Algoritmos e complexidade
Notas de aula

Marcus Ritt
Luciana S. Buriol
Edson Prestes

Março de 2010

Parte I

Análise de algoritmos

1 Introdução e conceitos básicos

A teoria da computação começou com a pergunta "Quais problemas são *efetivamente* computáveis?" e foi estudada por matemáticos como Post, Church, Kleene e Turing. A nossa intuição é que todos os computadores diferentes, por exemplo um PC ou um Mac, têm o mesmo poder computacional. Mas não é possível imaginar algum outro tipo de máquina que seja mais poderosa que essas? Cujos programas nem podem ser implementadas num PC ou Mac? Não é fácil responder essa pergunta, porque a resposta depende das possibilidades computacionais do nosso universo, e logo do nosso conhecimento da física. Matemáticos inventaram vários modelos de computação, entre eles o cálculo lambda, as funções parcialmente recursivas, a máquina de Turing e a máquina de RAM, e descobriram que todos são (polinomialmente) equivalentes em poder computacional, e são considerados como máquinas universais.
Nossa pergunta é mais específica: "Quais problemas são *eficientemente* computáveis?". Essa pergunta é motivada pela observação de que alguns problemas que, mesmo sendo efetivamente computáveis, são tão complicados, que a solução deles para instâncias do nosso interesse é impraticável.

Exemplo 1.1
Não existe um algoritmo que decide o seguinte: Dado um programa arbitrário (que podemos imaginar escrito em qualquer linguagem de programação como C ou Miranda) e as entradas desse programa. Ele termina? Esse problema é conhecido como "problema de parada". ◊

Visão geral

- Nosso objetivo: Estudar a análise e o projeto de algoritmos.
- Parte 1: Análise de algoritmos, i.e. o estudo teórico do desempenho e uso de recursos.
- Ela é pré-requisito para o projeto de algoritmos.
- Parte 2: As principais técnicas para projetar algoritmos.

Introdução

- Um algoritmo é um procedimento que consiste em um conjunto de regras não ambíguas as quais especificam, para cada entrada, uma seqüência finita de operações, terminando com uma saída correspondente.
- Um algoritmo resolve um problema quando, para qualquer entrada, produz uma resposta correta, se forem concedidos tempo e memória suficientes para a sua execução.

Motivação

- Na teoria da computação perguntamos "Quais problemas são efetivamente computáveis?"
- No projeto de algoritmos, a pergunta é mais específica: "Quais problemas são eficientemente computáveis?"
- Para responder, temos que saber o que "eficiente" significa.
- Uma definição razoável é considerar algoritmos em tempo polinomial como eficiente (tese de Cobham-Edmonds).

Custos de algoritmos

- Também temos que definir qual tipo de custo é de interesse.
- Uma execução tem vários custos associados: Tempo de execução, uso de espaço (cache, memória, disco), consumo de energia, ...
- Existem características e medidas que são importantes em contextos diferentes Linhas de código fonte (LOC), legibilidade, manutenabilidade, corretude, custo de implementação, robustez, extensibilidade,...
- A medida mais importante e nosso foco: tempo de execução.
- A complexidade pode ser vista como uma propriedade do problema

Mesmo um problema sendo computável, não significa que existe um algoritmo que vale a pena aplicar. O problema

Expressões regulares com $\cdot^2$

Instância Uma expressão regular e com operações $\cup$ (união), $\cdot^*$ (fecho de Kleene), $\cdot$ (concatenação) e $\cdot^2$ (quadratura) sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$.

Decisão $L(e) \neq \Sigma^*$?

que parece razoavelmente simples é, de fato, EXPSPACE-completo (**?**, Corolário 2.1) (no momento é suficiente saber que isso significa que o tempo para resolver o problema cresce ao menos exponencialmente com o tamanho da entrada).

Exemplo 1.2
Com $e = 0 \cup 1^2$ temos $L(e) = \{0, 11\}$.
Com $e = (0 \cup 1)^2 \cdot 0^*$ temos

$$L(e) = \{00, 01, 10, 11, 000, 010, 100, 110, 0000, 0100, 1000, 1100, \ldots\}.$$

$\Diamond$

Existem exemplos de outros problemas que são decidíveis, mas têm uma complexidade tão grande que praticamente todas instâncias precisam mais recursos que o universo possui (p.ex. a decisão da validade na lógica monádica fraca de segunda ordem com sucessor).

O universo do ponto da vista da ciência da computação Falando sobre os recursos, é de interesse saber quantos recursos nosso universo disponibiliza aproximadamente. A seguinte tabela contém alguns dados básicos:

Idade	$13.7 \pm 0.2 \times 10^9$ anos $\approx 43.5 \times 10^{16}$ s
Tamanho	$\geq 78 \times 10^9$ anos-luz
Densidade	$9.9 \times 10^{-30} g/cm^3$
Número de átomos	10^{80}
Número de bits	10^{120}
Número de operações lógicas elementares até hoje	10^{120}
Operações/s	$\approx 2 \times 10^{102}$

(Todos os dados correspondem ao consenso científico no momento; obviamente novos descobrimentos podem os mudar. Fontes principais: (Wilkinson; Lloyd, 2002))

Métodos para resolver um sistema de equações lineares Como resolver um sistema quadrático de equações lineares

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

ou $Ax = b$? Podemos calcular a inversa da matriz A para chegar em $x = bA^{-1}$. O *método de Cramer* nos fornece as equações

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

seja A_i a matriz resultante da substituição de b pela i-gésima coluna de A. (A prova dessa fato é bastante simples. Seja U_i a matriz identidade com a i-gésima coluna substituído por x: é simples verificar que $AU_i = A_i$. Com $\det(U_i) = x_i$ e $\det(A)\det(U_i) = \det(A_i)$ temos o resultado.) Portanto, se o trabalho de calcular o determinante de uma matriz de tamanho $n \times n$ é T_n, essa abordagem custa $(n+1)T_n$. Um método simples usa a fórmula de Leibniz

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{1 \le i \le n} a_{i,\sigma(i)} \right)$$

mas ele precisa $n!$ adições (A) e $n!n$ multiplicações (M), e nossos custos são

$$(n+1)(n!A + n!nM) \ge n!(A+M) \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n(A+M)$$

um número formidável! Mas talvez a fórmula de Leibniz não é o melhor jeito de calcular o determinante! Vamos tentar a fórmula de expansão de Laplace

$$\det(A) = \sum_{1 \le i \le n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

(sendo A_{ij} a matriz A sem linha a i e sem a coluna j). O trabalho T_n nesse caso é dado pelo recorrência

$$T_n = n(A + M + T_{n-1}); \qquad T_1 = 1$$

cuja solução é

$$T_n = n! \left(1 + (A+M) \sum_{1 \le i < n} 1/i! \right)$$ [1]

[1] $n! \sum_{1 \le i < n} 1/i! = \lfloor n!(e-1) \rfloor$.

e como $\sum_{1\leq i<n} 1/i!$ aproxima e temos $n! \leq T_n \leq n!(1+(A+M)e)$ e logo T_n novamente é mais que $n!$. Mas qual é o método mais eficiente para calcular o determinante? Caso for possível em tempo proporcional ao tamanho da entrada n^2, tivermos um algoritmo em tempo aproximadamente n^3.
Antes de resolver essa pergunta, vamos estudar uma abordagem diferente da pergunta original, o método de Gauss para resolver um sistema de equações lineares. Em n passos, o matriz é transformada em forma triangular e cada passo não precisa mais que n^2 operações (nesse caso inclusive divisões).

Eliminação de Gauss

Entrada Uma matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Saída A em forma triangular superior.

```
1  eliminação gauss(a ∈ ℝ^{n×n})=
2  for i := 1,...,n do { eliminate column i }
3    for j := i+1,...,n do { eliminate row j }
4      for k := n,...,i do
5        a_jk := a_jk − a_ik a_ji / a_ii
6      end for
7    end for
8  end for
```

Exemplo 1.3
Para resolver

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

vamos aplicar a eliminação de Gauss à matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 4 \\ 7 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

obtendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -4 \\ 0 & -6 & -12 & -8 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e logo $x_3 = 0$, $x_2 = 3/4$, $x_1 = 1/2$ é uma solução. ◊

Logo temos um algoritmo que determina a solução com

$$\sum_{1 \le i \le n} 3(n-i+1)(n-i) = n^3 - n$$

operações de ponto flutuante, que é (exceto valores de n bem pequenos) consideravelmente melhor que os resultados com $n!$ operações acima[2].
Observe que esse método também fornece o determinante do matriz: ela é o produto dos elementos na diagonal! De fato, o método é um dos melhores para calcular o determinante. Observe também que ela não serve para melhorar o método de Cramer, porque a solução do problema original já vem junto[3].

Qual o melhor algoritmo?

- Para um dado problema, existem diversos algoritmos com desempenhos diferentes.
- Queremos resolver um sistema de equações lineares de tamanho n.
- O método de Cramer precisa $\approx 6n!$ operações de ponto flutuante (OPF).
- O método de Gauss precisa $\approx n^3 - n$ OPF.
- Usando um computador de 3 GHz que é capaz de executar um OPF por ciclo temos

n	Cramer	Gauss
2	4 ns	2 ns
3	12 ns	8 ns
4	48 ns	20 ns
5	240ns	40 ns
10	7.3ms	330 ns
20	152 anos	2.7 μs

[2] O resultado pode ser melhorado considerando que a_{ji}/a_{ii} não depende do k

[3] O estudo da complexidade do determinante tem muito mais aspectos interessantes. Um deles é que o método de Gauss pode produzir resultados intermediários cuja representação precisa um número exponencial de bits em relação à entrada. Portanto, o método de Gauss formal mente não tem complexidade $O(n^3)$. Resultados atuais mostram que uma complexidade de operações de bits $n^{3.2} \log \|A\|^{1+o(1)}$ é possível (Kaltofen and Villard, 2004).

Motivação para algoritmos eficientes

- Com um algoritmo ineficiente, um computador rápido não ajuda!
- Suponha que uma máquina resolva um problema de tamanho N em um dado tempo.
- Qual tamanho de problema uma máquina 10 vezes mais rápida resolve no mesmo tempo?

Número de operações	Máquina rápida
$\log_2 n$	N^{10}
n	$10N$
$n \log_2 n$	$10N$ (N grande)
n^2	$\sqrt{10}N \approx 3.2N$
n^3	$\sqrt[3]{10}N \approx 2.2N$
2^n	$N + \log_2 10 \approx N + 3.3$
3^n	$N + \log_3 10 \approx N + 2.1$

Exemplo 1.4
Esse exemplo mostra como calcular os dados da tabela acima. Suponha um algoritmo que precisa $f(n)$ passos de execução numa dada máquina e uma outra máquina que é c vezes mais rápida. Portanto, ele é capaz de executar c vezes mais passos que a primeira. Ao mesmo tempo, qual seria o tamanho de problema n' que a nova máquina é capaz de resolver? Temos

$$f(n') = cf(n).$$

Por exemplo para $f(n) = \log_2 n$ e $c = 10$ (exemplo acima), temos

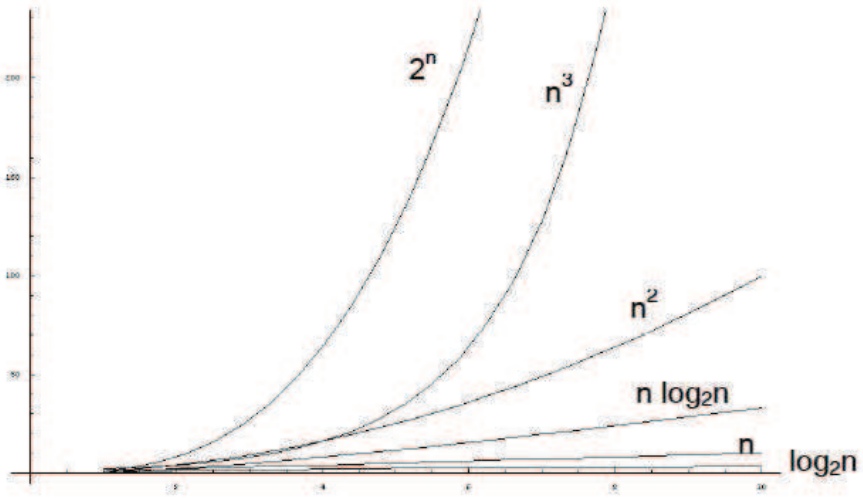
$$\log_2 n' = 10 \log_2 n \iff n' = n^{10}.$$

Em geral obtemos

$$n' = f^{-1}(cf(n))$$

(isso faz sentido para funções monotônicas, que têm inversa). $\Diamond$

Crescimento de funções



Crescimento de funções

$n =$	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\log_2 n$	3	7	10	13	17	20
n	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$n \log_2 n$	33	6.6×10^2	10^4	1.3×10^5	1.7×10^6	2×10^7
n^2	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^{12}
n^3	10^3	10^6	10^9	10^{12}	10^{15}	10^{18}
2^n	10^3	1.3×10^{30}	1.1×10^{301}	2×10^{3010}	10^{30103}	10^{301030}

$$1\,\text{ano} \approx 365.2425\text{d} \approx 3.2 \times 10^7\text{s}$$
$$1\,\text{século} \approx 3.2 \times 10^9\text{s}$$
$$1\,\text{milênio} \approx 3.2 \times 10^{10}\text{s}$$

Comparar eficiências

- Como comparar eficiências? Uma medida concreta do tempo depende
  - do tipo da máquina usada (arquitetura, cache, memória, ...)
  - da qualidade e das opções do compilador ou ambiente de execução
  - do tamanho do problema (da entrada)
- Portanto, foram inventadas *máquinas abstratas*.

- A *análise* da complexidade de um algoritmo consiste em determinar o número de operações básicas (atribuição, soma, comparação, ...) em relação ao tamanho da entrada.

Observe que nessa medida o tempo é "discreto".

Análise assintótica

- Em geral, o número de operações fornece um nível de detalhamento grande.
- Portanto, analisamos somente a taxa ou ordem de crescimento, substituindo funções exatas com cotas mais simples.
- Duas medidas são de interesse particular: A complexidade
  - pessimista e
  - média

Também podemos pensar em considerar a complexidade otimista (no caso melhor): mas essa medida faz pouco sentido, porque sempre é possível enganar com um algoritmo que é rápido para alguma entrada.

Exemplo

- Imagine um algoritmo com número de operações

$$an^2 + bn + c$$

- Para análise assintótica não interessam
  - os termos de baixa ordem, e
  - os coeficientes constantes.
- Logo o tempo da execução tem cota n^2, denotado com $O(n^2)$.

Observe que essas simplificações não devem ser esquecidas na escolha de um algoritmo na prática. Existem vários exemplos de algoritmos com desempenho bom assintoticamente, mas não são viáveis na prática em comparação com algoritmos "menos eficientes": A taxa de crescimento esconde fatores constantes e o tamanho mínimo de problema tal que um algoritmo é mais rápido que um outro.

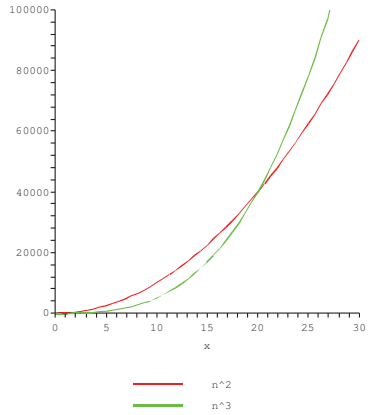
Complexidade de algoritmos

- Considere dois algoritmos A e B com tempo de execução O(n^2) e O(n^3), respectivamente. Qual deles é o mais eficiente ?
- Considere dois programas A e B com tempos de execução $100 \cdot n^2$ milisegundos,e $5 \cdot n^3$ milisegundos, respectivamente, qual é o mais eficiente?

Exemplo 1.5
Considerando dois algoritmos com tempo de execução $O(n^2)$ e $O(n^3)$ esperamos que o primeiro seja mais eficiente que o segundo. Para n grande, isso é verdadeiro, mas o tempo de execução atual pode ser $100n^2$ no primeiro e $5n^3$ no segundo caso. Logo para $n < 20$ o segundo algoritmo é mais rápido. ◊

Comparação de tempo de execução

- Assintoticamente consideramos um algoritmo com complexidade $O(n^2)$ melhor que um algoritmo com $O(n^3)$.
- De fato, para n suficientemente grande $O(n^2)$ sempre é melhor.
- Mas na prática, não podemos esquecer o tamanho do problema real.



Exemplo 1.6
Considere dois computadores C_1 e C_2 que executam 10^7 e 10^9 operações por segundo (OP/s) e dois algoritmos de ordenação A e B que necessitam $2n^2$ e $50n \log_{10} n$ operações com entrada de tamanho n, respectivamente. Qual o tempo de execução de cada combinação para ordenar 10^6 elementos?

Algoritmo	Comp. C_1	Comp. C_2
A	$\frac{2\times(10^6)^2 OP}{10^7 OP/s} = 2 \times 10^5 s$	$\frac{2\times(10^6)^2 OP}{10^9 OP/s} = 2 \times 10^3 s$
B	$\frac{50(10^6)\log 10^6 OP}{10^7 OP/s} = 30s$	$\frac{50(10^6)\log 10^6 OP}{10^9 OP/s} = 0.3s$

$\Diamond$

Um panorama de tempo de execução

- Tempo constante: $O(1)$ (raro).
- Tempo sublinear ($\log(n)$, $\log(\log(n))$, etc): Rápido. Observe que o algoritmo não pode ler toda entrada.
- Tempo linear: Número de operações proporcional à entrada.
- Tempo $n \log n$: Comum em algoritmos de divisão e conquista.
- Tempo polinomial n^k: Freqüentemente de baixa ordem ($k \leq 10$), considerado eficiente.
- Tempo exponencial: 2^n, $n!$, n^n considerado intratável.

Exemplo 1.7
Exemplos de algoritmos para as complexidades acima:

- Tempo constante: Determinar se uma seqüência de números começa com 1.
- Tempo sublinear: Busca binária.
- Tempo linear: Buscar o máximo de uma seqüência.
- Tempo $n \log n$: Mergesort.
- Tempo polinomial: Multiplicação de matrizes.
- Tempo exponencial: Busca exaustiva de todos subconjuntos de um conjunto, de todas permutações de uma seqüência, etc.

$\Diamond$

Problemas super-polinomiais?

- Consideramos a classe P de problemas com solução em tempo polinomial tratável.
- NP é outra classe importante que contém muitos problemas práticos (e a classe P).
- Não se sabe se todos possuem algoritmo eficiente.
- Problemas NP-completos são os mais complexos do NP: Se um deles tem uma solução eficiente, toda classe tem.
- Vários problemas NP-completos são parecidos com problemas que têm algoritmos eficientes.

Solução eficiente conhecida	Solução eficiente improvável
Ciclo euleriano	Ciclo hamiltoniano
Caminho mais curto	Caminho mais longo
Satisfatibilidade 2-CNF	Satisfatibilidade 3-CNF

Ciclo euleriano

Instância Um grafo não-direcionado $G = (V, E)$.

Decisão Existe um ciclo euleriano, i.e. um caminho $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que $v_1 = v_n$ que usa todos arcos exatamente uma vez?

Comentário Tem uma decisão em tempo linear usando o teorema de Euler (veja por exemplo (**?**, Teorema 1.8.1)) que um grafo conexo contém um ciclo euleriano sse cada nó tem grau par. No caso de um grafo direcionado tem um teorema correspondente: um grafo fortemente conexo contém um ciclo euleriano sse cada nó tem o mesmo número de arcos entrantes e saintes.

Ciclo hamiltoniano

Instância Um grafo não-direcionado $G = (V, E)$.

Decisão Existe um ciclo hamiltanio, i.e. um caminho $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que $v_1 = v_n$ que usa todos nós exatamente uma única vez?

1.1 Notação assintótica

O análise de algoritmos considera principalmente recursos como tempo e espaço. Analisando o comportamento de um algoritmo em termos do tamanho da entrada significa achar uma função $c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$, que associa com todos entradas de um tamanho n um custo (médio,máximo) $c(n)$. Observe, que é suficiente trabalhar com funções positivas (com co-domínio $\mathbb{R}^+$), porque os recursos de nosso interesse são positivos. A seguir, supomos que todas funções são dessa forma.

Notação assintótica: O

- Freqüentemente nosso interesse é o comportamento *assintótico* de uma função $f(n)$ para $n \to \infty$.

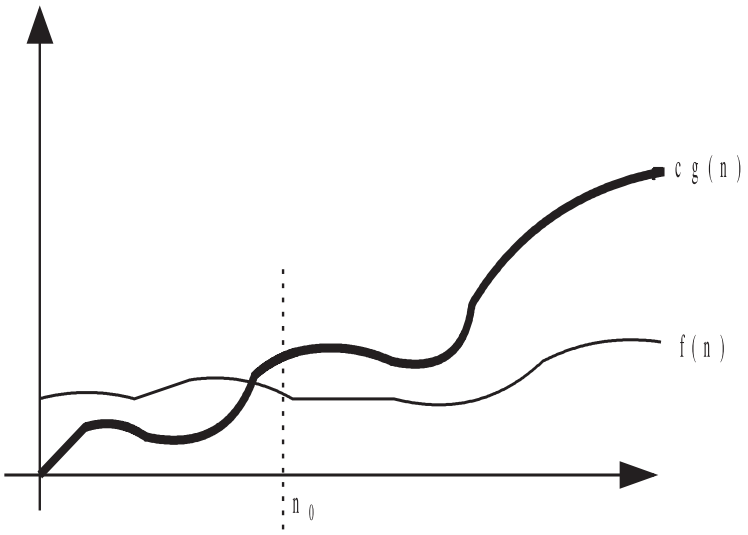
- Por isso, vamos introduzir *classes de crescimento*.

- O primeiro exemplo é *a classe de funções que crescem menos ou igual que* $g(n)$

$$O(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid (\exists c > 0)\exists n_0(\forall n > n_0) : \ f(n) \leq cg(n)\}$$

A definição do O (e as outras definições em seguido) podem ser generalizadas para qualquer função com domínio $\mathbb{R}$.

Notação assintótica: O



Notação assintótica

- Com essas classes podemos escrever por exemplo

$$4n^2 + 2n + 5 \in O(n^2)$$

- Outra notação comum que usa a identidade é

$$4n^2 + 2n + 5 = O(n^2)$$

- Observe que essa notação é uma "equação sem volta" (inglês: one-way equation);

$$O(n^2) = 4n^2 + 2n + 5$$

  não é definido.

Para $f \in O(g)$ leia: "f é do ordem de g"; para $f = O(g)$ leiamos as vezes simplesmente "f é O de g". Observe que numa equação como $4n^2 = O(n^2)$, as expressões $4n^2$ e n^2 denotam *funções*, não valores[4].
Caso $f \in O(g)$ com constante $c = 1$, digamos que g é uma *cota assintótica superior* de f (**?**, p. 15). Em outras palavras, O define uma cota assintótica superior a menos de constantes.

[4] Um jeito mais correto (mas menos confortável) seria escrever $\lambda n.4n^2 = O(\lambda n.n^2)$

O: Exemplos

$$5n^2 + n/2 \in O(n^3)$$
$$5n^2 + n/2 \in O(n^2)$$
$$\sin(n) \in O(1)$$

Exemplo 1.8
Mais exemplos

$$n^2 \in O(n^3 \log_2 n) \qquad c = 1; n_0 = 2$$
$$32n \in O(n^3) \qquad c = 32; n_0 = 1$$
$$10^n n^2 \notin O(n2^n) \qquad \text{porque } 10^n n^2 \leq cn2^n \iff 5^n n \leq c$$
$$n \log_2 n \in O(n \log_{10} n) \qquad c = 4; n_0 = 1$$

$\Diamond$

O: Exemplos

Proposição 1.1
Para um polinômio $p(n) = \sum_{0 \leq i \leq m} a_i n^i$ temos

$$|p(n)| \in O(n^m) \tag{1.1}$$

Prova.

$$\begin{aligned} |p(n)| &= \left| \sum_{0 \leq i \leq m} a_i n^i \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq m} |a_i| n^i \qquad \text{Corolário A.1} \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq m} |a_i| n^m = n^m \sum_{0 \leq i \leq m} |a_i| \end{aligned}$$

■

Notação assintótica: Outras classes

- Funções que crescem (estritamente) menos que $g(n)$

$$o(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid (\forall c > 0)\exists n_0(\forall n > n_0) : \ f(n) \leq cg(n)\} \quad (1.2)$$

- Funções que crescem mais ou igual à $g(n)$

$$\Omega(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid (\exists c > 0)\exists n_0(\forall n > n_0) : \ f(n) \geq cg(n)\} \quad (1.3)$$

- Funções que crescem (estritamente) mais que $g(n)$

$$\omega(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid (\forall c > 0)\exists n_0(\forall n > n_0) : \ f(n) \geq cg(n)\} \quad (1.4)$$

- Funções que crescem igual à $g(n)$

$$\Theta(g(n)) = O(g(n)) \cap \Omega(g(n)) \quad (1.5)$$

Observe que a nossa notação somente é definida "ao redor do ∞", que é suficiente para a análise de algoritmos. Equações como $e^x = 1 + x + O(x^2)$, usadas no cálculo, possuem uma definição de O diferente.
As definições ficam equivalente, substituindo $<$ para $\leq$ e $>$ para $\geq$ (veja exercício 1.5).

Convenção 1.1
Se o contexto permite, escrevemos $f \in O(g)$ ao invés de $f(n) \in O(g(n))$, $f \leq cg$ ao invés de $f(n) \leq cg(n)$ etc.

Proposição 1.2 (Caracterização alternativa)
Caracterizações alternativas de O, o, Ω e ω são

$$f(n) \in O(g(n)) \iff \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \quad (1.6)$$

$$f(n) \in o(g(n)) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0 \quad (1.7)$$

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \iff \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} > 0 \quad (1.8)$$

$$f(n) \in \omega(g(n)) \iff \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \quad (1.9)$$

Prova. Prova de 1.6:
"⇒": Seja $f \in O(g)$. Como $s(n) = \sup_{m \geq n} f(m)/g(m)$ é não-crescente e maior ou igual que 0, é suficiente mostrar que existe um n tal que $s(n) < \infty$. Por definição do O temos $c > 0$ e n_0 tal que $\forall n > n_0\ f \leq cg$. Logo $\forall n > n_0\ \sup_{m \geq n} f(m)/g(m) \leq c$.
"⇐": Seja $\limsup_{n \to \infty} f(n)/g(n) < \infty$. Então

$$\exists c > 0 \exists n_0 \forall n > n_0 (\sup_{m \geq n} f(m)/g(m)) < c.$$

Isso implica, que para o mesmo n_0, $\forall n > n_0\ f < cg$ e logo $f \in O(g)$.
Prova de 1.7:
"⇒": Seja $f \in o(g)$, i.e. para todo $c > 0$ temos um n_0 tal que $\forall n > n_0\ f \leq cg$. Logo $\forall n > n_0\ f(n)/g(n) \leq c$, que justifique $\lim_{n \to \infty} f(n)/g(n) = 0$ (veja lema A.1).
"⇐": Seja $\lim_{n \to \infty} f(n)/g(n) = 0$, i.e. para todo $c > 0$ existe um n_0 tal que $\forall n > n_0\ f(n)/g(n) < c$ pela definição do limite. Logo $\forall n > n_0\ f \leq cg$, tal que $f \in o(g)$.
Prova de 1.8:
"⇒": Seja $f \in \Omega(g)$. Como $i(n) = \inf_{m \geq n} f(m)/g(m)$ é não-decrescente, é suficiente mostrar, que existe um n tal que $i(n) > 0$. Pela definição de Ω existem $c > 0$ e n_0 tal que $\forall n > n_0\ f \geq cg$. Logo $\forall n > n_0\ f(n)/g(n) \geq c > 0$, i.e. $i(n_0 + 1) > 0$.
"⇐": Suponha $\liminf_{n \to \infty} f(n)/g(n) = l > 0$. Vamos considerar os casos $l < \infty$ e $l = \infty$ separadamente.
Caso $l < \infty$: Escolhe, por exemplo, $c = l/2$. Pela definição do limite existe n_0 tal que $\forall n > n_0\ |l - f/g| \leq l/2$. Logo $f \geq l/2g$ (f/g aproxima l por baixo) e $f \in \Omega(g)$.
Caso $l = \infty$, $i(n)$ não tem limite superior, i.e. $(\forall c > 0) \exists n_0\ i(n_0) > c$. Como $i(n)$ é não-decrescente isso implica $(\forall c > 0) \exists n_0 (\forall n > n_0)\ i(n) > c$. Portanto $\forall n > n_0 f > cg$ e $f \in \omega(g) \subseteq \Omega(g)$.
Prova de 1.9:

$$\begin{aligned} & f \in \omega(g) \\ \iff & (\forall c > 0) \exists n_0 (\forall n > n_0)\ : f \geq cg \\ \iff & (\forall c > 0) \exists n_0 (\forall n > n_0)\ : f(n)/g(n) \geq c \\ \iff & f(n)/g(n) \text{ não possui limite} \end{aligned}$$

■

Convenção 1.2
Escrevemos $f, g, \ldots$ para funções $f(n), g(n), \ldots$ caso não tem ambigüedade no contexto.

Operações

- As notações assintóticas denotam conjuntos de funções.
- Se um conjunto ocorre em uma fórmula, resulta o conjunto de todas combinações das partes.
- Exemplos: $n^{O(1)}$, $\log O(n^2)$, $n^{1+o(1)}$, $(1-o(1))\ln n$
- Em uma equação o lado esquerdo é (implicitamente) quantificado universal, e o lado direto existencial.
- Exemplo: $n^2 + O(n) = O(n^4)$ Para todo $f \in O(n)$, existe um $g \in O(n^4)$ tal que $n^2 + f = g$.

Exemplo 1.9
$n^{O(1)}$ denota

$$\{n^{f(n)} \mid \exists c\, f(n) \leq c\} \subseteq \{f(n) \mid \exists c \exists n_0\, \forall n > n_0\, f(n) \leq n^c\}$$

o conjunto das funções que crescem menos que um polinômio. ◊

Uma notação assintótica menos comum é $f = \tilde{O}(g)$ que é uma abreviação para $f = O(g \log_k g)$ para algum k. $\tilde{O}$ é usado se fatores logarítmicos não importam. Similarmente, $f = O^*(g)$ ignora fatores polinomiais, i.e. $f = O(gp)$ para um polinômio $p(n)$.

Características

$$f = O(f) \tag{1.10}$$
$$cO(f) = O(f) \tag{1.11}$$
$$O(f) + O(f) = O(f) \tag{1.12}$$
$$O(O(f)) = O(f) \tag{1.13}$$
$$O(f)O(g) = O(fg) \tag{1.14}$$
$$O(fg) = fO(g) \tag{1.15}$$

Prova.
Prova de 1.10: Escolhe $c = 1$, $n_0 = 0$.
Prova de 1.11: Se $g \in cO(f)$, temos $g = cg'$ e existem $c' > 0$ e n_0 tal que $\forall n > n_0\ g' \leq c'f$. Portanto $\forall n > n_0\ g = cg' \leq cc'f$ e com cc' e n_0 temos $g \in O(f)$.

Prova de 1.12: Para $g \in O(f) + O(f)$ temos $g = h + h'$ com $c > 0$ e n_0 tal que $\forall n > n_0\ h \leq cf$ e $c' > 0$ e n_0' tal que $\forall n > n_0\ h' \leq c'f$. Logo para $n > \max(n_0, n_0')$ temos $g = h + h' \leq (c + c')f$.
Prova de 1.13: Para $g \in O(O(f))$ temos $g \leq ch$ com $h \leq c'f$ a partir de índices n_0 e n_0', e logo $g \leq cc'h$ a partir de $\max(n_0, n_0')$.
Prova de 1.14: $h = f'g'$ com $f' \leq c_f f$ e $g' \leq c_g g$ tal que $h = f'g' \leq c_f c_g fg$.
Prova de 1.15: Para $h \in O(fg)$ temos $c > 0$ e n_0 tal que $\forall n > n_0\ h \leq cfg$. Temos que mostrar, que h pode ser escrito como $h = fg'$ com $g' \in O(g)$. Seja

$$g'(n) = \begin{cases} h(n)/f(n) & \text{se } f(n) \neq 0 \\ cg(n) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Verifique-se que $h = fg'$ por análise de casos. Com isso, temos também $g' = h/f \leq cfg/f = cg$ nos casos $f(n) \neq 0$ e $g' = cg \leq cg$ caso contrário. ■

Exemplo 1.10
Por exemplo, (1.12) implica que para $f = O(h)$ e $g = O(h)$ temos $f+g = O(h)$. ◊

As mesmas características são verdadeiras para Ω (prova? veja exercício 1.1). E para o, ω e Θ?

Características: "Princípio de absorção" (?, p. 35)

$$g = O(f) \Rightarrow f + g = \Theta(f)$$

Relações de crescimento Uma vantagem da notação O é que podemos usá-la em fórmulas como $m + O(n)$. Em casos em que isso não for necessário, e queremos simplesmente comparar funções, podemos introduzir relações de crescimento entre funções, obtendo uma notação mais comum. Uma definição natural é

Relações de crescimento

Definição 1.1 (Relações de crescimento)

$$f \prec g \iff f \in o(g) \tag{1.16}$$
$$f \preceq g \iff f \in O(g) \tag{1.17}$$
$$f \succ g \iff f \in \omega(g) \tag{1.18}$$
$$f \succeq g \iff f \in \Omega(g) \tag{1.19}$$
$$f \asymp g \iff f \in \Theta(g) \tag{1.20}$$

Essas relações também são conhecidas como a notação de Vinogradov[5].
Caso $f \preceq g$ digamos as vezes "f é absorvido pela g". Essas relações satisfazem as características básicas esperadas.

Características das relações de crescimento

Proposição 1.3 (Características das relações de crescimento)
Sobre o conjunto de funções $[\mathbb{N} \to \mathbb{R}^+]$

1. $f \preceq g \iff g \succeq f$,
2. $\preceq$ e $\succeq$ são ordenações parciais (reflexivas, transitivas e anti-simétricas em relação de $\asymp$),
3. $f \prec g \iff g \succ f$,
4. $\prec$ e $\succ$ são transitivas,
5. $\asymp$ é uma relação de equivalência.

Prova.

1. Temos as equivalências

$$\begin{aligned} f \preceq g &\iff f \in O(g) \\ &\iff \exists c\, \exists n_0\, \forall n > n_0\ f \leq cg \\ &\iff \exists c'\, \exists n_0\, \forall n > n_0\ g \geq c' f \qquad \text{com } c' = 1/c \\ &\iff g \in \Omega(f) \end{aligned}$$

2. A reflexividade e transitividade são fáceis de verificar. No exemplo do $\preceq$, $f \preceq f$, porque $\forall n f(n) \leq f(n)$ e $f \preceq g$, $g \preceq h$ garante que a partir de um n_0 temos $f \leq cg$ e $g \leq c'h$ e logo $f \leq (cc')h$ também. Caso $f \preceq g$ e $g \preceq f$ temos com item (a) $f \succeq g$ e logo $f \asymp g$ pela definição de Θ.

[5] Uma notação alternativa é $\ll$ para $\preceq$ e $\gg$ para $\succeq$. Infelizmente a notação não é padronizada.

3. Temos as equivalências

$$\begin{aligned} f \prec g &\iff f \in o(g) \\ &\iff \forall c\, \exists n_0\, \forall n > n_0\, f \leq cg \\ &\iff \forall c'\, \exists n_0\, \forall n > n_0\, g \geq c' f \qquad \text{com } c' = 1/c \\ &\iff g \in \omega(f) \end{aligned}$$

4. O argumento é essencialmente o mesmo que no item (a).

5. Como Θ é definido pela intersecção de O e Ω, a sua reflexividade e transitividade é uma conseqüência da reflexividade e transitividade do O e Ω. A simetria é uma conseqüência direta do item (a).

■

Observe que esses resultados podem ser traduzidos para a notação O. Por exemplo, como $\asymp$ é uma relação de equivalência, sabemos que Θ também satisfaz

$$\begin{gathered} f \in \Theta(f) \\ f \in \Theta(g) \Rightarrow g \in \Theta(f) \\ f \in \Theta(g) \wedge g \in \Theta(h) \Rightarrow f \in \Theta(h) \end{gathered}$$

A notação com relações é sugestiva e freqüentemente mais fácil de usar, mas nem todas as identidades que ela sugere são válidas, como a seguinte proposição mostra.

Identidades falsas das relações de crescimento

Proposição 1.4 (Identidades falsas das relações de crescimento)
É verdadeiro que

$$f \succ g \Rightarrow f \not\preceq g \tag{1.21}$$
$$f \prec g \Rightarrow f \not\succeq g \tag{1.22}$$

mas as seguintes afirmações *não* são verdadeiras:

$$\begin{aligned} &f \not\preceq g \Rightarrow f \succ g \\ &f \not\succeq g \Rightarrow f \prec g \\ &f \prec g \vee f \asymp g \vee f \succ g \qquad \text{(Tricotomia)} \end{aligned}$$

Prova. Prova de 1.21 e 1.22: Suponha $f \succ g$ e $f \preceq g$. Então existe um c tal que a partir de um n_0 temos que $f = cg$ (usa as definições). Mas então $f \not\succ g$ é uma contradição. A segunda característica pode ser provada com um argumento semelhante.
Para provar as três afirmações restantes considere o par de funções n e $e^{n \sin(n)}$. Verifique-se que nenhuma relação $\prec$, $\preceq$, $\succ$, $\succeq$ ou $\asymp$ é verdadeira. ■
Considerando essas características, a notação tem que ser usada com cautela. Uma outra abordagem é definir O etc. diferente, tal que outras relações acima são verdadeiras. Mas parece que isso não é possível, sem perder outras, veja (Vitányi and Meertens, 1985).

Outras notações comuns

Definição 1.2
O *logaritmo iterado* é

$$\log^* n = \begin{cases} 0 & \text{se } n \leq 1 \\ 1 + \log^*(\log n) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

O logaritmo iterado é uma função que cresce extremamente lento; para valores práticos de n, $\log^* n$ não ultrapassa 5.

1.2 Notas

Alan Turing provou em 1936 que o "problema de parada" não é decidível. O estudo da complexidade de algoritmos começou com o artigo seminal de **?**.

1.2.1 Historical discussion*

The following definitions allows all kind of functions, including negative ones. This is necessary for use in analysis. Knuth (1976) gives the following definitions.

$$\begin{aligned} O(f(n)) &= \{g \mid \exists c > 0\, \exists n_0 \forall n > n_0 |g(n)| \leq cf(n)\} \\ o(f(n)) &= \{g \mid \forall c > 0\, \exists n_0 \forall n > n_0 |g(n)| < cf(n)\} \\ \Omega(f(n)) &= \{g \mid \exists c > 0\, \exists n_0 \forall n > n_0 g(n) \geq cf(n)\} \\ \omega(f(n)) &= \{g \mid \forall c > 0\, \exists n_0 \forall n > n_0 g(n) > cf(n)\} \\ \Theta(f(n)) &= \{g \mid (\exists c > 0\, \forall n_0 \forall n > n_0 g(n) \leq cf(n)) \\ &\qquad \wedge (\exists c > 0\, \forall n_0 \forall n > n_0 g(n) \geq cf(n))\} \end{aligned}$$

His definition of Ω deviates from historical use, which he felt justified by its usefulness for computer science. This definitions imply:

1. If $f(n)$ is "negative", for example $-n^2$, then $O(f(n)) = \emptyset$, so $-n^3 \notin O(-n^2)$.
2. On the other hand, $-n \in \Omega(-n^2)$.
3. $g(n) \in O(f(n))$ and $g(n) \in \Omega(f(n))$ imply $g(n) \in \Theta(g(n))$. But the converse does not hold. For example $-2n^2 \in \Theta(-n^2)$, but $-2n^2 \notin O(-n^2)$ (see first item). This is weird.

Later, Knuth changed his definitions (**?**) to

$$\begin{aligned}
O(f(n)) &= \{g \mid \exists c > 0\, \exists n_0 \forall n > n_0 |g(n)| \leq c|f(n)|\} \\
o(f(n)) &= \{g \mid \forall c > 0\, \exists n_0 \forall n > n_0 |g(n)| \leq c|f(n)|\} \\
\Omega(f(n)) &= \{g \mid \exists c > 0\, \exists n_0 \forall n > n_0 |g(n)| \geq c|f(n)|\} \\
\omega(f(n)) &= \{g \mid \forall c > 0\, \exists n_0 \forall n > n_0 |g(n)| \geq c|f(n)|\} \\
\Theta(f(n)) &= O(f(n)) \cap \Omega(f(n))
\end{aligned}$$

(I'm not sure about his definition of ω.)

1.3 Exercícios

(Soluções a partir da página 239.)

Exercício 1.1
Prove as características 1.10 até 1.15 (ou características equivalentes caso alguma não se aplica) para Ω.

Exercício 1.2
Prove ou mostre um contra-exemplo. Para qualquer constante $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$

$$f \in O(g) \iff f + c \in O(g) \tag{1.23}$$

Exercício 1.3
Prove ou mostre um contra-exemplo.

1. $\log(1 + n) = O(\log n)$
2. $\log O(n^2) = O(\log n)$
3. $\log \log n = O(\log n)$

Exercício 1.4
Considere a função definido pela recorrência

$$f_n = 2f_{n-1}; \qquad f_0 = 1.$$

Professor Veloz afirme que $f_n = O(n)$, e que isso pode ser verificado simplesmente da forma

$$f_n = 2f_{n-1} = 2O(n-1) = 2O(n) = O(n)$$

Mas sabendo que a solução dessa recorrência é $f_n = 2^n$ temos dúvidas que $2^n = O(n)$. Qual o erro do professor Veloz?

Exercício 1.5
Mostre que a definição

$$\hat{o}(g(n)) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+ \mid (\forall c > 0)\exists n_0(\forall n > n_0) : \ f(n) < cg(n)\}$$

(denotado com $\hat{o}$ para diferenciar da definição o) e equivalente com a definição 1.2 para funções $g(n)$ que são diferente de 0 a partir de um n_0.

Exercício 1.6
Mostre que o números Fibonacci

$$f_n = \begin{cases} n & \text{se } 0 \leq n \leq 1 \\ f_{n-2} + f_{n-1} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

têm ordem assintótica $f_n \in \Theta(\Phi^n)$ com $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Exercício 1.7
Prove a seguinte variação do princípio de absorção:

$$g \in o(f) \Rightarrow f - g \in \Theta(f).$$

Exercício 1.8
Prove que

$$f \leq g \Rightarrow O(f) = O(g).$$

Exercício 1.9
Prove que $\Theta(f) = O(f)$, mas o contrário $O(f) = \Theta(f)$ não é correto.

Exercício 1.10
Para qualquer par das seguintes funções, analisa a complexidade mutual.

$$n^3, n^3 \log^{1/3} \log n / log^{1/3} n, n^3 \log^{1/2} \log n / log^{1/2} n, n^3 \log^{1/2},$$
$$n^3 \log^{5/7} \log n / log^{5/7} n, n^3 \log^2 \log n / log n, n^3 \log^{1/2} \log n / log n,$$
$$n^3 \log n, n^3 \log^{5/4} \log n / log^{5/4} n, n^3 \log^3 \log n / log^2 n$$

Exercício 1.11
Prove: $2^{-m} = 1 + O(m^{-1})$.

Exercício 1.12

1. Suponha que f e g são funções polinomiais e $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$: $f(n) \in \Theta(n^r)$ e $g(n) \in \Theta(n^s)$. O que se pode afirmar sobre a função composta $g(f(n))$?
2. Classifique as funções $f(n) = 5 \cdot 2^n + 3$ e $g(n) = 3 \cdot n^2 + 5 \cdot n$ como $f \in O(g)$, $f \in \Theta(g)$ ou $f \in \Omega(g)$.
3. Verifique se $2^n \cdot n \in \Theta(2^n)$ e se $2^{n+1} \in \Theta(2^n)$.

Exercício 1.13
Mostra que $\log n \in O(n^\epsilon)$ para todo $\epsilon > 0$.

2 Análise de complexidade

2.1 Introdução

Para analisar a eficiência de algoritmos faz pouco sentido medir os recursos gastos em computadores específicos, porque devido a diferentes conjuntos de instruções, arquiteturas e desempenho dos processadores, as medidas são difíceis de comparar. Portanto, usamos um *modelo* de uma máquina que reflita as características de computadores comuns, mas é independente de uma implementação concreta. Um modelo comum é a *máquina de RAM* com as seguintes características:

- um processador com um ou mais registros, e com apontador de instruções,
- uma memória infinita de números inteiros e
- um conjunto de instruções elementares que podem ser executadas em tempo $O(1)$ (por exemplo funções básicas sobre números inteiros e de ponto flutuante, acesso à memória e transferência de dados); essas operações refletem operações típicas de máquinas concretas.

Observe que a escolha de um modelo abstrato não é totalmente trivial. Conhecemos vários modelos de computadores, cuja poder computacional não é equivalente em termos de complexidade (que não viola a tese de Church-Turing). Mas todos os modelos encontrados (fora da computação quântica) são polinomialmente equivalentes, e portanto, a noção de eficiência fica a mesma. A tese que todos modelos computacionais são polinomialmente equivalentes as vezes está chamado *tese de Church-Turing estendida*.

O plano
Uma hierarquia de abstrações:

Tempo de execução [s] $\longrightarrow$ Número de operações $\longrightarrow$ Operações no caso pessimista $\longrightarrow$ Complexidade pessimista assintótica

Custos de execuções

- Seja E o conjunto de seqüências de operações fundamentais.

- Para um algoritmo a, com entradas D seja

$$\text{exec}[a] : D \to E$$

  a função que fornece a seqüência de instruções executadas $\text{exec}[a](d)$ para cada entrada $d \in D$.

- Se atribuímos custos para cada operação básica, podemos calcular também o custo de uma execução

$$\text{custo} : E \to \mathbb{R}^+$$

- e o custo da execução do algoritmo a depende da entrada d

$$\text{desemp}[a] : D \to \mathbb{R}^+ = \text{custo} \circ \text{exec}[a]$$

Definição 2.1
O símbolo $\circ$ denota a composição de funções tal que

$$(f \circ g)(n) = f(g(n))$$

(leia: "f depois g").

Em geral, não interessam os custos específicos para cada entrada, mas o "comportamento" do algoritmo. Uma medida natural é como os custos crescem com o tamanho da entrada.

Condensação de custos

- Queremos condensar os custos para uma única medida.
- Essa medida depende somente do tamanho da entrada

$$\text{tam} : D \to \mathbb{N}$$

- O objetivo é definir uma função

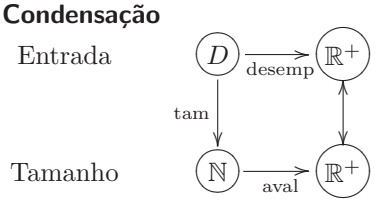
$$\text{aval}[a](n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$$

  que define o desempenho do algoritmo em relação ao tamanho.

- Como, em geral, tem várias entradas d tal que $\text{tam}(d) = n$ temos que definir como condensar a informação de $\text{desemp}[a](d)$ delas.

Observe que as vezes $\mathbb{R}^+$ é denotado $\mathbb{R}_+$.

Condensação



Condensação

- Na prática, duas medidas condensadas são de interesse particular
- A complexidade pessimista

$$C_p^{=}[a](n) = \max\{\text{desemp}[a](d) \mid d \in D, \text{tam}(d) = n\}$$

- A complexidade média

$$C_m[a](n) = \sum_{\text{tam}(d)=n} P(d)\,\text{desemp}[a](d)$$

- Observe: A complexidade média é o valor esperado do desempenho de entradas com tamanho n.
- Ela é baseada na distribuição das entradas.

A complexidade média é menos usada na prática, por várias razões. Primeiramente, uma complexidade pessimista significa um desempenho garantido, independente da entrada. Em comparação, uma complexidade média de, por exemplo, $O(n^2)$, não exclui que em certos casos uma entrada com tamanho n precisa muito mais tempo. Por isso, se é importante saber quando uma execução de um algoritmo termina, preferimos a complexidade pessimista.
Mesmo assim, para vários algoritmos com desempenho ruim no pior caso, estamos interessados como eles se comportam na média (complexidade média). Infelizmente, ela é difícil de determinar. Além disso, ela depende da distribuição das entradas, que freqüentemente não é conhecida ou difícil de determinar, ou é diferente em aplicações diferentes.

Definição alternativa

- A complexidade pessimista é definida como

$$C_p^{=}[a](n) = \max\{\text{desemp}[a](d) \mid d \in D, \text{tam}(d) = n\}$$

- Uma definição alternativa é

$$C_p^{\leq}[a](n) = \max\{\text{desemp}[a](d) \mid d \in D, \text{tam}(d) \leq n\}$$

- $C_p^{\leq}$ é monotônica e temos

$$C_p^{=}[a](n) \leq C_p^{\leq}[a](n)$$

- Caso $C_p^{=}$ seja monotônica as definições são equivalentes

$$C_p^{=}[a](n) = C_p^{\leq}[a](n)$$

$C_p^{=}[a](n) \leq C_p^{\leq}[a](n)$ é uma conseqüência da observação que

$$\{\text{desemp}[a](d) \mid d \in D, \text{tam}(d) = n\} \subseteq \{\text{desemp}[a](d) \mid d \in D, \text{tam}(d) \leq n\}$$

Analogamente, se $A \subseteq B$ tem-se que $\max A \leq \max B$.

Exemplo 2.1
Vamos aplicar essas noções num exemplo de um algoritmo simples. O objetivo é decidir se uma seqüência de números naturais contém o número 1.

BUSCA1

Entrada Uma seqüência $a_1, \ldots, a_n$ de números em $\mathbb{N}$.

Saída True, caso existe um i tal que $a_i = 1$, false, caso contrário.

```
1  for i:=1 to n do
2    if (a_i = 1) then
3      return true
4    end if
5  end for
6  return false
```

Para analisar o algoritmo, podemos escolher, por exemplo, as operações básicas $O = \{for, if, return\}$ e atribuir um custo constante de 1 para cada um delas. (Observe que como "operação básica" for são consideradas as operações de atribuição, incremento e teste da expressão booleana $i \leq n$.) Logo as execuções possíveis são $E = O^*$ (o fecho de Kleene de O) e temos a função de custos

$$\text{custo} : E \to \mathbb{R}^+ : e \mapsto |e|.$$

Por exemplo custo$((for, for, if, return)) = 4$. As entradas desse algoritmo são seqüências de números naturais, logo, $D = \mathbb{N}^*$ e como tamanho da entrada escolhemos

$$\text{tam} : D \to \mathbb{N} : (a_1, \ldots, a_n) \mapsto n.$$

A função de execução atribui a seqüência de operações executadas a qualquer entrada. Temos

$$\text{exec[Busca1]}(d) : D \to E :$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \begin{cases} (for, if)^i return & \text{caso existe } i = \min\{j \mid a_j = 1\} \\ (for, if)^n return & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com essas definições temos também a função de desempenho

$$\text{desemp[Busca1]}(n) = \text{custo} \circ \text{exec[Busca1]} :$$
$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \begin{cases} 2i + 1 & \text{caso existe } i = \min\{j \mid a_j = 1\} \\ 2n + 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Agora podemos aplicar a definição da complexidade pessimista para obter

$$C_p^{\leq}[\text{Busca1}](n) = \max\{\text{desemp[Busca1]}(d) \mid \text{tam}(d) = n\} = 2n + 1 = O(n).$$

Observe que $C_p^{=}$ é monotônica, e portanto $C_p^{=} = C_p^{\leq}$.
Um caso que em geral é menos interessante podemos tratar nesse exemplo também: Qual é a complexidade otimista (complexidade no caso melhor)? Isso acontece quando 1 é o primeiro elemento da seqüência, logo, $C_o[\text{Busca1}](n) = 2 = O(1)$.

$\Diamond$

2.2 Complexidade pessimista

2.2.1 Metodologia de análise de complexidade

Uma linguagem simples

- Queremos estudar como determinar a complexidade de algoritmos metodicamente.
- Para este fim, vamos usar uma linguagem simples que tem as operações básicas de

1. Atribuição: v:=e
2. Seqüência: c1;c2
3. Condicional: se b então c1 senão c2
4. Iteração definida: para i de j até m faça c
5. Iteração indefinida: enquanto b faça c

A forma se b então c1 vamos tratar como abreviação de se b então c1 **else** skip com comando skip de custo 0.
Observe que a metodologia não implica que tem *um algoritmo* que, dado um algoritmo como entrada, computa a complexidade dele. Este problema não é computável (por quê?).

Convenção 2.1
A seguir vamos entender implicitamente todas operações sobre funções *pontualmente*, i.e. para alguma operação $\circ$, e funções f, g com $\mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g)$ temos

$$\forall d \in \mathrm{dom}(f) \quad (f \circ g) = f(d) \circ g(d).$$

Componentes

- A complexidade de um algoritmo pode ser analisada em termos de suas componentes (princípio de composicionalidade).
- Pode-se diferenciar dois tipos de componentes: *componentes conjuntivas* e *componentes disjuntivas*.
- Objetivo: Analisar as componentes independentemente (como sub-algoritmos) a depois compor as complexidades delas.

Composição de componentes

- Cautela: Na composição de componentes o tamanho da entrada pode mudar.
- Exemplo: Suponha que um algoritmo A produz, a partir de uma lista de tamanho n, uma lista de tamanho n^2 em tempo $\Theta(n^2)$.

$$n \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow n^2 \longrightarrow \boxed{A} \longrightarrow n^4$$

- A seqüência $A; A$, mesmo sendo composta pelos dois algoritmos com $\Theta(n^2)$ *individualmente*, tem complexidade $\Theta(n^4)$.
- Portanto, vamos diferençar entre

  - algoritmos que preservam (assintoticamente) o tamanho, e
  - algoritmos em que modificam o tamanho do problema.

- Neste curso tratamos somente o primeiro caso.

Componentes conjuntivas

A seqüência

- Considere uma seqüência $c_1; c_2$.
- Qual a sua complexidade $c_p[c_1; c_2]$ em termos dos componentes $c_p[c_1]$ e $c_p[c_2]$?
- Temos

  $$\text{desemp}[c_1; c_2] = \text{desemp}[c_1] + \text{desemp}[c_2] \geq \max(\text{desemp}[c_1], \text{desemp}[c_2])$$

  e portanto (veja A.8)

  $$\max(c_p[c_1], c_p[c_2]) \leq c_p[c_1; c_2] \leq c_p[c_1] + c_p[c_2]$$

  e como $f + g \in O(\max(f, g))$ tem-se que

  $$c_p[c_1; c_2] = \Theta(c_p[c_1] + c_p[c_2]) = \Theta(\max(c_p[c_1], c_p[c_2]))$$

Prova.

$$\begin{aligned} \max(\text{desemp}[c_1](d), \text{desemp}[c_2](d)) &\leq \text{desemp}[c_1; c_2](d) \\ &= \text{desemp}[c_1](d) + \text{desemp}[c_2](d) \end{aligned}$$

logo para todas entradas d com $\text{tam}(d) = n$

$$\begin{aligned} \max_d \max(\text{desemp}[c_1](d), \text{desemp}[c_2](d)) &\leq \max_d \text{desemp}[c_1; c_2](d) \\ &= \max_d (\text{desemp}[c_1](d) + \text{desemp}[c_2](d)) \\ \iff \max(c_p[c_1], c_p[c_2]) &\leq c_p[c_1; c_2] \leq c_p[c_1] + c_p[c_2] \end{aligned}$$

■

Exemplo 2.2
Considere a seqüência $S \equiv v := \mathit{ordena}(u); w := \mathit{soma}(u)$ com complexidades $c_p[v := \mathit{ordena}(u)](n) = n^2$ e $c_p[w := \mathit{soma}(u)](n) = n$. Então $c_p[S] = \Theta(n^2 + n) = \Theta(n^2)$. ◊

Exemplo 2.3
Considere uma partição das entradas do tamanho n tal que $\{d \in D \mid tam(d) = n\} = D_1(n) \dot\cup D_2(n)$ e dois algoritmos A_1 e A_2, A_1 precisa n passos para instâncias em D_1, e n^2 para instâncias em D_2. A_2, contrariamente, precisa n^2 para instâncias em D_1, e n passos para instâncias em D_2. Com isso obtemos

$$c_p[A_1] = n^2; \qquad c_p[A_2] = n^2; \qquad c_p[A_1; A_2] = n^2 + n$$

e portanto

$$\max(c_p[A_1], c_p[A_2]) = n^2 < c_p[A_1; A_2] = n^2 + n < c_p[A_1] + c_p[A_2] = 2n^2$$

$\Diamond$

A atribuição: Exemplos

- Considere os seguintes exemplos.
- Inicialização ou transferência da variáveis inteiras tem complexidade $O(1)$

$$i := 0; \qquad j := i$$

- Determinar o máximo de uma lista de elementos v tem complexidade $O(n)$

$$m := \max(v)$$

- Inversão de uma lista u e atribuição para w tem complexidade $2n \in O(n)$

$$w := reversa(u)$$

A atribuição

- Logo, a atribuição depende dos custos para a avaliação do lado direito e da atribuição, i.e.

$$\text{desemp}[v := e] = \text{desemp}[e] + \text{desemp}[\leftarrow_e]$$

- Ela se comporta como uma seqüência dessas duas componentes, portanto

$$c_p[v := e] = \Theta(c_p[e] + c_p[\leftarrow_e])$$

- Freqüentemente $c_p[\leftarrow_e]$ é absorvida pelo $c_p[e]$ e temos

$$c_p[v := e] = \Theta(c_p[e])$$

Exemplo 2.4
Continuando o exemplo 2.2 podemos examinar a atribuição $v := ordene(w)$. Com complexidade pessimista para a ordenação da lista $c_p[ordene(w)] = O(n^2)$ e complexidade $c_p[\leftarrow_e] = O(n)$ para a transferência, temos $c_p[v := ordene(w)] = O(n^2) + O(n) = O(n^2)$. ◊

Iteração definida

Seja C =para i de j até m faça c

- O número de iterações é fixo, mas j e m dependem da entrada d.
- Seja $N(n) = \max_d\{m(d)-j(d)+1 \mid tam(d) \leq n\}$ e $N^*(n) = \max\{N(n), 0\}$.
- $N^*(n)$ é o máximo de iterações para entradas de tamanho até n.
- Tendo N^*, podemos tratar a iteração definida como uma seqüência

$$\underbrace{c; c; \cdots ; c}_{N^*(n) \text{ vezes}}$$

que resulta em

$$c_p[C] \leq N^*\, c_p[c]$$

Iteração indefinida

Seja C =enquanto b faça c

- Para determinar a complexidade temos que saber o número de iterações.
- Seja $H(d)$ o número da iteração (a partir de 1) em que a condição é falsa pela primeira vez
- e $h(n) = \max\{H(d) \mid tam(d) \leq n\}$ o número máximo de iterações com entradas até tamanho n.
- Em analogia com a iteração definida temos uma seqüência

$$\underbrace{b; c; b; c; \cdots ; b; c;}_{h(n)-1 \text{ vezes}} b$$

e portanto

$$c_p[C] \leq (h-1)c_p[c] + hc_p[b]$$

- Caso o teste b é absorvido pelo escopo c temos

$$c_p[C] \leq (h-1)c_p[c]$$

Observe que pode ser difícil de determinar o número de iterações $H(d)$; em geral a questão não é decidível.

Componentes disjuntivas
To make the MxAO thingy more concrete, i tend to let $MxAO(f,g) = h$ for any $h \in O(\max(f,g))$. This definition unfortunately satisfies not exactly (but only in terms of O) the axioms. No, no, treat MxAO like the function class above! Then (i),(ii),(iii) hold, but not (iv): too strong. Relax to $MxAO(f,g) = O(g)$ is reasonable. (see also lecture 4).

Componentes disjuntivas

- Suponha um algoritmo c que consiste em duas componentes disjuntivas c_1 e c_2. Logo,

  $$\text{desemp}[c] \leq \max(\text{desemp}[c_1], \text{desemp}[c_2])$$

  e temos

  $$c_p[a] \leq \max(c_p[c_1], c_p[c_2])$$

Caso a expressão para o máximo de duas funções for difícil, podemos simplificar

$$c_p[a] \leq \max(c_p[c_1], c_p[c_2]) = O(\max(c_p[c_1], c_p[c_2])).$$

O condicional
Seja $C =$se b então c1 senão c2

- O condicional consiste em
  - uma avaliação da condição b
  - uma avaliação do comando c_1 ou c_2 (componentes disjuntivas).
- Aplicando as regras para componentes conjuntivas e disjuntivas obtemos

  $$c_p[C] \leq c_p[b] + \max(c_p[c_1], c_p[c_2])$$

Para se b então c1 obtemos com $c_p[skip] = 0$

$$c_p[C] \leq c_p[b] + c_p[c_1]$$

Exemplo 2.5
Considere um algoritmo a que, dependendo do primeiro elemento de uma lista u, ordena a lista ou determina seu somatório:

Exemplo

```
1  se  hd(u) = 0  então
2     v := ordena(u)
3  senão
4     s := soma(u)
```

Assumindo que o teste é possível em tempo constante, ele é absorvido pelo trabalho em ambos casos, tal que

$$c_p[a] \leq \max(c_p[v := \text{ordena}(u)], c_p[s := soma(u)])$$

e com, por exemplo, $c_p[v := \text{ordena}(u)](n) = n^2$ e $c_p[s := \text{soma}(u)](n) = n$ temos

$$c_p[a](n) \leq n^2$$

◊

2.2.2 Exemplos

Exemplo 2.6 (Bubblesort)
Nesse exemplo vamos estudar o algoritmo Bubblesort de ordenação.

Bubblesort

BUBBLESORT

Entrada Uma seqüência $a_1, \ldots, a_n$ de números inteiros.

Saída Uma seqüência $a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}$ de números inteiros onde π uma permutação de $[1, n]$ tal que para $i < j$ temos $a_{\pi(i)} \leq a_{\pi(j)}$.

```
1  for i:=1 to n
2    { Inv: a_{n-i+2} ≤ ··· ≤ a_n são os i − 1 maiores elementos }
3    for j:=1 to n i
4      if a_j > a_{j+1} then
5        swap a_j ,a_{j+1}
6      end if
7    end for
8  end for
```

Uma ilustração: http://www.cs.ubc.ca/~harrison/Java/sorting-demo.html

Bubblesort: Complexidade

- A medida comum para algoritmos de ordenação: o número de comparações (de chaves).
- Qual a complexidade pessimista?

$$\sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n-i} 1 = n/2(n-1).$$

- Qual a diferença se contamos as transposições também?

$\Diamond$

Exemplo 2.7 (Ordenação por inserção direta)

Ordenação por inserção direta

Ordenação por inserção direta (inglês: straight insertion sort)

Entrada Uma seqüência $a_1, \ldots, a_n$ de números inteiros.

Saída Uma seqüência $a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}$ de números inteiros tal que π é uma permutação de $[1, n]$ e para $i < j$ temos $a_{\pi(i)} \leq a_{\pi(j)}$.

```
1  for i:=2 to n do
2    { invariante: a_1,...,a_{i-1} ordenado }
3    { coloca item i na posição correta }
4    c:=a_i
5    j:=i;
6    while c < a_{j-1} and j > 1 do
7      a_j:=a_{j-1}
8      j:=j-1
9    end while
10   a_j:=c
11 end for
```

(Nesse algoritmo é possível eliminar o teste $j > 1$ na linha 6 usando um elemento auxiliar $a_0 = -\infty$.)

Para a complexidade pessimista obtemos

$$c_p[SI](n) \leq \sum_{2\leq i\leq n} \sum_{1<j\leq i} O(1) = \sum_{2\leq i\leq n} = O(n^2)$$

◊

Exemplo 2.8 (Máximo)
(Ver **?**, cap. 3.3.)

Máximo

MÁXIMO

Entrada Uma seqüência de números $a_1, \ldots, a_n$ com $n > 0$.

Saída O máximo $m = \max_i a_i$.

```
1  m := a_1
2  for i := 2, ..., n do
3     if a_i > m then
4        m := a_i
5     end if
6  end for
7  return m
```

Para a análise supomos que toda operação básica (atribuição, comparação, aritmética) têm um custo constante. Podemos obter uma cota superior simples de $O(n)$ observando que o laço sempre executa um número fixo de operações (ao máximo dois no corpo). Para uma análise mais detalhada vamos denotar o custo em números de operações de cada linha como l_i e supomos que toda operação básico custa 1 e a linha 2 do laço custa dois ($l_2 = 2$, para fazer um teste e um incremento), então temos

$$l_1 + (n-1)(l_2 + l_3) + kl_4 + l_7 = 3n + k - 1$$

com um número de execuções da linha 4 ainda não conhecido k. No melhor caso temos $k = 0$ e custos de $3n - 1$. No pior caso $m = n - 1$ e custos de $4n - 2$. É fácil ver que assintoticamente todos os casos, inclusive o caso médio, têm custo $\Theta(n)$. ◊

Exemplo 2.9 (Busca seqüencial)
O segundo algoritmo que queremos estudar é a busca seqüencial.

Busca seqüencial

Busca seqüencial

Entrada Uma seqüência de números $a_1, \ldots, a_n$ com $n > 0$ e um chave c.

Saída A primeira posição p tal que $a_p = c$ ou $p = \infty$ caso não existe tal posição.

```
1  for i := 1, ..., n do
2    if a_i = c then
3      return i
4    end if
5  end for
6  return ∞
```

Busca seqüencial

- Fora do laço nas linhas 1–5 temos uma contribuição constante.
- Caso a seqüência não contém a chave c, temos que fazer n iterações.
- Logo temos complexidade pessimista $\Theta(n)$.

$\Diamond$

Counting-Sort

Counting-Sort

Entrada Um inteiro k, uma seqüência de números $a_1, \ldots, a_n$ e uma seqüência de contadores $c_1, \ldots, c_n$.

Saída Uma seqüência ordenada de números $b_1, \ldots, b_n$.

```
1  for i := 1, ..., k do
2    c_i := 0
3  end for
4  for i := 1, ..., n do
5    c_{a_i} := c_{a_i} + 1
6  end for
```

```
 7  for i := 2, ..., k do
 8      c_i := c_i + c_{i-1}
 9  end for
10  for i := n, ..., 1 do
11      b_{c_{a_i}} := a_i
12      c_{a_i} := c_{a_i} - 1
13  end for
14  return b_1, ..., b_n
```

Loteria Esportiva

LOTERIA ESPORTIVA

Entrada Um vetor de inteiros $r[1, \ldots, n]$ com o resultado e uma matriz A_{13xn} com as apostas dos n jogadores.

Saída Um vetor $p[1, \ldots, n]$ com os pontos feitos por cada apostador.

```
 1  i := 1
 2  while i ≤ n do
 3      p_i := 0
 4      for j de 1, ..., 13 do
 5          if A_{i,j} = r_j then p_i := p_i + 1
 6      end for
 7      i := i + 1
 8  end while
 9  for i de1, ..., n do
10      if p_i = 13 then print(Apostador i é ganhador!)
11  end for
12  return p
```

Exemplo 2.10 (Busca Binária)

Busca Binária

Busca Binária

Entrada Um inteiro x e uma seqüência ordenada $S = a_1, a_2, \ldots a_n$ de números.

Saída Posição i em que x se encontra na seqüência S ou -1 caso $x \notin S$.

```
1  i := 1
2  f := n
3  m := ⌊(f−i)/2⌋ + i
4  while i ≤ f do
5      if a_m = x then return m
6      if a_m < x then f := m − 1
7      else i := m + 1
8      m := ⌊(f−i)/2⌋ + i
9  end while
10 return −1
```

A busca binária é usada para encontrar um dado elemento numa seqüência ordenada de números com gaps. Ex: 3,4,7,12,14,18,27,31,32...n. Se os números não estiverem ordenados um algoritmo linear resolveria o problema, e no caso de números ordenados e sem gaps (nenhum número faltante na seqüência, um algoritmo constante pode resolver o problema. No caso da busca binária, o pior caso acontece quando o último elemento que for analisado é o procurado. Neste caso a seqüência de dados é dividida pela metade até o término da busca, ou seja, no máximo $\log_2 n = x$ vezes, ou seja $2^x = n$. Neste caso

$$\begin{aligned} C_p[a] = &= \sum_{i=1}^{\log_2 n} c \\ &= O(\log_2 n) \end{aligned}$$

$\Diamond$

Exemplo 2.11 (Busca em Largura)

Busca em Largura

Busca em Largura

Entrada Um nó origem s e um grafo direcionado estruturado como uma seqüência das listas de adjacências de seus nós.

Saída Posição i vetor de distâncias (número de arcos) de cada nó ao origem.

```
1  for cada vértice u ∈ V − {s} do
2      c_u :=BRANCO
3      d_u = ∞
4  end for
5  c_s :=CINZA
6  d_s := 0
7  Q := ∅
8  Enqueue(Q, s)
9  while Q ≠ ∅
10   u := Dequeue(Q)
11   for cada v ∈ Adj(u)
12       if c_v =BRANCO
13         then c_v =CINZA
14         d_v = d_u + 1
15         Enqueue(Q, v)
16       end if
17   end for
18   c_u =PRETO
19 end while
```

Este algoritmo, bem como sua análise, estão disponíveis no livro do Cormen (**?**). O laço **while** (linhas 9-19) será executado no máximo $|V|$ vezes, ou seja, para cada nó do grafo. Já o laço **for** (linhas 11-17) executará d_u vezes, sendo d_u o grau de saída do nó u. Desta forma, os dois laços executarão $|E|$ vezes (este tipo de análise se chama de análise agregada). Como o primeiro laço **for** do algoritmo tem complexidade $O(|V|)$, então a complexidade total do algoritmo será $O(|V| + |E|)$. ◊

Exemplo 2.12 (Multiplicação de matrizes)
O algoritmo padrão da computar o produto $C = AB$ de matrizes (de tamanho $m \times n$, $n \times o$) segue diretamente a definição

$$c_{ik} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij} b_{jk} \qquad 1 \leq i \leq m; 1 \leq k \leq o$$

e resulta na implementação

Multiplicação de matrizes

Entrada Duas matrizes $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times o}$.

Saída O produto $C = (c_{ik}) = AB \in \mathbb{R}^{m \times o}$.

```
1  for i := 1, ..., m do
2    for k := 1, ..., o do
3      c_ik := 0
4      for j := 1, ..., n do
5        c_ik := c_ik + a_ij b_jk
6      end for
7    end for
8  end for
```

No total, precisamos $mno(M+A)$ operações, com M denotando multiplicações e A adições. É costume estudar a complexidade no caso $n = m = o$ e somente considerar as multiplicações, tal que temos uma entrada de tamanho $\Theta(n^2)$ e $\Theta(n^3)$ operações[1].
Esse algoritmo não é o melhor possível: Temos o algoritmo de Strassen que precisa somente $n^{\log_2 7} \approx n^{2.807}$ multiplicações (o algoritmo está detalhado no capítulo 6.3) e o algoritmo de Coppersmith-Winograd com $n^{2.376}$ multiplicações (Coppersmith and Winograd, 1987). Ambas são pouco usadas na prática porque o desempenho real é melhor somente para n grande (no caso de Strassen $n \approx 700$; no caso de Coppersmith-Winograd o algoritmo não é praticável). A conjetura atual é que existe um algoritmo (ótimo) de $O(n^2)$.

◊

2.3 Complexidade média

Nesse capítulo, vamos estudar algumas técnicas de análise da complexidade média.

Motivação

- A complexidade pessimista é pessimista demais?
- Imaginável: poucas instâncias representam o pior caso de um algoritmo.
- Isso motiva a estudar a complexidade média.
- Para tamanho n, vamos considerar

[1] Também é de costume contar as operações de ponto flutuante diretamente e não em relação ao tamanho da entrada. Senão a complexidade seria $2n/3^{3/2} = O(n^{3/2})$.

- O espaço amostral $D_n = \{d \in D \mid \text{tam}(d) = n\}$
- Uma distribuição de probabilidade Pr sobre D_n
- A variável aleatória desemp$[a]$
- O custo médio

$$C_m[a](n) = E[\text{desemp}[a]] = \sum_{d \in D_n} P(d)\,\text{desemp}[a](d)$$

Tratabilidade?

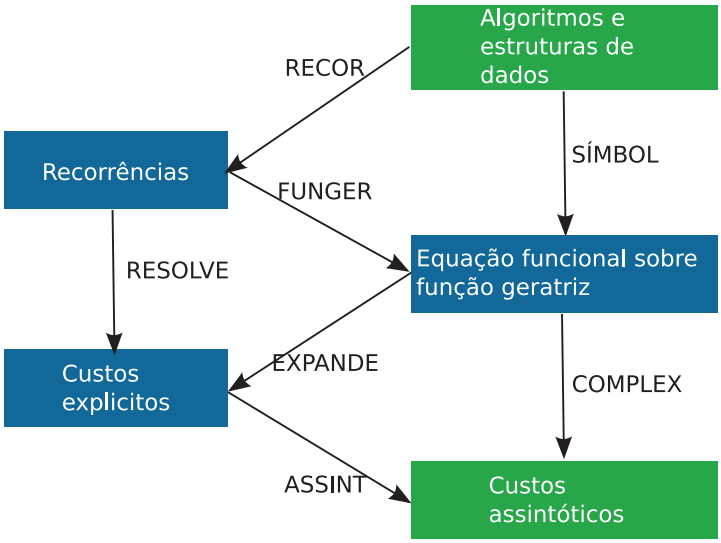
- Possibilidade: Problemas intratáveis viram tratáveis?
- Exemplos de tempo esperado:
  - Caminho Hamiltoniano: linear!
  - Parada não-determinístico em k passos: fica NP-completo.

(Resultados citados: (Gurevich and Shelah, 1987; Du and Ko, 1997) (Caminho Hamiltanio), (Wang, 1997) (Parada em k passos).)

Criptografia

- Criptografia somente é possível se existem "funções sem volta (inglês: one-way functions).
- Uma função sem volta $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ é tal que
  - dado x, computar $f(x)$ é fácil (eficiente)
  - dada $f(x)$ achar um x' tal que $f(x') = f(x)$ é difícil

Método



(?)

RECOR Acha recorrências para os valores esperados.

RESOLVE Resolve usando álgebra clássica.

ASSINT Usa métodos assintóticas para obter estimativas.

FUNGER Transforma as recorrências para equações de funções geratrizes.

EXPANDE Resolve as equações com álgebra clássica e expande os coeficientes das soluções.

SÍMBOL Traduz as definições das estruturas diretamente para funções geratrizes.

COMPLEX Usa análise complexa para obter estimativas assintóticas diretamente.

Exemplo 2.13 (Busca seqüencial)
(Continuando exemplo 2.9.)

Busca seqüencial

- Caso a chave esteja na i-ésima posição, temos que fazer i iterações.
- Caso a chave não ocorra no conjunto, temos que fazer n iterações.

- Supondo uma distribuição uniforme da posição da chave na seqüência, temos
$$\frac{1}{n+1}\left(n + \sum_{1\leq i\leq n} i\right)$$
iterações e uma complexidade média de $\Theta(n)$.

$\Diamond$

Exemplo 2.14
(Continuando o exemplo 2.1.)
Neste exemplo vamos analisar o algoritmo considerando que a ocorrência dos números siga uma outra distribuição que não a uniforme. Ainda, considere o caso em que não há números repetidos no conjunto. Seja n um tamanho fixo. Para BUSCA1 temos o espaço amostral $D_n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1 \geq 1, \ldots, a_n \geq 1\}$. Supondo que os números sigam uma distribuição na qual cada elemento da seqüência é gerado independentemente com a probabilidade $\Pr[a_i = n] = 2^{-n}$ (que é possível porque $\sum_{1\leq i} 2^{-i} = 1$).
Com isso temos
$$\Pr[(a_1, \ldots, a_n)] = \prod_{1\leq i\leq n} 2^{-a_i}$$
e, $\Pr[a_i = 1] = 1/2$ e $\Pr[a_i \neq 1] = 1/2$. Considere as variáveis aleatórias desemp$[a]$ e
$$p = \begin{cases} \mu & \text{se o primeiro 1 está na posição } \mu \\ n & \text{caso contrário} \end{cases}$$
Temos desemp$[a] = 2p+1$ (veja os resultados do exemplo 2.1). Para i estar na primeira posição com elemento 1 as posições $1, \ldots, i-1$ devem ser diferente de 1, e a_i deve ser 1. Logo para $1 \leq i < n$
$$\Pr[p = i] = \Pr[a_1 \neq 1] \cdots \Pr[a_{i-1} \neq 1] \Pr[a_i = 1] = 2^{-i}.$$
O caso $p = n$ tem duas causas: ou a posição do primeiro 1 é n ou a seqüência não contém 1. Ambas têm probabilidade 2^{-n} e logo $\Pr[p = n] = 2^{1-n}$.
A complexidade média calcula-se como
$$\begin{aligned} c_p[a](n) &= E[\text{desemp}[a]] = E[2p+1] = 2E[p] + 1 \\ E[p] &= \sum_{i\geq 0} \Pr[p = i]i = 2^{-n}n + \sum_{1\leq i\leq n} 2^{-n}n \\ &= 2^{-n}n + 2 - 2^{-n}(n+2) = 2 - 2^{1-n} \qquad \text{(A.33)} \\ c_p[a](n) &= 5 - 2^{2-n} = O(1) \end{aligned}$$

A seguinte tabela mostra os custos médios para $1 \leq n \leq 9$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
C_m	3	4	4.5	4.75	4.875	4.938	4.969	4.984	4.992

◊

Exemplo 2.15 (Ordenação por inserção direta)
(Continuando exemplo 2.7.)

Ordenação por inserção direta

- Qual o número médio de comparações?
- Observação: Com as entradas distribuídas uniformemente, a posição da chave i na seqüência já ordenada também é.
- Logo chave i precisa

$$\sum_{1 \leq j \leq i} j/i = \frac{i+1}{2}$$

  comparações em média.

- Logo o número esperado de comparações é

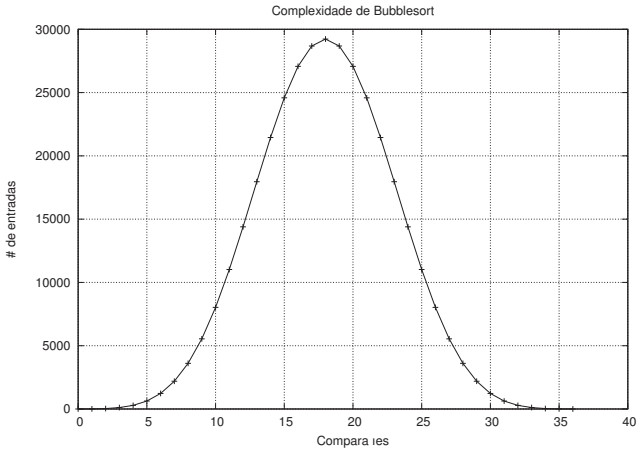
$$\sum_{2 \leq i \leq n} \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{3 \leq i \leq n+1} i = \frac{1}{2} \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 3 \right) = \Theta(n^2)$$

◊

Exemplo 2.16 (Bubblesort)
(Continuando exemplo 2.6.)
O número de comparações do Bubblesort é independente da entrada. Logo, com essa operação básica temos uma complexidade pessimista e média de $\Theta(n^2)$.

Bubblesort: Transposições

- Qual o número de transposições em média?



Qual a complexidade contando o número de transposições? A figura acima mostra no exemplo das instâncias com tamanho 9, que o trabalho varia entre 0 transposições (seqüência ordenada) e 36 transposições (pior caso) e na maioria dos casos, precisamos 18 transposições. A análise no caso em que todas entradas são permutações de $[1, n]$ distribuídas uniformemente resulta em $n/4(n-1)$ transposições em média, a metade do pior caso.

Inversões

- Uma *inversão* em uma permutação é um par que não está ordenado, i.e.

$$i < j \quad \text{tal que} \quad a_i > a_j.$$

- Exemplos

Permutação	#Inversões
123	0
132	1
213	1
231	2
312	2
321	3

- Freqüentemente o número de inversões facilita a análise de algoritmos de ordenação.
- Em particular para algoritmos com transposições de elementos adjacentes: #Transposições = # Inversões

Número médio de transposições

- Considere o conjunto de todas permutações S_n sobre $[1, n]$.
- Denota-se por $\text{inv}(\pi)$ o número de inversões de uma permutação.
- Para cada permutação π existe uma permutação π^- correspondente com ordem inversa:

$$35124; \qquad 42153$$

- Cada inversão em π não é inversão em π^- e vice versa:

$$\text{inv}(\pi) + \text{inv}(\pi^-) = n(n-1)/2.$$

Número médio de transposições

- O número médio de inversões é

$$\begin{aligned}
1/n! \sum_{\pi \in S_n} \text{inv}(\pi) &= 1/(2n!) \left(\sum_{\pi \in S_n} \text{inv}(\pi) + \sum_{\pi \in S_n} \text{inv}(\pi) \right) \\
&= 1/(2n!) \left(\sum_{\pi \in S_n} \text{inv}(\pi) + \sum_{\pi \in S_n} \text{inv}(\pi^-) \right) \\
&= 1/(2n!) \left(\sum_{\pi \in S_n} (\text{inv}(\pi) + \text{inv}(\pi^-)) \right) \\
&= 1/(2n!) \left(\sum_{\pi \in S_n} n(n-1)/2 \right) \\
&= n(n-1)/4
\end{aligned}$$

- Logo, a complexidade média (de transposições) é $\Theta(n^2)$.

$\Diamond$

Exemplo 2.17 (Máximo)
(Continuando exemplo 2.8.)
Queremos analisar o número médio de atribuições na determinação do máximo, i.e. o número de atualizações do máximo.

Máximo

- Qual o número esperado de atualizações no algoritmo MÁXIMO?
- Para uma permutação π considere a *tabela de inversões* $b_1, \ldots, b_n$.
- b_i é o número de elementos na esquerda de i que são maiores que i.
- Exemplo: Para 53142

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
2	3	1	1	0

- Os b_i obedecem $0 \leq b_i \leq n - i$.

Tabelas de inversões

- Observação: Cada tabela de inversões corresponde a uma permutação e vice versa.
- Exemplo: A permutação correspondente com

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
3	1	2	1	0

- Vantagem para a análise: Podemos escolher os b_i independentemente.
- Observação, na busca do máximo i é máximo local se todos números no seu esquerdo são menores, i.e. se todos números que são maiores são no seu direito, i.e. se $b_i = 0$.

Número esperado de atualizações

- Seja X_i a variável aleatória $X_i = [i \text{ é máximo local}]$.
- Temos $\Pr[X_i = 1] = \Pr[b_i = 0] = 1/(n - i + 1)$.
- O número de máximos locais é $X = \sum_{1 \leq i \leq n} X_i$.
- Portanto, o número esperado de máximos locais é

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{1 \leq i \leq n} X_i\right] = \sum_{1 \leq i \leq n} E[X_i] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \Pr[X_i] = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{n - i + 1} = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i} = H_n \end{aligned}$$

- Contando atualizações: tem uma a menos que os máximos locais $H_n - 1$.

$\Diamond$

Exemplo 2.18 (Quicksort)
Nessa seção vamos analisar é Quicksort, um algoritmo de ordenação que foi inventado pelo C.A.R. Hoare em 1960 (Hoare, 1962).

Quicksort

- Exemplo: o método Quicksort de ordenação por comparação.
- Quicksort usa divisão e conquista.
- Idéia:
  - Escolhe um elemento (chamado pivô).
  - Divide: Particione o vetor em elementos menores que o pivô e maiores que o pivô.
  - Conquiste: Ordene as duas partições recursivamente.

Particionar

PARTITION

Entrada Índices l, r e um vetor a com elementos $a_l, \ldots, a_r$.

Saída Um índice $m \in [l, r]$ e a com elementos ordenados tal que $a_i \leq a_m$ para $i \in [l, m[$ e $a_m \leq a_i$ para $i \in]m, r]$.

```
1  escolhe um pivô a_p
2  troca a_p e a_r
3  i := l-1 { último índice menor que pivô }
4  for j:=l to r-1 do
5    if a_j ≤ a_r then
6      i:=i+1
7      troca a_i e a_j
8    end if
9  end for
10 troca a_{i+1} e a_r
11 return i+1
```

Escolher o pivô

- PARTITION combina os primeiros dois passos do Quicksort..
- Operações relevantes: *Número de comparações* entre chaves!
- O desempenho de PARTITION depende da escolha do pivô.
- Dois exemplos
  - Escolhe o primeiro elemento.
  - Escolhe o maior dos primeiros dois elementos.
- Vamos usar a segunda opção.

Complexidade de particionar

- O tamanho da entrada é $n = r - l + 1$
- Dependendo da escolha do pivô: precisa nenhuma ou uma comparação.
- O laço nas linhas 4–9 tem $n - 1$ iterações.
- O trabalho no corpo do laço é $1 = \Theta(1)$ (uma comparação)
- Portanto temos a complexidade pessimista

$$c_p[\text{Partition}] = n - 1 = n = \Theta(n)$$
$$c_p[\text{Partition}] = n - 1 + 1 = n = \Theta(n).$$

Quicksort

QUICKSORT

Entrada Índices l, r e um vetor a com elementos $a_l, \ldots, a_r$.

Saída a com os elementos em ordem não-decrescente, i.e. para $i < j$ temos $a_i \leq a_j$.

```
1  if l < r then
2    m := Partition(l,r,a);
3    Quicksort(l,m-1,a);
4    Quicksort(m+1,r,a);
5  end if
```

$$\begin{aligned}\text{desemp}[QS](a_l,\ldots,a_r) &= \text{desemp}[P](a_l,\ldots,a_r)\\ &\quad + \text{desemp}[QS](a_l,\ldots,a_{m-1}) + \text{desemp}[QS](a_{m+1},\ldots,a_r)\end{aligned}$$

$$\text{desemp}[QS](a_l,\ldots,a_r) = 0 \qquad \text{se } l \geq r$$

Complexidade pessimista

- Qual a complexidade pessimista?
- Para entrada $d = (a_1,\ldots,a_n)$, sejam $d_l = (a_l,\ldots,a_{m-1})$ e $d_r = (a_{m+1},\ldots,a_r)$

$$\begin{aligned}c_p[QS](n) &= \max_{d\in D_n} \text{desemp}[P](d) + \text{desemp}[QS](d_l) + \text{desemp}[QS](d_r)\\ &= n + \max_{d\in D_n} \text{desemp}[QS](d_l) + \text{desemp}[QS](d_r)\\ &= n + \max_{1\leq i\leq n} c_p[QS](i-1) + c_p[QS](n-i)\end{aligned}$$

- $c_p[QS](0) = c_p[QS](1) = 0$

Esse análise é válido para escolha do maior entre os dois primeiros elementos como pivô. Também vamos justificar o último passo na análise acima com mais detalhes. Seja $D_n = \bigcup_i D_n^i$ uma partição das entradas com tamanho n tal que para $d \in D_n^i$ temos $|d_l| = i-1$ (e conseqüentemente $|d_r| = n-i$). Então

$$\begin{aligned}&\max_{d\in D_n} \text{desemp}[QS](d_l) + \text{desemp}[QS](d_r)\\ =\ &\max_{1\leq i\leq n} \max_{d\in D_n^i} \text{desemp}[QS](d_l) + \text{desemp}[QS](d_r) \qquad \text{separando } D_n\\ =\ &\max_{1\leq i\leq n} \max_{d\in D_n^i} c_p[QS](i-1) + c_p[QS](n-i)\end{aligned}$$

e o último passo é justificado, porque a partição de uma permutação aleatória gera duas partições aleatórias, e existe uma entrada d em que as duas subpartições assumem o máximo. Para determinar o máximo da última expressão, podemos observar que ele deve ocorrer no índice $i = 1$ ou $i = \lfloor n/2 \rfloor$ (porque $f(i) = c_p[QS](i-1) + c_p[QS](n-i)$ é simétrico com eixo de simetria $i = n/2$).

Complexidade pessimista

- O máximo ocorre para $i = 1$ ou $i = n/2$
- Caso $i = 1$

$$\begin{aligned} c_p[QS](n) &= n + c_p[QS](0) + c_p[QS](n-1) = n + c_p[QS](n-1) \\ &= \cdots = \sum_{1 \le i \le n} (i-1) = \Theta(n^2) \end{aligned}$$

- Caso $i = n/2$

$$\begin{aligned} c_p[QS](n) &= n + 2c_p[QS](n/2) = n - 1 + 2((n-1)/2 + c_p(n/4)) \\ &= \cdots = \Theta(n \log_2 n) \end{aligned}$$

- Logo, no pior caso, Quicksort precisa $\Theta(n^2)$ comparações.
- No caso bem balanceado: $\Theta(n \log_2 n)$ comparações.

Complexidade média

- Seja X a variável aleatória que denota a posição (inglês: rank) do pivô a_m na seqüência.
- Vamos supor que todos elementos a_i são diferentes (e, sem perda da generalidade, uma permutação de $[1, n]$).

$$\begin{aligned} c_m[QS] &= \sum_{d \in D_n} \Pr[d] \operatorname{desemp}[QS](d) \\ &= \sum_{d \in D_n} \Pr[d](\operatorname{desemp}[P](d) + \operatorname{desemp}[QS](d_l) + \operatorname{desemp}[QS](d_r)) \\ &= n + \sum_{d \in D_n} \Pr[d](\operatorname{desemp}[QS](d_l) + \operatorname{desemp}[QS](d_r)) \\ &= n + \sum_{1 \le i \le n} \Pr[X = i](c_m[QS](i-1) + c_m[QS](n-i)) \end{aligned}$$

Novamente, o último passo é o mais difícil de justificar. A mesma partição que aplicamos acima leva a

$$\begin{aligned}
&\sum_{d\in D_n} \Pr[d](\text{desemp}[QS](d_l) + \text{desemp}[QS](d_r)) \\
&= \sum_{1\le i\le n} \sum_{d\in D_n^i} \Pr[d](\text{desemp}[QS](d_l) + \text{desemp}[QS](d_r)) \\
&= \sum_{1\le i\le n} \frac{1}{|D|} \sum_{d\in D_n^i} (\text{desemp}[QS](d_l) + \text{desemp}[QS](d_r)) \\
&= \sum_{1\le i\le n} \frac{|D_n^i|}{|D|} (c_m[QS](i-1) + c_m[QS](n-i)) \\
&= \sum_{1\le i\le n} \Pr[X=i](c_m[QS](i-1) + c_m[QS](n-i))
\end{aligned}$$

é o penúltimo passo é correto, porque a média do desempenho as permutações d_l e d_r é a mesma que sobre as permutações com $i-1$ e $n-i$, respectivamente: toda permutação ocorre com a mesma probabilidade e o mesmo número de vezes (**?**, p. 119 tem mais detalhes).
Se denotamos o desempenho com $T_n = c_p[QS](n)$, obtemos a recorrência

$$T_n = n + \sum_{1\le i\le n} \Pr[X=i]\,(T_{i-1} + T_{n-i})$$

com base $T_n = 0$ para $n \le 1$. A probabilidade de escolher o i-gésimo elemento como pivô depende da estratégia da escolha. Vamos estudar dois casos.

1. Escolhe o primeiro elemento como pivô. Temos $\Pr[X=i] = 1/n$. Como $\Pr[X=i]$ não depende do i a equação acima vira

   $$T_n = n - 1 + 2/n \sum_{0\le i<n} T_i$$

   (com uma comparação a menos no particionamento).

2. Escolhe o maior dos dois primeiros elementos[2]. Temos $\Pr[X=i] = 2(i-1)/(n(n-1))$.

[2] Supomos para análise que todos elementos são diferentes. Um algoritmo prático tem que considerar o caso que um ou mais elementos são iguais (**?**, p. 72).

$$
\begin{aligned}
T_n &= n + 2/(n(n-1)) \sum_{1 \le i \le n} (i-1)\,(T_{i-1} + T_{n-i}) \\
&= n + 2/(n(n-1)) \sum_{0 \le i < n} i\,(T_i + T_{n-i-1}) \\
&= n + 2/(n(n-1)) \sum_{0 \le i < n} iT_i + \sum_{0 \le i < n} iT_{n-i-1} \\
&= n + 2/(n(n-1)) \sum_{0 \le i < n} iT_i + \sum_{0 \le i < n} (n-i-1)T_i \\
&= n + 2/n \sum_{0 \le i < n} T_i
\end{aligned}
$$

Recorrência

- A solução final depende da escolha do pivô.
- Dois exemplos
  - Escolhe o primeiro elemento: $\Pr[X = i] = 1/n$.
  - Escolhe o maior dos primeiros dois elementos diferentes: $\Pr[X = i] = 2(i-1)/(n(n-1))$.
- Denota $T_n = c_m[QS](n)$
- Ambas soluções chegam (quase) na mesma equação recorrente

$$T_n = n + 2/n \sum_{0 \le i < n} T_i$$

Exemplo 2.19
Vamos determinar a probabilidade de escolher o pivô $\Pr[X = i]$ no caso $n = 3$ explicitamente:

Permutação	Pivô
123	2
132	3
213	2
231	3
312	3
321	3

Logo temos as probabilidades

Pivô i	1	2	3
$\Pr[X = i]$	0	1/3	2/3

$\Diamond$

Resolver a equação

- A solução da recorrência

$$T_n = n + 1 + 2/n \sum_{0 \le i < n} T_i$$

é

$$T_n = \Theta(n \ln n)$$

- Logo, em ambos casos temos a complexidade média de $\Theta(n \ln n)$.

$$T_n = n + 1 + 2/n \sum_{0 \le i < n} T_i \qquad \text{para } n > 0$$

multiplicando por n obtemos

$$nT_n = n^2 + n + 2 \sum_{0 \le i < n} T_i$$

a mesmo equação para $n - 1$ é

$$(n-1)T_{n-1} = (n-1)^2 + n - 1 + 2 \sum_{0 \le i < n-1} T_i \qquad \text{para } n > 1$$

subtraindo a segunda da primeira obtemos

$$nT_n - (n-1)T_{n-1} = 2n + 2T_{n-1} \qquad \text{para } n > 0, \text{ verificando } n = 1$$
$$nT_n = (n+1)T_{n-1} + 2n$$

multiplicando por $2/(n(n+1))$

$$\frac{2}{n+1} T_n = \frac{2}{n} T_{n-1} + \frac{4}{n+1}$$

substituindo $A_n = 2T_n/(n+1)$

$$A_n = A_{n-1} + \frac{2}{n+1} = \sum_{1 \le i \le n} \frac{4}{i+1}$$

e portanto

$$\begin{aligned} T_n &= 2(n+1) \sum_{1 \le i \le n} \frac{1}{i+1} \\ &= 2(n+1)(H_n - \frac{n}{n+1}) \\ &= \Theta(n \ln n) \end{aligned}$$

◊

2.4 Exercícios

(Soluções a partir da página 242.)

Exercício 2.1
Qual a complexidade pessimista dos seguintes algoritmos?

ALG1

Entrada Um problema de tamanho n.

```
1  for i := 1...n do
2    for j := 1...2^i
3      operações constantes
4      j := j+1 //iterações com valores ímpares de j
5    end for
6  end for
```

ALG2

Entrada Um problema de tamanho n.

```
1  for i := 1...n do
2    for j := 1...2^i
3      operações com complexidade O(j^2)
4      j := j + 1
5    end for
6  end for
```

ALG3

Entrada Um problema de tamanho n.

```
1  for i := 1...n do
2    for j := i...n
3      operações com complexidade O(2^i)
4    end for
5  end for
```

ALG4

Entrada Um problema de tamanho n.

```
1  for i := 1...n do
2    j := 1
3    while j ≤ i do
4      operações com complexidade O(2^j)
5      j := j+1
6    end for
7  end for
```

ALG5

Entrada Um problema de tamanho n.

```
1  for i := 1...n do
2    j := i
```

```
3     while j ≤ n do
4       operações com complexidade O(2^j)
5       j := j+1
6     end for
7   end for
```

Exercício 2.2
Tentando resolver a recorrência

$$T_n = n - 1 + 2/n \sum_{0 \le i < n} T_i$$

que ocorre na análise do Quicksort (veja exemplo 2.18), o aluno J. Rapidez chegou no seguinte resultado: Supomos que $T_n = O(n)$ obtemos

$$\begin{aligned} T_n &= n - 1 + 2/n \sum_{0 \le i < n} O(i) \\ &= n - 1 + 2/n\, O(n^2) = n - 1 + O(n) = O(n) \end{aligned}$$

e logo, a complexidade média do Quicksort é $O(n)$. Qual o problema?

Exercício 2.3
Escreve um algoritmo que determina o segundo maior elemento de uma seqüência $a_1, \ldots, a_n$. Qual a complexidade pessimista dele considerando uma comparação como operação básica?

Exercício 2.4
Escreve um algoritmo que, dado uma seqüência $a_1, \ldots, a_n$ com $a_i \in \mathbb{N}$ determina um conjunto de índices $C \subseteq [1, n]$ tal que

$$\left| \sum_{i \in C} a_i - \sum_{i \notin C} a_i \right|$$

é mínimo. Qual a complexidade pessimista dele?

Exercício 2.5
Qual o número médio de atualizações no algoritmo

```
1  s := 0
2  for i = 1,...,n do
3     if i > ⌊n/2⌋ then
4        s:=s+i
5     end if
6  end for
```

Exercício 2.6

COUNT6

Entrada Uma seqüência $a_1, \ldots, a_n$ com $a_i \in [1, 6]$.

Saída O número de elementos tal que $a_i = 6$.

```
1  k := 0
2  for i = 1,...,n do
3     if a_i = 6 then
4        k := k + 1
5     end if
6  end for
```

Qual o número médio de atualizações $k := k + 1$, supondo que todo valor em cada posição da seqüência tem a mesma probabilidade? Qual o número médio com a distribuição $P[1] = 1/2$, $P[2] = P[3] = P[4] = P[5] = P[6] = 1/10$?

Exercício 2.7
Suponha um conjunto de chaves numa árvore binária completa de k níveis e suponha uma busca binária tal que cada chave da árvore está buscada com a mesma probabilidade (em particular não vamos considerar o caso que uma chave buscada não pertence à árvore.). Tanto nós quanto folhas contém chaves. Qual o número médio de comparações numa busca?

Exercício 2.8
Usando a técnica para resolver a recorrência (veja p. 64)

$$T_n = n + 1 + 2/n \sum_{0 \le i < n} T_i$$

resolve as recorrências

$$T_n = n + 2/n \sum_{0 \le i < n} T_i$$

$$T_n = n - 1 + 2/n \sum_{0 \le i < n} T_i$$

explicitamente.

Parte II

Projeto de algoritmos

3 Introdução

Resolver problemas

- *Modelar* o problema
  - Simplificar e abstrair
  - Comparar com problemas conhecidos
- *Inventar* um novo algoritmo
  - Ganhar experiência com exemplos
  - Aplicar ou variar técnicas conhecidas (mais comum)

Resolver problemas

- *Provar* a corretude do algoritmo
  - Testar só não vale
  - Pode ser informal
- *Analisar* a complexidade
- *Aplicar e validar*
  - Implementar, testar e verificar
  - Adaptar ao problema real
  - Avaliar o desempenho

4 Algoritmos gulosos

Radix omnium malorum est cupiditas.

(Seneca)

4.1 Introdução

(Veja (**?**, cap. 5.1.3).)

Algoritmos gulosos

- Algoritmos gulosos se aplicam a problemas de otimização.
- Idéia principal: Decide localmente.
- Um algoritmo guloso constrói uma solução de um problema
  - Começa com uma solução inicial.
  - Melhora essa solução com uma decisão *local* (gulosamente!).
  - Nunca revisa uma decisão.
- Por causa da localidade: Algoritmos gulosos freqüentemente são apropriados para processamento online.

Trocar moedas

TROCA MÍNIMA

Instância Valores (de moedas ou notas) $v_1 > v_2 > \cdots > v_n = 1$, uma soma s.

Solução Números $c_1, \ldots, c_n$ tal que $s = \sum_{1 \leq i \leq n} c_i v_i$

Objetivo Minimizar o número de unidades $\sum_{1 \leq i \leq n} c_i$.

A abordagem gulosa

```
1  for i:=1,...,n do
2     c_i := ⌊s/v_i⌋
3     s := s − c_i v_i
4  end for
```

Exemplo

Exemplo 4.1
Com $v_1 = 500, v_2 = 100, v_3 = 25, v_4 = 10, v_5 = 1$ e $s = 3.14$, obtemos $c_1 = 0, c_2 = 3, c_3 = 0, c_4 = 1, c_5 = 4$.
Com $v_1 = 300, v_2 = 157, v_3 = 1$, obtemos $v_1 = 1, v_2 = 0, v_3 = 14$.
No segundo exemplo, existe uma solução melhor: $v_1 = 0, v_2 = 2, v_3 = 0$.
No primeiro exemplo, parece que a abordagem gulosa acha a melhor solução. Qual a diferença? ◊

Uma condição simples é que todos valores maiores são múltiplos inteiros dos menores; essa condição não é necessária, porque o algoritmo guloso também acha soluções para outros sistemas de moedas, por exemplo no primeiro sistema do exemplo acima.

Lema 4.1
A solução do algoritmo guloso é a única que satisfaz

$$\sum_{i \in [m,n]} c_i v_i < v_{m-1}$$

para $m \in [2, n]$. (Ela é chamada a *solução canônica*.)

Proposição 4.1
Se $v_{i+1} | v_i$ para $1 \leq i < n$ a solução gulosa é mínima.

Prova. Sejam os divisores $v_i = f_i v_{i+1}$ com $f_i \geq 2$ para $1 \leq i < n$ e define $f_n = v_n = 1$. Logo cada valor tem a representação $v_i = f_i f_{i+1} f_{i+2} \cdots f_n$.
Seja $c_1, \ldots, c_n$ uma solução mínima. A contribuição de cada valor satisfaz $c_i v_i < v_{i-1}$ senão seria possível de substituir f_{i-1} unidades de v_i para uma de v_{i-1}, uma contradição com a minimalidade da solução (observe que isso somente é possível porque os f_i são números inteiros; senão o resto depois da substituição pode ser fracional e tem quer ser distribuído pelos valores menores

que pode causar um aumento de unidades em total). Logo $c_i \leq f_{i-1} - 1$ e temos

$$\begin{aligned}\sum_{i\in[m,n]} c_i v_i &\leq \sum_{i\in[m,n]} (f_{i-1} - 1)v_i \\ &= \sum_{i\in[m,n]} f_{i-1}v_i - \sum_{i\in[m,n]} v_i \\ &= \sum_{i\in[m,n]} v_{i-1} - \sum_{i\in[m,n]} v_i \\ &= v_{m-1} - v_n = v_{m-1} - 1 < v_{m-1}\end{aligned}$$

Agora aplique lema 4.1. ■

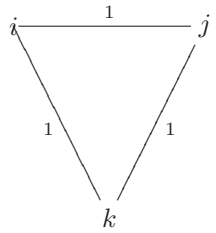
Otimalidade da abordagem gulosa

- A pergunta pode ser generalizada: Em quais circunstâncias um algoritmo guloso produz uma solução ótima?
- Se existe um solução gulosa: freqüentemente ela tem uma implementação simples e é eficiente.
- Infelizmente, para um grande número de problemas não tem algoritmo guloso ótimo.
- Uma condição (que se aplica também para programação dinâmica) é a *subestrutura ótima*.
- A teoria de *matroides* e *greedoides* estuda as condições de otimalidade de algoritmos gulosos.

Definição 4.1 (Subestrutura ótima)
Um problema de otimização tem *subestrutura ótima* se uma solução ótima (mínima ou máxima) do problema consiste em soluções ótimas das subproblemas.

Exemplo 4.2
Considere caminhos (simples) em grafos. O caminho mais curto $v_1 v_2 \ldots v_n$ entre dois vértices v_1 e v_n tem subestrutura ótima, porque um subcaminho também é mais curto (senão seria possível de obter um caminho ainda mais curto).

Do outro lado, o caminho mais longo entre dois vértices $v_1 \dots v_n$ não tem subestrutura ótima: o subcaminho $v_2 \dots v_n$, por exemplo, não precisa ser o caminho mais longo. Por exemplo no grafo



o caminho mais longo entre i e j é ikj, mas o subcaminho kj não é o subcaminho mais longo entre k e j. ◊

Para aplicar a definição 4.1 temos que conhecer (i) o conjunto de subproblemas de um problema e (ii) provar, que uma solução ótima contém uma (sub-)solução que é ótima para um subproblema. Se sabemos como estender uma solução de um subproblema para uma solução de todo problema, a subestrutura ótima fornece um algoritmo genérico da forma

Solução genérica de problemas com subestrutura ótima

Entrada Uma instância I de um problema.

Saída Uma solução ótima S^* de I.

```
1  resolve(I):=
2    S*:=nil                    { melhor solução }
3    for todos subproblemas I' de I do
4      S' :=resolve(I')
5      estende S' para uma solução S de I
6      if S' é a melhor solução then
7        S* := S
8      end if
9    end for
```

Informalmente, um algoritmo guloso é caracterizado por uma subestrutura ótima e a característica adicional, que podemos escolher o subproblema que leva a solução ótima através de uma regra simples. Portanto, o algoritmo guloso evite resolver todos subproblemas.

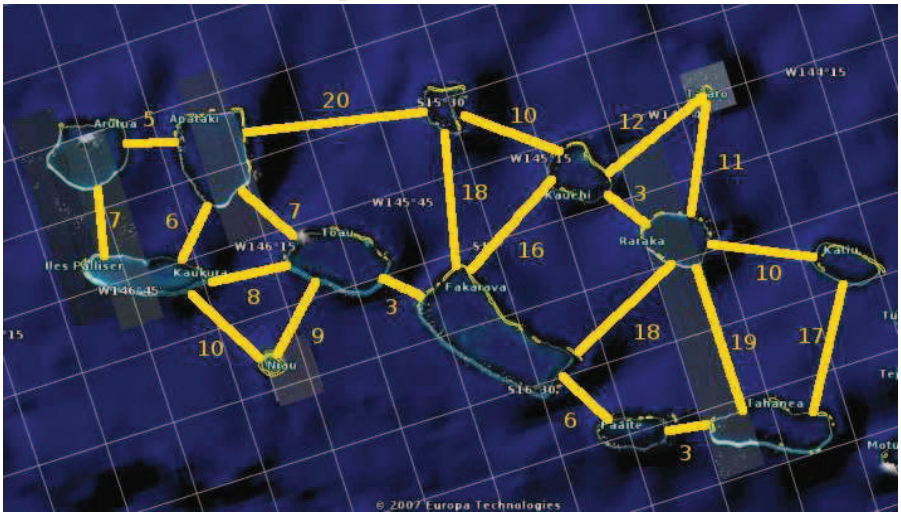
Uma subestrutura ótima é uma condição necessária para um algoritmo guloso ou de programação dinâmica ser ótima, mas ela não é suficiente.

4.2 Algoritmos em grafos

4.2.1 Árvores espalhadas mínimas

Motivação

Pontes para Polinésia Francesa!



Árvores espalhadas mínimas (AEM)

Árvore espalhada mínima (AEM)

Instância Grafo conexo não-direcionado $G = (V, E)$, pesos $c : E \to \mathbb{R}^+$.

Solução Um subgrafo $H = (V_H, E_H)$ conexo.

Objetivo Minimiza os custos $\sum_{e \in E_H} c(e)$.

- Um subgrafo conexo com custo mínimo deve ser uma árvore (por quê?).
- Grafo não conexo: Busca uma árvore em todo componente (floresta mínima).

Aplicações

- Redes elétricas
- Sistemas de estradas
- Pipelines
- Caixeiro viajante
- Linhas telefônicas alugadas

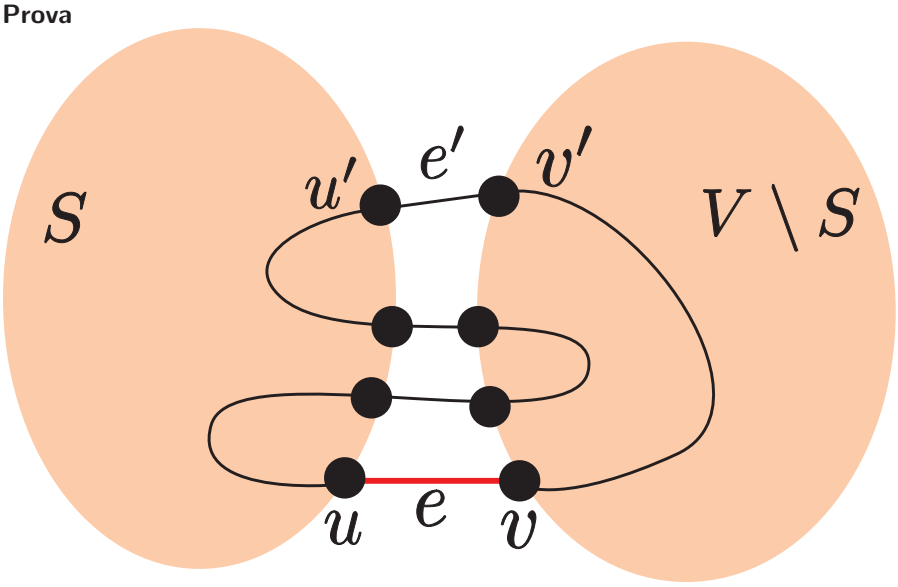
Resolver AEM

- O número de árvores espalhadas pode ser exponencial.
- Como achar uma solução ótima?
- Observação importante

Lema 4.2 (Corte)
Considere um *corte* $V = S \cup V \setminus S$ (com $S \neq \emptyset$, $V \setminus S \neq \emptyset$). O arco mínimo entre S e $V \setminus S$ faz parte de qualquer AEM.

Prova. Na prova vamos supor, que todos pesos são diferentes.
Suponha um corte S tal que o arco mínimo $e = \{u, v\}$ entre S e $V \setminus S$ não faz parte de um AEM T. Em T existe um caminho de u para v que contém ao menos um arco e' que cruza o corte. Nossa afirmação: Podemos substituir e' com e, em contradição com a minimalidade do T.
Prova da afirmação: Se substituirmos e' por e obtemos um grafo T'. Como e é mínimo, ele custa menos. O novo grafo é conexo, porque para cada par de nós ou temos um caminho já em T que não faz uso de e' ou podemos obter, a partir de um caminho em T que usa e' um novo caminho que usa um desvio sobre e. Isso sempre é possível, porque há um caminho entre u e v sem e, com dois sub-caminhos de u para u' e de v' para v, ambos sem usar e'. O novo grafo também é uma árvore, porque ele não contém um ciclo. O único ciclo possível é o caminho entre u e v em T com o arco e, porque T é uma árvore. ■

Prova



Resolver AEM

- A característica do corte possibilita dois algoritmos simples:
  1. Começa com algum nó e repetidamente adicione o nó ainda não alcançável com o arco de custo mínimo de algum nó já alcançável: *algoritmo de Prim*.
  2. Começa sem arcos, e repetidamente adicione o arco com custo mínimo que não produz um ciclo: *algoritmo de Kruskal*.

AEM: Algoritmo de Prim

AEM-PRIM

Entrada Um grafo conexo não-orientado $G = (V, E_G)$ com pesos $c : V_G \to \mathbb{R}^+$

Saída Uma árvore $T = (V, E_T)$ com custo $\sum_{e \in E_T} c(e)$ mínimo.

```
1  V' := {v}  para  um  v ∈ V
2  E_T := ∅
```

```
3  while V' ≠ V do
4     escolhe e = {u, v} com custo mínimo
5        entre V' e V \ V' (com u ∈ V')
6     V' := V' ∪ {v}
7     E_T := E_T ∪ {e}
8  end while
```

AEM: Algoritmo de Kruskal

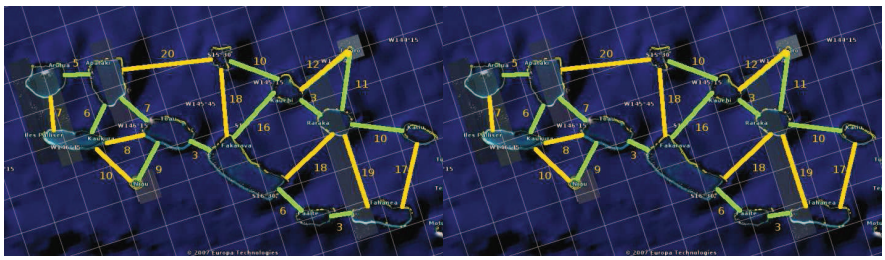
AEM-Kruskal

Entrada Um grafo conexo não-orientado $G = (V, E_G)$ com pesos $c : V_G \to \mathbb{R}^+$

Saída Uma árvore $T = (V, E_T)$ com custo $\sum_{e \in E_T} c(e)$ mínimo.

```
1  E_T := ∅
2  while (V, E_T) não é conexo do
3     escolha e com custo mínimo que não produz cíclo
4     E_T := E_T ∪ {e}
5  end while
```

Exemplo 4.3
Resultado dos algoritmos de Prim e Kruskal para Polinésia Francesa:



O mesmo! ◊

Implementação do algoritmo de Prim

- Problema: Como manter a informação sobre a distância mínima de forma eficiente?
- Mantenha uma distância do conjunto V' para cada nó em $V \setminus V'$.
- Nós que não são acessíveis em um passo têm distância ∞.
- Caso um novo nó seja selecionado: atualiza as distâncias.

Implementação do algoritmo de Prim

- Estrutura de dados adequada:
  - Fila de prioridade Q de pares (e, v) (chave e elemento).
  - Operação $Q.\min()$ remove e retorna (e, c) com c mínimo.
  - Operação Q.atualiza(e, c') modifica a chave de e para v' caso v' é menor que a chave atual.
- Ambas operações podem ser implementadas com custo $O(\log n)$.

AEM: Algoritmo de Prim

AEM-Prim

Entrada Um grafo conexo não-orientado $G = (V, E_G)$ com pesos $c : V_G \to \mathbb{R}^+$

Saída Uma árvore $T = (V, E_T)$ com custo $\sum_{e \in E_T} c(e)$ mínimo.

```
1  E_T := ∅
2  Q := {((v,u), c(v,u)) | u ∈ N(v)} { nós alcancáveis }
3  Q := Q ∪ {((u,u), ∞) | u ∈ V \ N(v) \ {v}} { nós restantes }
4  while Q ≠ ∅ do
5     ((u,v), c) := Q.min() { (u,v) é arco mínimo }
6     for w ∈ N(v) do
7           Q.atualiza((v,w), c(v,w))
8     end for
9     E_T := E_T ∪ {{u,v}}
10 end while
```

Algoritmo de Prim

- Complexidade do algoritmo com o refinamento acima:
- O laço 4–9 precisa $n - 1$ iterações.
- O laço 6–8 precisa no total menos que m iterações.
- $c_p[\text{AEM-PRIM}] = O(n \log n + m \log n) = O(m \log n)$

Uma implementação do algoritmo de Kruskal em tempo $O(m \log n)$ também é possível. Para esta implementação é necessário de manter conjuntos que representam nós conectados de maneira eficiente. Isso leva a uma estrutura de dados conhecida como *Union-Find* que tem as operações

- $C :=$ cria(e): cria um conjunto com único elemento e.
- união(C_1, C_2): junta os conjuntos C_1 e C_2.
- $C :=$ busca(e): retorna o conjunto do elemento e.

Essas operações podem ser implementados em tempo $O(1)$, $O(1)$ e $O(\log n)$ (para n elementos) respectivamente.

4.2.2 Caminhos mais curtos

Caminhos mais curtos

- Problema freqüente: Encontra caminhos mais curtos em um grafo.
- Variações: Caminho mais curto
  - entre dois nós.
  - entre um nó e todos outros (inglês: single-source shortest paths, SSSP).
  - entre todas pares (inglês: all pairs shortest paths, APSP).

Caminhos mais curtos

CAMINHOS MAIS CURTOS

Instância Um grafo direcionado $G = (\{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ com função de custos $c : E \to \mathbb{R}^+$ e um nó inicial $s \in V$.

Solução Uma atribuição $d : V \to \mathbb{R}^+$ da distância do caminho mais curto $d(t)$ de s para t.

Aproximação: Uma idéia

1. Começa com uma estimativa viável: $d(s) = 0$ e $d(t) = \infty$ para todo nó em $V \setminus \{s\}$.
2. Depois escolhe uma aresta $e = (u, v) \in E$ tal que $d(u) + c(e) \leq d(v)$ e atualiza $d(v) = d(u) + c(e)$.
3. Repete até não ter mais arestas desse tipo.

Esse algoritmo é correto? Qual a complexidade dele?

- Greedy set cover (ver: Dasgupta+Kleinberg/Tardos).
- From Genes to Archaeological Digs and from Traffic Lights to Childhood Development: The Many Applications of Interval Graphs
- Um grafo é *perfeito* se a cardinalidade da clique máxima é igual ao seu número cromático (número de cores em uma coloração mínima) e isso é verdade para todos sub-grafos. Grafos de intervalo são perfeitos. Logo, o problema do clique máxima também pode ser resolvida da forma acima.

4.3 Algoritmos de seqüenciamento

We follow closely (**?**, ch. 4).

Seqüenciamento de intervalos
Considere o seguinte problema

> Seqüenciamento de intervalos
>
> **Instância** Um conjunto de intervalos $S = \{[c_i, f_i], 1 \leq i \leq n\}$, cada com começo c_i e fim f_i tal que $c_i < f_i$.
>
> **Solução** Um conjunto *compatível* $C \subseteq S$ de intervalos, i.e. cada par $i_1, i_2 \in C$ temos $i_1 \cap i_2 = \emptyset$.
>
> **Objetivo** Maximiza a cardinalidade $|C|$.

(inglês: interval scheduling)

Como resolver?

- Qual seria uma boa estratégia gulosa para resolver o problema?
- Sempre selecionada o intervalo que
  - que começa mais cedo?
  - que termina mais cedo?
  - que começa mais tarde?
  - que termina mais tarde?
  - mais curto?
  - tem menos conflitos?

Implementação

SEQÜENCIAMENTO DE INTERVALOS

Entrada Um conjunto de intervalos $S = \{[c_i, f_i] \mid 1 \leq i \leq n\}$, cada com começo c_i e fim f_i tal que $c_i < f_i$.

Saída Um conjunto máximo de intervalos compatíveis C.

```
1  C := ∅
2  while S ≠ ∅ do
3     Seja [c, f] ∈ S com f mínimo
4     C := C ∪ [c, f]
5     S := S \ {i ∈ S | i ∩ [c, f] ≠ ∅}
6  end while
7  return C
```

Seja $C = ([c_1, f_1], \ldots, [c_n, f_n])$ o resultado do algoritmo SEQÜENCIAMENTO DE INTERVALOS e $O = ([c'_1, f'_1], \ldots, [c'_m, f'_m])$ seqüenciamento máximo, ambos em ordem crescente.

Proposição 4.2
Para todo $1 \leq i \leq n$ temos $f_i \leq f'_i$.

Prova. Como O é ótimo, temos $n \leq m$. Prova por indução. Base: Como o algoritmo guloso escolhe o intervalo cujo terminação é mínima, temos $f_1 \leq f'_1$. Passo: Seja $f_i \leq f'_i$ com $i < n$. O algoritmo guloso vai escolher entre os intervalos que começam depois f_i o com terminação mínima. O próximo intervalo

$[c'_{i+1}, m'_{i+1}]$ do seqüenciamento ótimo está entre eles, porque ele começa depois f'_i e $f'_i \geq f_i$. Portanto, o próximo intervalo escolhido pelo algoritmo guloso termina antes de f'_{i+1}, i.e. $f_{i+1} \leq f'_{i+1}$. ■

Proposição 4.3
O seqüenciamento do algoritmo guloso é ótimo.

Prova. Suponha que o algoritmo guloso retorna menos intervalos C que um seqüenciamento ótimo O. Pela proposição 4.2, o último (n-ésimo) intervalo do C termina antes do último intervalo de O. Como O tem mais intervalos, existe mais um intervalo que poderia ser adicionado ao conjunto C pelo algoritmo guloso, uma contradição com o fato, que o algoritmo somente termina se não sobram intervalos compatíveis. ■

Complexidade

- Uma implementação detalhada pode
  - Ordenar os intervalos pelo fim deles em tempo $O(n \log n)$
  - Começando com intervalo 1 sempre escolher o intervalo atual e depois ignorar todos intervalos que começam antes que o intervalo atual termina.
  - Isso pode ser implementado em uma varredura de tempo $O(n)$.
  - Portanto o complexidade pessimista é $O(n \log n)$.

Conjunto independente máximo

Considere o problema

> Conjunto independente máximo, CIM
>
> **Instância** Um grafo não-direcionado $G = (V, E)$.
>
> **Solução** Um conjunto *independente* $M \subseteq V$, i.e. todo $m_1, m_2 \in V$ temos $\{m_1, m_2\} \notin E$.
>
> **Objetivo** Maximiza a cardinalidade $|M|$.

(inglês: maximum independent set, MIS)

Grafos de intervalo

- Uma instância S de seqüenciamento de intervalos define um grafo não-direcionado $G = (V, E)$ com

$$V = S; \qquad E = \{\{i_1, i_2\} \mid i_1, i_2 \in S, i_1 \cap i_2 \neq \emptyset\}$$

- Grafos que podem ser obtidos pelo intervalos são *grafos de intervalo*.
- Um conjunto compatível de intervalos corresponde com um conjunto independente nesse grafo.
- Portanto, resolvemos CIM para grafos de intervalo!
- Sem restrições, CIM é NP-completo.

Variação do problema

Considere uma variação de Seqüenciamento de intervalos:

> Particionamento de intervalos
>
> **Instância** Um conjunto de intervalos $S = \{[c_i, f_i], 1 \leq i \leq n\}$, cada com começo c_i e fim f_i tal que $c_i < f_i$.
>
> **Solução** Uma atribuição de rótulos para intervalos tal que cada conjunto de intervalos com a mesma rótula é compatível.
>
> **Objetivo** Minimiza o número de rótulos diferentes.

Observação

- Uma superposição de k intervalos implica uma cota inferior de k rótulos.
- Seja d o maior número de intervalos super-posicionados (a *profundidade* do problema).
- É possível atingir o mínimo d?

Algoritmo

PARTICIONAMENTO DE INTERVALOS

Instância Um conjunto de intervalos $S = \{[c_i, f_i], 1 \leq i \leq n\}$, cada com começo c_i e fim f_i tal que $c_i < f_i$.

Solução Uma atribuição de rótulos para os intervalos tal que cada conjunto de intervalos com a mesma rótula é compatível.

Objetivo Minimiza o número de rótulos diferentes.

```
1  Ordene S em ordem de começo crescente.
2  for i := 1,...,n do
3    Exclui rótulos de intervalos
4      precedentes conflitantes
5    Atribui ao intervalo i o número
6      inteiro mínimo ≥ 1 que sobra
```

Corretude

- Com profundidade d o algoritmo precisa ao menos d rótulos.
- De fato ele precisa exatamente d rótulos. Por qûe?
- Qual a complexidade dele?

Observações: (i) Suponha que o algoritmo precise mais que d rótulos. Então existe um intervalo tal que todos números em $[1, d]$ estão em uso pelo intervalos conflitantes, uma contradição com o fato que a profundidade é d. (ii) Depois da ordenação em $O(n \log n)$ a varredura pode ser implementada em $O(n)$ passos. Portanto a complexidade é $O(n \log n)$.

Coloração de grafos

Considere o problema

COLORAÇÃO MÍNIMA

Instância Um grafo não-direcionado $G = (V, E)$.

Solução Uma coloração de G, i.e. uma atribuição de cores $c : V \to C$ tal que $c(v_1) \neq c(v_2)$ para $\{v_1, v_2\} \in E$.

Objetivo Minimiza o número de cores $|C|$.

- Particionamento de intervalos resolve o problema Coloração mínima para grafos de intervalo.
- Coloração mínima para grafos sem restrições é NP-completo.

4.4 Tópicos

Compressão de dados

- Seqüência genética (NM_005273.2, Homo sapiens guanine nucleotide binding protein)

  $$GATCCCTCCGCTCTGGGGAGGCAGCGCTGGCGGCGG\ldots$$

  com 1666bp[1].
- Como comprimir?
  - Com código fixo:

    $$A = 00; \quad G = 01;$$
    $$T = 10; \quad C = 11.$$

    Resultado: $2b/bp$ e $3332b$ total.
  - Melhor abordagem: Considere as freqüências, use códigos de diferente comprimento

A	G	T	C
.18	.30	.16	.36

Códigos: Exemplos

- Tentativa 1

  $$T = 0; \quad A = 1;$$
  $$G = 01; \quad C = 10$$

[1] "bp" é a abreviação do inglês "base pair" (par de bases)

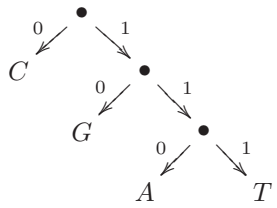
- Desvantagem: Ambíguo! $01 = TA$ ou $01 = G$?
- Tentativa 2

$$C = 0; \qquad G = 10;$$
$$A = 110; \qquad T = 111$$

- Custo: $0.36 \times 1 + 0.30 \times 2 + 0.18 \times 3 + 0.16 \times 3 = 1.98b/bp$, $3299b$ total.

Códigos livre de prefixos

- Os exemplos mostram
  - Dependendo das freqüências, um código com comprimento variável pode custar menos.
  - Para evitar ambigüedades, nenhum prefixo de um código pode ser outro código: ele é *livre de prefixos* (inglês: prefix-free).
- Observação: Esses códigos correspondem a árvores binárias.



Cada código livre de prefixo pode ser representado usando uma árvore binária: Começando com a raiz, o sub-árvore da esquerda representa os códigos que começam com 0 e a sub-árvore da direita representa os códigos que começam com 1. Esse processo continua em cada sub-árvore considerando os demais bits. Caso todos bits de um código foram considerados, a árvore termina nessa posição com uma folha para esse código.
Essas considerações levam diretamente a um algoritmo. Na seguinte implementação, vamos representar árvores binárias como estrutura da dados abstrata que satisfaz

BinTree ::= Nil | Node(BinTree,Bintree)

uma folha sendo um nó sem filhos. Vamos usar a abreviação

Leaf ::= Node(Nil,Nil).

PrefixTree

Entrada Um conjunto de códigos C livre de prefixos.

Saída Uma árvore binária, representando os códigos.

```
1  if |C| = 0 then
2    return Nil                          { não tem árvore }
3  end if
4  if C = {ε} then
5    return Leaf                         { único código vazio }
6  end if
7  Escreve C = 0C1 ∪ 1C2
8  return Node(PrefixTree(C1), PrefixTree(C2))
```

Contrariamente, temos também

Proposição 4.4
O conjunto das folhas de cada árvore binária corresponde com um código livre de prefixo.

Prova. Dado uma árvore binária com as folhas representando códigos, nenhum código pode ser prefixo de outro: senão ocorreria como nó interno. ■

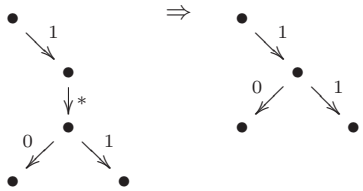
Qual o melhor código?

- A teoria de informação (Shannon) fornece um limite.
- A quantidade de informação contido num símbolo que ocorre com freqüência f é
$$-\log_2 f,$$
logo o número médio de bits transmitidos (para um número grande de símbolos) é
$$H = -\sum f_i \log_2 f_i.$$
- H é um limite inferior para qualquer código.
- Nem sempre é possível atingir esse limite. Com
$$A = 1/3, B = 2/3; \qquad H \approx 0.92\text{b}$$
mas o código ótimo precisa ao menos 1b por símbolo.

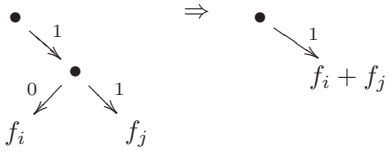
- Nosso exemplo: $H \approx 1.92$.

Como achar o melhor código?

- Observação 1: Uma solução ótima é uma árvore completa.



- Observação 2: Em uma solução ótima, os dois símbolos com menor freqüência ocorrem como irmãos no nível mais alto. Logo: Podemos substituir eles com um nó cujo freqüência é a soma dos dois.



Algoritmo

HUFFMAN

Entrada Um alfabeto de símbolos S com uma freqüência f_s para cada $s \in S$.

Saída Uma árvore binária que representa o melhor código livre de prefixos para S.

```
1  Q := {Leaf(f_s) | s ∈ S} { fila de prioridade }
2  while |Q| > 0 do
3     b_1 := Q.min() com b_1 = Node(f_i, b_i1, b_i2)
4     b_2 := Q.min() com b_2 = Node(f_j, b_j1, b_j2)
5     Q := Q.add(Node(f_i + f_j, b_1, b_2))
6  end while
```

Exemplo 4.4

Saccharomyces cerevisiae
Considere a seqüência genética do Saccharomyces cerevisiae (inglês: baker's yeast)

$$MSITNGTSRSVSAMGHPAVERYTPGHIVCVGTHKVEVV\ldots$$

com 2900352bp. O alfabeto nessa caso são os 20 amino-ácidos

$$S = \{A, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, P, Q, R, S, T, V, W, Y\}$$

que ocorrem com as freqüências

A	C	D	E	F	G	H	I	K	L
0.055	0.013	0.058	0.065	0.045	0.050	0.022	0.066	0.073	0.096
M	N	P	Q	R	S	T	V	W	Y
0.021	0.061	0.043	0.039	0.045	0.090	0.059	0.056	0.010	0.034

Resultados
O algoritmo HUFFMAN resulta em

A	C	D	E	F	G	H	I	K	L
0010	100110	1110	0101	0000	1000	100111	1101	0011	100
M	N	P	Q	R	S	T	V	W	Y
000111	1011	11011	01011	10111	1111	0001	1010	000110	10110

que precisa 4.201 b/bp (compare com $\log_2 20 \approx 4.32$). ◊

4.5 Notas

O algoritmo guloso para sistemas de moedas Magazine, Nemhauser e Trotter (Magazine et al., 1975) dão critérios necessários e suficientes para uma solução gulosa do problema de troca ser ótima. Dado um sistema de moedas, Pearson (Pearson, 2005) apresentou um algoritmo que descobre em tempo $O(n^3 \log^2 c_1)$, se o sistema é guloso. Um sistema de moedas tal que todo sufixo é guloso se chama *totalmente guloso*. Cowen et al. (Cowen et al., 2008) estudam sistemas de moedas totalmente gulosos.

4.6 Exercícios

(Soluções a partir da página 245.)

Exercício 4.1 (Análise de series)
Suponha uma série de eventos, por exemplo, as transações feitos na bolsa de forma

compra Dell, vende HP, compra Google, ...

Uma certa ação pode acontecer mais que uma vez nessa seqüência. O problema: Dado uma outra seqüência, decida o mais rápido possível se ela é uma subseqüência da primeira.
Achar um algoritmo eficiente (de complexidade $O(m + n)$ com seqüência de tamanho n e m), prova a corretude a analise a complexidade dele.
(Fonte: (**?**)).

Exercício 4.2 (Comunicação)
Imagine uma estrada comprida (pensa em uma linha) com casas ao longo dela. Suponha que todas casas querem acesso ao comunicação com celular. O problema: Posiciona o número mínimo de bases de comunicação ao longo da estrada, com a restriçaõ que cada casa tem quer ser ao máximo 4 quilômetros distante de uma base.
Inventa um algoritmo eficiente, prova a corretude e analise a complexidade dele.
(Fonte: (**?**)).

5 Programação dinâmica

5.1 Introdução

Temos um par de coelhos recém-nascidos. Um par recém-nascido se torna fértil depois um mês. Depois ele gera um outro par a cada mês seguinte. Logo, os primeiros descendentes nascem em dois meses. Supondo que os coelhos nunca morrem, quantos pares temos depois de n meses?

n	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
#	1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$

Como os pares somente produzem filhos depois de dois meses, temos

$$F_n = \underbrace{F_{n-1}}_{\text{população antiga}} + \underbrace{F_{n-2}}_{\text{descendentes}}$$

com a recorrência completa

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2} & \text{caso } n \geq 2 \\ 1 & \text{caso } n \in \{0, 1\} \end{cases}$$

Os números definidos por essa recorrência são conhecidos como so *números Fibonacci*. Uma implementação recursiva simples para calcular um número de Fibonacci é

```
1  fib(n) :=
2    if n ≤ 1 then
3      return 1
4    else
5      return fib(n − 1)+fib(n − 2)
6    end if
7  end
```

Qual a complexidade dessa implementação? Temos a recorrência de tempo

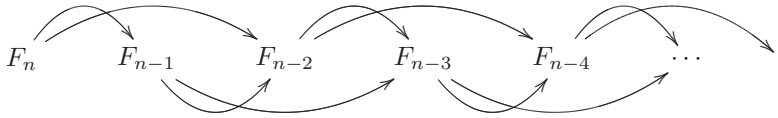
$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + T(n-2) + \Theta(1) & \text{caso } n \geq 2 \\ \Theta(1) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

É simples de ver (indução!) que $T(n) \geq F_n$, e sabemos que $F_n = \Omega(2^n)$ (outra indução), portanto a complexidade é exponencial. (A fórmula exata é

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} = \lfloor \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \rfloor$$

e foi publicado por Binet em 1843.)

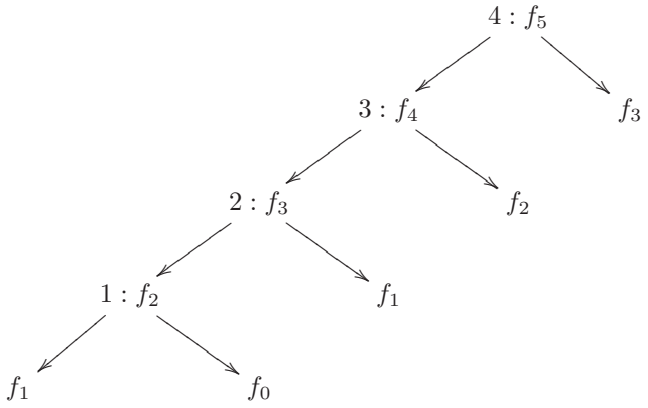
Qual o problema dessa solução? De um lado temos um número exponencial de caminhos das chamadas recursivas



mas somente um número polinomial de valores diferentes! Idéia: usar uma *cache*!

```
1  f_0 := 1
2  f_1 := 1
3  f_i := ⊥ para i ≥ 2
4
5  fib(n) :=
6    if f_n = ⊥ then
7      f_n := fib(n−1)+fib(n−2)
8    end if
9    return f_n
10 end
```

Exemplo de uma execução:



	f_5	f_4	f_3	f_2	f_1	f_0
Inicial	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	1	1
1	$\perp$	$\perp$	$\perp$	2	1	1
2	$\perp$	$\perp$	3	2	1	1
3	$\perp$	5	3	2	1	1
4	8	5	3	2	1	1

O trabalho agora é $O(n)$, i.e. linear! Essa abordagem se chama *memoização*: usamos uma cache para evitar recalcular resultados intermediários utilizados frequentemente. Essa implementação é *top-down* e corresponde exatamente à recorrência acima. Uma implementação (ligeiramente) mais eficiente que preenche a "cache" de forma *bottom-up* é

```
1  fib(n) :=
2    f_0 := 1
3    f_1 := 1
4    for i ∈ [2, n] do
5      f_i := f_{i-1} + f_{i-2}
6    end for
7    return f_n
8  end
```

Finalmente, podemos otimizar essa computação ainda mais, evitando totalmente a cache

```
1  fib(n) :=
2    f := 1
3    g := 1
4    for i ∈ [2, n] do
5      { invariante: f = F_{i-2} ∧ g = F_{i-1} }
6      g := f + g
7      f := g − f
8      { invariante: f = F_{i-1} ∧ g = F_i }
9    end for
```

A idéia de armazenar valores intermediários usados freqüentemente numa computação recursiva é uma das idéias principais da *programação dinâmica* (a outra senda o princípio de otimalidade, veja abaixo). A seqüência de implementações no nosso exemplo dos números Fibonacci é típico para algoritmos de programação dinâmica, inclusive o último para reduzir a complexidade de espaço. Tipicamente usa-se implementações ascendentes (ingl. *bottom-up*).

Programação Dinâmica (PD)

1. Para aplicar PD o problema deve apresentar substrutura ótima (uma

solução ótima para um problema contém soluções ótimas de seus subproblemas) e superposição de subproblemas (reutiliza soluções de subproblemas).

2. Pode ser aplicada a problemas NP-completos e polinomiais.
3. Em alguns casos o algoritmo direto tem complexidade exponencial, enquanto que o algoritmo desenvolvido por PD é polinomial.
4. Às vezes a complexidade continua exponencial, mas de ordem mais baixa.
5. É útil quando não é fácil chegar a uma seqüência ótima de decisões sem testar todas as seqüências possíveis para então escolher a melhor.
6. Reduz o número total de seqüências viáveis, descartando aquelas que sabidamente não podem resultar em seqüências ótimas.

Idéias básicas da PD

- Objetiva construir uma resposta ótima através da combinação das respostas obtidas para subproblemas
- Inicialmente a entrada é decomposta em partes mínimas e resolvidas de forma ascendente (bottom-up)
- A cada passo os resultados parciais são combinados resultando respostas para subproblemas maiores, até obter a resposta para o problema original
- A decomposição é feita uma única vez, e os casos menores são tratados antes dos maiores
- Este método é chamado ascendente, ao contrário dos métodos recursivos que são métodos descendentes.

Passos do desenvolvimento de um algoritmo de PD

1. Caracterizar a estrutura de uma solução ótima
2. Definir recursivamente o valor de uma solução ótima
3. Calcular o valor de uma solução ótima em um processo ascendente
4. Construir uma solução ótima a partir de informações calculadas

5.2 Comparação de seqüências

5.2.1 Subseqüência Comum Mais Longa

Subseqüência Comum Mais Longa

- Dada uma sequência $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$, uma outra sequência $Z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_k \rangle$, é uma subseqüência de X se existe uma seqüência estritamente crescente $\langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle$ de índices de X tais que, para todo $j = 1, 2, \ldots, k$, temos $x_{i_j} = z_j$.
- Exemplo: $Z = \langle B, C, D, B \rangle$ é uma subseqüência de $X = \langle A, B, C, D, A, B \rangle$.
- Dadas duas seqüências X e Y, dizemos que uma seqüência Z é uma subseqüência comum de X e Y se Z é uma subseqüência tanto de X quanto de Y.
- Exemplo: $Z = \langle B, C, A, B \rangle$ é uma subseqüência comum *mais longa* de $X = \langle A, B, C, B, D, A, B \rangle$ e $Y = \langle B, D, C, A, B, A \rangle$

Subseqüência Comum Mais Longa

- Definição do Problema da SCML

SCML

Instância Duas seqüencias $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$.
Solução Uma subseqüência comum Z de X, Y.
Objetivo Maximizar o comprimento de Z.

- Exemplo de Aplicação: comparar dois DNAs

$$X = ACCGGTCGAGTG$$
$$Y = GTCGTTCGGAATGCCGTTGCTCTGTAAA$$

- Os caracteres devem aparecer na mesma ordem, mas não precisam ser necessariamente consecutivos.

Teorema: Subestrutura Ótima de uma SCML
Sejam as seqüências $X = \langle x_1, x_2, \ldots, x_m \rangle$ e $Y = \langle y_1, y_2, \ldots, y_n \rangle$, e seja $Z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_k \rangle$ qualquer SCML de X e Y

- Se $x_m = y_n$, então $z_k = x_m = y_n$ e Z_{k-1} é uma SCML de X_{m-1} e Y_{n-1}
- Se $x_m \neq y_n$, então $z_k \neq x_m$ implica que Z é uma SCML de X_{m-1} e Y
- Se $x_m \neq y_n$, então $z_k \neq y_m$ implica que Z é uma SCML de X e Y_{n-1}

Notação: Se $Z = \langle z_1, z_2, \ldots, z_n \rangle$, para $0 \leq k \leq n$, $Z_k = \langle z_1, z_2, \ldots, z_k \rangle$
Denotando com $S(X, Y)$ a subsequências mais longa entre X e Y, isso leva ao definição recursiva

$$S(X,Y) = \begin{cases} S(X',Y') + 1 & \text{se } X = X'c,\ Y = Y'c \\ \max\{S(X,Y'), S(X',Y)\} & \text{se } X = X'c_1,\ Y = Y'c_2 \text{ e } c_1 \neq c_2 \\ 0 & \text{se } X = \epsilon \text{ ou } Y = \epsilon \end{cases}$$

Qual a complexidade de implementação recursiva (naiva)? No pior caso executamos

$$T(n,m) = T(n-1,m) + T(n,m-1) + \Theta(1)$$

operações. Isso com certeza é mais que o número de caminhos de (n, m) até $(0, 0)$, que é maior que $\binom{m+n}{n}$, i.e. exponential no pior caso.
Com memoização ou armazenamento de valores intermediários, podemos reduzir o tempo e espaço para $O(nm)$:

SCML

SCML

Entrada Dois strings X e Y e seus respectivos tamanhos m e n medidos em número de caracteres.

Saída O tamanho da maior subseqüência comum entre X e Y.

```
1  m := comprimento(X)
2  n := comprimento(Y)
3  for i := 0 to m do c[i,0] := 0;
4  for j := 1 to n do c[0,j] := 0;
5  for i := 1 to m do
6      for j := 1 to n do
7          if x_i = y_j then
```

```
 8                c[i, j] := c[i − 1, j − 1] + 1
 9            else
10                c[i, j] := max(c[i, j − 1], c[i − 1, j])
11            end if
12        end for
13    return c[m, n]
```

Give an example of ABCBDAB, BDCABA with memoization. There, of the 42 places, we store only 27 (and the image is nice).

Exemplo

	.	B	D	C	A	B	A
.	0	0	0	0	0	0	0
A	0	0	0	0	1	1	1
B	0	1	1	1	1	2	2
C	0	1	1	2	2	2	2
B	0	1	1	2	2	3	3
D	0	1	2	2	2	3	3
A	0	1	2	2	3	3	4
B	0	1	2	2	3	4	4

Caso só o comprimento da maior subseqüência em comum importa, podemos reduzir o espaço usado. Os valores de cada linha ou coluna dependem só dos valores da linha ou coluna anterior. Supondo, que o comprimento de uma linha e menor que o comprimento de uma coluna, podemos manter duas linhas e calcular os valores linha por linha. Caso as colunas são menores, procedemos das mesmo forma coluna por coluna. Com isso, podemos determinar o comprimento da maior subseqüência em comum em tempo $O(nm)$ e espaço $O(\min\{n, m\})$.
Caso queiramos recuperar a própria subseqüência, temos que manter essa informação adicionalmente:

SCML que permite mostrar a subseqüência

SCML-2

Entrada Dois strings X e Y e seus respectivos tamanhos m e n medidos em número de caracteres.

Saída O tamanho da maior subseqüência comum entre X e Y e o vetor b para recuperar uma SCML.

```
 1  m := comprimento[X]
 2  n := comprimento[Y]
 3  for i := 0 to m do c[i,0] := 0;
 4  for j := 1 to n do c[0,j] := 0;
 5  for i := 1 to m do
 6      for j := 1 to n do
 7          if x_i = y_j then
 8              c[i,j] := c[i-1,j-1] + 1
 9              b[i,j] := ↖
10          else if c[i-1,j] ≥ c[i,j-1] then
11                  c[i,j] := c[i-1,j]
12                  b[i,j] := ↑
13              else
14                  c[i,j] := c[i,j-1]
15                  b[i,j] := ←
16  return c e b
```

Exemplo

	.	B	D	C	A	B	A
.	0	0	0	0	0	0	0
A	0	↑0	↑0	↑0	↖1	←1	↖1
B	0	↖1	←1	←1	↑1	↖2	←2
C	0	↑1	↑1	↖2	←2	↑2	↑2
B	0	↖1	↑1	↑2	↑2	↖3	←3
D	0	↑1	↖2	↑2	↑2	↑3	↑3
A	0	↑1	↑2	↑2	↖3	↑3	↖4
B	0	↖ 1	↑2	↑2	↑3	↖4	↑4

Nesse caso, não tem método simples para reduzir o espaço de $O(nm)$ (veja os comentários sobre o algoritmo de Hirschberg abaixo). Mantendo duas linhas ou colunas de c, gasta menos recursos, mas para recupar a subseqüência comum, temos que manter $O(nm)$ elementos em b.

O algoritmo de Hirschberg (Hirschberg, 1975), via Divisão e Conquista, resolve o problema da subseqüência comum mais longa em tempo $O(mn)$, mas com complexidade de espaço linear $O(m+n)$. O algoritmo recursivamente divide a tabela em quatro quadrantes e ignora os quadrantes superior-direito e inferior-esquerdo, visto que a solução não passa por eles. Após, o algoritmo é chamado recursivamente nos quadrantes superior-esquerdo e inferior-direito. Em cada chamada recursiva é criada uma lista com as operações executadas, e tal lista é concatenada ao final das duas chamadas recursivas. A recuperação da seqüências de operações pode ser feita percorrendo-se linearmente esta lista.

Print-SCML

PRINT-SCML

Entrada Matriz $b \in \{\leftarrow, \nwarrow, \uparrow\}^{m \times n}$.

Saída A maior subseqüência Z comum entre X e Y obtida a partir de b.

```
1  if i = 0 or j = 0 then return
2  if b[i, j] = ↖ then
3     Print-SCML(b, X, i 1, j 1)
4     print x_i
5  else if b[i, j] = ↑ then
6     Print-SCML(b, X, i 1, j)
7  else
8     Print-SCML(b, X, i, j 1)
```

5.2.2 Similaridade entre strings

Considere o problema de determinar o número mínimo de operações que transformam um string s em um string t, se as operações permitidas são a inserção de um caracter, a deleção de um caracter ou a substituição de um caracter para um outro. O problema pode ser visto como um alinhamento de dois strings da forma

```
sonhar
vo--ar
```

em que cada coluna com um caracter diferente (inclusive a "falta" de um caracter `-`) tem custo 1 (uma coluna $(a, -)$ corresponde à uma deleção no primeiro ou uma inserção no segundo string, etc.). Esse problema tem subestrutura

ótima: Uma solução ótima contém uma solução ótima do subproblema sem a última coluna, senão podemos obter uma solução de menor custo. Existem quatro casos possíveis para a última coluna:

$$\begin{bmatrix} a \\ - \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} - \\ a \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

com caracteres a, b diferentes. O caso (a, a) somente se aplica, se os últimos caracteres são iguais, o caso (a, b) somente, se eles são diferentes. Portanto, considerando todos casos possíveis fornece uma solução ótima:

$$d(s,t) = \begin{cases} \max(|s|, |t|) & \text{se } |s \models 0 \text{ ou } |t \models 0 \\ \min(d(s',t)+1, d(s,t')+1, d(s',t')+[c_1 \neq c_2]) & \text{se } s = s'c_1 \text{ e } t = t'c_2 \end{cases}$$

Essa distância está conhecida como *distância de Levenshtein* (Levenshtein, 1966). Uma implementação direta é

Distância de Edição

Distância

Entrada Dois strings s, t e seus respectivos tamanhos n e m medidos em número de caracteres.

Saída A distância mínima entre s e t.

```
1  distância(s,t,n,m):=
2    if (n=0) return m
3    if (m=0) return n
4    if (s_n = t_m) then
5      sol_0 = distância(s,t,n-1,m-1)
6    else
7      sol_0 = distância(s,t,n-1,m-1) + 1
8    end if
9    sol_1 = distância(s,t,n,m-1) + 1
10   sol_2 = distância(s,t,n-1,m) + 1
11   return min(sol_0, sol_1, sol_2)
```

Essa implementação tem complexidade exponencial. Com programação dinâmica, armazenando os valores intermediários de d em uma matriz m, obtemos

Distância de Edição

PD-DISTÂNCIA

Entrada Dois strings s e t, e n e m, seus respectivos tamanhos medidos em número de caracteres.

Saída A distância mínima entre s e t.

Comentário O algoritmo usa uma matriz $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{N}^{(n+1)\times(m+1)}$ que armazena as distâncias mínimas $m_{i,j}$ entre os prefixos $s[1 \ldots i]$ e $t[1 \ldots j]$.

```
1  PD-distância(s,t,n,m):=
2    for i := 0,...,n do m_{i,0} := i
3    for i := 1,...,m do m_{0,i} := i
4    for i := 1,...,n do
5      for j := 1,...,m do
6        if (s_i = t_j) then
7          sol_0 := m_{i-1,j-1}
8        else
9          sol_0 := m_{i-1,j-1} + 1
10       end if
11       sol_1 := m_{i,j-1} + 1
12       sol_2 := m_{i-1,j} + 1
13       m_{i,j} := min(sol_0, sol_1, sol_2);
14     end for
15   return m_{i,j}
```

Distância entre textos

Valores armazenados na matriz M para o cálculo da distância entre ALTO e LOIROS

	·	L	O	I	R	O	S
·	0	1	2	3	4	5	6
A	1	1	2	3	4	5	6
L	2	1	2	3	4	5	6
T	3	2	2	3	4	5	6
O	4	3	2	3	4	4	5

-ALTO-
LOIROS

Distância entre textos

PD-DISTÂNCIA

Entrada Dois strings s e t, e n e m, seus respectivos tamanhos medidos em número de caracteres.

Saída A distância mínima entre s e t e uma matriz $P = (p_{i,j})$ que armazena a seqüência de operações.

Comentário O algoritmo usa uma matriz $M = (m_{i,j}) \in \mathbb{N}^{(n+1)\times(m+1)}$ que armazena as distâncias mínimas $m_{i,j}$ entre os prefixos $s[1 \ldots i]$ e $t[1 \ldots j]$.

```
1  PD-distância(s,t,n,m):=
2     for i := 0,...,n do m_{i,0} = i; p_{i,0} := -1
3     for i := 1,...,m do m_{0,i} = i; p_{0,i} := -1
4     for i := 1,...,n do
5        for j := 1,...,m do
6           if (s_i = t_j) then
7              sol_0 = m_{i-1,j-1}
8           else
9              sol_0 = m_{i-1,j-1} + 1
10          end if
11          sol_1 := m_{i,j-1} + 1
12          sol_2 := m_{i-1,j} + 1
13          m_{i,j} := min(sol_0, sol_1, sol_2);
14          p_{i,j} := min{i | sol_i = m_{ij}}
15       end for
16    return m_{i,j}
```

Reconstrução da Seqüência de Operações

PD-OPERAÇÕES

Entrada Uma matriz $P = (p_{ij})$ de tamanho $n \times m$ com marcação de operações, strings s, t, posições i e j.

Saída Uma seqüência a_1, a_2, a_x de operações executadas.

```
1  PD-operações(P,s,t,i,j):=
2    case
3      p_{i,j} = -1:
4        return
5      p_{i,j} = 0:
6        PD-operações(s,t,i-1,j-1)
7        print ('M')
8      p_{i,j} = 1:
9        PD-operações(s,t,i,j-1)
10       print ('I')
11     p_{i,j} = 2:
12       PD-operações(s,t,i-1,j)
13       print ('D')
14   end case
```

O algoritmo possui complexidade de tempo e espaço $O(mn)$, sendo que o espaço são duas matrizes P e M. O espaço pode ser reduzido para $O(\min\{n, m\})$ usando uma adaptação do algoritmo de Hirschberg.

5.3 Problema da Mochila

Mochila (ingl. Knapsack)

Instância Um conjunto de n itens com valores v_i e peso w_i, $1 \leq i \leq n$, e um limite de peso da mochila W.

Solução Um subconjunto $S \subseteq [1, n]$ que cabe na mochila, i.e. $\sum_{i \in S} w_i \leq W$.

Objetivo Maximizar o valor total $\sum_{i \in S} v_i$ dos itens selecionados.

Idéia: Ou item i faz parte da solução ótima com itens $i \ldots n$ ou não.

- Caso sim: temos uma solução com valor v_i a mais do que a solução ótima para itens $i+1, \ldots, n$ com capacidade restante $W - w_i$.
- Caso não: temos um valor correspondente à solução ótima para itens $i+1, \ldots, n$ com capacidade W.

Seja $M(i, w)$ o valor da solução máxima para itens em $[i, n]$ e capacidade W. A idéia acima define uma recorrência

$$M(i,w) = \begin{cases} 0 & \text{se } i > n \text{ ou } w = 0 \\ M(i+1, w) & \text{se } w_i > w \text{ não cabe} \\ \max\{M(i+1,w), M(i+1, w-w_i) + v_i\} & \text{se } w_i \leq w \end{cases}$$

A solução desejada é $M(n, W)$. Para determinar a seleção de itens:

Mochila máxima (Knapsack)

- Seja $S^*(k, v)$ a solução de tamanho menor entre todas soluções que
  - usam somente itens $S \subseteq [1, k]$ e
  - tem valor exatamente v.
- Temos

$$\begin{aligned} S^*(k, 0) &= \emptyset \\ S^*(1, v_1) &= \{1\} \\ S^*(1, v) &= \text{undef} \qquad \text{para } v \neq v_1 \end{aligned}$$

Mochila máxima (Knapsack)

- S^* obedece a recorrência

$$S^*(k,v) = \min_{\text{tamanho}} \begin{cases} S^*(k-1, v-v_k) \cup \{k\} & \text{se } v_k \leq v \text{ e } S^*(k-1, v-v_k) \text{ definido} \\ S^*(k-1, v) \end{cases}$$

- Menor tamanho entre os dois

$$\sum_{i \in S^*(k-1, v-v_k)} t_i + t_k \leq \sum_{i \in S^*(k-1, v)} t_i.$$

- Melhor valor: Escolhe $S^*(n, v)$ com o valor máximo de v definido.
- Tempo e espaço: $O(n \sum_i v_i)$.

5.4 Multiplicação de Cadeias de Matrizes

Qual é a melhor ordem para multiplicar n matrizes $M = M_1 \times \cdots \times M_n$? Como o produto de matrizes é associativo, temos várias possibilidades de chegar em M. Por exemplo, com quatro matrizes temos as cinco possibilidades

Possíveis multiplicações
Dadas (M_1, M_2, M_3, M_4) pode-se obter $M_1 \times M_2 \times M_3 \times M_4$ de 5 modos distintos, mas resultando no mesmo produto

$$M_1(M_2(M_3M_4))$$
$$M_1((M_2M_3)M_4)$$
$$(M_1M_2)(M_3M_4)$$
$$(M_1(M_2M_3))M_4$$
$$((M_1M_2)M_3)M_4$$

- Podemos multiplicar duas matrizes somente se $Ncol(A) = Nlin(B)$
- Sejam duas matrizes com dimensões $p \cdot q$ e $q \cdot r$ respectivamente. O número de multiplicações resultantes é $p \cdot q \cdot r$.

Dependendo do tamanho dos matrizes, um desses produtos tem o menor número de adições é multiplicações. O produto de duas matrizes $p \times q$ e $q \times r$ precisa prq multiplicações e $pr(q-1)$ adições. No exemplo acima, caso temos matrizes do tamanho 3×1, 1×4, 4×1 e 1×5 as ordens diferentes resultam em

Número de multiplicações para cada seqüência

$$20 + 20 + 15 = 55$$
$$4 + 5 + 15 = 24$$
$$12 + 20 + 60 = 92$$
$$4 + 5 + 15 = 24$$
$$12 + 12 + 15 = 39$$

operações, respectivamente. Logo, antes de multiplicar as matrizes vale a pena determinar a ordem ótima (caso o tempo para determinar ela não é proibitivo). Dada uma ordem, podemos computar o número de adições e multiplicações

em tempo linear. Mas quantas ordens tem? O produto final consiste em duas matrizes que são os resultados dos produtos de i e $n-i$ matrizes; o ponto de separação i pode ser depois qualquer matriz $1 \leq i < n$. Por isso o número de possibilidades C_n satisfaz a recorrência

$$C_n = \sum_{1 \leq i < n} C_i C_{n-i}$$

para $n \geq 1$ e as condições $C_1 = 1$ e $C_2 = 1$. A solução dessa recorrência é $C_n = \binom{2n}{n}/(2(2n-1)) = O(4^n/n^{3/2})$ e temos $C_n \geq 2^{n-2}$, logo têm um número exponencial de ordens de multiplicação possíveis[1].

Solução por Recorrência
O número de possibilidades T_n satisfaz a recorrência

$$T(n) = \sum_{1 \leq i < n-1} T(i) \cdot T(n-i)$$

para $n \geq 1$ e as condições $T(1) = 1$.
A solução dessa recorrência é $T(n) = \binom{2n}{n}(2(2n-1)) = O(4^n/n^{3/2})$ e temos $C_n \geq 2^{n-2}$.
Então não vale a pena avaliar o melhor ordem de multiplicação, enfrentando um número exponencial de possibilidades? Não, existe uma solução com programação dinâmica, baseada na mesma observação que levou à nossa recorrência.

$$m_{ik} = \begin{cases} \min_{i \leq j < k} m_{ij} + m_{(j+1)k} + b_{i-1} b_j b_k & \text{caso } i < k \\ 0 & \text{caso } i = kx \end{cases}$$

Multiplicação de Cadeias de Matrizes

- Dada uma cadeia $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ de n matrizes, coloque o produto $A_1 A_2 \ldots A_n$ entre parênteses de forma a minimizar o número de multiplicações.

Algoritmo Multi-Mat-1
Retorna o número mínimo de multiplicações necessárias para multiplicar a cadeia de matrizes passada como parâmetro.

[1] Podemos obter uma solução usando funções geratrizes. $(C_{n-1})_{n \geq 1}$ são os números Catalan, que têm diversas aplicações na combinatórica.

MULTI-MAT-1

Entrada Cadeia de matrizes $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ e suas respectivas dimensões b_i, $0 \leq i \leq n$. A matrix A_i tem dimensão $b_{i-1} \times b_i$.

Saída Número mínimo de multiplicações.

```
1   for i:=1 to n do m_{i,j} := 0
2   for u:=1 to n-1 do {diagonais superiores}
3     for i:=1 to n-u do {posição na diagonal}
4       j:=i+u          {u = j - i}
5       m_{i,j} := ∞
6       for k:=i to j-1 do
7         c:= m_{i,k} + m_{k+1,j} + b_{i-1} · b_k · b_j
8         if c < m_{i,j} then m_{i,j}:=c
9       end for
10    end for
11  end for
12  return m_{1,n}
```

Considerações para a Análise

- O tamanho da entrada se refere ao número de matrizes a serem multiplicadas
- As operações aritméticas sobre os naturais são consideradas operações fundamentais

Análise de Complexidade do Algoritmo

$$C_p = \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-u} (1 + \sum_{k-i}^{j-1} 4) = \sum_{u=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-u} (1 + 4u)$$
$$= \sum_{u=1}^{n-1} (n-u)\dot{(}1 + 4u) = \sum_{u=1}^{n-1} n + 4nu - u - 4u^2 = O(n^3)$$

Análise de Complexidade do Algoritmo

$$C_p[\text{Inicialização}] = O(n)$$
$$C_p[\text{Iteração}] = O(n^3)$$
$$C_p[\text{Finalização}] = O(1)$$
$$C_p[\text{Algoritmo}] = O(n) + O(n^3) + O(1) = O(n^3)$$

Algoritmo Multi-Mat-2

Retorna o número mínimo de multiplicações e a parentização respectiva para multiplicar a cadeia de matrizes passada como parâmetro.

MULTI-MAT-1

Entrada Cadeia de matrizes $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ e suas respectivas dimensões armazenadas no vetor b.

Saída Número mínimo de multiplicações.

```
1  for i:=1 to n do m_{i,j} := 0 {inicializa diagonal principal}
2  for d:=1 to n-1 do { para todas diagonais superiores}
3    for i:=1 to n-u do { para cada posição na diagonal}
4      j:=i+u          {u=j  i}
5      m_{i,j} := ∞
6      for k:=i to j do
7        c:= m_{i,k} + m_{k+1,j} + b_{i-1} · b_k · b_j
8        if c < m_{i,j} then
9             m_{i,j}:=c
10            P_{i,j} = k
11     end for
12   end for
13 end for
14 return m_{1,n}, p
```

Algoritmo Print-Parentização

PRINT-PARENTIZAÇÃO

Entrada Matriz P, índices i e j .

Saída Impressão da parentização entre os índices i e j.

```
1  if i = j then
2     print "A_i"
3  else
4     print "("
5     Print−Parentização(P, i, P_{i,j})
6     Print−Parentização(P, P_{i,j} + 1, j)
7     print ")"
8  end if
```

5.5 Tópicos

5.5.1 Algoritmo de Floyd-Warshall

O algoritmo de Floyd-Warshall calcula o caminho mínimo entre todos os pares de vértices de um grafo.

Algoritmo de Floyd-Warshall

- Conteúdo disponível na seção 25.2 do Cormen, e Exemplo 5.2.4 (Laira&Veloso, 2^a edição).
- Calcula o caminho mínimo entre cada par de vértices de um grafo.
- Considera que o grafo não tenha ciclos negativos, embora possa conter arcos de custo negativo.

Subestrutura ótima

Subcaminhos de caminhos mais curtos são caminhos mais curtos.

- Lema 24.1 (Cormen): Dado um grafo orientado ponderado $G = (V, E)$, com função peso $w : E \to R$, seja $p = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ um caminho mais curto do vértice v_1 até o vértice v_k e, para quaisquer i e j tais que $1 \leq i \leq j \leq k$, seja $p_{ij} = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j)$ o subcaminho p desde o vértice v_i até o vértice v_j. Então, p_{ij} é um caminho mais curto de v_i até v_j.

Algoritmo de Floyd-Warshall

ALGORITMO DE FLOYD-WARSHALL

Entrada Um grafo $G = (V, E)$ com $n = |V|$ vértices, representado por uma matriz quadrada $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com distância d_{ij} entre $ij \in E$ ou $d_{ij} = \infty$, caso $ij \notin E$.

Saída Uma matriz quadrada com cada célula contendo a distância mínima entre i e j.

```
1  D^0 := D
2  for k := 1 to n
3      for i := 1 to n
```

```
4          for j := 1 to n
5              d_ij^k := min(d_ij^{k-1}, d_ik^{k-1} + d_kj^{k-1})
6  return D^n
```

Observe que não é necessário armazenar as matrizes D^k explicitamente. O algoritmo de Floyd-Warshall continua conrreto, usando a mesma matrix D para todas operações e portanto possui complexidade de espaço $\Theta(n^2)$.
No semi-anel tropical $(\mathbb{R}, \otimes, \oplus)$, a matriz D^k representa o menor caminho com no máximo k hops entre pares de vértices, e portanto D^n é a matriz calculada pelo algoritmo de Floyd-Warshall. Diferente dele, uma implementação direta possui complexidade $O(n^{\omega+1})$ com $O(n^\omega)$ a melhor complexidade de uma multiplicação de matrizes. Usando o algoritmo de Coppersmith e Winograd com $\omega < 2.376$, temos uma complexidade de $O(n^{3.376})$.
Como $D^i = D^n$ para $i \geq n$, podemos calcular $D^n = D^{\lceil \log_2 n \rceil}$ mais rápido levando D $\lceil \log_2 n \rceil$ vezes ao quadrado (veja os algoritmos de potênciação), uma abordagem que possui complexidade $O(n^3 \log n)$ com a multiplicação trivial e $O(n^{2.376} \log n)$ usando Coppersmith-Winograd.
TBD: This is bogus, but i don't see why. See f.ex. (Chan, 2007). Hmm, most probably Strassen works only in $(\mathbb{R}, \times, +)$, not in the tropical semi-ring.
TBD: Coppersmith-Winograd talk about the complexity of multiplications, so we probably cannot conclude so rapidly (for Strassen we can, see exercise 6.4.)
Observe que o algoritmo de Floyd-Warshall somento calcula as distâncias entre todos pares de vértices. Para determinar os caminhos mais curtos, veja por exemplo (Alon et al., 1992).

Exemplo

5.5.2 Caixeiro viajante

O problema de caixeiro viajante é um exemplo em que a programação dinâmica ajuda reduzir um trabalho exponencial. Esperadamente, o algoritmo final ainda é exponencial (o problema é NP-completo), mas significadamente menor.

Problema do Caixeiro Viajante

Instância Um grafo G=(V,E) com pesos d (distâncias) atribuídos aos links. $V = [1, n]$ sem perda de generalidade.

Solução Uma rota que visita todos vértices exatamente uma vez, i.e. uma permutação de $[1, n]$.

Objetivo Minimizar o custo da rota $\sum_{1 \leq i < n} d_{\{i,i+1\}} + d_{\{n,1\}}$.

O algoritmo é baseado na seguinte idéia (proposta por Bellman em 1962 (Bellman, 1962)). Seja $v_1, v_2, \ldots$ uma solução ótima. Sem perda de generalidade, podemos supor que $v_1 = 1$. Essa solução tem como sub-solução ótima o caminho $v_2, v_3, \ldots$ que passa por todos vértices exceto v_1 e volta. Da mesmo forma a última sub-solução tem o caminho $v_3, v_4, \ldots$ que passa por todos vértices exceto v_1, v_2 e volta, como sub-solução. Essa soluções têm sub-estrutura ótima, porque qualquer outro caminho menor pode ser substituído para o caminho atual.
Logo, podemos definir $T(i, V)$ como menor rota começando no vértice i e passando por todos vértices em V exatamente uma vez e volta para vértice 1. A solução desejada então é $T(1, [2, n])$. Para determinar o valor de $T(i, V)$ temos que minizar sobre todas continuações possíveis. Isso leva à recorrência

$$T(i, V) = \begin{cases} \min_{v \in V} d_{iv} + T(v, V \setminus \{v\}) & V \neq \emptyset \\ d_{i1} & \text{caso } V = \emptyset \end{cases}$$

Se ordenamos todos os sub-conjuntos dos vértices $[1, n]$ em ordem de $\subseteq$, obtemos uma matrix de dependências

	V_1	V_2	$\cdots$	V_{2^n}
1				
2				
$\vdots$				
n				

em que qualquer elemento depende somente de elementos em colunas mais para esquerda. Uma implementação pode representar uma subconjunto de $[1, n]$ como número entre 0 e $2^n - 1$. Nessa caso, a ordem natural já respeita a ordem $\subseteq$ entre os conjuntos, e podemos substituir um teste $v \in V_j$ com $2^v \& j = 2^v$ e a operação $V_j \setminus \{v\}$ com $j - 2^v$.

```
1   for i ∈ [1,n] do T_{i,0} := d_{i1} { base }
2   for j ∈ [1,2^n − 1] do
3     for i ∈ [1,n] do
4       T_{i,j} := min_{2^k & j = 2^k} d_{ik} + T_{i,j−2^k} { tempo O(n) ! }
```

```
5       end for
6     end for
```

A complexidade de tempo desse algoritmo é $n^2 2^n$ porque a minimzação na linha 4 precisa $O(n)$ operações. A complexidade do espação é $O(n2^n)$. Essa é atualmente o melhor algoritmo exato conhecido para o problema do caixeiro viajante (veja também xkcd.com/399).

5.5.3 Árvore de busca binária ótima

Motivação para o Problema

- Suponha que temos um conjunto de chaves com probabilidades de busca conhecidas.
- Caso a busca é repetida muitas vezes, vela a pena construir uma estrutura de dados que minimiza o tempo médio para encontrar uma chave.
- Uma estrutura de busca eficiente é uma árvore binária.

Portanto, vamos investigar como construir a árvore binária ótima. Para um conjunto de chaves com distribuição de busca conhecida, queremos minimizar o número médio de comparações (nossa medida de custos).

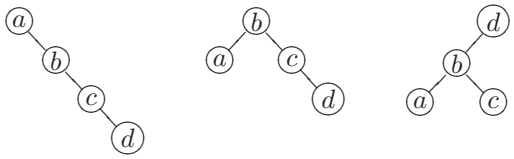
Exemplo 5.1
Considere a seqüência ordenada $a < b < c < d$ e as probabilidades

Exemplo

Elemento	a	b	c	d
Pr	0.2	0.1	0.6	0.1

qual seria uma árvore ótima? Alguns exemplos

Árvore correspondente



que têm um número médio de comparações $0.2\times1+0.1\times2+0.6\times3+0.1\times4 = 2.6$, $0.2\times2+0.1\times1+0.6\times2+0.1\times3 = 2.0$, $0.2\times3+0.1\times2+0.6\times3+0.1\times1 = 2.7$, respectivamente. ◊

Árvore de Busca Binária Ótima

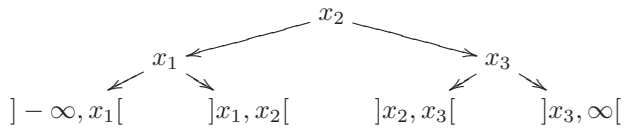
Em geral, temos que considerar não somente as probabilidades que procure-se uma dada chave, mas também as probabilidades que uma chave procurada não pertence à árvore. Logo supomos que temos

1. uma seqüência ordenada $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ de n chaves e
2. probabilidades

$$\Pr[c < a_1], \Pr[c = a_1], \Pr[a_1 < c < a_2], \ldots \\ \ldots, \Pr[a_{n-1} < c < a_n], \Pr[c = a_n], \Pr[a_n < c]$$

que a chave procurada c é uma das chaves da seqüência ou cai num intervalo entre elas.

A partir dessas informações queremos minimizar a complexidade média da busca. Em uma dada árvore, podemos observar que o número de comparações para achar uma chave existente é igual a profundidade dela na árvore (começando com profundidade 1 na raiz). Caso a chave não pertence à árvore, podemos imaginar chaves artificiais que representam os intervalos entre as chaves, e o número de comparações necessárias é um menos que a profundidade de uma chave artificial. Um exemplo de uma árvore com chaves artificiais (representadas pelos intervalos correspondentes) é



Para facilitar a notação, vamos introduzir chaves adicionais $a_0 = -\infty$ e $a_{n+1} = \infty$. Com isso, obtemos a complexidade média de busca

$$c_M = \sum_{1 \le i \le n} \Pr[c = a_i]\text{prof}(a_i) + \sum_{0 \le i \le n} \Pr[a_i < c < a_{i+1}](\text{prof}(]a_i, a_{i+1}[) - 1);$$

ela depende da árvore concreta.

Como achar a árvore ótima? A observação crucial é a seguinte: *Uma das chaves deve ser a raiz e as duas sub-árvores da esquerda e da direita devem ser árvores ótimas pelas sub-seqüências correspondentes.*

Para expressar essa observação numa equação, vamos denotar com $c_M(e, d)$ a complexidade média de uma busca numa sub-árvore ótima para os elementos $a_e, \ldots, a_d$. Para a complexidade da árvore inteira, definido acima, temos $c_M = c_M(1, n)$. Da mesmo forma, obtemos

$$c_M(e,d) = \sum_{e \le i \le d} \Pr[c = a_i]\text{prof}(a_i) + \sum_{e-1 \le i \le d} \Pr[a_i < c < a_{i+1}](\text{prof}(]a_i, a_{i+1}[) - 1)$$

Wichtig: Die Wahrscheinlichkeiten werden nicht erneut normalisiert, d.h. $c_M(e,d)$ wird mit den originalen Wahrscheinlichkeiten berechnet. Weitere Subtilität bei Teilbäumen: der obige Ausdruck $\Pr[a_i < c < a_{i+1}]$ stellt keine Kosten dar, wenn die Wahrscheinlichkeit an den Rändern bis ∞ ausgedehnt wird.

Árvore de Busca Binária Ótima
Supondo que a_r é a raiz desse sub-árvore, essa complexidade pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
c_M(e,d) &= \Pr[c = a_r] \\
&\quad + \sum_{e \le i < r} \Pr[c = a_i]\text{prof}(a_i) + \sum_{e-1 \le i < r} \Pr[a_i < c < a_{i+1}](\text{prof}(]a_i, a_{i+1}[) - 1) \\
&\quad + \sum_{r < i \le d} \Pr[c = a_i]\text{prof}(a_i) + \sum_{r \le i \le d} \Pr[a_i < c < a_{i+1}](\text{prof}(]a_i, a_{i+1}[) - 1) \\
&= \left(\sum_{e-1 \le i \le d} \Pr[a_i < c < a_{i+1}] + \sum_{e \le i \le d} \Pr[c = a_i] \right) \\
&\quad + c_M(e, r-1) + c_M(r+1, d) \\
&= \Pr[a_{e-1} < c < a_{d+1}] + c_M(e, r-1) + c_M(r+1, d)
\end{aligned}$$

Árvore de Busca Binária Ótima
(O penúltimo passo é justificado porque, passando para uma sub-árvore a profundidade e um a menos.) Essa equação define uma recorrência para a complexidade média ótima: Escolhe sempre a raiz que minimiza essa soma. Como base temos complexidade $c_M(e,d) = 0$ se $d > e$:

$$c_M(e,d) = \begin{cases} \min_{e \le r \le d} \Pr[a_{e-1} < c < a_{d+1}] + c_M(e, r-1) + c_M(r+1, d) & \text{caso } e \le d \\ 0 & \text{caso } e > d \end{cases} \tag{5.1}$$

Árvore de Busca Binária Ótima

Ao invés de calcular o valor c_M recursivamente, vamos usar a programação (tabelação) dinâmica com três tabelas:

- c_{ij}: complexidade média da árvore ótima para as chaves a_i até a_j, para $1 \leq i \leq n$ e $i-1 \leq j \leq n$.
- r_{ij}: raiz da árvore ótima para as chaves a_i até a_j, para $1 \leq i \leq j \leq n$.
- p_{ij}: $\Pr[a_{i-1} < c < a_{j+1}]$

Árvore de Busca Binária Ótima

ABB-ÓTIMA

Entrada Probabilidades $p_i = \Pr[c = a_i]$ e $q_i = \Pr[a_i < c < a_{i+1}]$.

Saída Vetores c e r como descrita acima.

```
1  for i:=1 to n+1 do
2    p_{i(i-1)}:=q_{i-1}
3    c_{i(i-1)}:=0
4  end for
5
6  for d:=0 to n-1 do { para todas diagonais }
7    for i:=1 to n-d do { da chave i }
8      j:=d+i          { até chave j }
9      p_{ij}:=p_{i(j-1)} + p_j + q_j
10     c_{ij}:=∞
11     for r:=i to j do
12       c:= p_{ij} + c_{i(r-1)} + c_{(r+1)j}
13       if c < c_{ij} then
14         c_{ij}:=c
15         r_{ij}:=r
16     end for
17   end for
18 end for
```

TBD: Illustrate the dependencies and the initial values for c and p. The dependencies are like in the matrix multiplication case. Show the diagonal axis etc.

Also, we need an example to illustrate the algorithm.

$-\infty$	$]-\infty, a[$	a	$]a, b[$	b	$]b, c[$	c	$]c, d[$	d	$]d, \infty[$	∞
	0.04	0.2	0.04	0.1	0.04	0.4	0.04	0.1	0.04	
a_0		a_1		a_2		a_3		a_4		a_5

i/j	1	2	3	$\cdots$	n
1					
2					
·					
·					
n					

Finalmente, queremos analisar a complexidade desse algoritmo. São três laços, cada com não mais que n iterações e com trabalho constante no corpo. Logo a complexidade pessimista é $O(n^3)$.

5.6 Exercícios

Exercício 5.1
Da três exemplos de problemas que não possuem uma subestrutura ótima, i.e. a solução ótima de um problema não contém soluções ótimas de subproblemas.

6 Divisão e conquista

6.1 Introdução

Método de Divisão e Conquista

- Dividir o problema original em um determinado número de subproblemas independentes
- Conquistar os subproblemas, resolvendo-os recursivamente até obter o caso base.
- Combinar as soluções dadas aos subproblemas, a fim de formar a solução do problema original.

Recorrências

- O tempo de execução dos algoritmos recursivos pode ser descrito por uma recorrência.
- Uma recorrência é uma equação ou desigualdade que descreve uma função em termos de seu valor em entradas menores.

Divisão e conquista

DC

Entrada Uma instância I de tamanho n.

```
1  if n = 1 then
2    return Solução direta
3  else
4    Divide I em sub instâncias I_1,...,I_k, k > 0
5      com tamanhos n_i < n.
6    Resolve recursivamente: I_1,...,I_k.
7    Resolve I usando sub soluções DC(I_1),...,DC(I_k).
8  end if
```

Recursão natural

- Seja $d(n)$ o tempo para a divisão.
- Seja $s(n)$ o tempo para computar a solução final.
- Podemos somar: $f(n) = d(n) + s(n)$ e obtemos

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{para } n < n_0 \\ \sum_{1 \le i \le k} T(n_i) + f(n) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Recursão natural: caso balanceado

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{para } n < n_0 \\ kT(\lceil n/m \rceil) + f(n) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mergesort

MERGESORT

Entrada Índices p, r e um vetor A com elementos $A_p, \ldots, A_r$

Saída A com elementos em ordem não-decrescente, i.e. para $i < j$ temos $A_i \le A_j$.

```
1  if p < r then
2      q = ⌊(p+r)/2⌋
3      MergeSort(A,p,q);
4      MergeSort(A,q+1,r);
5      Merge(A,p,q,r)
6  end if
```

Recorrências simplificadas

Formalmente, a equação de recorrência do Mergesort é

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

Em vez de

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

Para simplificar a equação, sem afetar a análise de complexidade correspondente, em geral:

- supõe-se argumentos inteiros para funções (omitindo pisos e tetos)
- omite-se a condição limite da recorrência

Recorrências: caso do Mergesort
A equação de recorrência do Mergesort é

$$T(n) = 2T(n/2) + \Theta(n)$$

Sendo que:

- T(n) representa o tempo da chamada recursiva da função para um problema de tamanho n.
- $2T(\frac{n}{2})$ indica que, a cada iteração, duas chamadas recursivas (2T) serão executadas para entradas de tamanho $\frac{n}{2}$.
- Os resultados das duas chamadas recursivas serão combinados (*merged*) com um algoritmo com complexidade de pior caso $\Theta(n)$.

6.2 Resolver recorrências

Métodos para resolver recorrências
Existem vários métodos para resolver recorrências:

- Método da substituição
- Método de árvore de recursão
- Método mestre

6.2.1 Método da substituição

Método da substituição

- O método da substituição envolve duas etapas:
  1. pressupõe-se um limite hipotético.
  2. usa-se indução matemática para provar que a suposição está correta.
- Aplica-se este método em casos que é fácil pressupor a forma de resposta.
- Pode ser usado para estabelecer limites superiores ou inferiores.

Mergesort usando o método da substituição
Supõe-se que a recorrência

$$T(n) = 2T\big(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\big) + n$$

tem limite superior igual a $n \log n$, ou seja, $T(n) = O(n \log n)$. Devemos provar que $T(n) \leq cn \log n$ para uma escolha apropriada da constante $c > 0$.

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 2\big(c\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \log(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n\big) \\ &\leq cn \log n/2 + n = cn \log n - cn + n \\ &\leq cn \log n \end{aligned}$$

para $c \geq 1$.
A expressão na equação

$$c \cdot n \log n \underbrace{-c \cdot n + n}_{\text{residuo}}$$

se chama *resíduo*. O objetivo na prova é mostrar, que o resíduo é negativo.

Como fazer um bom palpite

- Usar o resultado de recorrências semelhantes. Por exemplo, considerando a recorrência $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor + 17) + n$, tem-se que $T(n) \in O(n \log n)$.
- Provar limites superiores (ou inferiores) e reduzir o intervalo de incerteza. Por exemplo, para equação do Mergesort podemos provar que $T(n) = \Omega(n)$ e $T(n) = O(n^2)$. Podemos gradualmente diminuir o limite superior e elevar o inferior, até obter $T(n) = \Theta(n \log n)$.

- Usa-se o resultado do método de árvore de recursão como limite hipotético para o método da substituição.

Exemplo 6.1
Vamos procurar o máximo de uma seqüência por divisão é conquista:

MÁXIMO

Entrada Uma seqüência a e dois índices l, r tal que $a_l, \ldots, a_{r-1}$ é definido.

Saída $\max_{l \le i < r} a_i$

```
1  m_1 := M(a, l, ⌊(l + r)/2⌋
2  m_2 := M(a, ⌊(l + r)/2, r⌋
```

Isso leva a recorrência

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$$

$\Diamond$

Algumas sutilezas nas resoluções

- Considere a recorrência $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil) + 1$. Prove que $T(n) = O(n)$
- Considere a recorrência $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$. É possível provar que $T(n) = O(n)$?
- Considere a recorrência $T(n) = 2T(\lfloor \sqrt{n} \rfloor) + \log n$. Prove que $T(n) = O(\log n \log \log n)$

Proposta de exercícios: 4.1-1, 4.1-2, 4.1-5 e 4.1-6 do Cormen (pág. 54 da edição traduzida).

Substituição direta

- Supomos que a recorrência tem a forma

$$T(n) = \begin{cases} f(1) & \text{caso } n = 1 \\ T(n-1) + f(n) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- Para resolver ele podemos substituir

$$T(n) = f(n) + T(n-1) = f(n) + f(n-1) + T(n-1) + f(n-2)$$
$$= \cdots = \sum_{1 \le i \le n} f(i)$$

(Os $\cdots$ substituem uma prova por indução.)

É simples de generalizar isso para

$$\begin{aligned} T(n) &= T(n/c) + f(n) \\ &= f(n) + f(n/c) + f(n/c^2) + \cdots \\ &= \sum_{0 \le i \le log_c n} f(n/c^i) \end{aligned}$$

Exemplo 6.2
Na aula sobre a complexidade média do algoritmo Quicksort (veja página 61), encontramos uma recorrência da forma

$$T(n) = n + T(n-1)$$

cuja solução é $\sum_{1 \le i \le n} i = n(n-1)/2$. ◊

Substituição direta

- Da mesma forma podemos resolver recorrências como

$$T(n) = \begin{cases} f(1) & \text{caso } n = 1 \\ T(n/2) + f(n) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- substituindo

$$T(n) = f(n) + T(n/2) = f(n) + f(n/2) + T(n/4)$$
$$= \cdots = \sum_{0 \le i \le \log_2 n} f(n/2^i)$$

Exemplo 6.3
Ainda na aula sobre a complexidade média do algoritmo Quicksort (veja página 61), encontramos outra recorrência da forma

$$T(n) = n + 2T(n/2).$$

Para colocá-la na forma acima, vamos dividir primeiro por n para obter

$$T(n)/n = 1 + T(n/2)/(n/2)$$

e depois substituir $A(n) = T(n)/n$, que leva à recorrência

$$A(n) = 1 + A(n/2)$$

cuja solução é $\sum_{0 \le i \le \log_2 n} 1 = \log_2 n$. Portanto temos a solução $T(n) = n \log_2 n$.
Observe que a análise não considera constantes: qualquer função $cn \log_2 n$ também satisfaz a recorrência. A solução exata é determinada pela base; uma alternativa é concluir que $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$. $\Diamond$

Também podemos generalizar isso. Para

$$f(n) = 2f(n/2)$$

é simples de ver que

$$f(n) = 2f(n/2) = 2^2 f(n/4) = \cdots = 2^{\log_2 n} n = n$$

(observe que toda função $f(n) = cn$ satisfaz a recorrência).
Generalizando obtemos

$$f(n) = cf(n/2) = \cdots = c^{\log_2 n} = n^{log_2 c}$$
$$f(n) = c_1 f(n/c_2) = \cdots = c_1^{\log_{c_2} n} = n^{log_{c_2} c_1}$$

O caso mais complicado é o caso combinado

$$T(n) = c_1 T(n/c_2) + f(n).$$

O nosso objetivo é nos livrar da constante c_1. Se dividimos por $c_1^{\log_{c_2} n}$ obtemos

$$\frac{T(n)}{c_1^{\log_{c_2} n}} = \frac{T(n/c_2)}{c_1^{\log_{c_2} n/c_2}} + \frac{f(n)}{c_1^{\log_{c_2} n}}$$

e substituindo $A(n) = T(n)/c_1^{\log_{c_2} n}$ temos

$$A(n) = A(n/c_2) + \frac{f(n)}{c_1^{\log_{c_2} n}}$$

uma forma que sabemos resolver:

$$A(n) = \sum_{0 \le i \le \log_{c_2} n} \frac{f(n/c_2^i)}{c_1^{\log_{c_2} n / c_2^i}} = \frac{1}{c_1^{\log_{c_2} n}} \sum_{0 \le i \le \log_{c_2} n} f(n/c_2^i) c_1^i$$

Após de resolver essa recorrência, podemos re-substituir para obter a solução de $T(n)$.

Exemplo 6.4 (Multiplicação de números inteiros)
A multiplicação de números binários (veja exercício 6.3) gera a recorrência

$$T(n) = 3T(n/2) + cn$$

Dividindo por $3^{\log_2 n}$ obtemos

$$\frac{T(n)}{3^{\log_2 n}} = \frac{T(n/2)}{3^{\log_2 n/2}} + \frac{cn}{3^{\log_2 n}}$$

e substituindo $A(n) = T(n)/3^{\log_2 n}$ temos

$$\begin{aligned} A(n) &= A(n/2) + \frac{cn}{3^{\log_2 n}} \\ &= c \sum_{0 \le i \le \log_2 n} \frac{n/2^i}{3^{\log_2 n/2^i}} \\ &= \frac{cn}{3^{\log_2 n}} \sum_{0 \le i \le \log_2 n} \left(\frac{3}{2}\right)^i \\ &= \frac{cn}{3^{\log_2 n}} \frac{(3/2)^{\log_2 n + 1}}{1/2} = 3c \end{aligned}$$

e portanto

$$T(n) = A(n) 3^{\log_2 n} = 3cn^{\log_2 3} = \Theta(n^{1.58})$$

◊

6.2.2 Método da árvore de recursão

O método da árvore de recursão
Uma árvore de recursão apresenta uma forma bem intuitiva para a análise de complexidade de algoritmos recursivos.

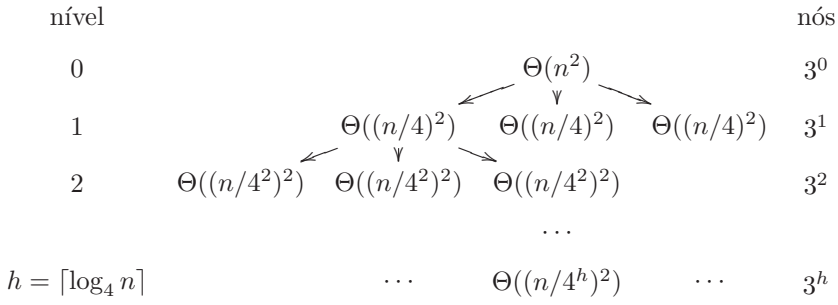
- Numa árvore de recursão cada nó representa o custo de um único subproblema da respectiva chamada recursiva

- Somam-se os custos de todos os nós de um mesmo nível, para obter o custo daquele nível
- Somam-se os custos de todos os níveis para obter o custo da árvore

Exemplo
Dada a recorrência $T(n) = 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + \Theta(n^2)$

- Em que nível da árvore o tamanho do problema é 1? No nível $i = \log_4 n = \frac{\log_2 n}{2}$.
- Quantos níveis tem a árvore? A árvore tem $\log_4 n + 1$ níveis (0, 1, 2, 3, ..., $\log_4 n$).
- Quantos nós têm cada nível? 3^i.
- Qual o tamanho do problema em cada nível? $\frac{n}{4^i}$.
- Qual o custo de cada nível i da árvore? $3^i c(\frac{n}{4^i})^2$.
- Quantos nós tem o último nível? $\Theta(n^{\log_4 3})$.
- Qual o custo da árvore? $\sum_{i=0}^{\log_4(n)} n^2 \cdot (3/16)^i = O(n^2)$.

Exemplo



Prova por substituição usando o resultado da árvore de recorrência

- O limite de $O(n^2)$ deve ser um limite restrito, pois a primeira chamada recursiva é $\Theta(n^2)$.

- Prove por indução que $T(n) = \Theta(n^2)$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 3T(\lfloor n/4 \rfloor) + cn^2 \\ &\leq 3d\lfloor n/4 \rfloor^2 + cn^2 \\ &\leq 3d(n/4)^2 + cn^2 \\ &= \frac{3}{16}dn^2 + cn^2 \leq dn^2 \end{aligned}$$

  para $(\frac{3d}{16} + c) \leq d$, ou seja, para valores de d tais que $d \geq \frac{16}{13}c$

Exemplo 6.5
Outro exemplo é a recorrência $T(n) = 3T(n/2) + cn$ da multiplicação de números binários. Temos $\log_2 n$ níveis na árvore, o nível i com 3^i nós, tamanho do problema $n/2^i$, trabalho $cn/2^i$ por nó e portanto $(3/2)^i n$ trabalho total por nível. O número de folhas é $3^{\log_2 n}$ e portanto temos

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{0 \leq i < \log_2 n} (3/2)^i n + \Theta(3^{\log_2 n}) \\ &= n\left(\frac{(3/2)^{\log_2 n} - 1}{3/2 - 1}\right) + \Theta(3^{\log_2 n}) \\ &= 2(n^{\log_2 3} - 1) + \Theta(n^{\log_2 3}) \\ &= \Theta(n^{\log_2 3}) \end{aligned}$$

Observe que a recorrência $T(n) = 3T(n/2) + c$ tem a mesma solução. ◊

Resumindo o método

1. Desenha a árvore de recursão
2. Determina
   - o número de níveis
   - o número de nós e o custo por nível
   - o número de folhas
3. Soma os custos dos níveis e o custo das folhas
4. (Eventualmente) Verifica por substituição

Árvore de recorrência: ramos desiguais
Calcule a complexidade de um algoritmo com a seguinte equação de recorrência

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n)$$

Proposta de exercícios: 4.2-1, 4.2-2 e 4.2-3 do Cormen (**?**).

6.2.3 Método Mestre

Método Mestre
Para aplicar o método mestre deve ter a recorrência na seguinte forma:

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

onde $a \geq 1$, $b > 1$ e $f(n)$ é uma função assintoticamente positiva. Se a recorrência estiver no formato acima, então $T(n)$ é limitada assintoticamente como:

1. Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para algum $\epsilon > 0$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$
3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para algum $\epsilon > 0$, e se $af(n/b) \leq cf(n)$ para $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$

Considerações

- Nos casos 1 e 3 $f(n)$ deve ser polinomialmente menor, resp. maior que $n^{\log_b a}$, ou seja, $f(n)$ difere assintoticamente por um fator n^ϵ para um $\epsilon > 0$.
- Os três casos não abrangem todas as possibilidades

Proposta de exercícios: 6.1 e 6.2.

Algoritmo Potenciação

Potenciação-Trivial (PT)

Entrada Uma base $a \in \mathbb{R}$ e um exponente $n \in \mathbb{N}$.

Saída A potência a^n.

```
1  if n = 0
2    return 1
3  else
4    return PT(a, n − 1) × a
5  end if
```

Complexidade da potenciação

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0 \\ T(n-1) + 1 & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

A complexidade dessa recorrência é linear, ou seja, $T(n) \in O(n)$

Algoritmo Potenciação para $n = 2^i$

Potenciação-Npotência2 (P2)

Entrada Uma base $a \in \mathbb{R}$ e um exponente $n \in \mathbb{N}$.

Saída A potência a^n.

```
1  if n = 1 then
2    return a
3  else
4     x := P2(a , n ÷ 2)
5     return x × x
6  end if
```

Complexidade da potenciação-Npotência2

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 0 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c & \text{se } n > 0 \end{cases}$$

A complexidade dessa recorrência é logarítmica, ou seja, $T(n) \in O(\log n)$

Busca Binária

BUSCA-BINÁRIA(I,F,X,S)

Entrada Um inteiro x, índices i e f e uma seqüência $S = a_1, a_2, \ldots a_n$ de números ordenados.

Saída Posição i em que x se encontra na seqüência S ou ∞ caso $x \notin S$.

```
1  if i = f then
2    if a_i = x return i
3    else return ∞
4  end if
5  m := ⌊(f−i)/2⌋ + i
6  if x < a_m then
7    return Busca Binária(i, m−1)
8  else
9    return Busca Binária(m+1, f)
10 end if
```

Complexidade da Busca-Binária

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + c & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

A complexidade dessa recorrência é logarítmica, ou seja, $T(n) \in O(\log n)$

Quicksort

QUICKSORT

Entrada Índices l, r e um vetor a com elementos $a_l, \ldots, a_r$.

Saída a com os elementos em ordem não-decrescente, i.e. para $i < j$ temos $a_i \leq a_j$.

```
1  if l < r then
2    m := Partition(l,r,a);
3    Quicksort(l,m−1,a);
```

```
4     Quicksort(m+1,r,a);
5  end if
```

Complexidade do Quicksort no pior caso

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

A complexidade dessa recorrência é quadrática, ou seja, $T(n) \in O(n^2)$

Complexidade do Quicksort no melhor caso

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ 2T(\frac{n}{2}) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

A complexidade dessa recorrência é $T(n) \in O(n \log n)$

Complexidade do Quicksort com Particionamento Balanceado

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(\frac{9n}{10}) + T(\frac{n}{10}) + \Theta(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

A complexidade dessa recorrência é $T(n) \in O(n \log n)$
Agora, vamos estudar dois exemplos, em que o método mestre não se aplica.

Exemplo 6.6 (Contra-exemplo 1)
Considere a recorrência $T(n) = 2T(n/2)+n \log n$. Nesse caso, a função $f(n) = n \log n$ não satisfaz nenhum dos critérios do teorema Mestre (ela fica "entre" casos 2 e 3), portanto temos que analisar com árvore de recorrência que resulta em

$$T(n) = \sum_{0 \leq i < \log_2 n} (n \log n - in) + \Theta(n) = \Theta(n \log^2 n)$$

$\Diamond$

Exemplo 6.7 (Contra-exemplo 2)
Considere a recorrência $T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$. De novo, a função $f(n) = n/\log n$ não satisfaz nenhum dos critérios do teorema Mestre (ela fica "entre" casos 1 e 2). Uma análise da árvore de recorrência resulta em

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{0 \le i < \log_2 n} (n/(\log n - i)) + \Theta(n) \\ &= \sum_{1 \le j \le \log n} n/j + \Theta(n) = nH_n + \Theta(n) = \Theta(n \log\log n) \end{aligned}$$

$\Diamond$

Prova do Teorema Master

- Consideremos o caso simplificado em que $n = 1, b, b^2, ...$, ou seja, n é uma potência exata de dois e assim não precisamos nos preocupar com tetos e pisos.

Prova do Teorema Master
Lema 4.2: Sejam $a \ge 1$ e $b > 1$ constantes, e seja $f(n)$ uma função não negativa definida sobre potências exatas de b. Defina $T(n)$ sobre potências exatas de b pela recorrência:

$$\begin{cases} T(n) = \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n) & \text{se } n = b^i \end{cases}$$

onde i é um inteiro positivo. Então

$$T(n) = \Theta(n^{log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b(n-1)} a^j \cdot f(n/b^j)$$

Prova do Teorema Master
Lema 4.4: Sejam $a \ge 1$ e $b > 1$ constantes, e seja $f(n)$ uma função não negativa definida sobre potências exatas de b. Uma função $g(n)$ definida sobre potências exatas de b por

$$g(n) = \sum_{j=0}^{\log_b(n-1)} a^j \cdot f(n/b^j)$$

1. Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para algum $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}^+$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot lgn)$
3. Se $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ para $c < 1$ e para todo $n \geq b$, então $g(n) = \Theta(f(n))$

Prova do Teorema Master
Lema 4.4: Sejam $a \geq 1$ e $b > 1$ constantes, e seja $f(n)$ uma função não negativa definida sobre potências exatas de b. Defina $T(n)$ sobre potências exatas de b pela recorrência

$$\begin{cases} T(n) = \Theta(1) & \text{se } n = 1 \\ T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n) & \text{se } n = b^i \end{cases}$$

onde i é um inteiro positivo. Então $T(n)$ pode ser limitado assintoticamente para potências exatas de b como a seguir:

Prova do Método Mestre

1. Se $f(n) = O(n^{\log_b a - \epsilon})$ para algum $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}^+$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$
2. Se $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, então $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot lgn)$
3. Se $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \epsilon})$ para algum $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}^+$, e se $a \cdot f(n/b) \leq c \cdot f(n)$ para $c < 1$ e para todo n suficientemente grande, então $T(n) = \Theta(f(n))$

6.2.4 Um novo método Mestre

O método Master se aplica somente no caso que a árvore de recursão está balanceado. O método de *Akra-Bazzi* (Akra and Bazzi, 1998) é uma generalização do método Master, que serve também em casos não balanceados[1]. O que segue é uma versão generalizada de Leighton (1996).

Teorema 6.1 (Método Akra-Bazzi e Leighton)
Dado a recorrência

$$T(x) = \begin{cases} \Theta(1) & \text{se } x \leq x_0 \\ \sum_{1 \leq i \leq k} a_i T(b_i x + h_i(x)) + g(x) & \text{caso contrário} \end{cases}$$

com constantes $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$ e funções g, h, que satisfazem

$$|g'(x)| \in O(x^c); \qquad |h_i(x)| \leq x / \log^{1+\epsilon} x$$

[1] Uma abordagem similar foi proposta por (Roura, 2001).

para um $\epsilon > 0$ e a constante x_0 e suficientemente grande[2] temos que

$$T(x) \in \Theta\left(x^p\left(1 + \int_1^x \frac{g(u)}{u^{p+1}}du\right)\right)$$

com p tal que $\sum_{1\leq i\leq k} a_i b_i^p = 1$.

As funções $h_i(x)$ servem particularmente para aplicar o teorema para com pisos e tetos. Com

$$h_i(x) = \lceil b_i x\rceil - b_i x$$

(que satisfaz a condição de h, porque $h_i(x) \in O(1)$) obtemos a recorrência

$$T(x) = \begin{cases}\Theta(1) & \text{se } x \leq x_0\\ \sum_{1\leq i\leq k} a_i T(\lceil b_i x\rceil) + g(x) & \text{caso contrário}\end{cases}$$

demonstrando que obtemos a mesmo solução aplicando tetos.

Exemplo 6.8
Considere a recorrência

$$T(n) = T(n/5) + T(7n/10 + 6) + O(n)$$

(que ocorre no algoritmo da seleção do k-ésimo elemento). Primeiro temos que achar um p tal que $(1/5)^p + (7/10)^p = 1$ que é o caso para $p \approx 0.84$. Com isso, teorema (6.1) afirma que

$$\begin{aligned} T(n) \in \Theta(n^p + (1 + \int_1^n c_1 u/u^{p+1}du)) &= \Theta(n^p(1 + c_1\int_1^n u^{-p}du))\\ &= \Theta(n^p(1 + \frac{c_1}{1-p}n^{1-p}))\\ &= \Theta(n^p + \frac{c_1}{1-p}n) = \Theta(n)\end{aligned}$$

◊

Exemplo 6.9
Considere $T(n) = 2T(n/2)+n\log n$ do exemplo 6.6 (que não pode ser resolvido pelo teorema Master). $2(1/2)^p = 1$ define $p = 1$ e temos

$$\begin{aligned} T(n) \in \Theta(n + (1 + \int_1^n \log u/u\, du)) &= \Theta(n(1 + [\log^2(u)/2]_1^n)\\ &= \Theta(n(1 + \log^2(n)/2))\\ &= \Theta(n\log^2(n))\end{aligned}$$

◊

[2] As condições exatas são definidas em Leighton (1996).

Exemplo 6.10
Considere $T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$ do exemplo 6.7 (que não pode ser resolvido pelo teorema Master). Novamente $p = 1$ e temos

$$\begin{aligned} T(n) \in \Theta(n + (1 + \int_1^n 1/(u \log u)\, du)) &= \Theta(n(1 + [\log\log u]_1^n) \\ &= \Theta(n(1 + \log\log n)) \\ &= \Theta(n \log(\log n)) \end{aligned}$$

$\Diamond$

6.3 Tópicos

O algoritmo de Strassen

No capítulo 2.2.2 analisamos um algoritmo para multiplicar matrizes quadradas de tamanho (número de linhas e colunas) n com complexidade de $O(n^3)$ multiplicações. Mencionamos que existem algoritmos mais eficientes. A idéia do algoritmo de Strassen (1969) é: subdivide os matrizes num produto $A \times B = C$ em quatro sub-matrizes com a metade do tamanho (e, portanto, um quarto de elementos):

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \times \left(\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} C_{11} & C_{12} \\ \hline C_{21} & C_{22} \end{array}\right).$$

Com essa subdivisão, o produto AB obtem-se pelas equações

$$\begin{aligned} C_{11} &= A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} \\ C_{12} &= A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ C_{21} &= A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} \\ C_{22} &= A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{aligned}$$

e precisa-se de oito multiplicações de matrizes de tamanho $n/2$ ao invés de uma multiplicação de matrizes de tamanho n. A recorrência correspondente, considerando somente multiplicações é

$$T(n) = 8T(n/2) + O(1)$$

e possui solução $T(n) = O(n^3)$, que demonstra que essa abordagem não é melhor que algoritmo simples. Strassen inventou as equações

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A_{11} + A_{22})(B_{11} + B_{22}) \\
M_2 &= (A_{21} + A_{22})B_{11} \\
M_3 &= A_{11}(B_{12} - B_{22}) \\
M_4 &= A_{22}(B_{21} - B_{11}) \\
M_5 &= (A_{11} + A_{12})B_{22} \\
M_6 &= (A_{21} - A_{11})(B_{11} + B_{12}) \\
M_7 &= (A_{12} - A_{22})(B_{21} + B_{22}) \\
C_{11} &= M_1 + M_4 - M_5 + M_7 \\
C_{12} &= M_3 + M_5 \\
C_{21} &= M_2 + M_4 \\
C_{22} &= M_1 - M_2 + M_3 + M_6
\end{aligned}$$

(cuja verificação é simples). Essas equações contém somente *sete* multiplicações de matrizes de tamanho $n/2$, que leva à recorrência

$$T(n) = 7T(n/2) + O(1)$$

para o número de multiplicações, cuja solução é $T(n) = O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.81})$.

Combinação de seqüências ordenadas

Na análise da complexidade do Mergesort, atribuirmos uma complexidade de $O(n)$ ao combinação de dois vetores ordenados. Uma implementação simples usa um vetor auxiliar
TBD: Coloca o algoritmo aqui.
Qual seria uma solução, caso queremos combinar os vetores sem gastar o dobro do espaço, i.e. se queremos combinar na própria entrada (ingl. in-place merge)? Algoritmos simples e eficientes para esse problema são recentes. Um exemplo é *SplitMerge*, que um algoritmo de divisão e conquista:
TBD: give implementation, cite paper
TBD: give example
TBD: exercício com análise da complexidade.

6.4 Exercícios

(Soluções a partir da página 246.)

Exercício 6.1
Resolva os seguintes recorrências

1. $T(n) = 9T(n/3) + n$
2. $T(n) = T(2n/3) + 1$
3. $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$
4. $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$
5. $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \lg n$
6. $T(n) = T(n-1) + \log n$
7. $T(n) = 2T(n/2) + n/\log n$
8. $T(n) = 3T(n/2) + n \log n$

Exercício 6.2
Aplique o teorema mestre nas seguintes recorrências:

1. $T(n) = 9T(n/3) + n$
2. $T(n) = T(2n/3) + 1$
3. $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$
4. $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$

Exercício 6.3
Descreva o funcionamento dos problemas abaixo, extraia as recorrências dos algoritmos, analise a complexidade pelos três métodos vistos em aula.

1. Produto de número binários (Exemplo 5.3.8 de **?**).
2. Algoritmo de Strassen para multiplicação de matrizes (Cormen 28.2 e capítulo 6.3).
3. Encontrar o k-ésimo elemento de uma lista não ordenada (Cormen 9.3).

Exercício 6.4
A recorrência na análise do algoritmo de Strassen leva em conta somente multiplicações. Determina e resolve a recorrência das multiplicações e adições.

7 Backtracking

Motivação

- Conhecemos diversas técnicas para resolver problemas.
- O que fazer se eles não permitem uma solução eficiente?
- Para resolver um problema: pode ser necessário buscar em todo espaço de solução.
- Mesmo nesse caso, a busca pode ser mais ou menos eficiente.
- Podemos aproveitar
  - restrições conhecidas: *Backtracking* (retrocedimento).
  - limites conhecidos: *Branch-and-bound* (ramifique-e-limite).

Backtracking: Árvore de busca

- Seja uma solução dado por um vetor $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ com $s_i \in S_i$.
- Queremos somente soluçoes que satisfazem uma propriedade $P_n(s_1, \ldots, s_n)$.
- Idéia: Refinar as busca de força bruta, aproveitando restriçoes cedo
- Define propriedades $P_i(s_1, \ldots, s_i)$ tal que

$$P_{i+1}(s_1, \ldots, s_{i+1}) \Rightarrow P_i(s_1, \ldots, s_i)$$

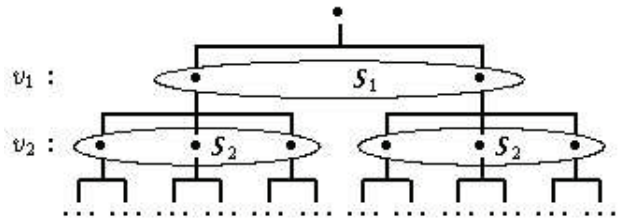
Backtracking: Árvore de busca

- A árvore de busca $T = (V, A, r)$ é definido por

$$\begin{aligned} V &= \{(s_1, \ldots, s_i) \mid P_i(s_1, \ldots, s_i)\} \\ A &= \{(v_1, v_2) \in V \mid v_1 = (s_1, \ldots, s_i), v_2 = (s_1, \ldots, s_{i+1})\} \\ r &= () \end{aligned}$$

- Backtracking busca nessa árvore em profundidade.

- Observe que é suficiente manter o caminho da raiz até o nodo atual na memória.

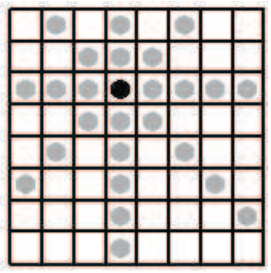


O problema das n-rainhas

PROBLEMA DAS n-RAINHAS

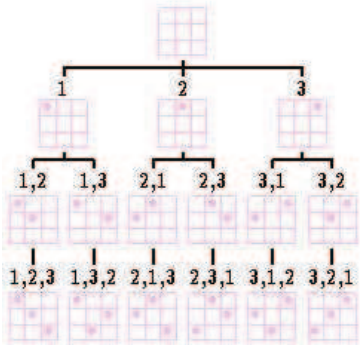
Instância Um tablado de xadrez de dimensão n*n, e n rainhas.

Solução Todas as formas de posicionar as n rainhas no tablado sem que duas rainhas estejam na mesma coluna, linha ou diagonal.



O problema das n-rainhas (simplificado: sem restrição da diagonal)

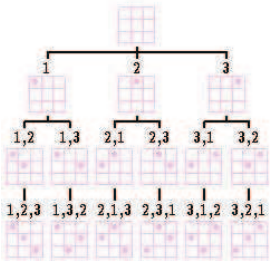
O que representam as folhas da árvore de busca para este problema?



O problema das n-rainhas

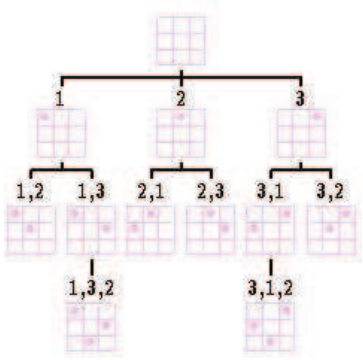
- A melhor solução conhecida para este problema é via Backtracking.
- Existem $\binom{n^2}{n}$ formas de posicionar n rainhas no tablado.
- Restringe uma rainha por linha: n^n.
- Restringe ainda uma rainha por coluna problema: $n!$.
- Pela aproximação de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(1/n)) \tag{7.1}$$



O problema das n-rainhas

Se considerarmos também a restrição de diagonal podemos reduzir ainda mais o espaço de busca (neste caso, nenhuma solução é factível)



Backtracking

- Testa soluções sistematicamente até que a solução esperada seja encontrada
- Durante a busca, se a inserção de um novo elemento "não funciona", o algoritmo retorna para a alternativa anterior (*backtracks*) e tenta um novo ramo
- Quando não há mais elementos para testar, a busca termina
- É apresentado como um algoritmo recursivo
- O algoritmo mantém somente uma solução por vez

Backtracking

- Durante o processo de busca, alguns ramos podem ser evitados de ser explorados
  1. O ramo pode ser infactível de acordo com restrições do problema
  2. Se garantidamente o ramo não vai gerar uma solução ótima

O problema do caixeiro viajante

Encontrar uma rota de menor distância tal que, partindo de uma cidade inicial, visita todas as outras cidades uma única vez, retornando à cidade de partida ao final.

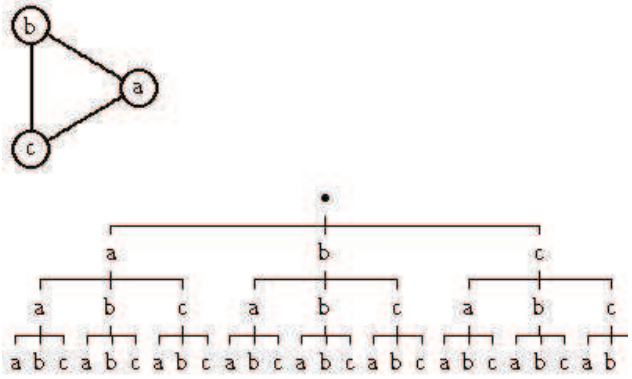
Problema do Caixeiro Viajante

Instância Um grafo G=(V,E) com pesos p (distâncias) atribuídos aos links. $V = [1, n]$ sem perda de generalidade.

Solução Uma rota que visita todos vértices exatamente uma vez, i.e. uma permutação de $[1, n]$.

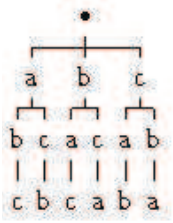
Objetivo Minimizar o custo da rota $\sum_{1 \leq i < n} p_{\{i,i+1\}} + p_{\{n,1\}}$.

O problema do caixeiro viajante



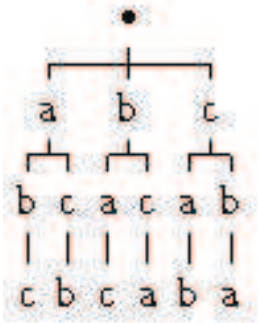
O problema do caixeiro viajante

- Para cada chamada recursiva existem diversos vértices que podem ser selecionados
- Vértices ainda não selecionados são os candidatos possíveis
- A busca exaustiva é gerada caso nenhuma restrição for imposta
- Todas as permutações de cidades geram as soluções factíveis ($P_n = n(n-1)(n-2)...1 = n!$)
- Este problema têm solução $n^2 2^n$ usando programação dinâmica.
- Mas: para resolver em PD é necessário $n2^n$ de memória!



O problema do caixeiro viajante

- Alguma idéia de como diminuir ainda mais o espaço de busca?



Vantagens x Desvantagens e Características Marcantes

Vantagens

- Fácil implementação
- Linguagens da área de programação lógica (prolog, ops5) trazem mecanismos embutidos para a implementação de backtracking

Desvantagens

- Tem natureza combinatória. A busca exaustiva pode ser evitada com o teste de restrições, mas o resultado final sempre é combinatório

Característica Marcante

- Backtracking = "retornar pelo caminho": constroem o conjunto de soluções ao retornarem das chamadas recursivas.

Problema de Enumeração de conjuntos

Enumeração de conjuntos

Instância Um conjunto de n itens S=$a_1, a_2, a_3, ...a_n$.

Solução Enumeração de todos os subconjuntos de S.

- A enumeração de todos os conjuntos gera uma solução de custo exponencial 2^n.

Problema da Mochila

Problema da Mochila

Instância Um conjunto de n itens $a_1, a_2, ...a_n$ e valores de importância v_i e peso w_i referentes a cada elemento i do conjunto; um valor K referente ao limite de peso da mochila.

Solução Quais elementos selecionar de forma a maximizar o valor total de "importância" dos objetos da mochila e satisfazendo o limite de peso da mochila?

- O problema da Mochila fracionário é polinomial
- O problema da Mochila 0/1 é NP-Completo
  - A enumeração de todos os conjuntos gera uma solução de custo exponencial 2^n
  - Solução via PD possui complexidade de tempo $O(Kn)$ (pseudo-polinomial) e de espaço $O(K)$

Problema de coloração em grafos

Problema de Coloração em Grafos

Instância Um grafo G=(V,A) e um conjunto infinito de cores.

Solução Uma coloração do grafo, i.e. uma atribuição $c : V \to C$ de cores tal que vértices vizinhos não têm a mesma cor: $c(u) \neq c(v)$ para $(u, v) \in E$.

Objetivo Minimizar o número de cores $|C|$.

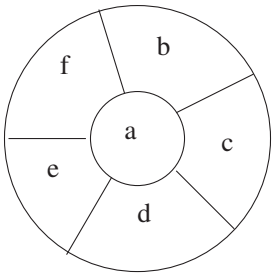
- Coloração de grafos de intervalo é um problema polinomial.
- Para um grafo qualquer este problema é NP-completo.
- Dois números são interessantes nesse contexto:
  - O *número de clique* $\omega(G)$: O tamanho máximo de uma clique que se encontra como sub-grafo de G.
  - O *número cromático* $\chi(G)$: O número mínimo de cores necessárias para colorir G.
- Obviamente: $\chi(V) \geq \omega(G)$
- Um grafo G é *perfeito*, se $\chi(H) = \omega(H)$ para todos sub-grafos H.
- Verificar se o grafo permite uma 2-coloração é polinomial (grafo bipartido).
- Um grafo **k-partido** é um grafo cujos vértices podem ser particionados em k conjuntos disjuntos, nos quais não há arestas entre vértices de um mesmo conjunto. Um grafo 2-partido é o mesmo que grafo bipartido.

Coloração de Grafos

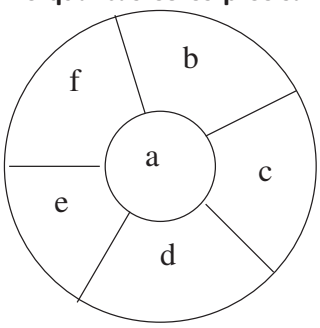
- A coloração de mapas é uma abstração do problema de colorir vértices.
- Projete um algoritmo de backtracking para colorir um grafo planar (mapa).
- Um grafo planar é aquele que pode ser representado em um plano sem qualquer intersecção entre arestas.
- Algoritmo $O(n^n)$, supondo o caso em que cada área necessite uma cor diferente
- Teorema de Kuratowski: um grafo é planar se e somente se não possuir *minor* K_5 ou $K_{3,3}$.

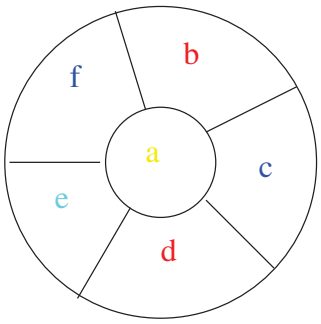
- Teorema das Quatro Cores: Todo grafo planar pode ser colorido com até quatro cores (1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, University of Illinois)
- Qual o tamanho máximo de um clique de um grafo planar?
- Algoritmo $O(4^n)$, supondo todas combinações de área com quatro cores.
- Existem 3^{n-1} soluções possíveis (algoritmo $O(3^n)$) supondo que duas áreas vizinhas nunca tenham a mesma cor.

De quantas cores precisamos?



De quantas cores precisamos?





(Precisamos de 4 cores!)

Backtracking

BT-COLORING

Entrada Grafo não-direcionado G=(V,A), com vértices $V = [1, n]$.

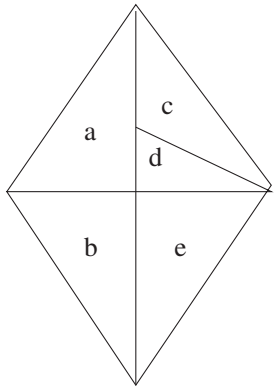
Saída Uma coloração $c : V \to [1, 4]$ do grafo.

Objetivo Minimiza o número de cores utilizadas.

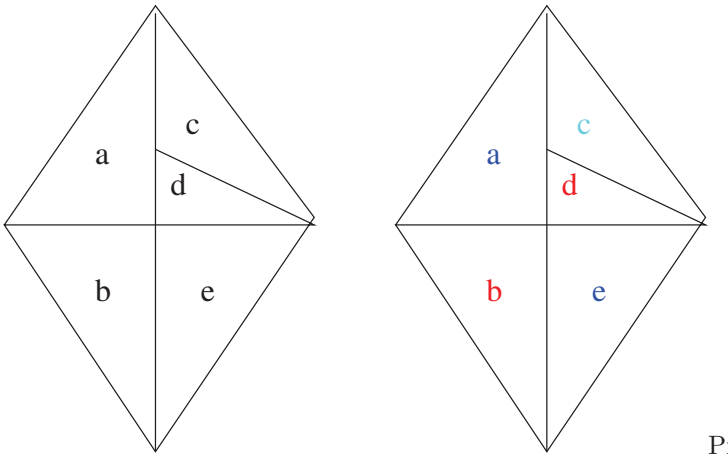
Para um vértice $v \in V$, vamos definir o conjunto de cores adjacentes $C(v) := \{c(u) \mid \{u, v\} \in A\}$.

```
1  return bt − coloring(1, 1)
2
3  boolean bt − coloring(v, c_v) :=
4    if v > n
5      return true
6
7    if c ∉ C(v) then { v colorível com c_v? }
8      c(v) := c_v
9      for c_u ∈ [1, 4] do
10       if bt − coloring(v + 1, c_u)
11         return true
12     end for
13   else
14     return false
15   end if
16 end
```

De quantas cores precisamos?



De quantas cores precisamos?

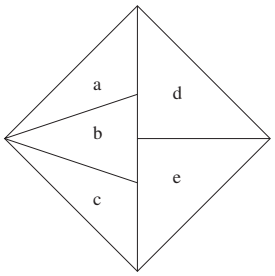


Precisamos de 3 cores!

Coloração de Grafos

- Existe um algoritmo $O(n^2)$ para colorir um grafo com 4 cores (1997, Neil Robertson, Daniel P. Sanders, Paul Seymour).
- Mas talvez sejam necessárias menos que 4 cores para colorir um grafo!
- Decidir se para colorir um grafo planar são necessárias 3 ou 4 cores é um problema NP-completo.

De quantas cores precisamos?



Roteamento de Veículos

Roteamento de Veículos

Instância Um grafo G=(V,A), um depósito v_0, frota de veículos com capacidade Q (finita ou infinita), demanda $q_i > 0$ de cada nó ($q_0 = 0$, distância $d_i > 0$ associada a cada aresta

Solução Rotas dos veículos.

Objetivo Minimizar a distância total.

- Cada rota começa e termina no depósito.
- Cada cidade $V \setminus v_0$ é visitada uma única vez e por somente um veículo (que atende sua demanda total).
- A demanda total de qualquer rota não deve superar a capacidade do caminhão.

Roteamento de Veículos

- Mais de um depósito
- veículos com capacidades diferentes
- Entrega com janela de tempo (período em que a entrega pode ser realizada
- Periodicidade de entrega (entrega com restrições de data)
- Entrega em partes (uma entrega pode ser realizada por partes)
- Entrega com recebimento: o veículo entrega e recebe carga na mesma viagem
- Entrega com recebimento posterior: o veículo recebe carga após todas entregas
- ...

Backtracking versus Branch & Bound

- Backtracking: enumera todas as possíveis soluções com exploração de busca em profundidade.

  - Exemplo do Problema da Mochila: enumerar os 2^n subconjuntos e retornar aquele com melhor resultado.

- Branch&Bound: usa a estratégia de backtracking
  - usa limitantes inferior (relaxações) e superior (heurísticas e propriedades) para efetuar cortes
  - explora a árvore da forma que convier
  - aplicado apenas a problemas de otimização.

Métodos Exatos

- Problemas de Otimização Combinatória: visam minimizar ou maximizar um objetivo num conjunto finito de soluções.
- Enumeração: Backtracking e Branch&Bound.
- Uso de cortes do espaço de busca: Planos de Corte e Branch&Cut.
- Geração de Colunas e Branch&Price.

Métodos não exatos

- Algoritmos de aproximação: algoritmos com garantia de aproximação $S = \alpha S^*$.
- Heurísticas: algoritmos aproximados sem garantia de qualidade de solução.
  - Ex: algoritmos gulosos não ótimos, busca locais, etc.
- Metaheurísticas: heurísticas guiadas por heurísticas (*meta*=além + *heuriskein* = encontrar).
  - Ex: Algoritmos genéticos, Busca Tabu, GRASP (*greedy randomized adaptive search procedure*), Simulated annealing, etc.

A Conceitos matemáticos

Nessa seção vamos repetir algumas definições básicas da matemática.

A.1 Funções comuns

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ denotam os conjuntos dos números naturais sem 0, inteiros, racionais e reais, respectivamente. Escrevemos também $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, e para um dos conjuntos C acima, $C_+ := \{x \in C | x > 0\}$ e $C_- := \{x \in C | x < 0\}$. Por exemplo

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}.$$

Para um conjunto finito S, $\mathcal{P}(S)$ denota o conjunto de todos subconjuntos de S.

Definição A.1 (Valor absoluto)
O valor absoluta $|\cdot|$ é definido por

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Proposição A.1 (Regras para valores absolutos)

$$|x| = |x| \tag{A.1}$$
$$x \leq |x| \tag{A.2}$$
$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{Desigualdade triangular} \tag{A.3}$$
$$|xy| = |x||y| \tag{A.4}$$

Prova. (i) Se $-x > 0$ temos $x < 0$, logo $|x| = -x$ e $|x| = -x$. O casos restantes podem ser analisadas analogamente. (ii) Analise da casos. (iii) Para $x + y < 0$: $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) \leq |x| + |y| = |x| + |y|$. Para $x + y \geq 0$: $|x + y| = x + y \leq |x| + |y|$. (iv) Para $xy \geq 0$: Se $x = 0$ temos $|xy| = 0 = |x||y|$, se $x > 0$ temos $y > 0$ e $|xy| = xy = |x||y|$, se $x < 0$ temos $y < 0$ e $|xy| = xy = (-|x|)(-|y|) = |x||y|$. Caso $xy < 0$ similar. ■

Corolário A.1

$$\left|\sum_{1\leq i\leq n} x_i\right| \leq \sum_{1\leq i\leq n} |x_i| \tag{A.5}$$

$$\left|\prod_{1\leq i\leq n} x_i\right| = \prod_{1\leq i\leq n} |x_i| \tag{A.6}$$

$$\tag{A.7}$$

Prova. Prova com indução sobre n. ■

Proposição A.2 (Regras para o máximo)
Para $a_i, b_i \in \mathbb{R}$

$$\max_i a_i + b_i \leq \max_i a_i + \max_i b_i \tag{A.8}$$

Prova. Seja $a_k + b_k = \max_i a_i + b_i$. Logo

$$\max_i a_i + b_i = a_k + b_k \leq \left(\max_i a_i\right) + b_i \leq \max_i a_i + \max_i b_i.$$

■

Definição A.2 (Pisos e tetos)
Para $x \in \mathbb{R}$ o *piso* $\lfloor x \rfloor$ é o maior número inteiro menor que x e o *teto* $\lceil x \rceil$ é o menor número inteiro maior que x. Formalmente

$$\lfloor x \rfloor = \max\{y \in \mathbb{Z} | y \leq x\}$$
$$\lceil x \rceil = \min\{y \in \mathbb{Z} | y \geq x\}$$

O *parte fracionário* de x é $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Observe que o parte fracionário sempre é positivo, por exemplo $\{-0.3\} = 0.7$.

Proposição A.3 (Regras para pisos e tetos)
Pisos e tetos satisfazem

$$x \leq \lceil x \rceil < x + 1 \tag{A.9}$$
$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \tag{A.10}$$

Definição A.3
O *fatorial* é a função

$$n! : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \prod_{1 \leq i \leq n} i.$$

Temos a seguinte aproximação do fatorial (fórmula de Stirling)

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(1/n)) \tag{A.11}$$

Uma estimativa menos preciso, pode ser obtido pelas observações

$$n! \leq n^n$$
$$e^n = \sum_{i \geq 0} \frac{n^i}{i!} > \frac{n^n}{n!}$$

que combinado ficam

$$(n/e)^n \leq n! \leq n^n.$$

Revisão: Logaritmos

$\log_a(1) = 0$		(A.12)
$a^{\log_a(n)} = n$	por definição	(A.13)
$\log_a(n \cdot m) = \log_a(n) + \log_a(m)$	propriedade do produto	(A.14)
$\log_a(\frac{n}{m}) = \log_a(n) - \log_a(m)$	propriedade da divisão	(A.15)
$\log_a(n^m) = m \cdot \log_a(n)$	propriedade da potência	(A.16)
$\log_a(n) = \log_b(n) \cdot \log_a(b)$	troca de base	(A.17)
$\log_a(n) = \frac{\log_c(n)}{\log_c(a)}$	mudança de base	(A.18)
$\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$		(A.19)
$a^{\log_c(b)} = b^{\log_c(a)}$	expoentes	(A.20)

Os números harmônicos

$$H_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i}$$

ocorrem freqüentemente na análise de algoritmos.

Proposição A.4

$$\ln n < H_n < \ln n + 1.$$

Prova. Resultado da observação que

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x < H_n < 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

(veja figura A.1) e o fato que $\int 1/x = \ln x$:

$$\ln(n) \leq \ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{1}{x}$$
$$\int_2^{n+1} \frac{1}{x-1} = \ln(n)$$

■

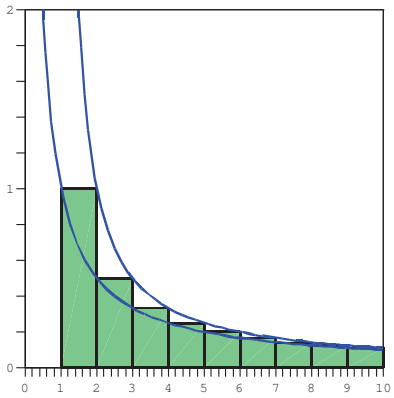


Figura A.1: Cota inferior e superior dos números harmônicos.

A.2 Somatório

Revisão: Notação Somatório

Para k uma constante arbitrária temos

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \text{Distributividade} \tag{A.21}$$

$$\sum_{i=1}^{n} k = nk \tag{A.22}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j\right) \qquad \text{Distributividade generalizada} \tag{A.23}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i \qquad \text{Associativiade} \tag{A.24}$$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i + \sum_{i=p+1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \tag{A.25}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_{p-i} = \sum_{i=p-n}^{p} a_i \tag{A.26}$$

A última regra é um caso particular de troca de índice (ou comutação) para somas. Para um conjunto finito C e uma permutação dos números inteiros π temos

$$\sum_{i\in C} a_i = \sum_{\pi(i)\in C} a_{\pi(i)}.$$

No exemplo da regra acima, temos $C = [0, n]$ e $\pi(i) = p - i$ e logo

$$\sum_{0\le i\le n} a_{p-i} = \sum_{0\le p-i\le n} a_{p-(i-p)} = \sum_{p-n\le i\le p} a_i.$$

Parte da análise de algoritmos se faz usando somatórios, pois laços *while* e *for* em geral podem ser representados por somatórios. Como exemplo, considere o seguinte problema. Dadas duas matrizes $matA$ e $matB$, faça um algoritmo que copie a matriz triangular inferior de $matB$ para $matA$.

CopiaMTI

Entrada Matrizes quadráticos A e B e dimensão n.

Saída Matriz A com a matriz triangular inferior copiada de B.

```
1  for i := 1 to n do
2     for j := 1 to i do
3        A_ij = B_ij
4     end for
5  end for
```

Uma análise simples deste algoritmo seria:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2 = O(n^2)$$

Séries

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{série aritmética} \tag{A.27}$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \qquad \text{série geométrica, para } x \neq 1 \tag{A.28}$$

se $|x| < 1$ então

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \text{série geométrica infinitamente decrescente} \tag{A.29}$$

Série geométrica com limites arbitrários:

$$\sum_{a \leq i \leq b} x^i = \frac{x^{b+1}-x^a}{x-1} \qquad \text{para } x \neq 1$$

Séries

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 2 \tag{A.30}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{A.31}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i2^i = 2 + (n-1)2^{n+1} \tag{A.32}$$

Mais geral para alguma seqüência f_i temos

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n} if_i &= \sum_{1\le i\le n}\sum_{1\le j\le i} f_i = \sum_{1\le j\le i\le n} f_i = \sum_{1\le j\le n}\sum_{j\le i\le n} f_i \\ &= \sum_{1\le j\le n}\left(\sum_{1\le i\le n} f_i - \sum_{1\le i<j} f_i\right).\end{aligned}$$

Uma aplicação:

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le n} ix^i &= \sum_{1\le j\le n}\left(\sum_{1\le i\le n} x^i - \sum_{1\le i<j} x^i\right) = \sum_{1\le j\le n}\left(\frac{x^{n+1}-x^1}{x-1} - \frac{x^j - x^1}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{x-1}\sum_{1\le j\le n}\left(x^{n+1} - x^j\right) \\ &= \frac{1}{x-1}\left(nx^{n+1} - \frac{x^{n+1}-x^1}{x-1}\right) = \frac{x}{(x-1)^2}\left(x^n(nx-n-1)+1\right)\end{aligned}$$

e com $x = 1/2$ temos

$$\sum_{1\le i\le n} i2^{-i} = 2(2(2^{-1}-2^{-n-1})-n2^{-n-1}) = 2((1-2^{-n})-n2^{-n-1}) = 2-2^{-n}(n+2) \tag{A.33}$$

A.3 Indução

Revisão: Indução matemática

- Importante para provar resultados envolvendo inteiros.

- Seja P(n) uma propriedade relativa aos inteiros.
  - Se P(n) é verdadeira para n=1 e
  - se P(k) verdadeira implica que P(k+1) é verdadeira
  - então P(n) é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

Revisão: Indução matemática

- Para aplicarmos indução matemática deve-se:
  - Passo inicial: verificar se P(n) é verdadeira para a base n_0.
  - Hipótese: assumir P(n) válida.
  - Prova: provar que P(n) é válida para qualquer valor de $n \geq n_0$.
- Se os passos acima forem verificados, conclui-se que P(n) é valida para qualquer valor de $n \geq n_0$

Indução matemática: exercícios

- Mostre que $n! \leq n^n$.
- Mostre que $\frac{1}{\log_a(c)} = \log_c(a)$.
- Demonstre a propriedade dos expoentes.
- Encontre uma fórmula alternativa para

$$\sum_{i=1}^{n} 2i - 1$$

  e prove seu resultado via indução matemática.
- Use indução matemática para provar que

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

- Resolva os exercícios do capítulo 1.

A.4 Limites

Definição A.4 (Limites)
Para $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ o limite de n para ∞ é definido por

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = c \Longleftrightarrow \exists c\, \forall \epsilon > 0\, \exists n_0\, \forall n > n_0\, |f(n) - c| < \epsilon. \tag{A.34}$$

Caso não existe um $c \in \mathbb{R}$ a função é *divergente*. Uma forma especial de divergência é quando a função ultrapasse qualquer número real,

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty \Longleftrightarrow \forall c\, \exists n_0\, \forall n > n_0\, f(n) > c \tag{A.35}$$

Também temos

$$\liminf_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{m\geq n} f(m) \right)$$
$$\limsup_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{m\geq n} f(m) \right)$$

Lema A.1 (Definição alternativa do limite)
É possível substituir $<$ com $\leq$ na definição do limite.

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = c \Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0\, \exists n_0\, \forall n > n_0\, |f(n) - c| \leq \epsilon$$

Prova. $\Rightarrow$ é obvio. Para $\Leftarrow$, escolhe $\epsilon' = \epsilon/2 < \epsilon$. ■

A.5 Probabilidade discreta

Probabilidade: Noções básicas

- *Espaço amostral* finito Ω de *eventos elementares* $e \in \Omega$.
- Distribuição de probabilidade $\Pr[e]$ tal que

$$\Pr[e] \geq 0; \qquad \sum_{e\in\Omega} \Pr[e] = 1$$

- *Eventos* (compostos) $E \subseteq \Omega$ com probabilidade

$$\Pr[E] = \sum_{e\in E} \Pr[e]$$

Exemplo A.1
Para um dado sem bias temos $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $\Pr[i] = 1/6$. O evento $\text{Par} = \{2, 4, 6\}$ tem probabilidade $\Pr[\text{Par}] = \sum_{e \in \text{Par}} \Pr[e] = 1/2$. ◊

Probabilidade: Noções básicas

- *Variável aleatória*

$$X : \Omega \to \mathbb{N}$$

- Escrevemos $\Pr[X = i]$ para $\Pr[X^{-1}(i)]$.
- Variáveis aleatórias *independentes*

$$P[X = x \text{ e } Y = y] = P[X = x]P[Y = y]$$

- *Valor esperado*

$$E[X] = \sum_{e \in \Omega} \Pr[e]X(e) = \sum_{i \geq 0} i \Pr[X = i]$$

- Linearidade do valor esperado: Para variáveis aleatórias X, Y

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

Prova. (Das formulas equivalentes para o valor esperado.)

$$\begin{aligned}\sum_{0 \leq i} \Pr[X = i]i &= \sum_{0 \leq i} \Pr[X^{-1}(i)]i \\ &= \sum_{0 \leq i} \sum_{e \in X^{-1}(i)} \Pr[e]X(e) = \sum_{e \in \Omega} \Pr[e]X(e)\end{aligned}$$

■

Prova. (Da linearidade.)

$$\begin{aligned}E[X + Y] &= \sum_{e \in \Omega} \Pr[e](X(e) + Y(e)) \\ &= \sum_{e \in \Omega} \Pr[e]X(e) \sum_{e \in \Omega} \Pr[e]Y(e)) = E[X] + E[Y]\end{aligned}$$

■

Exemplo A.2
(Continuando exemplo A.1.)
Seja X a variável aleatório que denota o número sorteado, e Y a variável aleatório tal que $Y = [\text{a face em cima do dado tem um ponto no meio}]$.

$$E[X] = \sum_{i \geq 0} \Pr[X = i] i = 1/6 \sum_{1 \leq i \leq 6} i = 21/6 = 7/2$$
$$E[Y] = \sum_{i \geq 0} \Pr[Y = i] i = \Pr[Y = 1] = 1/2 E[X + Y] \quad = E[X] + E[Y] = 4$$

◊

A probabilidade condicional $\Pr[A \mid B]$ (leia: "probabilidade de A dado B") é definido por

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}.$$

Duas aplicações rendem o *teorema de Bayes*

$$\Pr[A \mid B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[B \mid A] \frac{\Pr[A]}{\Pr[B]}.$$

A.6 Grafos

Seja $[D]^k$ o conjunto de todos subconjuntos de tamanho k de D.
Um *grafo* (ou grafo não-direcionado) é um par $G = (V, E)$ de *vértices* (ou nós ou pontos) V e *arestas* (ou arcos ou linhas) E tal que $E \subseteq [V]^2$. Com $|G|$ e $\|G\|$ denotamos o número de vértices e arestas, respectivamente. Dois vértices u, v são *adjacentes*, se $\{u, v\} \in E$, duas arestas e, f são adjacentes, se $e \cap f \neq \emptyset$. Para um vértice v, a *vizinhança* (de vértices) $N(v)$ é o conjunto de todas vértices adjacentes com ele, e a vizinhança (de arestas) $E(v)$ é o conjunto de todas arestas adjacentes com ele. O *grau* de um vértice v é o número de vizinhos $\delta(v) = |N(v) \models |E(v)|$.
Um *caminho* de comprimento k é um grafo $C = (\{v_0, \ldots, v_k\}, \{\{v_i, v_{i+1}\} \mid 0 \leq i < k\})$ com todo v_i diferente. Um ciclo de comprimento $k + 1$ é um caminho com a aresta adicional $\{v_n, v_0\}$. O caminho com comprimento k é denotado com P^k, o ciclo de comprimento k com C^k.
Um grafo G é *conexo* se para todo par de vértices u, v existe um caminho entre eles em G.

Um *subgrafo* de G é um grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$, escrito $G' \subseteq G$. Caso G' contém todas arestas entre vértices em V' (i.e. $E' = E \cap [V']^2$) ela é um *subgrafo induzido* de V' em G, escrito $G' = G[V']$.
Um *grafo direcionado* é um par $G = (V, E)$ de vértices V e arestas $E \subseteq V^2$. Cada aresta $e = (u, v)$ tem um *começo* u e um *termino* v.

B Soluções dos exercícios

Solução do exercício 1.1.
As características correspondentes são

$$f = \Omega(f) \tag{B.1}$$
$$c\Omega(f) = \Omega(f) \tag{B.2}$$
$$\Omega(f) + \Omega(f) = \Omega(f) \tag{B.3}$$
$$\Omega(\Omega(f)) = \Omega(f) \tag{B.4}$$
$$\Omega(f)\Omega(g) = \Omega(fg) \tag{B.5}$$
$$\Omega(fg) = f\Omega(g) \tag{B.6}$$

Todas as características se aplicam para Ω também. As provas são modificações simples das provas das características 1.10 até 1.15 com $\leq$ substituído por $\geq$.
Prova.
Prova de B.1: Escolhe $c = 1$, $n_0 = 0$.
Prova de B.2: Se $g \in c\Omega(f)$, temos $g = cg'$ e existem $c' > 0$ e n_0 tal que $\forall n > n_0\ g' \geq c'f$. Portanto $\forall n > n_0\ g = cg' \geq cc'f$ e com cc' e n_0 temos $g \in \Omega(f)$.
Prova de B.3: Para $g \in \Omega(f) + \Omega(f)$ temos $g = h + h'$ com $c > 0$ e n_0 tal que $\forall n > n_0\ h \geq cf$ e $c' > 0$ e n_0' tal que $\forall n > n_0\ h' \geq c'f$. Logo para $n > \max(n_0, n_0')$ temos $g = h + h' \geq (c + c')f$.
Prova de B.4: Para $g \in \Omega(\Omega(f))$ temos $g \geq ch$ com $h \geq c'f$ a partir de índices n_0 e n_0', e logo $g \geq cc'h$ a partir de $\max(n_0, n_0')$.
Prova de B.5: $h = f'g'$ com $f' \geq c_f f$ e $g' \geq c_g g$ tal que $h = f'g' \geq c_f c_g fg$.
Prova de B.6: $h \geq cfg$. Escrevendo $h = fg'$ temos que mostrar $g' \in \Omega(g)$. Mas $g' = h/f \geq cfg/f = cg$. ■

Solução do exercício 1.2.
"$\Leftarrow$":
Seja $f + c \in O(g)$, logo existem c' e n_0 tal que $\forall n > n_0\ f + c \leq c'g$. Portanto $f \leq f + c \leq c'g$ também, e temos $f \in O(g)$.
"$\Rightarrow$":
Essa direção no caso geral não é válida. Um contra-exemplo simples é $0 \in O(0)$ mas $0 + c \notin O(0)$. O problema é que a função g pode ser 0 um número infinito

de vezes. Assim f tem que ser 0 nesses pontos também, mas $f+c$ não é. Mas com a restrição que $g \in \Omega(1)$, temos uma prova:
Seja $f \in O(g)$ logo existem c' e n_0' tal que $\forall n > n_0'\ f \leq c'g$. Como $g \in \Omega(1)$ também existem c'' e n_0'' tal que $\forall n > n_0''\ g \geq c''$. Logo para $n > \max(n_0', n_0'')$

$$f + c \leq c'g + c \leq c'g + \frac{c}{c''}g = (c' + \frac{c}{c''})g.$$

Solução do exercício 1.3.

1. Para $n \geq 2$ temos $\log 1 + n \leq \log 2n = \log 2 + \log n \leq 2 \log n$.
2. Seja $f \in \log O(n^2)$, i.e. $f = \log g$ com g tal que $\exists n_0, c\, \forall n > n_0\ g \leq cn^2$. Então $f = \log g \leq \log cn^2 = \log c + 2 \log n \leq 3 \log n$ para $n > \max(c, n_0)$.
3. Temos que mostrar que existem c e n_0 tal que $\forall n > n_0 \log \log n \leq c \log n$. Como $\log n \leq n$ para todos $n \geq 1$ a inequação acima está correto com $c = 1$.

Solução do exercício 1.4.
Para provar $f_n = O(n)$ temos que provar que existe um c tal que $f_n \leq cn$ a partir um ponto n_0. É importante que a constante c é a mesma para todo n. Na verificação do professor Veloz a constante c muda implicitamente, e por isso ela não é válida. Ele tem que provar que $f_n \leq cn$ para algum c fixo. Uma tentativa leva a

$$\begin{aligned} f_n &= 2f_{n-1} \\ &\leq 2cn \\ &\not\leq cn \quad \text{Perdido!} \end{aligned}$$

que mostra que essa prova não funciona.

Solução do exercício 1.5.
E simples ver que $f \in \hat{o}(g)$ implica $f \in o(g)$. Para mostrar a outra direção suponha que $f \in o(g)$. Temos que mostrar que $\forall c > 0 : \exists n_0$ tal que $f < cg$. Escolhe um c. Como $f \in o(g)$ sabemos que existe um n_0 tal que $f \leq c/2g$ para $n > n_0$. Se $g \neq 0$ para $n > n_0'$ então $c/2g < g$ também. Logo $f \leq c/2g < cg$ para $n > \max(n_0, n_0')$.

Solução do exercício 1.6.
Primeira verifique-se que Φ satisfaz $\Phi + 1 = \Phi^2$.

Prova que $f_n \in O(\Phi^n)$ com indução que $f_n \leq c\Phi^n$. Base: $f_0 = 0 \leq c$ e $f_1 = 1 \leq c\Phi$ para $c \geq 1/\Phi \approx 0.62$. Passo:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \leq c\Phi^{n-1} + c\Phi^{n-2} = (c\Phi + c)\Phi^{n-2} \leq c\Phi^n$$

caso $c\Phi + c \leq c\Phi^2$.
Prova que $f_n \in \Omega(\Phi^n)$ com indução que $f_n \geq c\Phi^n$. Base: Vamos escolher $n_0 = 1$. $f_1 = 1 \geq c\Phi$ e $f_2 = 1 \geq c\Phi^2$ caso $c \leq \Phi^{-2} \approx 0.38$. Passo:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \geq c\Phi^{n-1} + c\Phi^{n-2} = (c\Phi + c)\Phi^{n-2} \leq c\Phi^n$$

caso $c\Phi + c \geq c\Phi^2$.

Solução do exercício (?, 2.3).

1. $3n + 7 \leq 5n + 2 \iff 5 \leq 2n \iff 2.5 \leq n$ (equação linear)
2. $5n + 7 \leq 3n^2 + 1 \iff 0 \leq 3n^2 - 5n - 6 \iff 5/6 + \sqrt{97}/6 \leq n$ (equação quadrática)
3. $5 \log_2 n + 7 \leq 5n + 1 \iff 7^5 + 2^7 - 2 \leq 2^{5n} \iff 16933 \leq 2^{5n} \iff 2.809\ldots \leq n$
4. Veja item (b)
5. $52^n + 3 \geq 3n^2 + 5n \iff n \geq 2^n \geq (3n^2 + 5n - 3)/5 \Leftarrow 2^n \geq n^2$.
6. $n^2 3^n \geq n^3 2^n + 1 \Leftarrow n^2 3^n \geq n^3 2^{n+1} \iff 2 \log_2 n + n \log_2 3 \geq 3 \log_2 n + (n+1) \log_2 2 \iff n \log_2 3 \geq \log_2 n + (n+1) \Leftarrow n(\log_2 3 - 1)/2 \geq \log_2 n$

Solução do exercício (?, 2.9).
Com $f \in \Theta(n^r)$ e $g \in \Theta(n^s)$ temos

$$c_1 n^r \leq f \leq c_2 n^r; \quad d_1 n^s \leq g \leq d_2 n^s \qquad \text{a partir de um } n_0$$

(para constantes c_1, c_2, d_1, d_2.) Logo

$$\begin{aligned} & d_1 f^q \leq g \circ f \leq d_2 f^q \\ & \Rightarrow d_1 (c_1 n^p)^q \leq g \leq d_2 (c_2 n^p)^q \\ & \Rightarrow f_1 c_1^q n^{p+q} \leq g \leq d_2 c_2^q n^{p+q} \\ & \Rightarrow g \in \Theta(n^{p+q}) \end{aligned}$$

Solução do exercício 1.13.
Temos que mostrar que $\log n \leq cn^{\epsilon}$ para constantes c, n_0 a partir de um $n \geq n_0$. Temos

$$\log n \leq cn^{\epsilon} \Longleftrightarrow \log n \log n \leq \log c + \epsilon \log n \Longleftrightarrow \log m \leq \epsilon m + c'$$

com a substituição $m = \log n$ e $c' = \log c$. Nos vamos mostrar que $\log m \leq m\epsilon$ para qualquer ϵ a partir de $m \geq m_0$ que é equivalente com $\lim_{m\to\infty} \log m/m = 0$. Pela regra de L'Hospital

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\log m}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$$

Solução do exercício 2.1.

$$C_p[\text{Alg1}] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} c = \frac{c}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^i = c \cdot 2^n - c = O(2^n)$$

Os detalhes da resolução do algoritmo abaixo foram suprimidos. Resolva com detalhes e confira se a complexidade final corresponde à encontrada na análise abaixo.

$$\begin{aligned} C_p[\text{Alg2}] &= \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{1\leq j\leq 2^i \\ j \text{ ímpar}}} j^2 \leq \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{1\leq j\leq 2^i} j^2 \\ &= O(\sum_{1\leq i\leq n} (2^i)^3) \\ &= O(\sum_{1\leq i\leq n} 8^i) = \frac{8^{n+1}-8}{7} \leq 8^{n+1} = O(8^n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_p[\text{Alg3}] &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} 2^i = \sum_{i=1}^{n} 2^i \cdot (n-i+1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (n2^i - i2^i + 2^i) = \sum_{i=1}^{n} n.2^i - \sum_{i=1}^{n} i.2^i + \sum_{i=1}^{n} 2^i \\ &= n \cdot (2^{n+1} - 2) - (2 + (n-1) \cdot 2^{n+1}) + (2^{n+1} - 2) \\ &= n2^{n+1} - 2n - 2 - n2^{n+1} + 2^{n+1} + 2^{n+1} - 2 \\ &= 2^{n+2} - 2n - 4 = O(2^n) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_p[\text{Alg4}] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 2^j = \sum_{i=1}^{n}(2^{i+1}-2) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} 2^i - \sum_{i=1}^{n} 2 = 2\cdot(2^{n+1}-2) - 2n \\
&= 4\cdot 2^n - 4 - 2n = O(2^n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_p[\text{Alg5}] &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} 2^j = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} 2^j - \sum_{j=1}^{i-1} 2^j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(2^{n+1} - 2 - (2^{i-1+1}-2)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(2\cdot 2^n - 2 - 2^i + 2\right) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} 2^n - \sum_{i=1}^{n} 2^i = 2\cdot n2^n - (2^{n+1}-2) \\
&= 2\cdot n2^n - 2\cdot 2^n + 2 = O(n2^n)
\end{aligned}
$$

Solução do exercício 2.2.
O problema é o mesmo da prova do exercício 1.4: Na prova a constante c muda implicitamente. Para provar $T_n = O(n)$ temos que provar $T_n \le cn$ para c fixo. Essa prova vira

$$
\begin{aligned}
T_n &= n - 1 + 2/n \sum_{0\le i<n} O(i) \\
&\le n - 1 + 2c/n \sum_{0\le i<n} i \\
&= n - 1 + c(n-1) = cn + (n - 1 - c) \\
&\not\le cn \qquad \text{Não funciona para } n > c+1
\end{aligned}
$$

Solução do exercício 2.3.
Uma solução simples é manter um máximo M e o segundo maior elemento m no mesmo tempo:

```
1  M := ∞
2  m := ∞
```

```
3  for i = 1, ..., n do
4    if a_i > M then
5      m := M
6      M := a_i
7    else if a_i > m do
8      m := a_i
9    end if
10 end for
11 return m
```

O número de comparações é ao máximo dois por iteração, e esse limite ocorre numa seqüência crescendo $1, 2, \ldots, n$. Portanto, a complexidade pessimista é $2n = \Theta(n)$. Existem outras soluções que encontram o segundo maior elemento com somente $n + \log_2 n$ comparações.

Solução do exercício 2.4.
Uma abordagem simples com busca exaustiva é

```
1  m := ∑_{1≤i≤n} a_i
2  for C ⊆ [1, n] do
3    m' := |∑_{i∈C} a_i − ∑_{i∉C} a_i|
4    if m' < m then
5      m := m'
6    end if
7  end for
```

Ele tem complexidade $c_p = O(n) + O(2^n nc) = O(n2^n)$.

Solução do exercício 2.5.
Para um dado n temos sempre $n - \lfloor n/2 \rfloor$ atualizações. Logo, o número médio de atualizações é e mesma.

Solução do exercício 2.6.
Seja $A, A_1, \ldots, A_n$ as variáveis aleatórias que denotam o número total de atualizações, e o número de atualizações devido a posição i, respectivamente. Com a distribuição uniforme temos $E[A_i] = 1/6$ e pela linearidade

$$E[A] = E\left[\sum_{1 \le i \le n} A_i\right] = n/6.$$

Com o mesmo argumento a segunda distribuição leva a $E[A_i] = 1/10$ é $E[A] = n/10$ finalmente.

Solução do exercício 2.7.
Cada chave em nível $i \in [1, k]$ precisa i comparações e a árvore tem $\sum_{1 \le i \le k} 2^{i-1} =$

$2^k - 1$ nós e folhas em total. Para o número de comparações C temos

$$E[C] = \sum_{1 \le i \le k} P[C = i]i = \sum_{1 \le i \le k} \frac{2^{i-1}}{2^{k-1}} i = 2^{-k} \sum_{1 \le i \le k} 2^i i = 2(k-1) + 2^{1-k}.$$

Solução do exercício 4.1.
O seguinte algoritmo resolva o problema:

SUBSEQÜÊNCIA

Entrada Seqüência $S' = s'_1 \dots s'_m$ e $S = s_1 \dots s_n$.

Saída `true`, se $S' \subseteq S$ (S' é uma subseqüência de S)

```
1   if m > n then
2     return false
3   end if
4   i := 1
5   for j := 1, ..., n do
6     if s'_i = s_j then
7       i := i + 1
8       if i > m then
9         return true
10      end if
11    end if
12  end for
13  return false
```

e tem complexidade $O(n)$. A corretude resulta de observação que para cada subseqüência possível temos outra subseqüência que escolhe o elemento mais esquerda em S. Portanto, podemos sempre escolher gulosamente o primeiro elemento da seqüência maior.

Solução do exercício 4.2.
O seguinte algoritmo resolve o problema:

BASES

Entrada Uma seqüência de posições x_i de n cidades, $1 \le i \le n$.

Saída Uma seqüência mínima de posições b_i de bases.

```
1       Sejam S = x'_1 ... x'_n as posições em ordem crescente
2       B = ε
3       while S ≠ ∅ do
4         Seja S = x'S'
5         B := B, (x' + 4)  { aumenta a seqüência B }
6         Remove todos os elementos x ≤ x' + 8 de S
7       end while
```

O algoritmo tem complexidade $O(n)$ porque o laço tem ao máximo n iterações. Prova de corretude: Seja b_i as posições do algoritmo guloso acima, e b'_i as posições de alguma outra solução. Afirmação: $b_i \geq b'_i$. Portanto, a solução gulosa não contém mais bases que alguma outra solução. Prova da afirmação com indução: A base $b_1 \geq b'_1$ é correto porque toda solução tem que alimentar a primeira casa e o algoritmo guloso escolhe a última posição possível. Passo: Seja $b_i \geq b'_i$ e sejam h, h' as posições da próximas casas sem base. O algoritmo guloso escolha $h + 4$, mas como $b_i \geq b'_i$ e $h \geq h'$ temos $b'_{i+1} \leq h' + 4$ porque h' precisa uma base. Logo, $x_{i+1} = h + 4 \geq h' + 4 \geq b'_{i+1}$.

Solução do exercício 6.1.

1. $T(n) = 9T(n/3) + n$

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{0 \leq i < \log_3 n} 9^i (n/3^i) + \Theta(9^{\log_3 n}) \\ &= n \sum_{0 \leq i < \log_3 n} 3^i + n^2 \\ &= n \frac{3^{\log_3 n} - 1}{2} + n^2 = \Theta(n^2) \end{aligned}$$

2. $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{0 \le i < \log n} 2^i (n/2^i) \log_2 n/2^i + \Theta(2^{\log_2 n}) \\ &= n \sum_{0 \le i < \log n} \log_2 n - i + \Theta(n) \\ &= n \log_2^2 n - \frac{n \log_2 n (\log_2 n - 1)}{2} + \Theta(n) \\ &= O(n \log_2^2 n) \end{aligned}$$

Solução do exercício 6.3.

1. Produto de dois números binários (exemplo 5.3.8 em (?)).

MULT-BIN

Entrada Dois números binários p, q com n bits.

Saída O produto $r = pq$ (que tem $\le 2n$ bits).

```
1  if n = 1 then
2    return pq      { multiplica dois bits em O(1) }
3  else
4    x := p_1 + p_2
5    y := q_1 + q_2
6    z := MULT-BIN(x_2, y_2)
7    t := (x_1 y_1)2^n + (x_1 y_2 + x_2 y_1)2^{n/2} + z
8    u := MULT-BIN(p_1, q_1)
9    v := MULT-BIN(p_2, q_2)
10   r := u2^n + (t - u - v)2^{n/2} + v
11   return r
12 end if
```

É importante de observar que x é a soma de dois números com $n/2$ bits e logo tem no máximo $n/2 + 1$ bits. A divisão de x em x_1 e x_2 é tal que x_1 represente o bit $n/2 + 1$ e x_2 o resto.

$$
\begin{aligned}
p &= \underbrace{|\quad p_1 \quad|}_{n/2\text{bits}}\underbrace{\quad p_2 \quad|}_{n/2\text{bits}} \\
x &= \underbrace{|\quad p_1 \quad|}_{n/2\text{bits}} \\
&\quad + \underbrace{|\quad p_2 \quad|}_{n/2\text{bits}} \\
&= \underbrace{|x_1|}_{1\text{bit}}\underbrace{\quad x_2 \quad|}_{n/2\text{bits}}
\end{aligned}
$$

(y tem a mesma subdivisão.)

Corretude do algoritmo Temos a representação $p = p_1 2^{n/2} + p_2$ e $q = q_1 2^{n/2} + q_2$ e logo obtemos o produto

$$pq = (p_1 2^{n/2} + p_2)(q_1 2^{n/2} + q_2) = p_1 q_1 2^n + (p_1 q_2 + p_2 q_1) 2^{n/2} + p_2 q_2 \quad \text{(B.7)}$$

Usando $t = (p_1 + p_2)(q_1 + q_2) = p_1 q_1 + p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_2 q_2$ obtemos

$$p_1 q_2 + p_2 q_1 = t - p_1 q_1 - p_2 q_2. \quad \text{(B.8)}$$

A linha 7 do algoritmo calcula t (usando uma chamada recursiva com $n/2$ bits para obter $z = x_2 y_2$). Com os produtos $u = p_1 q_1$, $v = p_2 q_2$ (que foram obtidos com duas chamadas recursivas com $n/2$ bits) temos

$$
\begin{aligned}
p_1 q_2 + p_2 q_1 &= t - u - v \\
pq &= u 2^n + (t - u - v) 2^{n/2} + v
\end{aligned}
$$

substituindo u e v nas equações B.7 e B.8.

Complexidade do algoritmo Inicialmente provaremos pelo método da substituição que a recorrência deste algoritmo é $\mathrm{O}(n^{\log_2 3})$. Se usarmos a hipótese de que $T(n) \leq cn^{\log_2 3}$, não conseguiremos finalizar a prova pois permanecerá um fator adicional que não podemos remover da equação. Caso este fator adicional for menor em ordem que a complexidade que queremos provar, podemos usar uma hipótese mais forte como apresentado abaixo.

Hipótese: $T(n) \leq cn^{\log_2 3} - dn$

$$\begin{aligned} T(n) &\leq 3(c(n/2)^{\log_2 3} - d(n/2)) + bn \\ &\leq 3cn^{\log_2 3}/(2^{\log_2 3}) - 3d(n/2) + bn \\ &\leq cn^{\log_2 3} - 3d(n/2) + bn \\ &\leq cn^{\log_2 3} - dn \end{aligned}$$

A desigualdade acima é verdadeira para $-3d(n/2) + bn \leq -dn$, ou seja, para $d \leq -2b$: $T(n) \in O(n^{\log_2 3} - dn) \in O(n^{\log_2 3})$.

Com a hipótese que uma *multiplicação com 2^k precisa tempo constante* (shift left), a linha 7 do algoritmo também precisa tempo constante, porque uma multiplicação com x_1 ou y_1 precisa tempo constante (de fato é um `if`). O custo das adições é $O(n)$ e temos a recorrência

$$T_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 3T(n/2) + cn & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

cuja solução é $\Theta(n^{1.58})$ (com $1.58 \approx \log_2 3$, aplica o teorema Master).

Exemplo B.1
Com $p = (1101.1100)_2 = (220)_{10}$ e $q = (1001.0010)_2 = (146)_{10}$ temos $n = 8$, $x = p_1 + p_2 = 1.1001$ tal que $x_1 = 1$ e $x_2 = 1001$ e $y = q_1 + q_2 = 1011$ tal que $y_1 = 0$ e $y_2 = 1011$. Logo $z = x_2 y_2 = 0110.0011$, $t = y_2 2^4 + z = 21.0001.0011$, $u = p_1 q_1 = 0111.0101$, $v = p_2 q_2 = 0001.1000$ e finalmente $r = 1111.1010.111.1000 = 32120$. ◊

O algoritmo acima não é limitado para números binários, ele pode ser aplicado para números com base arbitrário. Ele é conhecido como algoritmo de Karatsuba (Karatsuba and Ofman, 1962). Um algoritmo mais eficiente é do Schönhage e Strassen (Schönhage and Strassen, 1971) que multiplica em $O(n \log n \log\log n)$. Fürer (2007) apresenta um algoritmo que multiplica em $n \log n \, 2^{O(\log^* n)}$, um pouco acima do limite inferior $\Omega(n \log n)$.

2. Algoritmo de Strassen para multiplicação de matrizes.

   O algoritmo está descrito na seção 6.3. A recorrência correspondente é

$$T(n) = 7T(n/2) + \Theta(n^2).$$

Analisando com a árvore de recorrência, obtemos 7^i problemas em cada nível, cada um com tamanho $n/2^i$ e custo $c(n/2^i)^2 = cn^2/4^i$ e altura $h = \lceil \log_2 n \rceil$ (com $h+1$ níveis) que leva a soma

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \sum_{0 \leq i \leq h} cn^2(7/4)^i + 7^{h+1} \\ &= (4/3)cn^2((7/4)^{h+1} - 1) + 7^{h+1} \qquad \text{com } 4^{h+1} \geq 4n^2 \\ &\leq (7c/3+1)7^h - (4/3)cn^2 \qquad \text{com } 7^h \leq 7\,7^{\log_2 n} \\ &\leq (49c/3+1)n^{\log_2 7} = O(n^{\log_2 7}). \end{aligned}$$

Para aplicar o método de substituição, podemos estimar $T(n) \leq an^c - bn^2$ com $c = \log_2 7$ que resulta em

$$\begin{aligned} T(n) &= 7T(n/2) + dn^2 \\ &\leq 7a/2^c n^c - 7b/4n^2 + dn^2 \\ &= an^c - bn^2 + (d - 3b/4)n^2 \end{aligned}$$

que é satisfeito para $d - 3/4 \leq 0 \Leftrightarrow b \geq (4/3)d$.

Para aplicar o método Master, é suficiente de verificar que com $\Theta(n^2) = O(n^{\log_2 7 - \epsilon})$ se aplica o caso 1, e portanto a complexidade é $\Theta(n^{\log_2 7})$.

3. Algoritmo de seleção do k-ésimo elemento.

   Esse algoritmo obedece a recorrência

   $$T(n) = T(n/5) + T(7n/10 + 6) + O(n)$$

   (sem considerar o teto). Na aplicação da árvore de recorrência, enfrentamos dois problemas: (i) Os ramos tem comprimento diferente, porque os subproblemas tem tamanho diferente (portanto o método Master não se aplica nesse caso). (ii) O tamanho $7n/10+6$ do segundo subproblema leva a somas difíceis.

   Por isso, vamos estimar o custo da árvore da seguinte forma: (i) Temos que garantir, que o segundo subproblema sempre é menor: $7n/10+6 < n$. Isso é satisfeito para $n > 20$. (ii) Vamos substituir o sub-problema $7n/10 + 6$ com a cota superior $(7+\epsilon)n/10$ para um $\epsilon > 0$ pequeno. Isso é satisfeito para $n \geq 60/\epsilon$. (iii) Sejam $c_1 := 1/5$, $c_2 := (7+\epsilon)/10$ e $c := c_1 + c_2$. Então a árvore tem custo $c^i n$ no nível i e no ramo mais longo (que corresponde a c_2) uma altura de $h = \lceil \log_{c_2} 20/n \rceil$. Portanto,

obtemos uma cota superior para o custo da árvore

$$\begin{aligned} T(n) &\leq n \sum_{0 \leq i \leq h} c^i + F(n) \\ &\leq n \sum_{0 \leq i < \infty} c^i + F(n) \quad \text{porque } c < 1 \quad = 10n/(1-\epsilon) + F(n) \end{aligned}$$

com o número de folhas $F(n)$. Caso $F(n) = O(n)$ obtemos a estimativa desejada $T(n) = O(n)$. Observe que a estimativa

$$F(n) = 2^{h+1} \leq 42^{\log_{c_2} 20} n^{\log_{1/c_2} 2} = \Omega(n^{1.94})$$

não serve! Como as folhas satisfazem a recorrência

$$F(n) \leq \begin{cases} F(\lceil n/5 \rceil) + F(\lfloor 7n/10 + 6 \rfloor) & \text{se } n > 20 \\ O(1) & \text{se } n \leq 20 \end{cases}$$

$F(n) \leq cn$ pode ser verificado com substituição (resolvido no livro do Cormen). O método Master não se aplica nesta recorrência.

Bibliografia

Scott Aaronson. NP-complete problems and physical reality. *ACM SIGACT News*, March 2005.

Mohamad Akra and Louay Bazzi. On the solution of linear recurrence equations. *Computational Optimization and Applications*, 10:195–210, 1998.

Noga Alon, Zvi Galil, Oded Margalit, and Moni Naor. Witnesses for boolean matrix multiplication and for shortest paths. In *FOCS*, 1992.

Mikhail J. Atallah, editor. *Algorithms and theory of computation handbook*. CRC Press, 1999.

Richard Bellman. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem. *J. ACM*, 9(1):61–63, 1962.

Timothy M. Chan. More algorithms for all-pairs shortest paths in weighted graphs. In *STOC'07*, 2007.

complexity zoo. Complexity zoo. Online.

Don Coppersmith and Shmuel Winograd. Matrix multiplication via arithmetic progressions. In *STOC '87: Proceedings of the nineteenth annual ACM conference on Theory of computing*, pages 1–6, 1987.

L.J. Cowen, Robert Cowen, and Arthur Steinberg. Totally greedy coin sets and greedy obstructions. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 15, 2008.

Matthew Delacorte. Graph isomorphism is PSPACE-complete. arXiv:0708.4075, 2007.

Ding-Zhu Du and Ker-I Ko, editors. *Advances in Algorithms, Languages, and Complexity - In Honor of Ronald V. Book*. Kluwer, 1997.

Martin Fürer. Faster integer multiplication. In *STOC '07: Proceedings of the thirty-ninth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 57–66, New York, NY, USA, 2007. ACM. ISBN 978-1-59593-631-8. doi: http://doi.acm.org/10.1145/1250790.1250800.

Yuri Gurevich and Saharon Shelah. Expected computation time for Hamiltonian path problem. *SIAM J. on Computing*, 16(3):486–502, 1987.

Dan S. Hirschberg. A linear space algorithm for computing maximal common subsequences. *Comm. of the ACM*, 18(6):341–343, 1975.

C. A. R. Hoare. Quicksort. *Computer Journal*, 5:10–15, 1962.

Erich Kaltofen and Gilles Villard. On the complexity of computing determinants. *Computational complexity*, 13:91–130, 2004.

Anatolii Alekseevich Karatsuba and Yu Ofman. Multiplication of many-digital numbers by automatic computers. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, 145(2):293–294, 1962. Translation in Soviet Physics-Doklady 7 (1963), pp. 595–596.

Donald Ervin Knuth. Big omicron and big omega and big theta. *SIGACT News*, 1976.

Mark William Krentel. *The complexity of optimization problems*. PhD thesis, Department of Computer Science, Cornell University, 1987.

Richard Ladner. On the structure of polynomial time reducibility. *Journal of the ACM*, 1975. URL http://weblog.fortnow.com/2005/09/favorite-theorems-np-incomplete-sets.html.

Tom Leighton. Manuscript, MIT, 1996.

Vladimir Iosifovich Levenshtein. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. *Soviet Physics Doklady*, pages 707–710, 1966.

Seth Lloyd. Computational capacity of the universe. *Physical Review Letters*, 88(23), 2002. http://focus.aps.org/story/v9/st27.

M.J. Magazine, G.L.Nemhauser, and L.E.Trotter. When the greedy solution solves a class of knapsack problems. *Operations research*, 23(2):207–217, 1975.

D. Pearson. A polynomial time algorithm for the change-making problem. *Operations Research Letters*, 33(3):231–234, 2005.

Salvador Roura. Improved master theorems for divide-and-conquer recurrences. *Journal of the ACM*, 48(2):170–205, 2001.

A. Schönhage and V. Strassen. Schnelle multiplikation grosser zahlen. *Computing*, 7:281–292, 1971.

Michael Sipser. The history and status of the P versus NP question. In *Proceedings of the 24th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pages 603–619, 1992.

Volker Strassen. Guassian elimination is not optimal. *Numer. Math*, 13:354–356, 1969.

Terrazon. Soft errors in electronic memory - a white paper. Technical report, Terrazon Semiconductor, 2004.

Paul M. B. Vitányi and Lambert Meertens. Big omega versus the wild functions. *SIGACT News*, 16(4), 1985.

Jie Wang. *Advances in Algorithms, Languages, and Complexity - In Honor of Ronald V. Book*, chapter Average-Case Intractable NP Problems. Kluwer, 1997.

Wilkinson. Wilkinson microwave anisotropy probe. Online. http://map.gsfc.nasa.gov.