Télécommunications

Département sciences du numérique
Première année

Transmissions Bande de Base

Nathalie Thomas, IRIT/ENSEEIHT
Nathalie.Thomas@enseeiht.fr

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d’efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l’interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l’œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d’efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d’erreur symbole et taux d’erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Objectif - Principe général

→ Objectif

A partir de données numériques (information binaire), générer un signal physique adapté au canal de propagation et permettant la transmission de ces données.

→ Principe

→ Découper la séquence binaire en blocs de n bits

→ Associer un symbole M-aire à chaque bloc : $M=2^n$

→ Associer un signal analogique à chacun de ces symboles (forme d'onde)

→ Transmission des bits tous les T_b, $R_b=1/T_b$: débit binaire

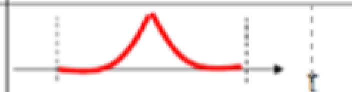
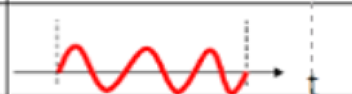
→ Transmission des symboles tous les $T_s=nT_b$ (période symbole)

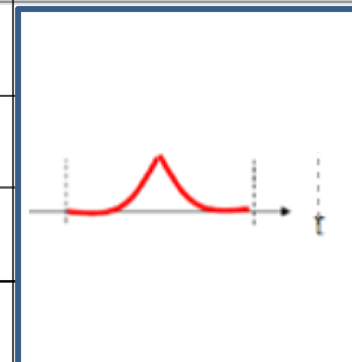
$R_s=1/T_s$: débit symbole

$R_s=R_b/n$

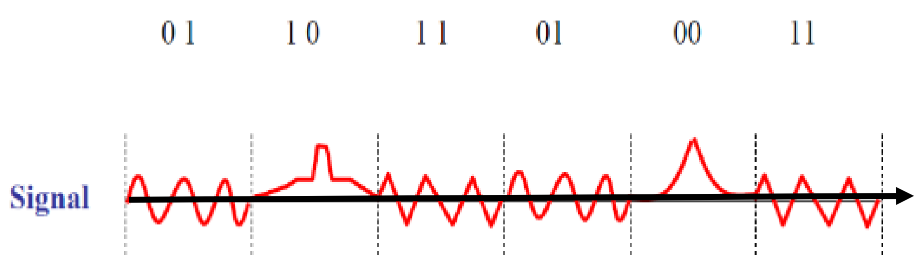
→ Exemple avec M=4

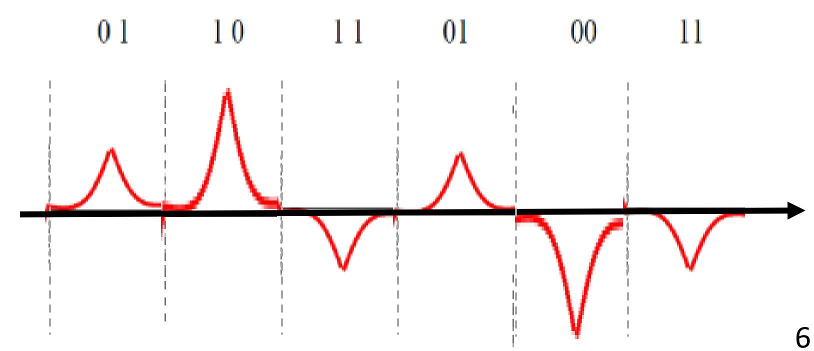
→ Symboles et formes d'onde associées

Bits	Forme d'onde
00	
01	
10	
11	

Bits	Symbole	Forme d'onde
00	S_0	
01	S_1	
10	S_2	
11	S_3	

→ Signal obtenu pour transmettre une séquence de 10 bits





Quelques exemples de signaux

→ Codage élementaire à symboles indépendants

→ Codage par niveau :

→ NRZ unipolaire :

→ NRZ polaire :

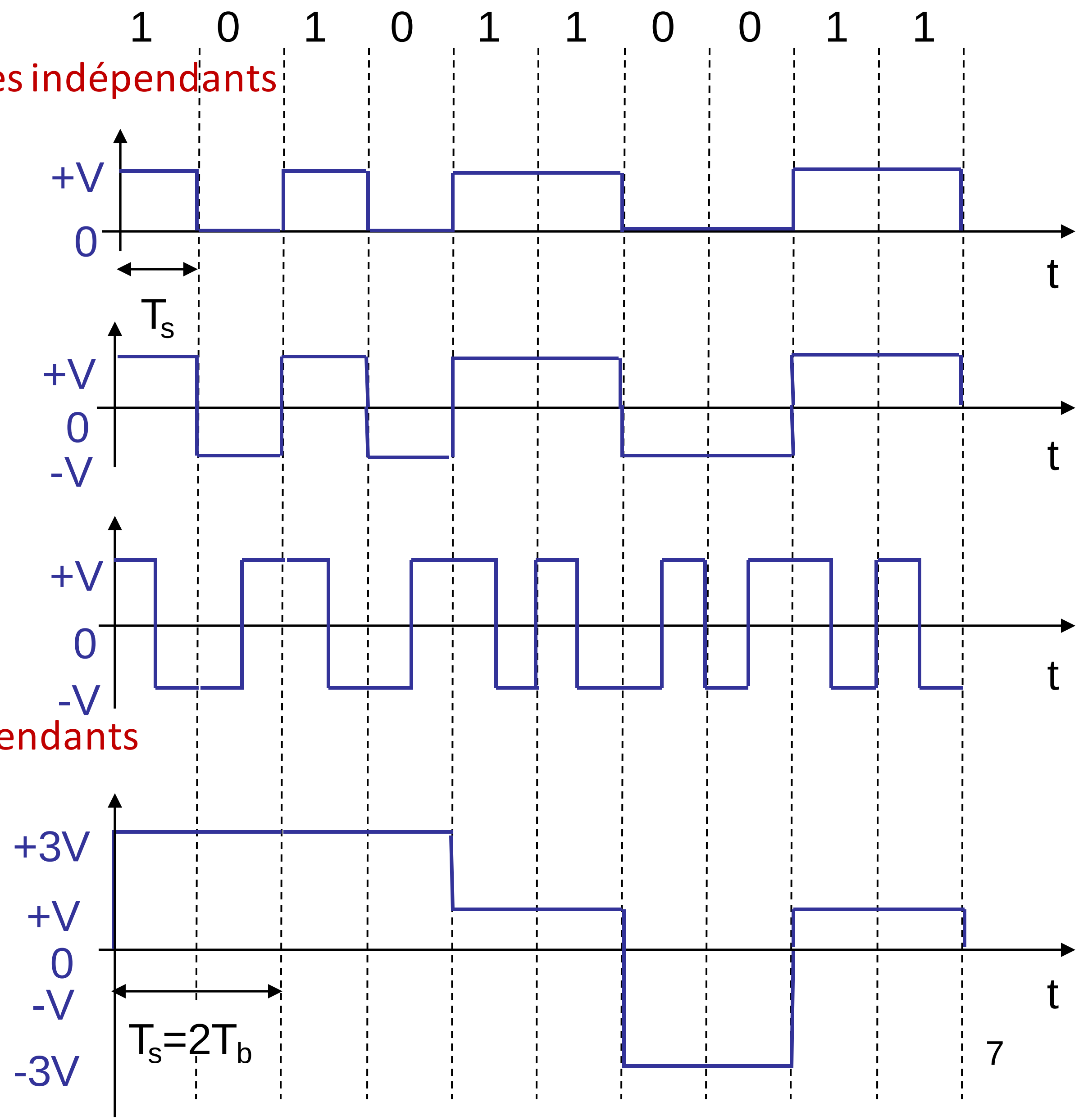
→ Codage par transition

→ Biphase :

→ Codage bloc à symboles indépendants

→ Codage par niveau :

→ NRZ à 4 niveaux :



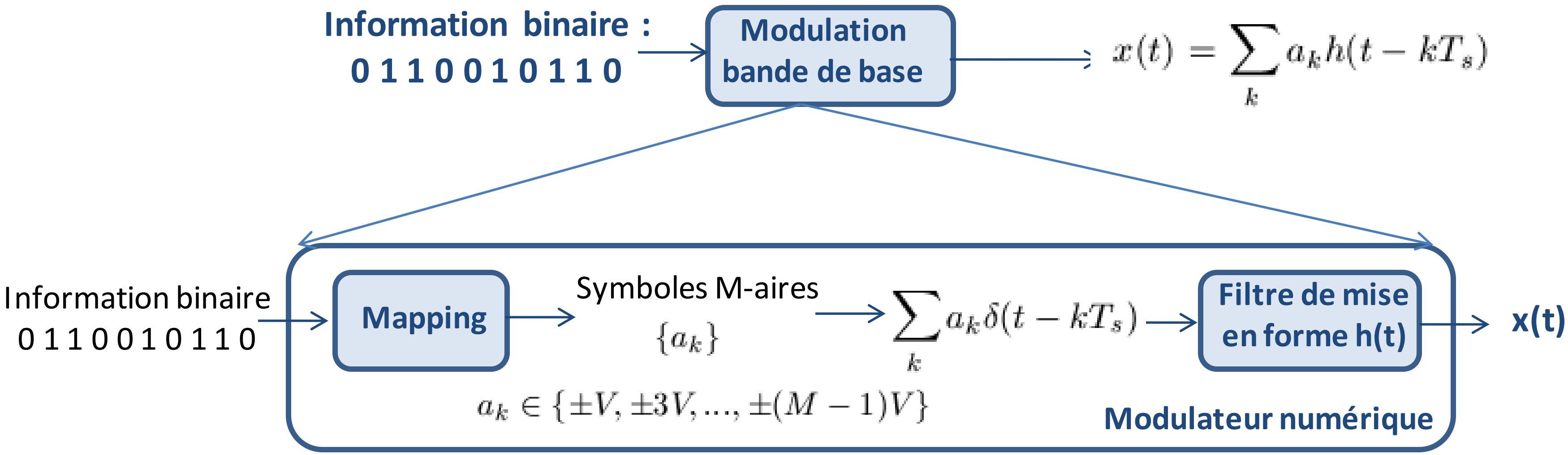
Modulation numérique en bande de base

Modélisation générale

Information binaire :
0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 → **Modulation bande de base** → $x(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$

Modulation numérique en bande de base

Modélisation générale



Accès Wooclap pour les questions

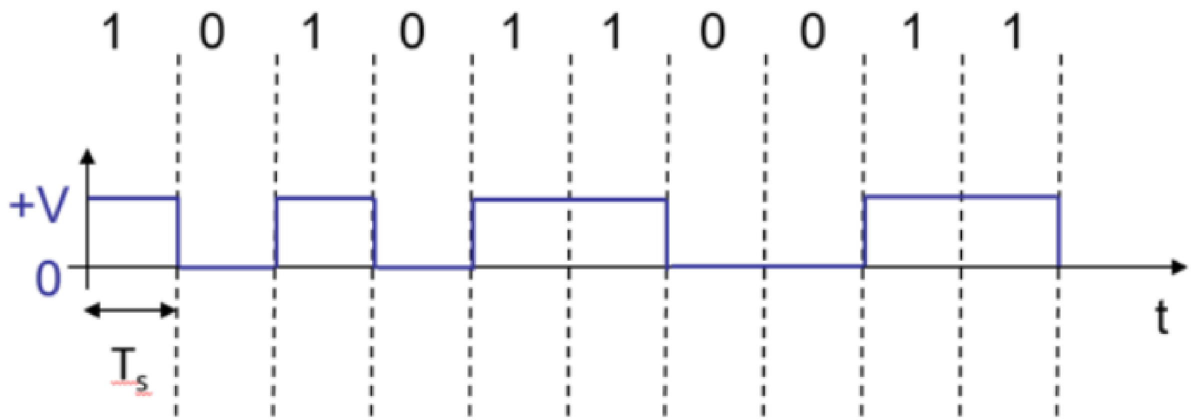
Comment participer ?

1. Allez sur wooclap.com
2. Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

Code d'événement
MODBDB

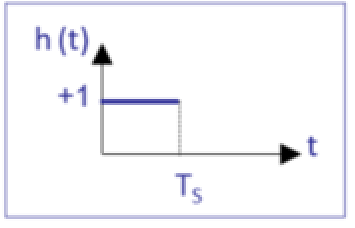
1. Envoyez @MODBDB au 06 44 60 96 62
2. Vous pouvez participer

QUESTION 1

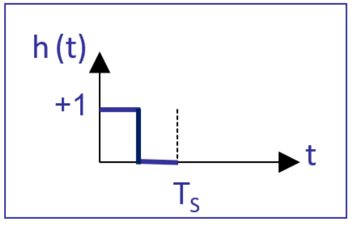


Identifiez, parmi les propositions ci-dessous, le mapping et la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme permettant de générer le signal donné.

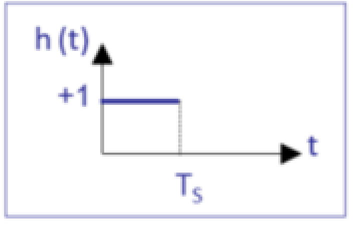
Mapping	
bits	Symboles a_k
0	0
1	+V



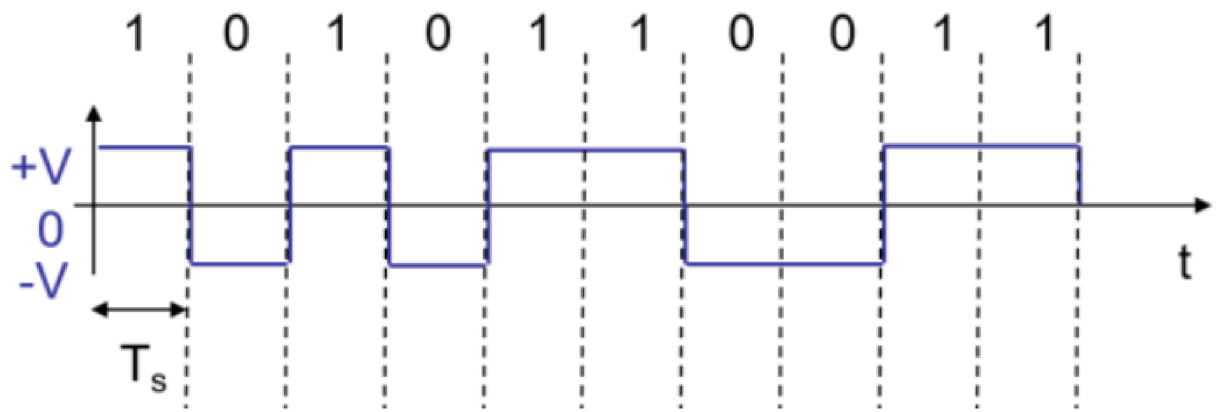
Mapping	
bits	Symboles a_k
0	0
1	+V



Mapping	
bits	Symboles a_k
0	-V
1	+V

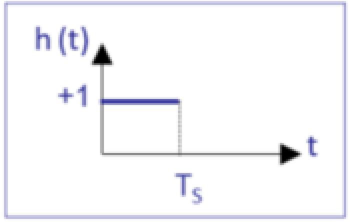


QUESTION 2

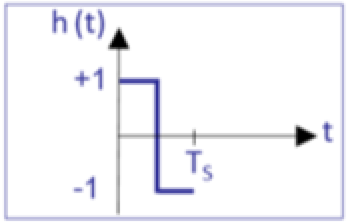


Identifiez, parmi les propositions ci-dessous, le mapping et la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme permettant de générer le signal donné.

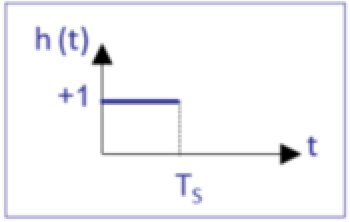
Mapping	
bits	Symboles a_k
0	0
1	+V



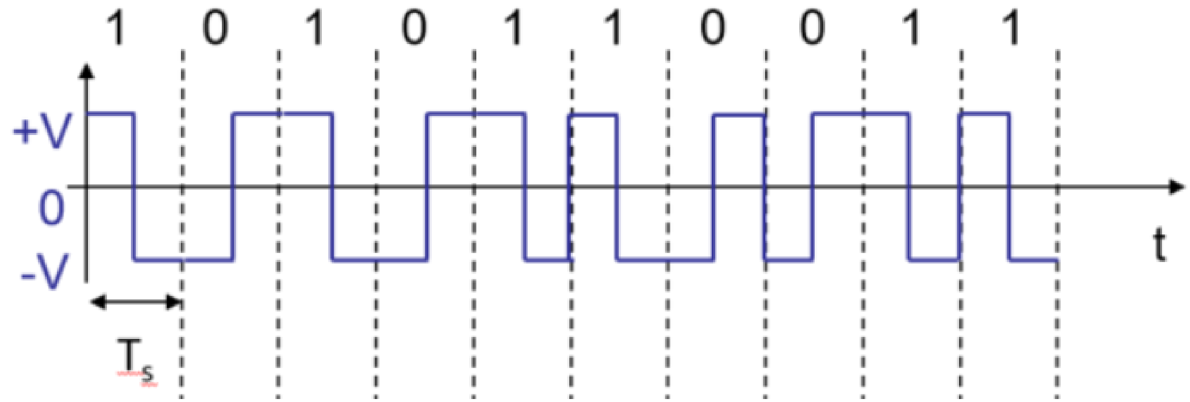
Mapping	
bits	Symboles a_k
0	-V
1	+V



Mapping	
bits	Symboles a_k
0	-V
1	+V

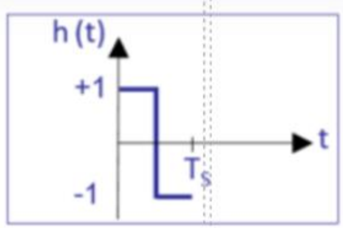


QUESTION 3

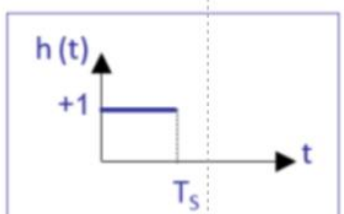


Identifiez, parmi les propositions ci-dessous, le mapping et la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme permettant de générer le signal donné.

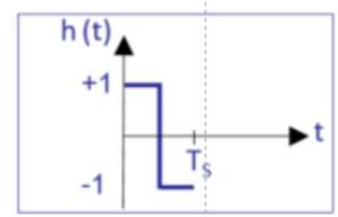
Mapping	
bits	Symboles a_k
0	0
1	+V



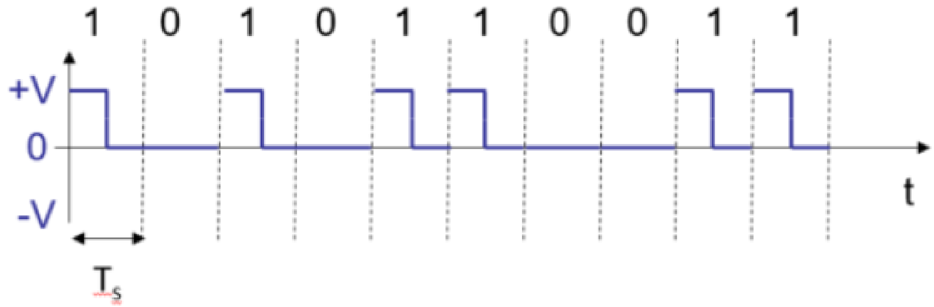
Mapping	
bits	Symboles a_k
0	-V
1	+V

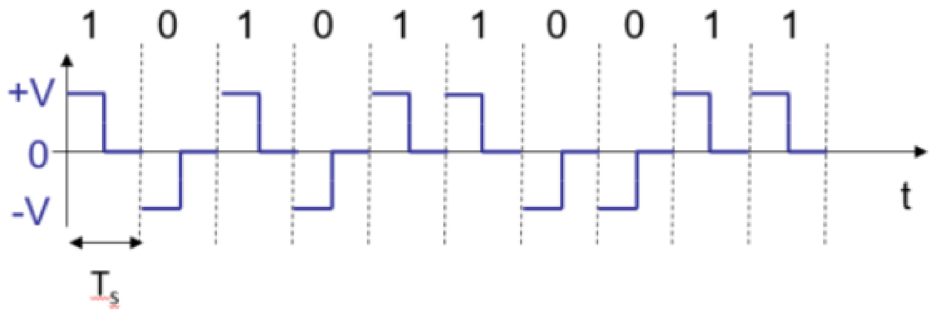


Mapping	
bits	Symboles a_k
0	-V
1	+V



QUESTION 4

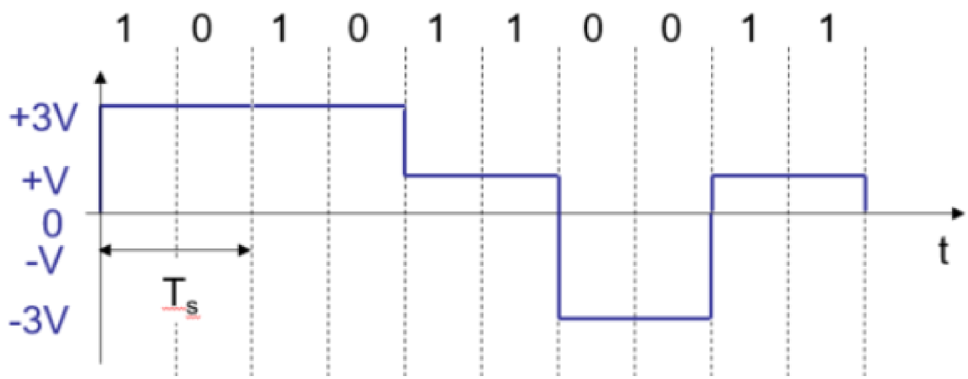




Afin de générer le deuxième signal, qu'avons nous changé par rapport au premier ?

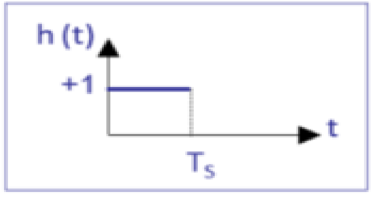
1. **Le mapping**
2. **La réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme**
3. **La période symbole**
4. **Pas assez d'éléments pour répondre à la question**

QUESTION 5

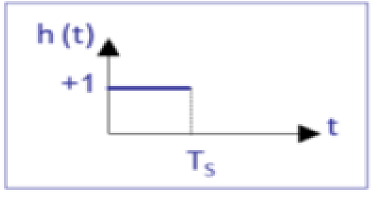


Identifiez, parmi les propositions ci-dessous, le mapping et la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme permettant de générer le signal donné.

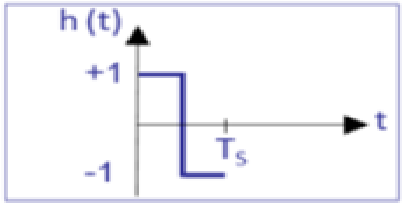
Mapping	
bits	Symboles a_k
0	-V
1	+V



Mapping	
bits	Symboles a_k
00	-3V
01	-V
11	+V
10	+3V

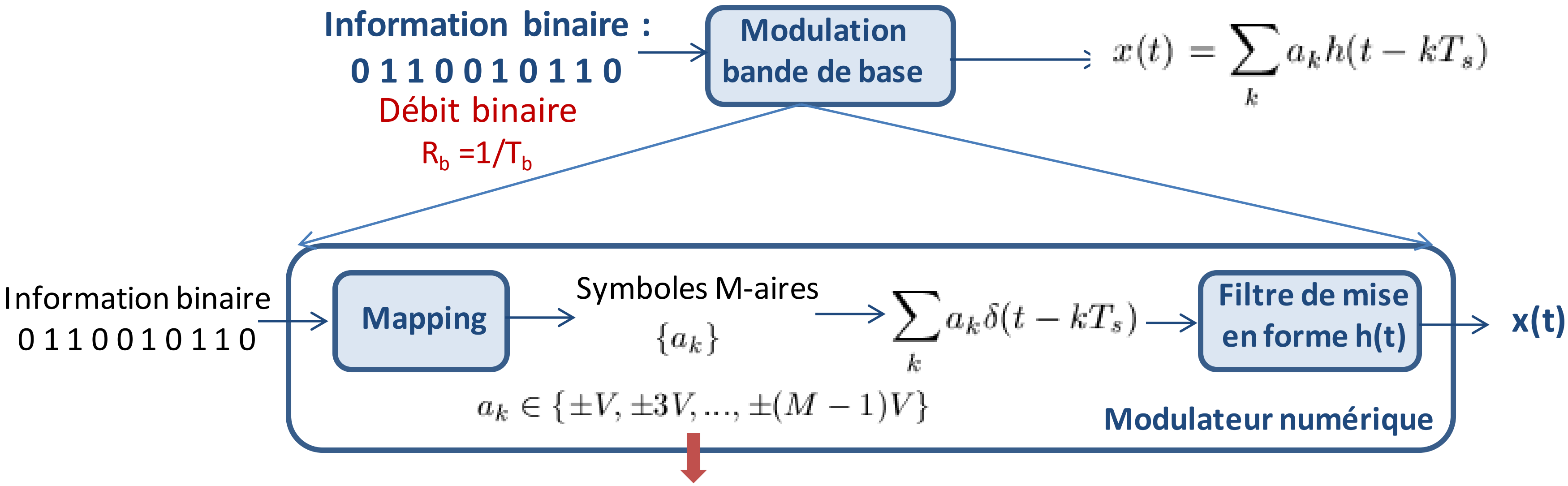


Mapping	
bits	Symboles a_k
00	-3V
01	-V
11	+V
10	+3V



Modulation numérique en bande de base

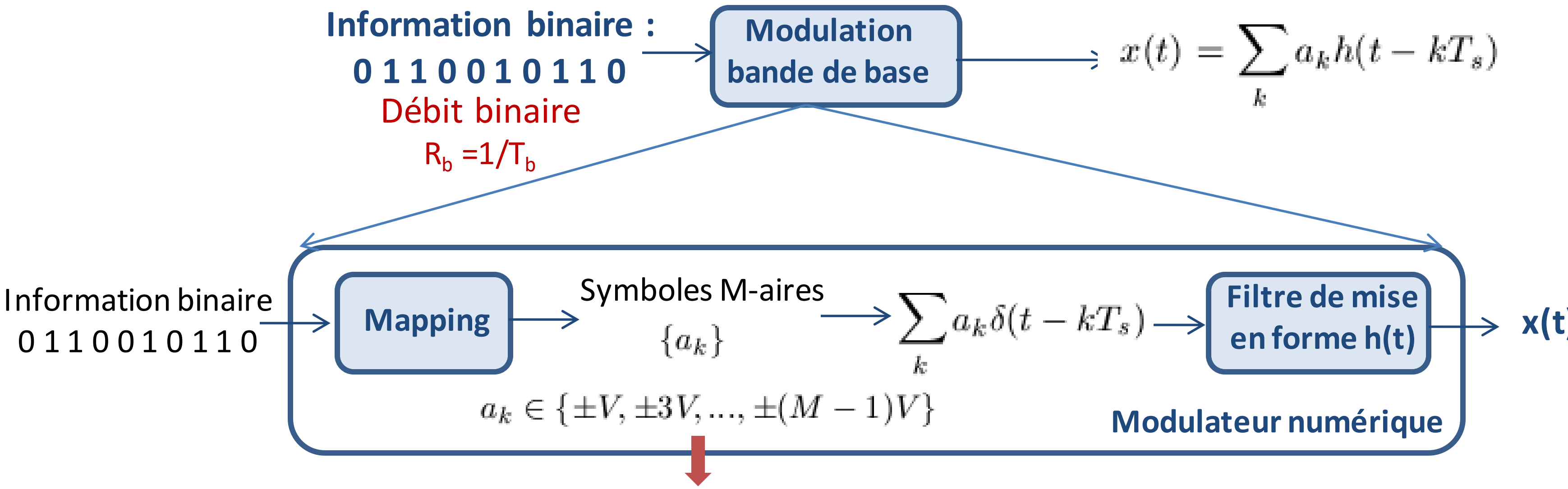
Modélisation générale



Débit symbole : $R_s = \frac{1}{T_s}$ $(symboles/s \;\; ou \;\; bauds)$

Modulation numérique en bande de base

Modélisation générale



Débit symbole : $R_s = \frac{1}{T_s}$ $(symboles/s \;\; ou \;\; bauds)$

$$\boxed{R_s = \frac{R_b}{log_2(M)}}$$

$M = 2^n$: ordre de la modulation
$=$ nombre de symboles possibles

Modulation PAM (Pulse Amplitude Modulation) d’ordre M (M-PAM)

Modulation numérique en bande de base

Modélisation générale

Information binaire : **0 1 1 0 0 1 0 1 1 0** → **Modulation bande de base** → $x(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$

Débit binaire

$R_b = 1/T_b$

Information binaire 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 → **Mapping** → Symboles M-aires $\{a_k\}$ → $\sum_k a_k \delta(t - kT_s)$ → **Filtre de mise en forme h(t)** → **x(t)**

$a_k \in \{\pm V, \pm 3V, \dots, \pm(M-1)V\}$

Modulateur numérique

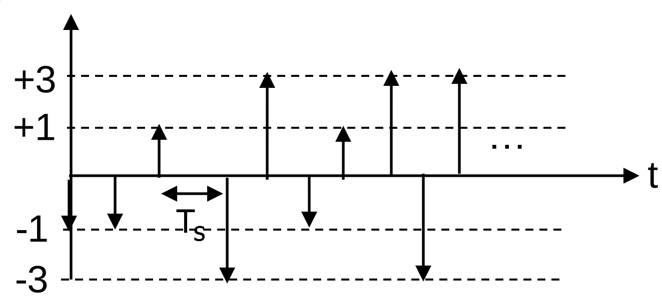
Débit symbole : $R_s = \frac{1}{T_s}$ $(symboles/s \;\; ou \; bauds)$

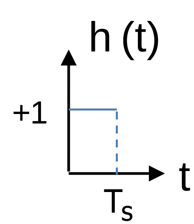
$$\boxed{R_s = \frac{R_b}{log_2(M)}}$$

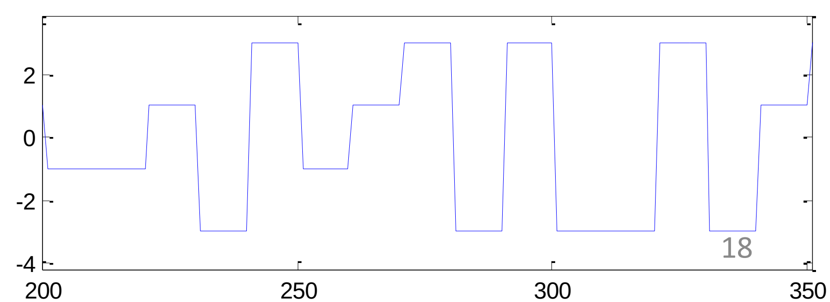
$M = 2^n$: ordre de la modulation
$= $ nombre de symboles possibles

Exemple (NRZ, M=4 = NRZ 4-aire):

$\sum_k a_k \delta(t - kT_s)$



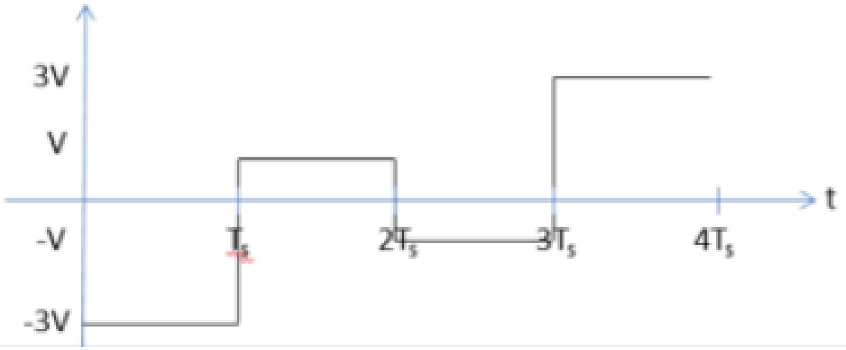




QUESTION 6

Suite de bits à transmettre : 00100111

Signal généré :



Avec ce signal généré pour la suite de bits à transmettre donnée, le débit symbole sera :

1. **Égal au débit binaire**
2. **Plus grand que le débit binaire**
3. **Plus petit que le débit binaire**
4. **Pas assez d'éléments pour répondre à la question posée**

QUESTION 7

En considérant qu'il est possible de transmettre un débit symbole Rs=6000 symboles/s, on pourra transmettre un débit binaire de 12 kbits/s avec une modulation d'ordre :

1. 2

2. 4

3. 8

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Modulation numérique en bande de base

Densité spectrale de puissance (DSP) du signal transmis

Information binaire :

0 1 1 0 0 1 0 1 1 0

Débit binaire

$R_b = 1/T_b$

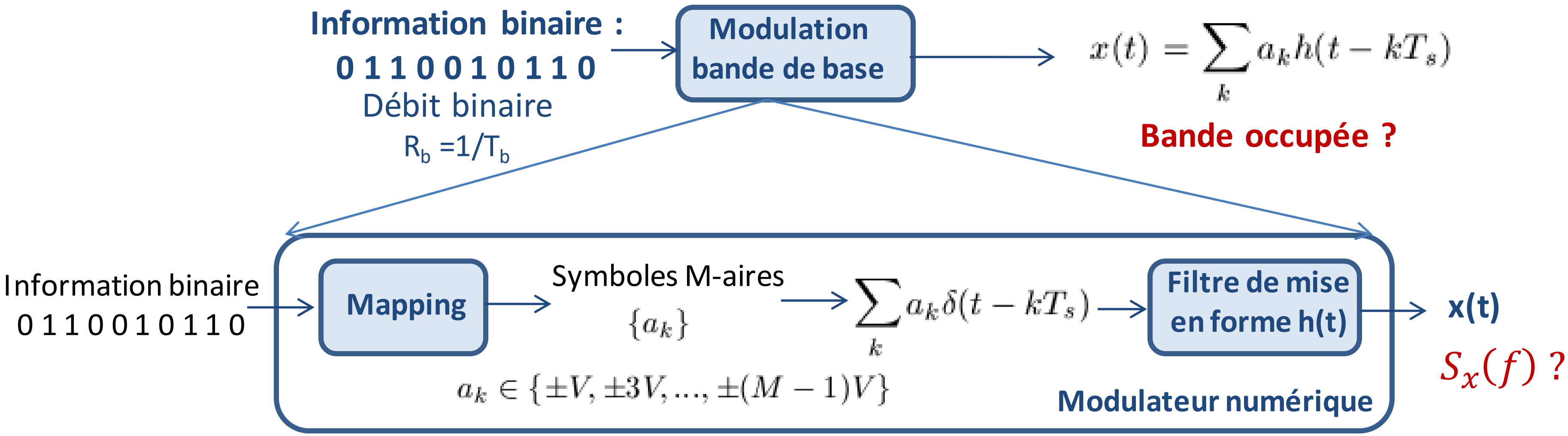
→ **Modulation bande de base** →

$$x(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$$

Bande occupée ?

Modulation numérique en bande de base

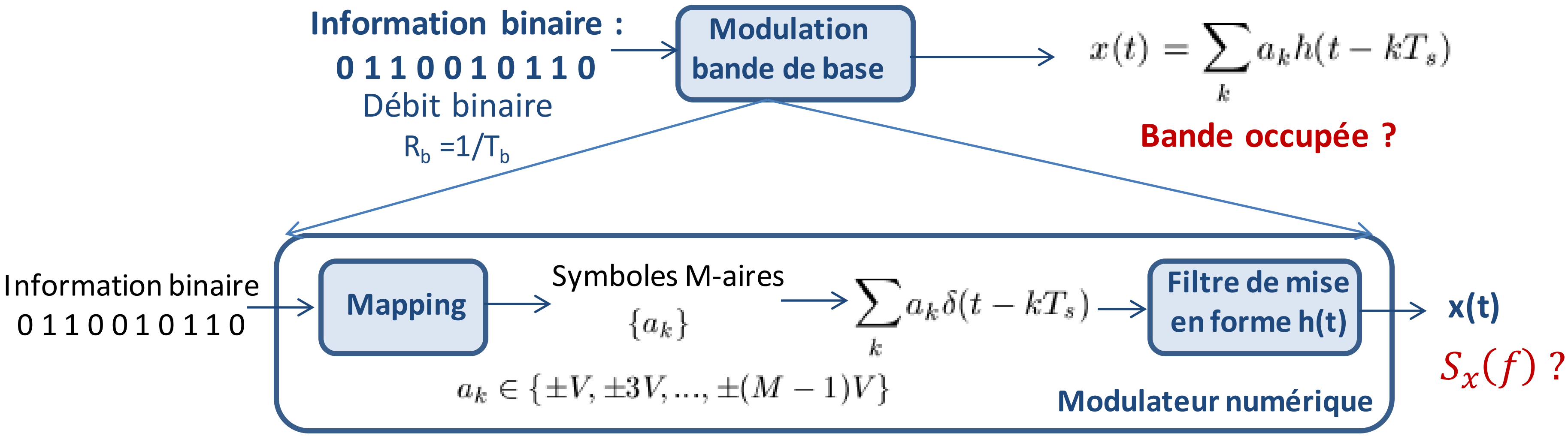
Densité spectrale de puissance (DSP) du signal transmis



Modulation PAM (Pulse Amplitude Modulation) d'ordre M (M-PAM)

Modulation numérique en bande de base

Densité spectrale de puissance (DSP) du signal transmis



Modulation PAM (Pulse Amplitude Modulation) d'ordre M (M-PAM)

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s}|H(f)|^2 + 2\frac{\sigma_a^2}{T_s}|H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re e\left[R_a(k) e^{j2\pi f k T_s}\right] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k \left|H\left(\frac{k}{T_s}\right)\right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

(calcul donné sur moodle)

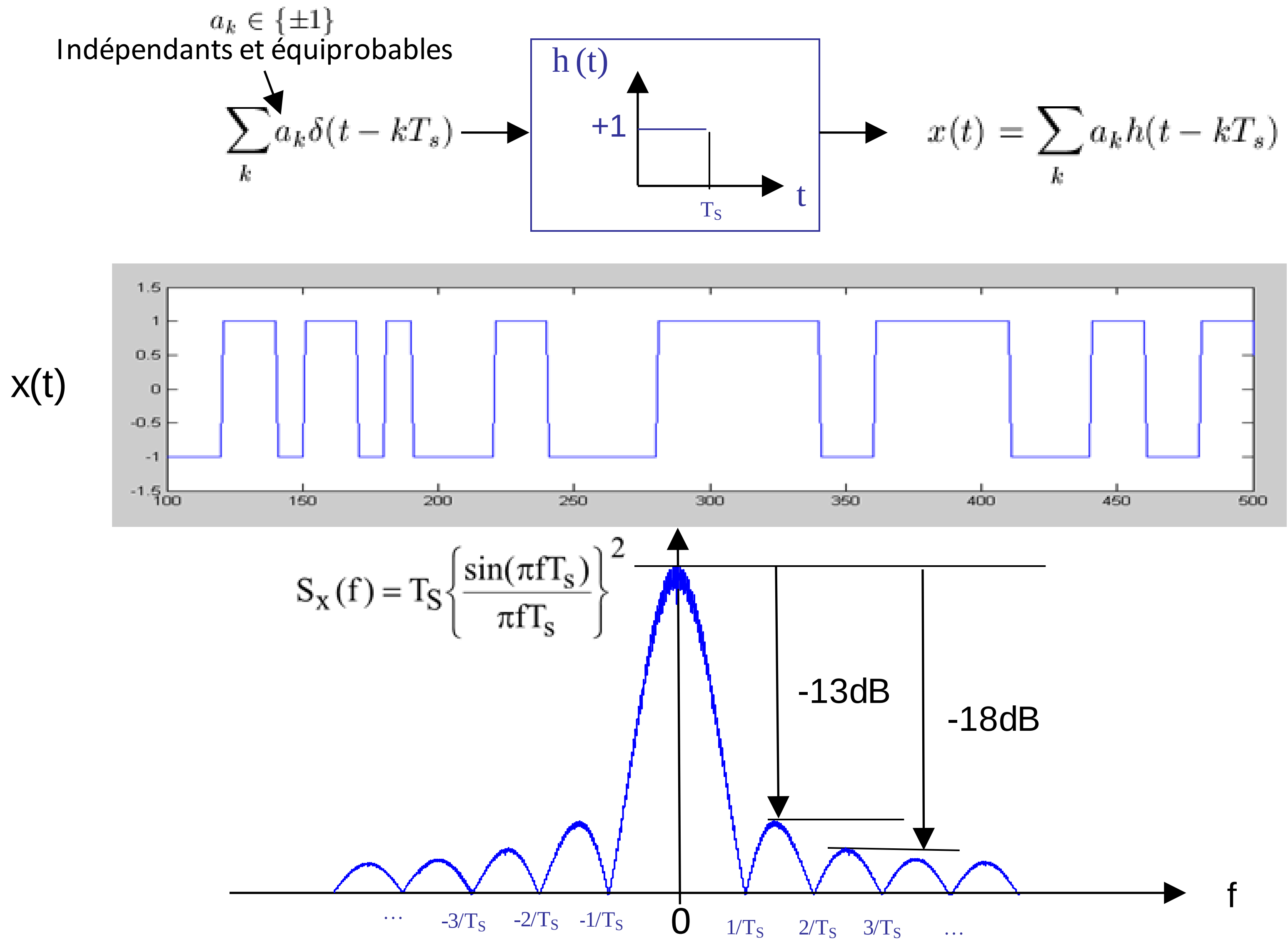
où : $\sigma_a^2 = E\left[|a_k - m_a|^2\right]$; $m_a = E[a_k]$; $R_a(k) = \dfrac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2}$

$$H(f) = TF[h(t)]$$

= Modulation linéaire en "bande de base" = DSP du signal transmis autour de la fréquence 0

Quelques exemples de DSPs

→ Mise en forme NRZ à 2 niveaux (forme d'onde du GPS)



Modulation numérique en bande de base

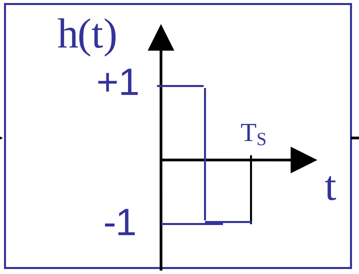
Quelques exemples de DSPs

→ Mise en forme Biphase ou Manchester (forme d'onde Ethernet : IEEE802.3)

$a_k \in \{\pm 1\}$

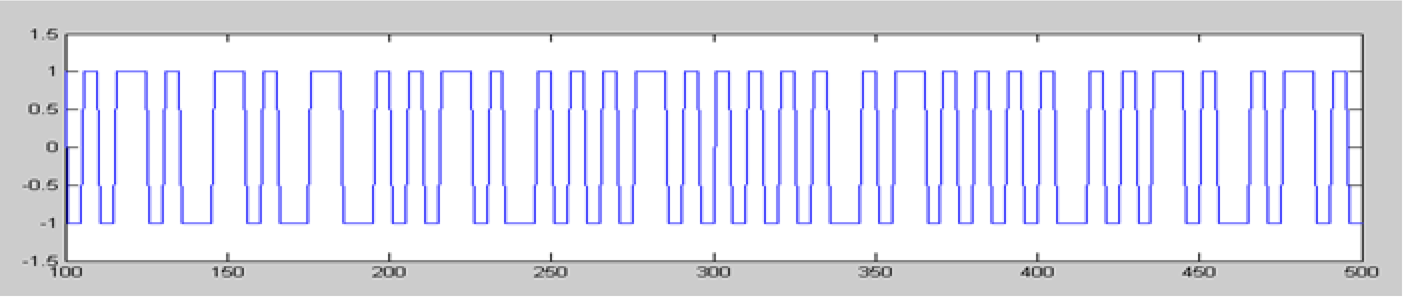
Indépendants et équiprobables

$$\sum_k a_k \delta(t - kT_s) \longrightarrow$$

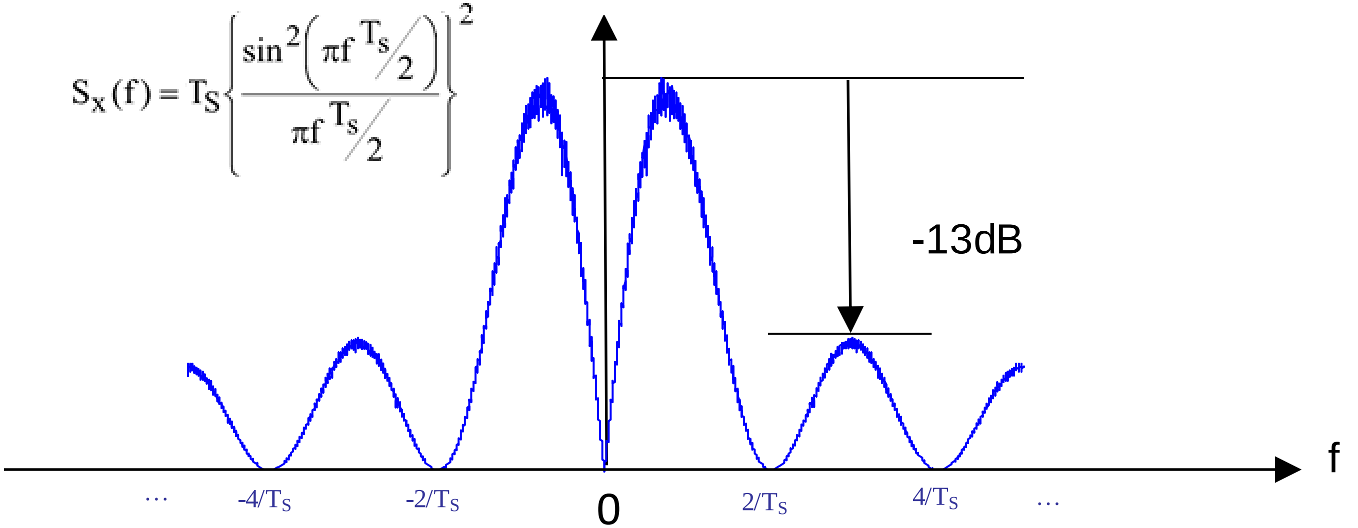


$$\longrightarrow x(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$$

x(t)



$$S_X(f) = T_S\left\{\frac{\sin^2\left(\pi f \frac{T_S}{2}\right)}{\pi f \frac{T_S}{2}}\right\}^2$$

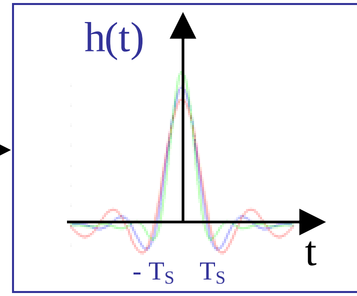


Modulation numérique en bande de base

Quelques exemples de DSPs

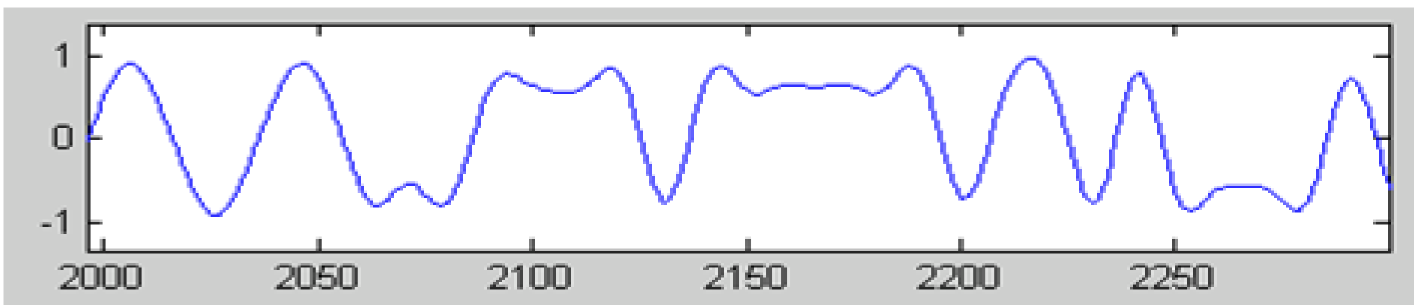
→ Mise en forme en racine de cosinus surélevé (forme d'onde du DVB-C et DVB-S)

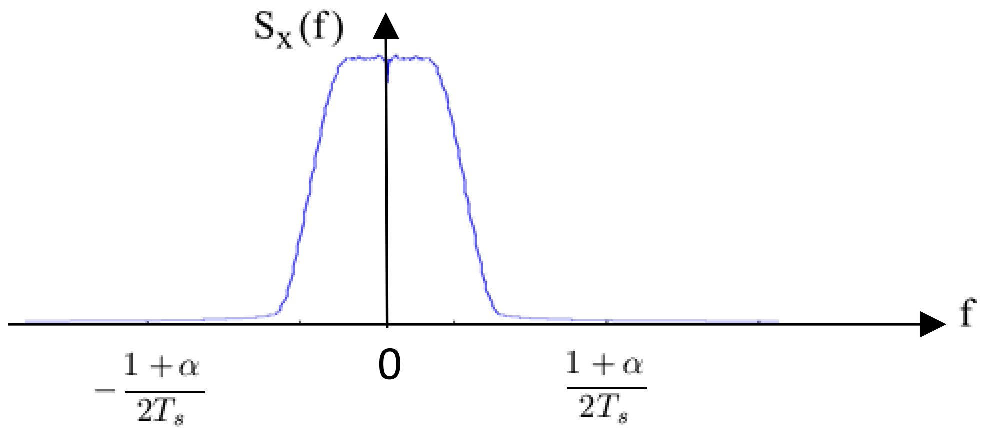
$$\sum_k a_k \delta(t - kT_s) \longrightarrow$$



$$\longrightarrow x(t) = \sum_k a_k h(t - kT_s)$$

x(t)





Modulation numérique en bande de base

Bande occupée par le signal transmis

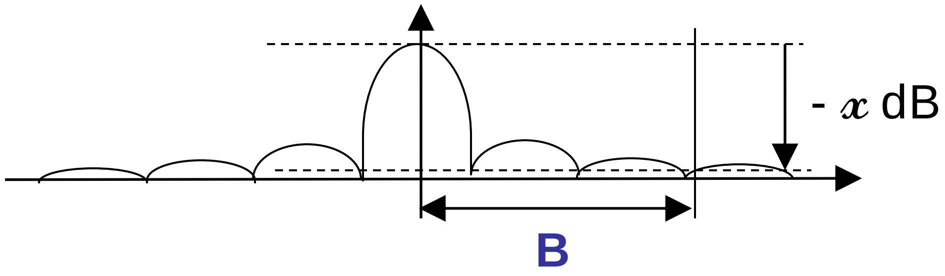
→ Définition 1

Bande de fréquence B concentrant x % de l'énergie du signal
(valeurs typiques : 95 à 99 %)

$$\frac{\int_0^B S_x(f)df}{\int_0^\infty S_x(f)df} = \frac{x}{100}$$

→ Définition 2

Bande de fréquence B au délà de laquelle l'atténuation minimale est de x dB (valeurs typiques : 20 à 30 dB)

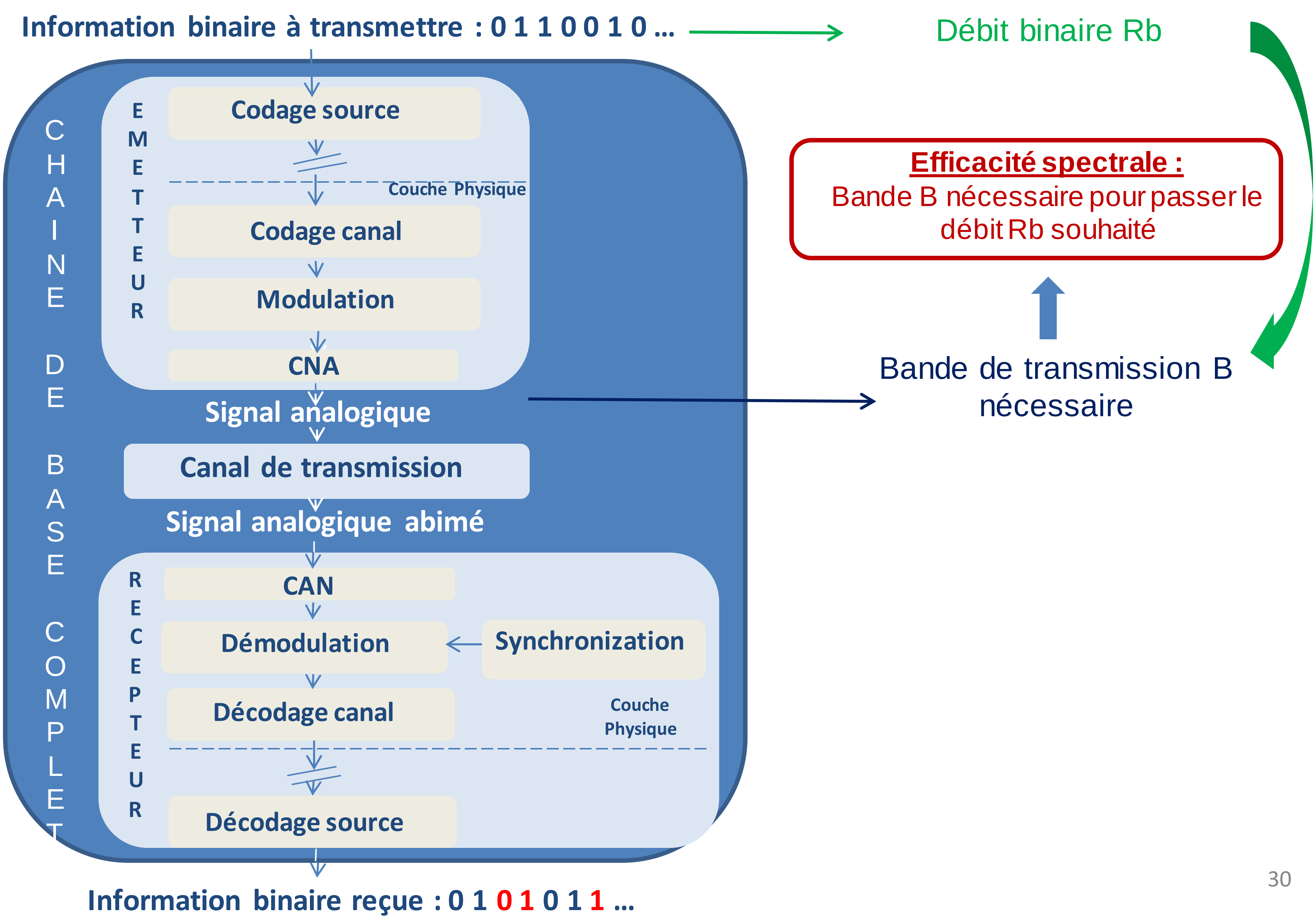


Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Modulation numérique en bande de base

Efficacité spectrale de la transmission



→ Efficacité spectrale (en bits/s/Hz) :

$$B = kR_s$$

(Quel que soit le filter de mise en forme utilisé)

$$R_s = \frac{R_b}{\log_2(M)}$$

$$a_k \in \{\pm V, \pm 3V, ..., \pm(M-1)V\}$$

(Symboles M-aires)

$$\boxed{\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{log_2(M)}{k}}$$ (bits/s/Hz)

QUESTION 8

Un signal modulé en « bande de base » est un signal :

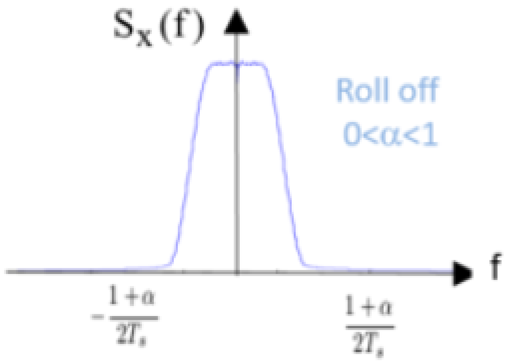
1. **Généré par un modulateur basique : symboles binaires et filtre de mise en forme rectangulaire,**

2. **Dont la densité spectrale de puissance est centrée autour de la fréquence 0,**

3. **Avec une bande occupée étroite.**

QUESTION 9

Soit une suite de bits 0,1 à transmettre et un mapping qui associe -V aux 0 et +V aux 1. La figure donne la densité spectrale de puissance du signal généré en utilisant un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé. L'efficacité spectrale obtenue sera :

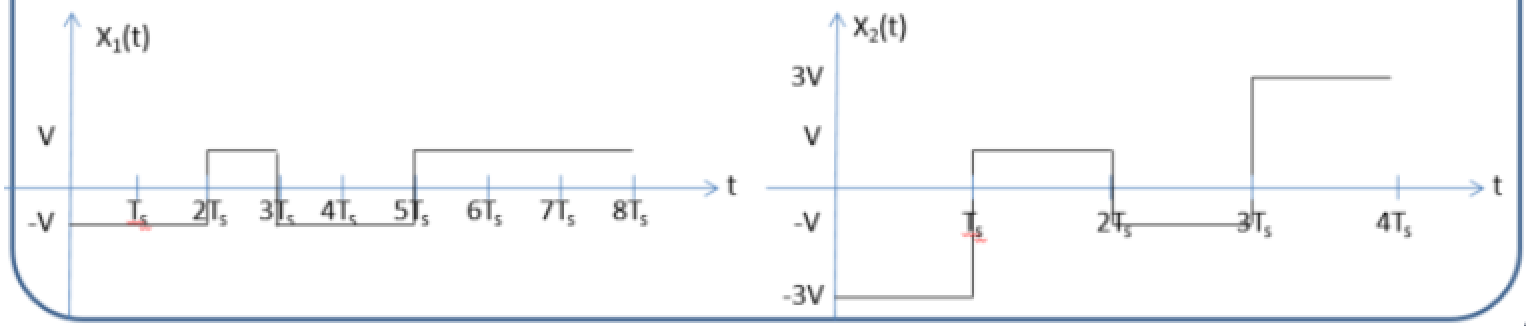


1. Plus grande qu'en utilisant un filtre de mise en forme rectangulaire
2. Plus petite qu'en utilisant un filtre de mise en forme rectangulaire
3. Identique à celle obtenue en utilisant un filtre de mise en forme rectangulaire
4. Pas assez d'éléments pour répondre à la question

QUESTION 10

Suite de bits à transmettre : 00100111

Signaux générés :



L'efficacité spectrale de la transmission sera :

1. **meilleure si je transmets le signal x1(t)**
2. **meilleure si je transmets le signal x2(t)**
3. **Identique pour la transmission des deux signaux**
4. **Pas assez d'éléments pour répondre à la question**

Jeu de reconstruction du modulateur bande de base

Somme de Diracs pondérés

Symboles M-aire

Information binaire à transmettre

Suréchantillonnage

Mapping

Signal bande de base

Filtre de mise en forme

A REMETTRE DANS LE BON ORDRE POUR RECONSTITUER LE MODULATEUR BANDE DE BASE

Télécommunications
Transmissions en bande de base

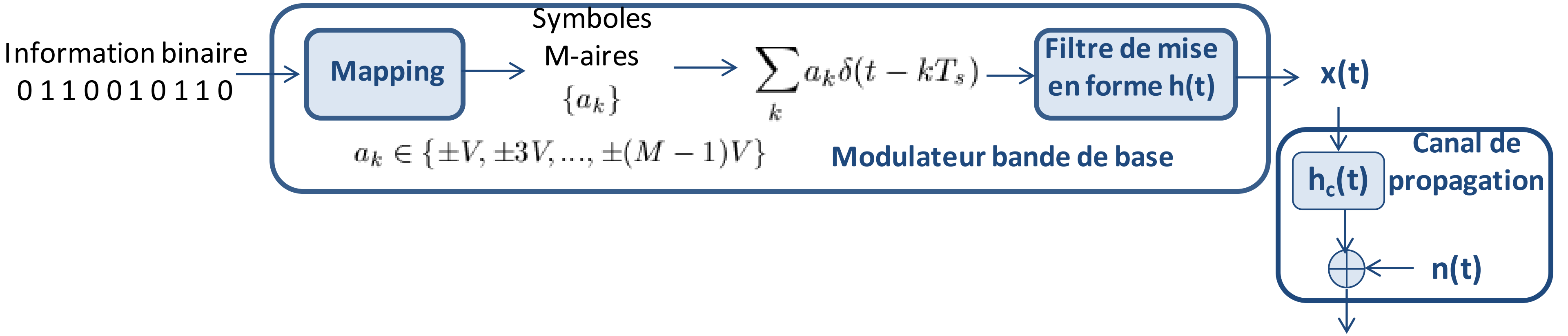
1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

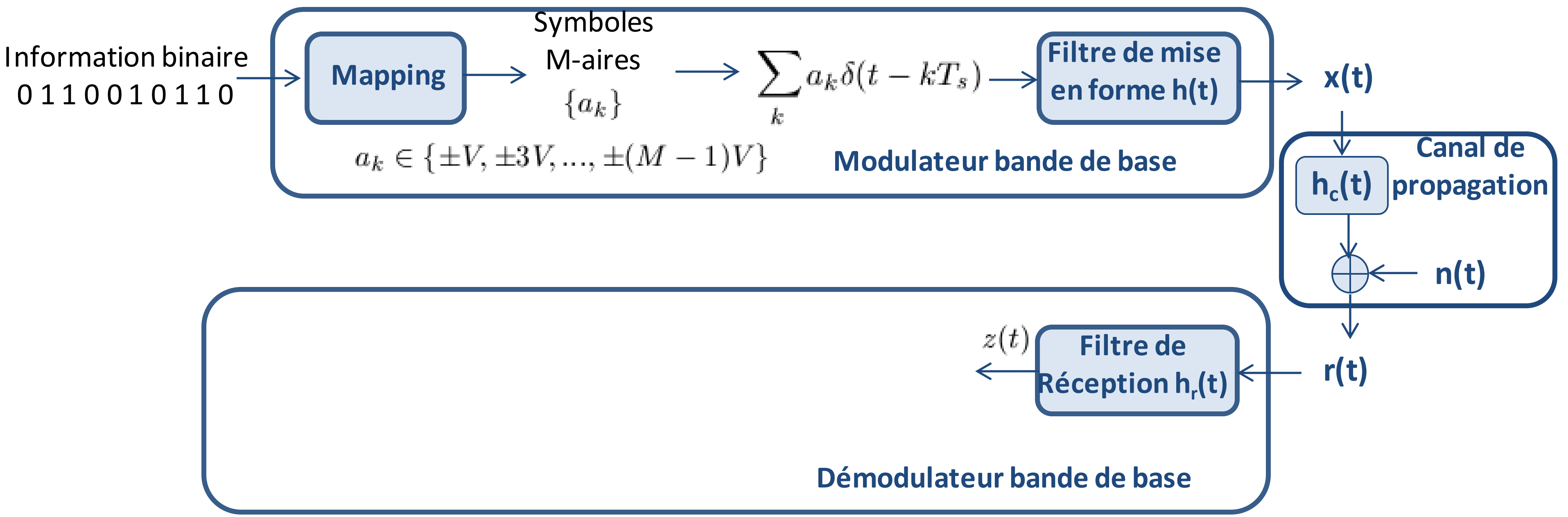
Problème de l'interférence entre symboles

Modulateur bande base - Canal de propagation



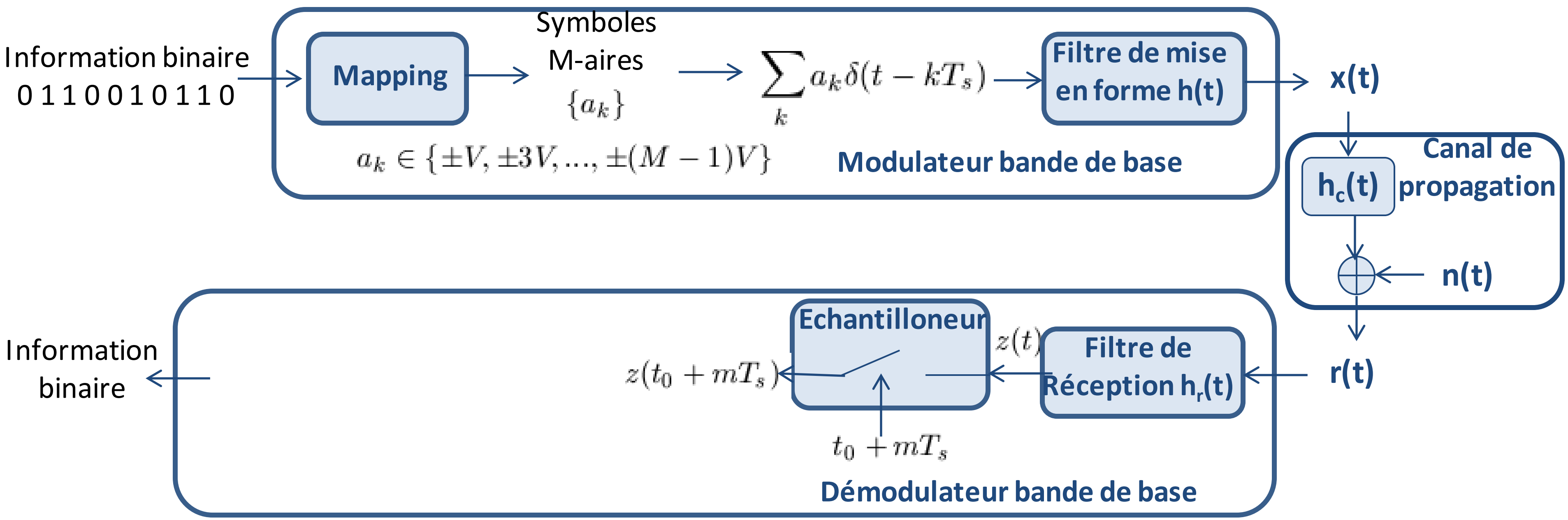
Problème de l'interférence entre symboles

Mise en place du démodulateur bande de base



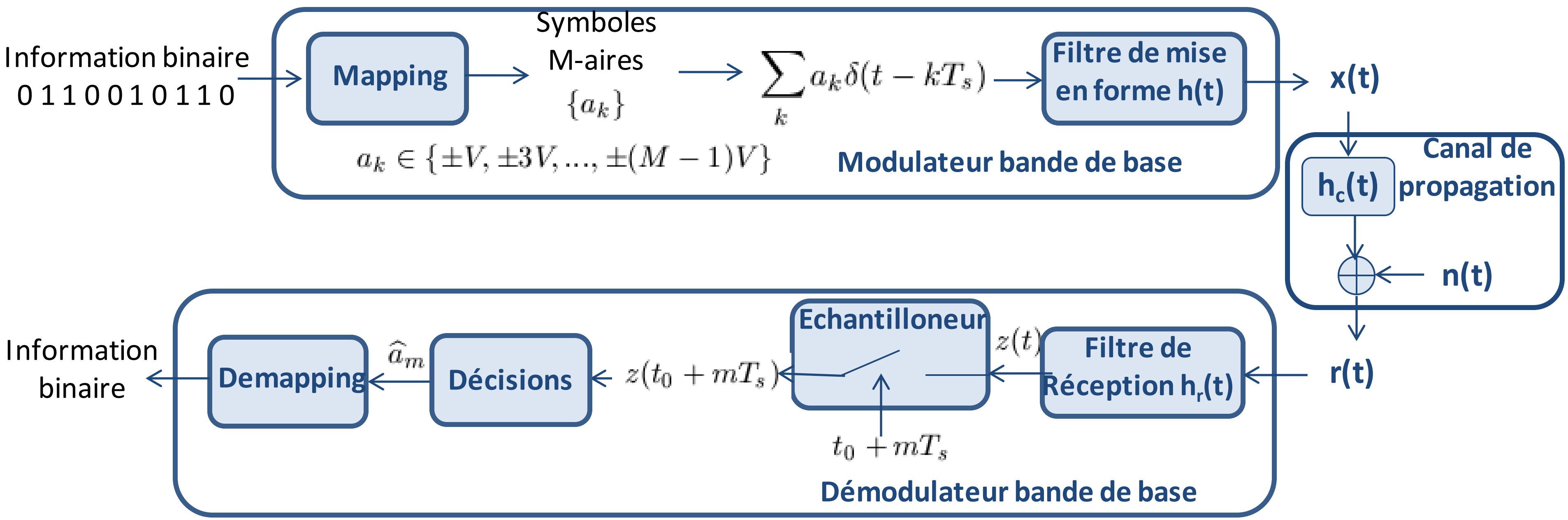
Problème de l'interférence entre symboles

Mise en place du démodulateur bande de base



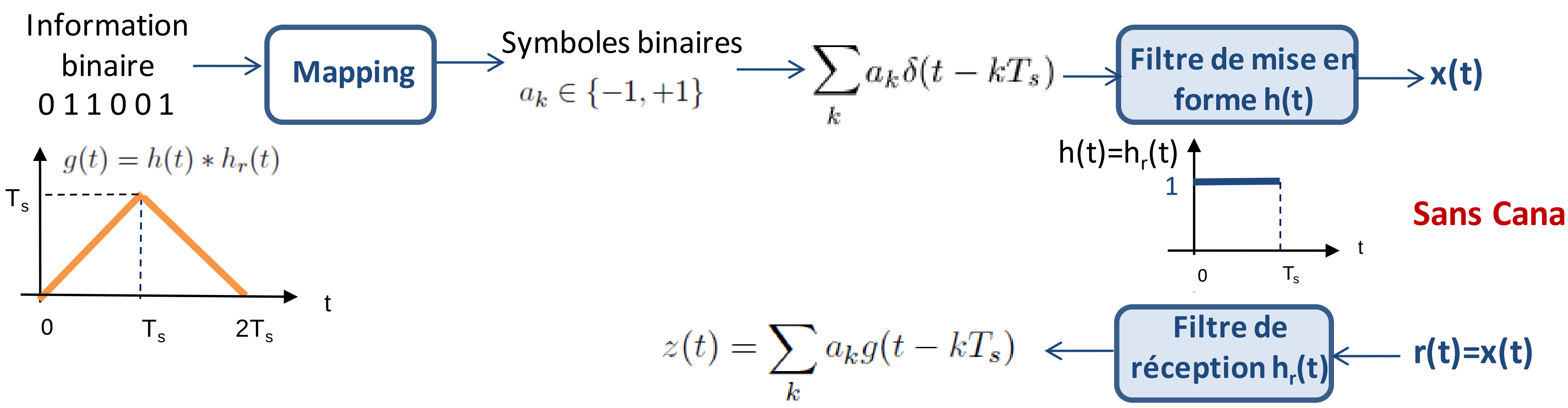
Problème de l'interférence entre symboles

Mise en place du démodulateur bande de base



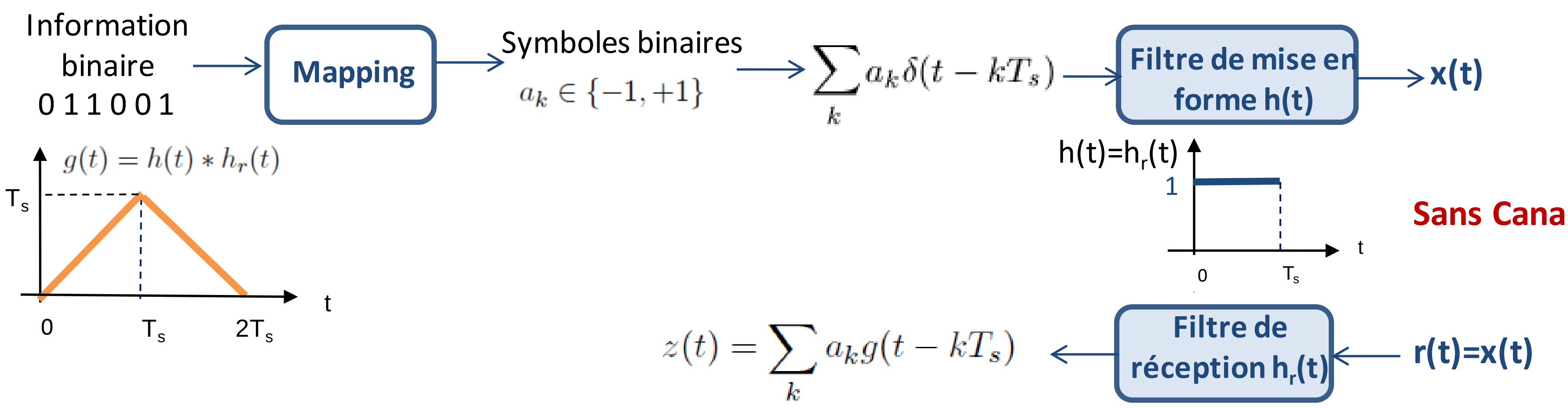
Problème de l'interférence entre symboles

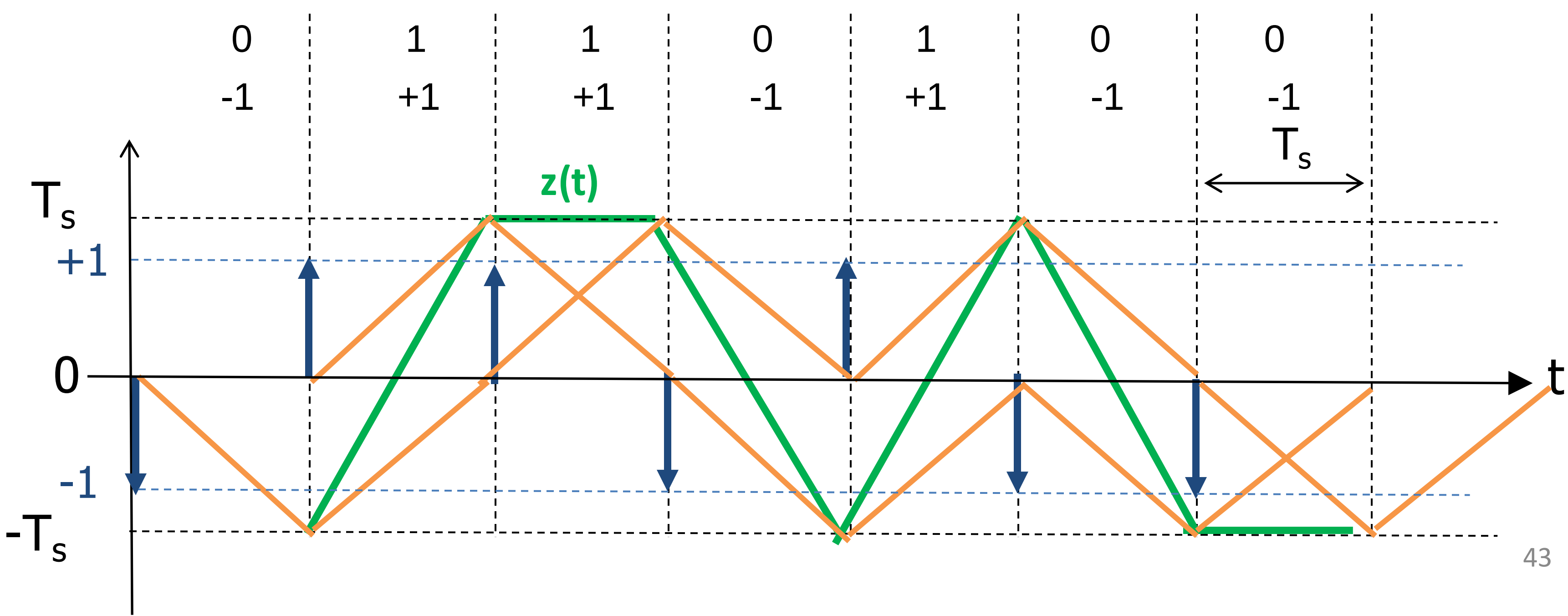
Exemple sans canal – Tracé de z(t)



Le problème de l'interférence entre symboles

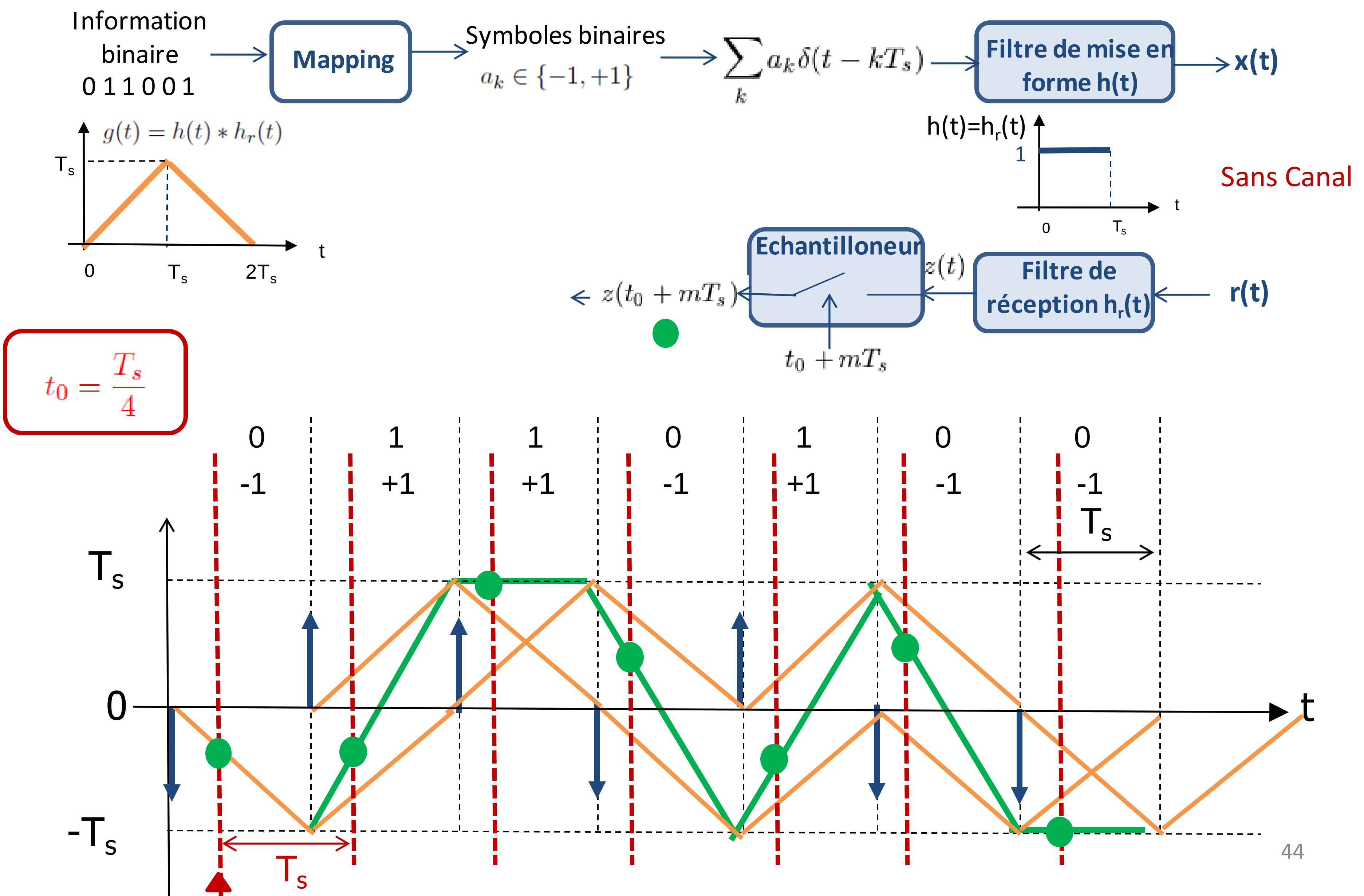
Exemple sans canal – Tracé de z(t)





Le problème de l'interférence entre symboles

Exemple sans canal – Echantillonnage



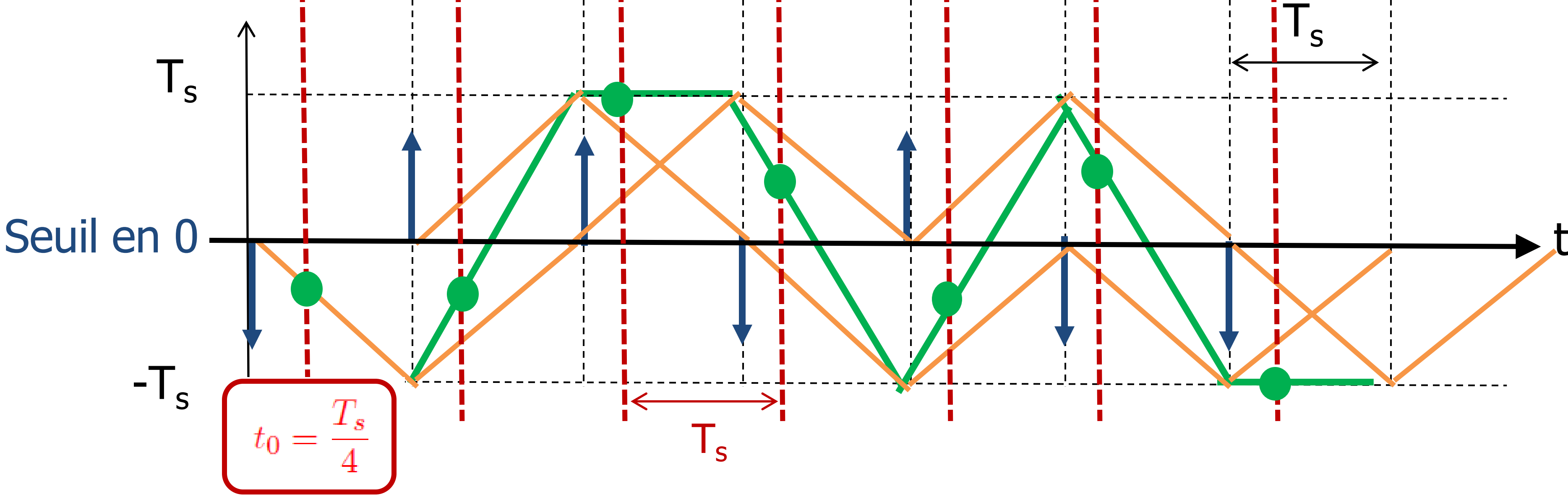
Le problème de l'interférence entre symboles

Exemple sans canal – Décisions

Bits à transmettre : 0 1 1 0 1 0 0

Symboles émis : -1 +1 +1 -1 +1 -1 -1

(a_k)



Symboles décidés : -1

$(\hat{a}_k)$

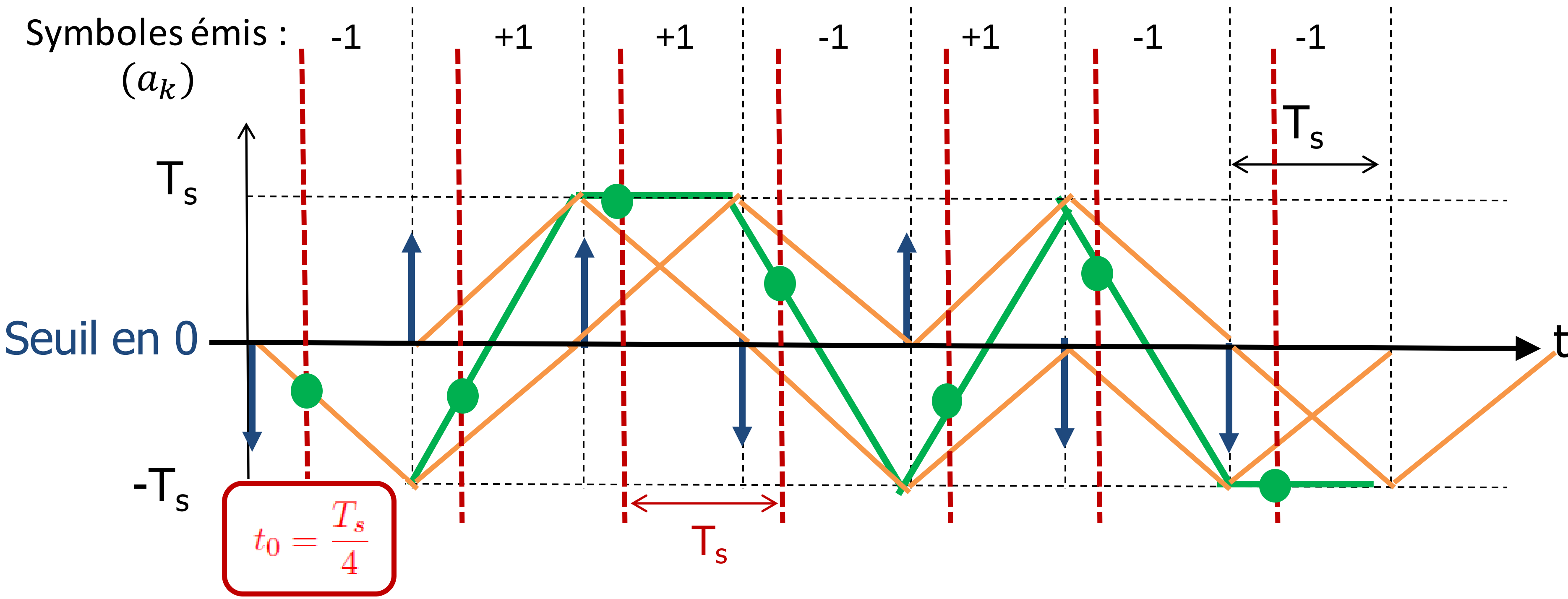
Bits décidés: 0

Le problème de l'interférence entre symboles

Exemple sans canal – Décisions

Bits à transmettre : 0 1 1 0 1 0 0

Symboles émis : (a_k) -1 +1 +1 -1 +1 -1 -1



Symboles décidés : $(\hat{a}_k)$ -1 -1

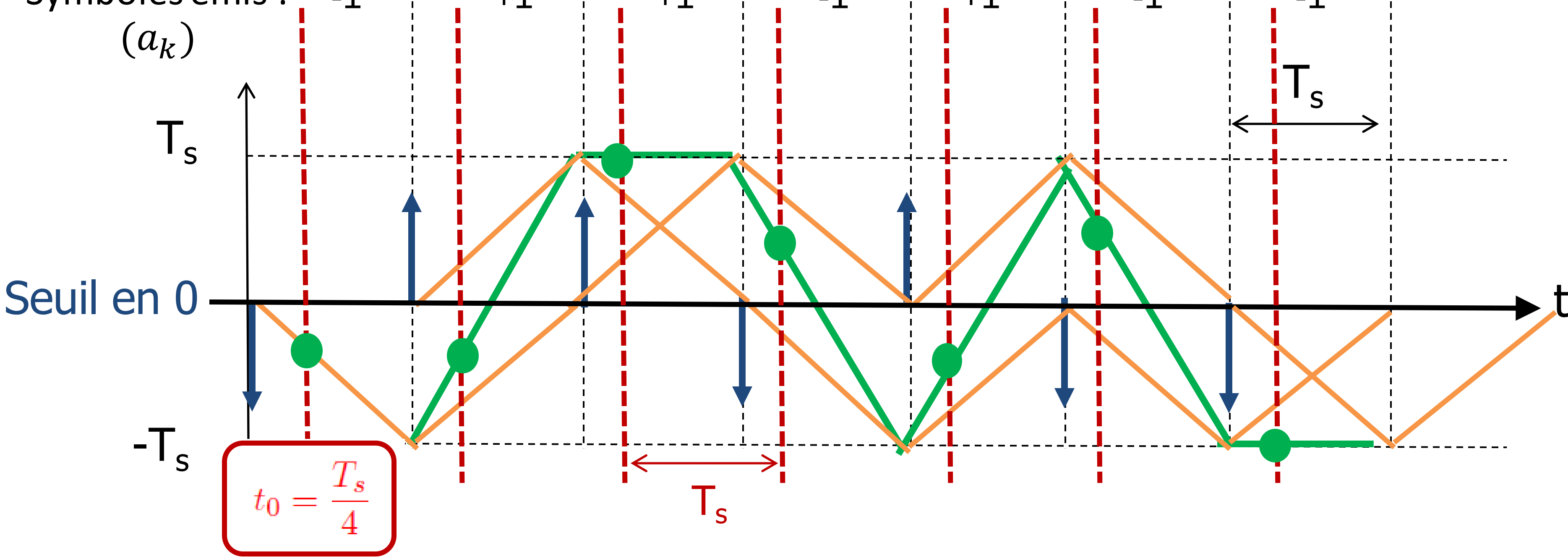
Bits décidés: 0 0

Le problème de l'interférence entre symboles

Exemple sans canal – Décisions

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1



Symboles décidés : $(\hat{a}_k)$	-1	-1	+1
Bits décidés:	0	0	1

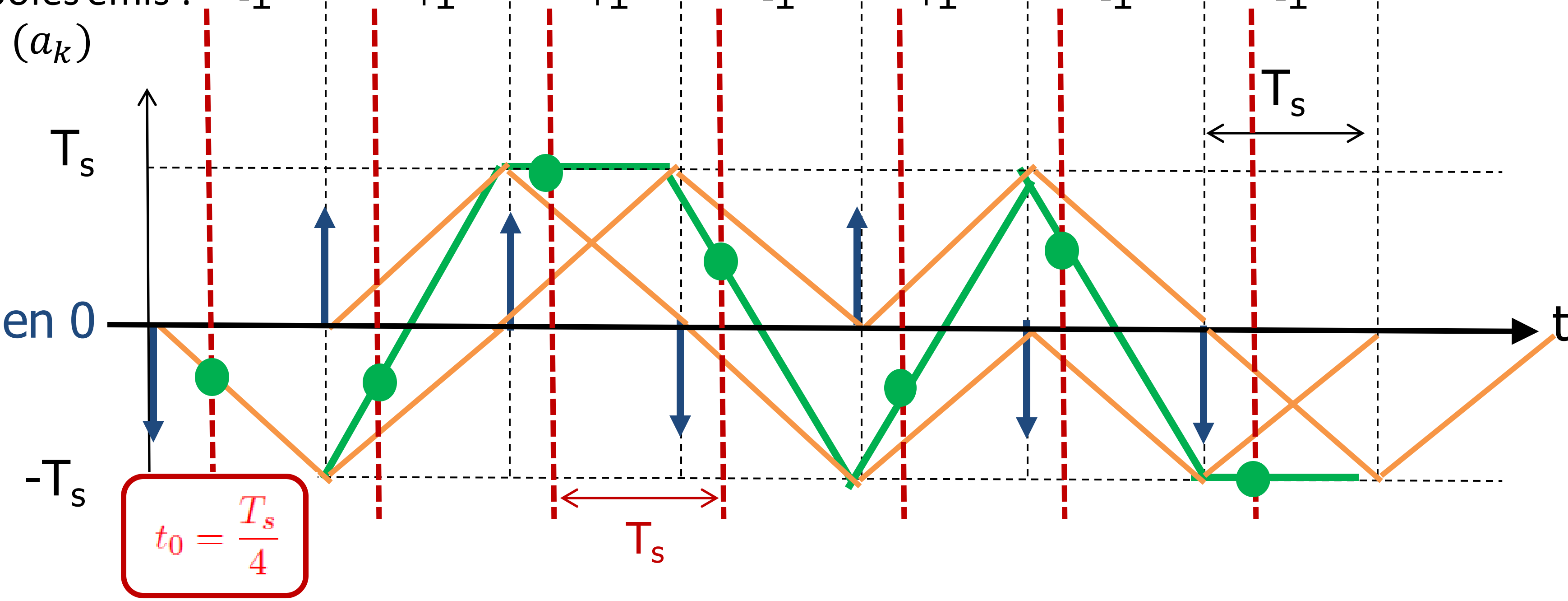
Le problème de l'interférence entre symboles

Exemple sans canal – Décisions

Bits à transmettre : 0 1 1 0 1 0 0

Symboles émis : -1 +1 +1 -1 +1 -1 -1

(a_k)



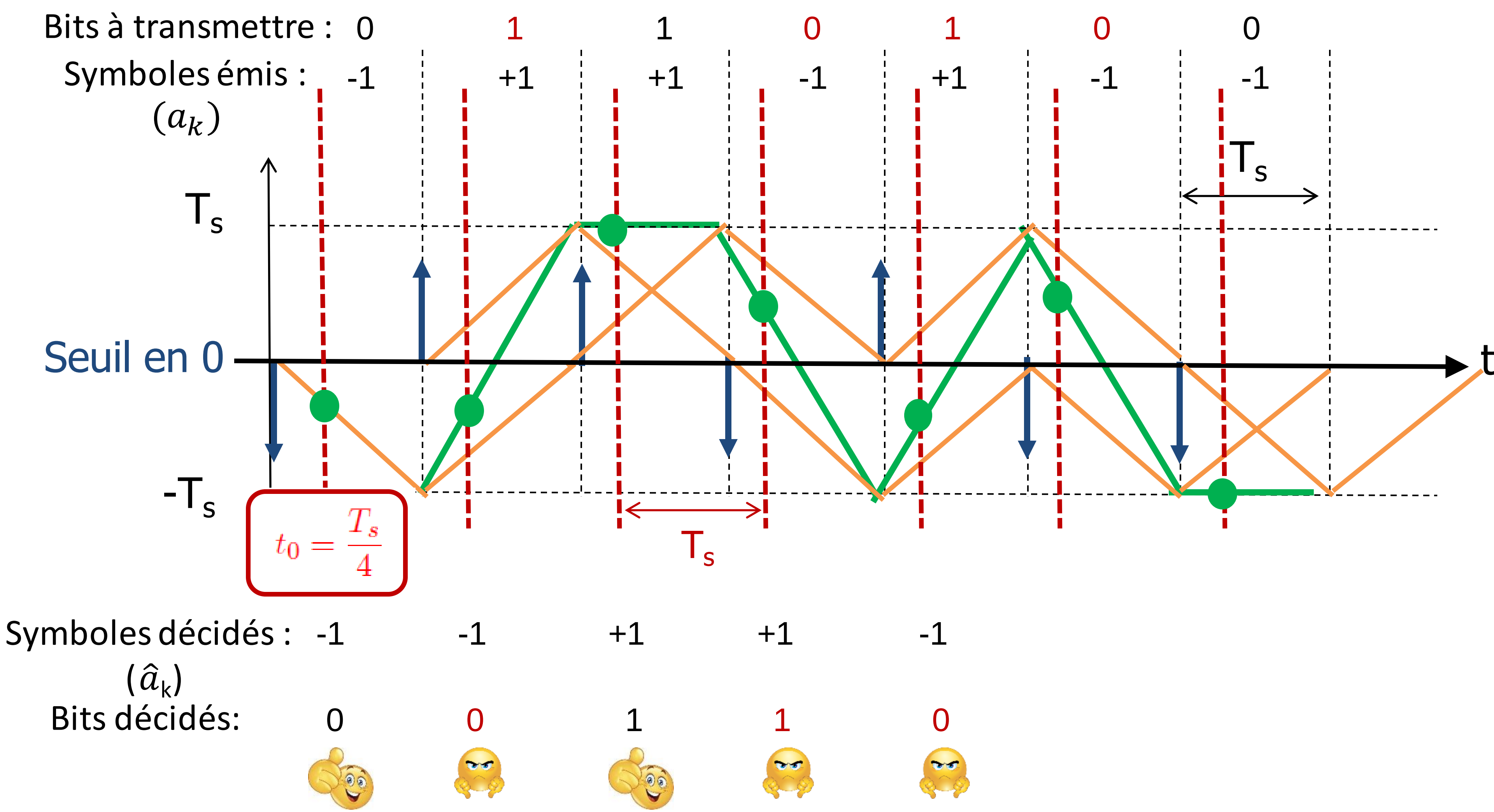
Symboles décidés : -1 -1 +1 +1

$(\hat{a}_k)$

Bits décidés: 0 0 1 1

Le problème de l'interférence entre symboles

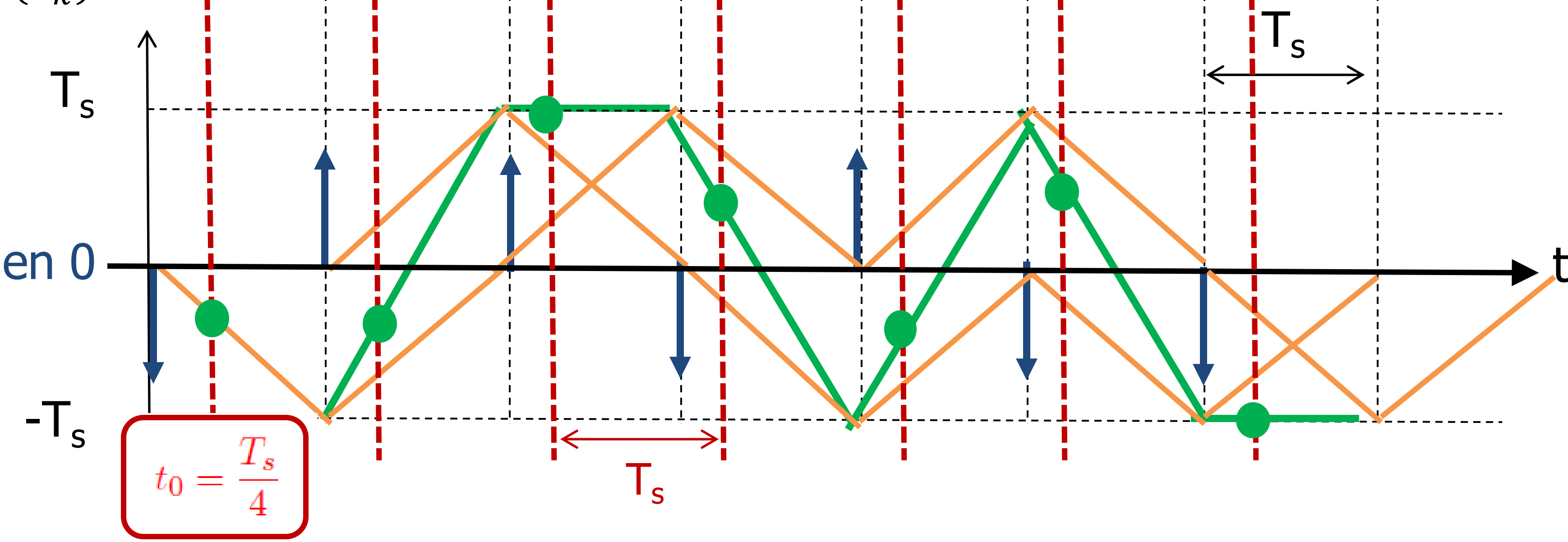
Exemple sans canal – Décisions



Le problème de l'interférence entre symboles

Exemple sans canal – Décisions

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1

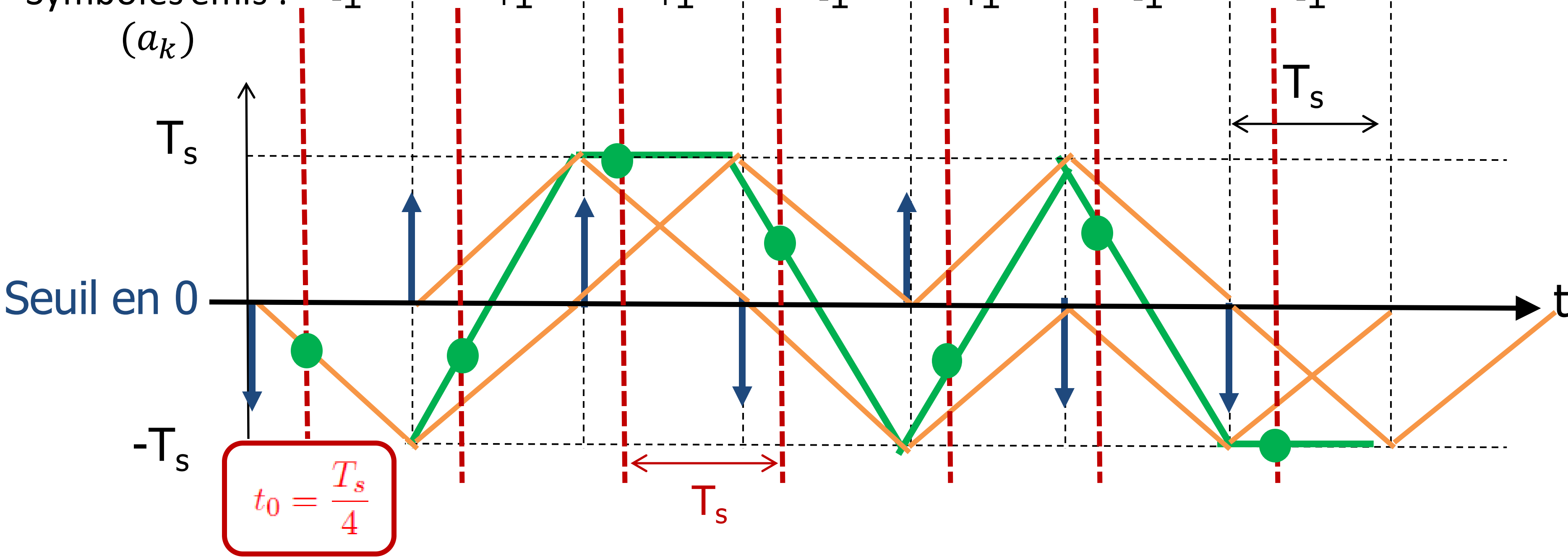


Symboles décidés : $(\hat{a}_k)$	-1	-1	+1	+1	-1	+1
Bits décidés:	0	0	1	1	0	1

Le problème de l'interférence entre symboles

Exemple sans canal – Décisions

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1



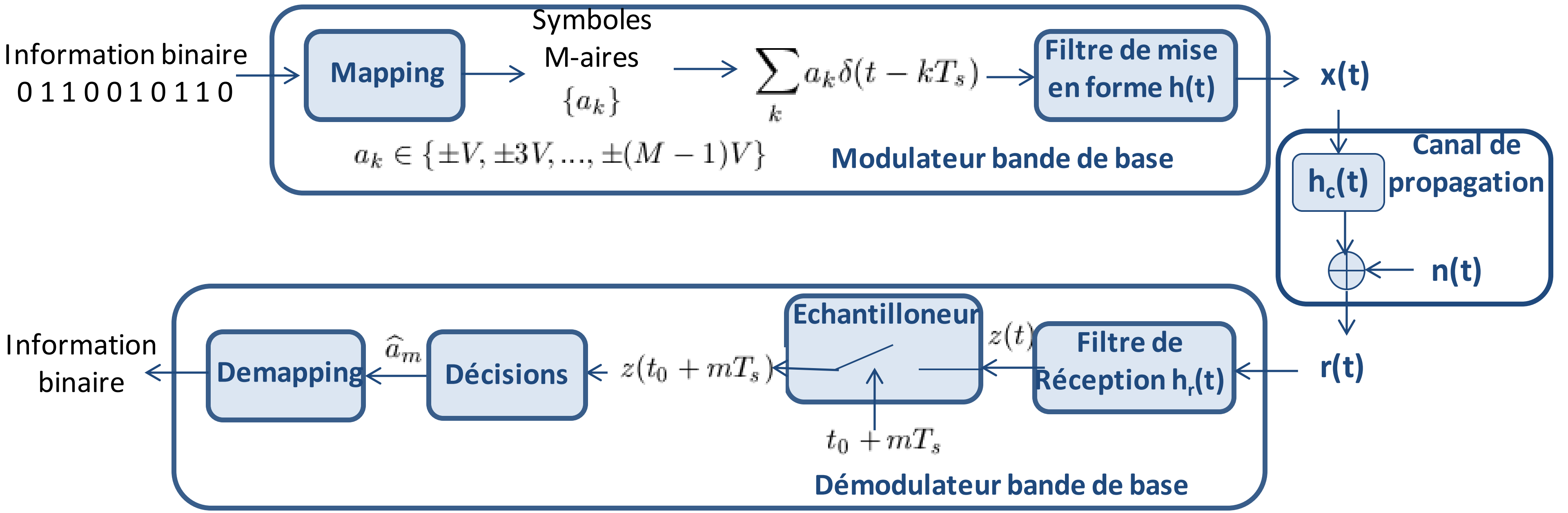
Symboles décidés : $(\hat{a}_k)$	-1	-1	+1	+1	-1	+1	-1
Bits décidés:	0	0	1	1	0	1	0

TEB=4/7

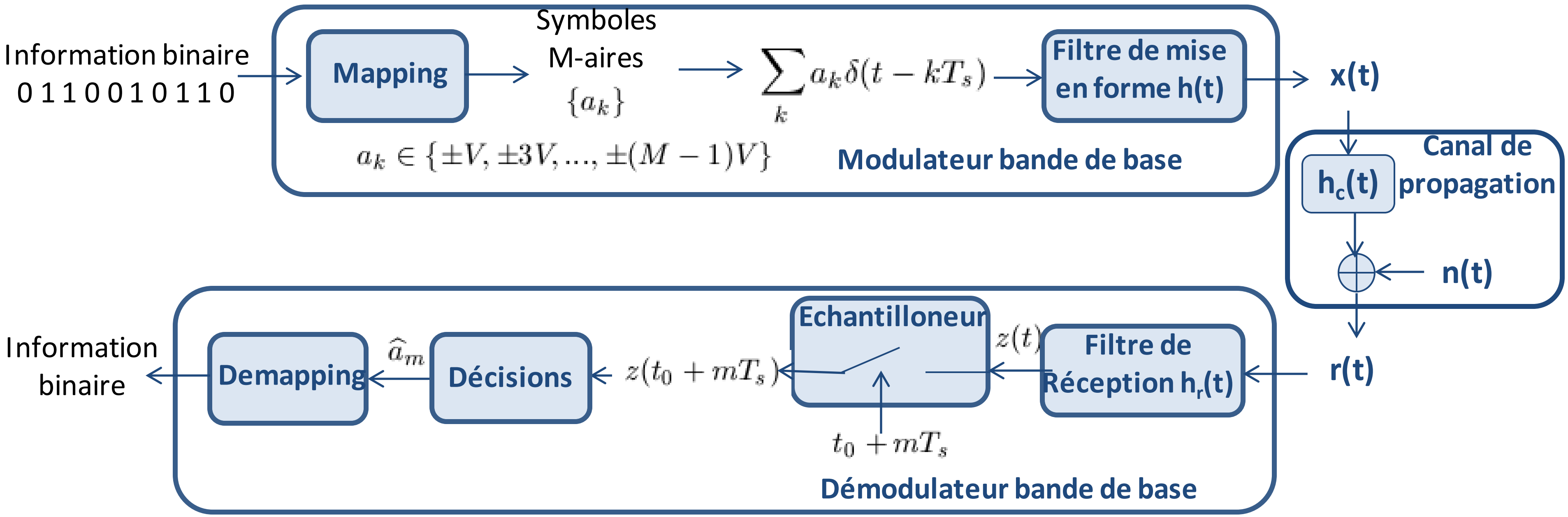
Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Critère de Nyquist dans le domaine temporel



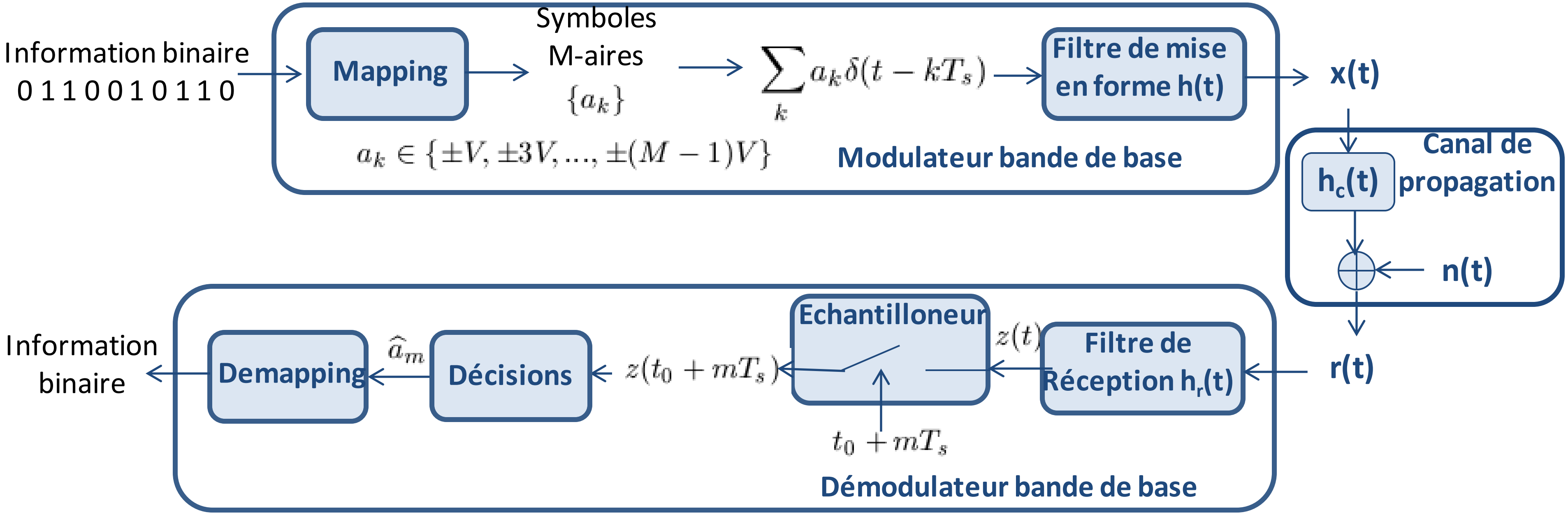
Critère de Nyquist dans le domaine temporel



$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + \sum_{k \neq m} a_k g(t_0 + (m-k)T_s) + w(t_0 + mT_s)$$

$$g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t)$$

Critère de Nyquist dans le domaine temporel



$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + \underbrace{\sum_{k \neq m} a_k g(t_0 + (m-k)T_s)}_{\text{ISI}} + \underbrace{w(t_0 + mT_s)}_{\text{Bruit}}$$

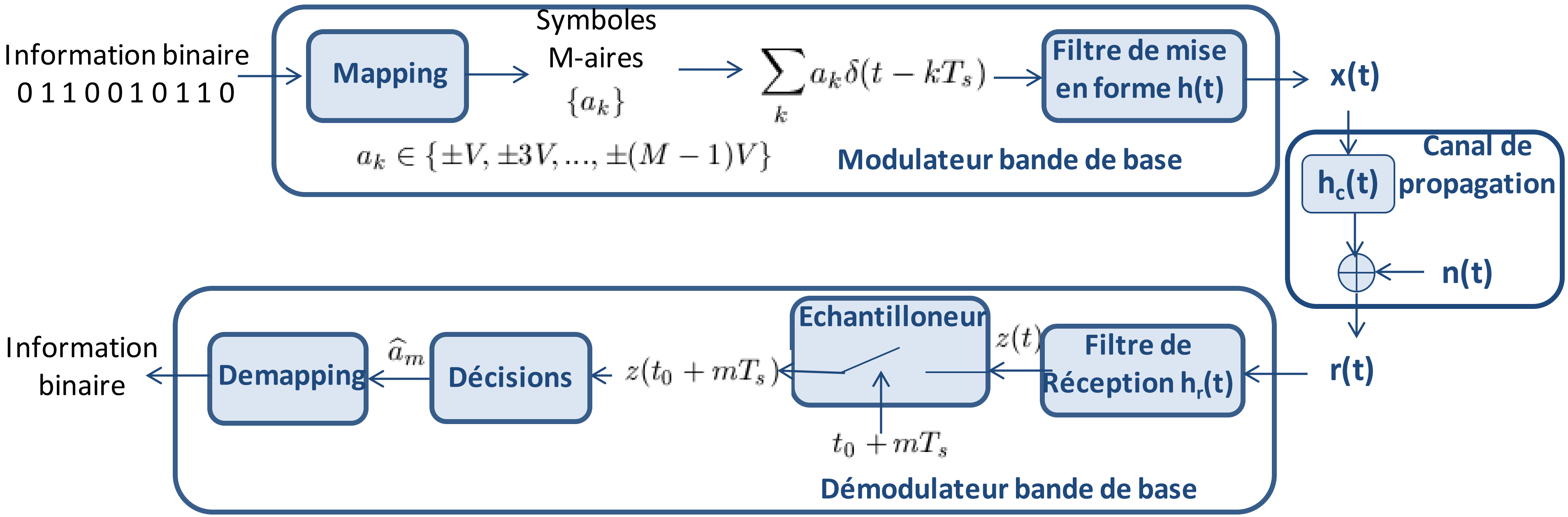
Terme utile

ISI
(Inter Symbol Interference)

Bruit
(filtré et échantillonné)

$$g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t)$$

Critère de Nyquist dans le domaine temporel



$$z(t_0 + mT_s) = \underbrace{a_m g(t_0)}_{\text{Terme utile}} + \underbrace{\sum_{k \neq m} a_k g(t_0 + (m-k)T_s)}_{\text{ISI}} + \underbrace{w(t_0 + mT_s)}_{\text{Bruit}}$$

Terme utile

ISI
(Inter Symbol Interference)

Bruit
(filtré et échantillonné)

$$g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t)$$

$$\boxed{\text{ISI} = 0 \iff \begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \ for\ p \in \mathbb{Z}^* \end{cases}}$$

Critère de Nyquist

Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Exemple

Information binaire
0 1 1 0 0 1

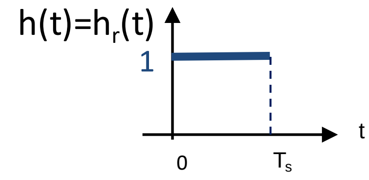
Mapping

Symboles binaires
$a_k \in \{-1, +1\}$

$\sum_k a_k \delta(t - kT_s)$

Filtre de mise en forme h(t)

x(t)



Sans Canal

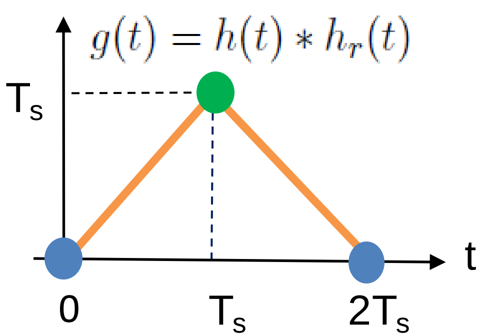
$z(t) = \sum_k a_k g(t - kT_s)$

Filtre de réception $h_r(t)$

r(t)=x(t)

ISI = 0 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \; for \; p \in Z^* \end{cases}$

Critère de Nyquist



Le critère de Nyquist est satisfait pour **$t_0=T_s$**

$g(t_0)=T_s$

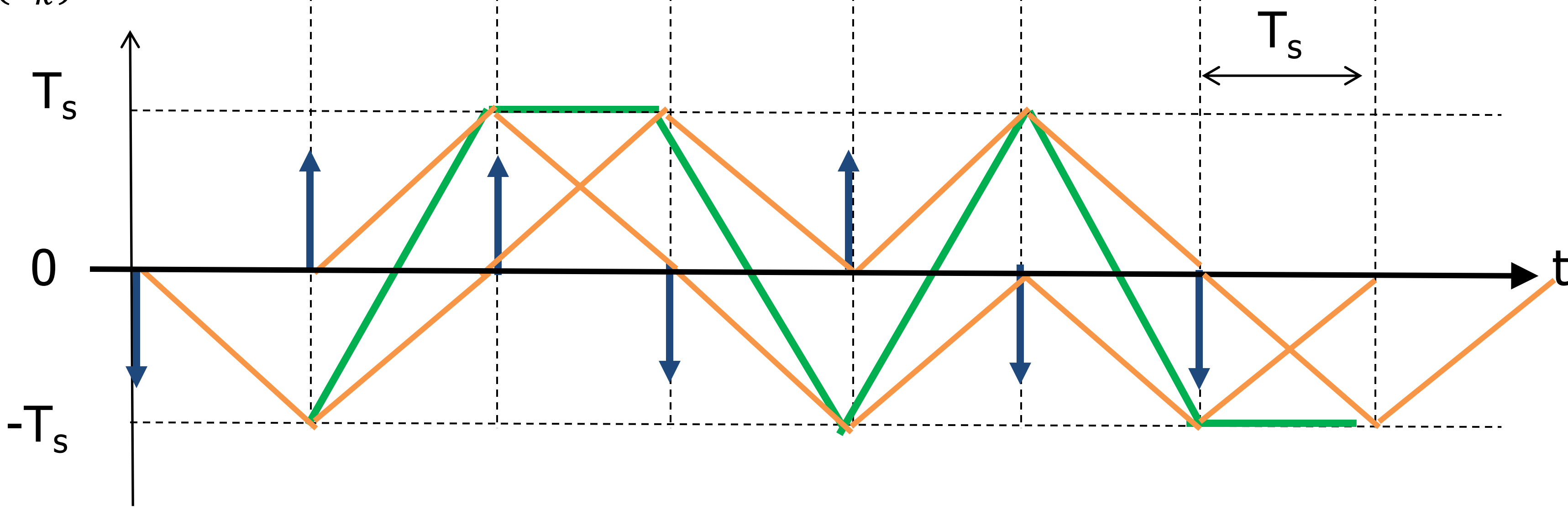
$g(t_0+T_s)=g(2T_s)=0$

$g(t_0-T_s)=g(0)=0$

Critère de Nyquist dans le domaine temporel

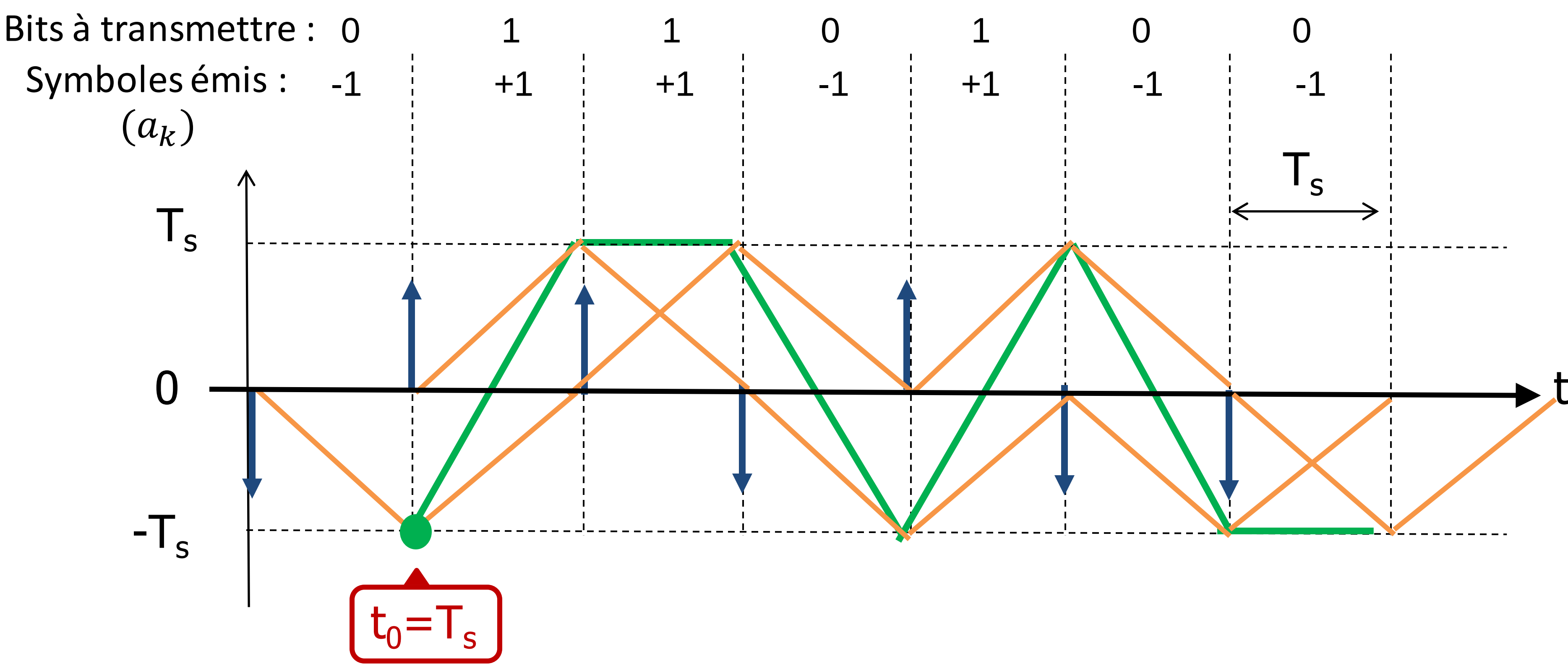
Exemple

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1



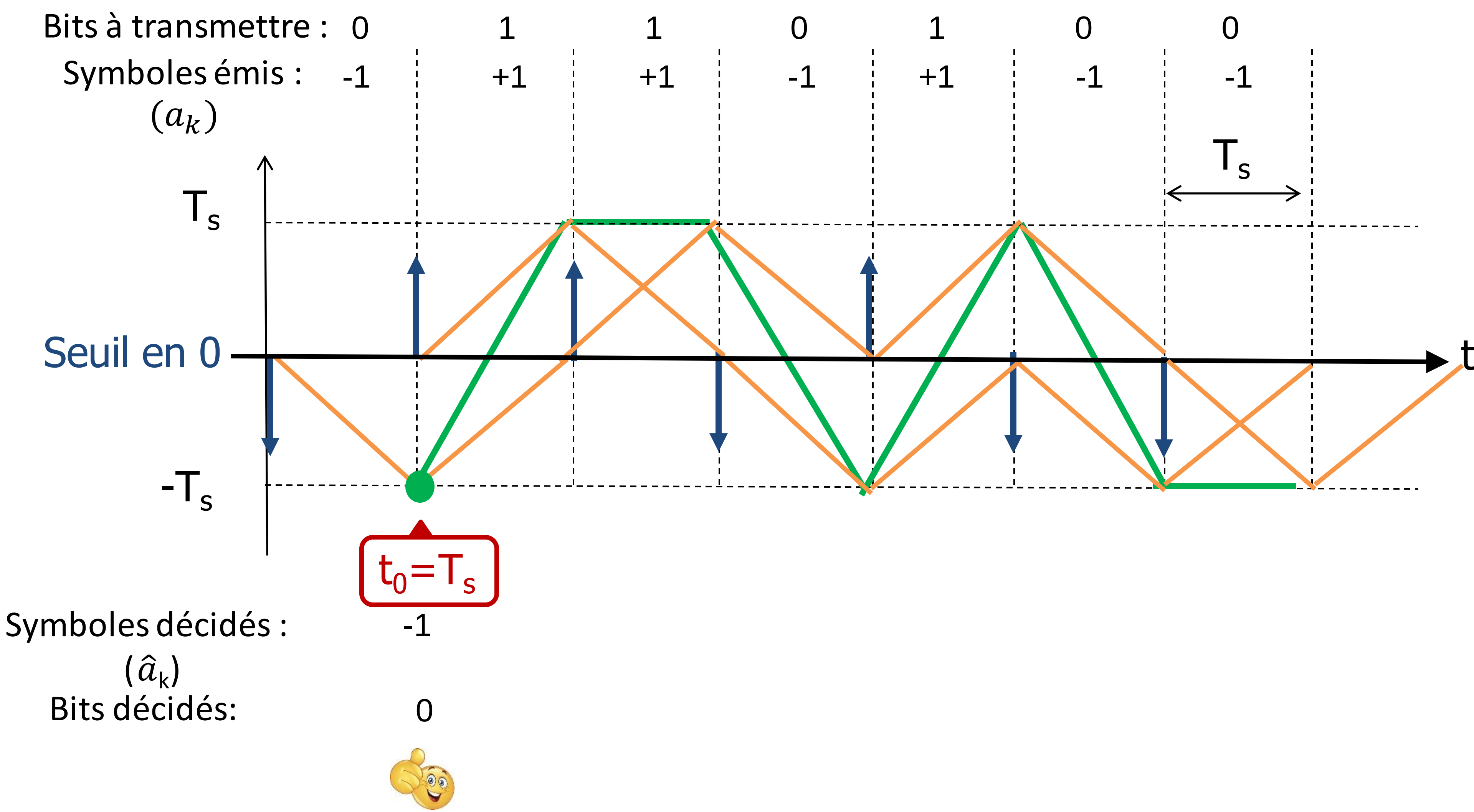
Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Exemple



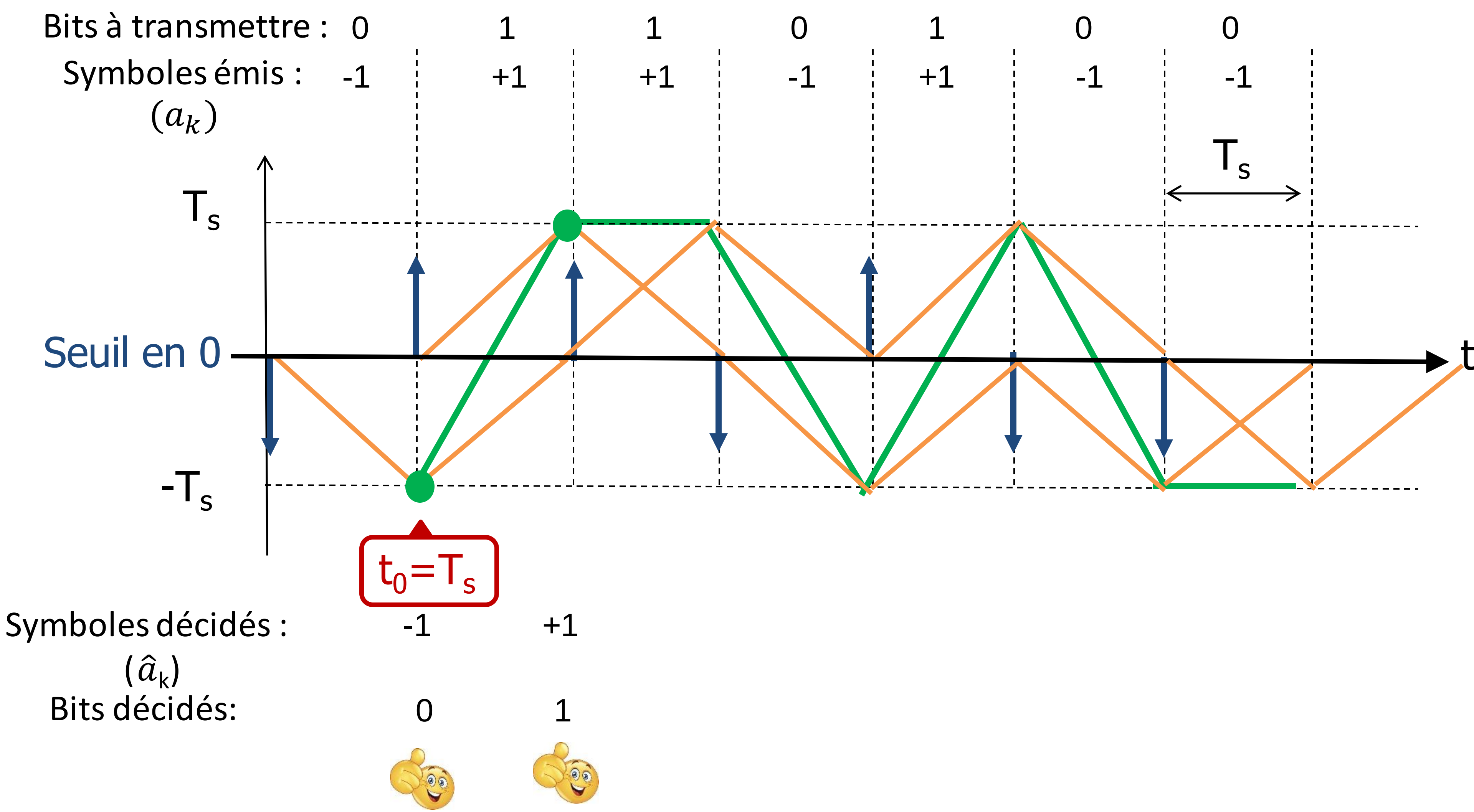
Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Exemple



Critère de Nyquist dans le domaine temporel

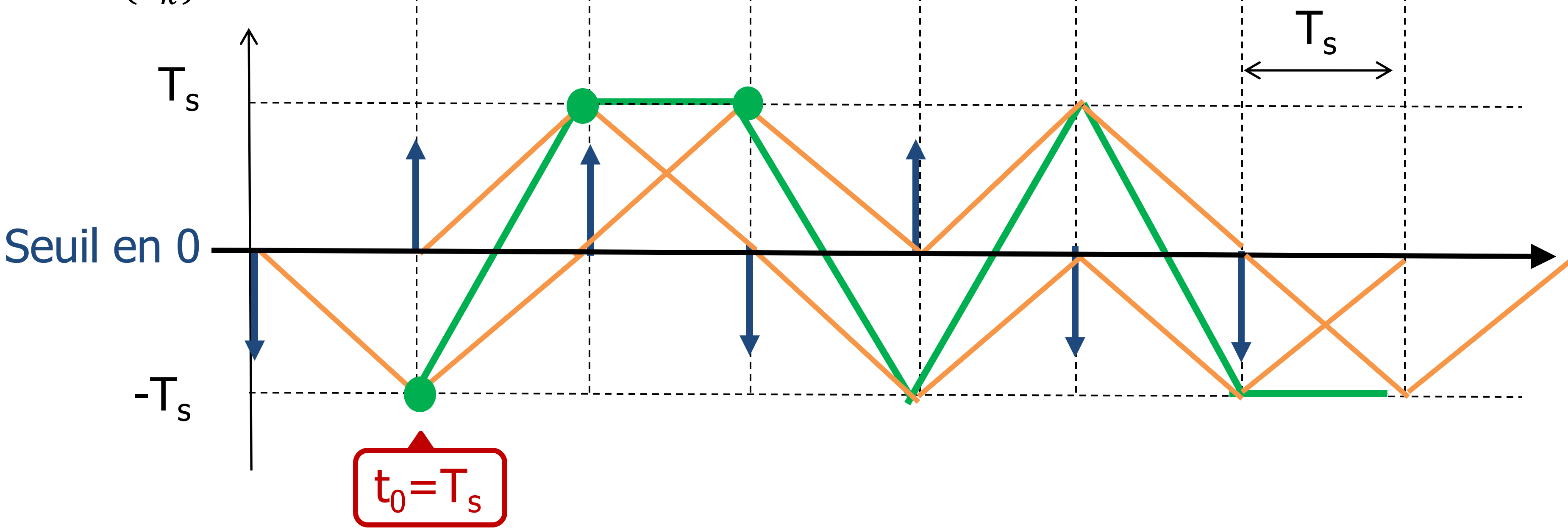
Exemple



Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Exemple

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1

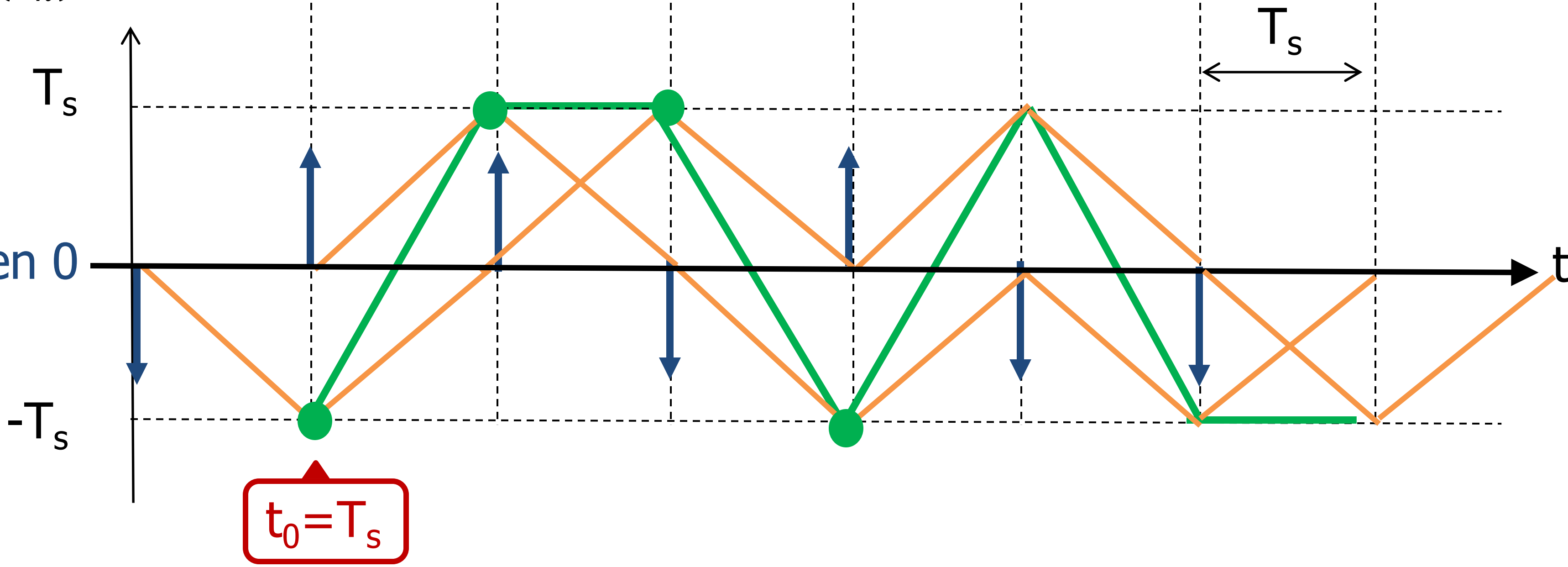


Symboles décidés : ($\hat{a}_k$)	-1	+1	+1
Bits décidés:	0	1	1

Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Exemple

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1

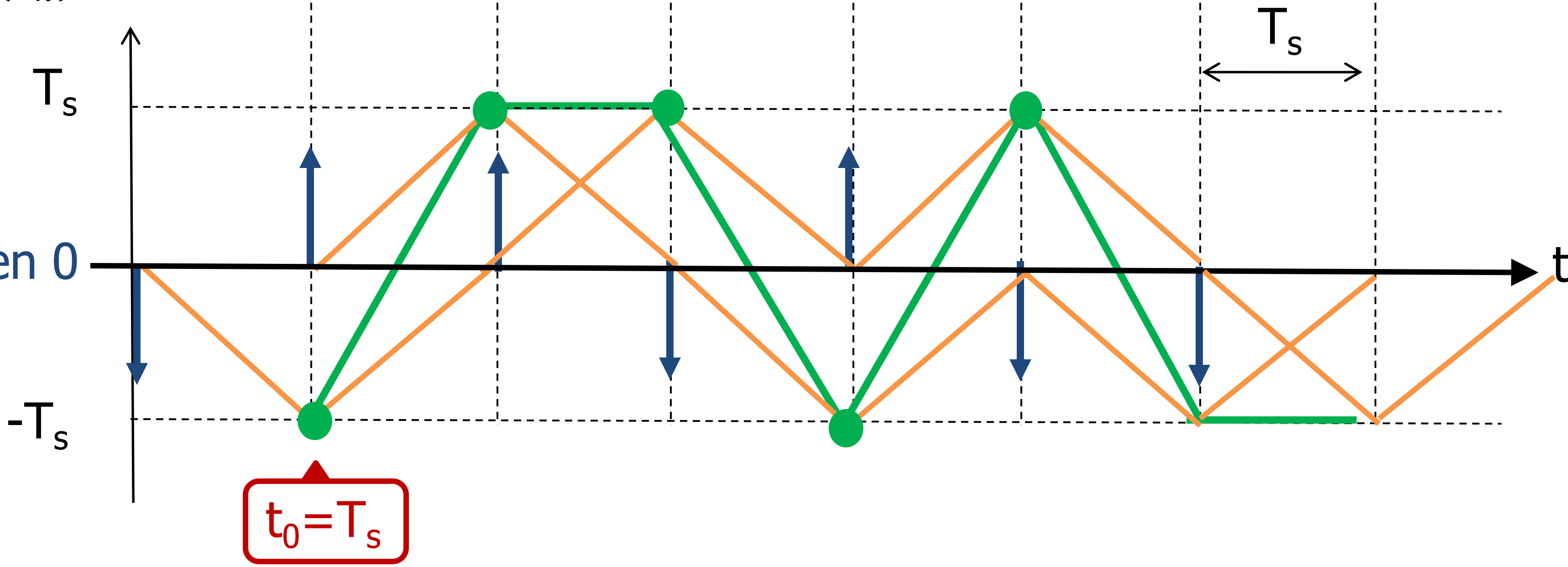


Symboles décidés : $(\hat{a}_k)$	-1	+1	+1	-1
Bits décidés:	0	1	1	0

Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Exemple

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1

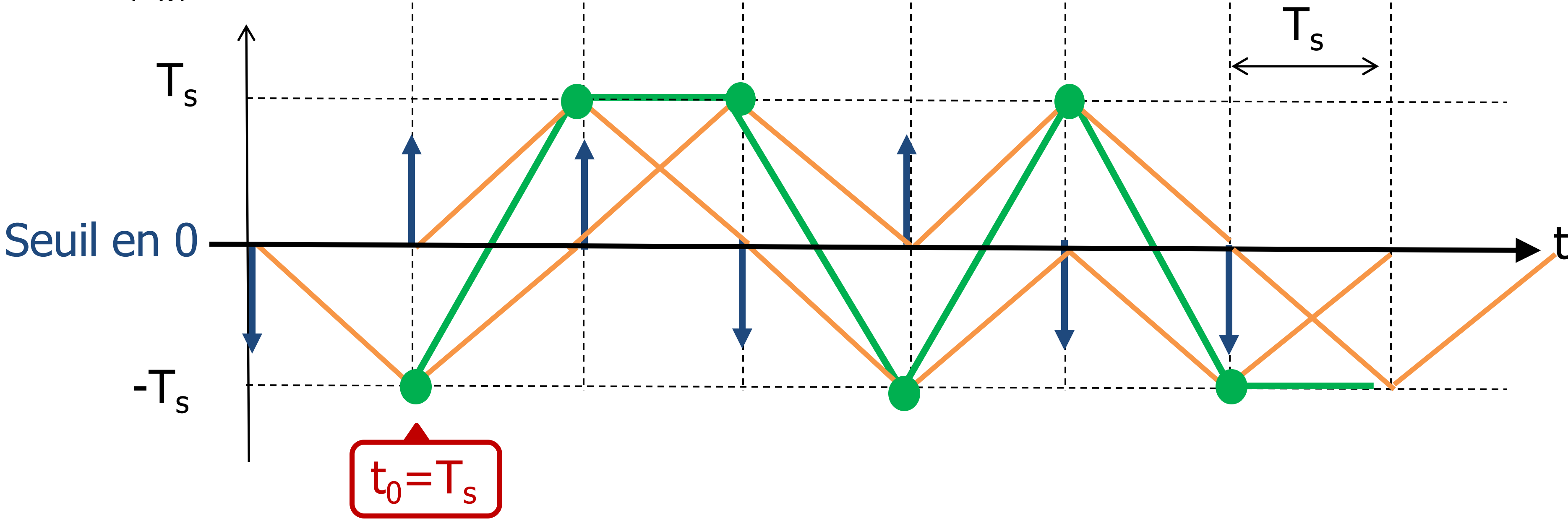


Symboles décidés : $(\hat{a}_k)$	-1	+1	+1	-1	+1
Bits décidés:	0	1	1	0	1

Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Exemple

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1

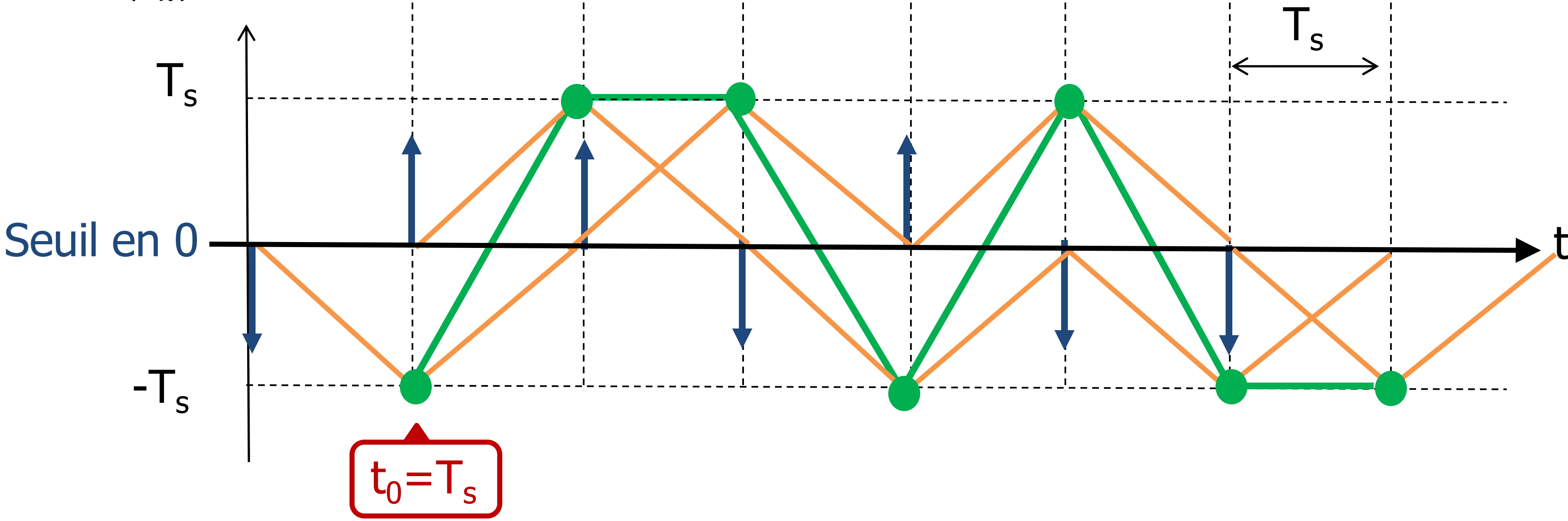


Symboles décidés : ($\hat{a}_k$)	-1	+1	+1	-1	+1	-1
Bits décidés:	0	1	1	0	1	0

Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Exemple

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1

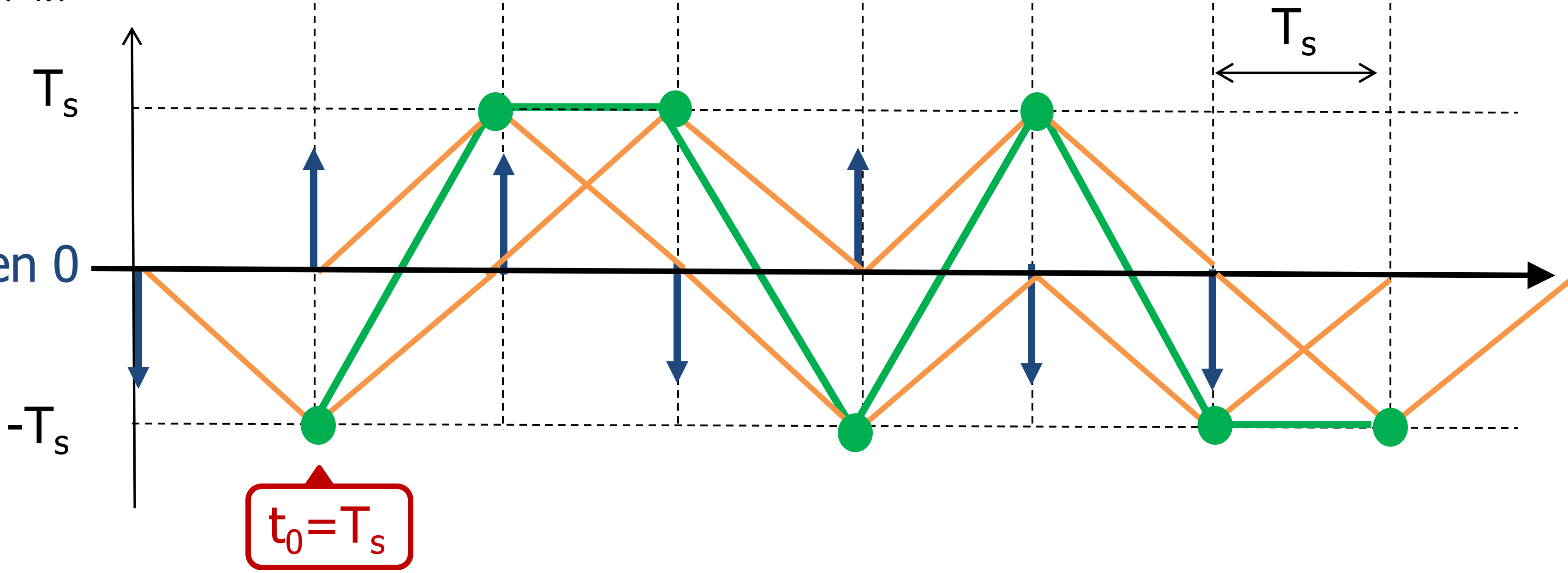


Symboles décidés : $(\hat{a}_k)$	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
Bits décidés:	0	1	1	0	1	0	0

Critère de Nyquist dans le domaine temporel

Exemple

Bits à transmettre :	0	1	1	0	1	0	0
Symboles émis : (a_k)	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1



Symboles décidés : $(\hat{a}_k)$	-1	+1	+1	-1	+1	-1	-1
Bits décidés:	0	1	1	0	1	0	0

TEB=0

Accès Wooclap pour les questions

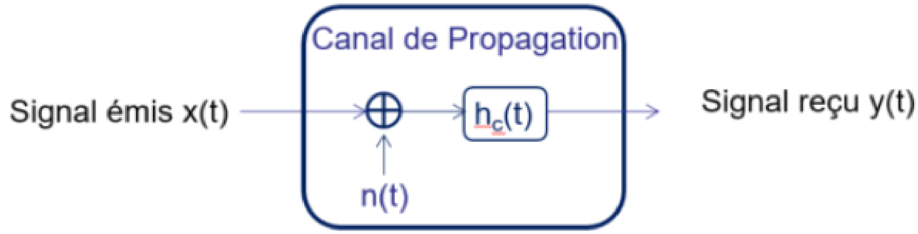
1. Allez sur wooclap.com
2. Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

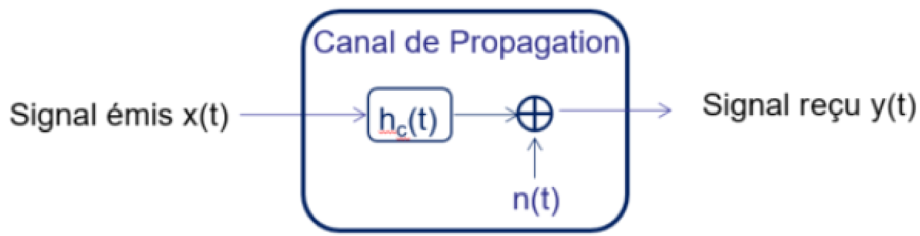
Code d'événement
NYQUIST

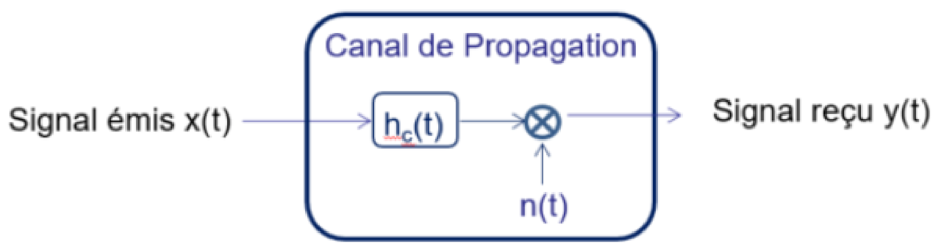
1. Envoyez @NYQUIST au 06 44 60 96 62
2. Vous pouvez participer

QUESTION 11

Le canal de propagation entre l'émetteur et le récepteur peut être modélisé par

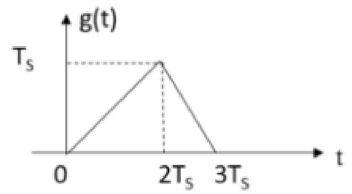






QUESTION 12

Soit $g(t)=h(t)*h_c(t)*h_r(t)$ la réponse impulsionnelle globale de la chaine de transmission :



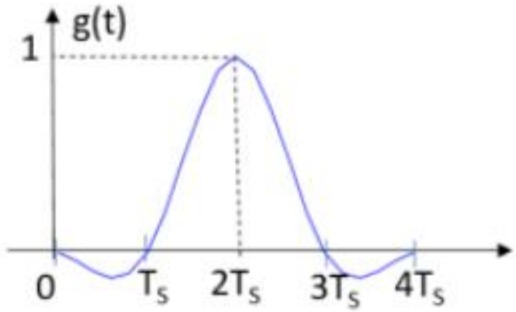
(T_s = durée symbole)

Avec g(t)=h(t)*hc(t)*hr(t) réponse impulsionnelle globale de la chaine de transmission donnée dans la figure, la chaine de transmission :

1. **Respecte le critère de Nyquist**
2. **Peut respecter le critère de Nyquist**
3. **Ne peut pas respecter le critère de Nyquist**
4. **Pas assez d'éléments pour répondre à la question**

QUESTION 13

Soit g(t)=h(t)*h_c(t)*h_r(t) la réponse impulsionnelle globale de la chaine de transmission :



(T_s = durée symbole)

Avec g(t)=h(t)*hc(t)*hr(t) réponse impulsionnelle globale de la chaine de transmission donnée dans la figure, la chaine de transmission :

1. **Respecte le critère de Nyquist**
2. **Peut respecter le critère de Nyquist**
3. **Ne peut pas respecter le critère de Nyquist**
4. **Pas assez d'éléments pour répondre à la question**

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Diagramme de l'oeil

Exemple

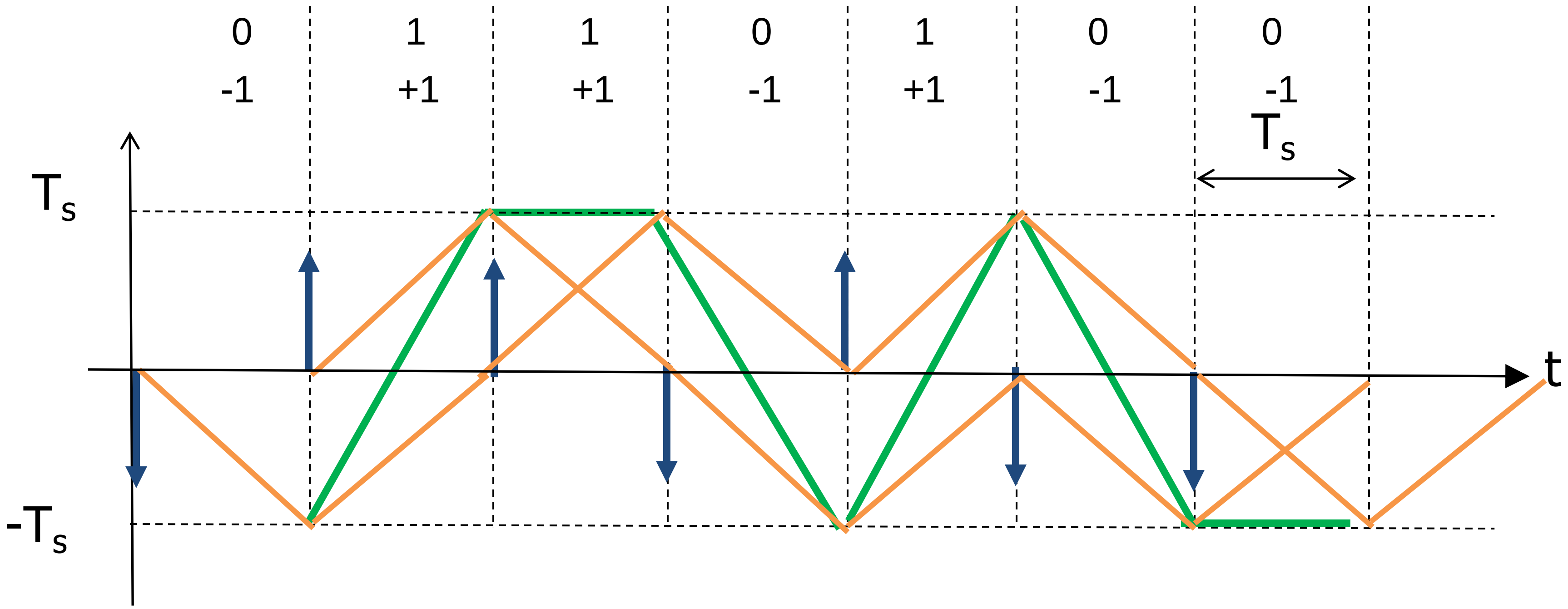
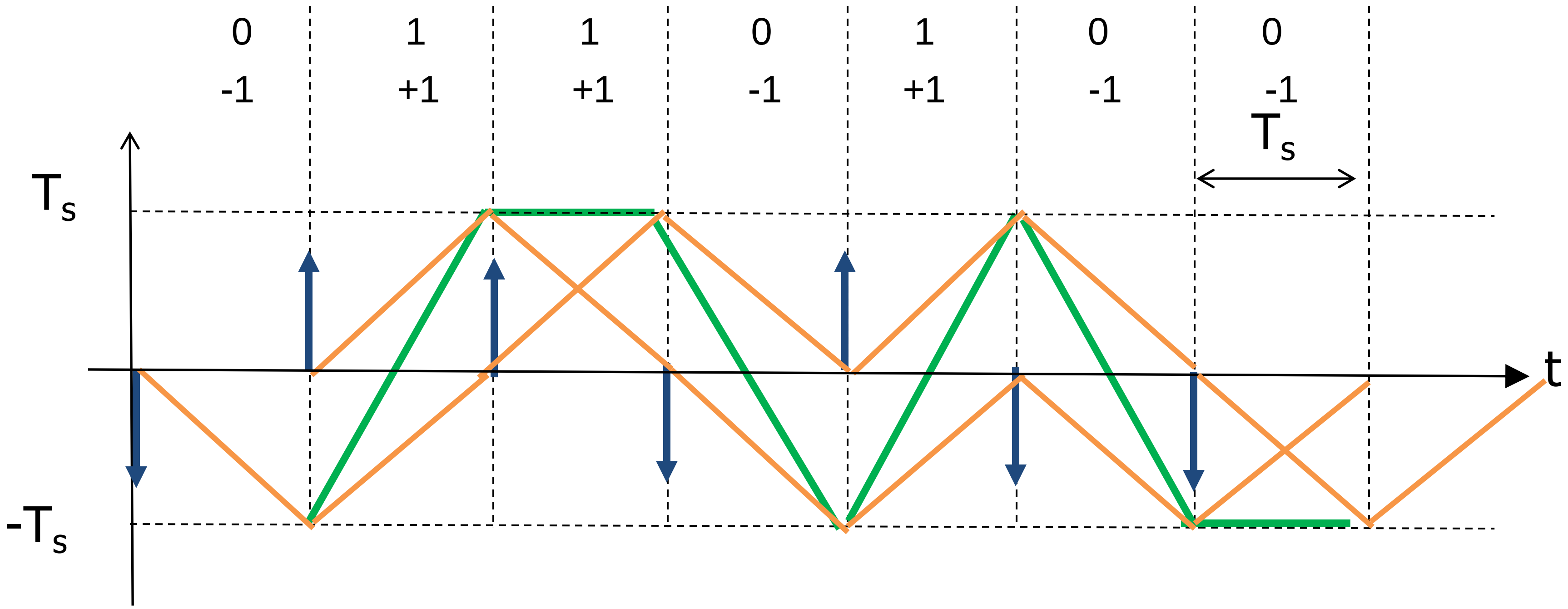
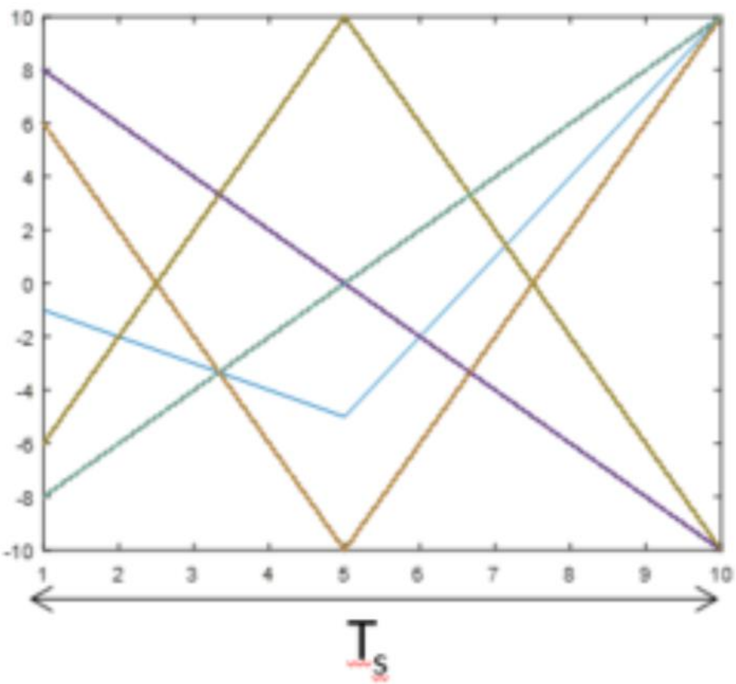


Diagramme de l'oeil

Exemple



QUESTION 14



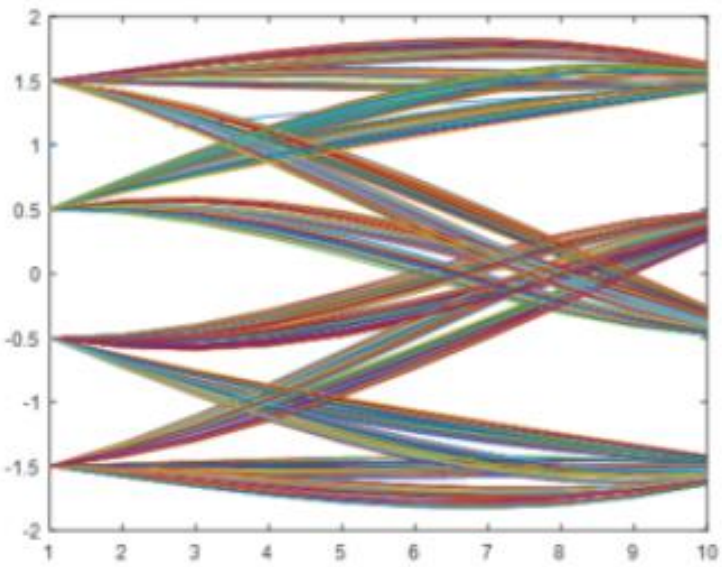
Soit une chaine de transmission transportant des symboles binaires ak prenant des valeurs +1 ou -1.
La figure donne le diagramme de l'œil qui a été tracé, sans bruit, sur le signal en sortie du filtre de réception sur une durée Ts (composée de 10 échantillons de signal en numérique).
La chaine de transmission :

1. **Peut respecter le critère de Nyquist**

2. **Ne peut pas respecter le critère de Nyquist**

3. **Pas assez d'éléments pour répondre à la question**

QUESTION 15



Soit une chaine de transmission transportant des symboles 4-aires ak prenant des valeurs +3, +1, -1 ou -3.
La figure donne le diagramme de l'œil qui a été tracé, sans bruit, sur le signal en sortie du filtre de réception sur une durée Ts (composée de 10 échantillons de signal en numérique).
La chaine de transmission :

1. **Peut respecter le critère de Nyquist**
2. **Ne peut pas respecter le critère de Nyquist**
3. **Pas assez d'éléments pour répondre à la question**

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel

$$z(t_0 + mT_s) = \underbrace{a_m g(t_0)}_{\text{Terme utile}} + \underbrace{\sum_{k \neq m} a_k g(t_0 + (m-k)T_s)}_{\text{ISI (Inter Symbol Interference)}} + \underbrace{w(t_0 + mT_s)}_{\text{Bruit (filtré et échantillonné)}}$$

$$g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t)$$

$$\boxed{\text{ISI} = 0 \iff \begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \; for \; p \in \mathbb{Z}^* \end{cases}}$$

Critère de Nyquist (domaine temporel)

Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel

$$z(t_0 + mT_s) = \underbrace{a_m g(t_0)}_{\text{Terme utile}} + \underbrace{\sum_{k \neq m} a_k g(t_0 + (m-k)T_s)}_{\text{ISI}} + \underbrace{w(t_0 + mT_s)}_{\text{Bruit}}$$

Terme utile

ISI
(Inter Symbol Interference)

Bruit
(filtré et échantillonné)

$$g(t) = h(t) * h_c(t) * h_r(t)$$

ISI = 0 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} g(t_0) \neq 0 \\ g(t_0 + pT_s) = 0 \ for \ p \in \mathbb{Z}^* \end{cases}$

Critère de Nyquist (domaine temporel)

TF (calcul donné sur moodle)

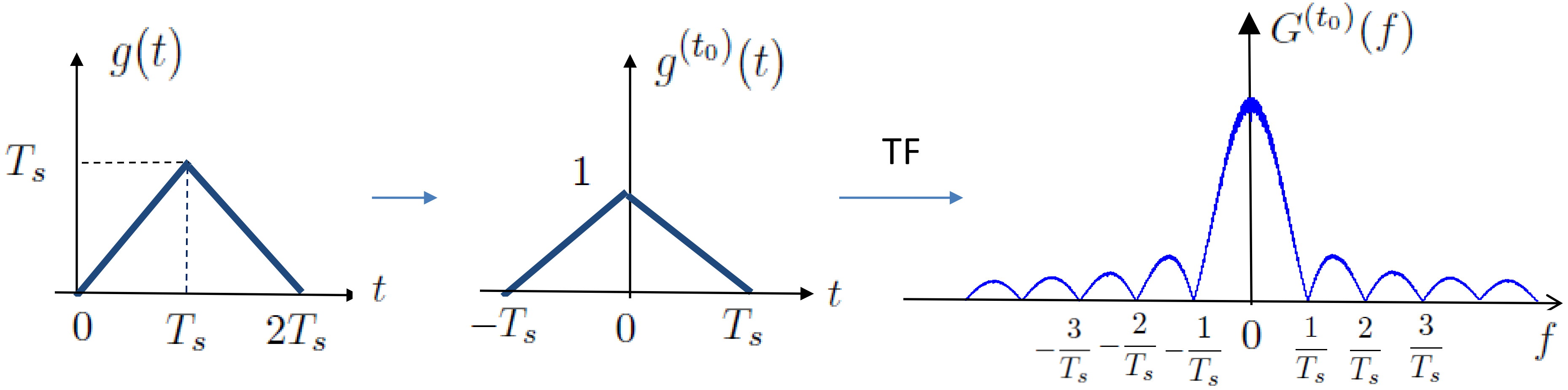
$$\boxed{\sum_k G^{(t_0)}\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = cte}$$

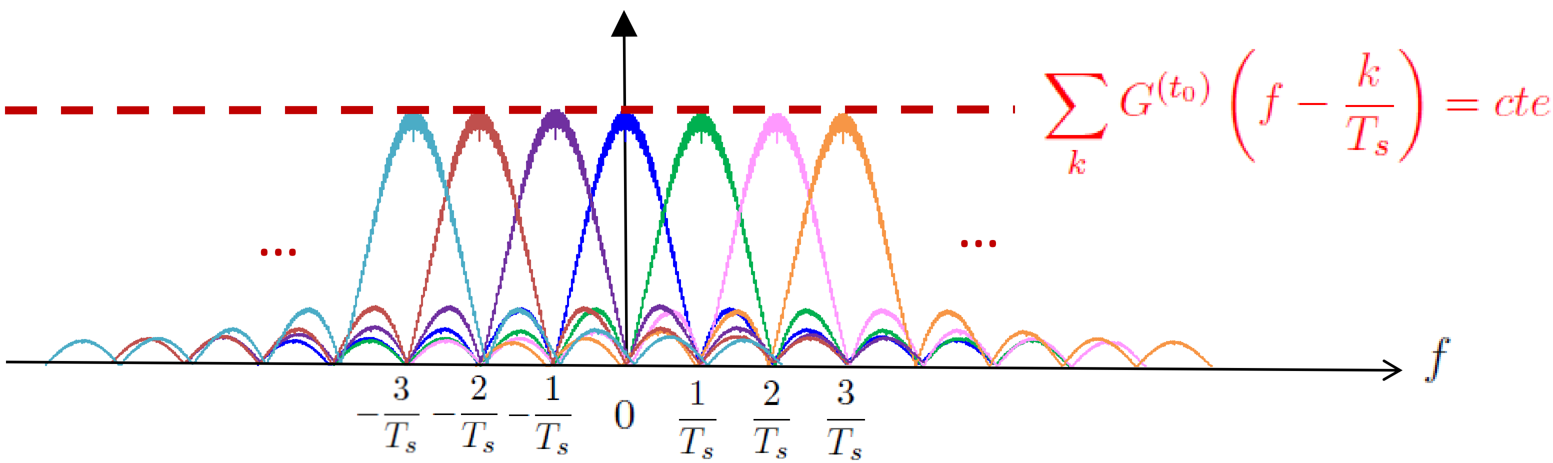
avec $G^{t_0}(f) = FT\left[\frac{g(t+t_0)}{g(t_0)}\right]$

Critère de Nyquist (domaine fréquentiel)

Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel

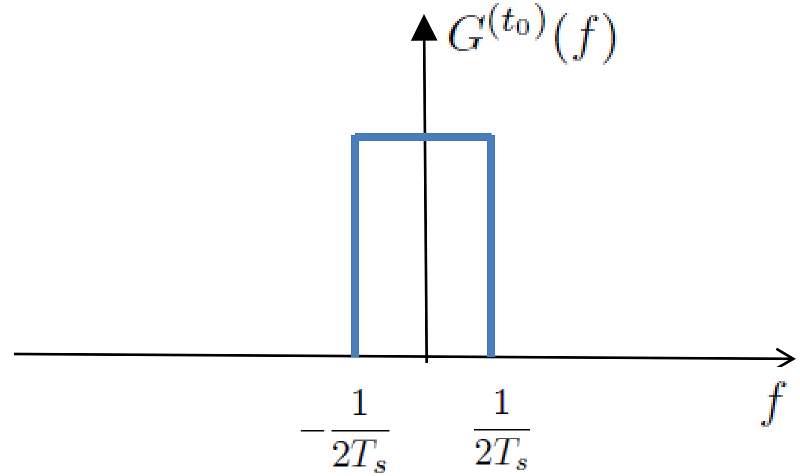
Exemple 1

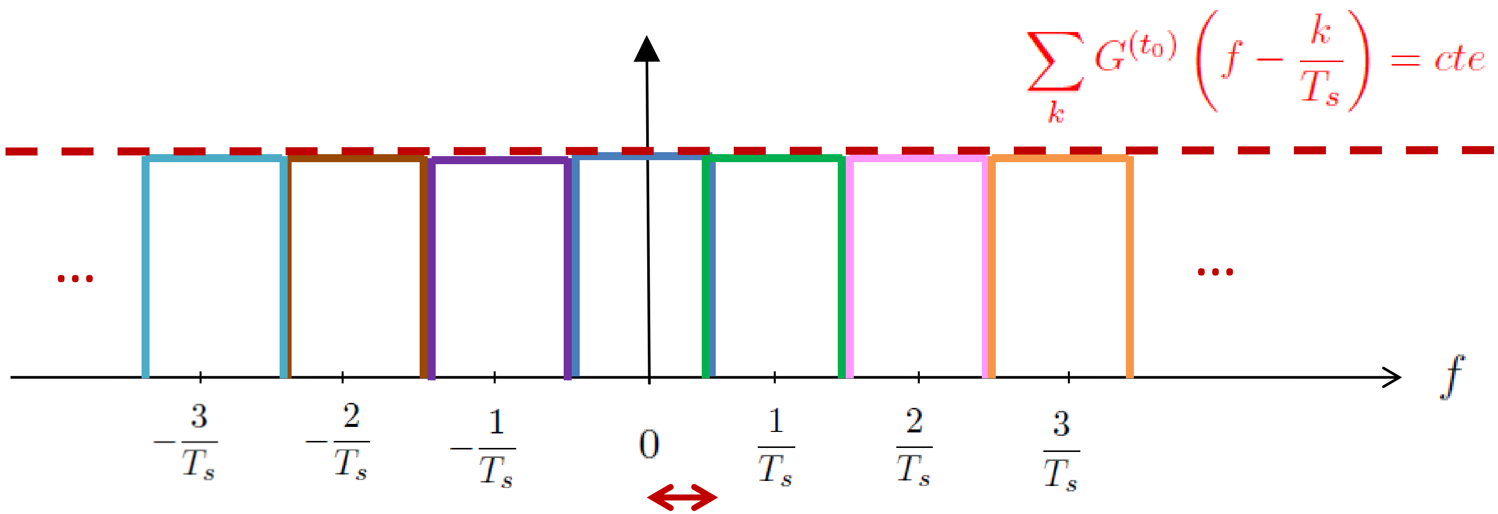




Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel

Exemple 2 – Bande de Nyquist





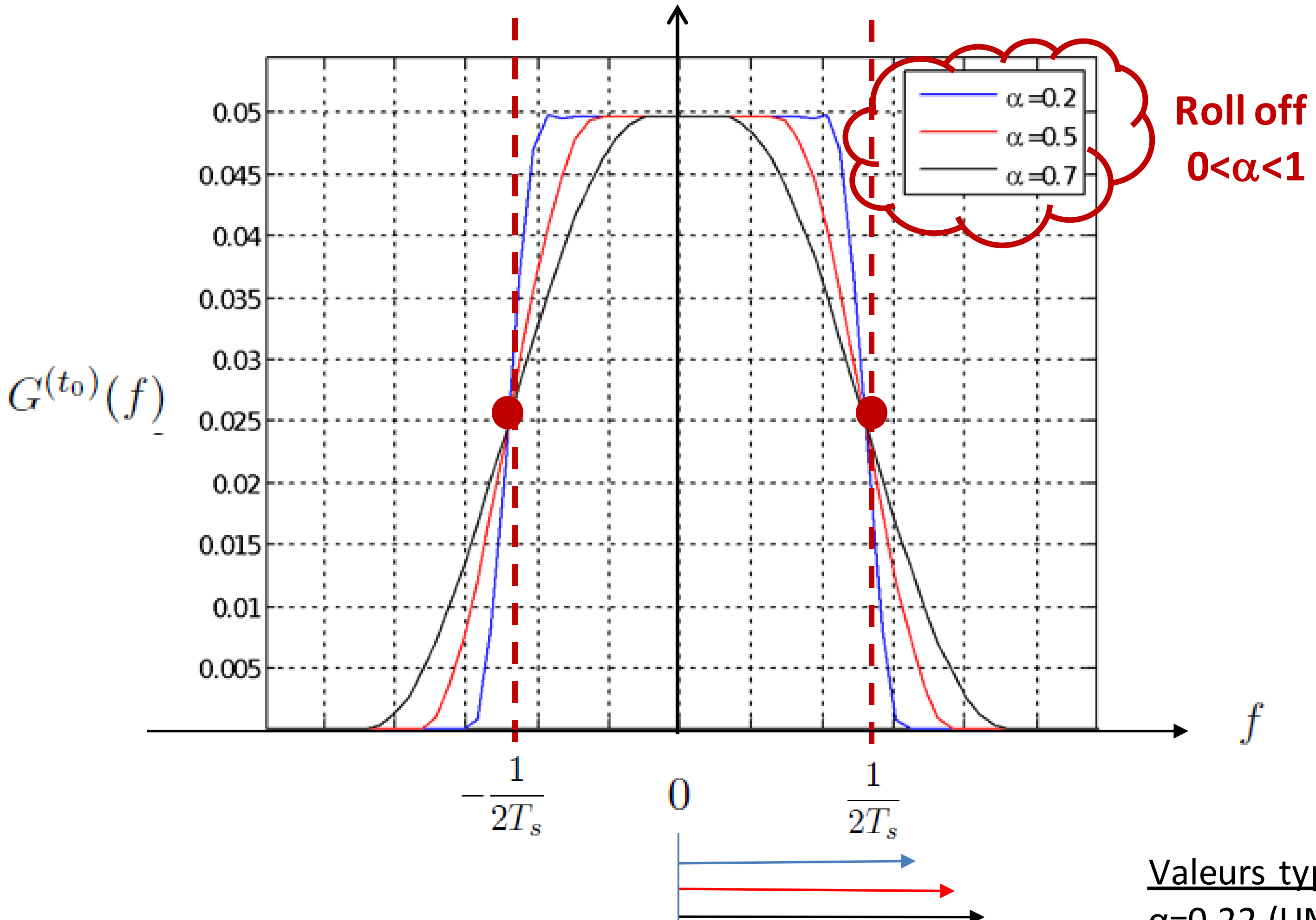
$$\boxed{B_N = \frac{1}{2T_s} = \frac{R_s}{2}}$$

Bande de Nyquist

Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel

Exemple 3 : filtre en cosinus surélevé

(Raised cosine filter : RCF)



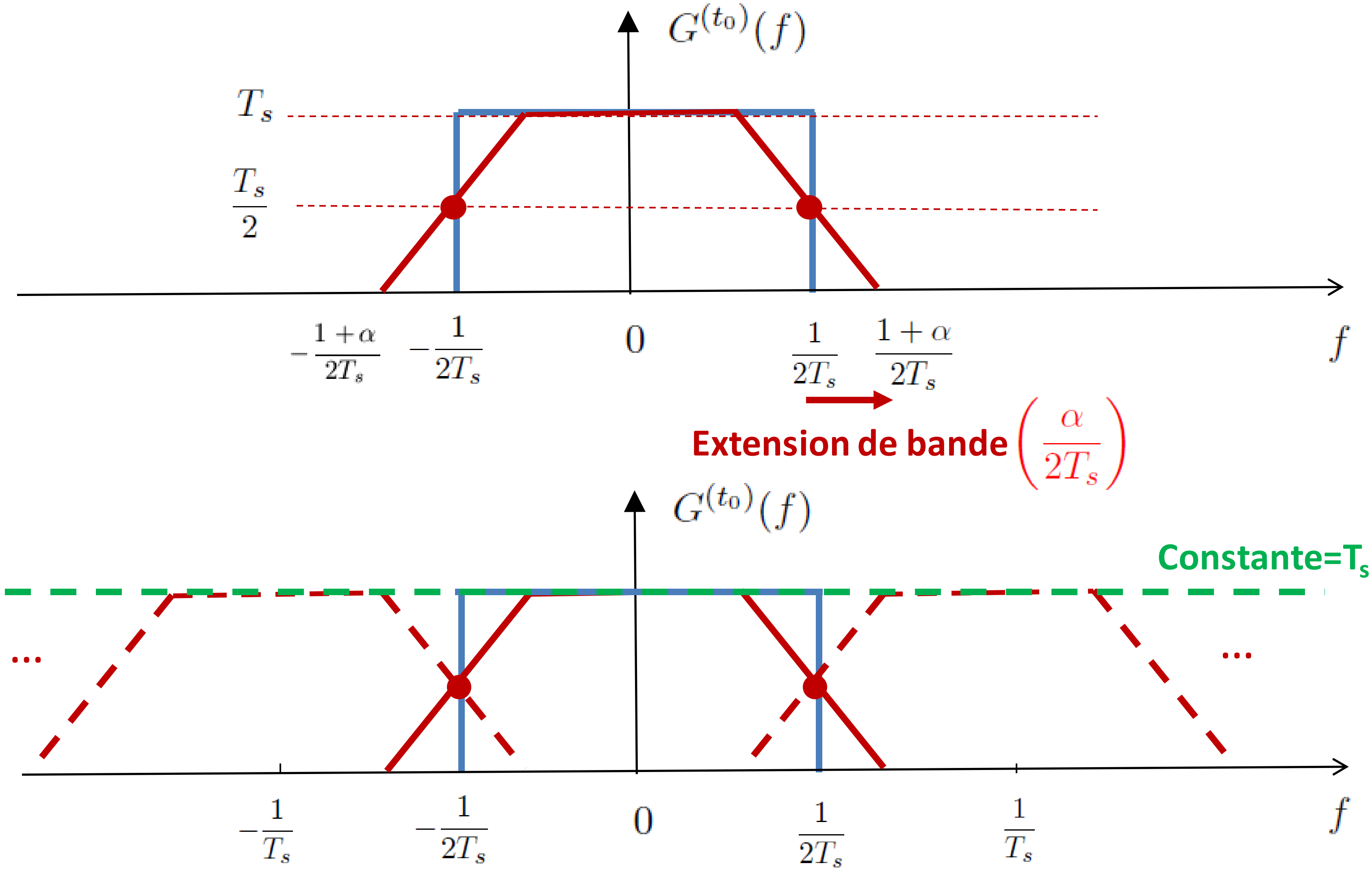
$$B = \frac{1+\alpha}{2T_s}$$

<u>Valeurs typiques :</u>

α=0.22 (UMTS),
α=0.35 (DVB-S),
α=0.15 (DVB-C)

Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel

Exemple 3 : filtre en cosinus surélevé



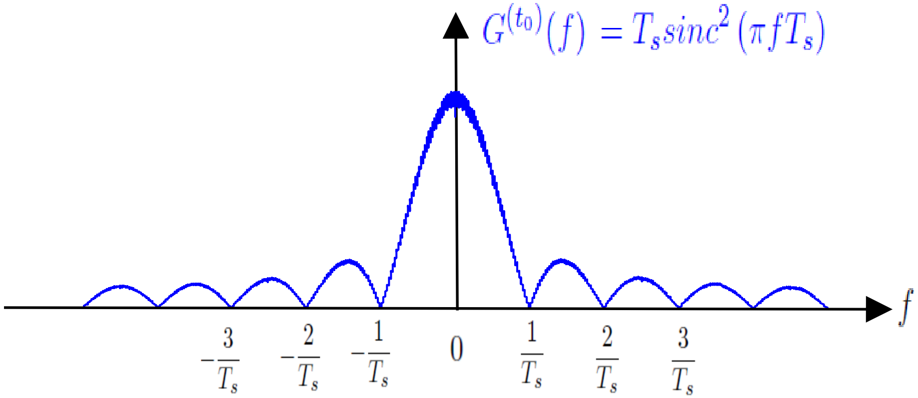
Télécommunications
Transmissions en bande de base

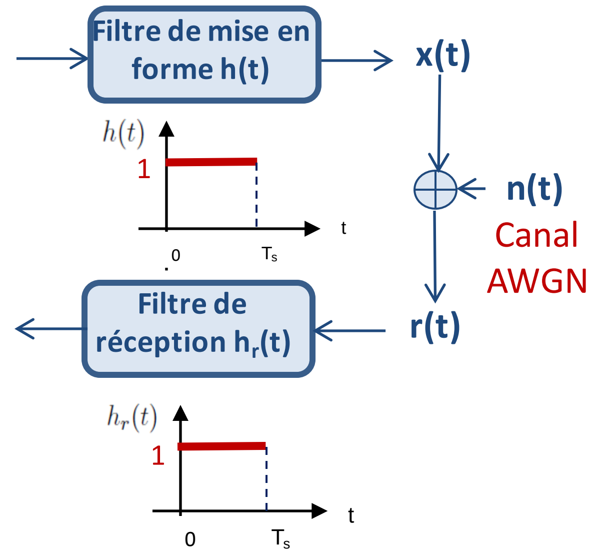
1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

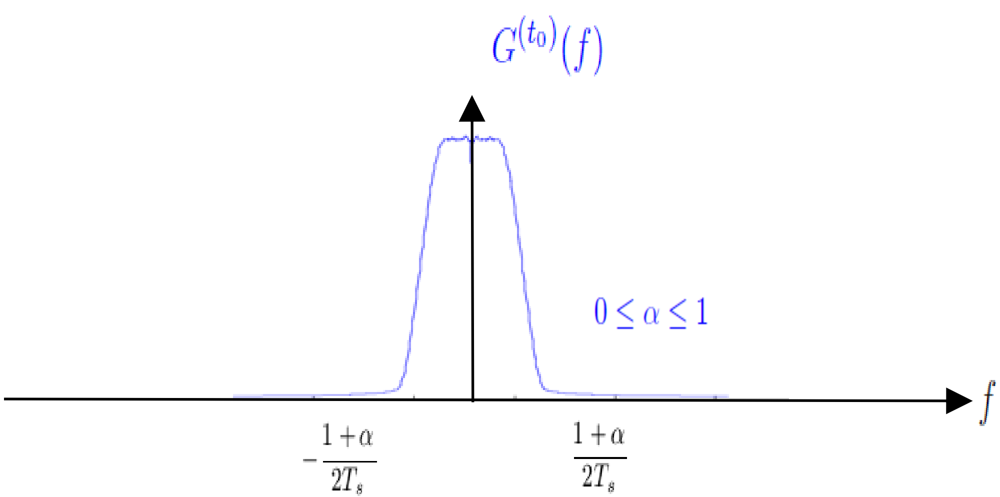
Impact du canal de propagation

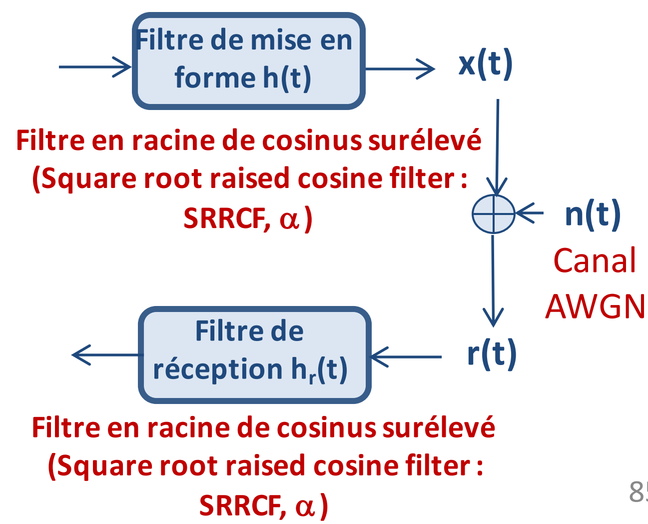
Canal AWGN

Deux cas où $G^{(t_0)}(f)$ respecte le critère de Nyquist









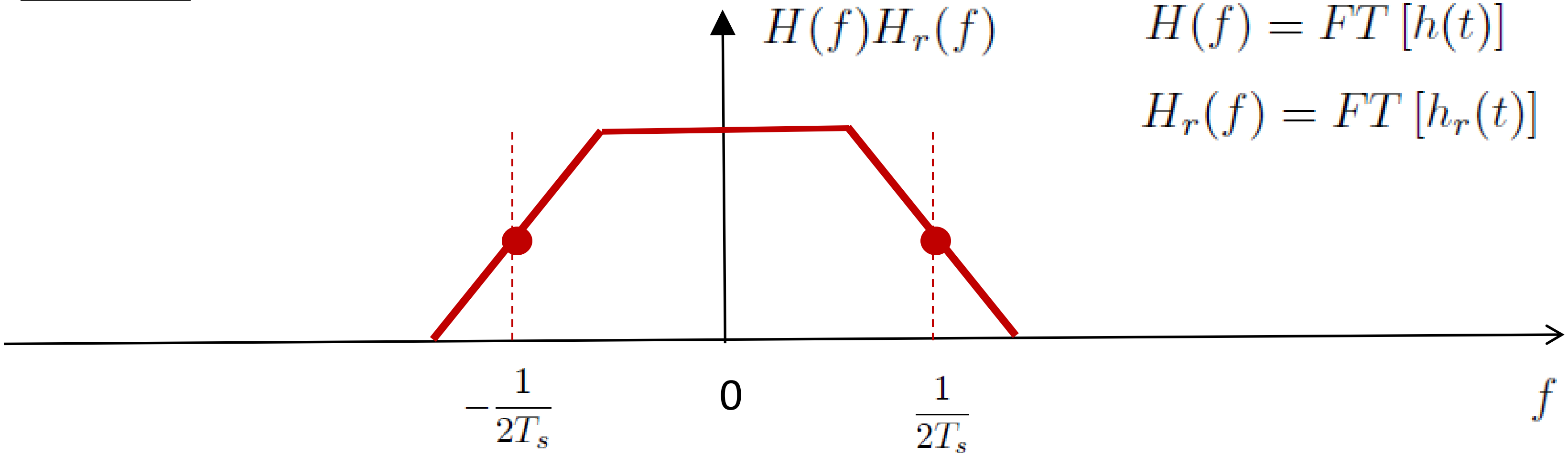
Impact du canal de propagation

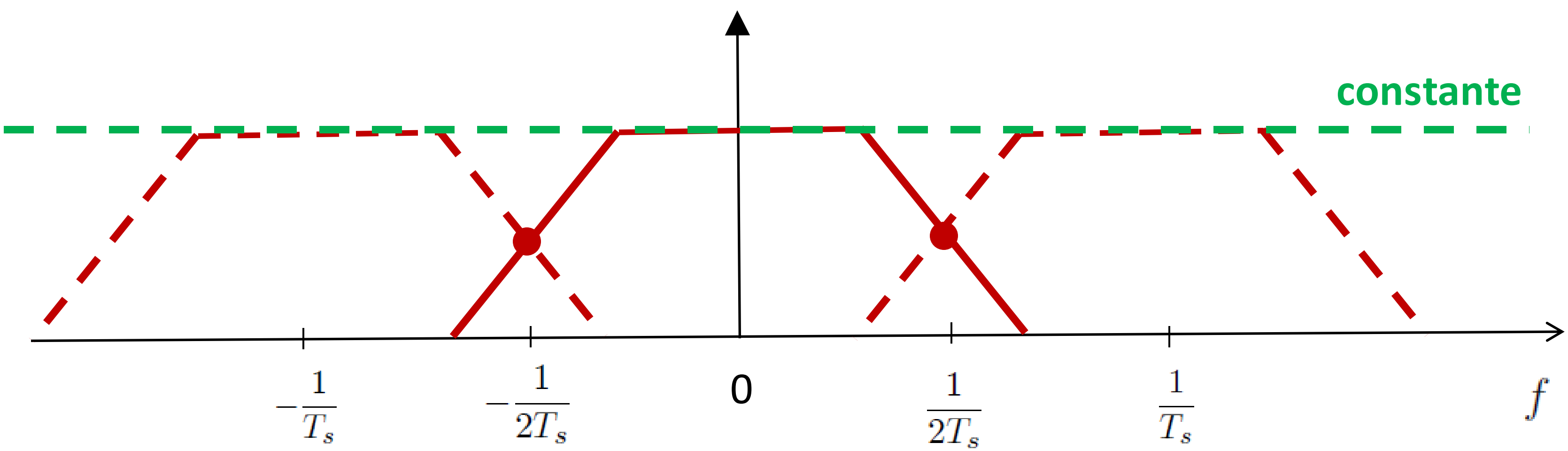
Canal AWGN à bande limitée

Exemple:

$$H(f) = FT\left[h(t)\right]$$

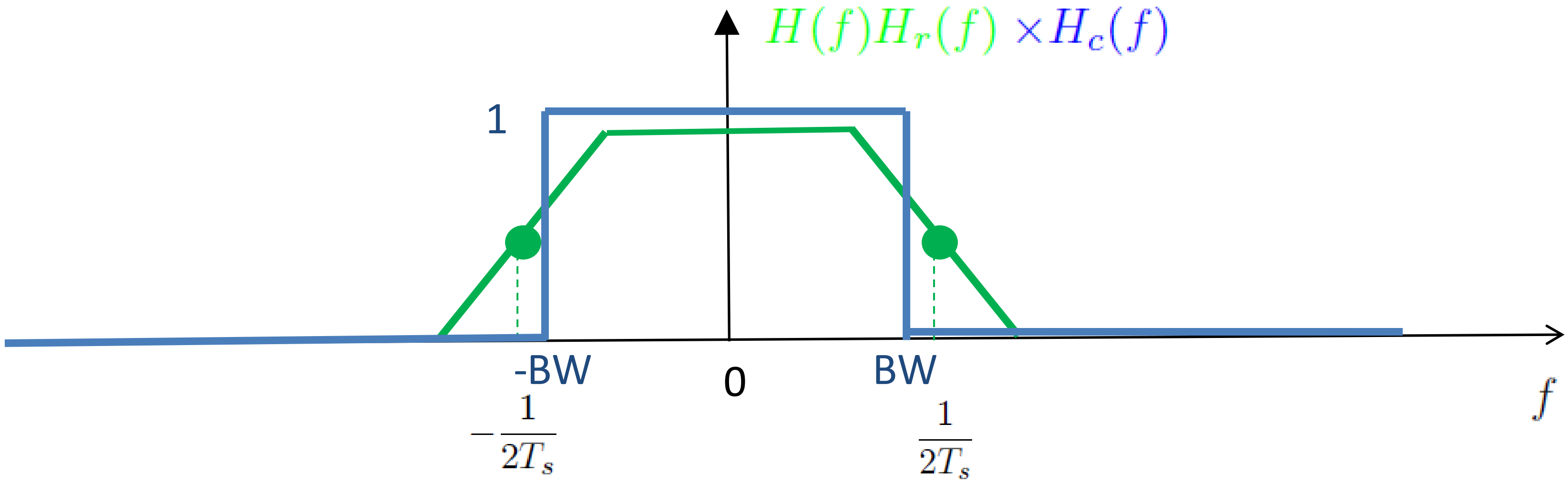
$$H_r(f) = FT\left[h_r(t)\right]$$

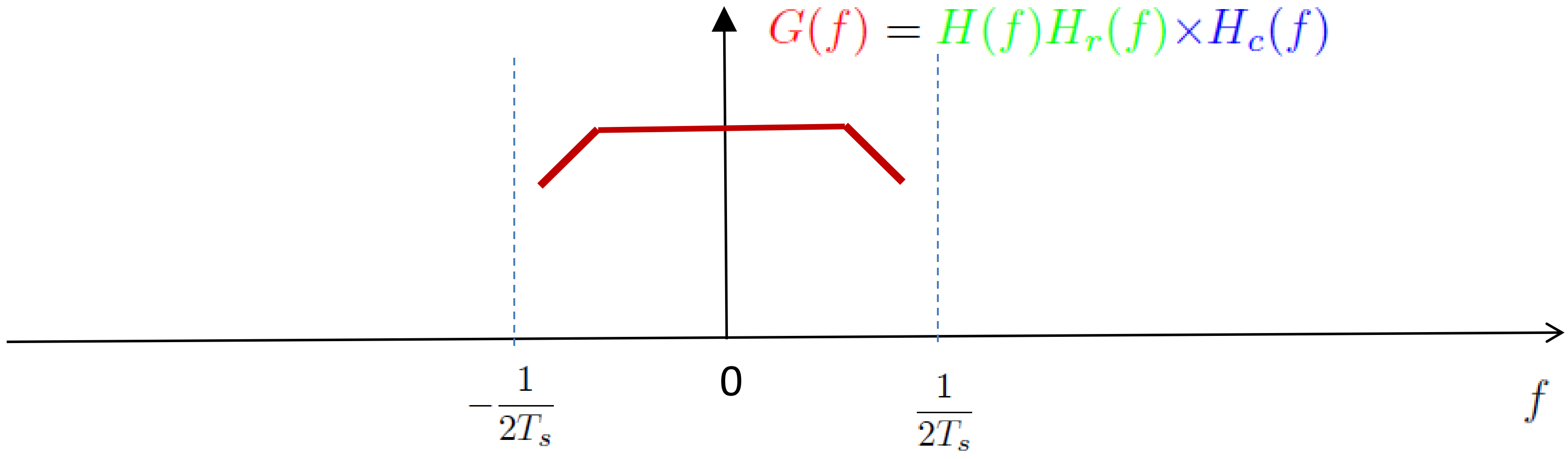




Canal AWGN à bande limitée

Exemple:

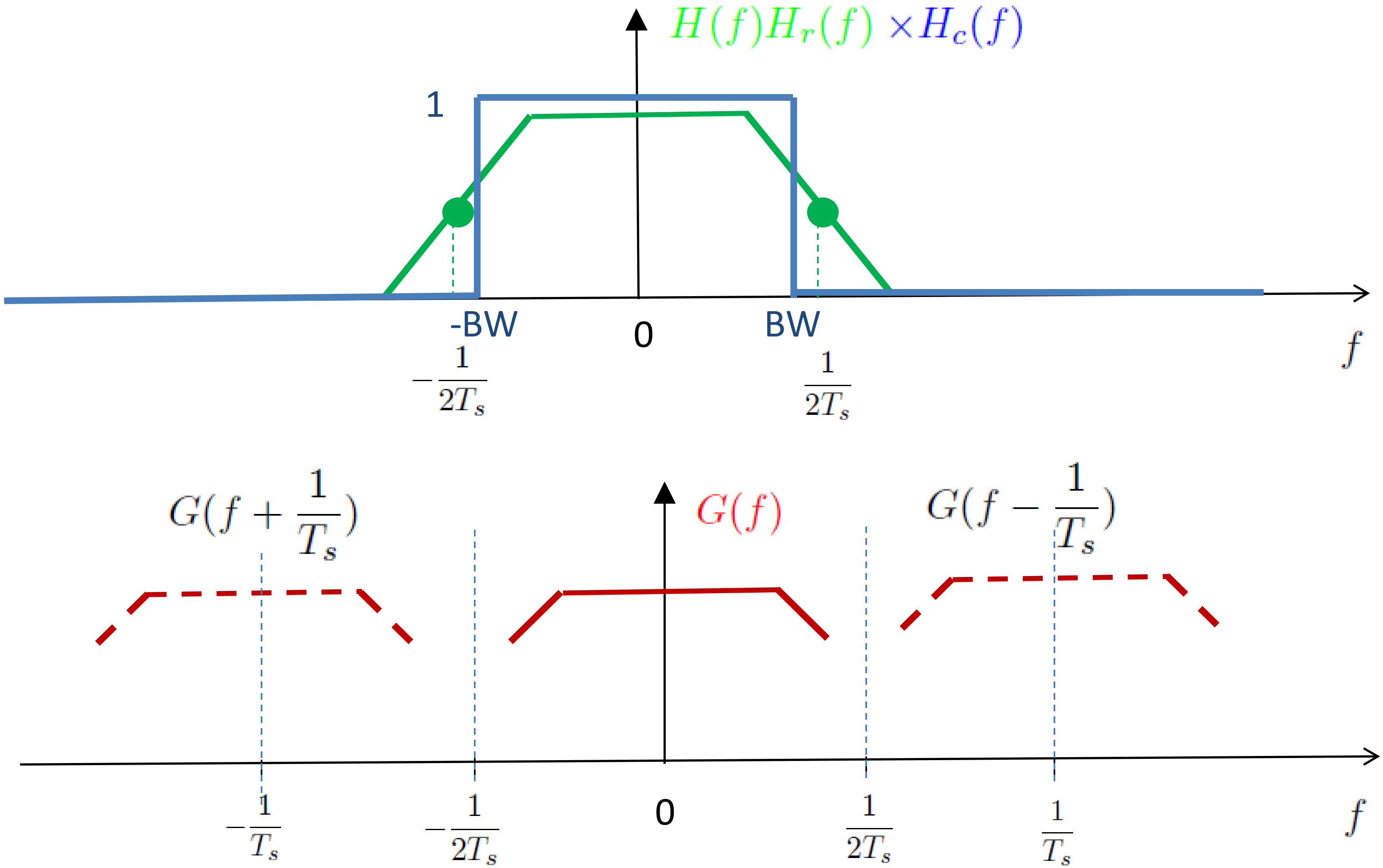




Impact du canal de propagation

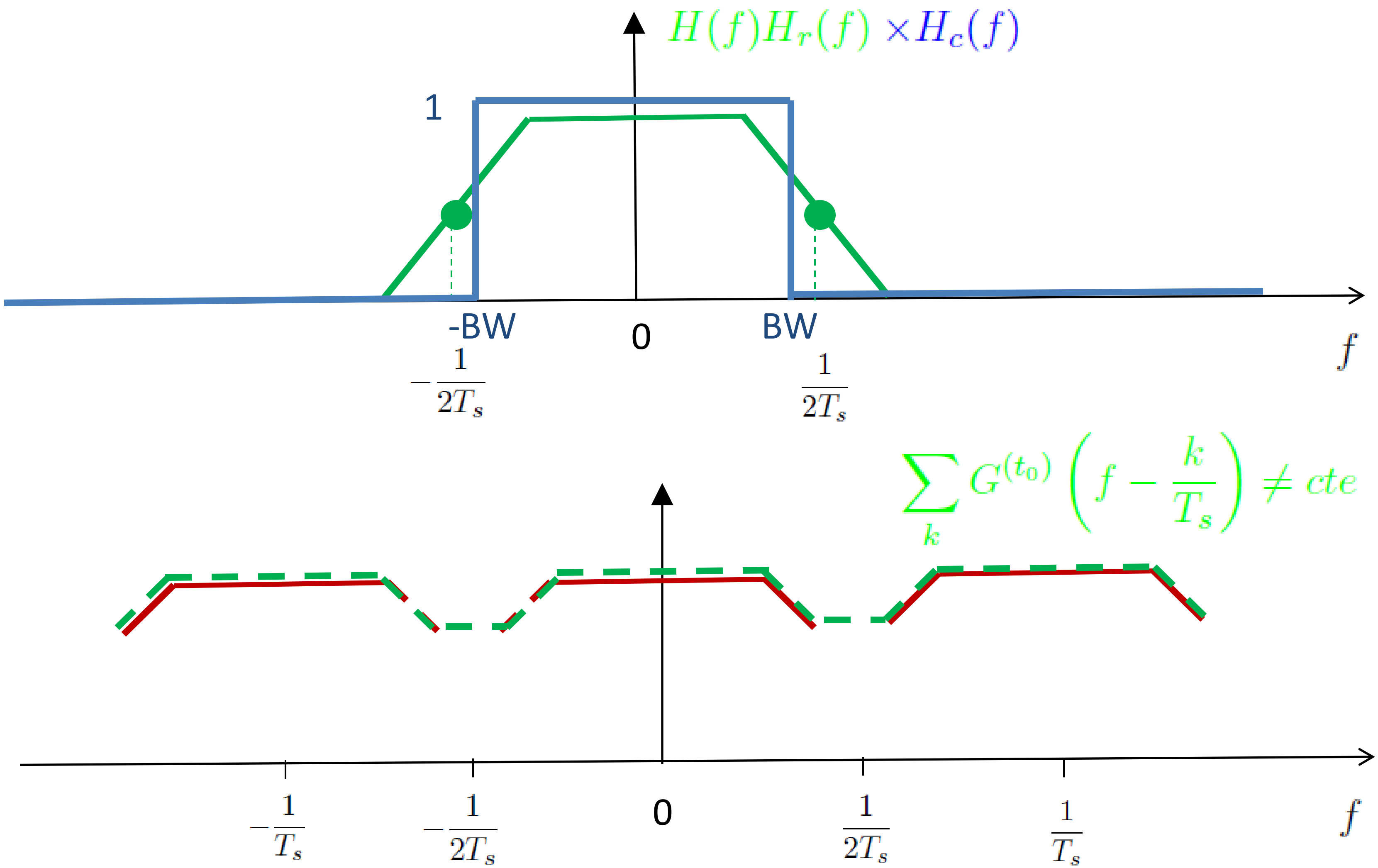
Canal AWGN à bande limitée

Exemple:



Canal AWGN à bande limitée

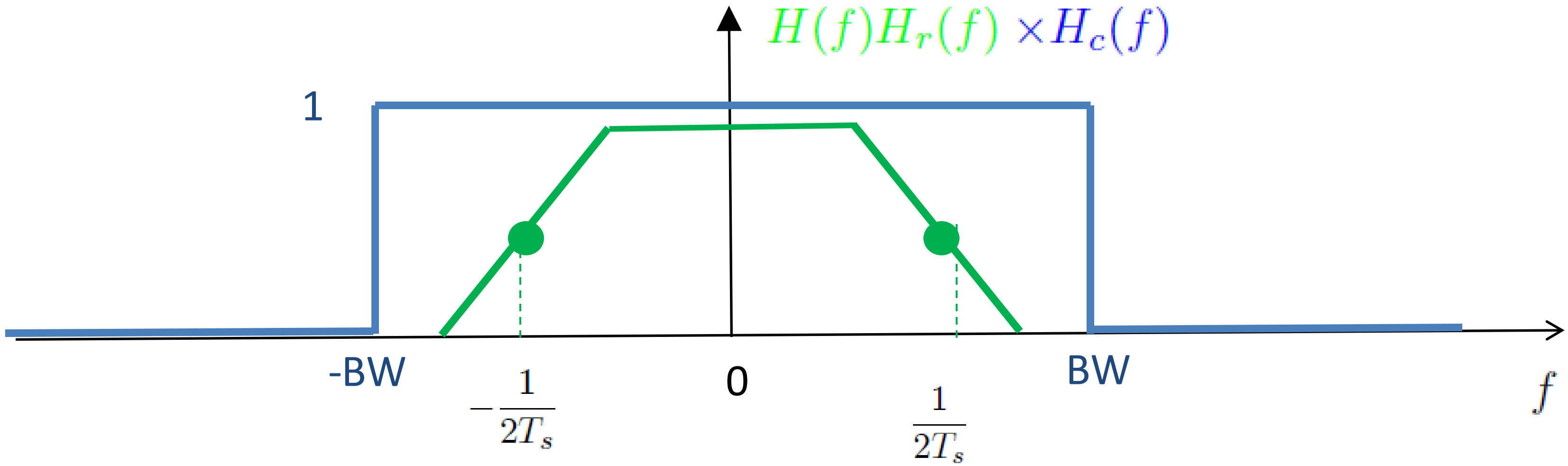
Exemple:

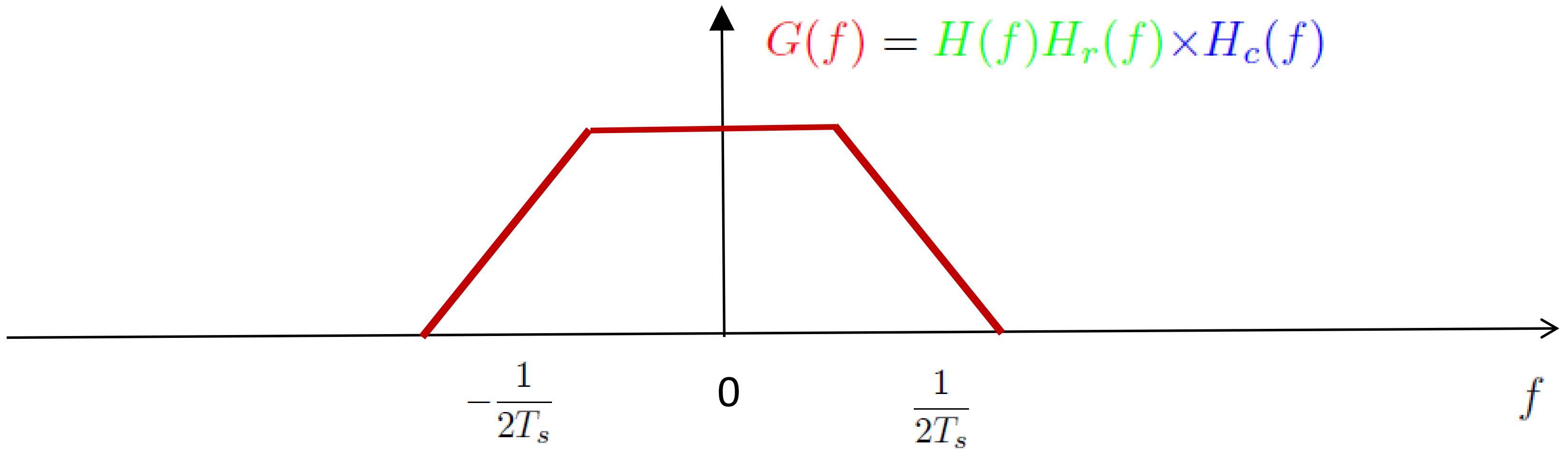


Impact du canal de propagation

Canal AWGN à bande limitée

Exemple:

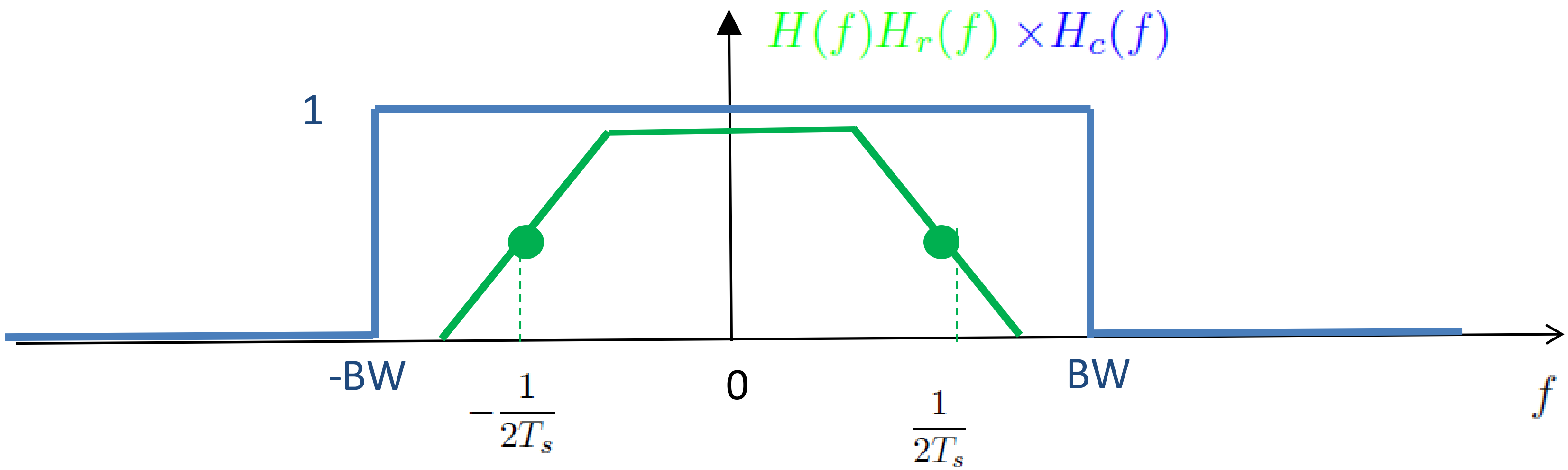


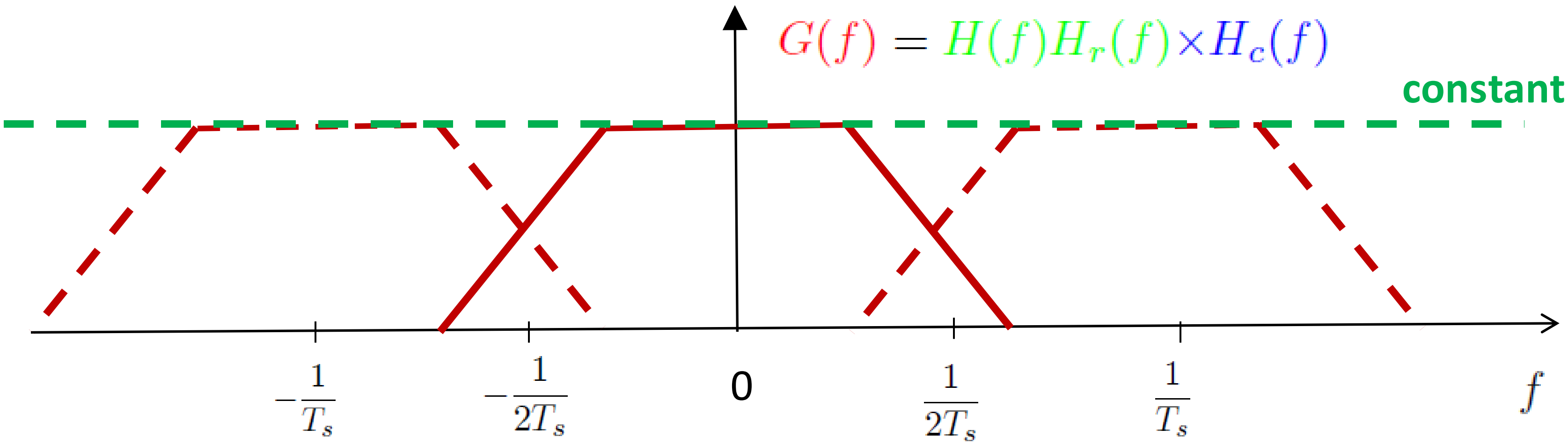


Impact du canal de propagation

Canal AWGN à bande limitée

<u>Exemple:</u>

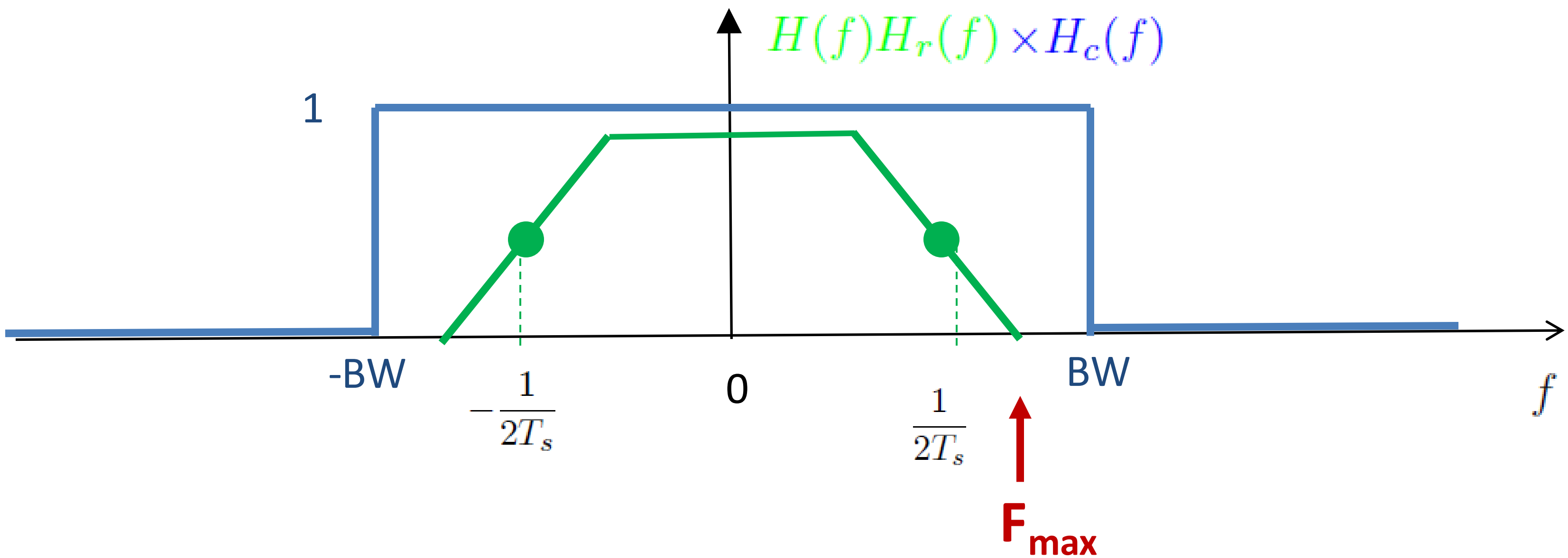




Impact du canal de propagation

Canal AWGN à bande limitée

Exemple:



Si **$BW>F_{max}$** un canal AWGN à bande limitée BW
Permet de continuer à respecter le critère de Nyquist

Bande passante du canal

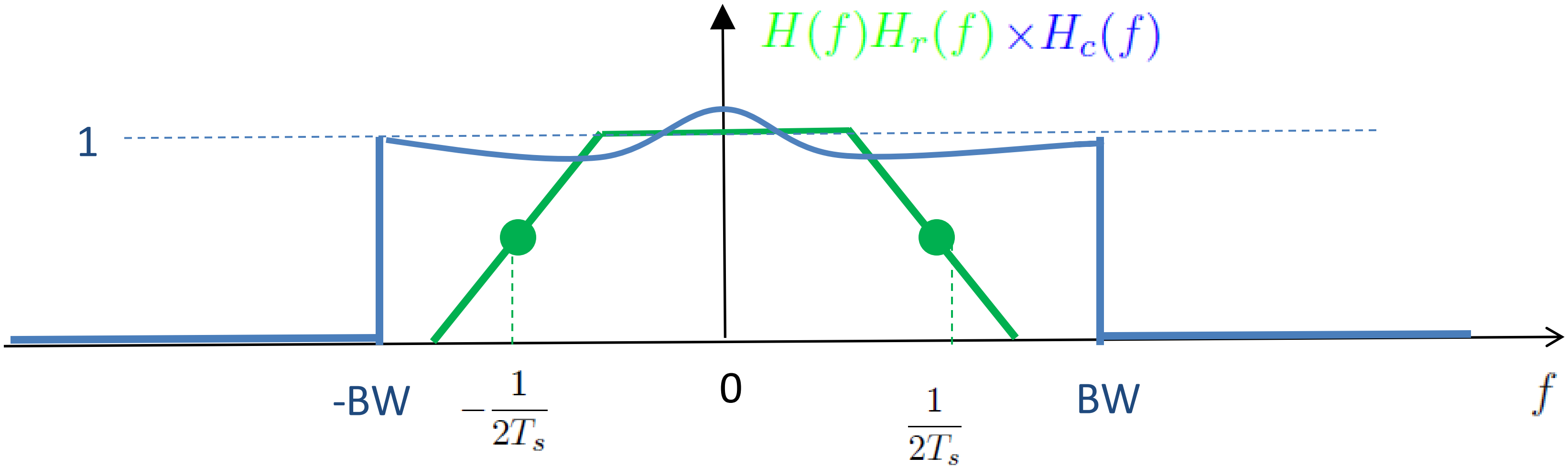
Mais, comme $F_{max}=kR_s$, alors $\boxed{R_s < \frac{BW}{k}}$ pour continuer à respecter le critère de Nyquist

Dépend des filtres de la chaine.

Le débit symbole permettant de vérifier le critère de Nyquist est limité

Canal sélectif en fréquences

Exemple :

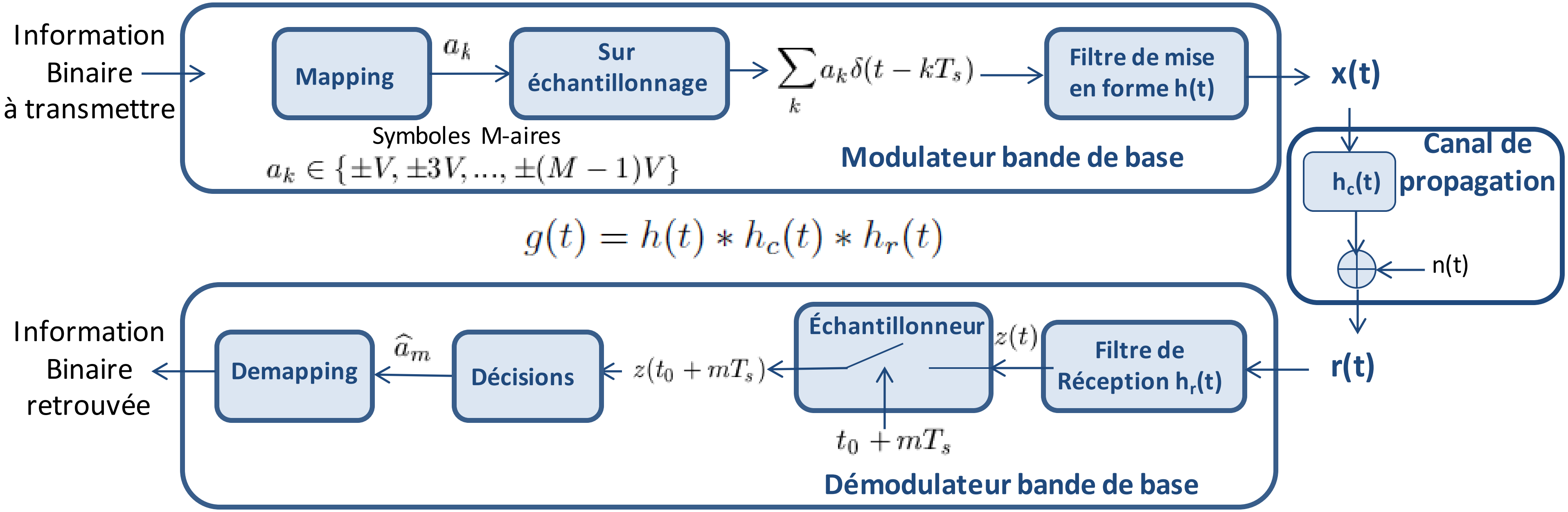


→ Le critère de Nyquist n'est plus vérifié
→ D'autres méthodes doivent être utilisées : égalisation, ofdm … (voir en 2A)

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Filtrage adapté



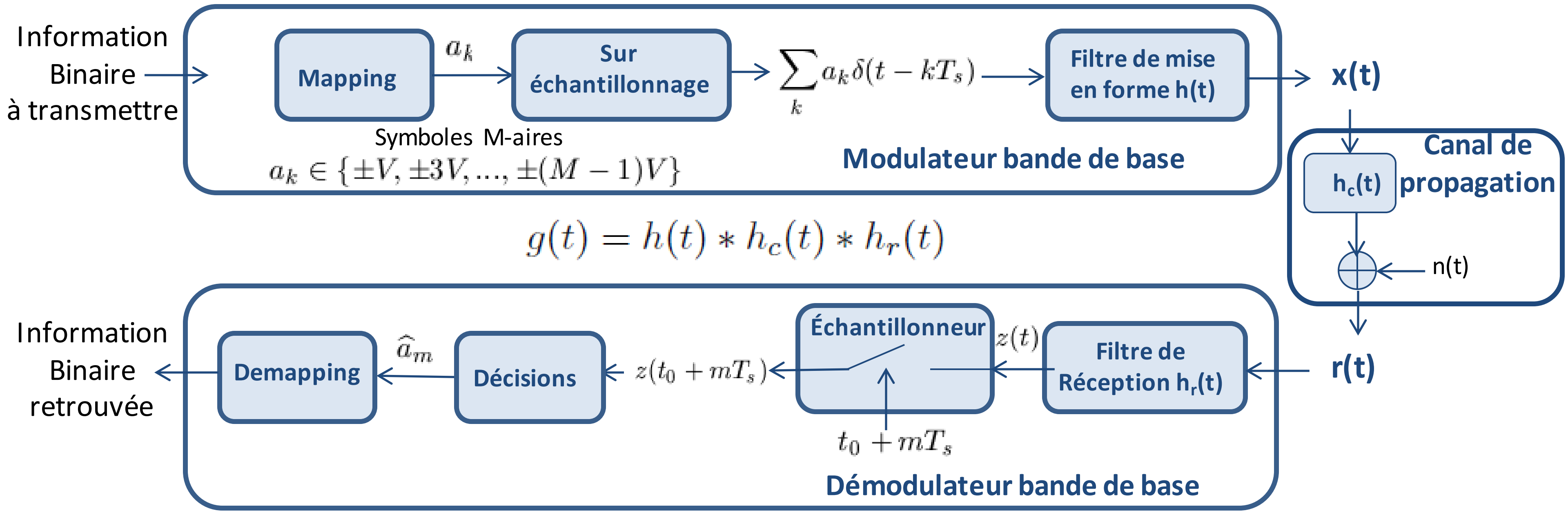
<u>Quand le critère de Nyquist est vérifié :</u>

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

Terme utile

Bruit
(filtré et échantillonné)
Gaussien, puissance σ_w^2

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Filtrage adapté



Quand le critère de Nyquist est vérifié :

$$z(t_0+mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0+mT_s)$$

Terme utile

Bruit
(filtré et échantillonné)
Gaussien, puissance σ_w^2

➡ Rapport signal sur bruit aux instants de décision :

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \left|g(t_0)\right|^2}{\sigma_w^2}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \left|g(t_0)\right|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{ Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f)H_c(f)H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 \, df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f)H_c(f)| \, df\right\}^{1/2} \left\{\int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \left|g(t_0)\right|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{ Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f)e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f)df}} = \frac{\left|\int_R H(f)H_c(f)H_r(f)e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df}} \le \frac{\left\{\int_R |H(f)H_c(f)|\, df\right\}^{1/2}\left\{\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

<u>Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :</u>

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f)H_c(f) \end{cases}$

(Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\int_{-\infty}^{\infty} a(f)b^*(f)df\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty} a(f)a^*(f)df \int_{-\infty}^{\infty} b(f)b^*(f)df$, égalité pour $a(f) = \lambda b(f)$)

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{ Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f) H_c(f)| df\right\}^{1/2} \left\{\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

<u>Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :</u>

$$\boxed{H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0}}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f) H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f) H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \left|g(t_0)\right|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{ Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f)H_c(f)H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f)H_c(f)| df\right\}^{1/2}\left\{\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

<u>Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :</u>

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} \boxed{h_r(t) = \lambda h_e^*(t_0 - t)}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f)H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f)H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \ \Leftrightarrow \ \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f)H_c(f)| \, df\right\}^{1/2} \left\{\int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

<u>Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :</u>

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} \boxed{h_r(t) = \lambda h_e^*(\underbrace{t_0}_{\text{puis décalée (causalité)}} \overbrace{- t}^{h_e(t) \text{ retournée}})}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f) H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f) H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \left|g(t_0)\right|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{ Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R \left|H_r(f)\right|^2 df}} \le \frac{\left\{\int_R \left|H(f)H_c(f)\right| df\right\}^{1/2} \left\{\int_R \left|H_r(f)\right|^2 df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R \left|H_r(f)\right|^2 df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :

Filtre adapté

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} \boxed{h_r(t) = \lambda h_e^*(t_0 - t)}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f) H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f) H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 \, |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{ Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f) df}} = \frac{\left|\int_R H(f) H_c(f) H_r(f) e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f) H_c(f)| \, df\right\}^{1/2} \left\{\int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2} \int_R |H_r(f)|^2 \, df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :

Filtre adapté

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} \boxed{h_r(t) = \lambda h_e^*(t_0 - t)}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f) H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f) H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Adapté à la forme d'onde reçue

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Filtrage adapté

$$z(t_0 + mT_s) = a_m g(t_0) + w(t_0 + mT_s)$$

$$SNR = \frac{P_{[a_m g(t_0)]}}{P_w} = \frac{\sigma_a^2 |g(t_0)|^2}{\sigma_w^2}$$

$$\boxed{\text{Maximiser } SNR \Leftrightarrow \text{Maximiser } \frac{|g(t_0)|}{\sigma_w}}$$

Maximise le SNR aux instants optimaux d'échantillonnage

$$\frac{|g(t_0)|}{\sigma_w} = \frac{\left|\int_R G(f)e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\int_R S_w(f)df}} = \frac{\left|\int_R H(f)H_c(f)H_r(f)e^{j2\pi f t_0} df\right|}{\sqrt{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df}} \leq \frac{\left\{\int_R |H(f)H_c(f)| df\right\}^{1/2}\left\{\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}{\left\{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df\right\}^{1/2}}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Egalité et, donc, valeur max pour le SNR pour :

Filtre adapté

$$H_r(f) = \lambda H_e^*(f)e^{-j2\pi f t_0} \xrightarrow{TF^{-1}} \boxed{h_r(t) = \lambda h_e^*(t_0 - t)}$$

avec : $\begin{cases} \lambda \in \mathbb{R}^* \\ H_e(f) = H(f)H_c(f) \end{cases}$

Forme d'onde reçue

$$\boxed{H_e(f) = H(f)H_c(f) \xrightarrow{TF^{-1}} h_e(t) = h(t) * h_c(t)}$$

Adapté à la forme d'onde reçue

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Règle de décision

Terme d'intérêt

Terme de bruit
Échantillon de bruit filtré : w_m

$$z(t_0+mT_s) = a_m g(t_0) + \underbrace{\cancel{\sum_{k\neq m} a_k g(t_0+(m-k)T_s)}}_{\text{Interferences entre symboles = 0 si critère de Nyquist respecté}} + w(t_0+mT_s) \longrightarrow \boxed{\text{Décisions}} \longrightarrow \widehat{a}_m$$

$\longrightarrow$ Règle de décision du **Maximum A Posteriori** : $\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} P(\widetilde{a}_m | z_m)$

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Règle de décision

Terme d'intérêt

Terme de bruit
Échantillon de bruit filtré : w_m

$$z(t_0+mT_s) = a_m g(t_0) + \underbrace{\cancel{\sum_{k\neq m} a_k g(t_0+(m-k)T_s)}}_{\substack{\text{Interferences entre symboles} \\ = 0 \text{ si critère de Nyquist respecté}}} + w(t_0+mT_s) \longrightarrow \boxed{\text{Décisions}} \longrightarrow \widehat{a}_m$$

$\longrightarrow$ Règle de décision du **Maximum A Posteriori** : $\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} P\left(\widetilde{a}_m | z_m\right)$

=> Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables) :

$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m | \widetilde{a}_m\right)}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Règle de décision

Critère de Nyquist respecté : $z(t_0 + mT_s) \equiv z_m = a_m g(t_0) + w_m \longrightarrow$ Décisions $\longrightarrow \widehat{a}_m$

$w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2)$

Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables)

$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m|\widetilde{a}_m\right)}$$

avec

$$p(z_m|\widetilde{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{\left(z_m - \widetilde{a}_m g(t_0)\right)^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Règle de décision

Critère de Nyquist respecté : $z(t_0 + mT_s) \equiv z_m = a_m g(t_0) + w_m \longrightarrow$ **Décisions** $\longrightarrow \widehat{a}_m$

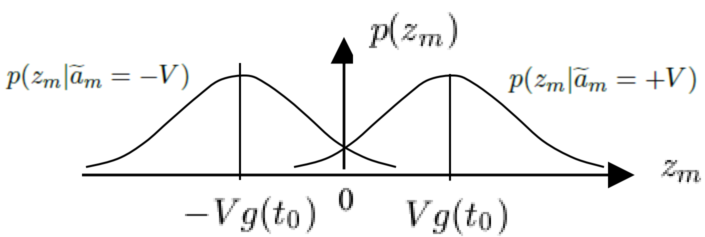
Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables)

$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m | \widetilde{a}_m\right)}$$

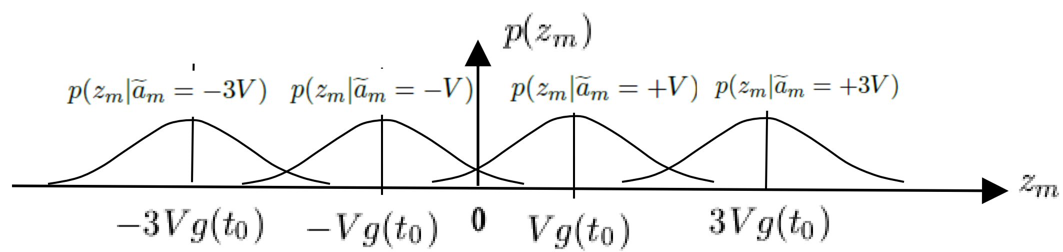
avec

$$p(z_m|\widetilde{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{(z_m - \widetilde{a}_m g(t_0))^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

Cas binaire : $\widetilde{a}_m \in \{\pm V\}$



Cas 4-aire : $\widetilde{a}_m \in \{\pm V, \pm 3V\}$



Impact du bruit dans la chaine de transmission

Règle de décision

Critère de Nyquist respecté : $z(t_0 + mT_s) \equiv z_m = a_m g(t_0) + w_m \longrightarrow$ Décisions $\longrightarrow \widehat{a}_m$

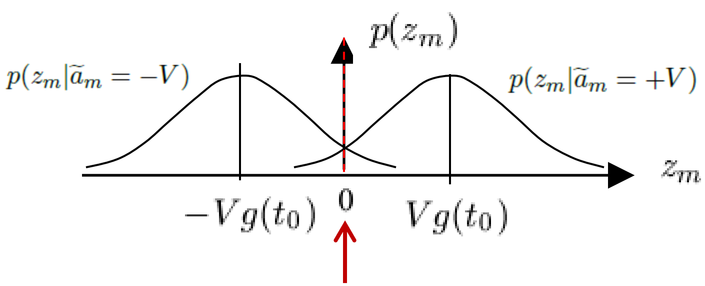
Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables)

$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m|\widetilde{a}_m\right)}$$

avec

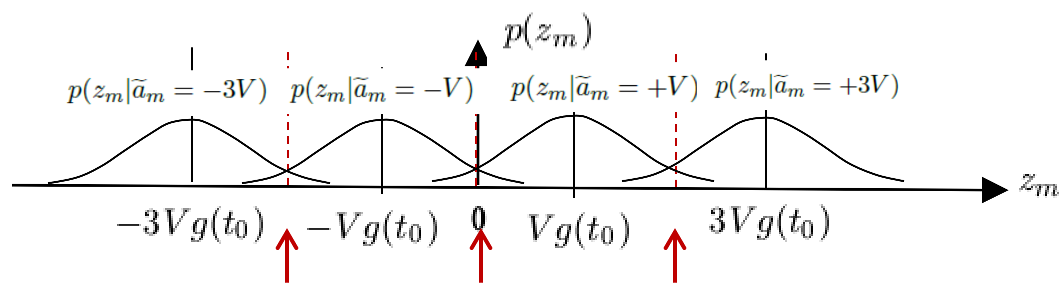
$$p(z_m|\widetilde{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{\left(z_m - \widetilde{a}_m g(t_0)\right)^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

<u>Cas binaire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V\}$



$$Regle\ de\ decision \Longrightarrow \begin{cases} z_m \geq 0 : \widehat{a}_m = +V \\ z_m < 0 : \widehat{a}_m = -V \end{cases}$$

<u>Cas 4-aire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V, \pm 3V\}$



$$Regle\ de\ decision \Longrightarrow \begin{cases} z_m \leq -2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = -3V \\ -2Vg(t_0) < z_m \leq 0 : \widehat{a}_m = -V \\ 0 < z_m \leq 2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = +V \\ z_m \geq 2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = +3V \end{cases}$$

Impact du bruit dans la chaine de transmission

Règle de décision

Critère de Nyquist respecté : $z(t_0 + mT_s) \equiv z_m = a_m g(t_0) + w_m \longrightarrow$ Décisions $\longrightarrow \widehat{a}_m$

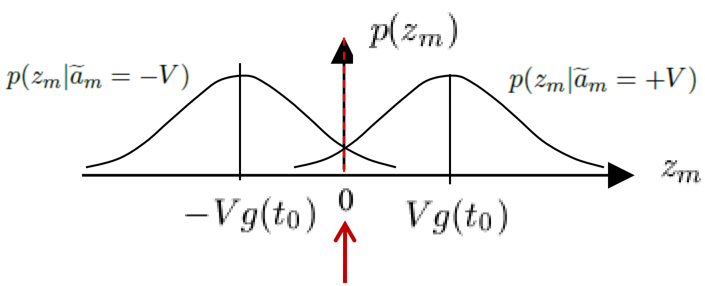
Règle de décision du **Maximum de vraissemblance** (symboles équiprobables)

$$\boxed{\widehat{a}_m = \arg\max_{\widetilde{a}_m} p\left(z_m|\widetilde{a}_m\right)}$$

avec

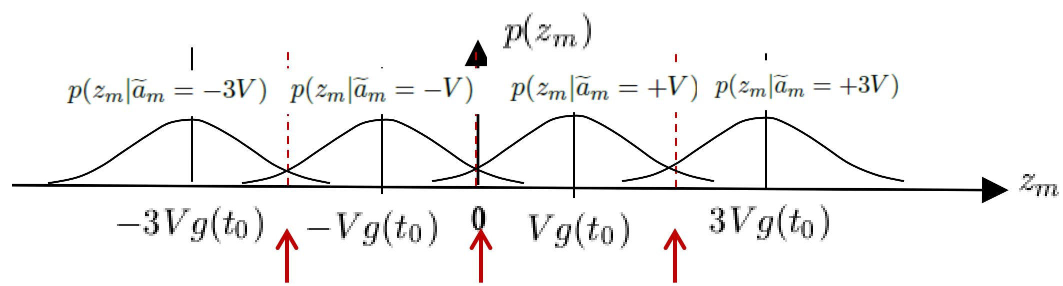
$$p(z_m|\widetilde{a}_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left(-\frac{\left(z_m - \widetilde{a}_m g(t_0)\right)^2}{2\sigma_w^2}\right)$$

<u>Cas binaire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V\}$

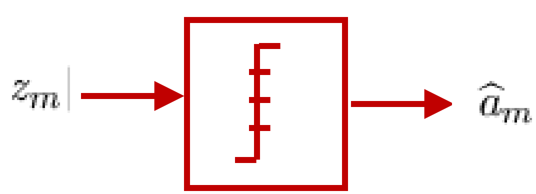


$$Regle\ de\ decision \implies \begin{cases} z_m \geq 0 : \widehat{a}_m = +V \\ z_m < 0 : \widehat{a}_m = -V \end{cases}$$

<u>Cas 4-aire :</u> $\widetilde{a}_m \in \{\pm V, \pm 3V\}$



$$Regle\ de\ decision \implies \begin{cases} z_m \leq -2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = -3V \\ -2Vg(t_0) < z_m \leq 0 : \widehat{a}_m = -V \\ 0 < z_m \leq 2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = +V \\ z_m \geq 2Vg(t_0) : \widehat{a}_m = +3V \end{cases}$$



Détecteur à seuil (Threshold detector or slicer)

Télécommunications
Transmissions en bande de base

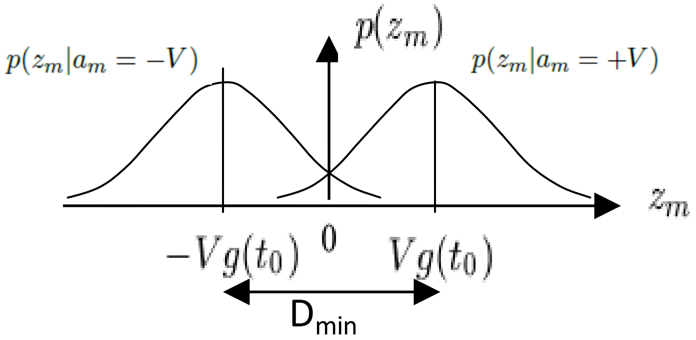
1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ <u>Cas binaire :</u> $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables

$\longrightarrow$ Nyquist respecté et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$

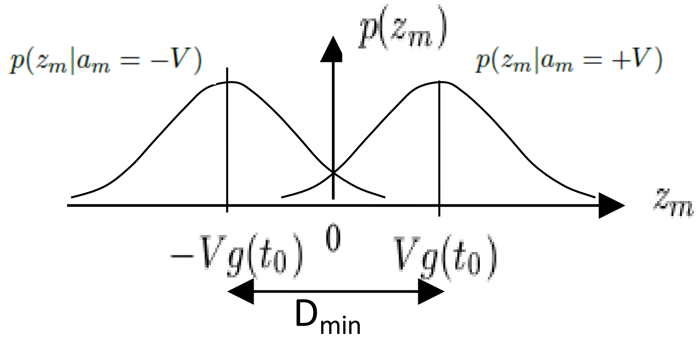


Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ <u>Cas binaire :</u> $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables

$\longrightarrow$ Nyquist respecté et seuil de decision en 0

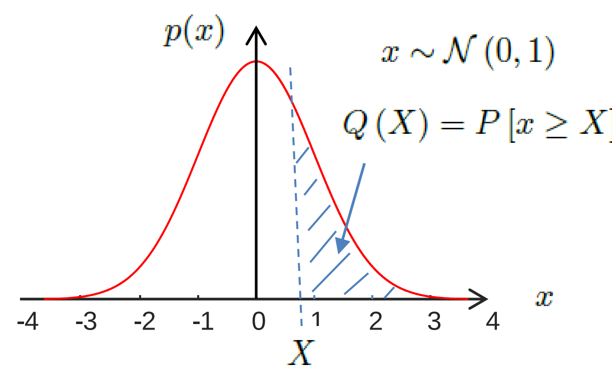
$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0

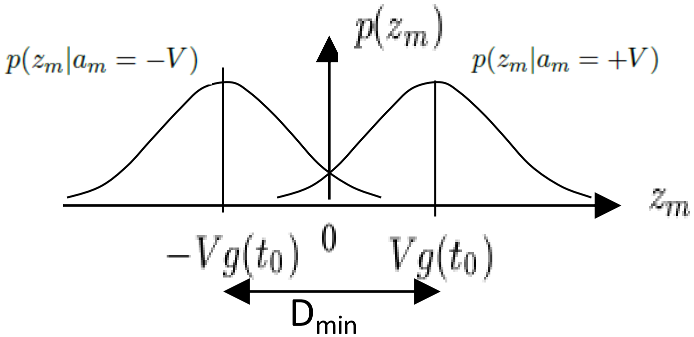


Impact du bruit dans la chaine de transmission
Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ Cas binaire : $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables et indépendants

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0

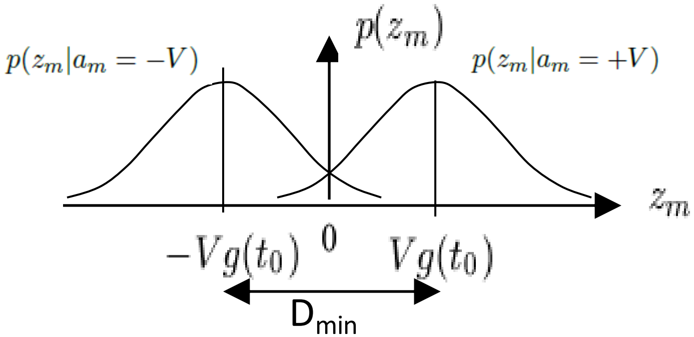
$\longrightarrow$ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ Cas binaire : $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables et indépendants

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

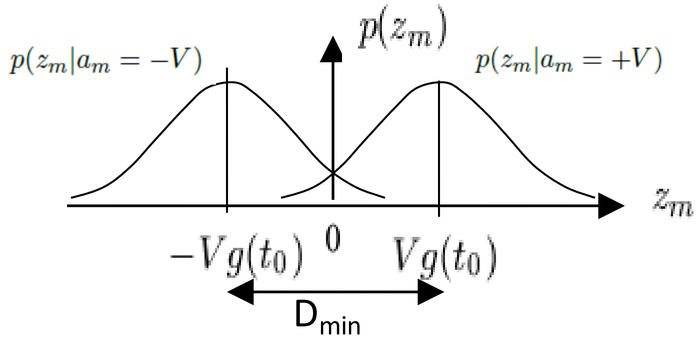
TES_{min} en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ (SNR par bit à l'entrée du récepteur) ?

Taux d'erreur symbole (TES)

$\longrightarrow$ <u>Cas binaire :</u> $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables et indépendants

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$

Nyquist respecté, seuil de décision en 0

$\longrightarrow$ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

TES_{min} en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ (SNR par bit à l'entrée du récepteur) ?

Filtrage adapté : $H_r(f) = \lambda H_e^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$ ou $H_e(f) = \frac{1}{\lambda} H_r^*((f) e^{-j2\pi f t_0}$

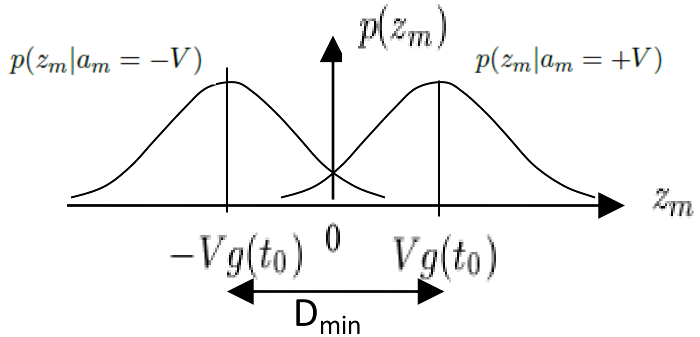
=> $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f) = H_e(f)H_r(f) = \lambda \left|H_e(f)\right|^2 e^{-j2\pi f t_0} = \frac{1}{\lambda}\left|H_r(f)\right|^2 e^{-j2\pi f t_0}$

Taux d'erreur symbole (TES)

→ <u>Cas binaire :</u> $a_m \in \{\pm V\}$, équiprobables et indépendants

→ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

$$\begin{cases} z_m = a_m g(t_0) + w_m \\ w_m \sim \mathcal{N}(0, \sigma_w^2) \end{cases}$$



$$\boxed{TES = Q\left(\frac{Vg(t_0)}{\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$
Nyquist respecté, seuil de décision en 0

→ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

TES_{min} en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ (SNR par bit à l'entrée du récepteur) ?

Filtrage adapté : $H_r(f) = \lambda H_e^*(f)e^{-j2\pi f t_0}$ ou $H_e(f) = \frac{1}{\lambda}H_r^*((f)e^{-j2\pi f t_0}$

=> $G(f) = H(f)H_c(f)H_r(f) = H_e(f)H_r(f) = \lambda\left|H_e(f)\right|^2 e^{-j2\pi f t_0} = \frac{1}{\lambda}\left|H_r(f)\right|^2 e^{-j2\pi f t_0}$

$$\boxed{TES_{min} = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

$a_k \in \{\pm V\}$
Nyquist respecté, seuil de décision en 0
Filtrage adapté

Impact du bruit dans la chaine de transmission
Taux d'erreur symbole (TES)

→ <u>Cas M-aire :</u> $a_m \in \{\pm V, \pm 3V, ..., \pm(M-1)V\}$, équiprobables et indépendants

→ **Nyquist respecté** et seuil de decision en 0

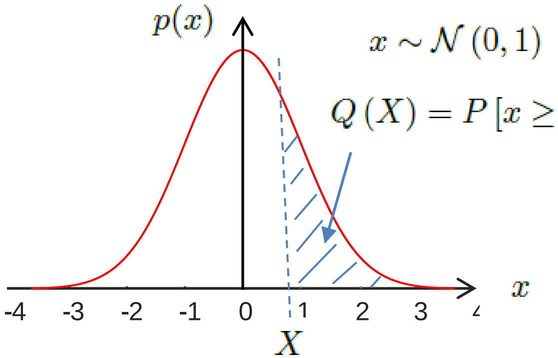
$$TES = 2\left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\frac{V g(t_0)}{\sigma_w}\right)$$

→ **Nyquist respecté**, seuil de decision en 0 **et filtrage adapté**

$$\boxed{TES_{min} = 2\left(\frac{M-1}{M}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

$$a_m \in \{\pm V, \pm 3V, ..., \pm(M-1)V\}$$

Obtenu pour une modulation **M-PAM** (Bande de base), dans un **canal de Nyquist**, avec **filtrage adapté.**



Impact du bruit dans la chaine de transmission
Taux d'erreur binaire (TEB)

→ Optimisation du mapping

→ **Mapping en binaire « Naturel »**

bits	symboles
00	-3
01	-1
10	+1
11	+3

Proba erreur 1
>> Proba erreur 2

Une erreur symbole = 2 bits erronnés

Exemple (voir TD, pour 4-PAM avec V=1, $N_0=10^{-3}\ V^2/Hz$, R_b=1kbps) :

$$P\left(\widehat{a}_k = -V/a_k = -3V\right) = Q(2) - Q(6) = 0.0228$$
$$P\left(\widehat{a}_k = +V/a_k = -3V\right) = Q(6) - Q(10) = 9.87\ 10^{-10}$$
$$P\left(\widehat{a}_k = +3V/a_k = -3V\right) = Q(10) = 7.62\ 10^{-24}$$

→ **Mapping de Gray**

bits	symboles
00	-3
01	-1
11	+1
10	+3

Un symbole erronné = 1 bit erronné

Mapping de GRAY ➡ $TEB \approx \dfrac{TES}{\log_2(M)}$

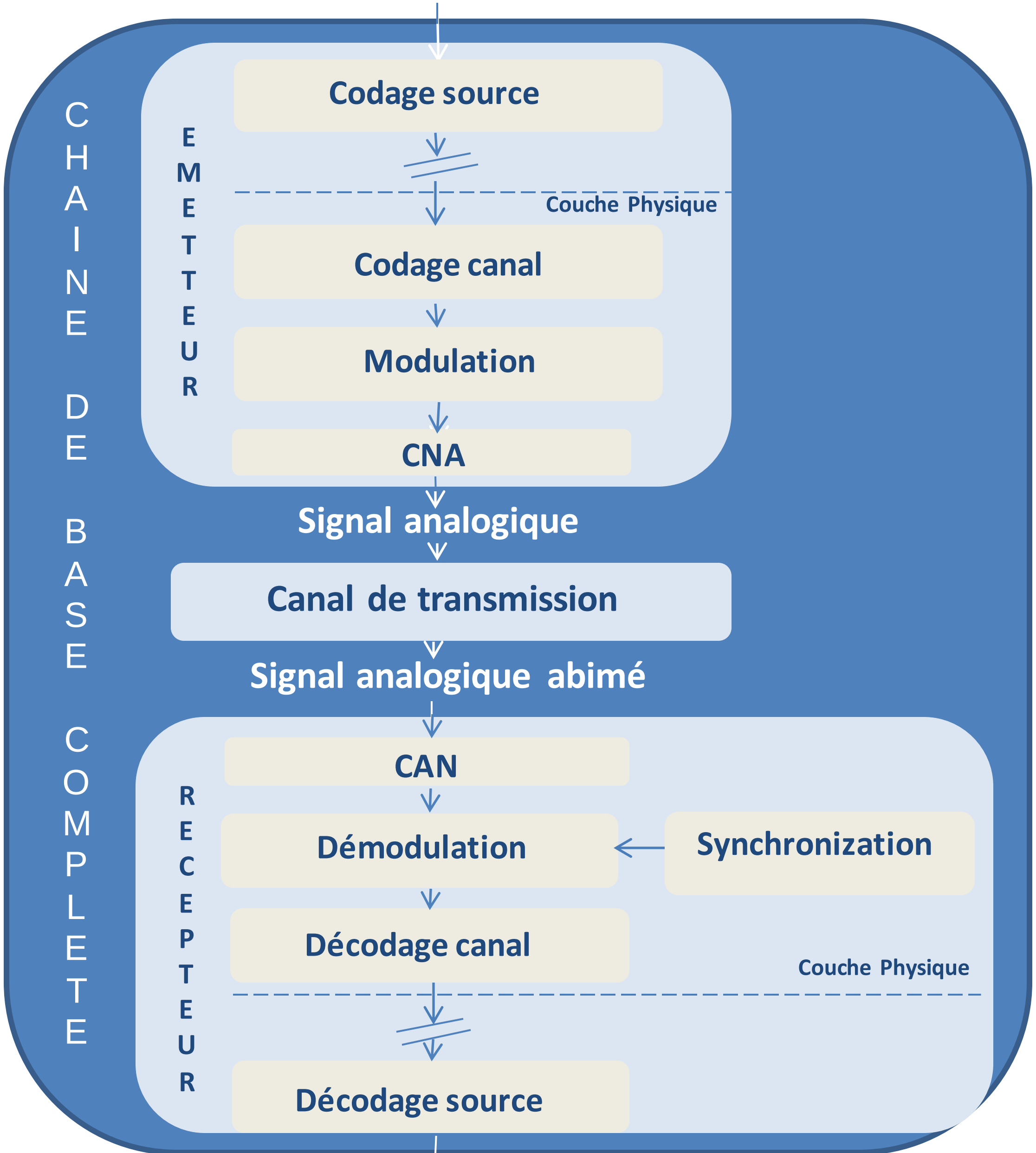
$$\left(TEB = \frac{\text{Nbre de bits erronés}}{\text{Nbre de bits transmis}} \approx \frac{\text{Nbre symboles erronés}}{\text{Nbre symboles transmis x Nbre bits codés par symbole}}\right)$$

Télécommunications
Transmissions en bande de base

1) Modulation numérique en bande de Base et notion d'efficacité spectrale
    1) Définition du modulateur bande de base
    2) DSP du signal modulé => bande nécessaire à la transmission
    3) Efficacité spectrale de la transmission
2) Interférences entre symboles et critère de Nyquist
    1) Problème de l'interférence entre symboles,
    2) Critère de Nyquist dans le domaine temporel,
    3) Diagramme de l'œil,
    4) Critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel,
    5) Impact du canal de propagation
3) Impact du bruit dans la chaine de transmission et notion d'efficacité en puissance
    1) Filtrage adapté,
    2) Règle de décision,
    3) Taux d'erreur symbole et taux d'erreur binaire,
    4) Efficacité en puissance de la transmission.

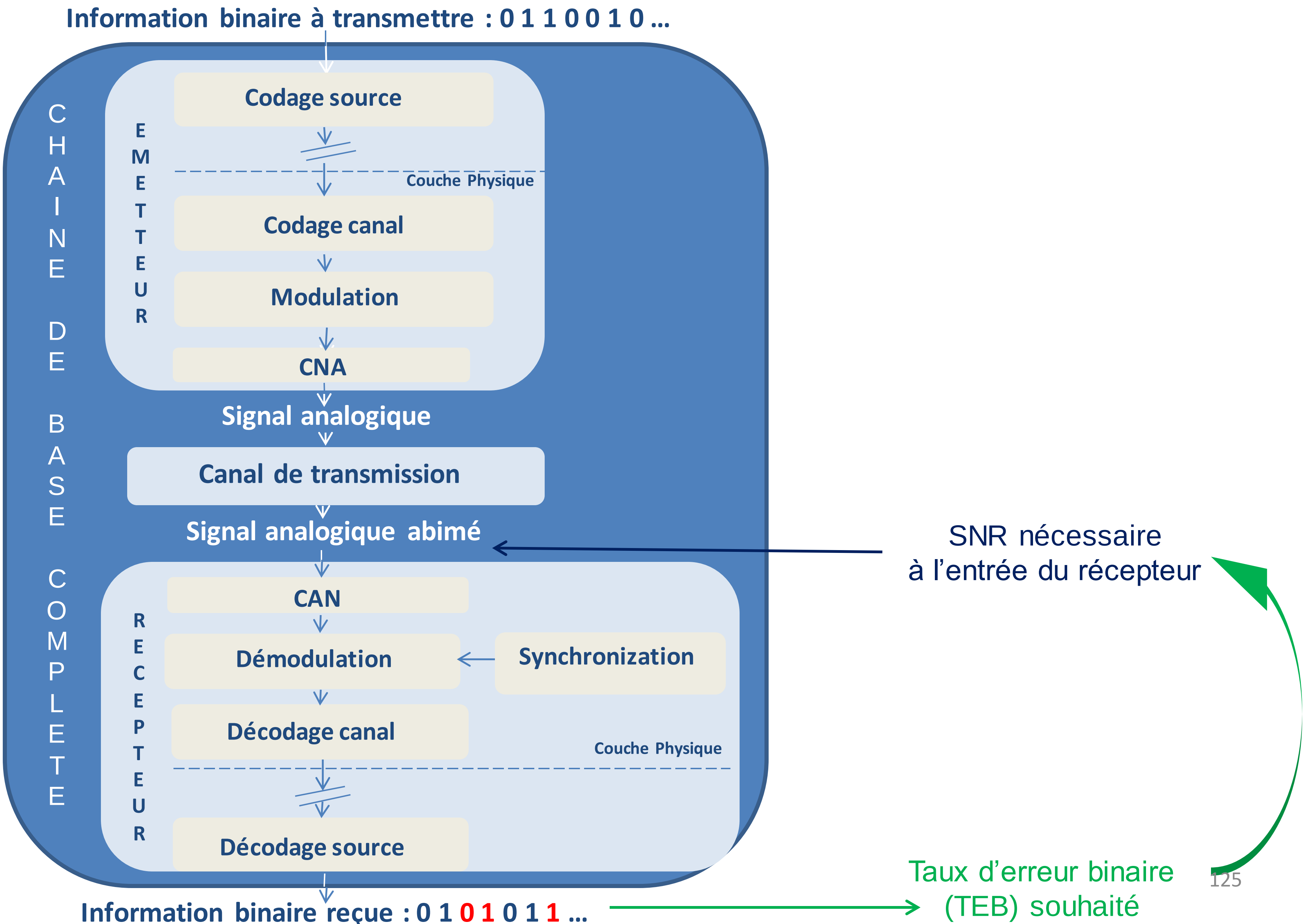
Chaine de communication numérique : **Efficacité en puissance**

Information binaire à transmettre : 0 1 1 0 0 1 0 …



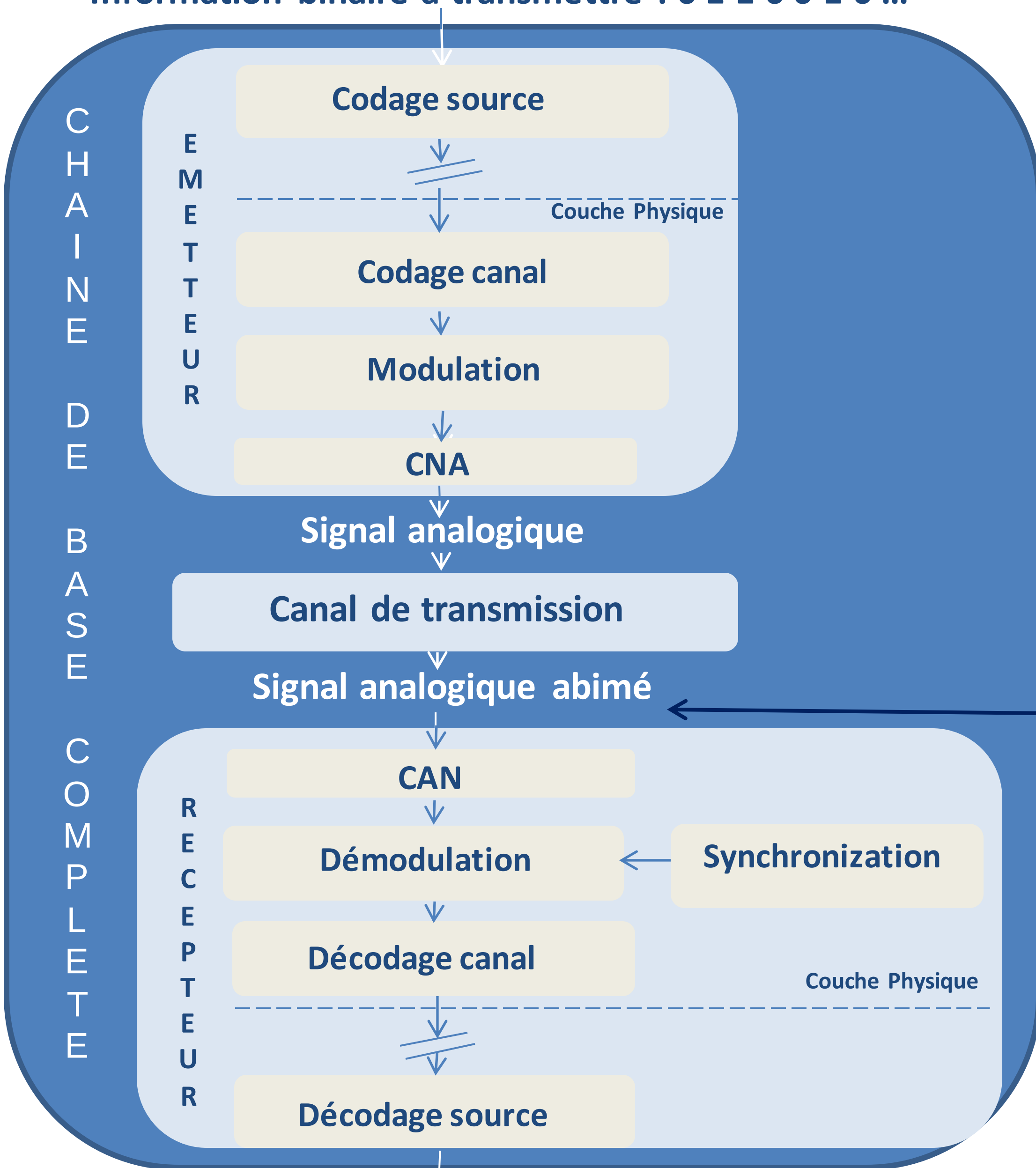
Information binaire reçue : 0 1 0 1 0 1 1 … → Taux d'erreur binaire (TEB) souhaité

Chaine de communication numérique : **Efficacité en puissance**



Chaine de communication numérique : Efficacité en puissance

Information binaire à transmettre : 0 1 1 0 0 1 0 …



Information binaire reçue : 0 1 0 1 0 1 1 …

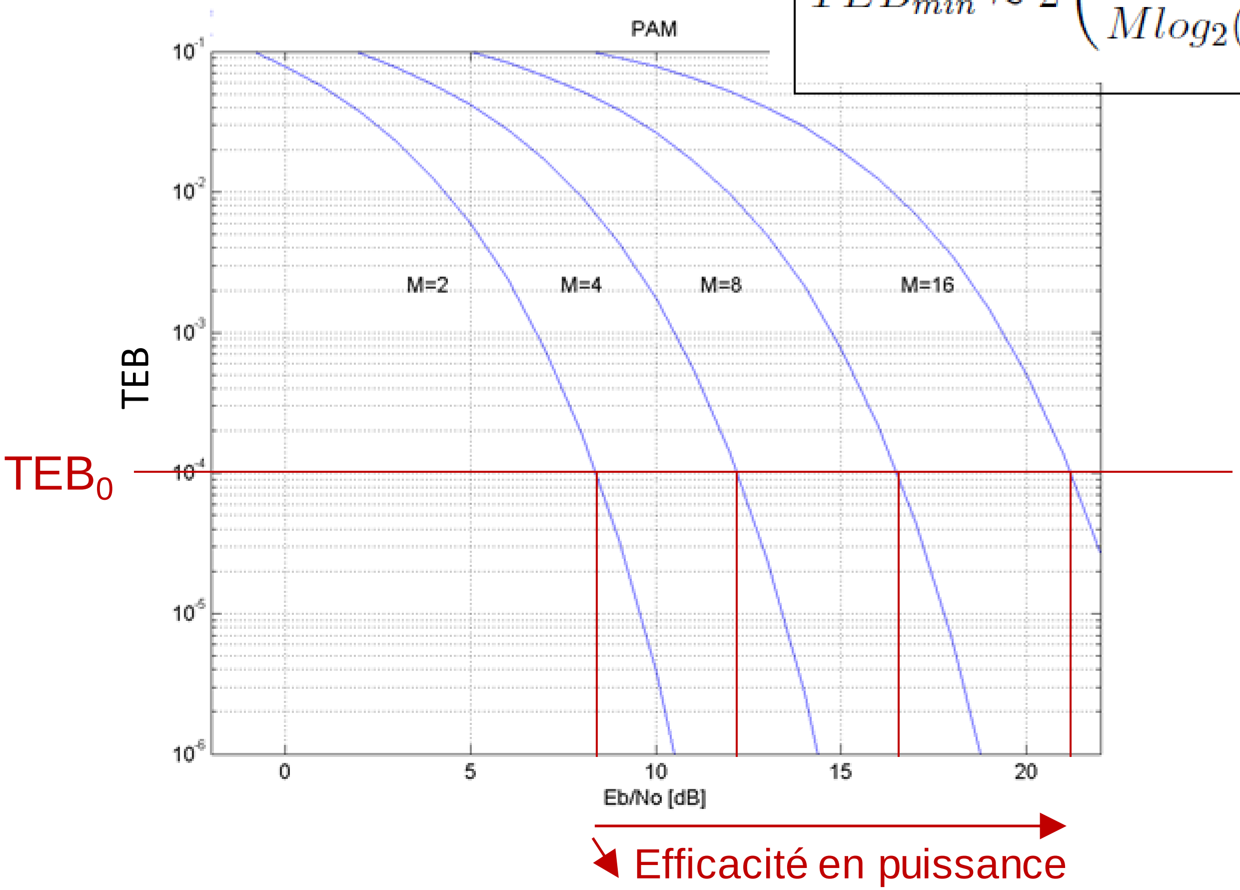
SNR nécessaire
à l'entrée du récepteur

Efficacité en puissance :
SNR par bit nécessaire à l'entrée du récepteur pour atteindre le TEB souhaité

Taux d'erreur binaire (TEB) souhaité

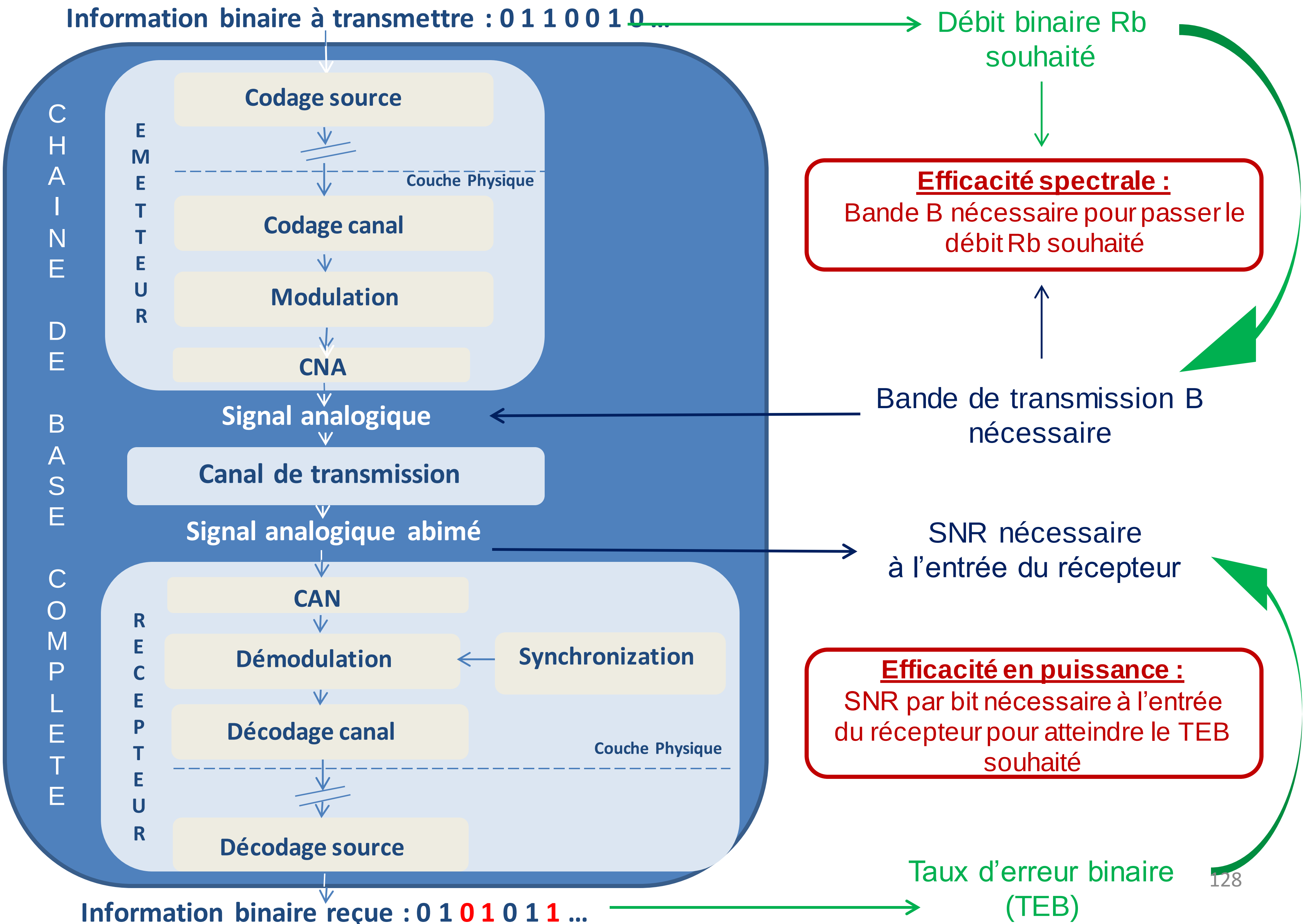
Impact du bruit dans la chaine de transmission
Efficacité en puissance de la transmission

$$TEB_{min} \approx 2\left(\frac{M-1}{M\log_2(M)}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6\log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



➡ Résultats obtenus pour une modulation bande de base M-aire (**M-PAM**), dans un **canal de Nyquist**, avec **filtrage adapté** et **mapping de Gray**

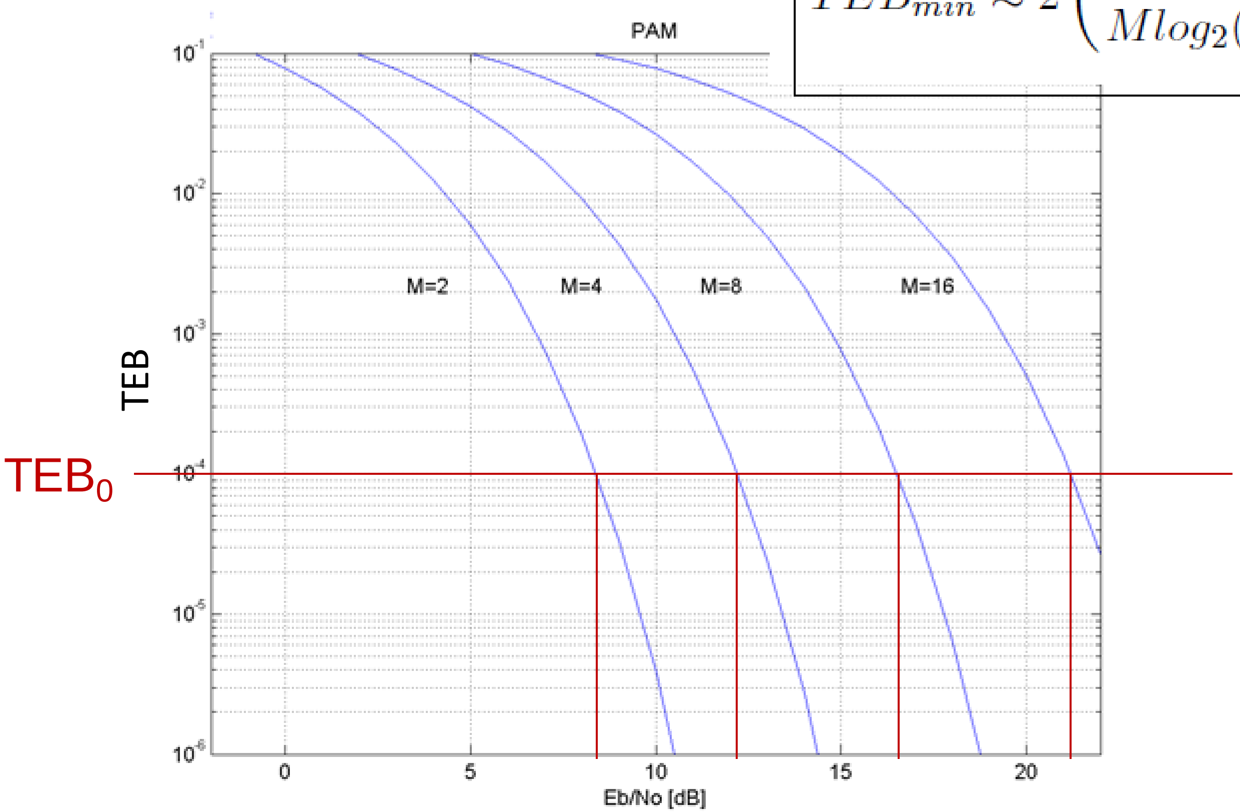
Chaine de communication numérique : **critères de performance**



Impact du bruit dans la chaine de transmission

Efficacité en puissance de la transmission

$$TEB_{min} \approx 2\left(\frac{M-1}{Mlog_2(M)}\right) Q\left(\sqrt{\frac{6log_2(M)}{M^2-1}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$



↘ Efficacité en puissance

↗ Efficacité spectrale

➡ Résultats obtenus pour une modulation bande de base M-aire (**M-PAM**), dans un **canal de Nyquist**, avec **filtrage adapté** et **mapping de Gray**