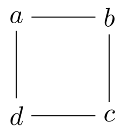
Gabarito da Prova P2 de Otimização Combinatória - 2013-2 - Profa. Luciana S. Buriol

[1)]

1. Dado um grafo (não-direcionado) $G = (V, A)$ queremos encontrar uma função bijetiva $f : V \to \{1, 2, \dots, |V|\}$ tal que a distância total $\sum_{\{u,v\}\in A} |f(u) - f(v)|$ entre os vértices incidentes a cada aresta seja minimizado. Formule um programa inteiro que determina a menor distância total.

   *Exemplo:* Na instância




   o mapeamento $\{a \mapsto 1, b \mapsto 3, c \mapsto 2, d \mapsto 4\}$ possui distância total 8, enquanto o mapeamento ótimo $\{a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3, d \mapsto 4\}$ possui distância total 6.

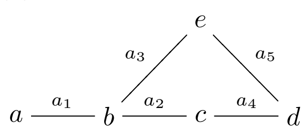
   Seja $x_{vi} = 1$ caso $v \in V$ é mapeado para $i \in [n]$ com $n = |V|$. Além disso define uma variável auxiliar $d_{uv}$ que representa a distância entre os vértices $u$ e $v$ para cada $\{u, v\} \in A$.

$$\begin{aligned}
\textbf{min} \quad & \sum_{\{u,v\}\in A} d_{uv} \\
& \sum_{v\in V} x_{vi} = 1, \quad \forall i \in [n], \\
& \sum_{i\in[n]} x_{vi} = 1, \quad \forall v \in V, \\
& d_{uv} \geq \sum_{i\in[n]} ix_{ui} - ix_{vi}, \quad \forall \{u, v\} \in A, \\
& d_{uv} \geq \sum_{i\in[n]} ix_{vi} - ix_{ui}, \quad \forall \{u, v\} \in A, \\
& d_{uv} \in R, \quad \forall \{u, v\} \in A, \\
& x_{vi} \in B, \quad \forall \{u, v\} \in A, i \in [n]
\end{aligned}$$

2. (Dualidade, 2pt) Considere o problema de cobertura de vértices: dado um grafo não-direcionado pesado $G = (V, A, p)$ com pesos $p_v$ para $v \in V$, queremos encontrar um subconjunto $I \subseteq V$ com a menor soma dos pesos dos vértices deste subconjunto de forma que toda aresta do grafo contenha pelo menos um vértice de $I$. O problema pode ser formulado como

$$\begin{aligned}
\textbf{min.} \quad & \sum_{v\in V} x_v p_v, & \\
\textbf{s. a} \quad & x_u + x_v \geq 1, & \forall \{u, v\} \in A, \\
& x_v \in \{0, 1\}. &
\end{aligned}$$

   *Exemplo*: Considere a instância




   com valores $p_a = 1$, $p_b = 3$, $p_c = 3$, $p_d = 5$ e $p_e = 2$. A solução ótima $I = \{a, c, e\}$ tem custo 6.

   a) Identifique claramente a matriz $A$, e vetores $b$ e $c$ do sistema relativo à instância fornecida.

   b) Apresente o sistema dual do sistema apresentado no item a) aplicado à instância fornecida.

A instância corresponde com $\min\{c^t x \mid Ax \leq b\}$ com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Com variáveis duais $\pi_1, \ldots, \pi_5$ obtemos o dual (da relaxação linear)

$$\begin{aligned} \mathbf{max} \sum_{i \in [5]} \pi_i & \\ \pi_1 \leq 1 & \\ & \pi_1 + \pi_2 + \pi_5 \leq 3 \\ & \pi_2 + \pi_3 \leq 3 \\ & \pi_3 + \pi_4 \leq 5 \\ & \pi_4 + \pi_5 \leq 2 \\ & \pi_i \in R^+ \end{aligned}$$

3. (Resolução, 2.5pt) Considere a formulação

$$\begin{aligned} \mathbf{max.} \quad & -x_1 - 3x_2 - x_3 \\ \mathbf{s.\ a} \quad & 2x_1 - 5x_2 - x_3 \leq -5 \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

   a) O sistema é dualmente viável? Justifique a sua resposta.
   b) Execute um pivô do método dual simplex no dicionário correspondente a este sistema. O dicionário resultante é ótimo?

   a) Sim, porque todos coeficientes na função são negativos.
   b) O dicionário inicial é

$$\begin{array}{rcccc} z = & 0 & -x_1 & -3x_2 & -x_3 \\ \hline x_4 = & -5 & -2x_1 & +5x_2 & +x_3 \\ x_5 = & 4 & -2x_1 & +x_2 & -2x_3 \end{array}$$

   e um pivô dual produz o sistema ótimo

$$\begin{array}{rcccc} z = & -3 & -11/5x_1 & -3/5x_4 & -2/5x_3 \\ \hline x_2 = & 1 & +2/5x_1 & +1/5x_4 & -1/5x_3 \\ x_5 = & 5 & -8/5x_1 & +1/5x_4 & -11/5x_3 \end{array}.$$

4. (Analise de sensibilidade, 2.5pt) Considere o sistema

$$\begin{aligned} \mathbf{max} \quad & x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ \mathbf{s.a} \quad & 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leq -1 \\ & -x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq -2 \\ & 3x_1 + x_2 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

e seu dicionário ótimo

$$\begin{array}{rcccc} z = & -3 & -3/2w_2 & -w_3 & -1/2x_1 \\ \hline x_3 = & 1 & +1/2w_2 & +w_3 & +5/2x_1 \\ w_1 = & 1 & +w_2 & +5w_3 & +12x_1 \\ x_2 = & 0 & & -w_3 & -3x_1 \end{array}$$

a) Qual faixa de valores que $c_1$ (o coeficiente da variável $x_1$ na função objetivo) pode variar, de forma que os valores das variáveis $x_1$, $x_2$ e $x_3$ da solução ótima não mudem, ou seja, o dicionário atualizado continue ótimo?

b) Qual seria a solução ótima (valor de função objetivo e de variáveis) caso $c_1$ mudar para $-1$ e $c_2$ mudar para 1?

c) Qual seria a solução ótima (valor de função objetivo e de variáveis) caso $b_2$ mudar para 1?

a) A condição para manter a otimalidade é

$$\hat{y}_N = y_N^* + t\Delta y_N \geq 0$$

com

$$\Delta y_N = (B^{-1}N)\Delta c_B - \Delta c_N = -\Delta c_N = (0\,0\ -1)^t.$$

Logo para $t \in [-\infty, 1/2]$, i.e $c_1 \in [-\infty, 3/2]$ o sistema continua ser ótimo.

b) Temos

$$\begin{aligned} \Delta y_N &= (B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \\ -5/2 & -12 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 4 \\ 23/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo o sistema continua ser ótimo.

c) A nova solução básica é

$$\hat{x}_B = x_B^* + \Delta x_B$$

com

$$\hat{x}_B = B^{-1}\hat{b} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo o sistema não é mais primalmente viável e nos temos o novo dicionário

$$\begin{array}{rcccc} z = & 3/2 & -3/2x_5 & -x_6 & -1/2x_1 \\ \hline x_3 = & -1/2 & +1/2x_5 & +x_6 & +5/2x_1 \\ x_4 = & -2 & +x_5 & +5x_6 & +12x_1 \\ x_2 = & 0 & & -x_6 & -3x_1 \end{array}$$

com 4 pivôs para

$$\begin{array}{rcccc} z = & -3/2 & -13/2x_2 & -3/2x_4 & -2x_1 \\ \hline x_3 = & 1/2 & +3/2x_2 & +1/2x_4 & +x_1 \\ x_6 = & 0 & -x_2 & & -3x_1 \\ x_5 = & 2 & +5x_2 & +x_4 & +3x_1 \end{array}$$