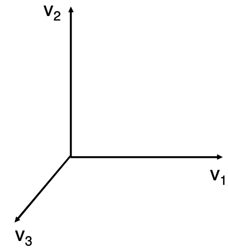
Fundamentos de Processamento de Imagens

Aulas 11 e 12

Domínio Frequência e a Transformada de Fourier

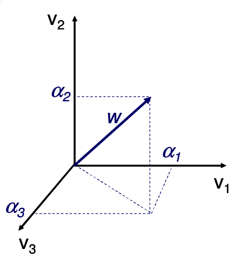
Analogia: Espaço Vetorial



Base canônica para o $\Re^3$:

$v_1 = (1,0,0)$
$v_2 = (0,1,0)$
$v_3 = (0,0,1)$

Representação de Vetores



Análise:

α_s é a projeção de w sobre v_s: $\alpha_s = w \bullet v_s$

$$\alpha_s = w_{\vec{i}} v_{s\vec{i}} + w_{\vec{j}} v_{s\vec{j}} + w_{\vec{k}} v_{s\vec{k}}$$

Síntese:

$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$
$= \Sigma\, \alpha_i v_i$

Representação

$$R(w) = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

Série de Fourier

- Qualquer função periódica pode ser representada como uma combinação linear de senos e cossenos de várias freqüências

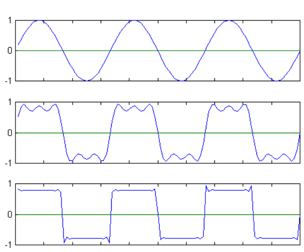
$$f(x) = \sum_{u=0}^{\infty} a_u \cos\left(\frac{2\pi ux}{L}\right) + b_u sen\left(\frac{2\pi ux}{L}\right)$$
$$= a_0 + \sum_{u=1}^{\infty} a_u \cos\left(\frac{2\pi ux}{L}\right) + b_u sen\left(\frac{2\pi ux}{L}\right)$$

a_k e **b_k** são chamados de coeficientes de Fourier (representação da função)
As funções seno e cosseno são chamadas **funções de base** da representação
O índice **u** representa as várias freqüências
L é o período da função *f(x)*

Série de Fourier Exemplo 1D

- Aproximando uma onda quadrada

$$a_u = 0, \forall u$$
$$b_u = \begin{cases} 1/u, \ para\ u\ ímpar \\ 0, \ para\ u\ par \end{cases}$$



$$g(x) = sen(x)$$

$$g(x) = sen(x) + (1/3)sen(3x) + (1/5)sen(5x)$$

$$g(x) = \sum_{u=1}^{51} b_u sen(ux)$$

Funções Ortogonais

- Dois vetores W, V $\in \Re^n$ são ortogonais se $W \bullet V = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i v_i = 0$$

- Uma função *A(x)* pode ser vista como um vetor de dimensão infinita
- Duas funções *A(x)* e *B(x)* são ortogonais no intervalo (a,b) se

$$\int_a^b A(x)B(x)dx = 0$$

Funções Ortogonais (Cont.)

- O conjunto formado pelas funções seno e cosseno é ortogonal, isto é:

(a) $$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

e

(b) $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, \; se \; m \neq n \\ L, \; se \; m = n \end{cases}$$

Funções Ortogonais (Cont.)

(a) $$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

- Da trigonometria: sen(A) cos(B) = (1/2)[sen(A-B) + sen(A+B)]
- Se m ≠ n

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[sen\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) + sen\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)\right]dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right)dx + \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)dx$$

mas

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = -\frac{L}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = -\frac{L}{k\pi}\cos(k\pi) + \frac{L}{k\pi}\cos(-k\pi) = 0$$

Se m = n

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

Funções Ortogonais (Cont.)

(b) $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \begin{cases} 0, \; se \; m \neq n \\ L, \; se \; m = n \end{cases}$$

- Da trigonometria: cos(A) cos(B) = (1/2)[cos(A-B) + cos(A+B)]
- sen(A) sen(B) = (1/2)[cos(A-B) - cos(A+B)]
- Se m ≠ n

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)\right]dx$$

mas

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{k\pi}sen\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L} = \frac{L}{k\pi}sen(k\pi) - \frac{L}{k\pi}sen(-k\pi) = 0$$

O caso da função seno é similar:

$$= \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{L}\right)\right]dx = 0$$

Funções Ortogonais (Cont.)

- Se m = n

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-L}^{L} = L$$

e

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[1 - \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right)\right]dx = \frac{1}{2}x\Big|_{-L}^{L} = L$$

Série de Fourier em 2D

- No caso de funções 2D

$$f(x,y) = \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} a_{u,v}\cos\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right) + b_{u,v}sen\left(2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)\right)$$

- Neste caso, *M* representa o período ao longo da direção *x* e *N* representa o período ao longo da direção *y*
- A representação de *f(x,y)* pode ser vista como duas matrizes bidimensionais de coeficientes

Imagens = Funções 2D

- Uma imagem pode ser encarada como uma função
  - $I: U \subset \Re^2 \rightarrow C \subset \Re^n$
- No caso de uma imagem digital tem-se:
  - $I_d: U' \rightarrow C'$
  - $U' = \{(x_i, y_j) \in U : x_i = i\Delta x, \; y_j = j\Delta y; \; i, j \in Z\}$
- Exemplo
  - Uma imagem monocromática pode ser vista como uma função de associa a cada pixel (x,y) da imagem um valor no intervalo [0,255]

Imagens = Funções 2D

- Uma imagem pode ser encarada como uma função
  - I: U ⊂ $\Re^2$ → C ⊂ $\Re^n$

imagem

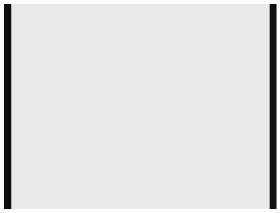


Imagem como função

Imagens = Funções 2D

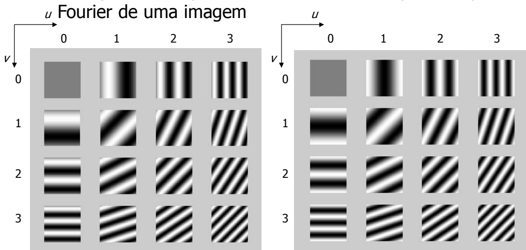
- Uma imagem pode ser encarada como uma função
  - I: U ⊂ $\Re^2$ → C ⊂ $\Re^n$

imagem

Imagem como função

Funções de Base em 2D

- Exemplos de funções de base usadas na representação de Fourier de uma imagem



$sen(2\pi(ux+vy)/L)$ $\cos(2\pi(ux+vy)/L)$

Tranformada de Fourier

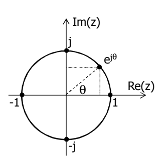
- Projeta uma função *f* na base ortogonal formada pelas funções seno e cosseno
- Produz coeficientes (complexos) da representação nesta base
- Cada coeficiente mede a ocorrência de determinada frequência na função *f*
- Caso a função não seja periódica, é tratada como um período de uma função peródica

Tranformada de Fourier

- Em 1D

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(2\pi ux) - jsen(2\pi ux))dx$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j2\pi ux}dx$$

- Fórmula de Euler
  - $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j*sen(\theta)$



- Em 2D

$$F(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)e^{-j2\pi(ux+vy)}dxdy$$

Tranformada Inversa de Fourier

- Restaura a função original a partir dos coeficientes de sua representação
- Obtida substiuindo-se *F(u,v)* por *f(x,y)* e vice-versa e trocando-se o sinal do expoente

$$f(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(u,v)e^{j2\pi(ux+vy)}dudv$$

- Similar em 1D

Tranformada Discreta de Fourier (DFT)

- A transformada de Fourier de uma função discreta de uma variável, f(x), com x = 0, 1, 2, ..., M-1 é dada por

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{-j2\pi ux/M}$$

- Sua inversa (IDFT) é dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{u=0}^{M-1} F(u)\, e^{j2\pi ux/M}$$

- A transformada discreta de Fourier e sua inversa garantidamente existem

Tranformada Discreta de Fourier em 2D

- Imagens digitais são funções discretas com suporte limitado
- A transformada de Fourier de uma imagem NxM é dada por

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{yv}{N}\right)}$$

- Sua inversa é dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)\, e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{yv}{N}\right)}$$

- *F(u,v)* $\in$ *C*, *f(x,y)* $\in \Re$. Na prática, a IDFT pode gerar valores imaginários residuais por erros de arrendodamento

Espectros de Amplitude e Fase

- *F(u,v)* é um número complexo
  - Sejam *R(u,v)* a parte real e *I(u,v)* a parte imaginária
- Isoladamente, *R(u,v)* e *I(u,v)* não fornecem muita informação
- Espectro de Amplitude (ou espectro de Fourier)
  - Amplitudes das imagens de base na representação de Fourier
  - Importante em operações de realce

$$|F(u,v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

- Espectro de Fase

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left(\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right)$$

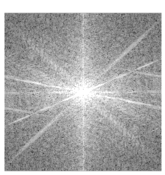
Espectro de Potência

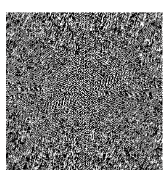
- Quadrado do espectro de amplitude

$$P(u,v) = |F(u,v)|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

Exemplos de espectros


imagem original


espectro de amplitude (após shift)

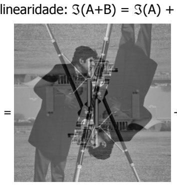

espectro de fase (após shift)

Componentes Reais e Imagnárias

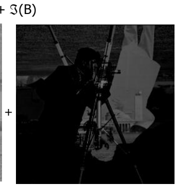
Por linearidade: $\Im$(A+B) = $\Im$(A) + $\Im$(B)


imagem original

=


apenas componentes reais (1)

+

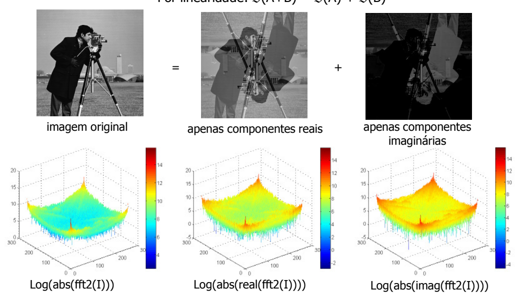

apenas componentes imaginárias (2)

(1) Obtido pela ift após eliminar as componentes imaginárias da transformada
(2) Obtido pela ift após eliminar as componentes reais da transformada

Componentes Reais e Imagnárias

O uso de Log nos gráficos se deve à enorme disparidade entre as magnitudes dos coeficientes

Por linearidade: $\Im(A+B) = \Im(A) + \Im(B)$



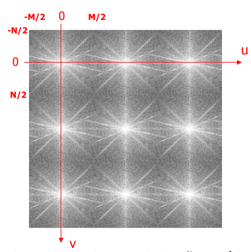
 Note que as escalas são diferentes

Propriedades da DFT

- A DFT apresenta algumas propriedades (incomuns)
  1) Periodicidade
     - Seja uma imagem com dimensões NxM, F(u,v) se repete infinitamente em ambas as direções
     - F(u,v) = F(u+M, v) = F(u, v+N) = F(u+M, v+N)
  2) Simetria com relação ao complexo conjugado
     - A DFT opera sobre números complexos, mas os canais de uma imagem assumem valores reais e neste caso:
     - F(u,v) = F*(u,v) e, portanto: |F(u, v)| = |F(-u, -v)|

Propriedades da DFT

- Devido à periodicidade e à simetria conjugada, tem-se:



Espectro de Amplitude de parte da função periódica infinita *F(u,v)*

Periodicidade

f(x) é um número real

- Em um sinal 1D discreto contendo M amostras, tem-se:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-2\pi j u x}{M}} \quad \text{e} \quad e^{-2\pi j u x} = \cos(2\pi u x) - j\sin(2\pi u x)$$

Logo

$$F(u+M) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-2\pi j (u+M) x}{M}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \left(e^{\frac{-2\pi j u x}{M}} e^{\frac{-2\pi j M x}{M}} \right) = F(u)$$

$$e^{-2\pi j x} = \underbrace{\cos(2\pi x)}_{1} - j\underbrace{\sin(2\pi x)}_{0}$$

Periodicidade

- Em um sinal 1D discreto contendo M amostras, tem-se:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-2\pi j u x}{M}} \quad \text{e} \quad e^{-2\pi j u x} = \cos(2\pi u x) - j\sin(2\pi u x)$$

Logo

$$F(u-M) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-2\pi j (u-M) x}{M}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \left(e^{\frac{-2\pi j u x}{M}} e^{\frac{2\pi j M x}{M}} \right) = F(u)$$

$$e^{2\pi j x} = \underbrace{\cos(2\pi x)}_{1} + j\underbrace{\sin(2\pi x)}_{0}$$

Simetria Complexo Conjugado

- Em um sinal 1D discreto contendo M amostras, tem-se:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-2\pi j u x}{M}} \quad \text{e} \quad e^{-2\pi j u x} = \cos(2\pi u x) - j\sin(2\pi u x)$$

Logo

$$F(-u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{2\pi j u x}{M}} = F^*(u)$$

Simetria Complexo Conjugado

- Em um sinal 1D discreto contendo M amostras, tem-se:

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-2\pi jux}{M}}$$ e $$e^{-2\pi jux} = \cos(2\pi ux) - j\sin(2\pi ux)$$

Logo

$$F(M-u) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x)\, e^{\frac{-2\pi j(M-u)x}{M}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) \left(e^{\frac{-2\pi jMx}{M}} e^{\frac{2\pi jux}{M}} \right) = F^*(u)$$

$$|F(u)| = |F(-u)| = |F(M-u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

Exercícios

- Verificar que as propriedades de periodicidade e simetria do complexo conjugado apresentadas em 1D também valem para 2D

Simetria ≠ Redundância

- A simetria no espectro de amplitude decorre de

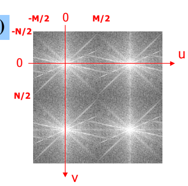
$$|F(u,v)| = |F(-u,-v)| = |F(M-u, N-v)| = \sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}$$

- Que por sua vez decorre de

$$F(u,v) = F^*(-u,-v) = F^*(M-u, N-v)$$

- De modo geral, não há repetição nos coeficientes da transformada

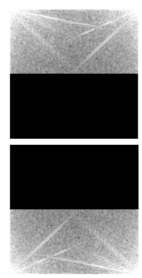
Máximo valores de freqüências: M/2 e N/2



Reconstrução

A partir de uma parte do espectro apenas


Imagem original

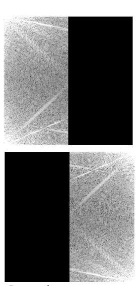

Parte do espectro


Reconstrução

Reconstrução

A partir de uma parte do espectro apenas


Imagem original

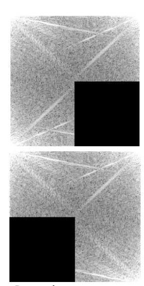

Parte do espectro


Reconstrução

Reconstrução

A partir de uma parte do espectro apenas

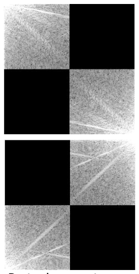

Imagem original


Parte do espectro


Reconstrução

Reconstrução
A partir de uma parte do espectro apenas

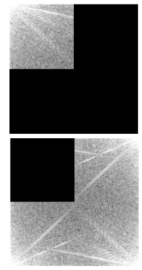

Imagem original


Parte do espectro


Reconstrução

Reconstrução
A partir de uma parte do espectro apenas


Imagem original


Parte do espectro


Reconstrução

Custo da DFT

- Custo da DFT para uma imagem de NxN pixels é $O(N^4)$
  - O cálculo de $F(u,v)$ envolve todos os pixels da imagem $O(N^2)$
  - Há $O(N^2)$ valores de $F(u,v)$ a calcular

$$F(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)\, e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M}+\frac{yv}{N}\right)}$$

- Assumindo que a multiplicação de números complexos consuma um microsegundo (10^{-6} seg.), a DFT de uma imagem com 1024x1024 pixels levaria 12 dias!!!

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- Explora a separabilidade da transfomada de Fourier
  - 1D FFT ao longo da linhas (produz um resultado intermediário)
  - 1D FFT ao longo das colunas do resultado intermediário
- Uma FFT de tamanho N pode ser escrita como a soma de duas FFTs de tamanho N/2 cada
  - Se N é potência de 2, aplica-se recursivamente com custo $O(N\log_2 N)$
- Devido à separabilidade, a FFT é aplicada a N linhas e depois a N colunas de tamanho N
  - Custo Final = $2N^2\log_2 N = O(N^2\log_2 N)$