Soluções prova 2

Questão 1 (Formulação, 2 pt)
Seja $x_{ij} \in \mathbb{B}$ uma variável que indica a alocação da tarefa $1 \le i \le n$ para máquina $1 \le j \le m$. Com isso podemos formular

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza}\quad & C && && (1)\\
\textbf{sujeito a}\quad & \sum_{1\le j\le m} x_{ij} = 1 && && (2)\\
& \sum_{1\le i\le n} t_i x_{ij} \le C && && (3)\\
& x_{ij} \in \mathbb{B} && \forall 1 \le i \le n, 1 \le j \le m && (4)\\
& C \in \mathbb{R}. && && (5)
\end{aligned}
$$

A primeira restrição garante que cada tarefa é alocada para alguma máquina, e a segunda que a variável C é maior ou igual a duração da cada máquina, e logo é maior ou igual a duração total. Como o objetivo é minimizar, C será igual a duração total numa solução ótima.

Questão 2 (Formulação, 2 pt)
Seja $x_v \in \mathbb{B}$ uma variável que indica que $v \in V$ faz parte de D. Com isso temos

$$
\begin{aligned}
\textbf{minimiza}\quad & \sum_{v\in V} x_v && && (6)\\
\textbf{sujeito a}\quad & x_v + \sum_{u\in N(v)} x_u \ge 1 && && (7)\\
& x_v \in \mathbb{B} && \forall v \in V. && (8)
\end{aligned}
$$

Questão 3 (Dualidade, 2 pt)
Não. Caso um sistema é ilimitado, o dual é inviável, pelo teorema fraca de dualidade. Isso também é o caso para o segundo sistema, porque a solução que é viável para o dual de P é viável para o dual do segundo sistema, já que uma alteração no lado direito do primal só altera a função objetivo do dual.

Questão 4 (Analise de sensibilidade, 2 pt)
Nos temos $\mathcal{B} = \{2,5\}$ e $\mathcal{N} = \{1,3,4\}$ e

$$(B^{-1}N)^t = \begin{pmatrix} -1 & 16 \\ 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

a) Temos o novo $c = (5\ 0 \mid -4\ 13\ 0)^t$ com $c_B = (5\ 0)^t$ e $c_N = (-4\ 13\ 0)^t$. Logo temos um novo

$$y_N^* = \begin{pmatrix} -1 & 16 \\ 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

e o sistema não é mais ótimo. Como o coeficiente de uma variável nula foi modificado, o valor da função objetivo é igual e os restantes componentes do dicionário não dependem das coeficientes da função objetivo. Logo, o dicionário modificado é

$$
\begin{array}{rrrrr}
z = & 100 & +x_1 & -2x_3 & -5x_4 \\
\hline
x_2 = & 20 & +x_1 & -3x_3 & -x_4 \\
x_5 = & 10 & -16x_1 & +2x_3 & +4x_4
\end{array}
$$

e um pivô x_1–x_5 resulta no novo dicionário ótimo

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 805/8 & -1/16x_5 & -15/8x_3 & -19/4x_4 \\ \hline x_2 = & 165/8 & -1/16x_5 & -23/8x_3 & -3/4x_4 \\ x_1 = & 5/8 & -1/16x_5 & +1/8x_3 & +1/4x_4 \end{array}$$

Similarmente temos um novo $c = (5+t\ 0 \mid -5\ 13\ 0)^t$ com $c_B = (5+t\ 0)^t$ e $c_N = (-5\ 13\ 0)^t$. Logo temos um novo

$$y_N^* = \begin{pmatrix} -1 & 16 \\ 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5+t \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2+3t \\ 5+t \end{pmatrix}.$$

Logo a solução mantem-se ótima para $t \in (-2/3, 0)$ e o novo valor da função objetivo é

$$(5+t\ 0) \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = 100 + 20t.$$

Questão 5 (Método Simplex dual, 2 pt)
Com variável de folga temos

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_6 = 50.$$

Para inserir no dicionário final podemos re-escrever a restrição de forma

$$\begin{aligned} x_6 &= 50 - 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \\ &= 50 - 2x_1 - 3(20 + x_1 - 3x_3 - x_4) - 5x_3 \\ &= -10 - 5x_1 + 4x_3 + 3x_4. \end{aligned}$$

Inserindo a restrição no dicionário final, a solução não é mais ótima, mas o sistema é dualmente viável. Temos

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 100 & & -2x_3 & -5x_4 \\ \hline x_2 = & 20 & +x_1 & -3x_3 & -x_4 \\ x_5 = & 10 & -16x_1 & +2x_3 & +4x_4 \\ x_6 = & -10 & -5x_1 & +4x_3 & +3x_4 \end{array}$$

e um pivô dual x_6–x_3 resulta no novo dicionário ótimo

$$\begin{array}{rrrrr} z = & 95 & -5/2x_1 & -1/2x_6 & -7/2x_4 \\ \hline x_2 = & 25/2 & -11/4x_1 & -3/4x_6 & +5/4x_4 \\ x_5 = & 15 & -27/2x_1 & +1/2x_6 & +5/2x_4 \\ x_3 = & 5/2 & +5/4x_1 & +1/4x_6 & -3/4x_4 \end{array}$$