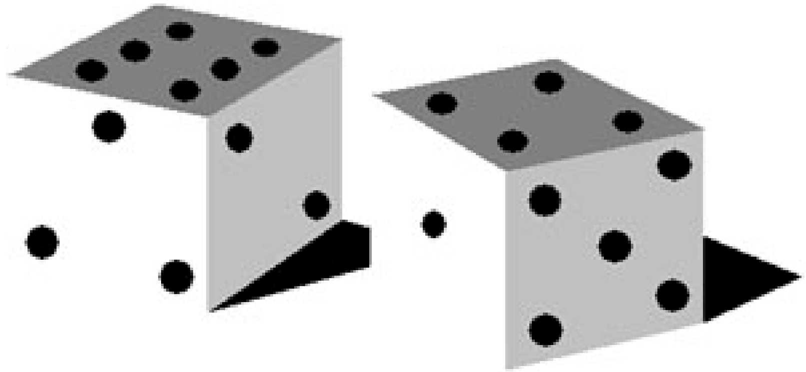


Probabilidade 2

Prof. Lorí Viali, Dr.

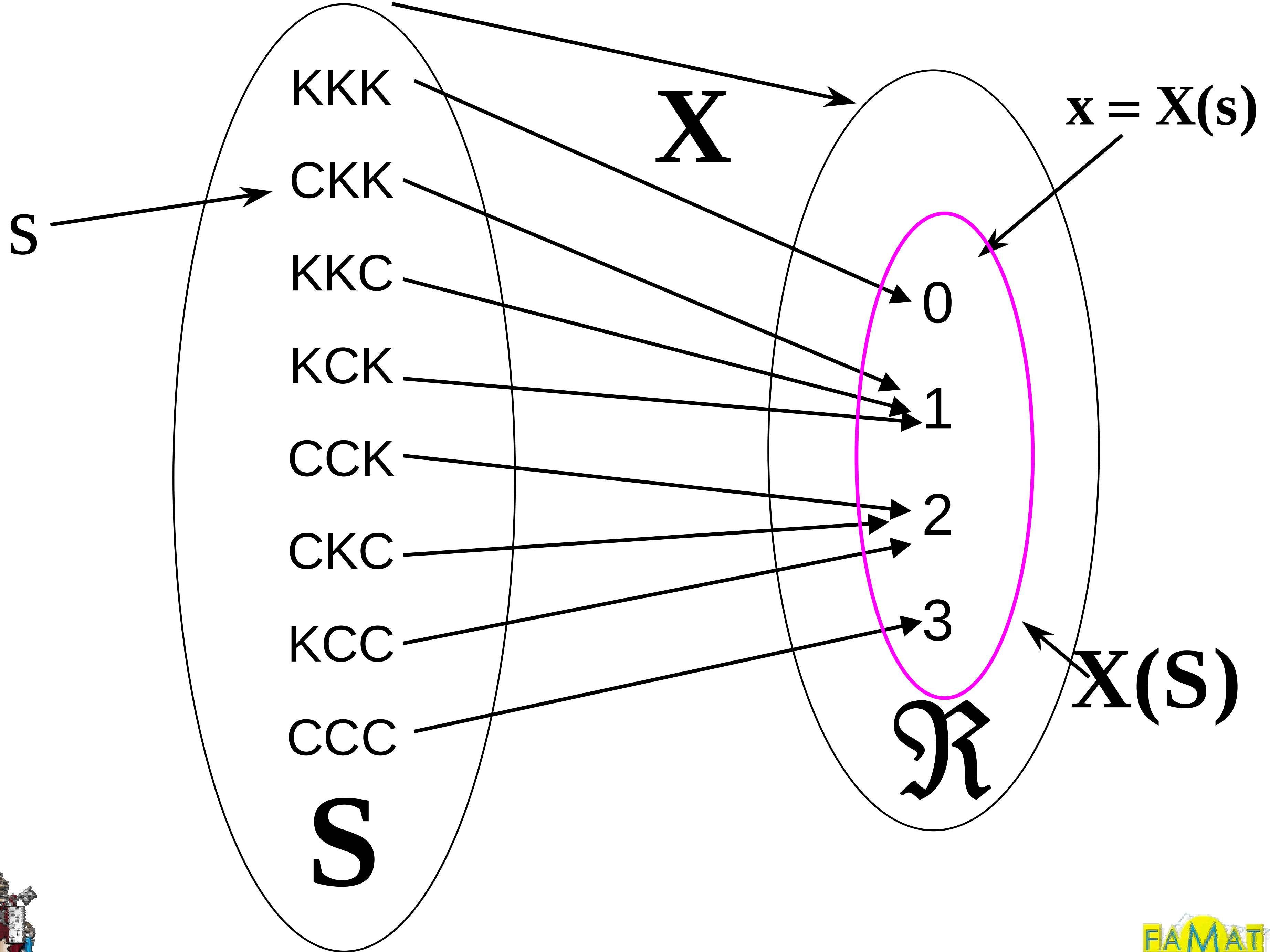
viali@mat.pucrs.br

http://www.pucrs.br/~viali/

Porto Alegre, agosto de 2002

Variável

Aleatória


KKK
CKK
KKC
KCK
CCK
CKC
KCC
CCC
S
s
X
x = X(s)
0
1
2
3
X(S)
ℜ

Variável Aleatória

Uma função **X** que associa a cada elemento de S ($s \in S$) um número real $x = X(s)$ é denominada **variável aleatória**.

Conjunto de valores

O conjunto formado por todos os valores "x", isto é, a imagem da variável aleatória X, é denominado de conjunto de valores de X.

$$\mathbf{X(S) = \{ x \in \Re \,/\, X(s) = x \}}$$

Tipos de variáveis

Conforme o conjunto de valores – X(S) – uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua.

Variável Discreta (VAD)

Se o conjunto de valores for **finito** ou então **infinito enumerável** a variável é dita discreta.

Variável Contínua (VAC)

Se o conjunto de valores for **infinito não enumerável** então a variável é dita contínua.

Variável Aleatória Discreta

A função de probabilidade

A função de probabilidade (fp) de uma VAD é a função que associa a cada $\mathbf{x_i \in X(S)}$ o número $\mathbf{f(x_i) = P(X = x_i)}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$\mathbf{f(x_i) \geq 0}$, para todo “i”

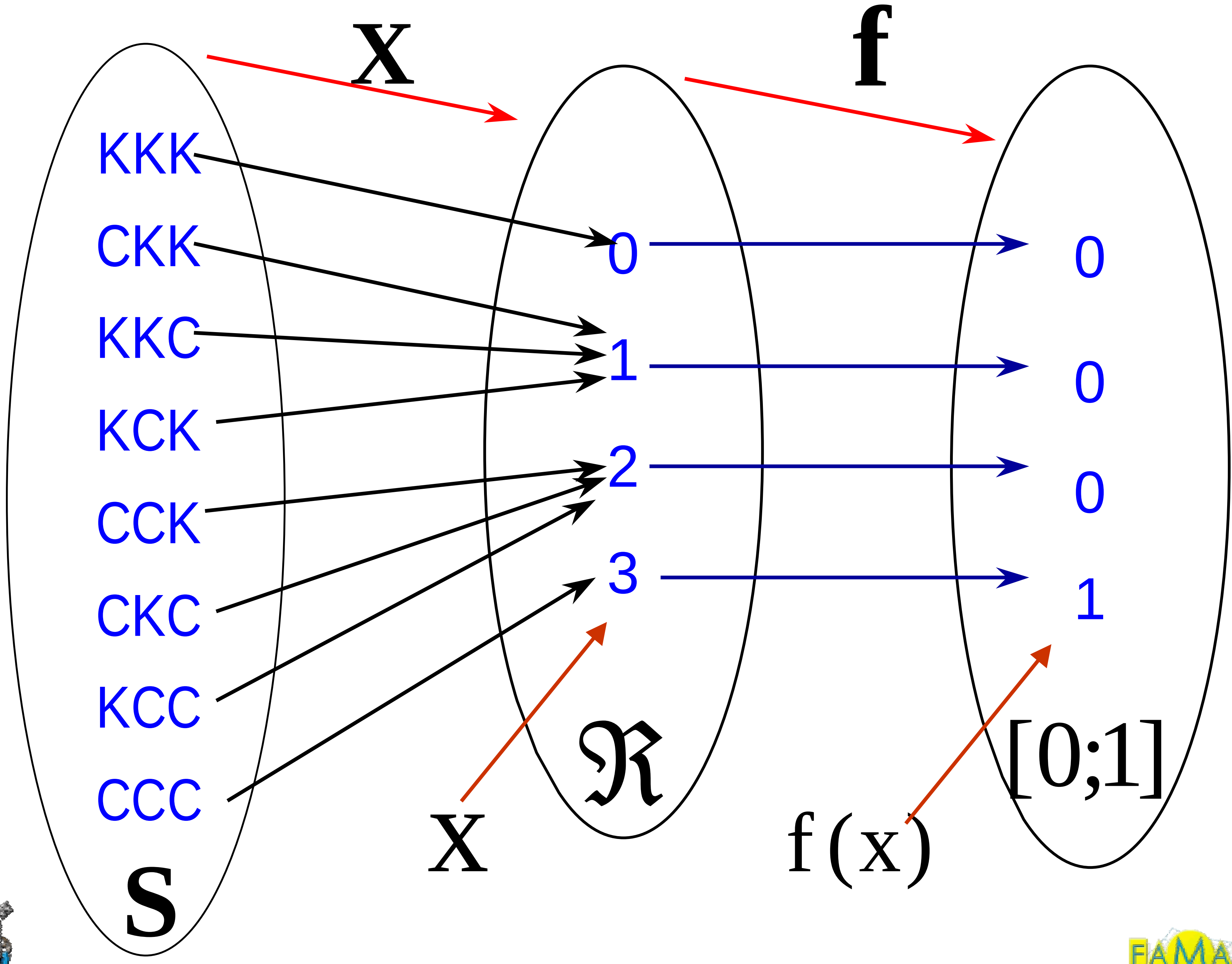
$\mathbf{\sum f(x_i) = 1}$

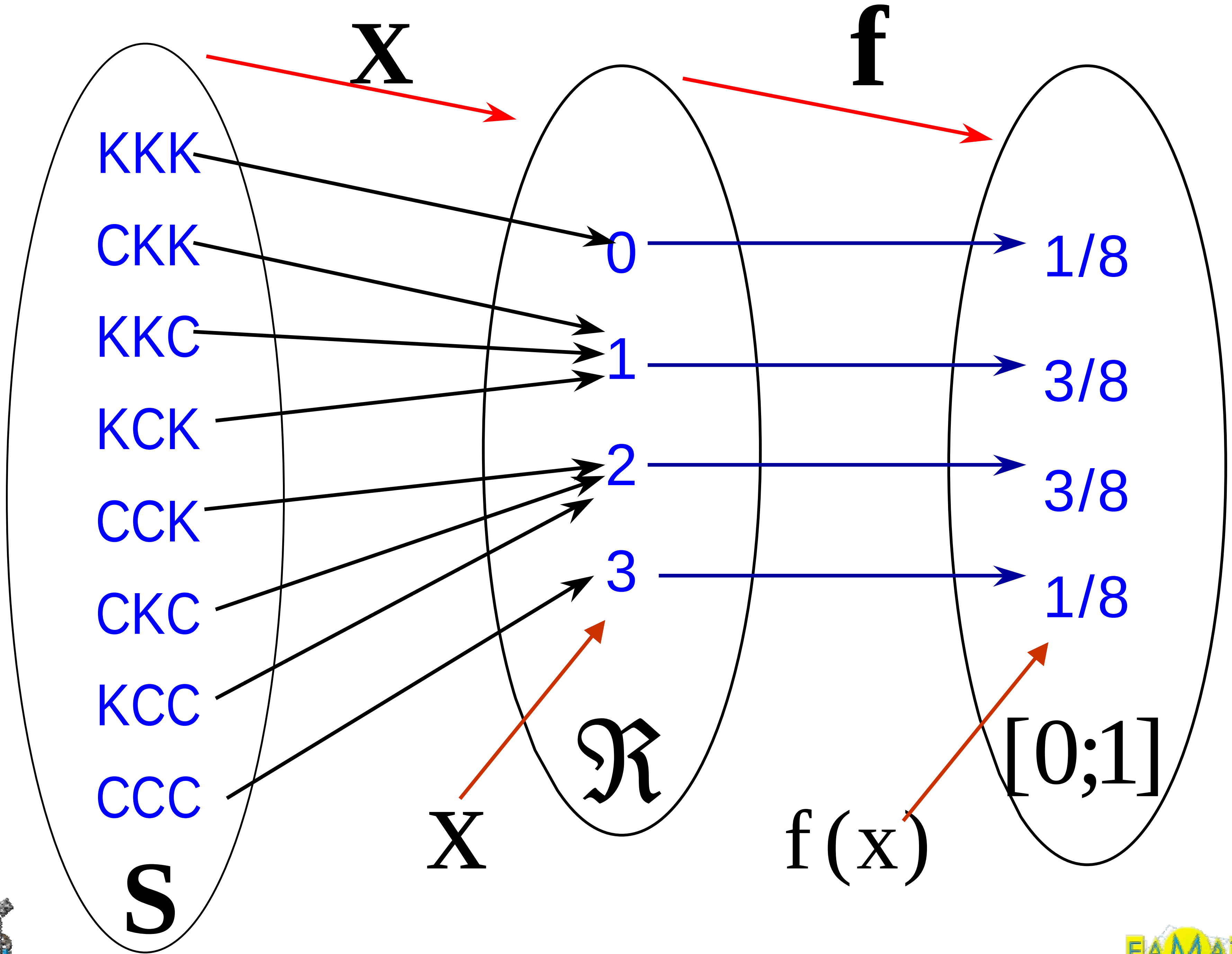
A distribuição de probabilidade

A coleção dos pares **[x_i, f(x_i)]** para i = 1, 2, 3, ... é denominada de **distribuição de probabilidade** da VAD X.

Exemplo

Suponha que uma moeda equilibrada é lançada três vezes. Seja X = “número de caras”. Então a distribuição de probabilidade de X é:


X
f
KKK
CKK
KKC
KCK
CCK
CKC
KCC
CCC
S
0
1
2
3
ℜ
X
0
0
0
1
[0;1]
f(x)


X
f
KKK
CKK
KKC
KCK
CCK
CKC
KCC
CCC
S
0
1
2
3
ℜ
X
1/8
3/8
3/8
1/8
[0;1]
f(x)

Exemplo

Suponha que um par de dados é lançado. Então X = "soma do par" é uma variável aleatória discreta com o seguinte conjunto de valores:

Como $X((a, b)) = a + b$, o conjunto de valores de X é dado por:

$X(S) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , 10, 11, 12\}$

A função de probabilidade $f(x) = P(X = x)$, associa a cada $x \in X(S)$, um número no intervalo [0; 1] dado por:

$$\mathbf{f(x) = P(X = x) = P(X(s) = x) =}$$

$$\mathbf{= P([x \in X(S) \,/\, X(s) = x\})}$$

Desta forma:

$f(2) = P(X = 2) = P\{(1,1)\} = 1/36$

$f(3) = P(X = 3) = P\{(1,2), (2, 1)\} = 2/36$

....

$f(11) = P(X=11) = P\{(6, 5), (5, 6)\} = 2/36$

$f(12) = P(X = 12) = P\{(6, 6)\} = 1/36$

A distribuição de probabilidade será:

A distribuição de probabilidade de X será então:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Σ
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	**1**

Representação de uma Distribuição de Probabilidade

Através de:

- uma tabela
- uma expressão analítica (fórmula)
- um diagrama

Tabela

Seja X = “número de caras”, obtidas no lançamento de 4 moedas honestas. Então a distribuição de X é a dada ao lado.

x	f(x)
0	1/16
1	4/16
2	6/16
3	4/16
4	1/16
Σ	1

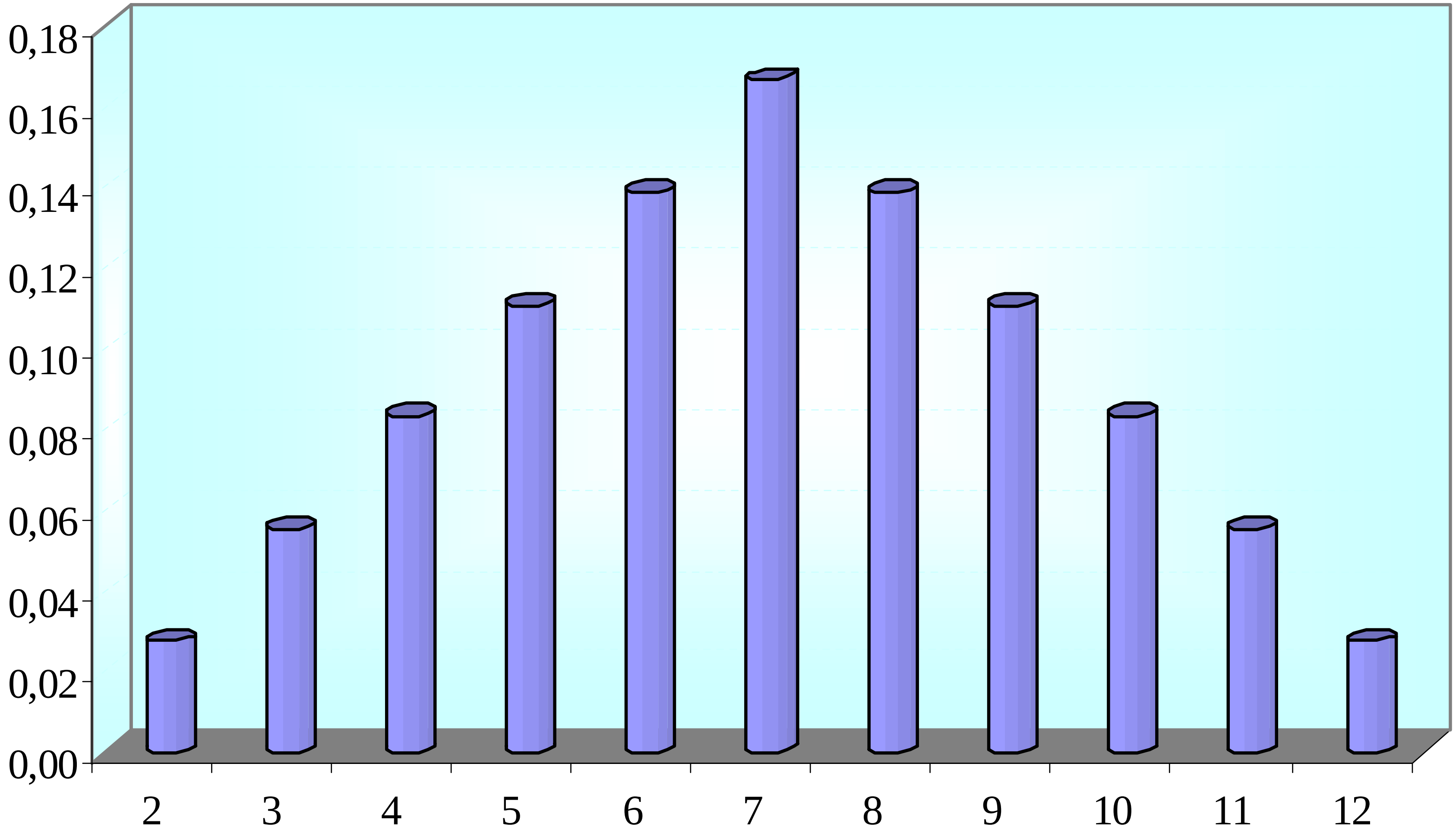
Expressão Analítica

Considere X = "soma do par", no lançamento de dois dados equilibrados, então:

$$\mathbf{f} : \mathbf{X(S)} \rightarrow \Re$$

$$x \rightarrow \begin{cases} (x - 1)/36 & \text{se } x \leq 7 \\ (12 - x - 1)/36 & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

Diagrama



VAD - Caracterização

(a) Expectância, valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum x.f(x) = \sum x.P(X = x)$$

(b) Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sum f(x)(x-\mu)^2} = \sqrt{\sum x^2 f(x) - \mu^2}$$

Exemplo

Calcular o valor esperado e a variabilidade da variável X = "número de caras" no lançamento de quatro moedas honestas.

Cálculos

x	$f(x)$	$x.f(x)$	$x^2f(x)$
0	1/16	0	0
1	4/16	4/16	4/16
2	6/16	12/16	24/16
3	4/16	12/16	36/16
4	1/16	4/16	16/16
Σ	**1**	**32/16**	**80/16**

Resultados

(a) Expectância ou valor esperado

$$\mu = E(X) = \sum x.f(x) = \frac{32}{16} = 2 \text{ caras}$$

(b) Desvio padrão

$$\sigma = \sqrt{\sum x^2 f(x) - \mu^2} = \sqrt{\frac{80}{16} - 2^2} = \sqrt{5-4} = 1$$

Outros Resultados

(c) Moda

$$m_o = 2 \text{ caras}$$

(d) Mediana

$$m_e = 2 \text{ caras}$$

Modelos Discretos de Probabilidade

- **Bernoulli**
- **Binomial**
- **Hipergeométrica**
- **Poisson**

Bernoulli

EXPERIMENTO

Qualquer um que corresponda a apenas dois resultados. Estes resultados são anotados por “0” ou “fracasso” e “1” ou “sucesso”. A probabilidade de ocorrência de “sucesso é representada por “p” e a de insucesso por “q = 1 – p”.

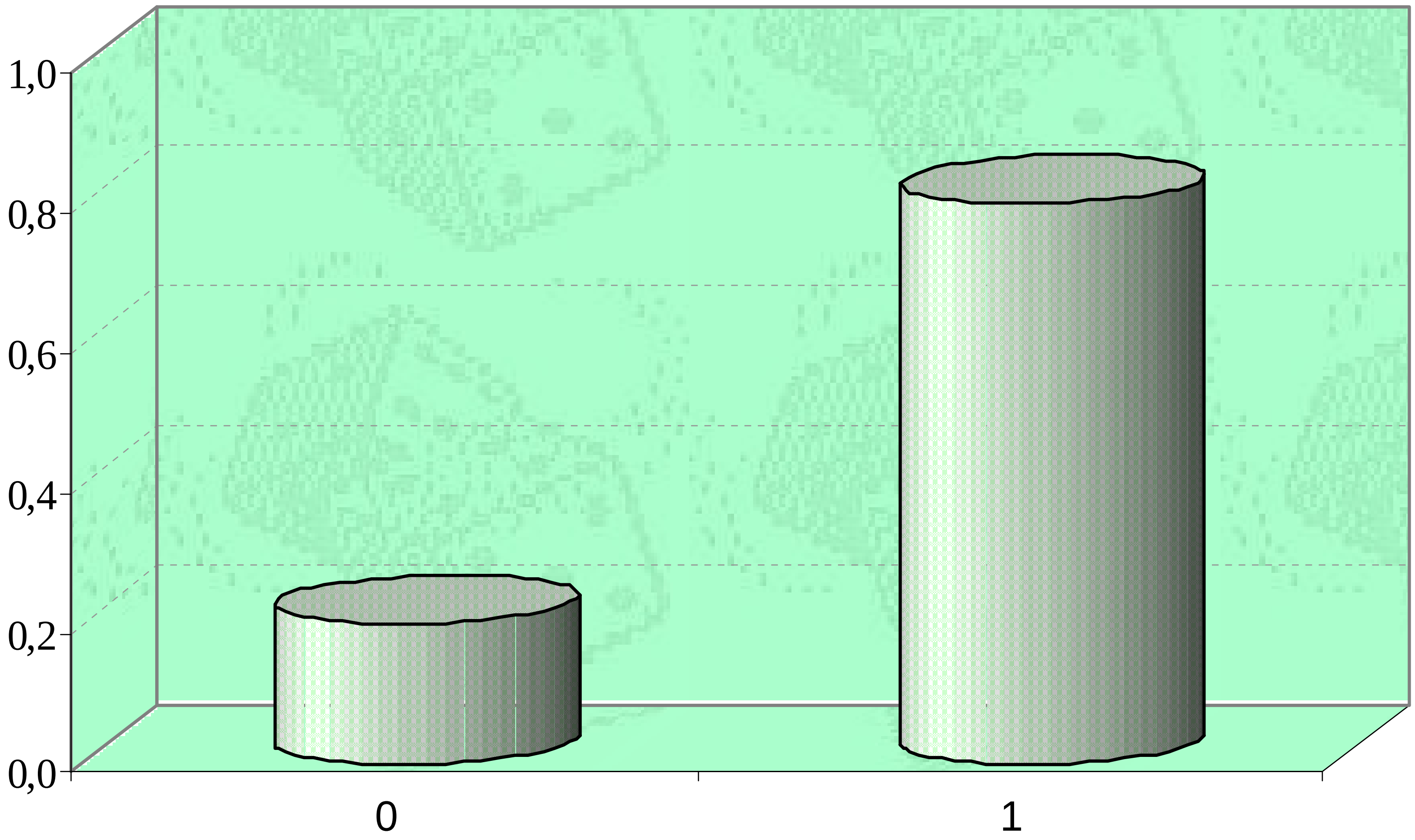
Conjunto de Valores

$$X(S) = \{0, 1\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 1 - p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

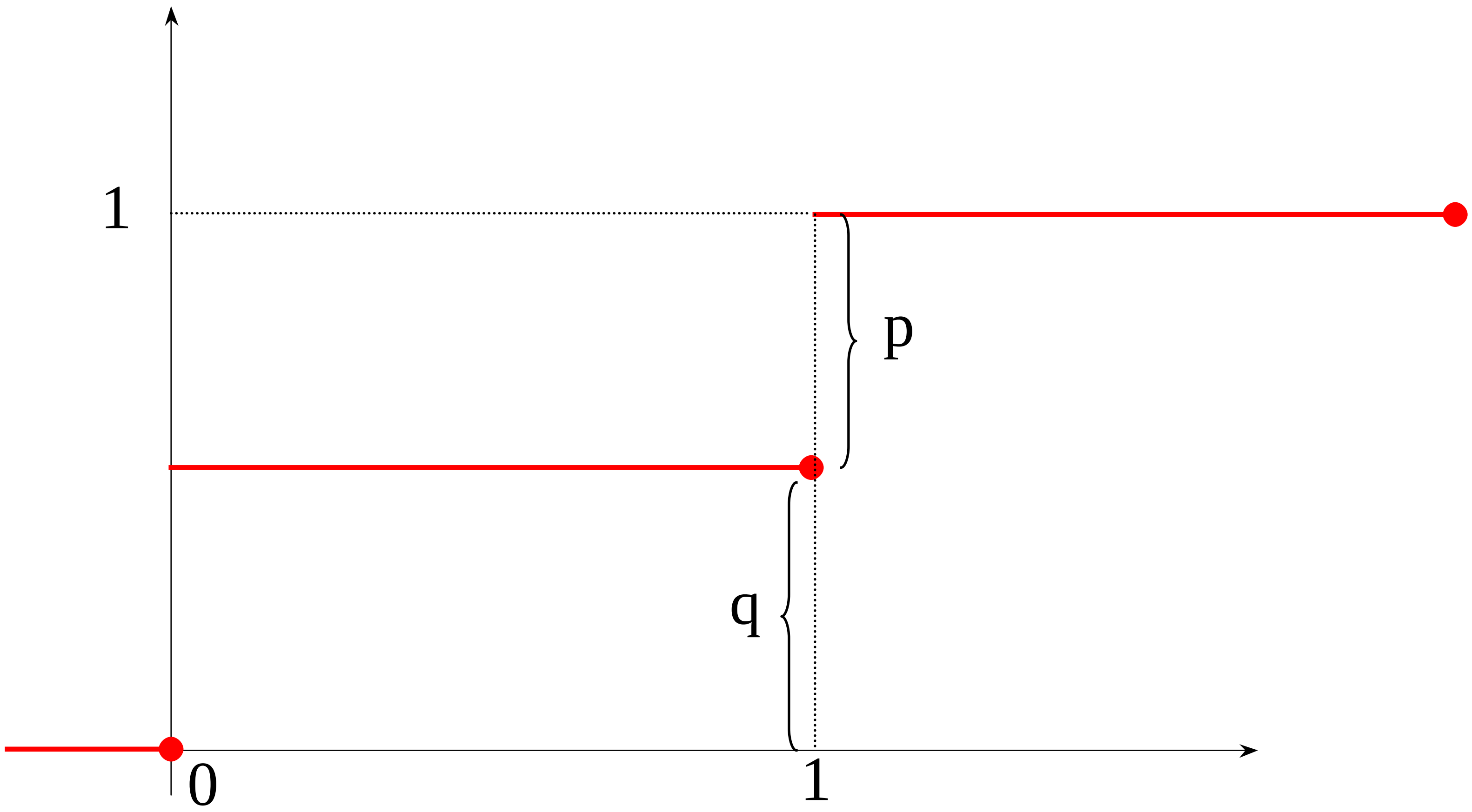
A Função de Probabilidade (fp)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ q & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Função de Distribuição



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = 0.q + 1.p = p$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$= (0^2.q + 1^2.p) - p^2 =$$

$$= p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Exemplo

Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja X = "o número de circuitos rejeitados em um teste". Determine a distribuição de X.

Como se trata de um único teste, a variável X é Bernoulli com p =10%, assim a distribuição é:

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0{,}9 & \text{se } x = 0 \\ 0{,}1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Binomial

EXPERIMENTO

Como existem apenas duas situações: A ocorre e A não ocorre, pode-se determinar a probabilidade de A não ocorrer como sendo q = 1 – p.

A VAD definida por X = “número de vezes que A ocorreu nas ‘n’ repetições de E” é denominada BINOMIAL.

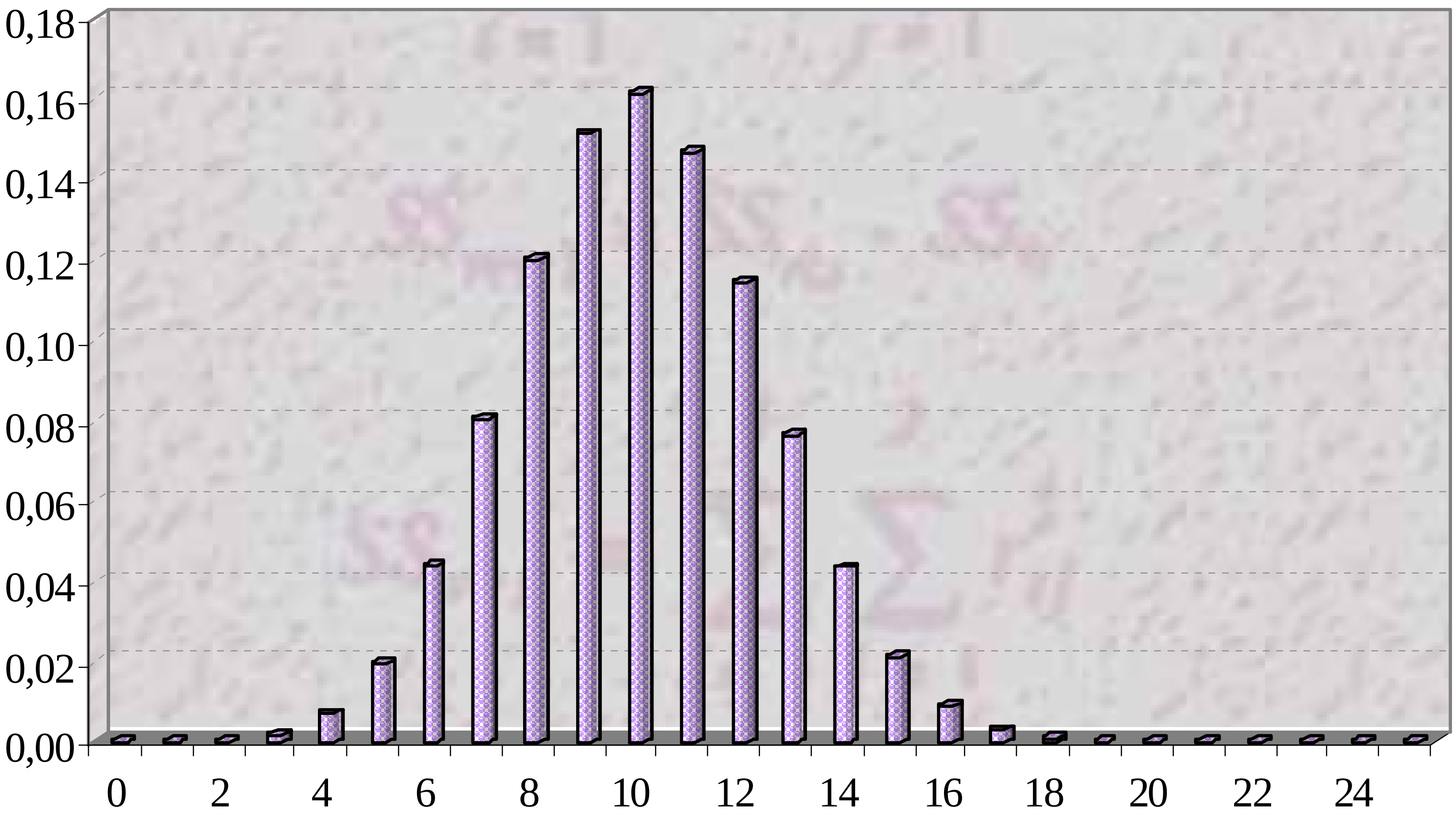
Conjunto de Valores

$$X(S) = \{0, 1, 2, 3, ..., n\}$$

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

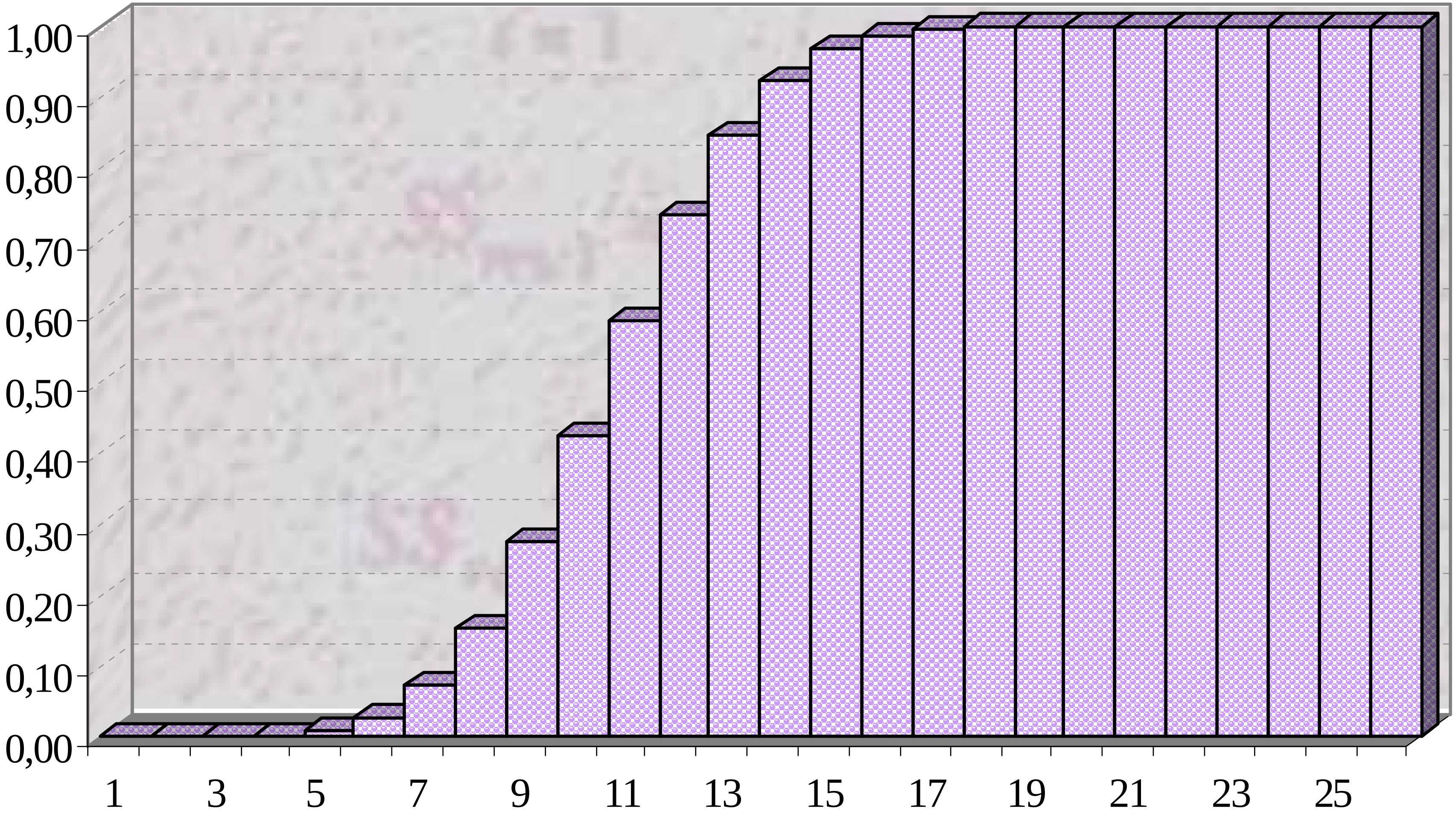
A Função de Probabilidade (fp)



A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} & \text{se } 0 \leq x \leq n \\ 1 & \text{se } x > n \end{cases}$$

Função de Distribuição



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \sum x.f(x) = \sum x.\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = np$$

Variância

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$E(X^2) = \sum x^2.\binom{n}{x} p^x q^{n-x} = n(n-1)p^2 + np$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 =$$

$$n(n-1)p^2 + np - (np)^2 =$$

$$= -np^2 + np = np(1-p) = npq$$

Assim:

$$E(X) = np$$

$$\sigma_X = \sqrt{npq}$$

Exemplo

Suponha que um circuito é testado e que ele seja rejeitado com probabilidade 0,10. Seja X = “o número de circuitos rejeitados em 10 testes”. Determine a distribuição de X.

Como se tratam de 10 testes a variável X é Binomial com p =10%, assim a distribuição é:

$$f(x) = P(X = x) = \binom{10}{x}(0,1)^{x}.(0,9)^{10-x}$$

$$\text{para } x = 0, 1, 2, \ldots, 10$$

Hipergeométrico

EXPERIMENTO

A distribuição Binomial é deduzida com base em “n” repetições de um experimento de maneira independente (isto é, p = constante), ou retiradas com reposição de uma população finita.

EXPERIMENTO

Se a experiência consistir na seleção de objetos, **sem reposição**, de uma população finita, de tamanho “N”, onde “r” apresentam uma característica “N – r” não apresentam esta característica, então existirá dependência entre as repetições.

EXPERIMENTO

Neste caso a variável aleatória **X** = "número de objetos com a característica **r** em uma amostra de tamanho **n**", terá uma distribuição denominada de Hipergeométrica.

Conjunto de Valores

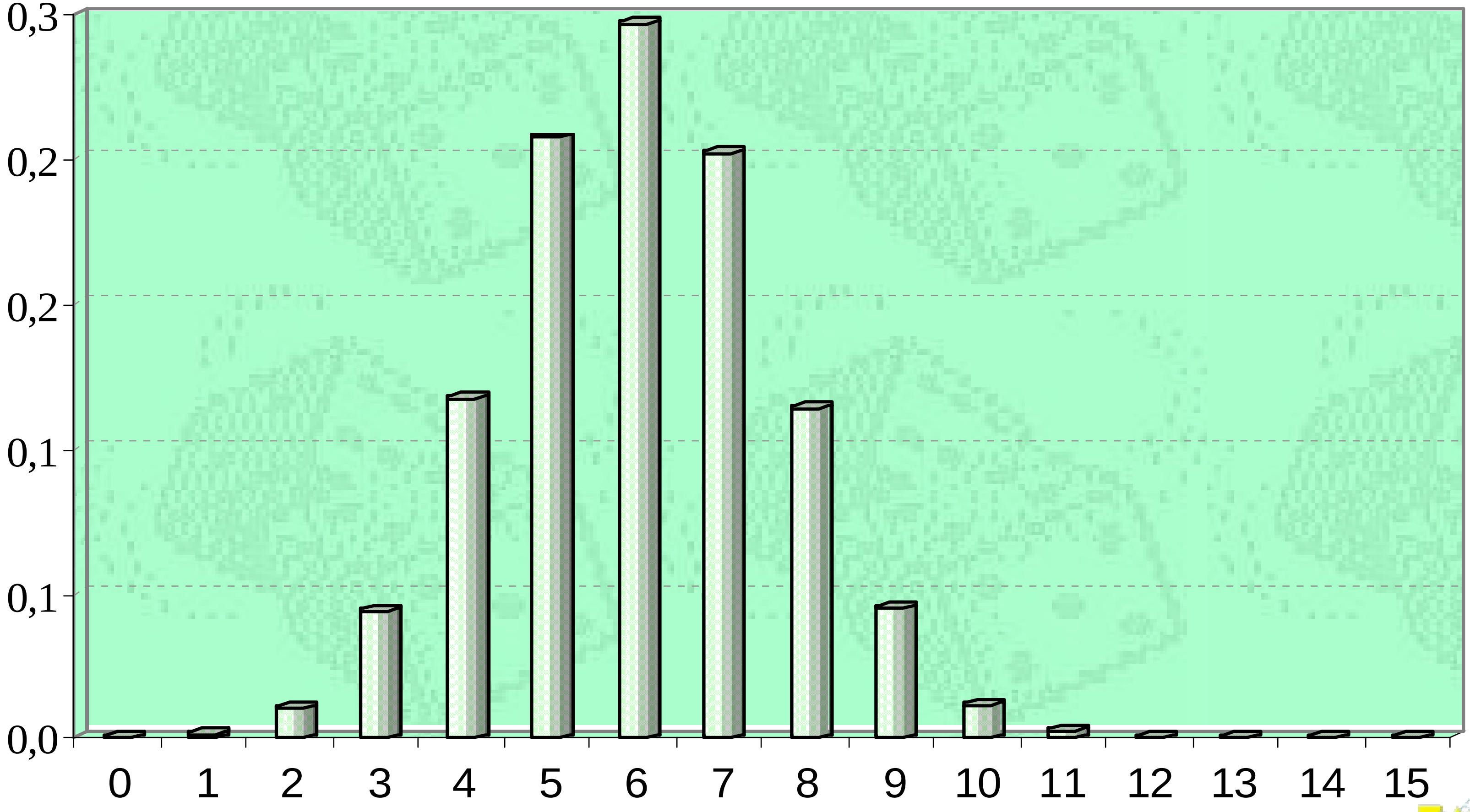
x : máx{0, n–N+r)}, ..., mín{r, n}

A Função de Probabilidade (fp)

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-r}}{\binom{N}{n}}$$

A Função de Probabilidade (fp)

H(20; 15; 50)



A Função de Distribuição (FD)

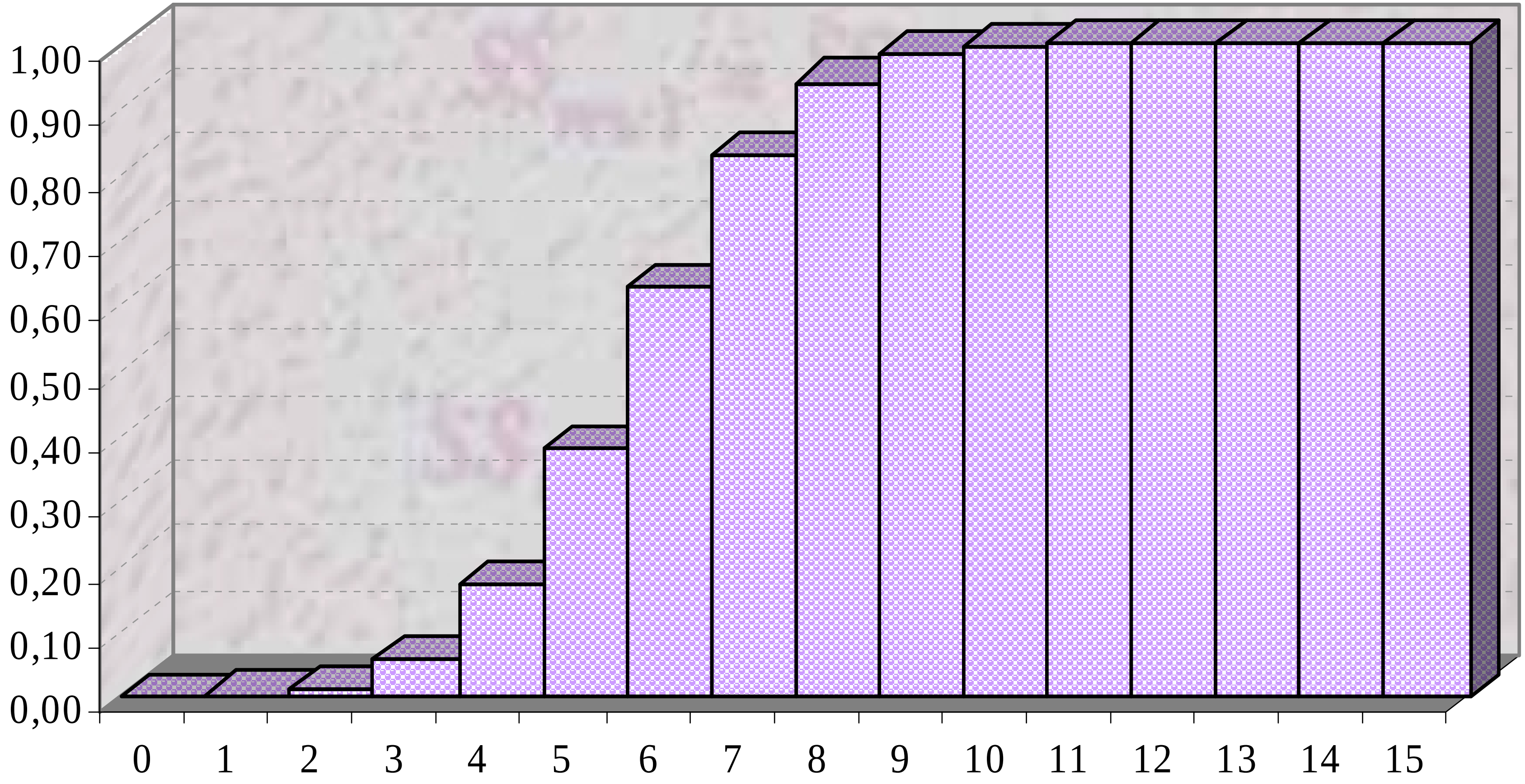
$$F(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < j \\ \sum_{x=j}^{k} \dfrac{\dbinom{r}{x}\dbinom{N-r}{n-x}}{\dbinom{N}{n}} & \text{se } j \le x \le k \\ 1 & \text{se } x > k \end{cases}$$

onde $j = \text{máx}\{0, \; n - N + r\}$

$k = \text{mín}\{r, \; n\}$

Função de Distribuição

H(20; 15; 50)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = np$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{npq}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

Onde $p = \dfrac{r}{N}$

Exemplo

Uma fábrica recebe um lote de 100 peças das quais cinco são defeituosas. Suponhamos que a fábrica aceite todas as 100 peças se não houver nenhuma defeituosa em uma amostra aleatória de 10 peças selecionadas para inspeção. Determinar a probabilidade de o lote ser aceito.

Pela Hipergeométrica:

N = 100, r = 5, n = 10

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{95}{10}}{\binom{100}{10}} = 58{,}38\%$$

Pela Binomial:

n = 10 e p = 5/100 = 5%

$$f(0) = P(X = 0) = \binom{10}{0}.(0,5)^{0}.(0,95)^{10} =$$

$$= 59,87\%$$

Poisson

EXPERIMENTO

Na Binomial a variável que interessa é o número de sucessos em um intervalo discreto (n repetições de um experimento). Muitas vezes, entretanto, o interesse é o número de sucessos em um intervalo contínuo, como o tempo, área, superfície, etc.

EXPERIMENTO

Para determinar a f(x) de uma distribuição deste tipo, será suposto que: **(i)** Eventos definidos em intervalos não sobrepostos são independentes; **(ii)** Em intervalos de mesmo tamanho as probabilidades de um mesmo número de sucessos são iguais

EXPERIMENTO

(iii) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de mais de um sucesso é desprezível;

(iv) Em intervalos muito pequenos a probabilidade de um sucesso é proporcional ao tamanho do intervalo.

Definição:

Se uma variável satisfaz estas quatro propriedades ela é dita VAD de POISSON.

Se X é uma VAD de POISSON, então a função de probabilidade de X é dada por:

A Função de Probabilidade (fp)

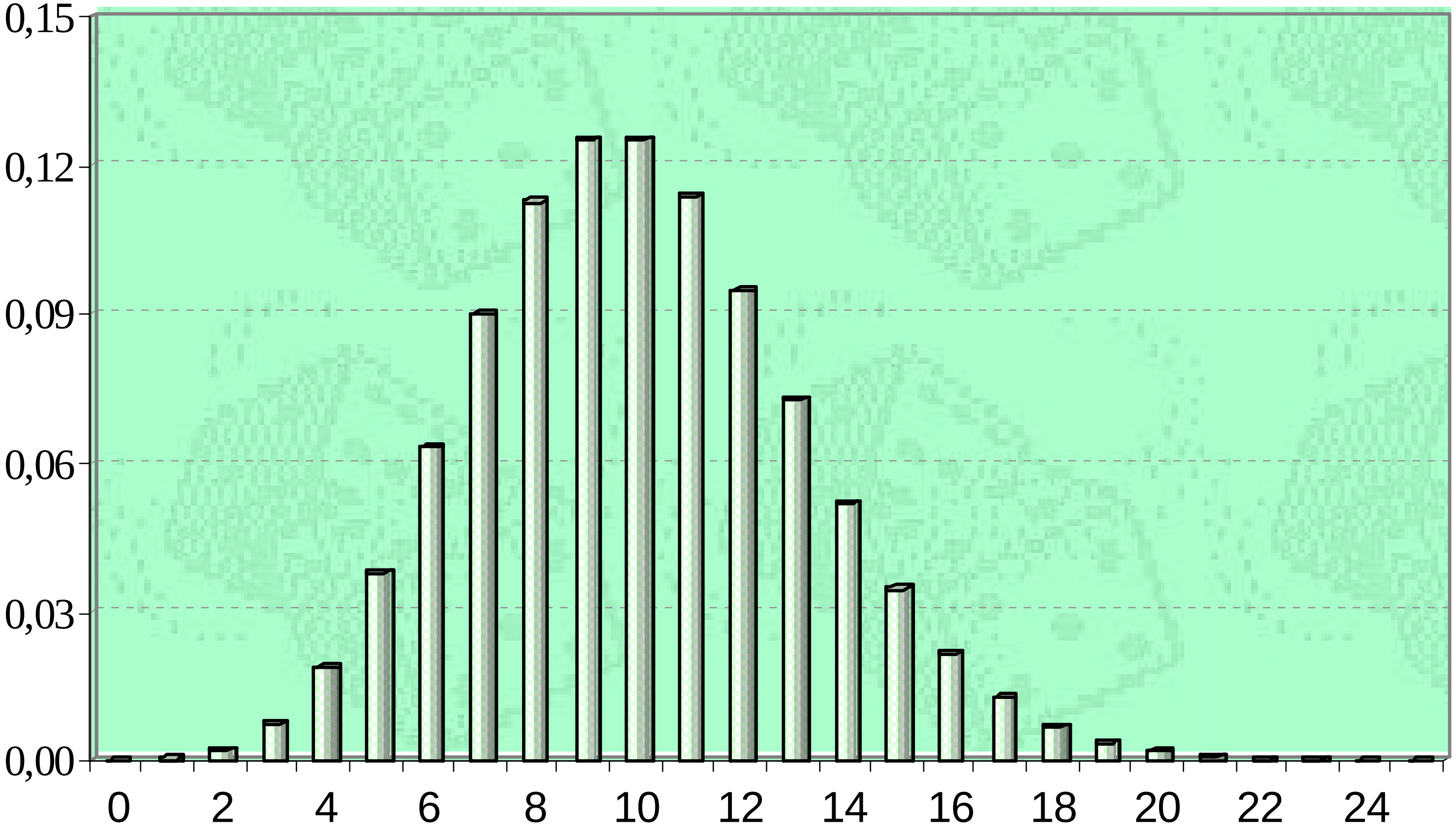
$$f(x) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{x}}{x!}$$

$$\text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots$$

"λ" é denominada de taxa de sucessos

A Função de Probabilidade (fp)

P(10)

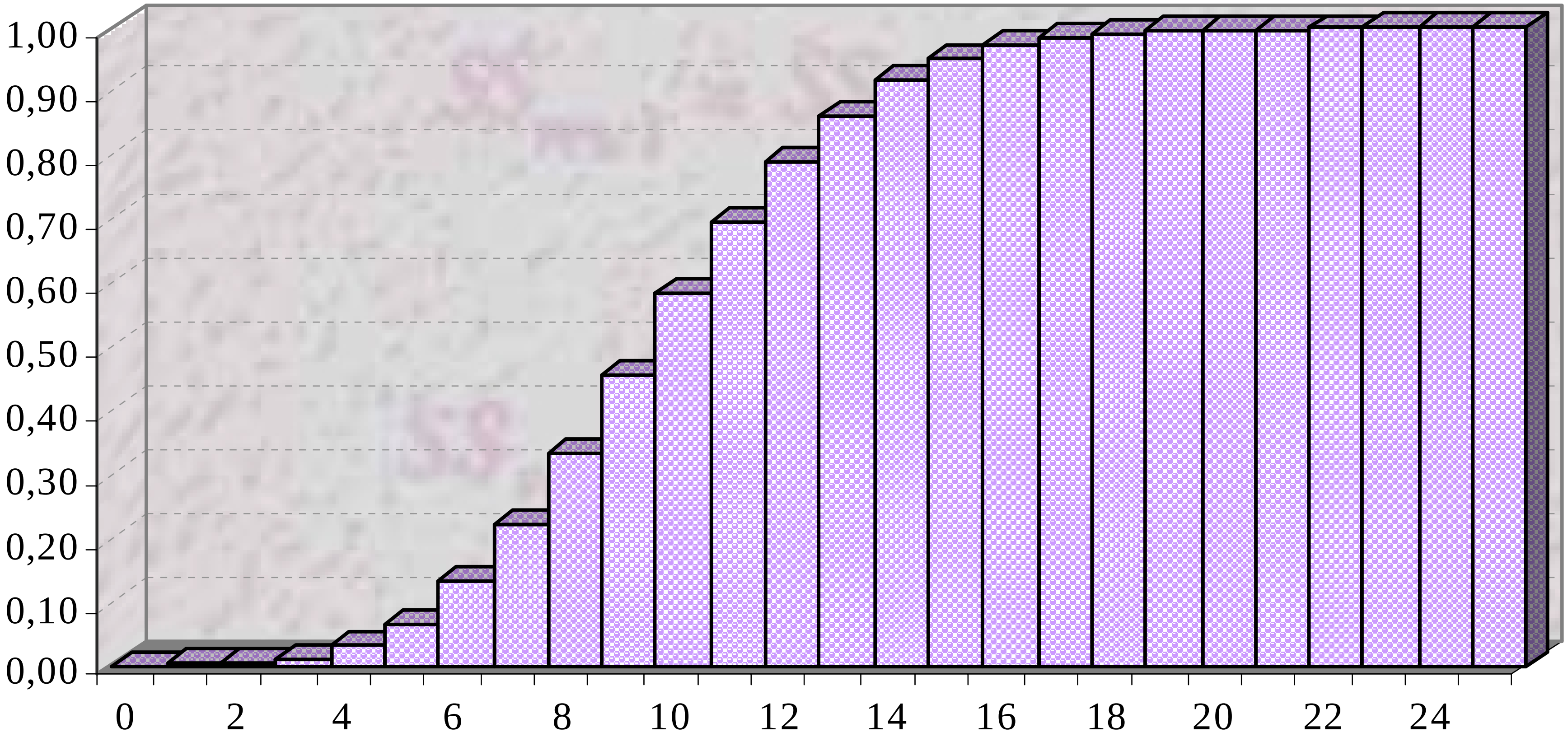


A Função de Distribuição (FD)

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^{k}}{k!} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Função de Distribuição

P(10)



Características

Expectância ou Valor Esperado

$$E(X) = \lambda$$

Desvio Padrão

$$\sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

Exemplo

O número de consultas a uma base de dados computacional é uma VAD de Poisson com $\lambda = 6$ em um intervalo de dez segundos. Qual é a probabilidade de que num intervalo de 5 segundos nenhum acesso se verifique?

A taxa de consultas é de "**seis**" em "**dez**" segundos em "**cinco**" segundos teremos uma taxa de $\lambda = 3$ consultas. Então:

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{e^{-3} \cdot 0^{3}}{0!} =$$

$$= e^{-3} = 4{,}98\%$$

Exemplo

Considerando o exemplo dado na Hipergeométrica, que foi resolvido, também, pela Binomial, é possível ainda utilizar a Poisson. Para isto deve-se fazer $\lambda = np$.

Então:

$$\lambda = 10.0{,}05 = 0{,}5.$$

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{e^{-0,5}.0}{0!} =$$

$$= e^{-0,5} = 60{,}65\%$$

Até a próxima!