Outros exemplos

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$$f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$$

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$$f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$$

Suponha que f e g são funções polinomiais :$f(n)= \Theta(n^r)$ e $g(n)= \Theta(n^s)$. O que se pode afirmar sobre a função composta g(f(n)) ?

$\Rightarrow g(f(n)) = \Theta(n^{rs})$

Solução (1)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

Solução (1)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

somando f_2 nos dois lados de (I), obtemos, $f_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + f_2$

Solução (1)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

somando f_2 nos dois lados de (I), obtemos, $f_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + f_2$

somando $c_1 g_1$ nos dois lados de (II), obtemos, $c_1 g_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + c_2 g_2$

Solução (1)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

somando f_2 nos dois lados de (I), obtemos, $f_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + f_2$

somando $c_1 g_1$ nos dois lados de (II), obtemos, $c_1 g_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + c_2 g_2$

Por transitividade, obtemos $f_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + c_2 g_2$

Solução (1)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

somando f_2 nos dois lados de (I), obtemos, $f_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + f_2$

somando $c_1 g_1$ nos dois lados de (II), obtemos, $c_1 g_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + c_2 g_2$

Por transitividade, obtemos $f_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + c_2 g_2$

Fazendo $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$ e $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$

Solução (1)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

somando f_2 nos dois lados de (I), obtemos, $f_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + f_2$

somando $c_1 g_1$ nos dois lados de (II), obtemos, $c_1 g_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + c_2 g_2$

Por transitividade, obtemos $f_1 + f_2 \leq c_1 g_1 + c_2 g_2$

Fazendo $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$ e $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$

temos $f_1 + f_2 \leq c_3(g_1 + g_2)$

Portanto $f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$

Solução (2)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

Solução (2)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

multiplicando f_2 nos dois lados de (I), obtemos, $f_1 f_2 \leq c_1 g_1 f_2$

Solução (2)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:
$f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

multiplicando f_2 nos dois lados de (I), obtemos, $f_1 f_2 \leq c_1 g_1 f_2$

multiplicando $c_1 g_1$ nos dois lados de (II), obtemos, $c_1 g_1 f_2 \leq c_1 g_1 c_2 g_2$

Solução (2)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

multiplicando f_2 nos dois lados de (I), obtemos, $f_1 f_2 \leq c_1 g_1 f_2$

multiplicando $c_1 g_1$ nos dois lados de (II), obtemos, $c_1 g_1 f_2 \leq c_1 g_1 c_2 g_2$

Por transitividade, obtemos $f_1 f_2 \leq c_1 g_1 c_2 g_2$

Solução (2)

Suponha que $f_i = O(g_i)$ para i=1,2. Mostre ou dê um contra-exemplo:

$$f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$$

Sabemos que

$$(\exists c_i \in R_+)\ (\exists n_i \in N)\ (\forall n \geq n_i)\ (f_i \leq c_i g_i) \text{ para i=1,2}$$

$$f_1 \leq c_1 g_1 (I) \text{ e } f_2 \leq c_2 g_2 (II)$$

multiplicando f_2 nos dois lados de (I), obtemos, $f_1 f_2 \leq c_1 g_1 f_2$

multiplicando $c_1 g_1$ nos dois lados de (II), obtemos, $c_1 g_1 f_2 \leq c_1 g_1 c_2 g_2$

Por transitividade, obtemos $f_1 f_2 \leq c_1 g_1 c_2 g_2$

Fazendo $c_3 = c_1 c_2$ e $n_3 = \max\{n_1, n_2\}$, temos $f_1 f_2 \leq c_3 (g_1 g_2)$

Portanto $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$

Solução (3)

Suponha que f e g são funções polinomiais :f(n)= Θ(n^r) e g(n)= Θ(n^s). O que se pode afirmar sobre a função composta g(f(n)) ?

$g(n) = \Theta(n^s) \Rightarrow \exists\ n_1,\ c_1 \text{ e } c_2 \text{ tq } \forall n \geq n_1\ \ g(n) \leq c_1 \,.\, n^s \text{ e } c_2 \,.\, n^s \leq g(n)$

$f(n) = \Theta\ (n^r) \Rightarrow\ \exists\ n_2\ c_3 \text{ e } c_4 \text{ tq } \forall n \geq n_2\ \ f(n) \leq c_3 \,.\, n^r \text{ e } c_4 \,.\, n^r \leq f(n)$

Solução (3)

Suponha que f e g são funções polinomiais :f(n)= $\Theta(n^r)$ e g(n)= $\Theta(n^s)$. O que se pode afirmar sobre a função composta g(f(n)) ?

$g(n) = \Theta(n^s) \Rightarrow \exists\ n_1,\ c_1$ e c_2 tq $\forall n \geq n_1\ \ g(n) \leq c_1 \,.\, n^s$ e $c_2 \,.\, n^s \leq g(n)$

$f(n) = \Theta\ (n^r) \Rightarrow\ \exists\ n_2\ c_3$ e c_4 tq $\forall n \geq n_2\ \ f(n) \leq c_3 \,.\, n^r$ e $c_4 \,.\, n^r \leq f(n)$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{\ n_1, n_2\ \}$ $\qquad \Rightarrow\ g(f(n)) \leq c_1\ ((f(n))^s) \leq c_1 \,.(c_3)^s \,.\, n^{rs}$

$\qquad \Rightarrow\ g(f(n)) \leq c' \,.\, n^{rs}$

$\Rightarrow g(f(n)) = O(n^{rs})$

Solução (3)

Suponha que f e g são funções polinomiais :f(n)= $\Theta(n^r)$ e g(n)= $\Theta(n^s)$. O que se pode afirmar sobre a função composta g(f(n)) ?

$g(n) = \Theta(n^s) \Rightarrow \exists\ n_1, c_1$ e c_2 tq $\forall n \geq n_1\ \ g(n) \leq c_1 . n^s$ e $c_2 . n^s \leq g(n)$

$f(n) = \Theta\ (n^r) \Rightarrow\ \exists\ n_2\ c_3$ e c_4 tq $\forall n \geq n_2\ \ f(n) \leq c_3 . n^r$ e $c_4 . n^r \leq f(n)$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{\ n_1, n_2\ \}$ $\qquad \Rightarrow\ g(f(n)) \leq c_1\ ((f(n))^s) \leq c_1 .(c_3)^s . n^{rs}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ g(f(n)) \leq c' . n^{rs}$

$\Rightarrow g(f(n)) = O(n^{rs})$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{\ n_1, n_2\ \}$ $\qquad \Rightarrow\ g(f(n)) \geq c_2\ ((f(n))^s) \geq c_2 . (c_4 . n^r\ )^s. \geq c_2 . (c_4)^s.\ n^{rs}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow\ g(f(n)) \geq c'' . n^{rs}$

$\Rightarrow g(f(n)) = \Theta(n^{rs})$