UFRGS – Instituto de Matemática
Depto. de Matemática Pura e Aplicada
MAT01355 –Álgebra Linear I A
2ª PROVA – 08 de dezembro de 2009

1	2	3	4	5	Total

Nome: ______________________ Cartão: ____________ Turma: A3

- **Questão 1 :** Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine os autovalores de $\mathbf{A}$
b) Verifique se $\mathbf{A}$ é diagonalizável ou não, justificando sua resposta.

- **Questão 2 :** Sabendo que $\mathbf{v_1} = (-1, 0, 1)$ e $\mathbf{v_2} = (0, 1, 0)$ são autovetores de $\mathbf{A}_{3\times3}$ associados ao autovalor 2 e que

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

determine a matriz $\mathbf{A}$.

- **Questão 3 :** Considere $\mathbf{v} = (1, -1, 3) \in \mathbb{R}^3$ e W o plano de equação $x - 2y + z = 0$. Escreva o vetor $\mathbf{v}$ na forma $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \hat{\mathbf{v}}$, onde $\mathbf{u} \in W^{\perp}$ e $\hat{\mathbf{v}} \in W$.

- **Questão 4 :** Considere $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

(a) Encontre uma solução de mínimos quadrados para o sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
(b) Calcule a projeção ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre o espaço das colunas de $\mathbf{A}$.

- **Questão 5 :** Considere a forma quadrática $Q(x, y) = 2x^2 - 4xy - y^2$.

(a) Classifique esta forma quadrática, justificando sua resposta.

(b) Encontre uma matriz $\mathbf{P}$ cuja mudança de variável associada ($\mathbf{x} = \mathbf{Py}$) elimina os termos mistos da lei desta forma quadrática

(c) Escreva a nova lei determinada pela mudança em b).

(d) Faça um esboço do gráfico da cônica $Q(x, y) = 8$.

(1)

a) 1 e 2 (com multiplicidade 2)

b) Autovetores de A:

· $\lambda_2 = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 \text{ livre} \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A não é diagonalizável pois a dimensão do autoespaço associado a $\lambda = 2$ não é igual à multiplicidade do autovalor 2.

Obs.:

· $\lambda_1 = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1^{\cdot 3} & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{8} x_3 \\ 8x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{8} x_3 \\ x_3 \text{ livre} \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/8\, x_3 \\ -1/8\, x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 1/8 \\ -1/8 \\ 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{x_3 = 8} x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

(2) $A_{3\times 3}$

autovalor $\lambda_1 = 2$

autovetores de A associados a $\lambda_1 = 2$: v_1, v_2

Seja $v_3 = (-2, 1, 1)$. Se $A\vec{v_3} = \vec{v_3}$, então $\vec{v_3}$ é autovetor de A associado ao autovalor 1.

Como $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$ é LI (pois não são múltiplos entre si, e $\vec{v_3}$ é associado a um autovalor diferente de 2, temos que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ é LI.

Logo, $A_{3\times3}$ é diagonalizável e:

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Calculando P^{-1}:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

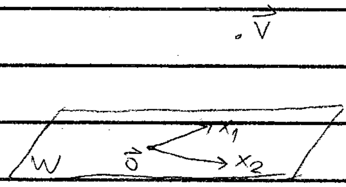
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} //$$

$v = (1,-1,3) \in \mathbb{R}^3$

(3)



$W: x - 2y + z = 0$

$(0,0,0) \in W$

$x_1\ (-1,0,1) \in W$

$x_2\ (2,1,0) \in W$

Assim, $W = \text{Span}\{x_1, x_2\}$, $\vec{x}_1 = (-1,0,1)$ e $\vec{x}_2 = (2,1,0)$

Verificar se $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ é ortogonal:

$$\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = -2 + 0 + 0 \neq 0 \iff \vec{x}_1 \not\perp \vec{x}_2$$

Antes de projetar $\vec{v}$ sobre W, para encontrar $\hat{v}$, precisamos de uma base ortogonal $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ p/ W:

$$\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = (-1,0,1)$$

$$\vec{v}_2 = x_2 - \text{proj}_{v_1} x_2 = \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1}\vec{v}_1 = \vec{x}_2 - \frac{(-2)}{2}v_1 =$$

$$= \vec{x}_2 + \vec{v}_1 = (1,1,1)$$

Calculando $\hat{v}$: $1-1+3$

$$\hat{v} = \text{proj}_W \vec{v} = \frac{v \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1}v_1 + \frac{v \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2}v_2 = \frac{2}{2}v_1 + \frac{3}{3}v_2 =$$

$$= v_1 + v_2 = (0,1,2)$$

Calculando u:

$$u = v - \hat{v} = (1,-1,3) - (0,1,2) = (1,-2,1)$$

Assim:

$$v = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{u}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\hat{v}}$$

4) a) Uma solução de mínimos quadráticos x' para o sistema $Ax = b$ satisfaz a equação $A^TAx' = A^Tb$.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 24 \end{bmatrix}$$

$$A^Tb = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 9 \\ 0 & 24 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1/2 \end{cases}$$

Logo:

$$x' = \begin{bmatrix} 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

b) Temos que $\text{proj}_{\text{ColA}}\, b = b' = Ax'$. Então:

$$\text{proj}_{\text{ColA}}\, b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(5) $Q(x,y) = 2x^2 - 4xy - y^2$

a) Basta encontrar os autovalores da matriz associada à forma quadrática:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$0 = \det(A - \lambda I$

$0 = \det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(-1-\lambda) - 4 = -2 - 2\lambda + \lambda + \lambda^2 - 4 =$

$= \lambda^2 - \lambda - 6 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.(-6)}}{2} \quad \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$

Como A possui autovalores positivos e negativos, $Q(x,y)$ é indefinida.

b) As colunas de P são os autovetores unitários de A.

. $\lambda_1 = 3$:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 \text{ livre} \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Um autovetor unitário assoc. a $\lambda_1 = 3$ é $u_1 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

. $\lambda_2 = -2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_1 \text{ livre} \end{cases}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Um autovetor unitário assoc. a $\lambda_2 = -2$ é $u_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

Logo:

$$P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

c) Fazendo $\vec{x} = P\vec{y}$, ; $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1 ; y_2)$, então:

$$Q(x_1, x_2) = \vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T D y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3y_1^2 - 2y_2^2$$

d) $Q(x_1, x_2) = 8$

$3y_1^2 - 2y_2^2 = 8$ hipérbole