

# INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS

Première année Sciences du Numérique

2022 – 2023

## Correction du TD1

### Modulation bande de base - Efficacité spectrale d'une transmission

#### I. EXERCICE 1 : MODULATEURS BANDE DE BASE

On souhaite transmettre l'information binaire suivante : 0100101101. On va pour cela générer les signaux  $x(t)$  donnés dans les figures 1 à 5. Pour chaque signal  $x(t)$ , proposez un mapping et la réponse impulsionnelle d'un filtre de mise en forme permettant de le générer.  $T_s$  représente la période symbole.

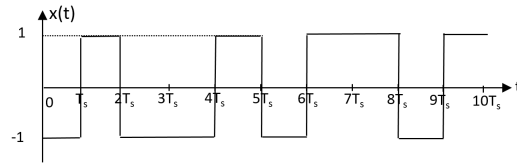


Fig. 1. Signal 1

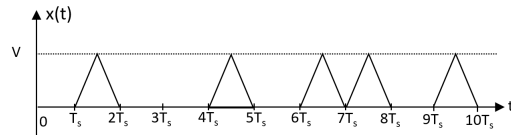


Fig. 2. Signal 2

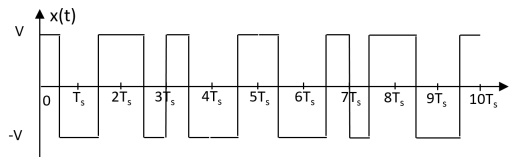


Fig. 3. Signal 3

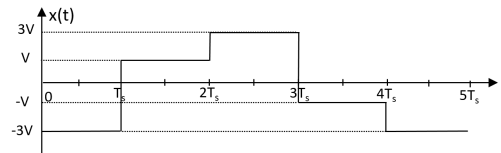


Fig. 4. Signal 4

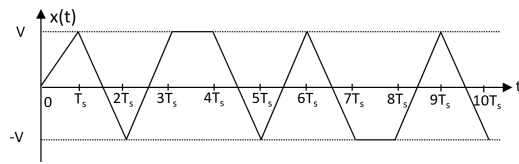


Fig. 5. Signal 5

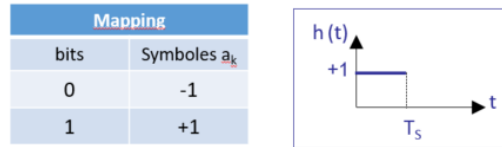


Fig. 6. Mapping et réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme associée au signal 1

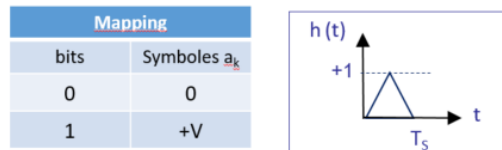


Fig. 7. Mapping et réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme associée au signal 2

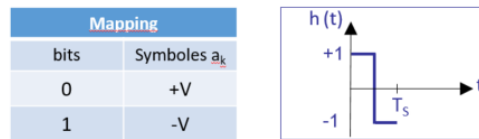


Fig. 8. Mapping et réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme associée au signal 3

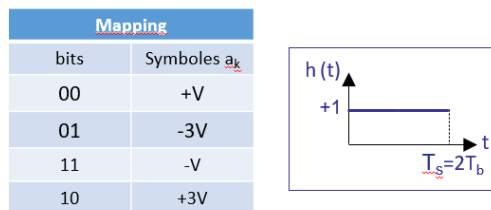


Fig. 9. Mapping et réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme associée au signal 4

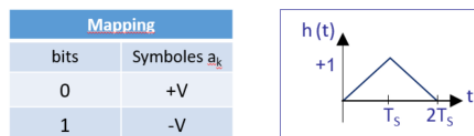


Fig. 10. Mapping et réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme associée au signal 5

## II. EXERCICE 2 : ETUDE D'UN MODULATEUR BANDE DE BASE GÉNÉRANT UN SIGNAL BIPHASE

On veut générer un signal de type biphase dans lequel les bits à 1 seront codés par un front descendant, tandis que les bits à 0 seront codés par un front montant. La période symbole sera notée  $T_s$ .

- 1) Donner un mapping et une réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme permettant de générer ce signal.

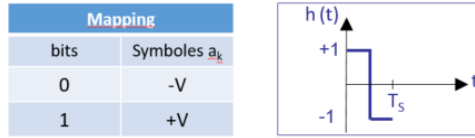


Fig. 11. Mapping et réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme associée au signal biphase

- 2) Tracer le signal biphase généré pour transmettre la suite de bits suivante : 0100100.

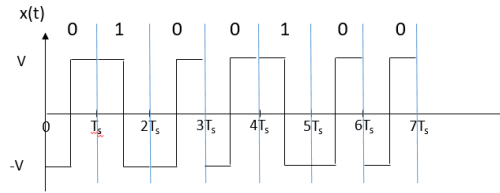


Fig. 12. Signal biphase généré pour transmettre la suite de bits suivante : 0100100

- 3) Déterminer la densité spectrale de puissance du signal biphase, en supposant que les symboles émis sont indépendants et équiprobables. Montrer qu'elle peut s'écrire de la manière suivante (en considérant des fronts montant et descendant entre +1 et -1) :

$$S_x(f) = T_s \frac{\sin^4\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)}{\left(\pi f \frac{T_s}{2}\right)^2}$$

On va utiliser l'expression générale de la densité spectrale de puissance (DSP) d'un signal de communication numérique en bande de base :

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 + 2 \frac{\sigma_a^2}{T_s} |H(f)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \Re \left[ R_a(k) e^{j2\pi f k T_s} \right] + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k \left| H\left(\frac{k}{T_s}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

et l'adapter au mapping et au filtre de mise en forme utilisés dans l'exercice (remarque :  $V = 1$ ) :

$$m_a = E[a_k] = P(a_k = -1) \times (-1) + P(a_k = +1) \times (+1) = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{2} \times (+1) = 0$$

$$\sigma_a^2 = E[a_k - m_a]^2 = E[a_k^2] = P(a_k = -1) \times |-1|^2 + P(a_k = +1) \times |1|^2 = 1$$

$$R_a(k) = 0 \quad \forall k \neq 0 \text{ (symboles indépendants)}$$

$$\begin{aligned} R_a(k) &= \frac{E[a_m^* a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} = \frac{E[a_m^*] E[a_{m-k}] - |m_a|^2}{\sigma_a^2} \text{ (independent symbols)} \\ &= \frac{|m_a|^2 - |m_a|^2}{\sigma_a^2} = 0 \end{aligned}$$

La réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme peut s'écrire :

$$h(t) = \Pi_{\frac{T_s}{2}} \left( t - \frac{T_s}{4} \right) - \Pi_{\frac{T_s}{2}} \left( t - \frac{3T_s}{4} \right)$$

ce qui permet de déterminer sa réponse en fréquence :

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{T_s}{2} \text{sinc} \left( \pi f \frac{T_s}{2} \right) e^{-j2\pi f \frac{T_s}{4}} - \frac{T_s}{2} \text{sinc} \left( \pi f \frac{T_s}{2} \right) e^{-j2\pi f \frac{3T_s}{4}} \\ &= \frac{T_s}{2} \text{sinc} \left( \pi f \frac{T_s}{2} \right) e^{-j\pi f T_s} 2j \sin \left( \pi f \frac{T_s}{2} \right) \\ &= jT_s \frac{\sin^2 \left( \pi f \frac{T_s}{2} \right)}{\pi f \frac{T_s}{2}} e^{-j\pi f T_s} \end{aligned}$$

D'où

$$S_x(f) = T_s \frac{\sin^4 \left( \pi f \frac{T_s}{2} \right)}{\left( \pi f \frac{T_s}{2} \right)^2}$$

Vous trouverez un tracé de la DSP d'un signal biphase dans les diapositives de cours.

- 4) Le signal généré est-il un signal modulé en "bande de base" ou bien "sur fréquence porteuse" ? Expliquez votre réponse.

La DSP du signal généré s'étend autour de  $f = 0$ , le signal généré ici est donc un signal bande de base.

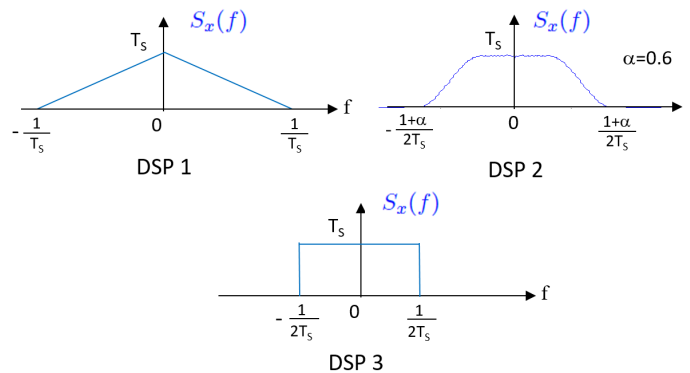
- 5) Comparer, en termes d'efficacité spectrale, le signal biphase au signal NRZ bipolaire.

Pour une même énergie conservée au signal, le signal NRZ bipolaire nécessite une bande passante plus petite, il est donc plus efficace spectralement.

### III. EXERCICE 3 : EFFICACITÉ SPECTRALE D'UNE MODULATION BANDE DE BASE

On considère les modulateurs bande de base suivants,  $T_s$  représentant la période symbole :

- Modulateur BdB 1 : Mapping binaire à moyenne nulle et filtrage de mise en forme permettant de générer un signal,  $x(t)$ , dont la densité spectrale de puissance,  $S_x(f)$  est donnée par la DSP1 de la figure suivante.
- Modulateur BdB 2 : Mapping 4-aire à moyenne nulle et filtrage de mise en forme permettant de générer un signal,  $x(t)$ , dont la densité spectrale de puissance,  $S_x(f)$  est donnée par la DSP1 de la figure suivante.
- Modulateur BdB 3 : Mapping 4-aire à moyenne nulle et filtrage de mise en forme permettant de générer un signal,  $x(t)$ , dont la densité spectrale de puissance,  $S_x(f)$  est donnée par la DSP2 de la figure suivante.
- Modulateur BdB 4 : Mapping binaire à moyenne nulle et filtrage de mise en forme permettant de générer un signal,  $x(t)$ , dont la densité spectrale de puissance,  $S_x(f)$  est donnée par la la DSP3 de la figure suivante.



- 1) Déterminer l'efficacité spectrale de la transmission pour chacun des modulateurs bande de base proposés.

L'efficacité spectrale de la transmission est définie par :

$$\eta = \frac{R_b}{B} = \frac{\log_2(M)}{k}$$

si  $R_b$  représente le débit binaire à transmettre,  $B = kR_s$  la bande occupée par le signal généré et

$$R_s = \frac{R_b}{\log_2(M)}$$

où  $M$  est l'ordre de la modulation (nombre de symboles possibles issus du mapping).

D'où les efficacités spectrales données dans le tableau suivant :

Modulateur	Ordre M de la modulation	k (B=kR <sub>s</sub> ) :	Efficacité spectrale (bits/s/Hz)
Modulateur <u>BdB 1</u>	2	1	1
Modulateur <u>BdB 2</u>	4	1	2
Modulateur <u>BdB 3</u>	4	0,8	2,5
Modulateur <u>BdB 4</u>	2	0,5	2

- 2) Identifier les éléments qui permettent d'améliorer l'efficacité spectrale de la transmission.

Augmenter l'ordre  $M$  de la modulation permet d'augmenter l'efficacité spectrale, de même que choisir un filtre de mise en forme bien localisé en fréquence (avec un coefficient  $k$  petit).