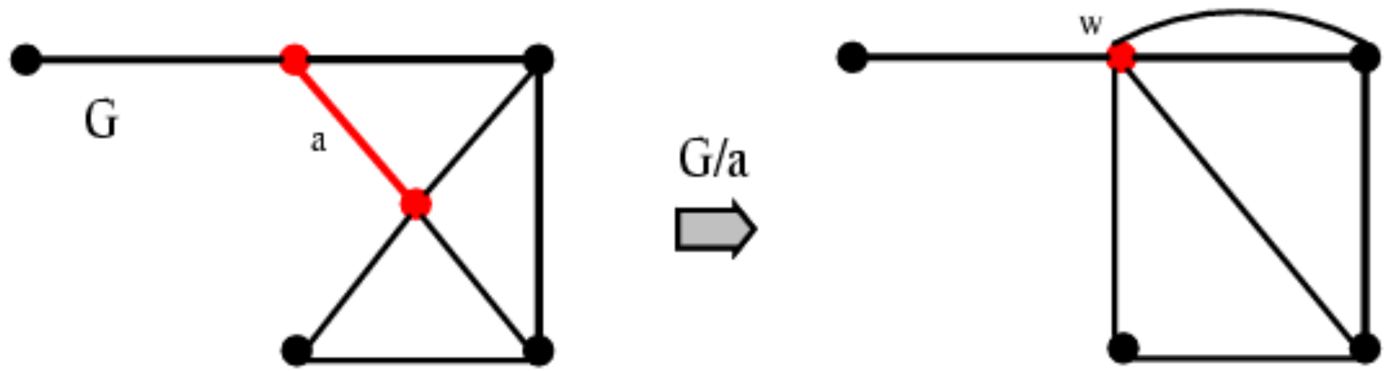
# *Teoria dos Grafos*

**Edson Prestes**

# Teoria dos Grafos

## Introdução – Mais sobre grafos..

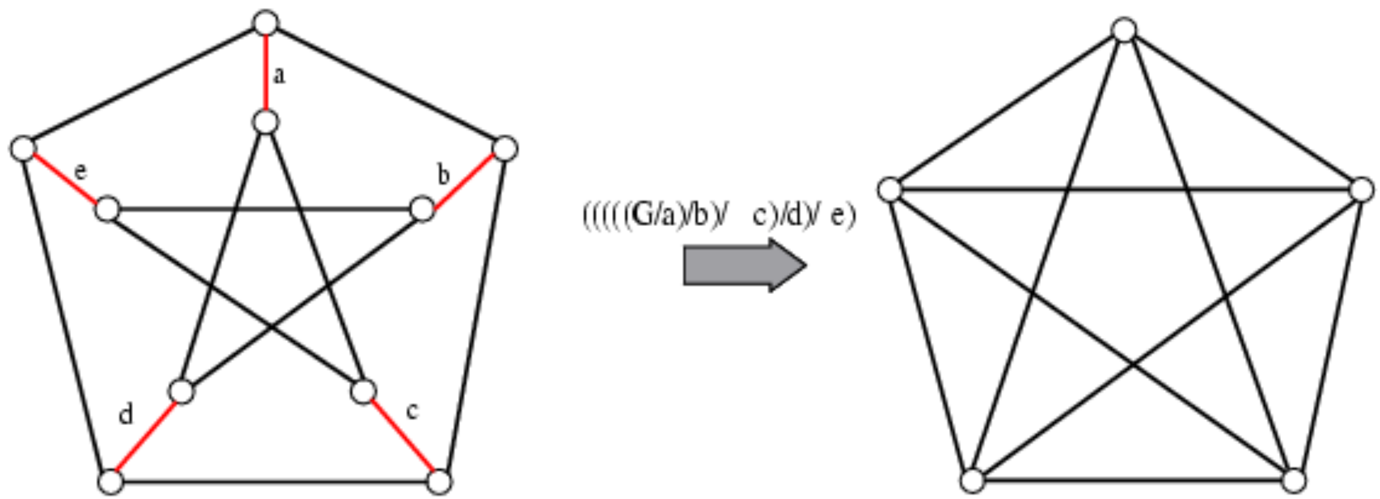
A operação de arco-contração, denotada por G/a, consiste na retirada da aresta a=(u,v) juntamente com seus vértices u e v, seguida da inserção de um novo vértice w e a re-ligação das arestas incidentes tanto a u quanto a v a este novo vértice.



# Teoria dos Grafos

## Introdução – Mais sobre grafos..

Qual é o resultado da execução da seqüência (((((G/a)/b)/c)/d)/e) no grafo G abaixo ?



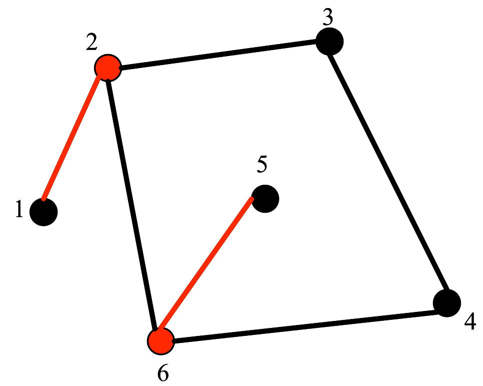
# Teoria dos Grafos

## Introdução – Mais sobre grafos..

Um vértice de corte, também chamado de ponte de articulação, é um vértice cuja remoção aumenta a quantidade de componentes do grafo.

Uma aresta de corte, também chamada de ponte ou ístimo, quando removida aumenta a quantidade de componentes conexos do grafo.

Um grafo induzido é um grafo obtido através da remoção de um conjunto de vértices.



# Teoria dos Grafos

## Introdução – Mais sobre grafos..

Conjunto desconector é o conjunto de arestas de G cuja retirada torna G desconexo.

Conjunto de corte de arestas é qualquer conjunto *desconector* minimal de G, ou seja, que não possua subconjunto próprio.

A conectividade de arco $\lambda(G)$ é o tamanho do menor conjunto de corte de arestas de G. Um grafo G é k-arco-conexo onde $\lambda(G) = k$ .

Conjunto separador é um conjunto de vértices de G cuja retirada torna G desconexo.

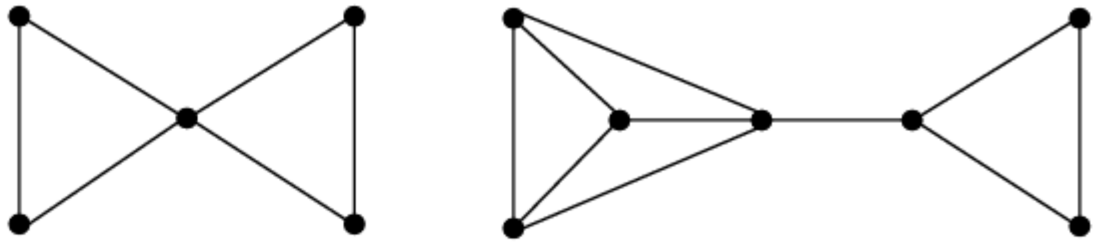
Conjunto de corte de vértices é qualquer conjunto *separador* minimal de G, ou seja, que não possua subconjunto próprio.

A conectividade de vértice $\kappa(G)$ é o tamanho do menor conjunto corte de vértices de G. Um grafo G é um grafo k-vértice-conexo onde $\kappa(G) = k$ .

# Teoria dos Grafos

## Introdução – Mais sobre grafos..

**Determine a conectividade de arestas e vértices dos grafos abaixo**



**$G_1$** **$G_2$**

O grafo $G_1$ é 2-arco-conexo( $\lambda(G) = 2$ ) e 1-vértice-conexo ( $\kappa(G) = 1$).

O grafo $G_2$ é 1-arco-conexo ( $\lambda(G) = 1$ ) e 1-vértice-conexo( $\kappa(G) = 1$).

# Teoria dos Grafos

## Introdução – Mais sobre grafos..

**Mostre que para qualquer G**

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

# Teoria dos Grafos

## Mais sobre grafos..

Mostre que um grafo é bipartido sse ele não possuir ciclos de tamanho impar

➔ *Seja G um grafo bipartido e V(G) o conjunto de vértices de G correspondente à união de dois subconjuntos disjuntos* $V_1$ *e* $V_2$ *de modo que as arestas de G unem apenas vértices de diferentes subconjuntos.*

*Considere um ciclo C em G, onde C é denotado pela seguinte seqüência de vértices* $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n, v_1$*. Suponha que* $v_1 \in V_1$ *,então* $v_2 \in V_2$ *,*$v_3 \in V_1$ *,* $v_n \in V_2, v_1 \in V_1$ *a alternada entre os dois subconjuntos.*

*Como o ultimo vértice é* $v_1$*, e a seqüência é alternada entre os subconjuntos* $V_1$ *e* $V_2$*. Podemos constatar que o penúltimo vértice* $v_n$ *possui índice n par.*

*Como um caminho com um número par de vértices possui exatamente um número ímpar de arestas. Logo, a adição da aresta de retorno* $(v_n, v_1)$ *faz com que este caminho possua um comprimento par, dado pelo número par de arestas.*

# Teoria dos Grafos

## Mais sobre grafos..

🡐 *A prova de que G é bipartido é como segue. Considere um vértice u, e uma função f(v) que retorna o comprimento do menor caminho de u até v. Faça* $X = \{v \in V | f(v) \text{ é par}\}$ *e* $Y = \{v \in V | f(v) \text{ é impar}\}$.

*Considere uma aresta (v,v'), onde* $v, v' \in X$ *ou* $v, v' \in Y$*, ou seja, uma aresta que liga vértices de um mesmo conjunto. Considere também um ciclo que passa pelo vértice u.*

*Este ciclo pode ser decomposto em dois subcaminhos, um entre v e u, e outro entre u e v', juntamente com a aresta que liga os vértices v e v'. Como v e v' estão no mesmo conjunto, os caminhos entre v e u e entre v' e u serão ou pares ou impares.*

# *Teoria dos Grafos*

**Mais sobre grafos..**

*Portanto, a soma dos comprimentos destes caminhos resultará em um número par que adicionado de 1, correspondente a aresta (v,v'), leva a um caminho de comprimento impar. Como estamos afirmando que nenhum ciclo de tamanho impar existe, logo a aresta (v,v') não existe. Por conseguinte, tanto X quanto Y são conjuntos independentes, logo o Grafo G é bipartido.*

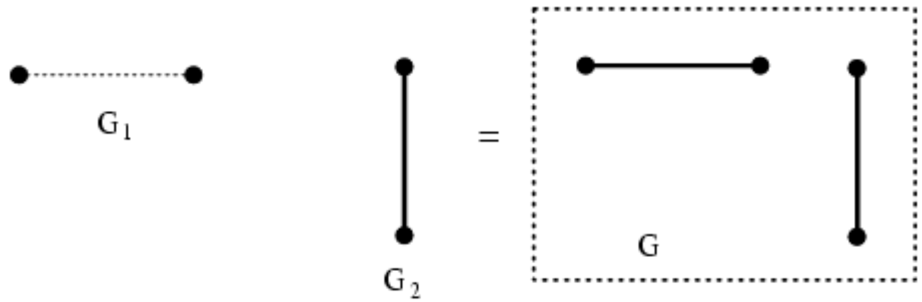
Obs: para sabermos se um grafo não é bipartido, basta verificarmos se existe algum ciclo de comprimento impar.

# Teoria dos Grafos

## União de Grafos

A união de dois grafos $G_1$ e $G_2$ é definida como

$$G = (V, A) = G_1 \cup G_2 = (V(G_1) \cup V(G_2), A(G_1) \cup A(G_2))$$

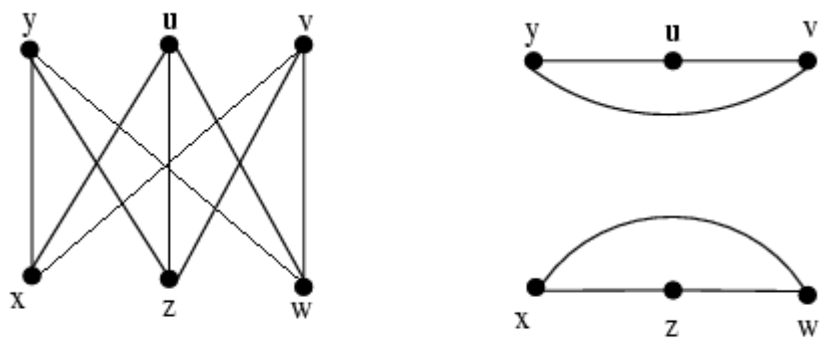


# Teoria dos Grafos

## Complemento de Grafos

O complemento de um grafo G, denotado por $\bar{G}$, é um grafo com

$$V(\bar{G}) = V(G) \quad \text{e} \quad (v,u) \in A(\bar{G}) \text{ sse } (v,u) \notin A(G)$$




**G** $\quad\quad\quad \bar{G}$

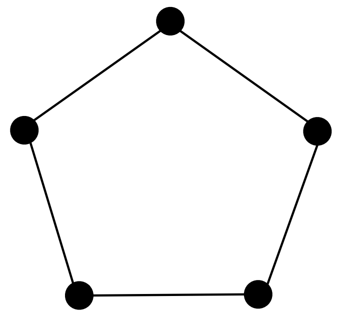
O complemento de um grafo completo é um grafo nulo. Enquanto que o complemento de um grafo bipartido é a união de dois grafos completos.

# Teoria dos Grafos

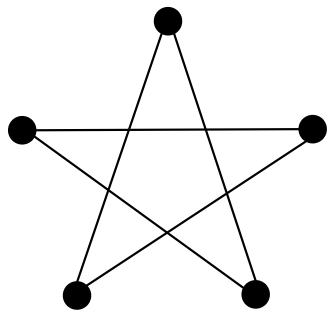
## Complemento de Grafos

Um grafo é autocomplementar se ele for isomorfico ao seu complemento.

O grafo abaixo é autocomplementar ?



**G**



$\bar{G}$

**Sim!**

# *Teoria dos Grafos*

## Complemento de Grafos

Mostre que para qualquer Grafo G com 6 pontos, G ou $\bar{G}$ possui um triângulo

*Considere um vértice v de V(G). Sem perda de generalidade, podemos assumir v é adjacente a outros três vértices $u_1$, $u_2$ e $u_3$ em G.*

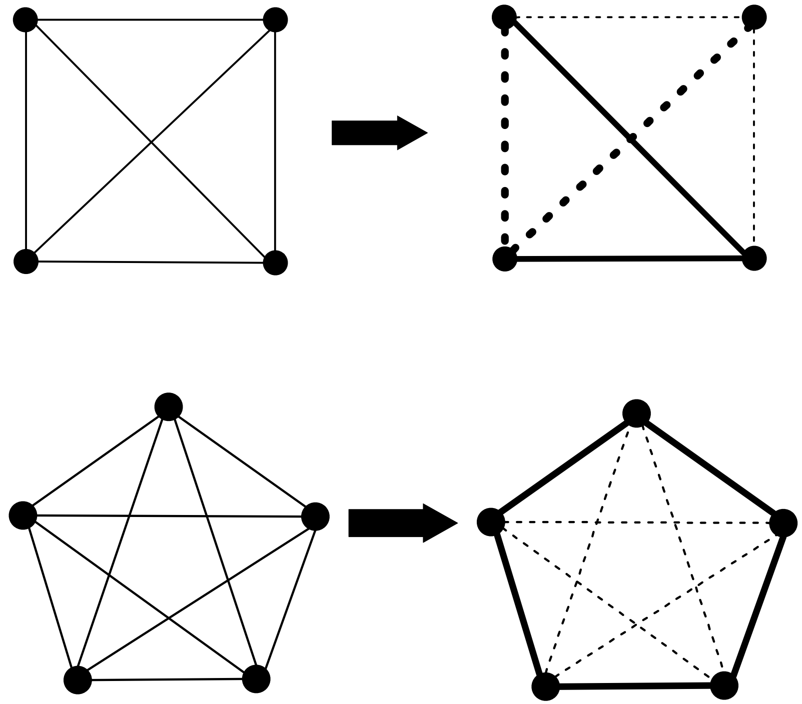
*Se dois destes vértices forem adjacentes, então existirá um triangulo formado por estes dois e por v.*

*Caso contrário, estes três vértices não serão adjacentes entre si em G, mas serão em* $\bar{G}$

# Teoria dos Grafos

## Decomposição

Uma decomposição de um grafo é uma lista de subgrafos tal que cada aresta aparece exatamente uma única vez em um único subgrafo.



# Teoria dos Grafos

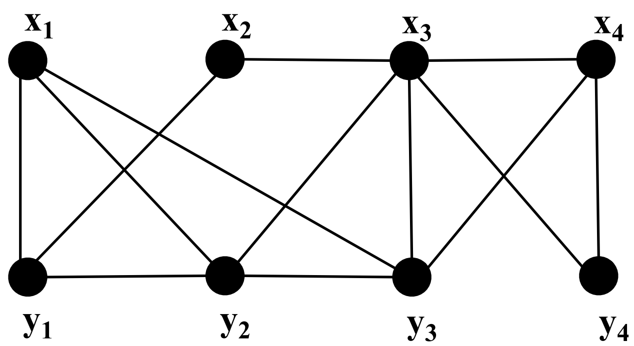
## Matching

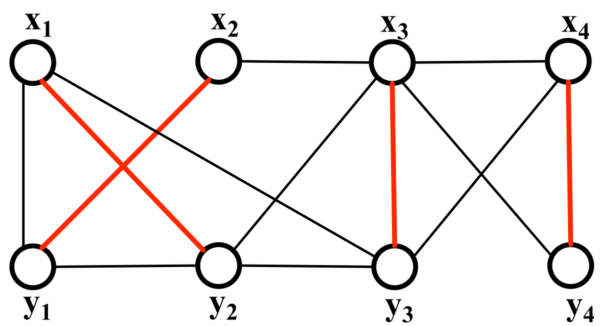
Um *matching* em um grafo G é um conjunto de arestas que não formam loops e que não compartilham vértices entre si.

Um vértice incidente às arestas de um *matching* M é dito saturado por M.

Um *matching perfeito* de G satura todos os vértices de G.

Determine um matching para o grafo abaixo




É um matching perfeito ?   Sim!