Prova P1 de Otimização Combinatória - 28/08/2013 - Profa. Luciana S. Buriol

Nome:

Cartão:

Dicas gerais:

- Sempre justifique a sua resposta.
- Responda a cada questão, ainda que a resposta não esteja completa.
- Não deixe rascunho na prova.
- A prova pode ser a lápis ou à caneta. No entanto, provas a lápis não poderão ter correção após a prova sair da sala de aula quando elas forem entregues aos alunos após a correção.

1. (4pts) Uma indústria de produtos lácteos possui duas distribuidoras localizadas em cidades diferentes. A indústria atende diariamente a demanda de três grandes clientes. A tabela abaixo apresenta a capacidade de produção diária de cada distribuidora, o custo de transporte de cada mil litros de leite entre cada distribuidora e cliente, bem como a demanda diária solicitada por cada cliente. Deseja-se minimizar o custo de entrega de leite de forma que os clientes sejam atendidos e a capacidade de cada distribuidora seja respeitada.

	Cliente-1	Cliente-2	Cliente-3	Capacidade
Distribuidora-1	R$600	R$800	R$700	400.000 litros
Distribuidora-2	R$400	R$900	R$600	500.000 litros
Demanda	300.000 litros	200.000 litros	400.000 litros	

a) Formule este problema como um problema de programação linear.

Variáveis:

x_{ij}: qtd de litros (medida em mil litros) enviados da distribuidora i para o cliente j

$$\begin{array}{ll} min & 600x_{11} + 800x_{12} + 700x_{13} + 400x_{21} + 900x_{22} + 600x_{23} \\ s.a & x_{11} + x_{21} = 300 \\ s.a & x_{12} + x_{22} = 200 \\ s.a & x_{13} + x_{23} = 400 \\ s.a & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 400 \\ s.a & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 500 \\ & x_{ij} \in \mathbb{R}^+ \forall i, j \end{array}$$

b) (Modelo genérico) Para n distribuidoras e m clientes, suponha que seja fornecida uma matriz de custos onde c_{ij} seja o custo de transporte de mil litros de leite da distribuidora i ao cliente j, a capacidade de cada distribuidora i seja dado por p_i , e a demanda de cada cliente j seja dada por d_j. Generalize a formulação do problema para este caso.

$$\begin{array}{ll} min & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \\ s.a & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 10^{-3} d_j \quad \forall j = 1, ..., m \\ & \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq 10^{-3} c_i \quad \forall i = 1, ..., n \\ & x_{ij} \in \mathbb{R}^+ \in \mathbb{R}^+ \forall i, j, k \end{array}$$

c) Suponha que os valores de custo, demanda e capacidade sejam diferentes a cada dia. Adapte o modelo genérico para que o mesmo atenda as demandas diárias de k dias.

$$
\begin{aligned}
min \quad & \sum_{l=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}^{l} \\
s.a \quad & \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^{l} = 10^{-3}d_j^l \quad \forall j = 1,...,m \quad e \quad l = 1,...,k \\
& \sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{l} \leq 10^{-3}c_i^l \quad \forall i = 1,...,n \quad e \quad l = 1,..,.k \\
& x_{ij} \in \mathbb{R}^{+}
\end{aligned}
$$

d) Suponha que k=7. Há um acordo que estabelece que a quantidade semanal que Distribuidora-2 atende o cliente-1 não ultrapasse r e não seja menor quer t. Adapte o modelo confome este acordo. Adicionar a seguinte restrição ao modelo anterior e substituir todas ocorrências de k por 7.

$$t \geq \sum_{l=1}^{7} x_{21}^{l} \geq r$$

e) Informe o número de variáveis e restrições não triviais das formulações matemáticas de cada um dos itens acima.

a) 6 variáveis e 5 restrições
b) (n*m) variáveis e (n+m) restrições
c) (n*m*k) variáveis e (k*n + k*m) restrições
d) (n*m*k) variáveis e (k*n + k*m + 2) restrições

2. (4pts) **Simplex**. Considere o sistema abaixo.

$$
\begin{aligned}
\textbf{max} \quad & -x_1 + x_2 \\
\textbf{s.a} \quad & x_1 + x_2 \geq 2 \\
& 3x_1 + x_2 \leq -2 \\
& -2x_1 + x_2 \leq 0 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolva o sistema acima usando o algoritmo simplex. Caso houver solução ótima, indique claramente o valor da função objetivo e variáveis da solução ótima.

Dicionário inicial:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & & \downarrow \\
 & z = & & & -x_0 \\
\leftarrow & w_1 = -2 & +x_1 & +x_2 & +x_0 \\
 & w_2 = -2 & -3x_1 & -x_2 & +x_0 \\
 & w_3 = & +2x_1 & -x_2 & +x_0
\end{array}
$$

Dicionário com pivô x_1 e w_2:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & \downarrow & & \\
 & z = -2 & +x_1 & +x_2 & -w_1 \\
 & x_0 = 2 & -x_1 & -x_2 & +w_1 \\
\leftarrow & w_2 = 0 & -4x_1 & -2x_2 & +w_1 \\
 & w_3 = 2 & +x_1 & -2x_2 & +w_1
\end{array}
$$

Dicionário com pivô x_1 e w_2:

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & \downarrow & \\
z = -2 & -1/4w_2 & +1/2x_2 & -3/4w_1 \\
x_0 = 2 & +1/4w_2 & -1/2x_2 & +3/4w_1 \\
\leftarrow x_1 = 0 & -1/4w_2 & -1/2x_2 & +1/4w_1 \\
w_3 = 2 & -1/4w_2 & -5/2x_2 & +5/4w_1
\end{array}
$$

Dicionário com pivô x_2 e x_1:

$$
\begin{array}{rrrr}
z = -2 & -1/2w_2 & -x_1 & -1/2w_1 \\
x_0 = 2 & +1/2w_2 & +x_1 & +1/2w_1 \\
x_2 = 0 & -1/2w_2 & -2x_1 & +1/2w_1 \\
w_3 = 2 & +w_2 & +5x_1 &
\end{array}
$$

Como o valor de $x_0 > 0$ então o sistema é infactível.

3. (2pt) Informe se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas para o sistema $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$? Justifique a resposta.

a) O primeiro passo do método Simplex introduz variáveis de folga no sistema em forma normal. Na solução ótima do sistema, o valor de todas variáveis de folga é zero.

b) Caso um sistema não possua uma solução ótima, então ele não possui soluções viáveis.

c) Caso o coeficiente de uma variável na função objetivo seja negativo, essa variável não pode ocorrer numa base ótima.

Nenhuma afirmativa é verdadeira.

a) Não. Um exemplo é o sistema $max\{x_1|x_1 \geq 1; x_1 \leq 2\}$ com solução ótima $x_1 = 2$. A variável de folga da desigualdade $x_1 \geq 1$ possui valor 1 nesta solução.

b) Não. O sistema pode ser ilimitado.

c) Não. Um exemplo é o sistema $max\{-x_1|x_{\geq}1; x_1 \leq 2\}$ com solução ótima $x_1 = 1$. Mesmo com solução inicial viável isso não é verdadeiro pois se fosse, a variável poderia simplismente ser excluída do sistema, pois seu valor seria zero.