\ \tan \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento



Cisalhamento ("shear")

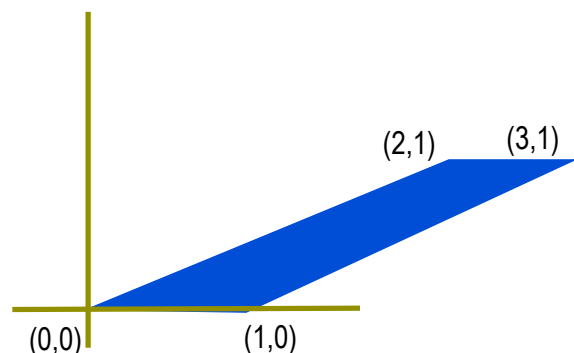


$$\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

$$\begin{bmatrix} 1 & shx & 0 \\ shy & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento



$$xp' = xp + yp.shx$$

$$yp' = xp.shy + yp$$

Representando Transformações

- Genericamente em 2D

$$x' = ax + by + c$$

$$y' = dx + ey + f$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

$$p' = Mp + t$$

Resumo Transformações 2D

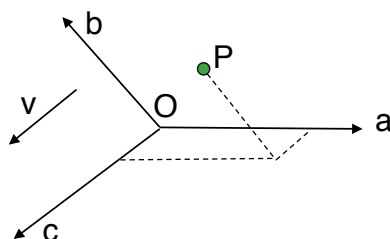
- Notação matricial simplifica escrita
 - Translação expressa como uma soma de vetores
 - Escala e Rotação expressas como multiplicação
- Porém, é interessante uma notação uniforme e consistente
 - Permitir que se expresse as três operações de maneira idêntica
 - Permitir que se expresse a combinação destas três operações também de maneira idêntica
- Como fazer isso?

Coordenadas Homogêneas

- Adiciona uma outra dimensão w
- 2D \rightarrow 3D
 - $(x,y) \rightarrow (x,y,w)$
- 3D \rightarrow 4D
 - $(x,y,z) \rightarrow (x,y,z,w)$
- $w = 0$, vetores
 - Útil em projeções;
- Homogeneizar: dividir por w
- Em CG SEMPRE se usa $w=1$!

Coordenadas Homogêneas

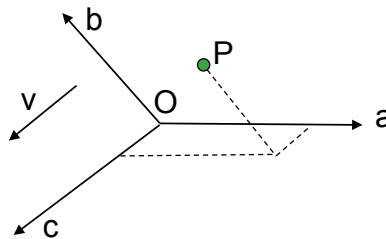
- Qual a diferença entre pontos e vetores ?
 - $v = (3, 5, 7)$
 - $P = (5, 3, 1)$
 - Pontos possuem uma **localização**, mas não tamanho ou direção
 - Vetores possuem **tamanho** e **direção**, mas não localização
 - Tanto pontos como vetores são relativos a um sistema de coordenadas



Confusão qdo. temos vários sistemas de coordenadas \rightarrow comum em CG

Coordenadas Homogêneas

- Qual a diferença entre pontos e vetores ?
 $v = (v_1, v_2, v_3) = v_1a + v_2b + v_3c$
 $P = (p_1, p_2, p_3) = O + p_1a + p_2b + p_3c$
- Como representar pontos e vetores usando a mesma notação ?
 – Usar $(a, b, c, \Omega) \rightarrow$ **Coordenadas Homogêneas**
 $v = (v_1, v_2, v_3, 0)$
 $p = (p_1, p_2, p_3, 1)$



Coordenadas Homogêneas

- Propriedades:
 - Diferença entre 2 pontos gera 1 vetor:
 - $(x_0, y_0, z_0, 1) - (x_1, y_1, z_1, 1) = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1, 0)$
 - Soma de 1 ponto e 1 vetor gera 1 ponto:
 - $(x, y, z, 1) + (v_1, v_2, v_3, 0) = (x + v_1, y + v_2, z + v_3, 1)$
 - Dois pontos não podem ser somados:
 - ~~• $(x_0, y_0, z_0, 1) + (x_1, y_1, z_1, 1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1, 1 + 1)$~~
 - Dois vetores somados geram 1 vetor:
 - $(v_1, v_2, v_3, 0) + (w_1, w_2, w_3, 0) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, 0)$
 - A escala de um vetor gera outro vetor:
 - $3 * (v_1, v_2, v_3, 0) = (3v_1, 3v_2, 3v_3, 0)$
 - Combinação linear de vetores:
 - $av + bw = (av_1 + bw_1, av_2 + bw_2, av_3 + bw_3, 0)$,
 para $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$

Coordenadas Homogêneas

- **Coordenadas ordinárias para homogêneas**
 - Ponto: acrescenta 1 na tupla
 - Vetor: acrescenta 0 na tupla
- **Coordenadas homogêneas para ordinárias**
 - Ponto: dividir pela última coordenada (que é 1)
 - Vetor: remova a última coordenada (que é 0)

Qual a vantagem?

Matriz de Translação em Coordenadas Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$
$$\begin{cases} \frac{x'}{w'} = \frac{x}{w} + t_x \\ \frac{y'}{w'} = \frac{y}{w} + t_y \end{cases}$$
$$\begin{cases} x' = x + wt_x \\ y' = y + wt_y \\ w' = w \end{cases}$$

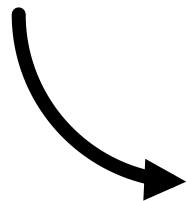
Translação agora também pode ser representada por multiplicação de matrizes!!

Escala 2D – Coord. Homogêneas

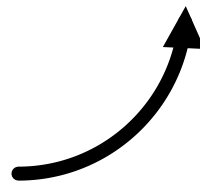
Matriz de Escala em Coordenadas Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{w'} = s_x \frac{x}{w} \\ \frac{y'}{w'} = s_y \frac{y}{w} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \\ w' = w \end{cases}$$

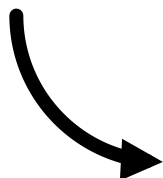


Rotação 2D – Coord. Homogêneas

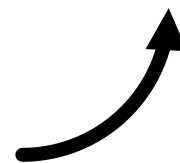
Matriz de Rotação em Coordenadas Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{w'} = \cos \theta \frac{x}{w} - \sin \theta \frac{y}{w} \\ \frac{y'}{w'} = \sin \theta \frac{x}{w} + \cos \theta \frac{y}{w} \end{cases}$$

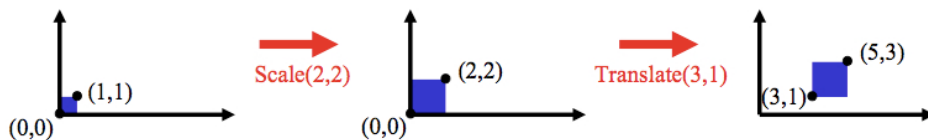


$$\begin{cases} x' = \cos \theta x - \sin \theta y \\ y' = \sin \theta x + \cos \theta y \\ w' = w \end{cases}$$



Composição de Transformações

Escala seguida de Translação

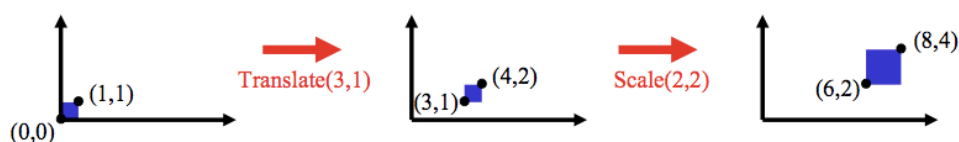


$$p' = T(Sp) = TS p$$

$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

Translação seguida de Escala



$$p' = S(Tp) = ST p$$

$$ST = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

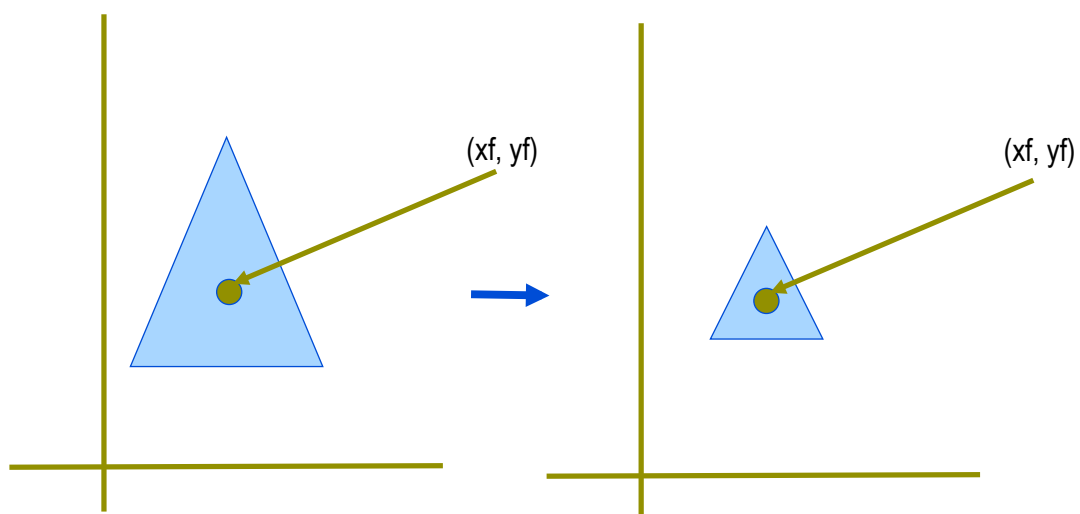
A matriz resultante é diferente!!!

Composição de Transformações

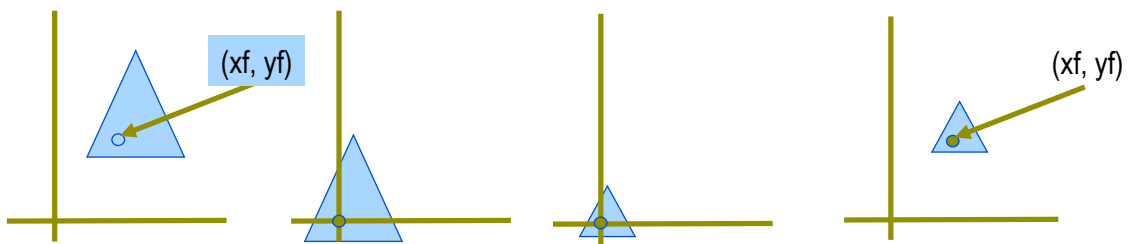
- Multiplicação de Matrizes **não** é comutativa
- Ordem das operações influencia diretamente
 - Rotação seguida de translação é diferente de translação seguida de rotação
- <http://www.cs.princeton.edu/~min/cs426/jar/transform.html>

Qual a ordem correta?
Depende do resultado desejado...

Escala relativa a um ponto

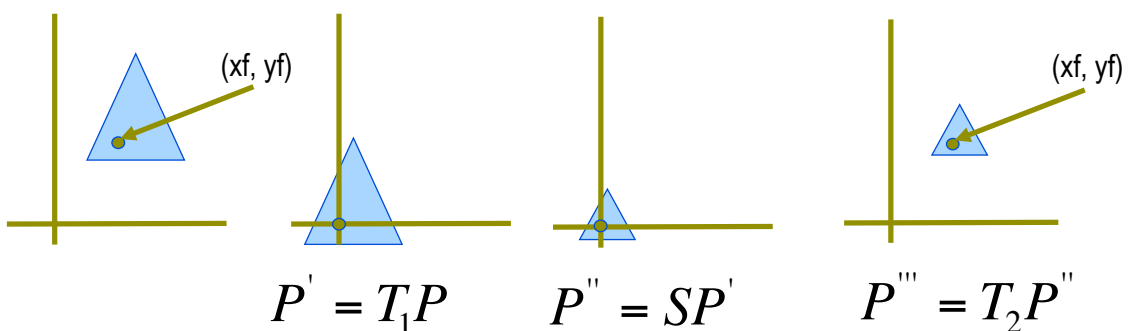


Escala relativa a um ponto



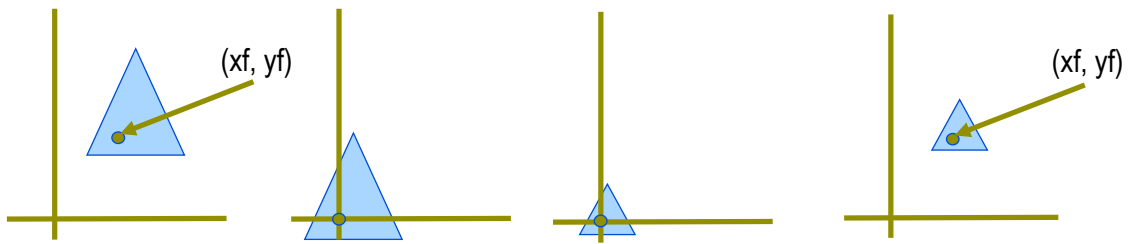
- Translação do triângulo para a origem
 - $dx = -xf$, $dy = -yf$
- Efetua a escala
- Translação de “volta” ao ponto de origem
 - $dx = xf$, $dy = yf$

Escala relativa a um ponto



$$P''' = T_2 S T_1 P$$

Escala relativa a um ponto



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & xf \\ 0 & 1 & yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -xf \\ 0 & 1 & -yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & (1-sx)xf \\ 0 & sy & (1-sy)yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

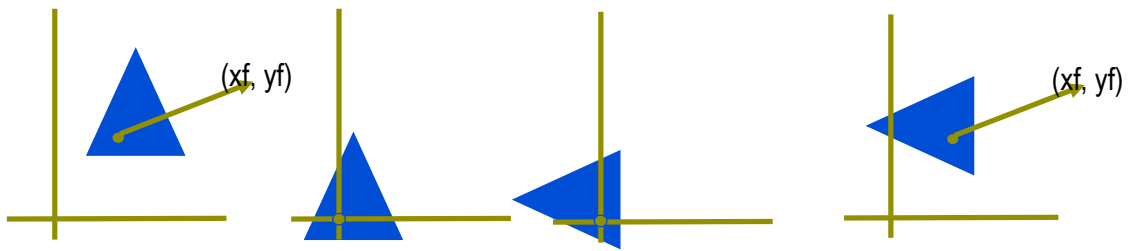
Matriz resultado

Rotação em torno de um ponto qualquer



- Como obter o resultado acima??

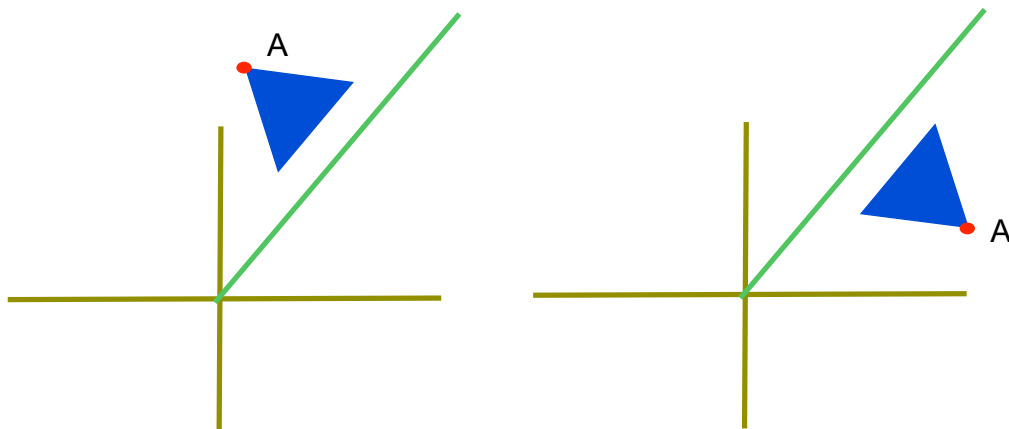
Rotação relativa a um ponto



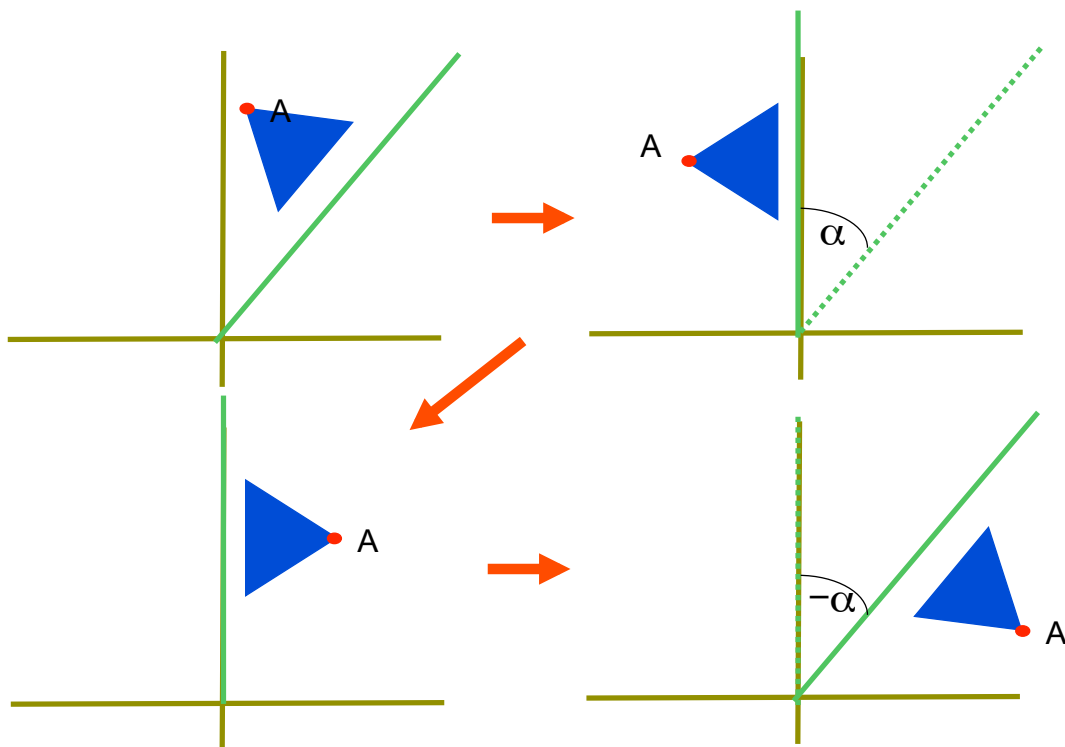
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & xf \\ 0 & 1 & yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & -xf \\ 0 & 1 & -yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & p \\ \sin \alpha & \cos \alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$p = (1 - \cos \alpha) xf + yf \sin \alpha$
 $q = (1 - \cos \alpha) yf - xf \sin \alpha$

Reflexão relativa a um eixo



Reflexão relativa a um eixo

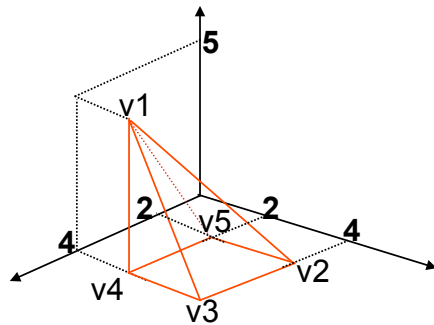


Qual a sequência de matrizes?

Transformações

- 2D
- 3D

Translação



Geometria

V1	(2,5,4)
V2	(4,0,2)
V3	(4,0,4)
V4	(2,0,4)
V5	(2,0,2)

Topologia

V1	V2
V1	V3
V1	V4
V1	V5
V2	V3
V2	V4
V2	V5
V3	V4
V3	V5
V4	V5

• Representação matricial

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} tx \\ ty \\ tz \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P' = P + T} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tx \\ ty \\ tz \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+tx \\ y+ty \\ z+tz \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação 3D - matricialmente

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

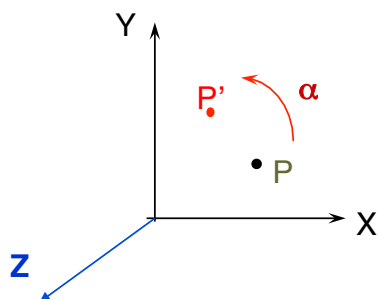
Mudança de escala

- Objetos 3D

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{P' = S \cdot P} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

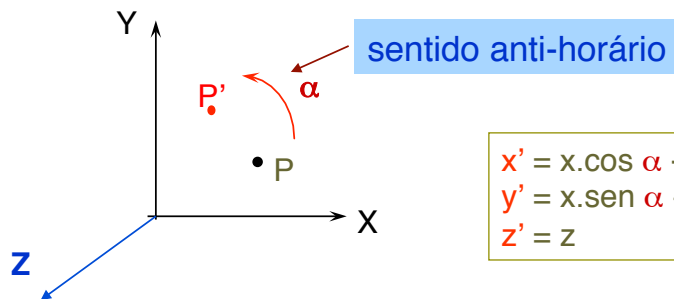
fatores sx, sy, sz

Rotação 3D



Rotação 3D

- No plano XY, em torno do eixo **Z**



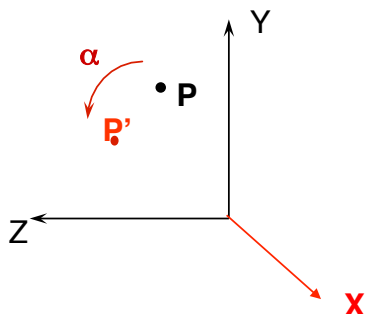
$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha \\ y' &= x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha \\ z' &= z \end{aligned}$$

Z não muda...

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

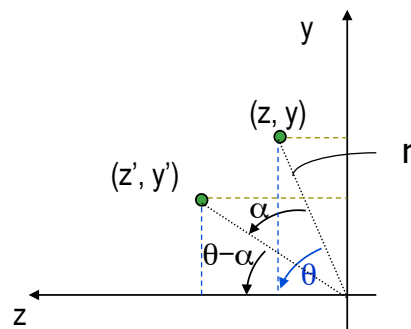
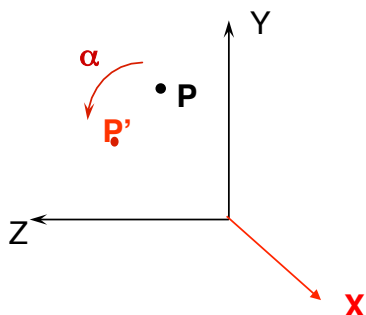
Rotação 3D

- No plano YZ, em torno do eixo **X**



Rotação 3D

- No plano YZ, em torno do eixo X



$$y = r \cdot \sin \theta \quad z = r \cdot \cos \theta$$

$$y' = r \cdot \sin (\theta - \alpha)$$

$$z' = r \cdot \cos (\theta - \alpha)$$

$$y' = r \cdot (\sin \theta \cdot \cos \alpha - \cos \theta \cdot \sin \alpha)$$

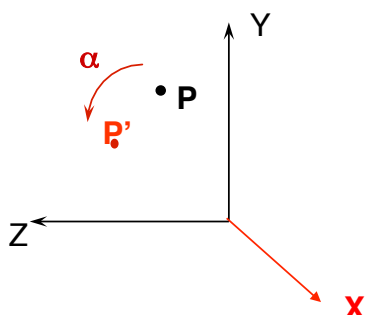
$$z' = r \cdot (\cos \theta \cdot \cos \alpha + \sin \theta \cdot \sin \alpha)$$

$$y' = y \cos \alpha - z \sin \alpha$$

$$z' = y \sin \alpha + z \cos \alpha$$

Rotação 3D

- No plano YZ, em torno do eixo X



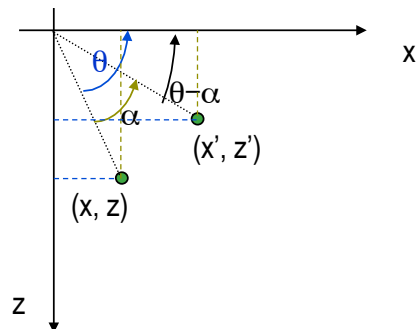
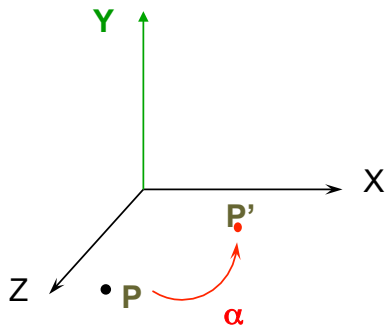
$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y \cdot \cos \alpha - z \cdot \sin \alpha \\ z' &= y \cdot \sin \alpha + z \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

X não muda...

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

- No plano XZ, em torno do eixo Y



$$x = r \cdot \cos \theta \quad z = r \cdot \sin \theta$$

$$x' = r \cdot \cos (\theta - \alpha)$$

$$z' = r \cdot \sin (\theta - \alpha)$$

$$x' = r \cdot (\cos \theta \cdot \cos \alpha + \sin \theta \cdot \sin \alpha)$$

$$z' = r \cdot (\sin \theta \cdot \cos \alpha - \cos \theta \cdot \sin \alpha)$$

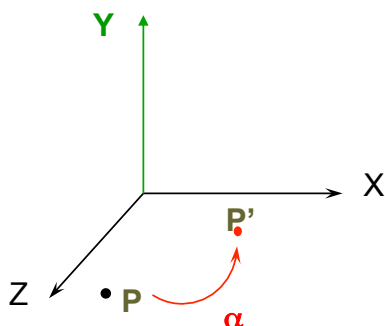
$$x' = x \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha$$

$$z' = z \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha$$

UFRGS

Rotação 3D

- No plano XZ, em torno do eixo Y



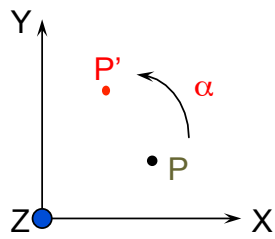
$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos \alpha + z \cdot \sin \alpha \\ y' &= y \\ z' &= x \cdot (-\sin \alpha) + z \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Y não muda...

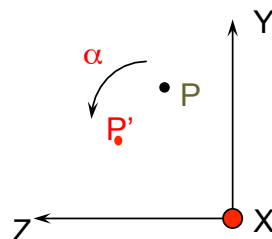
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

UFRGS

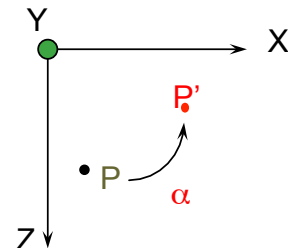
Rotações em 3D



em torno de Z

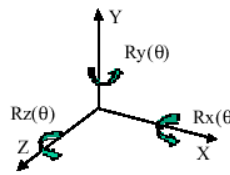


em torno de X



em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = M_R \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

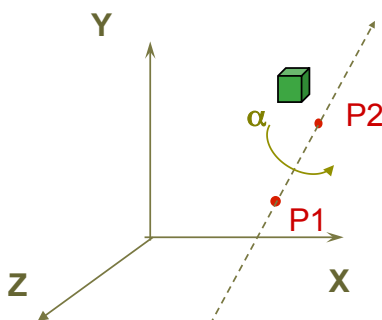


$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

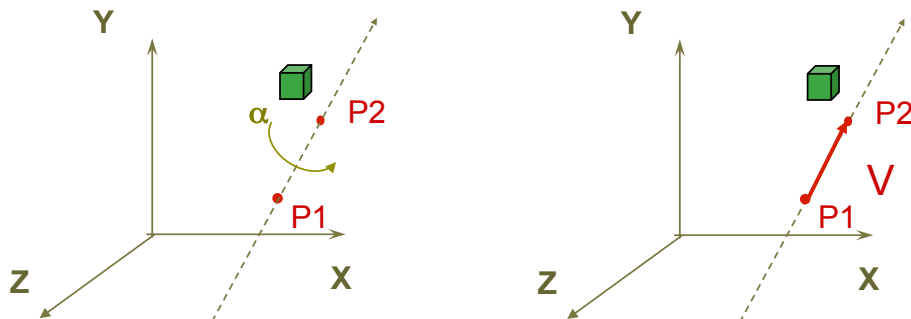
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

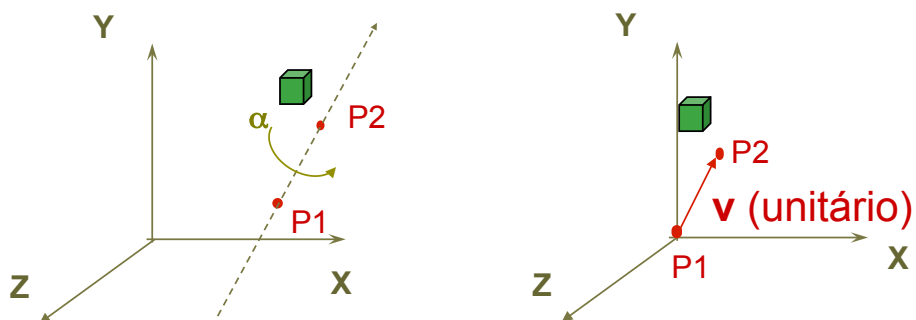
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

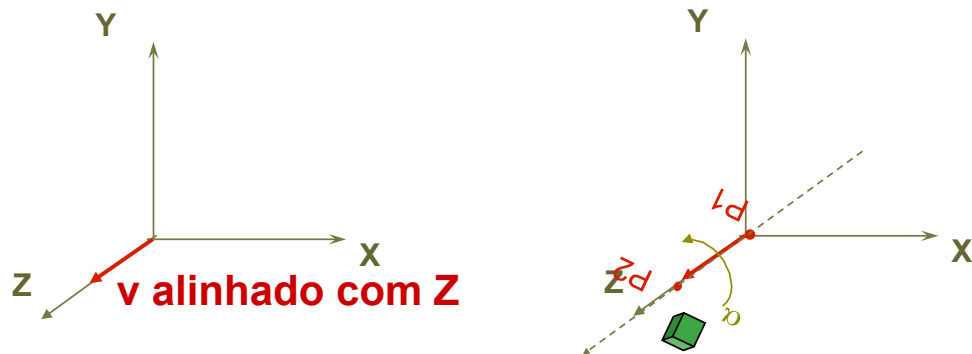


Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



Translação $(-xp_1, -yp_1, -zp_1)$

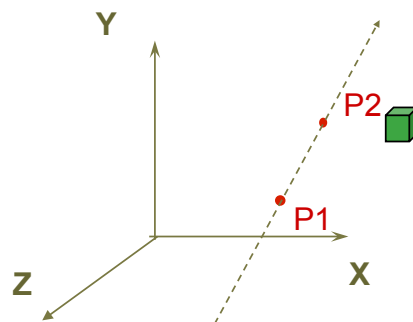
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



Rotação em torno de Z: R_{α}

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

- Efetuada a rotação no objeto, realizar as transformações inversas, “levando” o eixo de volta à posição original.



Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

- Aplicar transformações que levem \mathbf{v} a coincidir com um dos eixos (z, por exemplo)
- Aplicar a rotação em torno do eixo escolhido
- Aplicar transformações inversas às anteriores, para levar \mathbf{v} de volta à posição original

$$P' = \underbrace{T^{-1} R_x^{-1} R_y^{-1} R_\alpha R_y R_x T}_{M} \cdot P$$

Rotação - Eixo genérico

Fórmula de Rodrigues

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x k_x (1-c) + c & k_z k_x (1-c) - k_z s & k_x k_z (1-c) + k_y s & 0 \\ k_y k_x (1-c) + k_z s & k_z k_x (1-c) + c & k_y k_z (1-c) - k_x s & 0 \\ k_z k_x (1-c) - k_y s & k_z k_x (1-c) - k_x s & k_z k_z (1-c) + c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

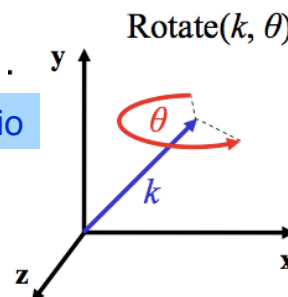
onde $c = \cos \theta$

$s = \sin \theta$

O vetor k expressa o eixo de rotação arbitrário

• `glRotatef(angle, x, y, z)`

Em OpenGL



Translação/Escala em OpenGL

- Translação – `glTranslatef(tx, ty, tz)`

– $T(tx, ty, tz)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Escala – `glScalef(Sx, Sy, Sz)`

– $S(Sx, Sy, Sz)$:

$$\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Compondo as transformações

Escalas, Rotações Translações

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{matrix} & \begin{matrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Translações

Escalas, Rotações

Translações

$$\begin{pmatrix} a & d & g & d_x \\ b & e & h & d_y \\ c & f & i & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Escala

Escalas, Rotações

Translações

$$\begin{pmatrix} a & d & g & d_x \\ b & e & h & d_y \\ c & f & i & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rotação

Escalas, Rotações

Translações

$$\begin{pmatrix} a & d & g & d_x \\ b & e & h & d_y \\ c & f & i & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

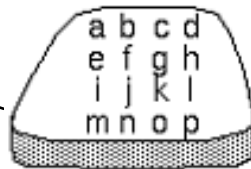
Rotações

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas em OpenGL

```
glBegin(GL_TRIANGLE);
glVertex2i(0,0);
glVertex2i(0,2);
glVertex2i(2,0);
glEnd();
```

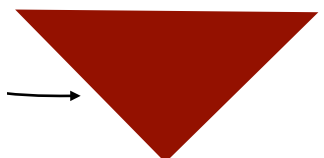
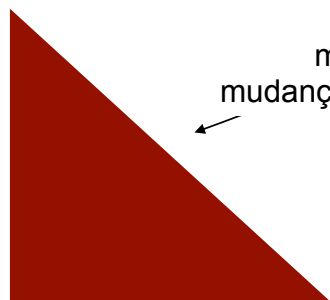
**MATRIZ de
TRANSFORMAÇÃO
CORRENTE**



matriz
identidade

matriz
rotação

matriz
mudança de escala



Transformações geométricas em OpenGL

Qual a ordem de especificação das transformações?
Por exemplo:

```
glRotatef();  
glTranslatef();  
Draw_cube();
```

```
glTranslatef();  
glRotatef();  
Draw_cube();
```

Em OpenGL, o **último comando** de transformação é o primeiro a ser executado



Exercícios

- A ordem de aplicação das transformações é importante?

– Sempre? Se não, quando altera o resultado?

Decida e prove se as seguintes transformações são comutativas ou não:

- a. $T_1T_2 = T_2T_1$ (duas translações em seqüência)
- b. $S_1S_2 = S_2S_1$ (duas escalas em seqüência)
- c. $R_1R_2 = R_2R_1$ (duas rotações em seqüência)
- d. $SR = RS$ (uma escala seguida de uma rotação)
- e. $TS = ST$ (uma translação seguida de uma escala)



Exercícios

- Prove matematicamente que a aplicação de 2 rotações em seqüência equivale a aplicar uma rotação onde o ângulo de rotação resultante é igual à soma dos ângulos das 2 rotações individuais.

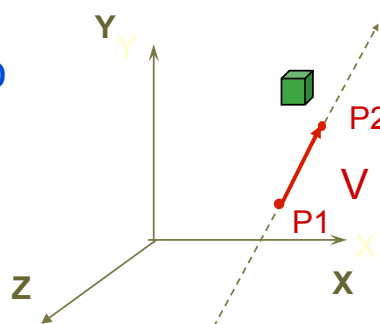
ANEXOS

Detalhando rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

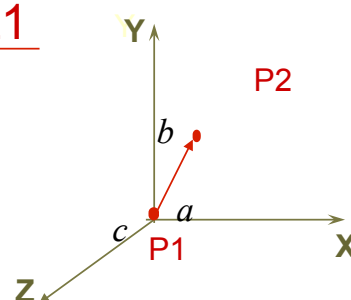
- Seja $V = P_2 - P_1$, eixo de rotação
– $V = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

$$v = \frac{V}{|V|} = (a, b, c)$$

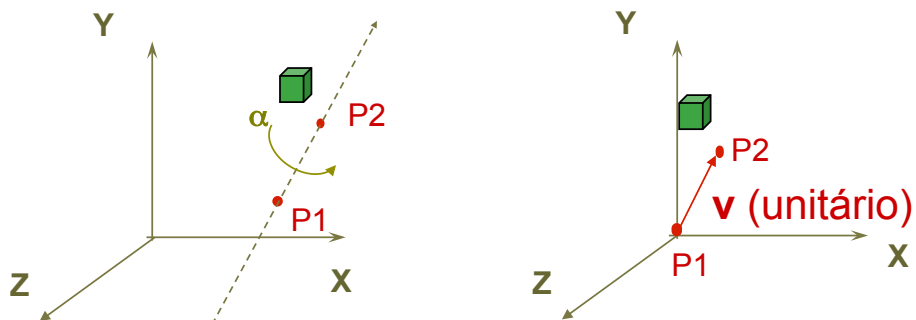


$$a = \frac{x_2 - x_1}{|V|} \quad b = \frac{y_2 - y_1}{|V|} \quad c = \frac{z_2 - z_1}{|V|}$$

(a, b, c) são cossenos diretores de v

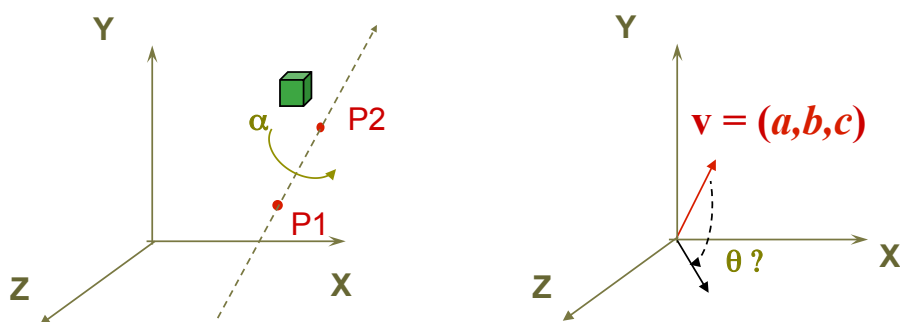


Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

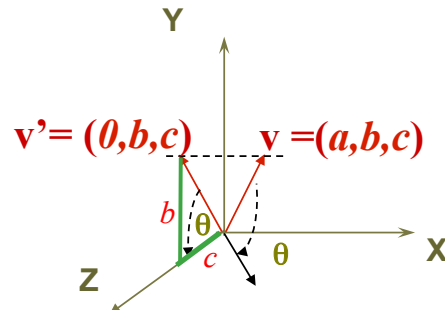
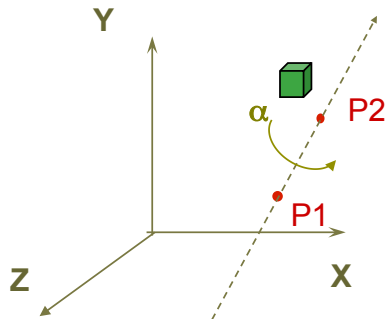


Translação $(-x_{p1}, -y_{p1}, -z_{p1})$

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



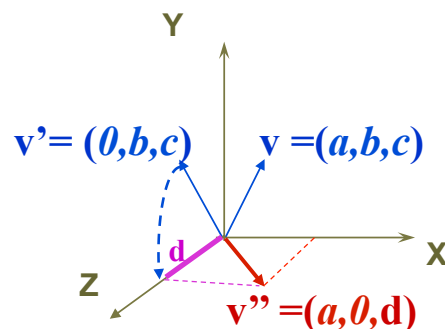
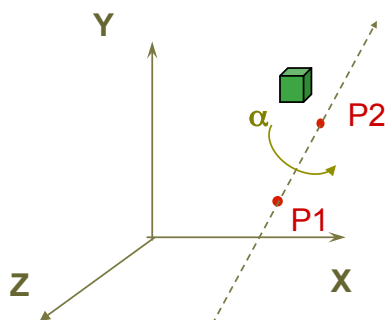
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



$$d = |v'| = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\cos \theta = \frac{c}{d}$$

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

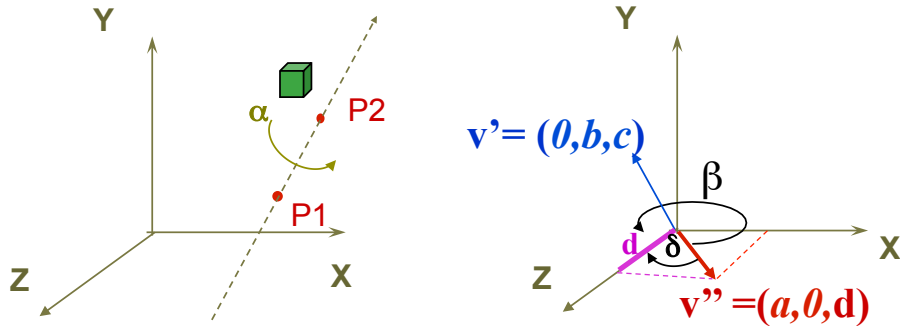


Rotação em torno de X: R_θ

$$\cos \theta = \frac{c}{d}$$

$$\sin \theta = \frac{b}{d}$$

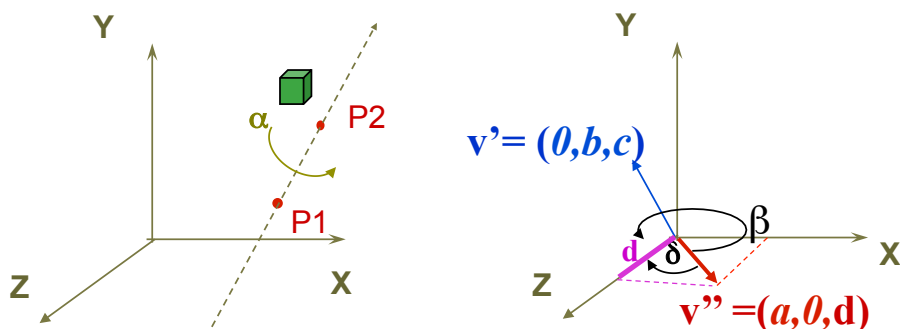
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



$$\mathbf{k} = (0, 0, 1) \quad |\mathbf{v}''| = |\mathbf{k}| = 1$$

$$\cos \beta = \cos \delta = \frac{\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{v}''| |\mathbf{k}|} = d$$

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

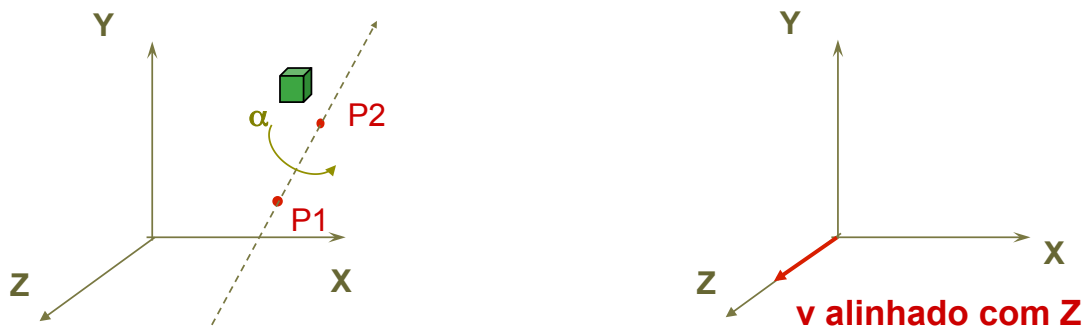


Rotação em torno de Y: R_{β}

$$\cos \beta = d$$

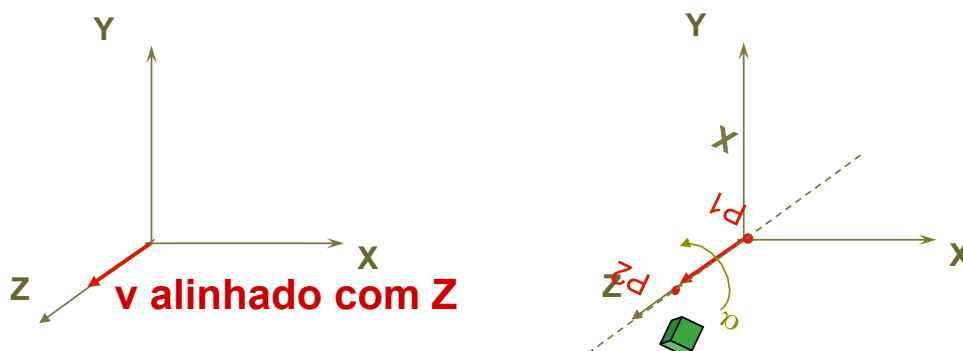
$$\sin \beta = -\sin \delta = -a$$

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



Rotação em torno de Z: R_{α}

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



Rotação em torno de Z: R_{α}

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

- Efetuada a rotação no objeto, realizar as transformações inversas a R_β , R_θ e T .

