Intégration

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

Olivier Cots

17 octobre 2022

INP TOULOUSE ENSEEIHT n7

Le but de ce chapitre 2 est de fournir les briques de base pour la construction de **l'intégrale au sens de Lebesgue** :

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

- E : un ensemble quelconque sur lequel on va définir des **ensembles mesurables**, cf. Section 2.1. La famille de ces ensembles mesurables s'appellera une **tribu**, et sera généralement notée $\mathcal{A}$. On dira alors que $(E, \mathcal{A})$ est un **espace mesurable**.

- f : la **fonction** f pour avoir une chance d'être intégrable, devra tout d'abord être **mesurable**, cf. Section 2.2.

- μ : la **mesure** μ nous permettra de quantifier les ensembles mesurables, cf. Section 2.3.

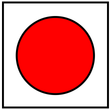
- $\int$: l'intégrale (au sens de Lebesgue) d'une fonction mesurable f par rapport à une mesure μ sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$ sera définie au chapitre suivant.

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

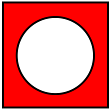
$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

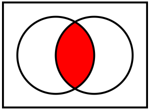
$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$



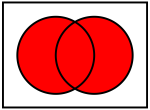
Ensemble : $A \in E$



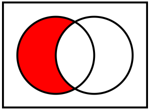
Complémentaire : $A^c := E \setminus A$



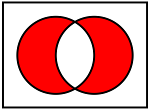
Intersection : $A \cap B$



Union : $A \cup B$



Différence : $A \setminus B = A \cap B^c$



Différence symétrique :
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Définition 2.1.1 – Tribu

Soit E un ensemble et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une famille de parties de E. $\mathcal{A}$ est une **tribu** si :

i) $E \in \mathcal{A}$;

ii) $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire : $A \subset E \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = E \setminus A \in \mathcal{A}$;

iii) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable : $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Exemple 2.1.1. Les familles suivantes sont des tribus :

- La tribu *grossière* : $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$. Comme en topologie, cette tribu n'a pas d'intérêt pratique.
- La tribu *discrète* : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$. Cette tribu permet de retrouver la notion de *familles sommables*.
- $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, E\}$ pour $A \subset E$.

Remarque 2.1.1. Il faut noter la contrainte de *dénombrabilité* dans la condition iii), la réunion d'une famille quelconque d'ensembles mesurables n'est pas en général mesurable.

Définition 2.1.2 – Espace mesurable

Soit E un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur E.

Le couple $(E, \mathcal{A})$ s'appelle un **espace mesurable**.

Remarque 2.1.2. Comme les espaces topologiques, les espaces mesurables sont des ensembles pour lesquels certaines parties sont privilégiées, ces parties forment la tribu de l'espace.

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Proposition 2.1.3

Une tribu est stable par :

- $\cap$: intersection $\qquad A \cap B = (A^c \cup B^c)^c.$
- $\setminus$: différence. $\qquad A \setminus B = A \cap B^c.$
- Δ : différence symétrique. $\qquad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$
- $\cap_n$: intersection au plus dénombrable.

► Soient $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$. On note $B_n := A_n^c$. Par **définition** d'une tribu,

$$\forall\, n \geq 0 \,:\, B_n \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \geq 0} B_n \in \mathcal{A}.$$

Mais,

$$\bigcap_{n \geq 0} A_n = \bigcap_{n \geq 0} B_n^c = \left(\bigcup_{n \geq 0} B_n \right)^c \in \mathcal{A}.$$

■

Proposition 2.1.4

i) L'intersection d'une famille quelconque de tribus est une tribu ;

ii) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$, on appelle **tribu engendrée** par $\mathcal{C}$, notée $\sigma(\mathcal{C})$, l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$: **c'est la plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$**.

►

i) On note $\mathcal{A} := \cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ l'intersection des tribus.

- $\forall\, i \in I : E \in \mathcal{A}_i \;\Rightarrow\; E \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in I : A \in \mathcal{A}_i \quad \Rightarrow \quad \forall\, i \in I : A^c \in \mathcal{A}_i \quad \Rightarrow \quad A^c \in \mathcal{A}$;
- $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$: idem.

ii) Soit $\mathcal{A}$ une tribu contenant $\mathcal{C}$. Alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$ par **définition**. ■

Exemple 2.1.2. Soit $A \subset E$. Alors $\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$.

Remarque 2.1.3. Exemple de construction d'un tribu.

Proposition 2.1.5

i) Si $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ dans $\mathcal{P}(E)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.

Si $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ et si $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$;

ii) Si $(E, \mathcal{O})$ est un *espace topologique*,[1] alors $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}) =: \mathcal{B}(E)$, $\mathcal{F}$ étant l'ensemble des fermés de E.

Remarque 2.1.4. Pour montrer que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, on utilisera la **méthodologie** suivante : on montre que $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$ et que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$.

Définition 2.1.6 – Tribu de Borel (ou des boréliens)

Les éléments de $\mathcal{B}(E)$ sont appelés les **boréliens** de E et on appelle $\mathcal{B}(E)$ la **tribu des boréliens** de E.

1. Une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ contient $\emptyset$ et E, et est stable par réunions quelconques et intersections finies.

i) Si $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$ dans $\mathcal{P}(E)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$.

► Tout d'abord $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ puisque par **définition** $\sigma(\mathcal{C}_2)$ contient $\mathcal{C}_2$. Ainsi, puisque $\sigma(\mathcal{C}_1)$ est la **plus petite** tribu contenant $\mathcal{C}_1$ et puisque $\sigma(\mathcal{C}_2)$ est une tribu, on a $\sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$. ■

Si $\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$ et si $\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$ alors $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$.

► On a

$$\mathcal{C}_1 \subset \sigma(\mathcal{C}_2) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_1) \subset \sigma(\mathcal{C}_2)$$

et de manière similaire

$$\mathcal{C}_2 \subset \sigma(\mathcal{C}_1) \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}_2) \subset \sigma(\mathcal{C}_1)$$

ce qui permet de conclure que $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$. ■

ii) Si $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique,[2] alors $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{F}) =: \mathcal{B}(E)$, $\mathcal{F}$ étant l'ensemble des fermés de E.

- Montrons que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F})$ et que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{O})$.

Soit $O \in \mathcal{O}$. On a

$$F := O^c \in \mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{F}) \Rightarrow O = F^c \in \sigma(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{F}).$$

On montre de même que $\mathcal{F} \subset \sigma(\mathcal{O})$ et on conclut à l'aide du **résultat précédent**. ■

2. Une topologie $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ contient $\emptyset$ et E, et est stable par réunions quelconques et intersections finies.

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Exercice 2.1.3. Soit $\mathcal{C} := \left\{]a\,,b[\;\middle|\; a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} =: \overline{\mathbb{R}} \right\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue.

Qu'allons-nous montrer ?

Exercice 2.1.3. Soit $\mathcal{C} := \left\{]a\,,b[\;\middle|\; a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} =: \overline{\mathbb{R}} \right\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue.

- Montrons que $\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{O})$ et que $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$.
  - Soit $I := \,]a\,,b[\, \in \mathcal{C}$. On a
$$I \in \mathcal{C} \subset \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad I \in \sigma(\mathcal{O}) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{O}).$$
  - Soit $O \in \mathcal{O}$. On suppose pour le moment que l'on peut écrire O sous la forme
$$O = \bigcup_n \,]a_n\,,b_n[, \quad \text{avec} \quad \forall n : \,]a_n\,,b_n[\, \in \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}).$$
    Puisque $\sigma(\mathcal{C})$ est **stable par réunion dénombrable**, $O \in \sigma(\mathcal{C})$ et donc $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{C})$.

Exercice 2.1.3. Soit $\mathcal{C} := \left\{]a\,,b[\;\middle|\; a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} =: \overline{\mathbb{R}} \right\}$. Montrer que $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\mathcal{O}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, où $\mathcal{O}$ est l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ pour la valeur absolue.

Il reste à montrer que l'on peut écrire O sous la forme

$$O = \bigcup_n]a_n\,,b_n[, \quad \forall n :]a_n\,,b_n[\in \mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}).$$

On introduit $\mathcal{C}_O := \{]a\,,b[\mid a < b \in \mathbb{Q} \text{ et }]a\,,b[\subset O\}$. $\mathcal{C}_O$ est dénombrable car s'injecte dans $\mathbb{Q}^2$. Montrons que $O = \cup_{I \in \mathcal{C}_O} I$.

- Soit $x \in \cup_{I \in \mathcal{C}_O} I$. Alors $\exists a < b \in \mathbb{Q}$ t.q. $x \in]a\,,b[\subset O$ donc $x \in O$.
- Soit $x \in O$.
  O est un ouvert donc $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $]x - \varepsilon\,, x + \varepsilon[\subset O$.
  Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, $\exists a < b$ dans $\mathbb{Q}$ t.q. $x - \varepsilon < a < x < b < x + \varepsilon$, *i.e.* $]a\,,b[\subset]x - \varepsilon\,, x + \varepsilon[\subset O$ et $x \in]a\,,b[$, donc $]a\,,b[\in \mathcal{C}_O$ et $x \in \cup_{I \in \mathcal{C}_O} I$.

$\blacksquare$

Définition 2.1.7

On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ (ou tribu de Borel) engendrée par les intervalles ouverts. La **tribu de Borel sur $\overline{\mathbb{R}}$** est l'ensemble des parties de $\overline{\mathbb{R}}$ prenant l'une des formes suivantes : A, $A \cup \{+\infty\}$, $A \cup \{-\infty\}$ ou $A \cup \{-\infty, +\infty\}$, où $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Proposition 2.1.8

Soit S une partie dense de la droite réelle. [3]

Alors $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les intervalles du type

$$1)\ \ [a\,,+\infty[, \qquad 2)\ \ ]a\,,+\infty[, \qquad 3)\ \ ]-\infty\,,a[, \qquad 4)\ \ ]-\infty\,,a],$$

avec $a \in S$. Il en est de même pour $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ avec les intervalles du type $[a\,,+\infty]$...

► Laisser en exercice. Voir TD. ■

3. C'est-à-dire telle que tout nombre réel est limite d'une suite à valeurs dans S ; par exemple $S = \mathbb{Q}$.

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Soit $f: E_1 \to E_2$.

Proposition 2.1.9

Si $\mathcal{A}_2$ est une tribu sur E_2, alors

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \left\{ f^{-1}(B) \subset E_1 \,\middle|\, B \in \mathcal{A}_2 \right\}$$

est un tribu sur E_1, appelée **tribu image réciproque** de $\mathcal{A}_2$ par f.

Exercice : faire la preuve.

Soit $f : E_1 \to E_2$.

Proposition 2.1.9

Si $\mathcal{A}_2$ est une tribu sur E_2, alors

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) := \left\{ f^{-1}(B) \subset E_1 \;\middle|\; B \in \mathcal{A}_2 \right\}$$

est un tribu sur E_1, appelée **tribu image réciproque** de $\mathcal{A}_2$ par f.

- Montrons que $f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ est une tribu. On a
  - $E_1 = f^{-1}(E_2) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$;
  - Si $A = f^{-1}(B) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ alors $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ car $B^c \in \mathcal{A}_2$;
  - Si $(A_n = f^{-1}(B_n))_n \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)^{\mathbb{N}}$ alors $\cup_n A_n = \cup_n f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\cup_n B_n) \in f^{-1}(\mathcal{A}_2)$ car $\cup_n B_n \in \mathcal{A}_2$.

■

Soit $f : E_1 \to E_2$.

Proposition 2.1.10

Si $\mathcal{A}_1$ est une tribu sur E_1, alors

$$\mathcal{B} := \left\{ B \subset E_2 \,\middle|\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \right\}$$

est un tribu sur E_2, appelée **tribu image** de $\mathcal{A}_1$ par f.

- Laisser en exercice. Voir TD. ■

Remarque 2.1.5. La tribu image n'est pas $f(\mathcal{A}_1)$ qui n'est en général pas une tribu.

Théorème 2.1.11 – Lemme de transport

Soient une application $f : E_1 \to E_2$ et une classe de parties de E_2 notée $\mathcal{C}$. Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

- Montrons que $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$. On a

$$\mathcal{C} \subset \sigma(\mathcal{C}) \Rightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \Rightarrow \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$$

car $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ est la **tribu image réciproque** de $\sigma(\mathcal{C})$ par f.

Théorème 2.1.11 – Lemme de transport

Soient une application $f : E_1 \to E_2$ et une classe de parties de E_2 notée $\mathcal{C}$. Alors

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})).$$

Montrons que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. Soit $\mathcal{A}_2$ la tribu image de $\mathcal{A}_1 := \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ par f :

$$\mathcal{A}_2 = \left\{ B \subset E_2 \;\middle|\; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \right\}.$$

On a

$$\forall B \in \mathcal{C} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1 \quad \text{car} \quad f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})),$$

donc $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}_2$. Ainsi $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}_2$ et donc

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset f^{-1}(\mathcal{A}_2).$$

Mais,

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \left\{ f^{-1}(B) \;\middle|\; B \in \mathcal{A}_2 \right\} \subset \mathcal{A}_1$$

donc en conclusion $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subset \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$. ■

- Soient E un ensemble et $\mathcal{O}$ une topologie sur E, *i.e.* un ensemble d'ouverts. On rappelle que la tribu de Borel est notée $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O})$.

- La **topologie trace** de $\mathcal{O}$ sur un ensemble $X \subset E$ est constituée des intersections des ouverts de E avec X, *i.e.* $\mathrm{tr}(\mathcal{O}) \coloneqq \{O \cap X \mid O \in \mathcal{O}\}$.

- Soit $i\colon X \to E$ **l'injection canonique**, alors $\mathrm{tr}(\mathcal{O}) = i^{-1}(\mathcal{O}) = \left\{i^{-1}(O) \;\middle|\; O \in \mathcal{O}\right\}$, car :

$$\forall O \in \mathcal{O} \ : \ i^{-1}(O) = \{x \in X \mid i(x) = x \in O\} = X \cap O.$$

- On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.1.12 – Tribu trace

La **tribu trace** de $\mathcal{B}(E)$ sur X définie par $\mathrm{tr}(\mathcal{B}(E)) = \{B \cap X \mid B \in \mathcal{B}(E)\}$ est la tribu engendrée par la topologie trace de $\mathcal{O}$ sur X, c-a-d par $\sigma(\mathrm{tr}(\mathcal{O}))$.

► Par le **lemme de transport** $\mathrm{tr}(\mathcal{B}(E)) = i^{-1}(\sigma(\mathcal{O})) = \sigma(i^{-1}(\mathcal{O})) = \sigma(\mathrm{tr}(\mathcal{O}))$. ■

Exemple 2.1.4. La tribu $\mathcal{B}([0\,,1])$, c-a-d la tribu engendrée par la topologie trace des ouverts de $\mathbb{R}$ sur $[0\,,1]$, est donc aussi la tribu trace de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sur $[0\,,1]$.

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Lors de l'intégration d'une fonction, 2 obstacles peuvent se présenter :

- la fonction peut être "trop grande" ;
- la fonction peut ne pas être assez régulière.

La mesurabilité des fonctions s'intéresse à la question de la régularité.

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Définition 2.2.1 – Application et fonction mesurable

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables et f une application de E_1 dans E_2

i) On dit que f est **mesurable** de $(E_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{A}_2)$ si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$, c-a-d si :
$$\forall B \in \mathcal{A}_2,\ f^{-1}(B) = \{x \in E_1 \mid f(x) \in B\} \in \mathcal{A}_1 \ ;$$

ii) Si E_1 et E_2 sont des espaces topologiques et si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont les tribus de Borel correspondantes, on dit alors que f est **borélienne** ;

iii) Si $(E_2, \mathcal{A}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on parle alors de **fonction mesurable**.

Remarque 2.2.1. On rappelle que si $\mathcal{A}$ est une tribu alors les ensembles $A \in \mathcal{A}$ sont appelés des ensembles mesurables.

Remarque 2.2.2. Les applications mesurables ont la même importance pour les espaces mesurables que les applications continues pour les espaces topologiques : si $(E_1, \mathcal{O}_1)$ et $(E_2, \mathcal{O}_2)$ sont deux espaces topologiques, alors une application f est continue en tout point de E_1 ssi $f^{-1}(\mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_1$.

Exemple 2.2.1. La fonction indicatrice $\mathbb{1}_A \colon (E, \mathcal{A}) \to (\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}))$ est mesurable ssi A est mesurable, *i.e.* ssi $A \in \mathcal{A}$.

► Montrons que l'image réciproque de tout ensemble mesurable de $\mathcal{P}(\{0,1\})$ est mesurable ssi $A \in \mathcal{A}$. On a :

- $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0\}) = A^c$;
- $\mathbb{1}_A^{-1}(\{1\}) = A$;
- $\mathbb{1}_A^{-1}(\{0,1\}) = E$;
- $\mathbb{1}_A^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

■

Exemple 2.2.2. Toute fonction constante de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable.

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Proposition 2.2.2 – Critère de mesurabilité

i) Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un ensemble F, *i.e.* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$. On note $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{C})$. Alors

$$f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B}) \textbf{ mesurable } \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A} \;;$$

ii) Soient $f_1 : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_2, \mathcal{A}_2)$ et $f_2 : (E_2, \mathcal{A}_2) \to (E_3, \mathcal{A}_3)$.

Si f_1 et f_2 sont **mesurables** alors

$$f_2 \circ f_1 : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_3, \mathcal{A}_3)$$

est **mesurable** ;

iii) Soient E, F deux **espaces topologiques**.

Si $f : (E, \mathcal{B}(E)) \to (F, \mathcal{B}(F))$ est **continue** alors elle est **mesurable** ;

iv) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux** ($a < b \in \mathbb{R}$), alors f mesurable de $([a, b], \mathcal{B}([a, b]))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

i) Soit $\mathcal{C}$ une classe de parties d'un ensemble F, *i.e.* $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(F)$. On note $\mathcal{B} \coloneqq \sigma(\mathcal{C})$.

Alors

$$f : (E, \mathcal{A}) \to (F, \mathcal{B}) \textbf{ mesurable } \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}.$$

- f est mesurable ssi $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$,

mais $f^{-1}(\mathcal{B}) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ d'après le **lemme de transport**,

et $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{A}$ ssi $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. ■

ii) Soient $f_1 : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_2, \mathcal{A}_2)$ et $f_2 : (E_2, \mathcal{A}_2) \to (E_3, \mathcal{A}_3)$.

Si f_1 et f_2 sont **mesurables** alors

$$f_2 \circ f_1 : (E_1, \mathcal{A}_1) \to (E_3, \mathcal{A}_3)$$

est **mesurable**.

- On a
$$\forall A_3 \in \mathcal{A}_3 \ : \ (f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(f_2^{-1}(A_3)) \in \mathcal{A}_1$$
car f_1 mesurable et $f_2^{-1}(A_3) \in \mathcal{A}_2$ puisque $A_3 \in \mathcal{A}_3$ et f_2 mesurable. ■

iii) Soient E, F deux **espaces topologiques**.

Si $f : (E, \mathcal{B}(E)) \to (F, \mathcal{B}(F))$ est **continue** alors elle est **mesurable** (*i.e.* borélienne).

Exercice : le démontrer.

iii) Soient E, F deux **espaces topologiques**.

Si $f : (E, \mathcal{B}(E)) \to (F, \mathcal{B}(F))$ est **continue** alors elle est **mesurable** (*i.e.* borélienne).

- On note $\mathcal{B}(E) := \sigma(\mathcal{O}_1)$ et $\mathcal{B}(F) := \sigma(\mathcal{O}_2)$.

Montrons que $f^{-1}(\mathcal{O}_2) \subset \mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{O}_1)$.

Puisque f est continue, on a

$$\forall O_2 \in \mathcal{O}_2 \ : \ f^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_1 \subset \sigma(\mathcal{O}_1)$$

autrement dit $f^{-1}(\mathcal{O}_2) \subset \sigma(\mathcal{O}_1)$. ■

iv) Soit $f : [a\,,b] \to \mathbb{R}$ **continue par morceaux** ($a < b \in \mathbb{R}$), alors f mesurable de $([a\,,b], \mathcal{B}([a\,,b]))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- Laisser en exercice. ■

Proposition 2.2.3

Si $f_1, \cdots, f_d$ sont des fonctions réelles mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ et g une fonction borélienne sur $\mathbb{R}^d$, alors $h\colon (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $h(x) := g(f_1(x), \cdots, f_d(x))$, est **mesurable**.

- On pose

$$f: \begin{array}{ccc} (E, \mathcal{A}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \\ x & \longmapsto & f(x) := (f_1(x), \cdots, f_d(x)) \end{array}$$

de telle sorte que $h = g \circ f$. Il suffit de montrer que f est mesurable.
On rappelle que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{C})$ avec $\mathcal{C} := \left\{ \prod_{i=1}^d]a_i\,, b_i[\;\middle|\; a_i < b_i \text{ réels} \right\}$.
Montrons que $f^{-1}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. Soit $I := \prod_{i=1}^d]a_i\,, b_i[\in \mathcal{C}$. Alors,

$$f^{-1}(I) = \bigcap_{i=1}^{d} \underbrace{f_i^{-1}(\underbrace{]a_i\,, b_i[}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})})}_{\in \mathcal{A} \text{ car } f_i \text{ mesurable}} \in \mathcal{A} \text{ car stable par intersection,}$$

ce qui permet de conclure. ■

Exemple 2.2.3. Si $f_1, \cdots, f_d$ sont des fonctions réelles mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ alors les fonctions suivantes sont mesurables :

i) $\sum_{i=1}^{d} a_i f_i$, $a_i \in \mathbb{R}$;

ii) $\min(f_1, \cdots, f_d)$, $\max(f_1, \cdots, f_d)$.

De plus les ensembles

$$\{x \in E \mid f_1(x) = f_2(x)\}, \quad \{x \in E \mid f_1(x) \leq f_2(x)\}, \quad \ldots$$

sont mesurables, *i.e.* des éléments de $\mathcal{A}$, **cf. TD**.

Proposition 2.2.4

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

i) Les fonctions
$$\sup_n f_n \quad \text{et} \quad \inf_n f_n$$
sont **mesurables** ;

ii) Les fonctions
$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} f_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k$$
sont **mesurables** ;

iii) Si $(f_n)_n$ **converge simplement** vers une fonction f (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors f est **mesurable**.

Remarque 2.2.3. Rappelons que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est engendrée par les $]-\infty\,, a]$ et $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ par les $[-\infty\,, a]$, pour $a \in \mathbb{R}$.

i) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Les fonctions

$$\sup_n f_n \quad \text{et} \quad \inf_n f_n$$

sont **mesurables**.

- On pose $g := \sup_n f_n$. On a

$$\forall a \in \mathbb{R} \ : \ g^{-1}([-\infty\,, a]) = \bigcap_n f_n^{-1}([-\infty\,, a]) \in \mathcal{A}$$

car

$$\begin{aligned} x \in g^{-1}([-\infty\,, a]) &\Leftrightarrow g(x) \leq a \\ &\Leftrightarrow \forall n \ : \ f_n(x) \leq a \\ &\Leftrightarrow \forall n \ : \ x \in f_n^{-1}([-\infty\,, a]) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_n f_n^{-1}([-\infty\,, a]). \end{aligned}$$

De même $h^{-1}([a\,, -\infty]) = \cap_n f_n^{-1}([a\,, -\infty])$, avec $h := \inf_n f_n$. ■

ii) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Les fonctions

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} f_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k$$

sont **mesurables**.

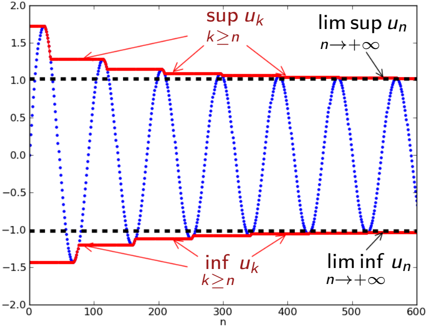


Illustration : $u_n := f_n(x)$ pour un certain $x \in E$. (Bleu) $(u_n)_n \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$.

ii) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Les fonctions

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} f_k \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k$$

sont **mesurables**.

- Puisque $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables et en remarquant que

$$\limsup_{n\to+\infty} f_n = \inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} f_k$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n = \sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} f_k$$

alors on peut conclure. ■

iii) Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $(f_n)_n$ **converge simplement** vers une fonction f (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$), alors f est **mesurable**.

- Si $f_n \to f$ alors $f = \limsup_n f_n$ qui est mesurable. ■

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Définition 2.3.1 – Mesure

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On appelle **mesure** sur $(E, \mathcal{A})$ une application

$$\mu \colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

telle que

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) pour tous $A_1, A_2, \cdots$ dans $\mathcal{A}$ 2 à 2 **disjoints** :

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \sum_n \mu(A_n) \quad \sigma\text{-}\textbf{additivité}.$$

Définition 2.3.2 – Espace mesuré

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

On dit que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un **espace mesuré**.

Définition 2.3.3

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable.

i) Une mesure μ est dite **finie** si $\mu(E) < +\infty$;

ii) Une mesure μ est dite **de probabilité** si $\mu(E) = 1$;

iii) Une mesure μ est dite **σ-finie** si

$$\exists (A_n)_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ t.q. } E = \cup_n A_n \text{ et } \mu(A_n) < +\infty \ \forall n.$$

Remarque 2.3.1. Si $\mathcal{A}$ est une tribu alors les ensembles $A \in \mathcal{A}$ sont appelés des **ensembles mesurables**.

Remarque 2.3.2. **Une mesure permet d'attribuer à un ensemble mesurable une valeur**. Pour pouvoir définir par la suite l'intégrale de "fonctions mesurables" pour un large ensemble de fonctions, il est nécessaire d'avoir à la base une grande quantité d'ensembles mesurables. Ceci explique pourquoi une tribu est stable par de nombreuses opérations, contrairement par exemple à une topologie.

Exemple 2.3.1 (Mesure de Dirac). Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $a \in E$. On définit

$$\begin{array}{rccl} \delta_a : & \mathcal{A} & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \longmapsto & \delta_a(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin A \\ 1 \text{ si } a \in A. \end{cases} \end{array}$$

Alors, δ_a est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

- Montrons que δ_a vérifie les deux propriétés de la définition.
  - $\delta_a(\emptyset) = 0$;
  - Soit $A_1, A_2, \cdots$ dans $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints. Si a appartient à l'un des A_n alors

$$\delta_a(\cup_n A_n) = \sum_n \delta_a(A_n) = 1,$$

sinon

$$\delta_a(\cup_n A_n) = \sum_n \delta_a(A_n) = 0.$$

■

Remarque 2.3.3. δ_a est une mesure de probabilité.

Exemple 2.3.2 (Mesure de comptage). Soit l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. On définit

$$\begin{array}{rccl} \text{card}: & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \longmapsto & \text{card}(A) = \begin{cases} \#A \text{ si } A \text{ est fini} \\ +\infty \text{ sinon,} \end{cases} \end{array}$$

où $\#A$ désigne le nombre d'éléments d'un ensemble fini. Alors, card est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

- Montrons que card vérifie les deux propriétés de la définition.
  - $\text{card}(\emptyset) = 0$;
  - Si $A_1, A_2, \cdots$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont 2 à 2 disjoints alors

$$\text{card}(\cup_n A_n) = \sum_n \text{card}(A_n).$$

■

Exercice 2.3.3. On considère sur $\mathbb{R}$, la tribu

$$\mathcal{A} \coloneqq \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}.$$

On définit alors

$$\begin{array}{rccc} \mu\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \longmapsto & \mu(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Exercice : le démontrer.

Exercice 2.3.3. On considère sur $\mathbb{R}$, la tribu

$$\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid A \text{ est dénombrable ou } A^c \text{ est dénombrable}\}.$$

On définit alors

$$\begin{array}{rccl} \mu\colon & \mathcal{A} & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & A & \longmapsto & \mu(A) = \begin{cases} 0 \text{ si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

- Montrons que μ vérifie les deux propriétés de la définition.
  - $\mu(\emptyset) = 0$ car $\emptyset$ est de cardinal nul ;
  - Soient $A_1, A_2, \cdots$ dans $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints. Notons $A = \cup_n A_n$.
    - Si tous les A_i sont dén., alors A l'est et $\mu(A) = 0 = \sum_n 0 = \sum_n \mu(A_n)$.
    - Si $\exists m$ t.q. A_m soit non dén., alors A est non dén. et A_m^c est dén. (car $A_m \in \mathcal{A}$). On sait que $\forall n$, $n \neq m$, $A_n \subset A_m^c$ et donc A_n dén. Finalement,

$$\mu(A) = 1 = 0 + 1 = \sum_{n \neq m} \mu(A_n) + \mu(A_m) = \sum_n \mu(A_n).$$

■

La définition suivante sera redonnée au chapitre 4 où l'on détaillera cette notion d'ensemble négligeable.

Définition – Ensemble négligeable

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

On dit que $A \in \mathcal{A}$ est un **ensemble négligeable** (ou μ-négligeable) si $\mu(A) = 0$.

Remarque 2.3.4. La terminologie vient du fait que les ensembles négligeables "ne sont pas vus" par la mesure. Attention, cela ne veut pas dire nécessairement qu'ils soient "petits", tout dépend de la mesure.

- Par exemple, si $\mu = \delta_0$, la masse de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}^*$ est μ-négligeable.
- Si $\mu = \lambda$, la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, alors $\mathbb{Q}$ est μ-négligeable.
- Si $\mu = \text{card}$, la mesure de comptage, alors le seul ensemble μ-négligeable est l'ensemble vide.

Définition – Mesure image

Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables.

Soient $\mu\colon \mathcal{A}_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+$ une mesure sur $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et f une application mesurable de $(E_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(E_2, \mathcal{A}_2)$.

On pose

$$\begin{array}{rccl} \mu_f\colon & \mathcal{A}_2 & \longrightarrow & \bar{\mathbb{R}}_+ \\ & B & \longmapsto & \mu_f(B) := \mu(f^{-1}(B)). \end{array}$$

Alors, μ_f est une mesure sur $(E_2, \mathcal{A}_2)$, appelée **mesure image** de μ par f.

Remarque 2.3.5.

- La preuve que μ_f est une mesure est donnée en TD.
- Le concept de mesure image est fondamental en théorie des probabilités, cf. chap. 7.
- La notation $f_*\mu$ est parfois utilisée à la place de μ_f.

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Proposition 2.3.4

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.

i) Soient A, B dans $\mathcal{A}$ t.q. $B \subset A$. Alors

$$\mu(B) \leq \mu(A) \qquad \textbf{(croissance de } \mu\textbf{)}$$

et si $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

ii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n, alors

$$\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \sup_n \mu(A_n) \qquad \textbf{(continuité à gauche)}$$

iii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n et si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors

$$\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \inf_n \mu(A_n) \qquad \textbf{(continuité à droite)}$$

iv) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors

$$\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \qquad \textbf{(sous } \sigma\textbf{-additivité)}$$

i) Soient A, B dans $\mathcal{A}$ t.q. $B \subset A$. Alors

$$\mu(B) \leq \mu(A) \quad : \textbf{croissance de } \mu$$

et si $\mu(B) < +\infty$ alors $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

- On a
$$\mu(A) = \mu(B \cup (A \setminus B)) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$$
ce qui permet de conclure. ∎

ii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n, alors

$$\mu(\cup_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \sup_n \mu(A_n) \qquad : \textbf{continuité à gauche}$$

- On pose $B_0 := A_0$ et $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. On a alors

$$\begin{aligned} \mu(\cup_n A_n) &= \mu(\cup_n B_n) && \text{par définition des } B_n \\ &= \sum_n \mu(B_n) && \text{car les } B_n \text{ sont } \textbf{2 à 2 disjoints}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\sum_n \mu(B_n) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \lim_n \mu(\cup_{k=0}^n B_k) = \lim_n \mu(A_n)$$

car $\cup_{k=0}^n B_k = A_n$, ce qui permet de conclure pour la première égalité. La **croissance** de μ nous donne la seconde égalité : $(\mu(A_n))_n$ est une suite croissante. ■

iii) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ vérifie $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout n et si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $\mu(A_{n_0}) < +\infty$, alors

$$\mu(\cap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \inf_n \mu(A_n) \quad : \textbf{continuité à droite}.$$

- On pose $B_n := A_{n_0} \setminus A_n$ pour tout $n \geq n_0$.

La suite $(B_n)_n$ est croissante, majorée par A_{n_0} et $\mu(A_{n_0}) < +\infty$ donc

$$\mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n) = \lim_n (\mu(A_{n_0}) - \mu(A_n)) = \mu(A_{n_0}) - \lim_n \mu(A_n).$$

D'autre part, on a

$$\cup_n B_n = \cup_n (A_{n_0} \cap A_n^c) = A_{n_0} \cap (\cup_n A_n^c) = A_{n_0} \cap (\cap_n A_n)^c = A_{n_0} \setminus (\cap_n A_n),$$

donc on a aussi

$$\mu(\cup_n B_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(\cap_n A_n)$$

ce qui permet de conclure pour la première égalité. La **croissance** de μ nous donne la seconde égalité : $(\mu(A_n))_n$ est une suite décroissante. ■

iv) Si $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ alors

$$\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) \quad : \textbf{sous } \sigma\textbf{-additivité}.$$

- On pose $B_0 := A_0$ et $B_n := A_n \setminus \cup_{k=0}^{n-1} B_k$ pour $n \geq 1$.

Les B_n sont 2 à 2 disjoints, $A_n = \cup_{k=0}^{n} B_k$ et $B_n \subset A_n$.

On a

$$\begin{aligned}
\mu(\cup_n B_n) &= \sum_n \mu(B_n) && \text{car les } B_n \text{ sont 2 à 2 disjoints} \\
&\leq \sum_n \mu(A_n) && \text{car } B_n \subset A_n.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\cup_n A_n = \cup_n B_n$$

car $B_n \subset A_n \subset \cup_n A_n$ et $A_n = \cup_{k=0}^{n} B_k \subset \cup_n B_n$. ■

L'exercice suivant utilise les propriétés générales présentées ci-avant.

Exercice 2.3.4. Soit p une probabilité sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On pose

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0\,,1] \\ t & \longmapsto & F(t) = p(]-\infty\,,t]). \end{array}$$

1) Montrer que F est croissante et continue à droite.
2) Calculer (si existence) $\lim_{t\to\pm\infty} F(t)$.

► La correction est donnée en TD. ■

Remarque 2.3.6. La fonction F n'est pas nécessairement continue à gauche, bien que p le soit. D'après vous, pourquoi ?

Chapitre 2 : Théorie de la mesure

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu$$

Proposition 2.3.5

La tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ est la tribu engendrée par la classe des pavés ouverts [4], mais est aussi la tribu engendrée par la classe des pavés ouverts à extrémités dans $\mathbb{Q}$ ou dans toute autre partie dense de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3.6 – Mesure de Lebesgue (ou mesure de Borel-Lebesgue)

Il existe une unique mesure notée λ_d sur les boréliens de $\mathbb{R}^d$ telle que la mesure de tout pavé $\prod_{i=1}^{d}]a_i\,, b_i[$ soit donnée par :

$$\lambda_d\left(\prod_{i=1}^{d}]a_i\,, b_i[\right) = \prod_{i=1}^{d}(b_i - a_i).$$

Elle est appelée **mesure de Lebesgue** et notée λ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.

4. pavé = produit d'intervalles ; pavé ouvert = produit d'intervalles ouverts.

Liste de propriétés de la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

- $\forall x \in \mathbb{R} : \lambda(\{x\}) = 0$;
- $\forall a < b \in \mathbb{R} : \lambda(]a\,,b[) = \lambda(]a\,,b]) = \lambda([a\,,b[) = \lambda([a\,,b]) = b - a$
- $\forall a < b \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} : \lambda([a + x\,, b + x]) = \lambda([a\,,b])$;
- $\lambda(\mathbb{N}) = \lambda(\mathbb{Z}) = \lambda(\mathbb{Q}) = 0$;
- La mesure de Lebesgue d'un ensemble au plus dénombrable est nulle : $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0\,,1]) = 0$.
- Attention, l'ensemble triadique de Cantor est infini, non dénombrable, mais de mesure nulle : https://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Cantor.

> **Remarque 2.3.7**. En toute rigueur, la mesure de Lebesgue est la complétée (voir Chapitre 5 pour la définition) de la mesure de Borel-Lebesgue (nous ne faisons pas la distinction ici). Il existe des ensembles mesurables pour la tribu complétée qui ne sont pas des boréliens. Il existe de plus des ensembles non mesurables. Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Tribu_de_Lebesgue.

> **Remarque 2.3.8**. Vidéo sur la mesure le Lebesgue.