Complexidade de Algoritmos

Material baseado nos slides do prof.
Edson Prestes

Intratabilidade

A **classe P** consiste nos problemas que podem ser **resolvidos** em tempo Polinomial (Problemas tratáveis)

A **classe NP** consiste nos problemas que podem ser **verificados** em tempo polinomial (Problemas Intratáveis).

> Dada uma entrada, é possível verificar se ela corresponde a uma solução do problema: o conjunto de vértices $<v_1, v_2, \ldots , v_n>$ corresponde a um ciclo hamiltoniano? Isto pode ser feito em tempo polinomial.

A **classe NP-completo** são problemas NP que possuem a característica de que se um deles puder ser resolvido em tempo polinomial então todo problema NP-Completo terá uma solução em tempo polinomial.

Intratabilidade

Como mostrar se um problema é NP-completo?

- Queremos mostrar que provavelmente não existe nenhum algoritmo eficiente para o problema.
- Idéia é: mapear o problema que se quer provar para um que se sabe ser NP-completo através de reduções.
- Uso de técnicas:
  - Problemas de decisão
  - Reduções
  - Um primeiro problema NP-completo

Intratabilidade

Reduções

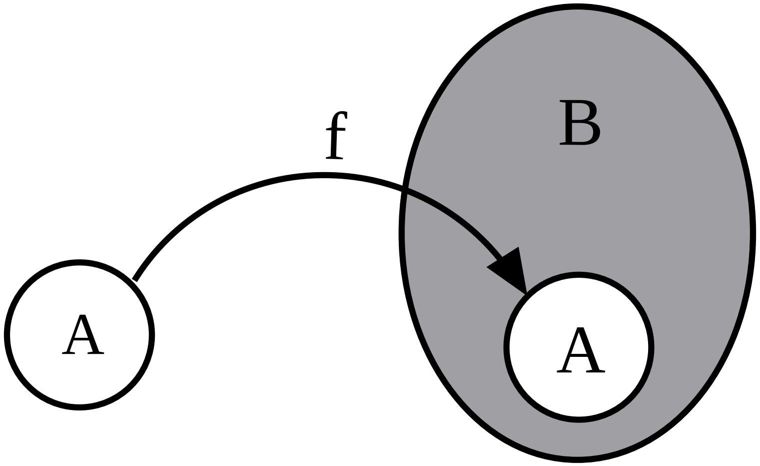
Considere dois problemas A e B.

A redução consiste em um procedimento que transforma qualquer instância α (entrada) de **A** em alguma instância β de **B** de forma que:

- A transformação ocorre em tempo polinomial
- As respostas são as mesmas tanto para A quanto para B. Isto é, a resposta para α é sim sse a resposta para β é sim

Intratabilidade

A redução é expressa por $A \leq_P B$
Observe que B pode ser mais dificil que A.



Este processo pode ser chamado de

- mapeamento em tempo polinomial
- redução Karp em tempo polinomial

f(A) pode ser a parte fácil de B.

Intratabilidade

A classe de complexidade NP

A classe NP (*nondeterministic polynomial time*) é a classe de linguagens que podem ser **verificadas** por um algoritmo em tempo polinomial.

Uma linguagem pertence a NP sse existe um algoritmo **A** que verifica L em tempo polinomial, ou seja,

L = { $x \in \{0,1\}^*$ existe um certificado y com | y | = O(| x |^c) tal que A(x,y)=1}

Exemplo : O problema Ham-ciclo $\in$ NP.

- Para provar que é NP:
  - Elaborar um algoritmo de verificação em tempo polinomial (certificado)

Intratabilidade

Classe NP - Completo

Possui a propriedade de que se qualquer problema NP-completo puder ser resolvido em tempo polinomial então todo problema NP terá uma solução em tempo polinomial e P=NP.

Para provar que um problema P $\in$ NP é um problema NP-Completo, devemos o reformular em termos de um problema Q já conhecido como sendo NP-Completo.

Isto é feito através de redução.

Intratabilidade

Classe NP – Completo

Se $L_1 \leq_p L_2$, então L_1 não é mais difícil que L_2

Uma linguagem L é NP-completa se

1. $L \in NP$
2. $L' \leq_p L$ para $L' \in NP$**-Completo**

- A linguagem pertence a classe NP
- Existe uma linguagem L´ da classe NP-completo que pode ser reduzida em tempo polinomial para L

Intratabilidade

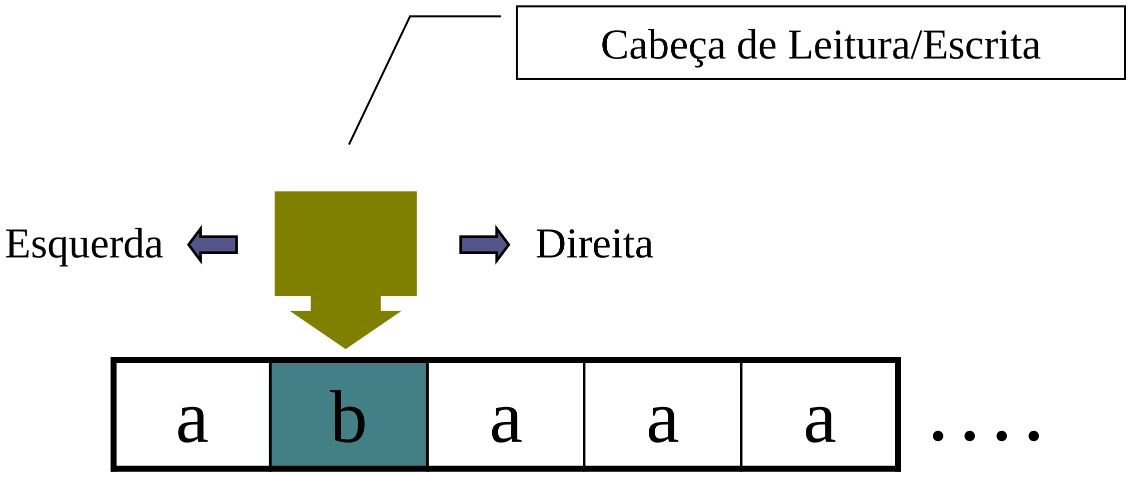
Máquina de Turing

Ela consiste basicamente de 3 partes:

- **Fita**: usada como dispositivo de entrada e saída
- **Unidade de controle:** reflete o estado corrente da máquina. É composta de uma unidade de leitura e gravação (cabeça da fita) que acessa **uma célula** da fita por vez e movimenta-se para esquerda ou direita
- **Função de transição**: comanda as leituras e gravações, o movimento da cabeça da fita e o estado da máquina

Intratabilidade

Máquina de Turing

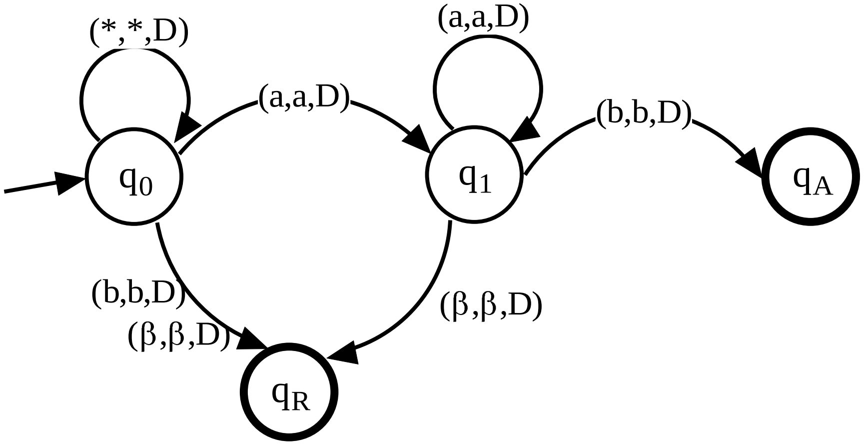


Intratabilidade

Máquina de Turing

É composta de diversos elementos

Q- conjunto de estados.
Σ - alfabeto de entrada.
Γ - alfabeto da fita
$\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{E,D\}$ -
função de transição.
$\mathbf{q_0}$ - estado inicial.
$\mathbf{q_A} \in Q$ - estado de aceitação.
$\mathbf{q_R} \in Q$ - estado de rejeição.



Intratabilidade

Máquina de Turing Determinística (MTD)

- Uma máquina de Turing aceita uma sentença, se ela alcança uma configuração de aceitação;

- Uma MTD (ou um programa) M aceita $x \in \Sigma^*$ sse M pára no estado q_A após o processar x.

- A linguagem reconhecida é $L_M = \{ x \in \Sigma^*$ / M aceita x$\}$.

Intratabilidade

Máquina de Turing Não-Determinística (MTND)

É uma generalização da máquina determinística;

Um programa para uma MTND é definido exatamente como um programa para uma MTD, diferindo somente na execução.

Após a leitura de um símbolo é possível ir para mais que uma configuração da máquina.

Intratabilidade

Máquina de Turing Não-Determinística

- Um MTND M aceita uma entrada x se pelo menos uma, dentre todas as possíveis computações de M, pára alcançando um estado de aceitação.

- A linguagem reconhecida é $L_M = \{x \in \Sigma^* \ / \ M \text{ aceita } x\}$.

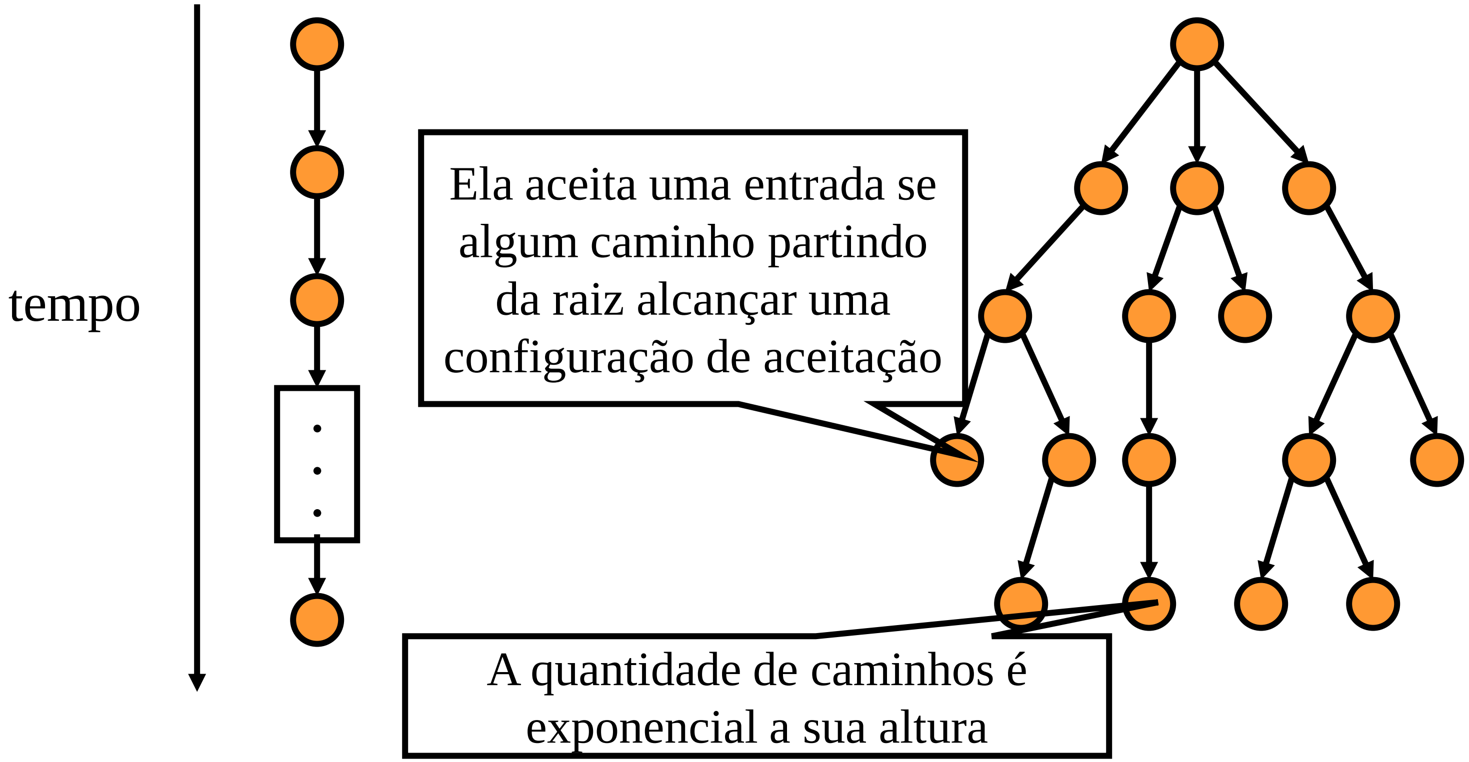
- A MTND tem a mesma expressividade da MTD.

Intratabilidade

Determinismo x Não-determinismo

Computação deterministica

Computação não-deterministica



Intratabilidade

Classe de Complexidade

Classe P

P = {L / existe uma MTD M de tempo polinomial t.q. $L_M = L$}

Classe NP

NP = { L / existe uma MTND M de tempo polinomial t.q. $L_M = L$ }.

Intratabilidade

Problema da Satisfabilidade

Dada uma fórmula booleana *f* na forma normal conjuntiva (CNF), ela é satisfazível? Ou seja, existe um conjunto de valores que quando associados às variáveis de *f* a tornam verdadeira ?

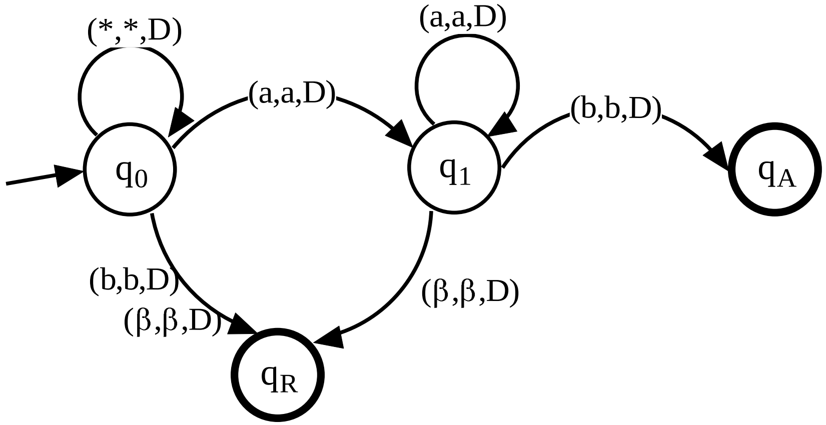
A CNF é uma conjunção de *m* claúsulas C_i, onde cada claúsula é a disjunção de literais

$$f = (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_1) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_2)$$

Intratabilidade

Construção inicial

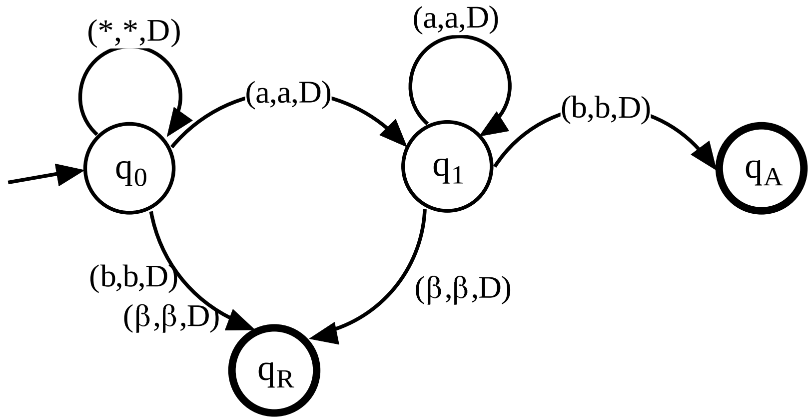
Como descrever seqüências de configurações de uma máquina de Turing M através de conjuntos de cláusulas, de modo que tais conjuntos sejam satisfazíveis sse corresponderem as computações que aceitam uma dada palavra ?



Conjunto $Q = \{q_0, q_1, q_A, q_R\}$
Alfabeto da Fita $\Gamma = \{ \beta , a, b\}$
Alfabeto da Entrada $\Sigma = \{a, b\}$

Intratabilidade

Construção inicial



Configurações de M para a entrada **w=ab**

Instante	i	i=0			
Estado	s_i	q_0			
Posição	p_i	1			
Fita	f_i	β	a	b	β
	j	0	1	2	3

Instante	i	i=1			
Estado	s_i	q_1			
Posição	p_i	2			
Fita	f_i	β	a	b	β
	j	0	1	2	3

Instante	i	i=2			
Estado	s_i	q_A			
Posição	p_i	3			
Fita	f_i	β	a	b	β
	j	0	1	2	3

Intratabilidade

Precisamos de alguns nomes para as variáveis proposicionais

Instante	i	i=0			
Estado	s_i	q_0			
Posição	p_i	1			
Fita	f_i	β	a	b	β
	j	0	1	2	3

No instante **i**

${}_i$**S[q]** (s_i=q) - M está no estado **q**.

${}_i$**P^j** (p_i = j) - M está na posição **j** da fita

${}_i$**F^j [a]** (f_i(j) =a)- existe o símbolo **a** na posição **j.**

No instante i=0, teremos a seguinte Claúsula

$$ {}_0C = \{ {}_0S[q_0], {}_0P^1 , {}_0F^0 [\beta]\} $$

$$ {}_0C = {}_0S[q_0] \wedge {}_0P^1 \wedge {}_0F^0 [\beta] $$

Intratabilidade

Instante	i	i=0			
Estado	s_i	q_0			
Posição	p_i	1			
Fita	f_i	β	a	b	β
	j	0	1	2	3

No instante i=0,

A descrição do resto da fita pode ser feita por

${}_0F^1\,[a]$, ${}_0F^2\,[b]$, ${}_0F^3\,[\beta]$ para os símbolos nas posições j=1,2,3

Podemos então formar o seguinte conjunto

$${}_0F^{1..3}\,[w] = \{\, {}_0F^1\,[a] \,,\, {}_0F^2\,[b] \,,\, {}_0F^3\,[\beta] \,\}$$

A configuração inicial de M pode ser descrita como

$${}_0C^w = {}_0C \cup {}_0F^{1..3}\,[w]$$

Intratabilidade

Instante	i	i=1			
Estado	s_i	q_1			
Posição	p_i	2			
Fita	f_i	β	a	b	β
	j	0	1	2	3

A configuração de M no instante i=1 é

$${}_1C^w = {}_1C \cup {}_1F^{1..3}[w]$$

Onde ${}_1C = \{{}_1S[q_1], {}_1P^2, {}_1F^0[\beta]\}$ e ${}_1F^{1..3}[w] = \{ {}_1F^1[a], {}_1F^2[b], {}_1F^3[\beta] \}$

Instante	i	i=2			
Estado	s_i	q_A			
Posição	p_i	3			
Fita	f_i	β	a	b	β
	j	0	1	2	3

A configuração de M no instante i=2 é

$${}_2C^w = {}_2C \cup {}_2F^{1..3}[w]$$

Onde ${}_2C = \{{}_2S[q_A], {}_2P^3, {}_2F^0[\beta]\}$ e ${}_2F^{1..3}[w] = \{ {}_2F^1[a], {}_2F^2[b], {}_2F^3[\beta] \}$

Intratabilidade

- Clausulas que descrevem as sequencias de configurações de uma máquina de turing para uma dada entrada→ ok
- Como descrever a função de transição?

Intratabilidade

Usando as funções de transição de M obtemos um conjunto de cláusulas C_δ

Considere a transição $\delta(q_0 , a) = (q_1,a ,D)$. Ela pode ser decomposta da seguinte maneira

$$\delta_Q(q_0 , a) = q_1 \; ; \; \delta_\Gamma(q_0 , a) = a \; ; \; \delta_D(q_0 , a) = D$$

$\boldsymbol{\delta_Q (q_0 , a) = q_1}$ pode ser expresso pelo seguinte condicional

$\mathbf{(s_i = q_0 \wedge p_i = j \wedge f_i (j) = a) \rightarrow s_{i+1} = q_1}$, para i=0,1,2 e j=0,1,2,3

Lembrando que $p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$, $\boldsymbol{\delta_Q (q_0 , a) = q_1}$ é representado por

$\mathbf{{}_iQ^j [q_0, a] = \sim {}_iS[q_0] \vee \sim {}_iP^j \vee \sim {}_iF^j[a] \vee {}_{i+1}S[q_1]}$, para i=0,1,2 e j=0,1,2,3

Intratabilidade

De forma similar (Lembrando $\delta(\mathbf{q_0}\ \mathbf{, a) = (q_1,a ,D)}$)

$\delta_\Gamma\ \mathbf{(q_0\ , a) = a}$ pode ser expresso por

${}_i\Gamma^{\,j}\ \mathbf{[q_0, a] = \sim {}_iS[q_0] \vee \sim {}_iP^j \vee \sim {}_iF^j[a] \vee {}_{i+1}F^j\ [a]}$, para i=0,1,2 e j=0,1,2,3

$\delta_D\ \mathbf{(q_0\ , a) = D}$ pode ser expresso por

${}_iD^j\ \mathbf{[q_0, a]{=}\sim {}_iS[q_0] \vee \sim {}_iP^j \vee \sim {}_iF^j[a] \vee {}_{i+1}P^{j+1}}$, para i=0,1,2 e j=0,1,2,3

Temos então ${}_i\mathbf{Q}^j\ \mathbf{[q_0, a]} \wedge {}_i\Gamma^{\,j}\ \mathbf{[q_0, a]} \wedge {}_iD^j\ \mathbf{[q_0, a]}$, para i=0,1,2 e j=0,1,2,3

Intratabilidade

Durante o processamento de um elemento, **os demais termos permanecem inalterados**. Logo, precisamos definir um critério de invariância, ou seja, se a posição corrente não é **j**, então o símbolo na posição **j** deve permanecer inalterado.

$$(\mathbf{p_i \neq j \wedge f_i\ (j) = a) \rightarrow f_{i+1}\ (j) = a}\text{, para } i=0,1,2 \text{ e } j=0,1,2,3$$

Isto é expresso por

$$\mathbf{{}_iI^{\,j}[\,\gamma\,] = {}_iP^j \vee \sim {}_iF^j[\gamma] \vee {}_{i+1}F^j[\,\gamma\,]}\text{, para } i=0,1,2 \text{ e } j=0,1,2,3 \text{ e } \gamma \in \Gamma$$

Juntando estas cláusulas obtemos C_I.

Intratabilidade

Unindo C_I , C_δ com ${}_0C^w = {}_0C \cup {}_0F^{1..3}[w]$, temos a seguinte situação para a primeira transição de M sobre a entrada **w=ab**.

Instante	i	i=0			
Estado	s_i	q_0			
Posição	p_i	1			
Fita	f_i	β	a	b	β
	j	0	1	2	3

Instante	i	i=1			
Estado	s_i	q_1			
Posição	p_i	2			
Fita	f_i	β	a	b	β
	j	0	1	2	3

	i=0		i=1
	${}_0S[q_0]$	${}_0Q^1[q_0,a]$	${}_1S[q_1]$
${}_0C$	${}_0P^1$	${}_0D^1[q_0,a]$	${}_1P^2$
	${}_0F^0[\beta]$	${}_0I^0\ [\beta]$	${}_1F^0[\beta]$
	${}_0F^1[a]$	${}_0\Gamma^1[q_0,a]$	${}_1F^1[a]$
${}_0F^{1..3}[u]$	${}_0F^2[b]$	${}_0I^2\ [b]$	${}_1F^2[b]$
	${}_0F^3[\beta]$	${}_0I^3\ [\beta]$	${}_1F^3[\beta]$

Intratabilidade

Teorema de Cook

O problema de Satisfabilidade (SAT) é NP - Completo.

Se existir um algoritmo polinomial deterministico para o problema de *satisfabilidade*, então todos os problemas em NP poderão ser resolvidos em tempo polinomial.

A prova consiste em

1. provar que SAT está em NP
2. mostrar que $L \leq_{p} L_{SAT}$ para qualquer $L \in NP$.

(Isto é feito construindo, a partir de um programa para MTND e uma entrada w, um conjunto de claúsulas ${}_{w}C^{t}$ de modo que ${}_{w}C^{t}$ é *satisfatível* sse $w \in L_M$ com $T_M(w) \leq p(n)$, com $|w| \leq n$)

Intratabilidade

Teorema de Cook

Usa definição da **Máquina de Turing não-determinista** (MTND).

A **MTND** é capaz de resolver qualquer problema em NP.

A prova inclui a descrição da máquina e de como instruções são executadas em termos de fórmulas booleanas.

Isto estabelece uma correspondência entre todo problema em NP (expresso por um programa na MTND) e alguma instância de SAT.

A solução de SAT corresponde à simulação da máquina executando o programa em cima da fórmula obtida.

Intratabilidade

Considere um programa M para MTND com um conjunto
Q = $\{q_0, q_1, q_A, q_R\}$ e um alfabeto $\Gamma=\{\beta, a,b\}$ e $\Sigma = \{a,b\}$.

Considere a entrada **w=abb**; as computações com tempo até 3 ; e as seguintes variáveis

$_i$**S[q]** **(s_i=q)** : M está no estado q no instante **i**.

$_i$**P^j** **(p_i= j)** : M está na posição j da fita no instante i**.**

$_i$**F^j [a] (f_i(j) =a)** : existe o símbolo a na posição j no instante **i**.

assumimos que
i= 0,1,2,3 (computações com tempo até 3) e
j= -2,…,0,…3,4 (posições possíveis com tempo até 3).

Intratabilidade

O conjunto de cláusulas será apresentado em 7 grupos

Grupo 1

O conjunto ${}_0C^w = {}_0C \cup {}_0F^{1..3}[w] \cup {}_0F^{4..4}[\beta]$, onde

${}_0C = \{{}_0S[q_0], {}_0P^1, {}_0F^0[\beta]\}$

${}_0F^{1..3}[w] = \{{}_0F^1[a], {}_0F^2[b], {}_0F^3[b]\}$

${}_0F^{4..4}[\beta] = \{{}_0F^4[\beta]\}$

Intratabilidade

Grupo 2

O conjunto de transições C_δ

Para cada $q \in Q$, símbolo de fita $\gamma \in \Gamma$, instante I=0,1,2,3 e posição de fita j= -2, …,0,…, 3,4, esse conjunto tem 3 cláusulas

$_i\mathbf{Q}^j\,[\mathbf{q}, \gamma] = \sim\, {}_i\mathbf{S}[\mathbf{q}] \vee \sim\, {}_i\mathbf{P}^j \vee \sim\, {}_i\mathbf{F}^j[\gamma] \vee\, {}_{i+1}\mathbf{S}[\delta_Q(\mathbf{q}, \gamma)_,]$ (próx. estado)

$_i\,\Gamma^j\,[\mathbf{q}, \gamma] = \sim\, {}_i\mathbf{S}[\mathbf{q}] \vee \sim\, {}_i\mathbf{P}^j \vee \sim\, {}_i\mathbf{F}^j[\gamma] \vee\, {}_{i+1}\mathbf{F}^j[\delta_\Gamma(\mathbf{q}, \gamma)_,]$ (novo simb)

$_i\mathrm{D}^j\,[\mathbf{q}, \gamma] = \sim\, {}_i\mathbf{S}[\mathbf{q}] \vee \sim\, {}_i\mathbf{P}^j \vee \sim\, {}_i\mathbf{F}^j[\gamma] \vee\, {}_{i+1}\mathbf{P}^{j+\delta D(\mathbf{q}, \gamma)}$, (próx. posição)

Intratabilidade

Grupo 3

Invariância local C_l

Para cada i=0,1,2,3, posição j= -2,…,0,…,3,4 e $\gamma \in \Gamma$, temos

${}_iI^{j}[\gamma] = {}_iP^j \vee \sim {}_iF^j[\gamma] \vee {}_{i+1}F^j[\gamma]$

Grupo 4

Grupo que possui o estado terminal de Aceitação.

Expressa que no instante 4, M estará no estado q_A

$C_4 = \{ {}_4S[q_A] \}$

Intratabilidade

Grupo 5

Conjunto de estados C_S . Para cada i=0,1,2,3 esse conjunto tem as seguintes cláusulas

${}_iS[+] = {}_iS[q_0] \vee {}_iS[q_1] \vee {}_iS[q_A] \vee {}_iS[q_R]$ (possíveis estados)

${}_iS(q_{k'}, q_{k''}) = \sim{}_iS[q_{k'}] \vee \sim{}_iS[q_{k''}]$ (estado único, M está em apenas um estado a cada **i**)

para $1 \leq k' < k'' \leq 4$

Grupo 6

Conjunto de Posições C_p . Para cada i=0,1,2,3 esse conjunto tem as seguintes cláusulas

${}_iP+ = {}_iP^{-2} \vee \ldots {}_iP^0 \vee \ldots \vee {}_iP^4$ (possíveis posições)

${}_iP(k', k'') = \sim{}_iP^{k'} \vee \sim{}_iP^{k''}$ (posição única do cabeçote da máquina) para $-2 \leq k' < k'' \leq 4$

Grupo 7

Conjunto C_F (Símbolos da Fita). Para cada i=0,1,2,3, posição j=-2,…,0,…,3,4 e $\gamma \in \Gamma$, temos

${}_iF^j[+] = {}_iF^j[\beta] \vee {}_iF^j[a] \vee {}_iF^j[b]$ (possíveis símbolos)

${}_iF^j(\gamma_{k'}, \gamma_{k''}) = \sim{}_iF^j[\gamma_{k'}] \vee \sim{}_iF^j[\gamma_{k''}]$ (símbolo único em cada posição na fita) para $1 \leq k' < k'' \leq 3$

Intratabilidade

O Conjunto C formado por estas cláusulas corresponde a uma computação de uma palavra dada.

$$C = {}_0C^{w} \cup C_{\delta} \cup C_{I} \cup C_{4} \cup C_{S} \cup C_{P} \cup C_{F}$$

Intratabilidade

Preparação para a Demonstração

Dados um programa M para MTND, uma palavra w $\in \Sigma^*$ e um natural t $\in$N, pode-se construir um conjunto de claúsulas ${}_wC^t$ sobre um conjunto ${}_wU^t$ de variáveis de modo que
${}_w\mathbf{C}^\mathbf{t}$ é *satisfatível* sse w $\in L_M$ com t $\leq$ p(n), onde n=|w|

A construção ${}_wC^t$ toma como base o conjunto ${}_wU^t$ de variáveis associadas às possíveis computações de M sobre w.

Os valores associados às variáveis do conjunto ${}_w\mathbf{U}^\mathbf{t}$ satisfarão o conjunto ${}_w\mathbf{C}^\mathbf{t}$ sse corresponderem às computações de M que aceitam a palavra w.

Intratabilidade

Sejam o conjunto de estados **$Q = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$**; o alfabeto dos símbolos da fita $\Gamma=\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m\}$ e n = | w |. Considere **q_2** o estado de aceitação e **q_3** o estado de rejeição.

O conjunto ${}_wU^t$ será constituído das seguintes variáveis

${}_iS[q]$ ($s_i=q$) - M está no estado q no instante **i**.

${}_iP^j$ ($p_i= j$) - M está na posição j da fita no instante **i**.

${}_iF^j[\gamma]$ ($f_i(j) =a$) - existe o símbolo a na posição j no instante **i**.

Considere i=0, 1 ,..., t e j= -t+1,..., 0, ...,t, t+1; $q\in Q$ e $\gamma \in \Gamma$

Intratabilidade

Grupo 1

A configuração de M no instante i=0 é descrita através do seguinte conjunto ${}_0C^w = {}_0C \cup {}_0F^{1..n}[w] \cup {}_0F^{n+1..t}[\beta]$, onde

${}_0C = \{{}_0S[q_1], {}_0P^1, {}_0F^0[\beta]\}$ {situação inicial}

${}_0F^{1..n}[w] = \{{}_0F^1[w_1], {}_0F^2[w_2], \ldots, {}_0F^n[w_n]\}$ {palavra de entrada}

${}_0F^{n+1..t}[\beta] = \{{}_0F^{n+1}[\beta], {}_0F^{n+2}[\beta], \ldots, {}_0F^t[\beta]\}$ {situação da fita à direita da sentença de entrada }

Intratabilidade

Grupo 2

O conjunto de transições C_δ é formado por

$_i\mathbf{Q}^j\,[\mathbf{q}, \gamma] = \sim {_i}\mathbf{S}[\mathbf{q}] \vee \sim {_i}\mathbf{P}^j \vee \sim {_i}\mathbf{F}^j[\gamma] \vee {_{i+1}}\mathbf{S}[\delta_Q(\mathbf{q}, \gamma)_{,}]$ (próx. estado)

$_i\,\Gamma^j\,[\mathbf{q}, \gamma] = \sim {_i}\mathbf{S}[\mathbf{q}] \vee \sim {_i}\mathbf{P}^j \vee \sim {_i}\mathbf{F}^j[\gamma] \vee {_{i+1}}\mathbf{F}^j[\delta_\Gamma(\mathbf{q}, \gamma)_{,}]$ (novo simb)

$_i D^j\,[\mathbf{q}, \gamma] = \sim {_i}\mathbf{S}[\mathbf{q}] \vee \sim {_i}\mathbf{P}^j \vee \sim {_i}\mathbf{F}^j[\gamma] \vee {_{i+1}}\mathbf{P}^{j+\delta_D(\mathbf{q}, \gamma)}$, (próx. posição)

Para cada q $\in$ Q, símbolo de fita $\gamma \in \Gamma$, instante i=0,1,…,t e posição de fita j= -t+1, …,0,…, t+1.

Intratabilidade

Grupo 3

Invariância local C_I

Para cada instante i=0,1,…,t; posição de fita j= -t+1, …,0,…, t+1 e símbolo $\gamma \in \Gamma$, temos

$$ {}_iI^j[\gamma] = {}_iP^j \vee \sim {}_iF^j[\gamma] \vee {}_{i+1}F^j[\gamma] $$

Grupo 4

Expressa que a máquina aceita a entrada em no máximo **t** passos.

$$ C_A = {}_1S[q_2] \vee {}_2S[q_2] \vee \ \ldots \vee {}_tS[q_2] $$

Intratabilidade

Grupo 5

Conjunto de estados C_S.

Para cada i=0,1,…,t esse conjunto tem as seguintes cláusulas

${}_iS[+] = {}_iS[q_1] \vee {}_iS[q_2] \vee \ldots \vee {}_iS[q_k]$ *(possíveis estados)*

${}_iS(q_{k'}, q_{k''}) = \sim{}_iS[q_{k'}] \vee \sim{}_iS[q_{k''}]$, para $1 \leq k' < k'' \leq k$ *(estado único, M está em apenas um estado a cada **i**)*

Grupo 6

Conjunto de Posições C_p .

${}_iP+ = {}_iP^{-t+1} \vee \ldots {}_iP^0 \vee {}_iP^1 \vee \ldots \vee {}_iP^{t+1}$ *(possíveis posições)*

${}_iP(k', k'') = \sim{}_iP^{k'} \vee \sim{}_iP^{k''}$ *(posição única)*

Para $-t+1 < k' < k'' \leq t+1$

Intratabilidade

Grupo 7

Conjunto C_F (Símbolos da Fita).

Para cada i=0,1,2,…,t posição j= -t+1,…0,…, t+1 e $\gamma \in \Gamma$, temos

$$ {}_iF^{j}[+] = {}_iF^{j}[\gamma_1] \vee {}_iF^{j}[\gamma_2] \vee \ldots \vee {}_iF^{j}[\gamma_m] \text{ \textit{(possíveis símbolos)}} $$

$$ {}_iF^{j}(\gamma_{k'}, \gamma_{k''}) = \sim{}_iF^{j}[\gamma_{k'}] \vee \sim{}_I F^{j}[\gamma_{k''}] \text{ \textit{(símbolo único)}} \text{ para } 1 \leq k' < k'' \leq m $$

O Conjunto C formado por estas cláusulas corresponde a uma computação de uma palavra dada.

$$ C = {}_0C^{w} \wedge C_{\delta} \wedge C_I \wedge C_A \wedge C_S \wedge C_P \wedge C_F $$

Logo, C é satisfazível sse há uma computação de M que aceita w no máximo em t passos.

Intratabilidade

Teorema de Cook : O problema SAT é NP - Completo

a) SAT $\in$NP

b) L $\in$NP logo L $\leq_p$ SAT

Considere um programa M para MTND que reconhece L e um polinômio **p** que limita a função de complexidade de M ($t_M(n)=O(p(n))$).

Para cada entrada $w \in \Sigma^*$ com comprimento $| w | \leq$ n construimos uma instância de ${}_wSAT^t = ({}_wC^t , {}_wU^t)$, através de uma redução algorítmica **f** de L para L_{SAT}.

Intratabilidade

Para verificar se **f** é polinomial, fazemos o seguinte, analisamos o conjunto $_wU^t$ composto por

$$_iS[q] \ , \ _iP^j \ \text{e} \ _iF^j[\gamma]$$

para i=0, 1 ,..., t e j= -t+1,..., 0, ...,t, t+1; $q \in Q$ e $\gamma \in \Gamma$ ($|Q|$=r e $|\Gamma|$ = s)

Note que

$$|\, _wU^t \,| = \mathbf{(t+1)(r) + (t+1)(2t) + (t+1)(2t)(s+1)}$$

Como t = p(n) , $|\, _wU^t \,| = O(p(n)^2)$

Fazendo o mesmo para as cláusulas $_wC^t$, temos $|_wC^t| = O(p(n)^3)$ (Olhar grupo 6)

Portanto a redução foi feita em tempo polinomial