- INF01047 -

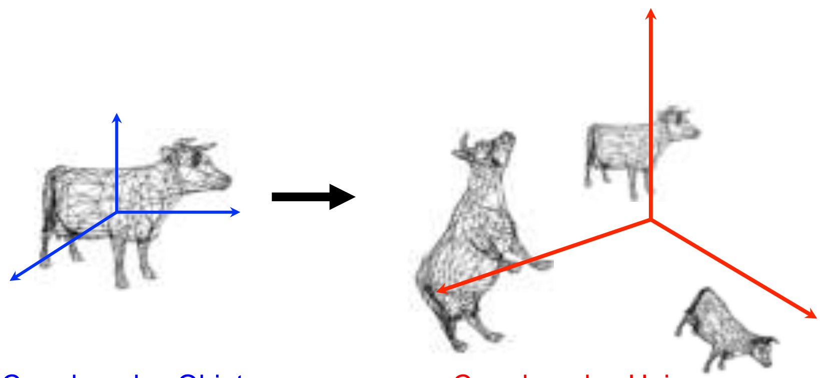
Transformações Geométricas

- Transformações Modelagem
- Iluminação (*Shading*)
- Transformação Câmera
- Recorte
- Projeção
- Rasterização
- Visibilidade

Da última aula…

✓Objetos definidos no seu próprio sistema de coordenadas

✓Transformações de modelagem orientam os modelos geométricos num sistema comum de coordenadas (UNIVERSO)



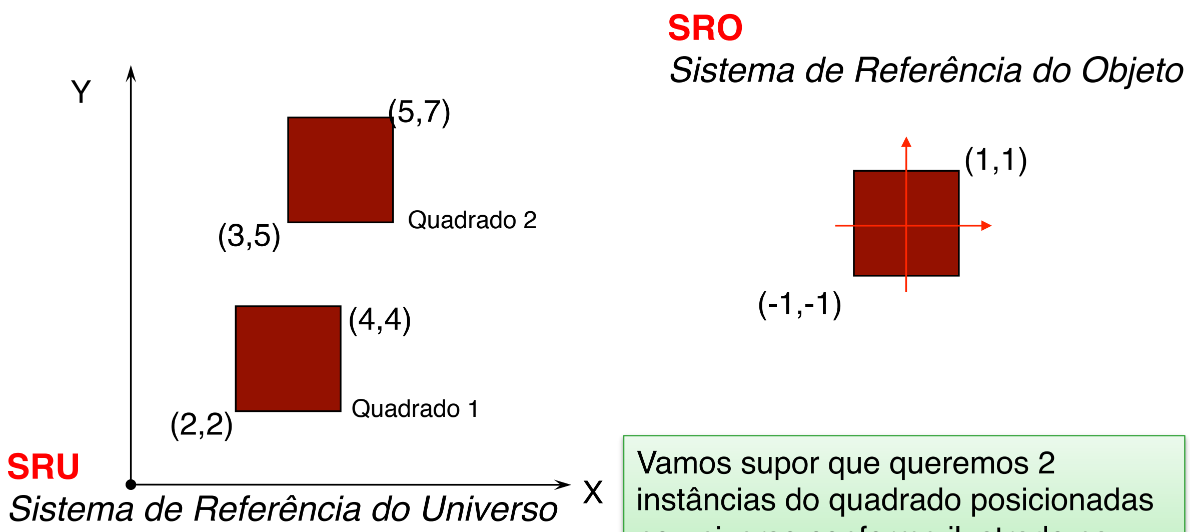
Coordenadas Objeto

Coordenadas Universo

O que são Transformações?

- Modificam os valores de pontos (x,y,z) para pontos (x’,y’,z’)
- São utilizadas em CG para:
  - Posicionar objetos na cena
  - Mudar forma dos objetos
  - Criar múltiplas cópias (instâncias) dos objetos
  - Animações
  - Projeção para câmera virtual

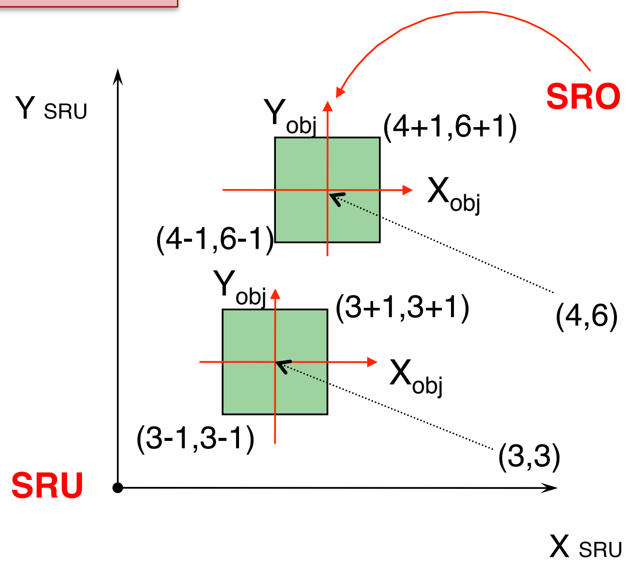
Posicionamento de Objetos Gráficos



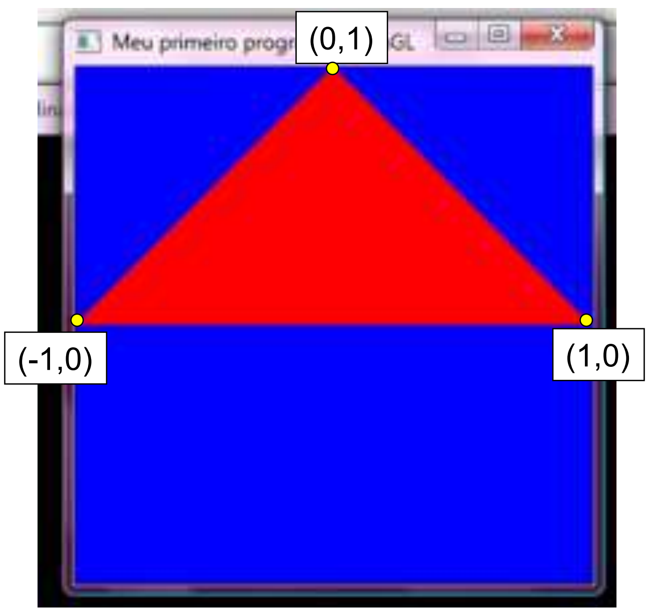
Vamos supor que queremos 2 instâncias do quadrado posicionadas no universo conforme ilustrado na figura

Posicionamento de Objetos Gráficos

Translação para a posição (4,6)
Translação para a posição (3,3)



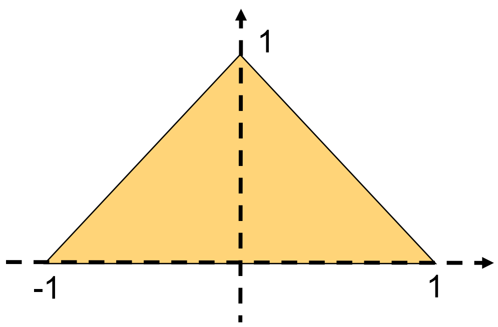
Objetos gráficos




```
P1.x = 0;     P1.y = 1;
P2.x = -1;    P2.y = 0;
P3.x = 1;     P3.y = 0;

glBegin (GL_TRIANGLES);
    glVertex2f (P1.x,P1.y);
    glVertex2f (P2.x,P2.y);
    glVertex2f (P3.x,P3.y);
glEnd();
```

Representação de objetos gráficos



Geometria

P1	(-1,0)
P2	(1,0)
P3	(0,1)

vértices

Topologia

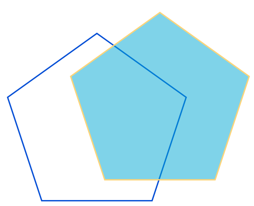
P1	P2
P2	P3
P3	P1

arestas

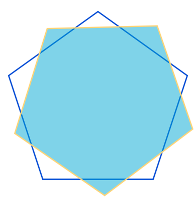
Ponto como matriz coluna: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

Principais Transformações Geométricas

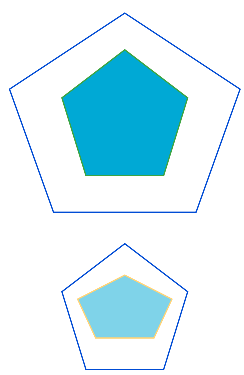
Translação



Rotação



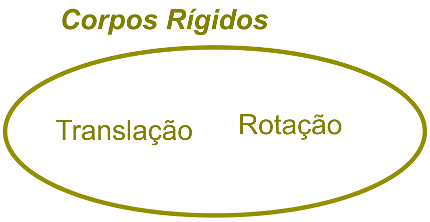
Escala

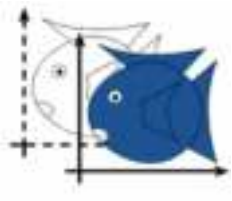


- Aplicadas aos vértices
- Modificam o objeto como um todo
- Não alteram a topologia!

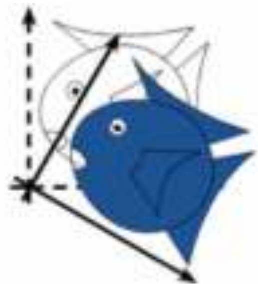
Classes de Transformações

- Corpos rígidos
  - Preservam distância e ângulos





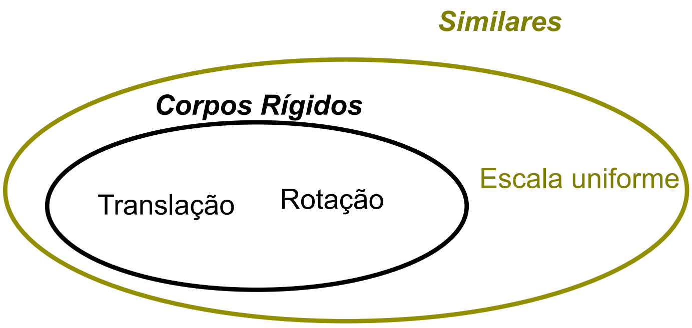
Translação

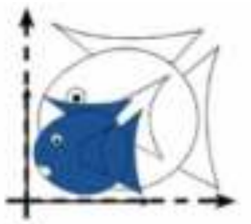


Rotação

Classes de Transformações

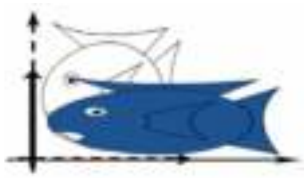
- Similares
  - Preservam ângulos



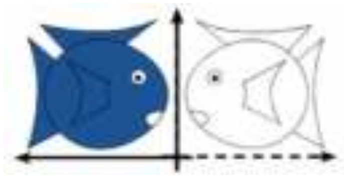


Escala Uniforme

Transformações Lineares

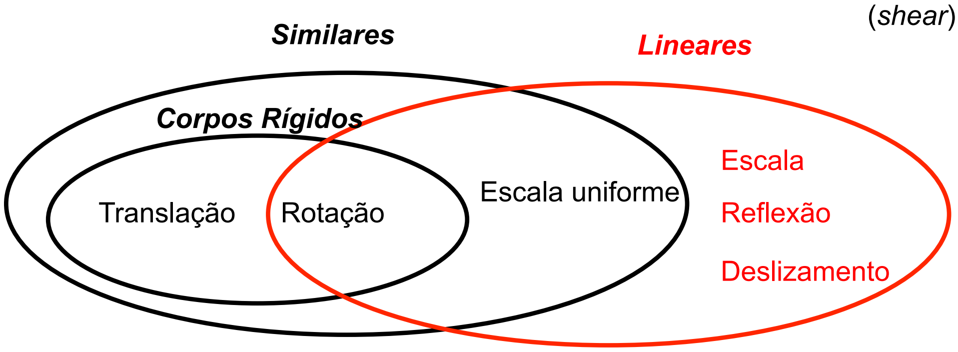


Escala



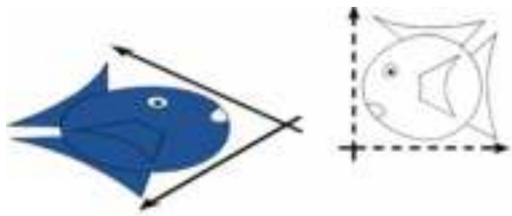
Reflexão

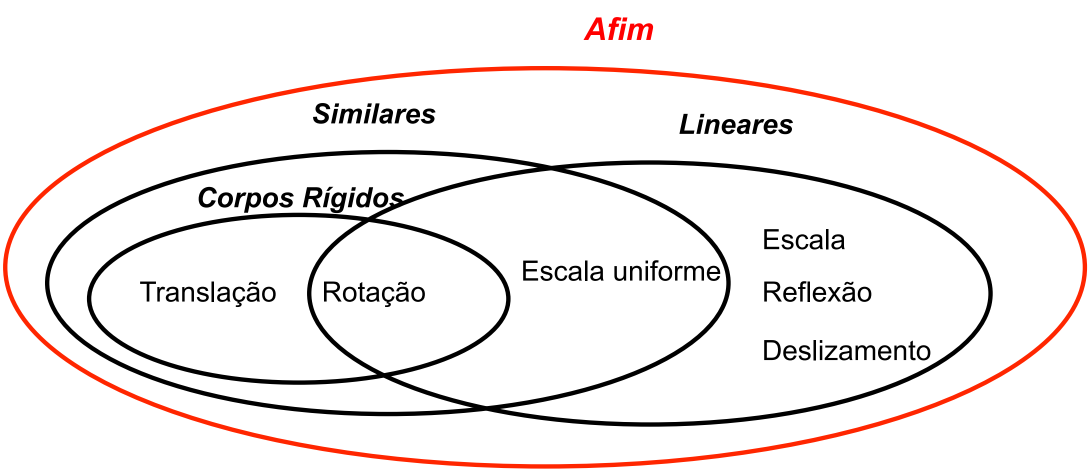
Deslizamento
(*shear*)



$L(p+q) = L(p) + L(q)$
$L(ap) = aL(p)$

Transformações Afim





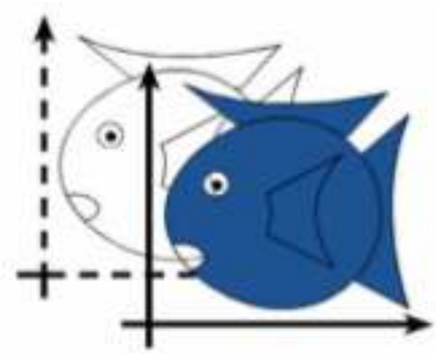
Preservam linhas paralelas

Transformações

- 2D
- 3D

Translação de um Objeto

- Modificamos a localização espacial do objeto
- Não modifica a forma
- Parâmetros da translação?
- Coordenadas após a translação?



$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

Transformações 2D - Translação

$$x' = x + t_x$$

$$y' = y + t_y$$

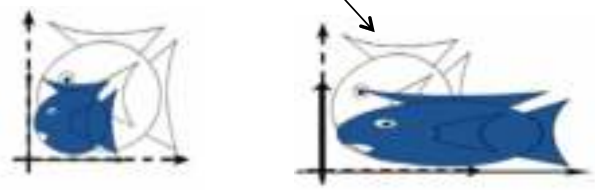
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

Representação matricial

Transformações 2D - Escala

- Coordenadas são multiplicados pelos fatores de escala
- Modificam a forma do objeto

- Tipos de Escala
  - Uniforme:
    - sx = sy
  - Não-Uniforme
    - sx <> sy



Fatores de Escala

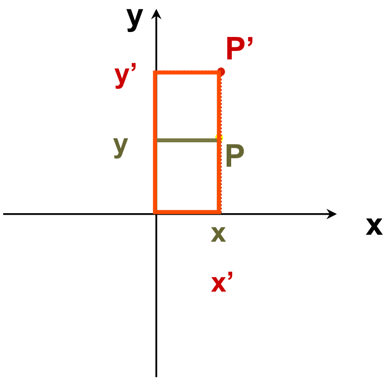
$$x' = x \cdot s_x$$

$$y' = y \cdot s_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Representação matricial

Mudança de escala



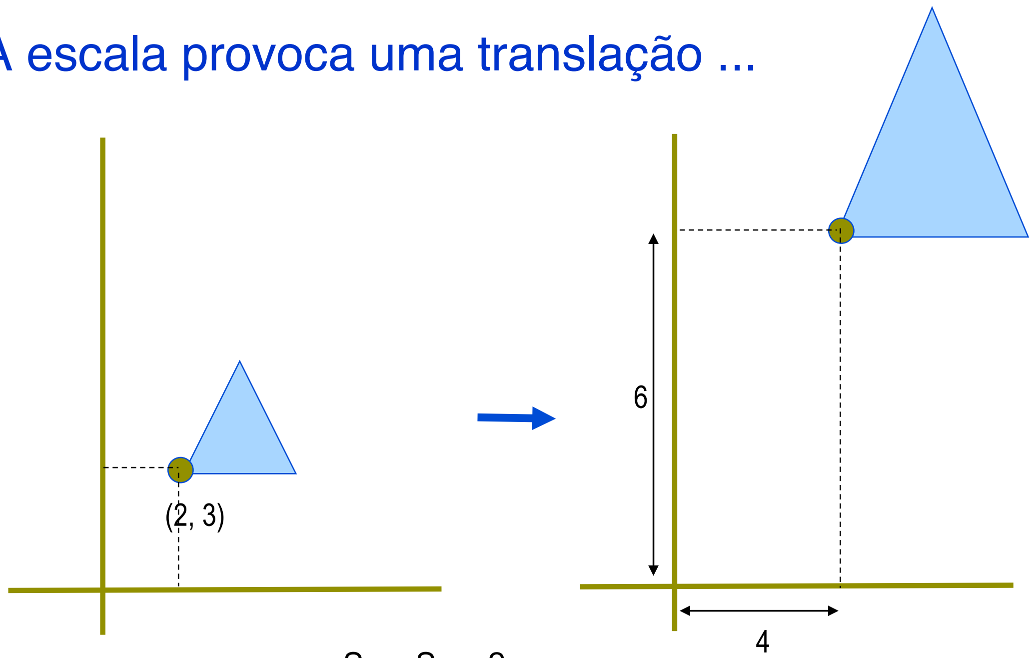
$x' = x$

$y' = sy.y$

Observar que a mudança de escala é realizada relativamente à origem do sistema de coordenadas!

Objeto não localizado na origem

- A escala provoca uma translação ...

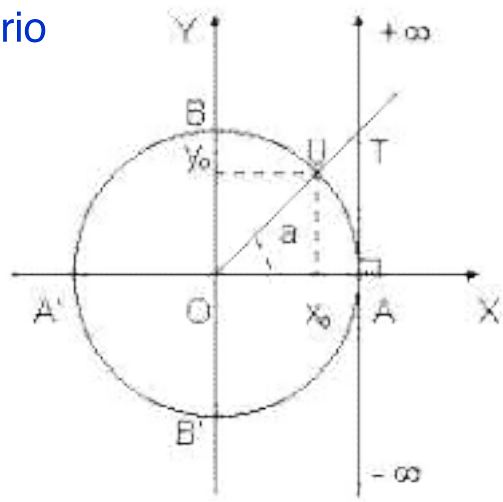


Sx = Sy = 2

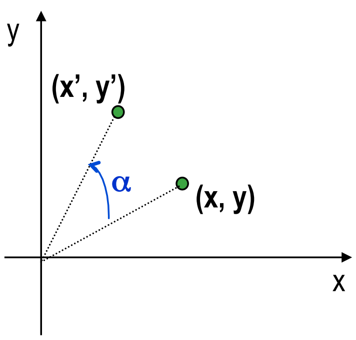
Veremos como consertar este problema daqui a pouco…

Rotação - revisão

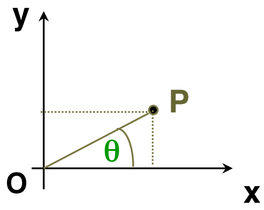
- Tomando o círculo de raio unitário
- Ângulos
  - Graus e Radianos
    - 1 grau = pi/180 radianos
  - Seno, cosseno, tangente
    - sen a = y_0
    - cos a = x_0
    - tg a = AT
    - $sen^2 a + cos^2 a = 1$
    - tg a = sen a / cos a



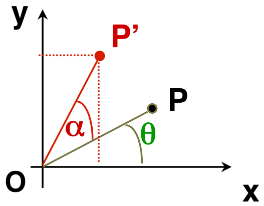
Rotação de um ponto



Rotação de um ponto



$r = \overline{OP}$
$x = r \cos \theta$
$y = r \,\mathrm{sen}\, \theta$



$r = \overline{OP}$
$x' = r \cos(\theta + \alpha)$
$y' = r \,\mathrm{sen}\,(\theta + \alpha)$

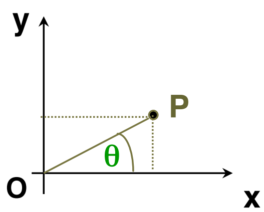
$\boxed{\cos\theta \cos\alpha - \mathrm{sen}\,\theta \,\mathrm{sen}\,\alpha}$

$\boxed{\mathrm{sen}\,\theta \cos\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha \cos\theta}$

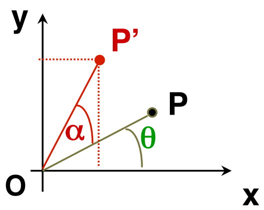
$x' = x.\cos\alpha - y.\mathrm{sen}\,\alpha$

$y' = x.\mathrm{sen}\,\alpha + y.\cos\alpha$

Rotação de um ponto



$r = \overline{OP}$
$x = r \cos \theta$
$y = r \,\mathrm{sen}\, \theta$



$r = \overline{OP}$
$x' = r \cos(\theta + \alpha)$
$y' = r \,\mathrm{sen}\,(\theta + \alpha)$

Observar que a rotação é realizada em torno da origem do sistema de coordenadas!

$x' = x.\cos\alpha - y.\mathrm{sen}\,\alpha$

$y' = x.\mathrm{sen}\,\alpha + y.\cos\alpha$

Rotação – Representando Matricialmente

x' = x.cos α – y.sen α

y' = x.sen α + y.cos α

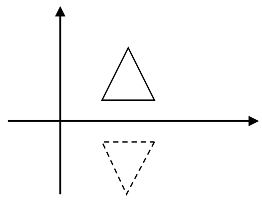
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

UFRGS

Transformações 2D – Reflexão

- Ao redor do eixo X

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$



Quais os valores de a,b,c,d?

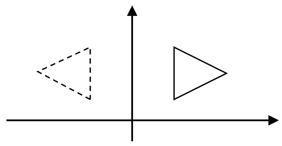
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

UFRGS

Transformações 2D – Reflexão

- Ao longo do eixo Y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$



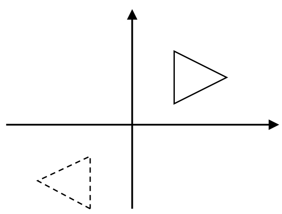
Quais os valores de a,b,c,d?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformações 2D – Reflexão

- Ao redor do eixo XY

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$



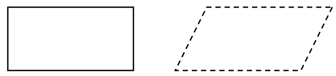
Quais os valores de a,b,c,d?

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$$

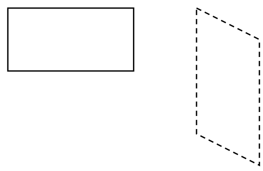
Transformações 2D
Deslizamento (Cisalhamento)

- Deslizamento na direção x

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Sh_x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \cdot Sh_x \\ y \end{pmatrix}$$

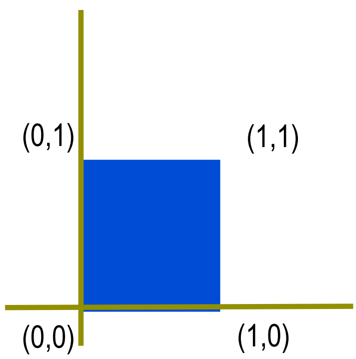


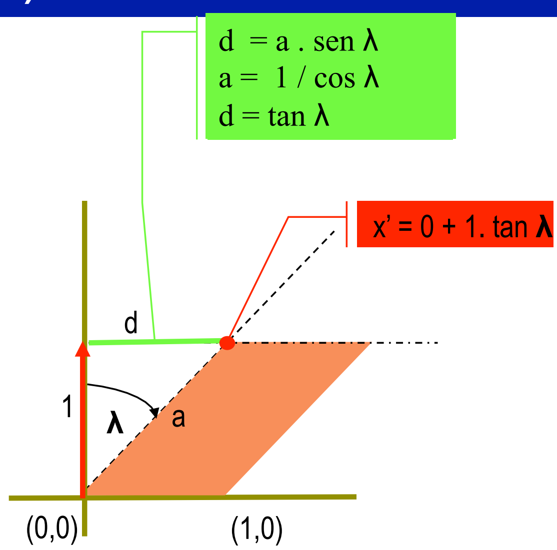
- Deslizamento na direção y



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Sh_y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ Sh_y \cdot x + y \end{pmatrix}$$

Cisalhamento ("shear")

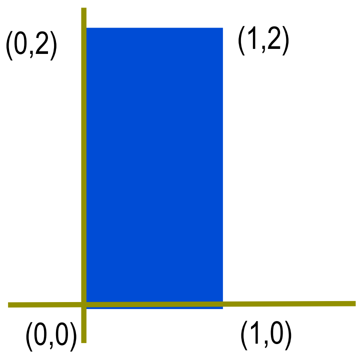


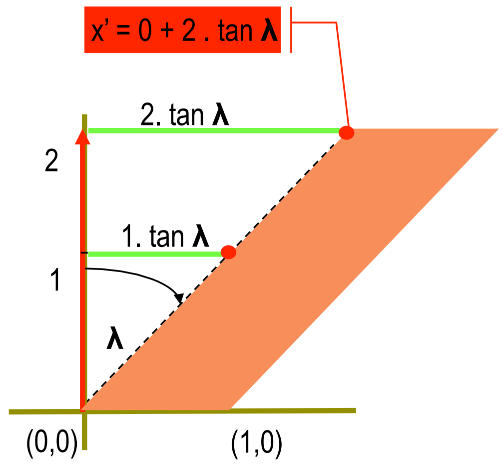


$$\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

Cisalhamento (“shear”)





$$\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \tan\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

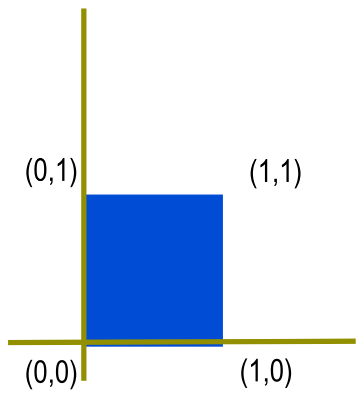
Escala

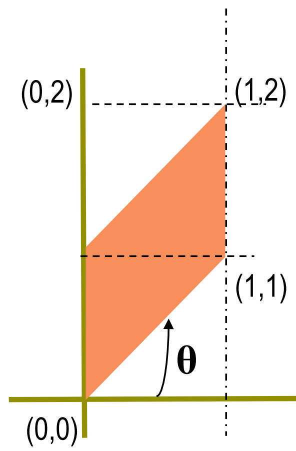
Cisalhamento em X

$xp' = xp + yp.\tan\lambda$

$yp' = yp$

Cisalhamento (“shear”)





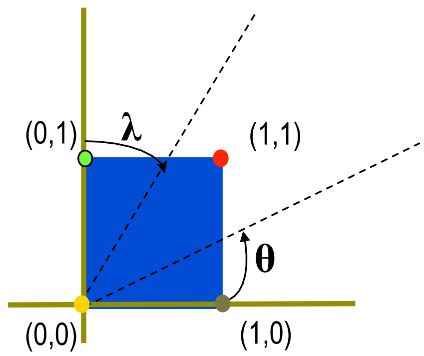
$$\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \tan\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

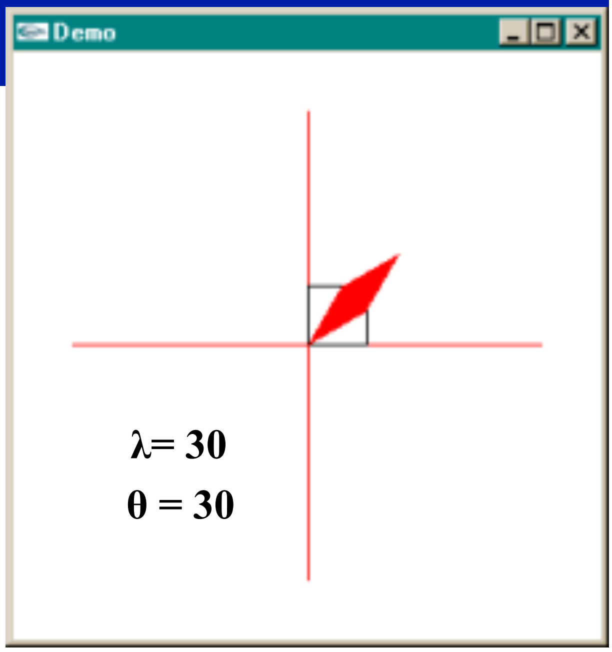
Escala

Cisalhamento em X

Cisalhamento em Y

Cisalhamento

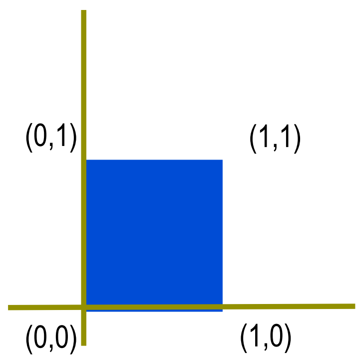


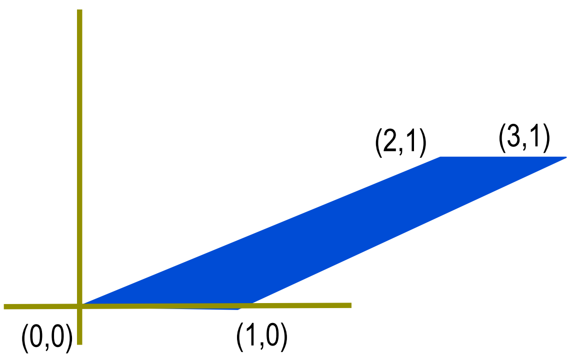


$$\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \tan\lambda & 0 \\ \tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala — Cisalhamento

Cisalhamento (“shear”)





$$\begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & shx & 0 \\ shy & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala — Cisalhamento

$$xp' = xp + yp.shx$$

$$yp' = xp.shy + yp$$

Representando Transformações

- Genericamente em 2D

$$x' = ax + by + c$$
$$y' = dx + ey + f$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

$$p' = Mp + t$$

Resumo Transformações 2D

- Notação matricial simplifica escrita
  - Translação expressa como uma soma de vetores
  - Escala e Rotação expressas como multiplicação
- Porém, é interessante uma notação uniforme e consistente
  - Permitir que se expresse as três operações de maneira idêntica
  - Permitir que se expresse a combinação destas três operações também de maneira idêntica
- Como fazer isso?

Coordenadas Homogêneas

- Adiciona uma outra dimensão *w*
- 2D -> 3D
  - (x,y) -> (x,y,w)
- 3D -> 4D
  - (x,y,z) -> (x,y,z,w)
- w = 0, vetores
  - Útil em projeções;
- Homogeneizar: dividir por w
- Em CG SEMPRE se usa w=1!

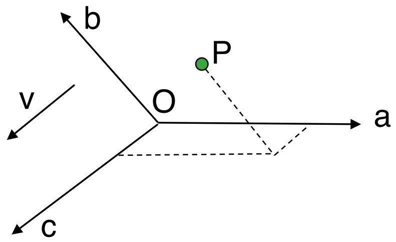
Coordenadas Homogêneas

- Qual a diferença entre pontos e vetores ?

  v = (3, 5, 7)

  P = (5, 3, 1)

  - Pontos possuem uma localização, mas não tamanho ou direção
  - Vetores possuem tamanho e direção, mas não localização
  - Tanto pontos como vetores são relativos a um sistema de coordenadas



Confusão qdo. temos vários sistemas de coordenadas → comum em CG

Coordenadas Homogêneas

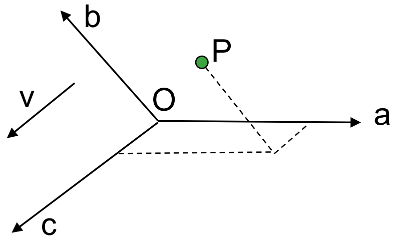
- Qual a diferença entre pontos e vetores ?

  $v = (v_1, v_2, v_3) = v_1 a + v_2 b + v_3 c$

  $P = (p_1, p_2, p_3) = O + p_1 a + p_2 b + p_3 c$
- Como representar pontos e vetores usando a mesma notação ?
  - Usar (a, b, c, Ω) → Coordenadas Homogêneas

  $v = (v_1, v_2, v_3, 0)$

  $p = (p_1, p_2, p_3, 1)$



Coordenadas Homogêneas

- Propriedades:
  - Diferença entre 2 pontos gera 1 vetor:
    - $(x_0, y_0, z_0, 1) - (x_1, y_1, z_1, 1) = (x_0-x_1, y_0-y_1, z_0-z_1, 0)$
  - Soma de 1 ponto e 1 vetor gera 1 ponto:
    - $(x, y, z, 1) + (v_1, v_2, v_3, 0) = (x+v_1, y+v_2, z+v_3, 1)$
  - Dois pontos não podem ser somados:
    - $\cancel{(x_0, y_0, z_0, 1) + (x_1, y_1, z_1, 1) = (x_0+x_1, y_0+y_1, z_0+z_1, 1+1)}$
  - Dois vetores somados geram 1 vetor:
    - $(v_1, v_2, v_3, 0) + (w_1, w_2, w_3, 0) = (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3, 0)$
  - A escala de um vetor gera outro vetor:
    - $3 * (v_1, v_2, v_3, 0) = (3v_1, 3v_2, 3v_3, 0)$
  - Combinação linear de vetores:
    - $av + bw = (av_1 + bw_1, av_2 + bw_2, av_3 + bw_3, 0)$,
    para $v = (v_1,v_2,v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$

Coordenadas Homogêneas

- Coordenadas ordinárias para homogêneas
  - Ponto: acrescente 1 na tupla
  - Vetor: acrescente 0 na tupla
- Coordenadas homogêneas para ordinárias
  - Ponto: dividir pela última coordenada (que é 1)
  - Vetor: remova a última coordenada (que é 0)

Qual a vantagem?

Matriz de Translação em Coordenadas Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x + wt_x \\ y' = y + wt_y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{w'} = \dfrac{x}{w} + t_x \\ \dfrac{y'}{w'} = \dfrac{y}{w} + t_y \end{cases}$$

Translação agora também pode ser representada por multiplicação de matrizes!!

Escala 2D – Coord. Homogêneas

Matriz de Escala em Coordenadas Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = s_x x \\ y' = s_y y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x'}{w'} = s_x \dfrac{x}{w} \\ \dfrac{y'}{w'} = s_y \dfrac{y}{w} \end{cases}$$

UFRGS

Rotação 2D – Coord. Homogêneas

Matriz de Rotação em Coordenadas Homogêneas

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix}$$

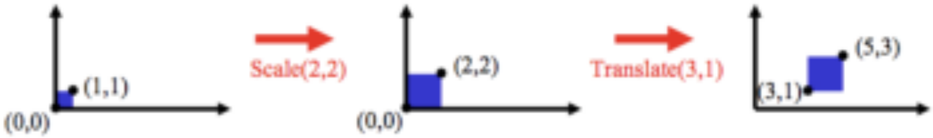
$$\begin{cases} x' = \cos\theta x - \sin\theta y \\ y' = \sin\theta x + \cos\theta y \\ w' = w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{w'} = \cos\theta \frac{x}{w} - \sin\theta \frac{y}{w} \\ \frac{y'}{w'} = \sin\theta \frac{x}{w} + \cos\theta \frac{y}{w} \end{cases}$$

UFRGS

Composição de Transformações

Escala seguida de Translação

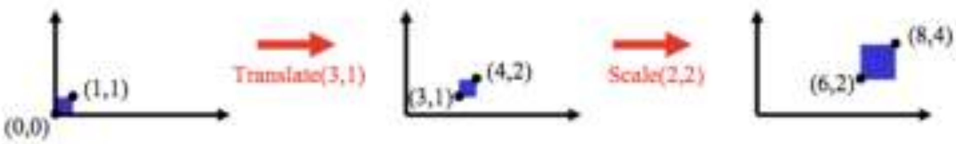


$$p' = T(Sp) = TSp$$

$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações

Translação seguida de Escala



$$p' = S(Tp) = STp$$

$$ST = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A matriz resultante é diferente!!!

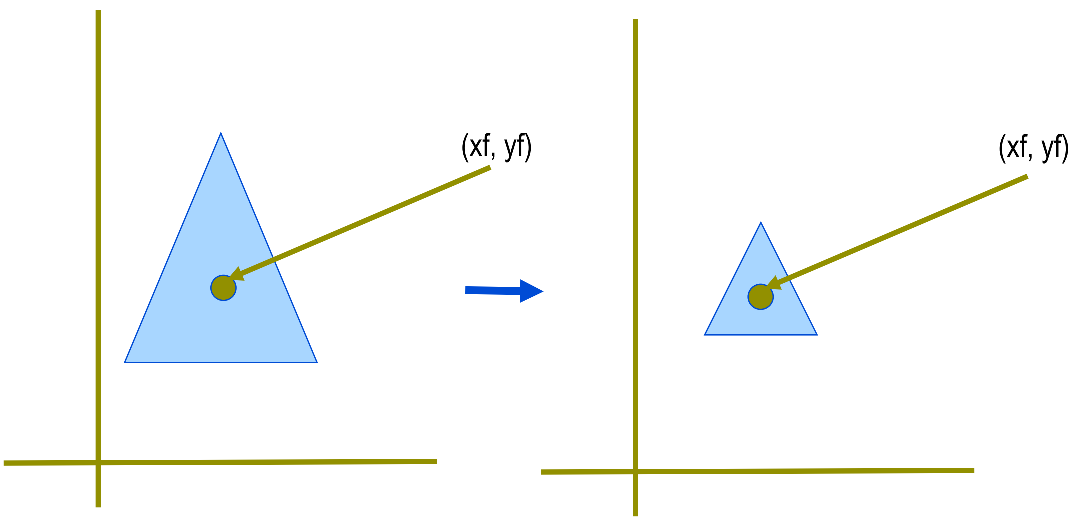
Composição de Transformações

- Multiplicação de Matrizes não é comutativa
- Ordem das operações influencia diretamente
  - Rotação seguida de translação é diferente de translação seguida de rotação

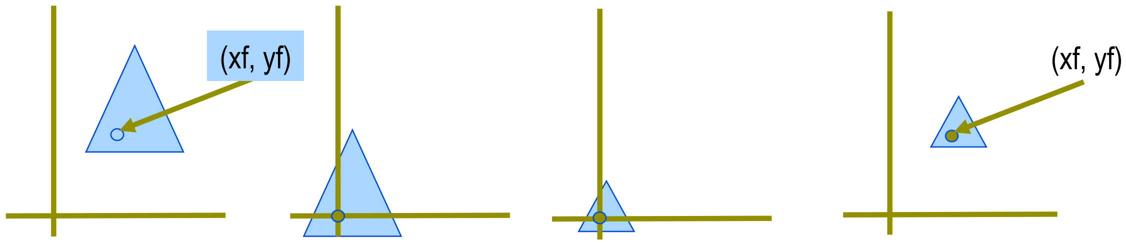
- http://www.cs.princeton.edu/~min/cs426/jar/transform.html

Qual a ordem correta?
Depende do resultado desejado…

Escala relativa a um ponto

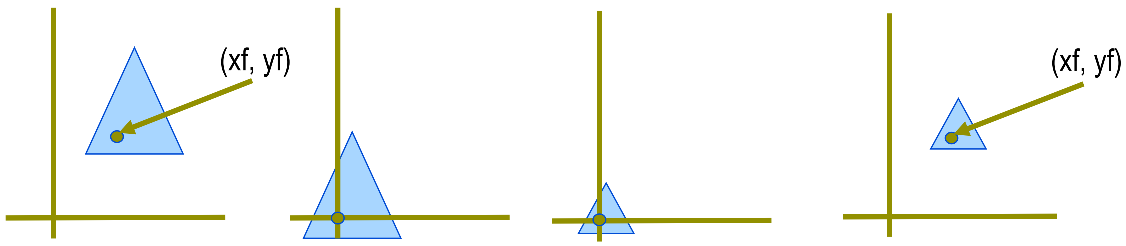


Escala relativa a um ponto



- Translação do triângulo para a origem
  - dx = -xf, dy = -yf
- Efetua a escala
- Translação de "volta" ao ponto de origem
  - dx = xf, dy = yf

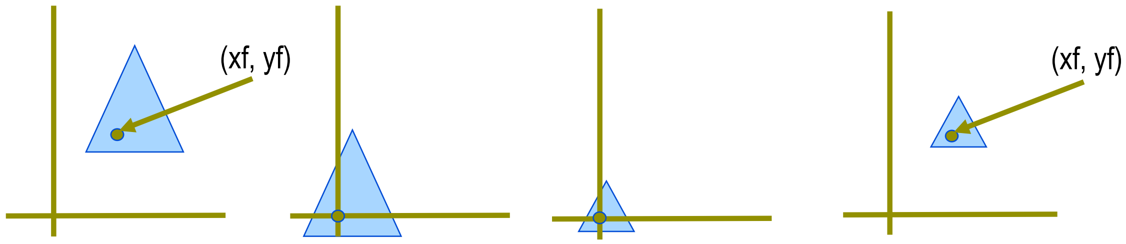
Escala relativa a um ponto



$P' = T_1 P$ $\quad P'' = SP'$ $\quad P''' = T_2 P''$

$$P''' = T_2 S T_1 P$$

Escala relativa a um ponto



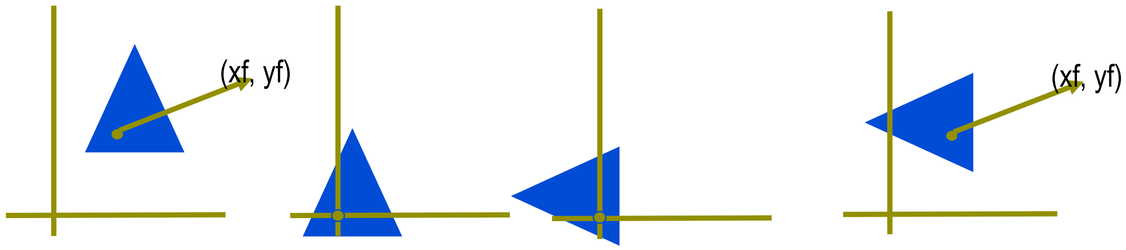
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & xf \\ 0 & 1 & yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & -xf \\ 0 & 1 & -yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & (1-sx)xf \\ 0 & sy & (1-sy)yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz resultado

Rotação em torno de um ponto qualquer

- Como obter o resultado acima??

Rotação relativa a um ponto

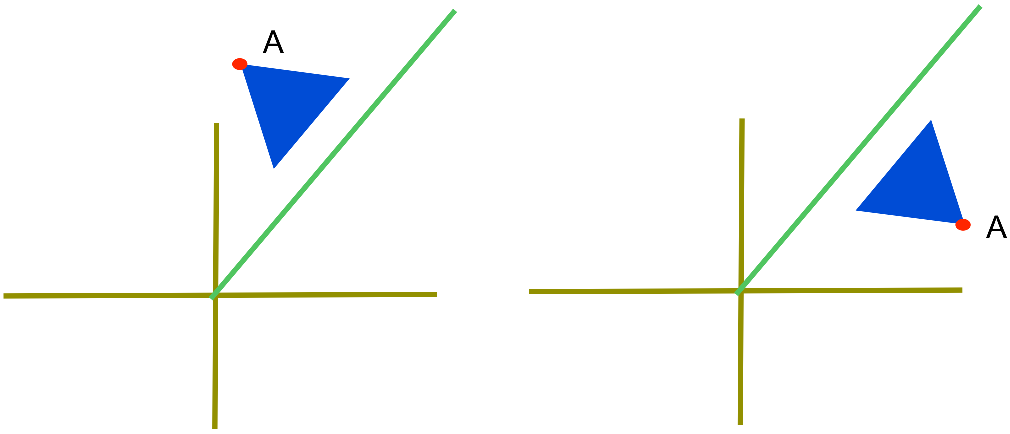


p = (1-cos α) xf+yf*sen α

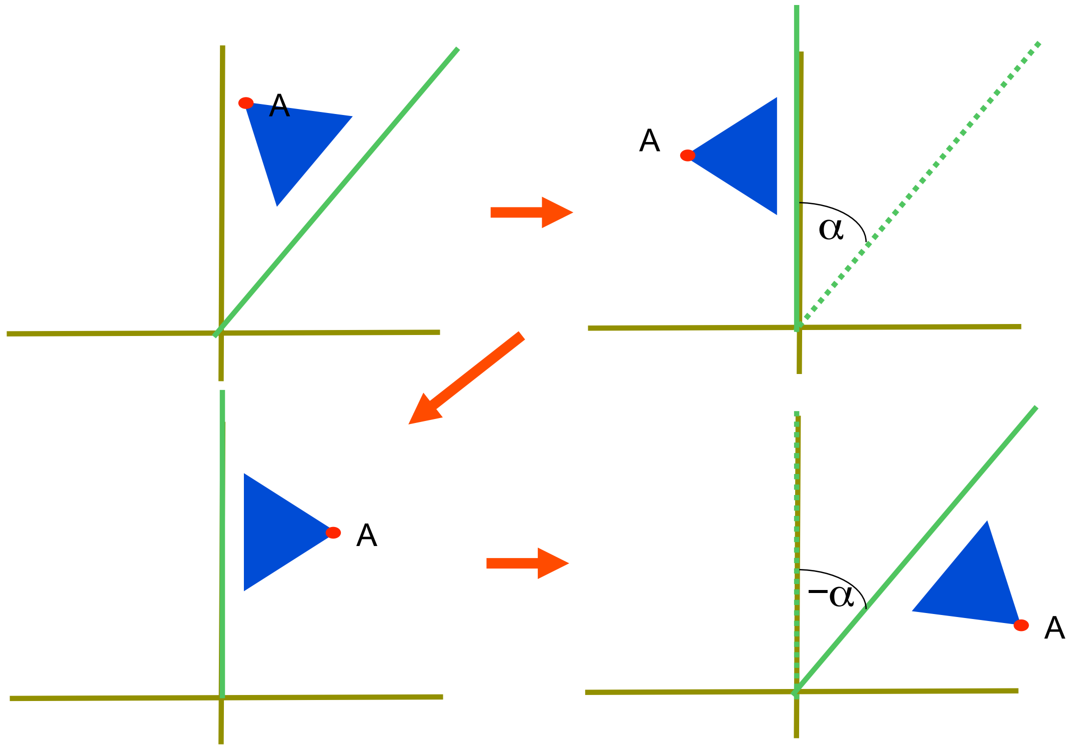
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & xf \\ 0 & 1 & yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha & 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & 0 & -xf \\ 0 & 1 & -yf \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha & p \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

q = (1-cos α) yf-xf*sen α

Reflexão relativa a um eixo



Reflexão relativa a um eixo



Qual a sequência de matrizes?

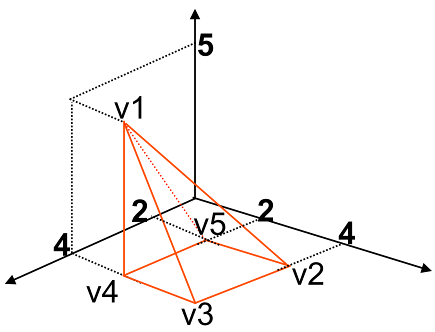
Transformações

- 2D
- 3D

Translação

Geometria

V1	(2,5,4)
V2	(4,0,2)
V3	(4,0,4)
V4	(2,0,4)
V5	(2,0,2)



Topologia

V1	V2			
V1	V3			
V1	V4			
V1	V5			
V2	V3	V4	V5	V2

- Representação matricial

$$P=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad T=\begin{bmatrix} tx \\ ty \\ tz \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{P' = P + T} \rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tx \\ ty \\ tz \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+tx \\ y+ty \\ z+tz \\ 1 \end{bmatrix}$$

UFRGS

Translação 3D - matricialmente

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$$

UFRGS

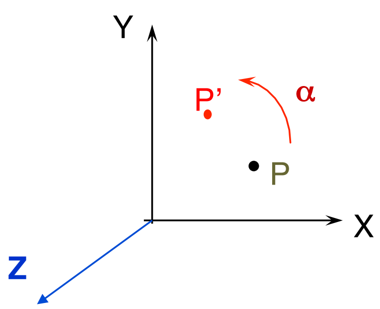
Mudança de escala

- Objetos 3D

$$P=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{P' = S.P} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

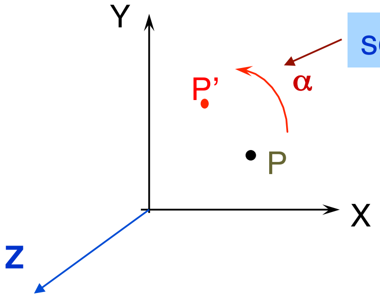
fatores sx, sy, sz

Rotação 3D



Rotação 3D

- No plano XY, em torno do eixo Z



sentido anti-horário

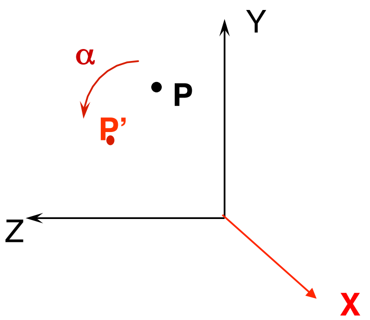
$x' = x.\cos\alpha - y.\text{sen}\,\alpha$
$y' = x.\text{sen}\,\alpha + y.\cos\alpha$
$z' = z$

Z não muda…

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

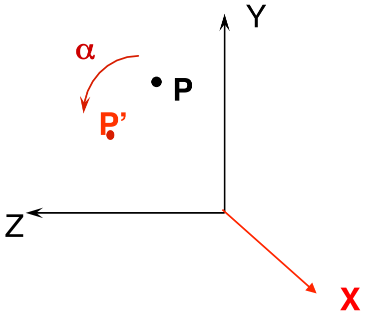
Rotação 3D

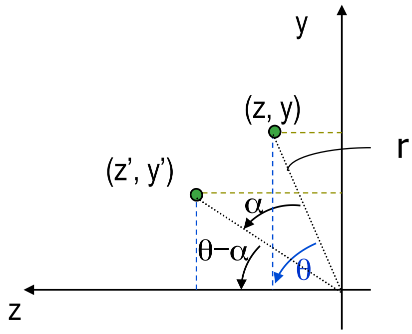
- No plano YZ, em torno do eixo X



Rotação 3D

- No plano YZ, em torno do eixo X





$y = r.\text{sen}\ \theta \qquad z = r.\cos\theta$

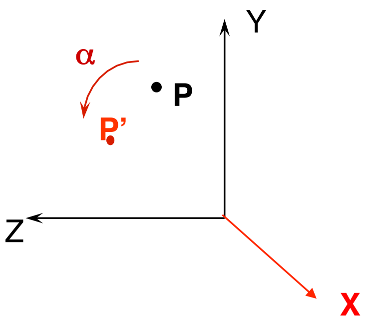
$y' = r.\text{sen}\ (\theta-\alpha)$
$z' = r.\cos\ (\theta-\alpha)$

$y' = r.(\text{sen}\ \theta.\cos\alpha - \text{sen}\ \alpha.\cos\theta)$
$z' = r.(\cos\theta.\cos\alpha + \text{sen}\ \theta.\text{sen}\ \alpha)$

$y' = y\ \cos.\alpha - z.\text{sen}\ \alpha$
$z' = y\ \text{sen}.\alpha + z.\cos\alpha$

Rotação 3D

- No plano YZ, em torno do eixo X



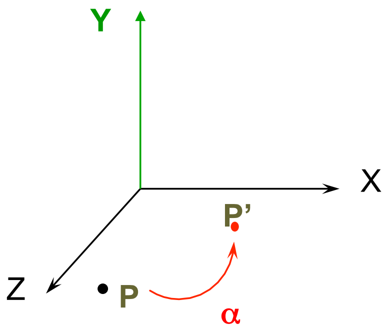
$x' = x$
$y' = y.\cos\alpha - z.\text{sen}\ \alpha$
$z' = y.\text{sen}\ \alpha + z.\cos\alpha$

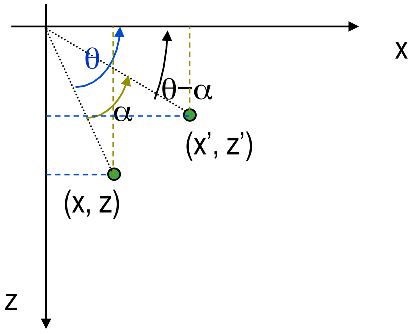
X não muda…

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\ \alpha & 0 \\ 0 & \text{sen}\ \alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação 3D

- No plano XZ, em torno do eixo Y





$x = r.\cos\theta \qquad z = r.\mathrm{sen}\,\theta$

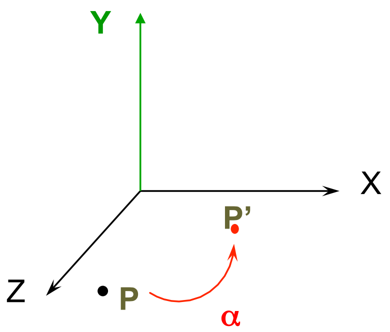
$x' = r.\cos(\theta-\alpha)$
$z' = r.\mathrm{sen}(\theta-\alpha)$

$x' = r.(\cos\theta.\cos\alpha + \mathrm{sen}\,\theta.\mathrm{sen}\,\alpha)$
$z' = r.(\mathrm{sen}\,\theta.\cos\alpha - \mathrm{sen}\,\alpha.\cos\theta)$

$x' = x.\cos\alpha + z.\mathrm{sen}\,\alpha$
$z' = z.\cos\alpha - x.\mathrm{sen}\,\alpha$

Rotação 3D

- No plano XZ, em torno do eixo Y

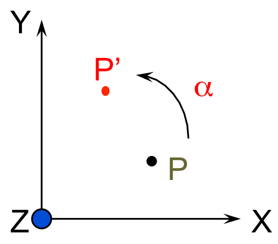


$x' = x.\cos\alpha + z.\sin\alpha$
$y' = y$
$z' = x.(-\sin\alpha) + z.\cos\alpha$

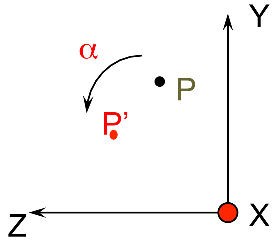
Y não muda…

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \mathrm{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{sen}\,\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

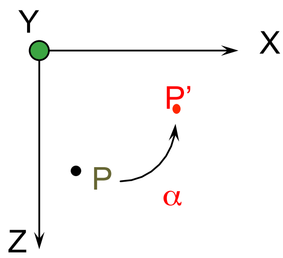
Rotações em 3D



em torno de Z

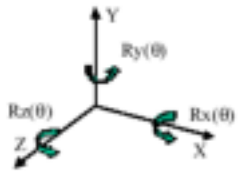


em torno de X



em torno de Y

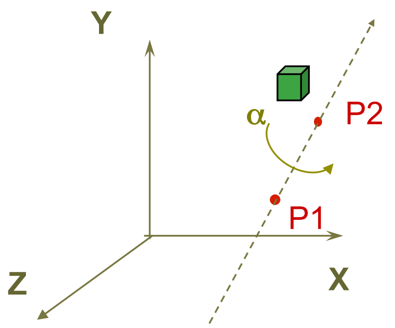
$$\begin{bmatrix} \mathbf{x'} \\ \mathbf{y'} \\ \mathbf{z'} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{M_R} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 & 0 \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & \text{sen}\,\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\,\text{sen}\,\alpha & 0 & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

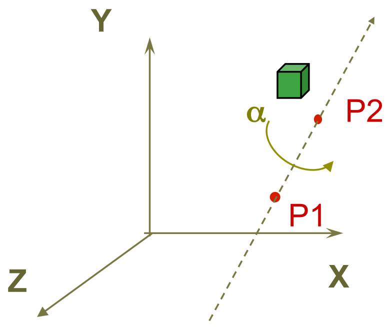
UFRGS

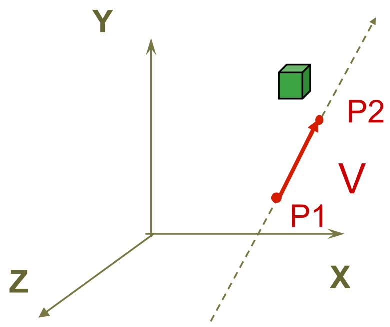
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



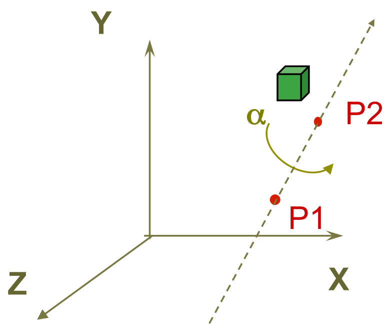
UFRGS

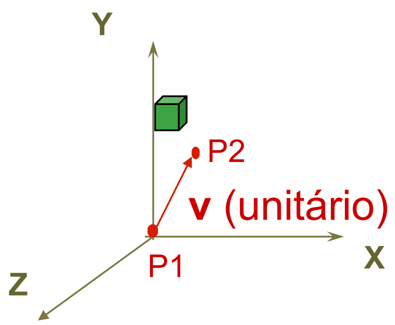
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário





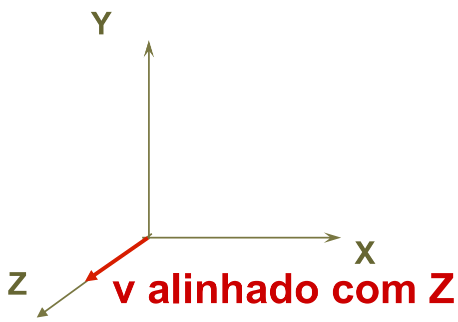
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

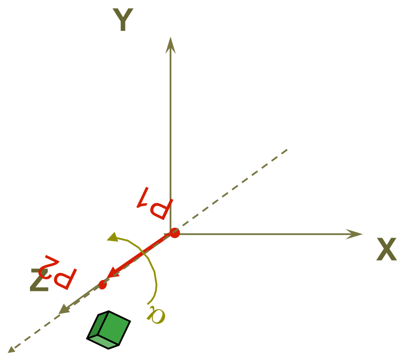




Translação (-xp1, -yp1, -zp1)

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

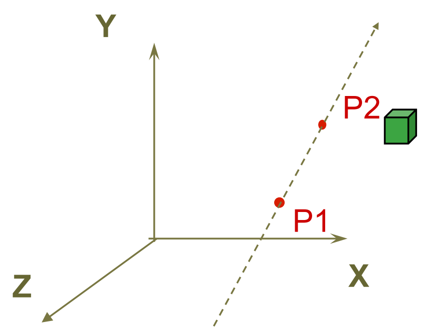




Rotação em torno de Z: R_{α}

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

- Efetuada a rotação no objeto, realizar as transformações inversas, “levando” o eixo de volta à posição original.



Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

- Aplicar transformações que levem **v** a coincidir com um dos eixos (z, por exemplo)
- Aplicar a rotação em torno do eixo escolhido
- Aplicar transformações inversas às anteriores, para levar **v** de volta à posição original

$$P' = \underbrace{T^{-1} R_x^{-1} R_y^{-1} R_\alpha R_y R_x T}_{M} \,.\; P$$

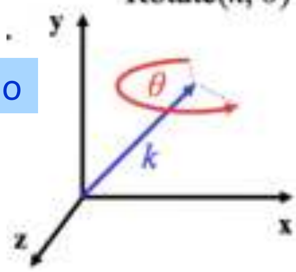
Rotação - Eixo genérico

Fórmula de Rodrigues

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x k_x(1-c)+c & k_z k_x(1-c)-k_z s & k_x k_z(1-c)+k_y s & 0 \\ k_y k_x(1-c)+k_z s & k_z k_x(1-c)+c & k_y k_z(1-c)-k_x s & 0 \\ k_z k_x(1-c)-k_y s & k_z k_x(1-c)-k_x s & k_z k_z(1-c)+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $c = \cos\theta$ $s = \sin\theta$

Rotate(k, θ)



O vetor k expressa o eixo de rotação arbitrário

- `glRotatef(angle,x,y,z)`

Em OpenGL

Translação/Escala em OpenGL

- Translação – `glTranslatef(tx, ty, tz)`
  - T(tx, ty, tz): $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- Escala – `glScalef(Sx, Sy, Sz)`
  - S(Sx, Sy, Sz): $\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

UFRGS

Compondo as transformações

Escalas, Rotações

Translações

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & d & g & d_x \\ b & e & h & d_y \\ c & f & i & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

UFRGS

Translações

Escalas, Rotações

Translações

$$\begin{pmatrix} a & d & g & d_x \\ b & e & h & d_y \\ c & f & i & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Translações

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

UFRGS

Escala

Escalas, Rotações

Translações

$$\begin{pmatrix} a & d & g & d_x \\ b & e & h & d_y \\ c & f & i & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Escalas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

UFRGS

Rotação

Escalas, Rotações

Translações

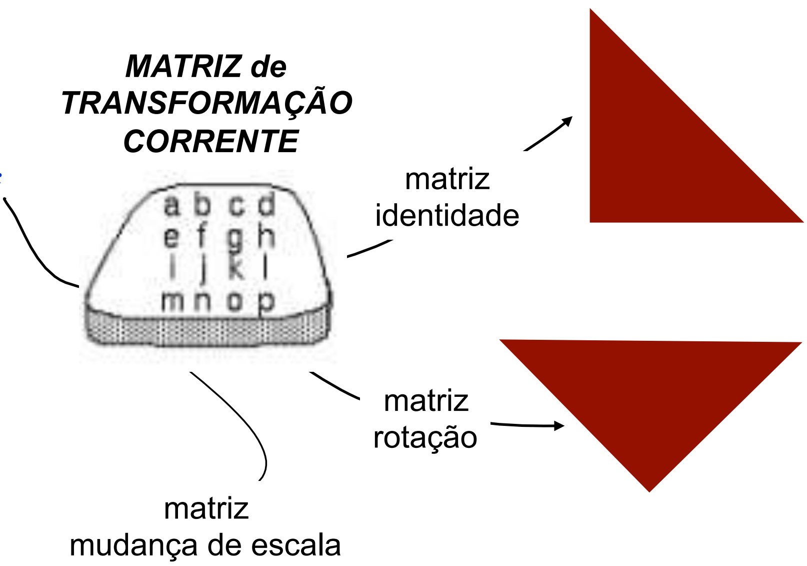
$$\begin{pmatrix} a & d & g & d_x \\ b & e & h & d_y \\ c & f & i & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

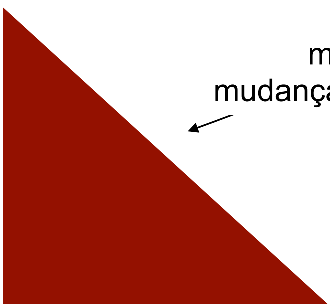
Rotações

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & e & f & 0 \\ g & h & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações geométricas em OpenGL

```
glBegin(GL_TRIANGLE);
   glVertex2i(0,0);
   glVertex2i(0,2);
   glVertex2i(2,0);
glEnd();
```





Transformações geométricas em OpenGL

Qual a ordem de especificação das transformações?
Por exemplo:

```
glRotatef();
glTranslatef();
Draw_cube();
```

```
glTranslatef();
glRotatef();
Draw_cube();
```

Em OpenGL, o último comando de transformação é o primeiro a ser executado

Exercícios

- A ordem de aplicação das transformações é importante?
  - Sempre? Se não, quando altera o resultado?

Decida e prove se as seguintes transformações são comutativas ou não:

a. T1T2 = T2T1 (duas translações em seqüência)
b. S1S2 = S2S1 (duas escalas em seqüência)
c. R1R2 = R2R1 (duas rotações em seqüência)
d. SR = RS (uma escala seguida de uma rotação)
e. TS = ST (uma translação seguida de uma escala)

Exercícios

- Prove matematicamente que a aplicação de 2 rotações em seqüência equivale a aplicar uma rotação onde o ângulo de rotação resultante é igual à soma dos ângulos das 2 rotações individuais.

UFRGS

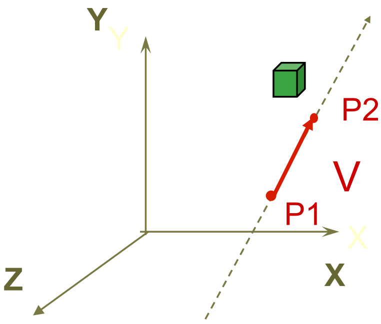
ANEXOS

UFRGS

Detalhando rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

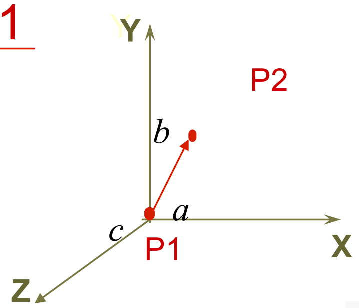
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

- Seja V =P2-P1, eixo de rotação
  - V = (x2-x1, y2-y1, z2-z1)



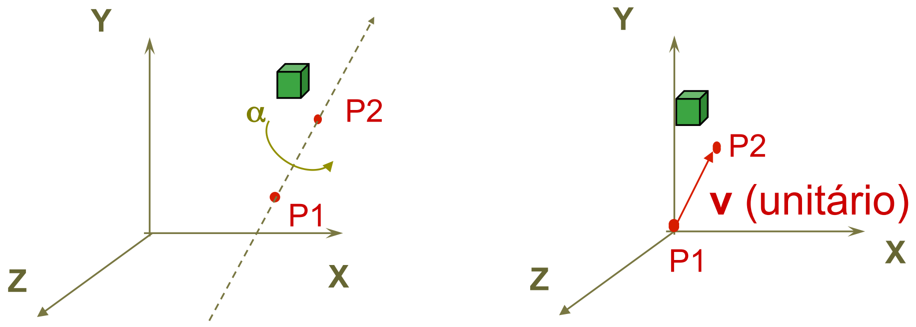
$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = (a,b,c)$$

$$a = \frac{x2-x1}{|V|} \quad b = \frac{y2-y1}{|V|} \quad c = \frac{z2-z1}{|V|}$$



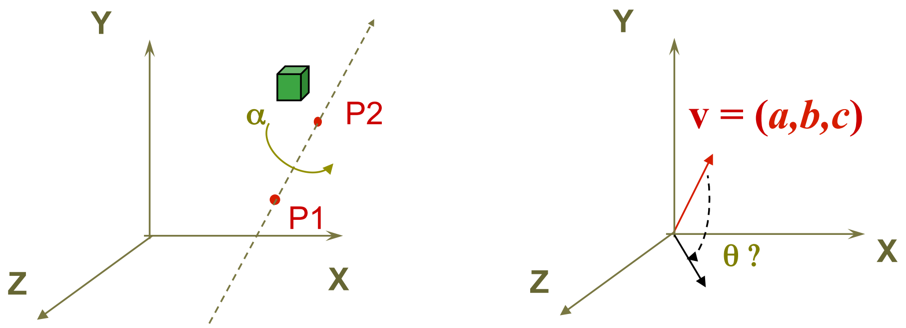
(a,b,c) são cosenos diretores de v

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

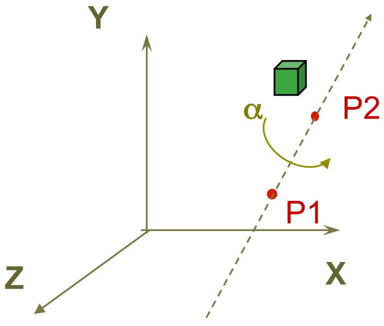


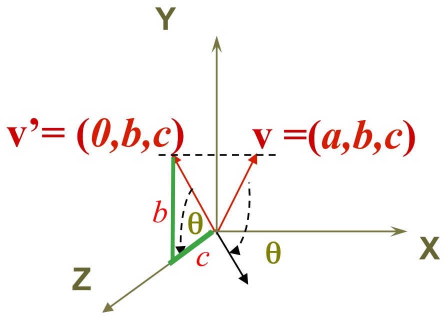
Translação (-xp1, -yp1, -zp1)

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

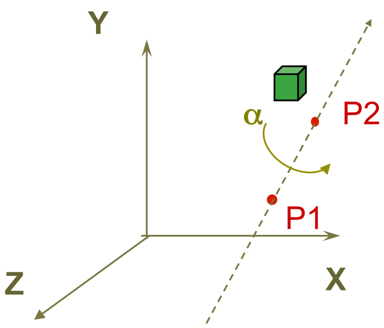


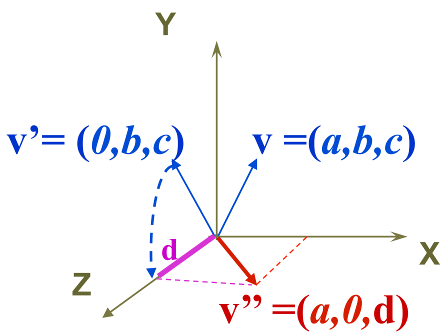


$$d = |\,\mathbf{v'}\,| = \mathrm{sqrt}(b^2 + c^2)$$

$$\cos\theta = \frac{c}{d}$$

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



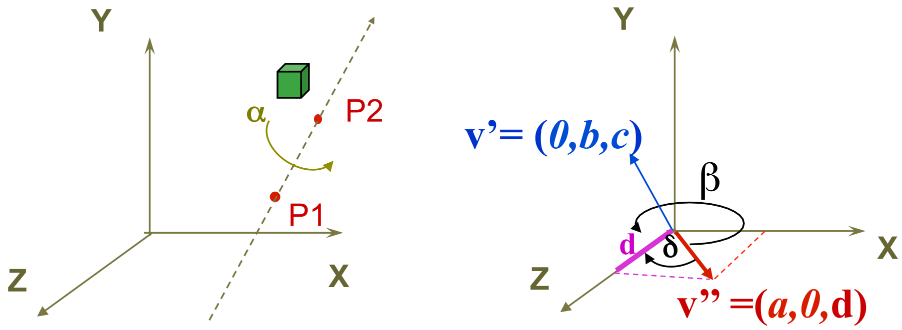


Rotação em torno de X: R_θ

$$\cos\theta = \frac{c}{d}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{b}{d}$$

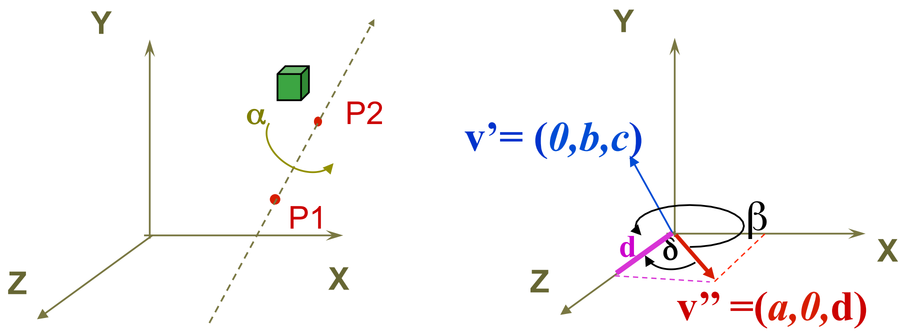
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



$\mathbf{k} = (0,0,1) \qquad |\mathbf{v''}| = |\mathbf{k}| = 1$

$$\cos \beta = \cos \delta = \frac{\mathbf{v''} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{v''}||\mathbf{k}|} = d$$

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

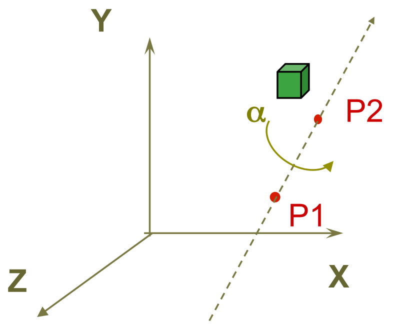


Rotação em torno de Y: R_β

$\cos \beta = d$

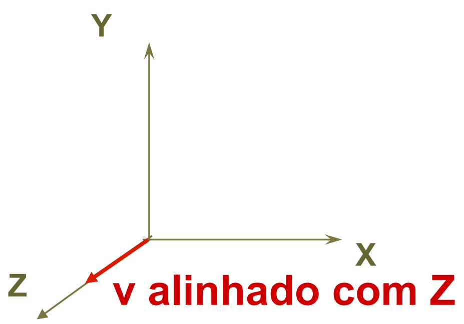
$\text{sen}\, \beta = -\,\text{sen}\, \delta = -\, a$

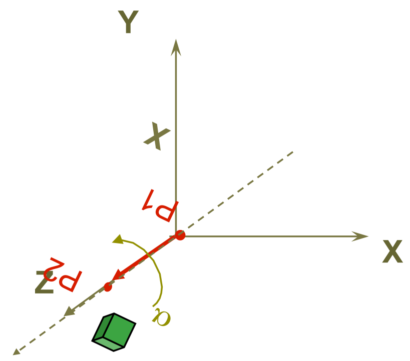
Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário



Rotação em torno de Z: R_{α}

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário





Rotação em torno de Z: R_{α}

Rotação 3D em torno de um eixo arbitrário

- Efetuada a rotação no objeto, realizar as transformações inversas a R_β, R_θ e T.