

Traitement du Signal

Jean-Yves Tourneret⁽¹⁾ et Charly Poulliat⁽²⁾

(1) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT-TéSA

jyt@n7.fr

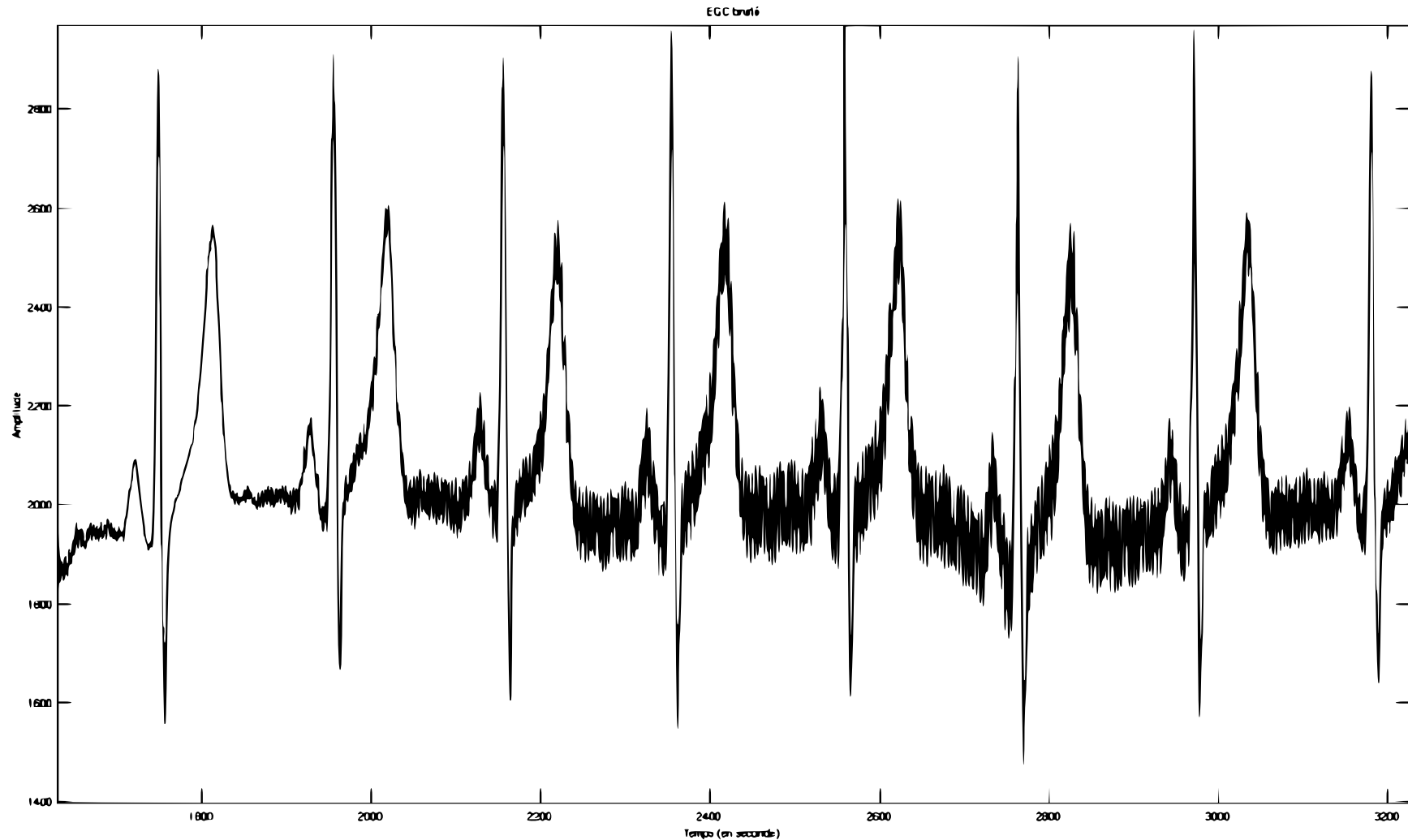
(2) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT

charly.poulliat@enseeiht.fr

Bibliographie

- J. Max et J.-L. Lacoume, Méthodes et techniques de traitement du signal, Dunod, 5ème édition, 2004.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.

Électrocardiogramme



Lena



Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres

- Transformée de Fourier

- Classes de signaux déterministes et aléatoires

- Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$

- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire

- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Transformée de Fourier

- Définitions

- Formule directe

$$X(f) = \int_{\mathbb{R}} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

- Formule inverse

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} X(f) \exp(j2\pi ft) df$$

- Hypothèses

TF sur L^1 ou L^2

Propriétés

• Linéarité

$$\text{TF} [ax(t) + by(t)] = aX(f) + bY(f)$$

• Parité $x(t)$ réelle paire $\Rightarrow X(f)$ réelle paire

• Translation et Modulation

$$\text{TF} [x(t - t_0)] = \exp(-j2\pi f t_0) X(f)$$

$$\text{TF} [x(t) \exp(j2\pi f_0 t)] = X(f - f_0)$$

• Similitude

$$\text{TF} [x(at)] = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$$

Propriétés

• Produits de Convolution

• Définition

$$\begin{aligned}y(t) &= (h * x)(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau\end{aligned}$$

• TF

$$\text{TF} [x(t) * y(t)] = X(f)Y(f)$$

$$\text{TF} [x(t)y(t)] = X(f) * Y(f)$$

• Égalite de Parseval

$$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$$

Distributions

• Localisation

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Produit de convolution:

• Produit de Convolution

$$x(t) * y(t) = x(t) y(t)$$

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

• Transformées de Fourier

$$\text{TF} [\delta(t)] = 1, \text{TF} [1] = \delta(f)$$

$$\text{TF} [\delta(t - t_0)] = \exp(-j2\pi f t_0), \text{TF} [\exp(j2\pi f_0 t)] = \delta(f - f_0)$$

Résumé des propriétés

T.F.

$ax(t) + by(t)$	\Rightarrow	$aX(f) + bY(f)$
$x(t - t_0)$	\Rightarrow	$X(f)e^{-i2\pi ft_0}$
$x(t)e^{+i2\pi f_0 t}$	\Rightarrow	$X(f - f_0)$
$x^*(t)$	\Rightarrow	$X^*(-f)$
$x(t) \cdot y(t)$	\Rightarrow	$X(f) * Y(f)$
$x(t) * y(t)$	\Rightarrow	$X(f) \cdot Y(f)$
$x(at + b)$	\Rightarrow	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{f}{a}\right) e^{i2\pi \frac{b}{a} f}$
$\frac{dx^{(n)}(t)}{dt^n}$	\Rightarrow	$(i2\pi f)^n X(f)$
$(-i2\pi t)^n x(t)$	\Rightarrow	$\frac{dX^{(n)}(f)}{df^n}$

Formule de Parseval	Série de Fourier
$\int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt = \int_{\mathbb{R}} X(f)Y^*(f)df$	$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{+i2\pi n f_0 t} \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta(f - nf_0)$
$\int_{\mathbb{R}} x(t) ^2 dt = \int_{\mathbb{R}} X(f) ^2 df$	

Tables

Impulsion de
Dirac

T.F.		
1	\rightleftharpoons	$\delta(f)$
$\delta(t)$	\rightleftharpoons	1
$e^{+i2\pi f_0 t}$	\rightleftharpoons	$\delta(f - f_0)$
$\delta(t - t_0)$	\rightleftharpoons	$e^{-i2\pi f t_0}$
$\text{III}_T(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$	\rightleftharpoons	$\frac{1}{T} \text{III}_{1/T}(f)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	\rightleftharpoons	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\sin(2\pi f_0 t)$	\rightleftharpoons	$\frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$e^{-a t }$	\rightleftharpoons	$\frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 f^2}$
$e^{-\pi t^2}$	\rightleftharpoons	$e^{-\pi f^2}$
$\Pi_T(t)$	\rightleftharpoons	$T \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} = T \text{sinc}(\pi T f)$
$\Lambda_T(t)$	\rightleftharpoons	$T \text{sinc}^2(\pi T f)$
$B \text{sinc}(\pi B t)$	\rightleftharpoons	$\Pi_B(f)$
$B \text{sinc}^2(\pi B t)$	\rightleftharpoons	$\Lambda_B(f)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres

- Transformée de Fourier

- Classes de signaux déterministes et aléatoires

- Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$

- Chapitre 2 : Échantillonnage

- Chapitre 3 : Filtrage Linéaire

- Chapitre 4 : Traitements Non-linéaires

Classes de signaux déterministes et aléatoires

(Pas aléatoires)

- Classe 1 : signaux déterministes à énergie finie
- Classe 2 : signaux déterministes périodiques à puissance finie
- Classe 3 : signaux déterministes non périodiques à puissance finie
- Classe 4 : signaux aléatoires stationnaires

Signaux déterministes à énergie finie

• **Définition** $E = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |X(f)|^2 df < \infty$

• **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)x^*(t - \tau)dt = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

• **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t - \tau)dt = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$$

• **Produit scalaire**

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t)y^*(t)dt$$

Densité spectrale d'énergie

● Définition

$$s_x(f) = \text{TF} [R_x(\tau)]$$

● Propriété

$$s_x(f) = |X(f)|^2$$

● Preuve

$$\begin{aligned} s_x(f) &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x(t) x^*(t - \tau) dt \right] \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(t - \tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau \right] x(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} x^*(u) \exp[j2\pi f(u - t)] du \right] x(t) dt \\ &= X^*(f) X(f) \end{aligned}$$

Exemple

• Fenêtre rectangulaire

$$x(t) = \Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

• Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = T\Lambda_T(\tau)$$

• Densité spectrale d'énergie

$$s_x(f) = T^2 \text{sinc}^2(\pi T f) = |X(f)|^2$$

Signaux déterministes périodiques

- **Définition** $P = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt < \infty$

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)x^*(t - \tau)dt = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t - \tau)dt = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$$

- **Produit scalaire**

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)y^*(t)dt$$

Densité spectrale de puissance

• Définition

$$s_x(f) = \text{TF} [R_x(\tau)]$$

• Propriété

$$s_x(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \delta(f - k f_0)$$

avec $x(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(j2\pi k f_0 t)$.

• Preuve

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \sum_{k,l} c_k c_l^* \exp(j2\pi l f_0 \tau) \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \exp[j2\pi(k-l)f_0 t] dt \right] \\ &= \sum_k |c_k|^2 \exp(j2\pi k f_0 \tau) \end{aligned}$$

Exemple

- Sinusoïde

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$$

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Signaux déterministes à puissance finie

- **Définition** $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty$

- **Fonction d'autocorrélation**

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x^*(t - \tau) dt = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

- **Fonction d'intercorrélation**

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t - \tau) dt = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$$

- **Produit scalaire**

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y^*(t) dt$$

Densité spectrale de puissance

● Définition

$$s_x(f) = \text{TF} [R_x(\tau)]$$

● Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(f)|^2$$

avec

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

● Exemple

$$x(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t) + A_2 \cos(2\pi f_2 t)$$

avec f_1 et f_2 non commensurables.

Signaux aléatoires stationnaires

- Définition

- Moyenne : $E[x(t)]$ indépendant de t

- Moment d'ordre 2 : $E[x(t)x^*(t - \tau)]$ indépendant de t

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = E[x(t)x^*(t - \tau)] = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$$

- Fonction d'intercorrélation

$$E[x(t)y^*(t - \tau)] = \langle x(t), y(t - \tau) \rangle$$

- Produit scalaire

$$\langle x(t), y(t) \rangle = E[x(t)y^*(t)]$$

Remarques : stationnarité au sens strict, large, à l'ordre deux, tests de stationnarité.

Stationnaire ou non ?

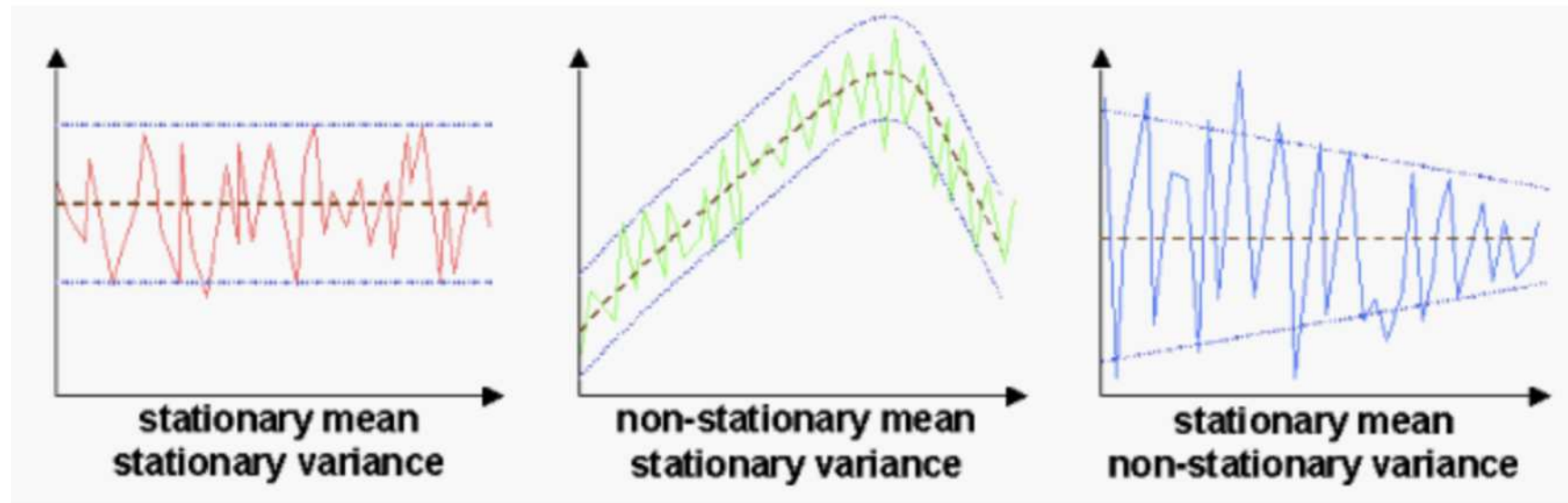


Figure 2: Constancy in mean and variance.

<https://towardsdatascience.com/stationarity-in-time-series-analysis-90c94f27322>

Densité spectrale de puissance

- Puissance moyenne

$$P = R_x(0) = E [|x(t)|^2] = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) df$$

- Densité spectrale de puissance

- Définition

$$s_x(f) = \text{TF} [R_x(\tau)]$$

- Propriété

$$s_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [|X_T(f)|^2]$$

mais en général $X(f)$ n'existe pas !

Exemples

● Exemple 1 : Sinusoïde

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$$

θ va uniforme sur $[0, 2\pi]$.

● Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

● Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$$

Exemples

- Exemple 2 : Bruit blanc

- Fonction d'autocorrélation

$$R_x(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

- Densité spectrale de puissance

$$s_x(f) = \frac{N_0}{2}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres

- Transformée de Fourier

- Classes de signaux déterministes et aléatoires

- Propriétés de $R_x(\tau)$ et de $s_x(f)$

- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire

- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Propriétés de $R_x(\tau)$

- **Symétrie Hermitienne** : $R_x^*(-\tau) = R_x(\tau)$
- **Valeur maximale** : $|R_x(\tau)| \leq R_x(0)$
- **Distance entre $x(t)$ et $x(t - \tau)$** : si $x(t)$ est un signal réel

$$d^2 [x(t), x(t - \tau)] = 2 [R_x(0) - R_x(\tau)]$$

Donc $R_x(\tau)$ mesure le lien entre $x(t)$ et $x(t - \tau)$.

- **Décomposition de Lebesgue** : dans la quasi-totalité des applications, on a

$$R_x(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$$

où $R_1(\tau)$ est une somme de fonctions périodiques et $R_2(\tau)$ tend vers 0 lorsque $\tau \rightarrow \infty$.

Propriétés de $s_x(f)$

- **DSP réelle**

$$s_x(f) \in \mathbb{R}$$

De plus, si $x(t)$ signal réel, $s_x(f)$ **réelle paire**

- **Positivité** : $s_x(f) \geq 0$

- **Lien entre DSP et puissance/énergie**

$$P \text{ ou } E = R_x(0) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) df$$

- **Décomposition** : dans la plupart des applications, on a $s_x(f) = s_1(f) + s_2(f)$, où $s_1(f)$ est un spectre de **raies** et $s_2(f)$ un spectre **continu** (cas général : partie **singulière**).

Que faut-il savoir ?

- **Reconnaître** si un signal est à énergie finie, à puissance finie périodique ou aléatoire.
- Qu'est ce qu'un signal aléatoire **stationnaire** ?
- Les différentes définitions d'une **fonction d'autocorrélation** $R_x(\tau)$
- La définition **unifiée** d'une **densité spectrale** : $s_x(f) = ?$
- Les différentes définitions d'une **densité spectrale**
- Ce qu'est un **bruit blanc**
- Ce qu'est un **bruit gaussien**
- Propriétés de $R_x(\tau)$
- Propriétés de $s_x(f)$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
 - Introduction
 - Relations de Wiener-Lee
 - Formule des interférences
 - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Introduction

On cherche une opération avec les propriétés suivantes

- **Linéarité** : $T [a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 T [x_1(t)] + a_2 T [x_2(t)]$

- **Invariance dans le temps**

Si $y(t) = T [x(t)]$ alors $T [x(t - t_0)] = y(t - t_0)$

- **Stabilité BIBO**

Si $|x(t)| \leq M_x$ alors il existe M_y tel que

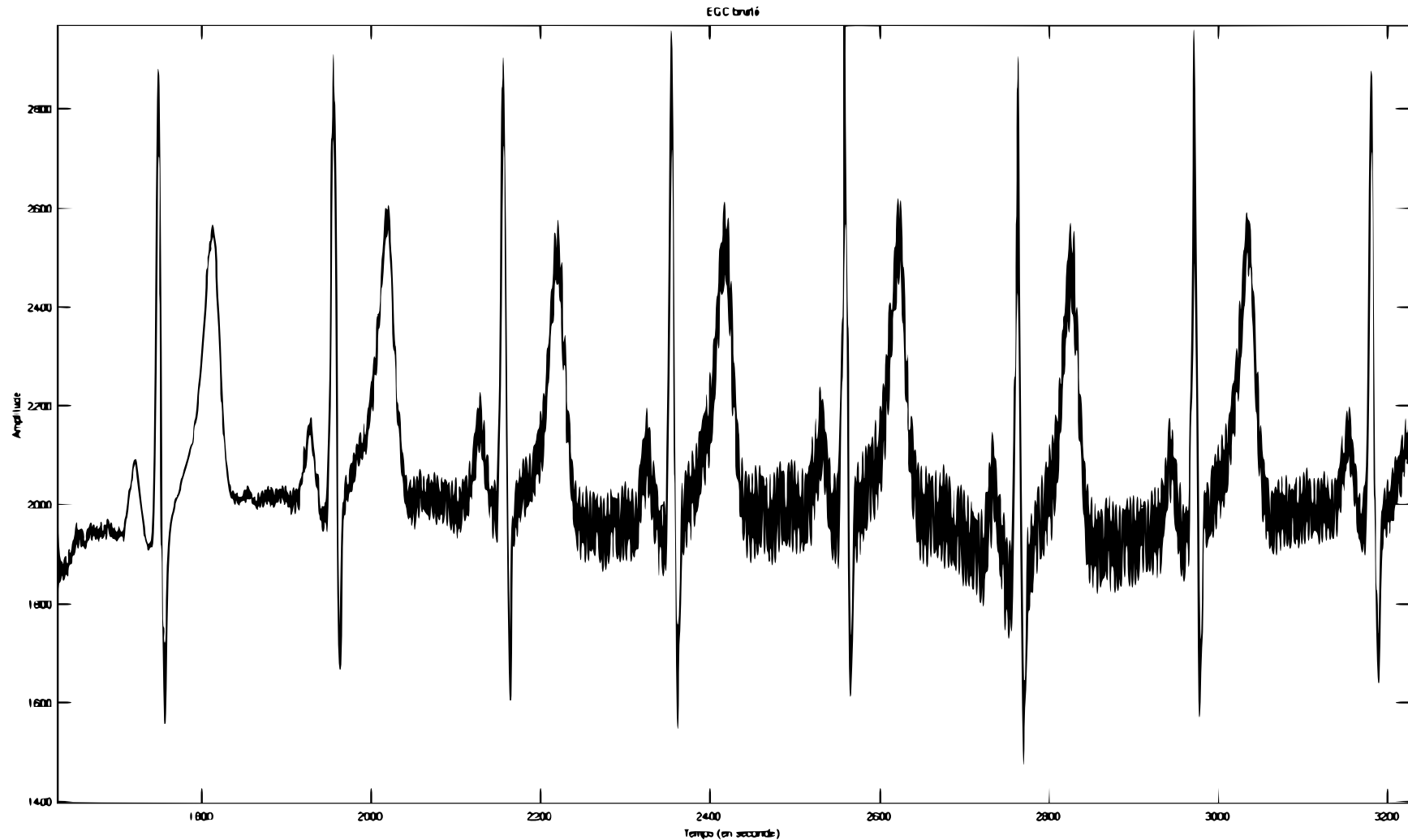
$$|y(t)| = |T [x(t)]| \leq M_y$$

- **“Limitation” du spectre d’un signal**

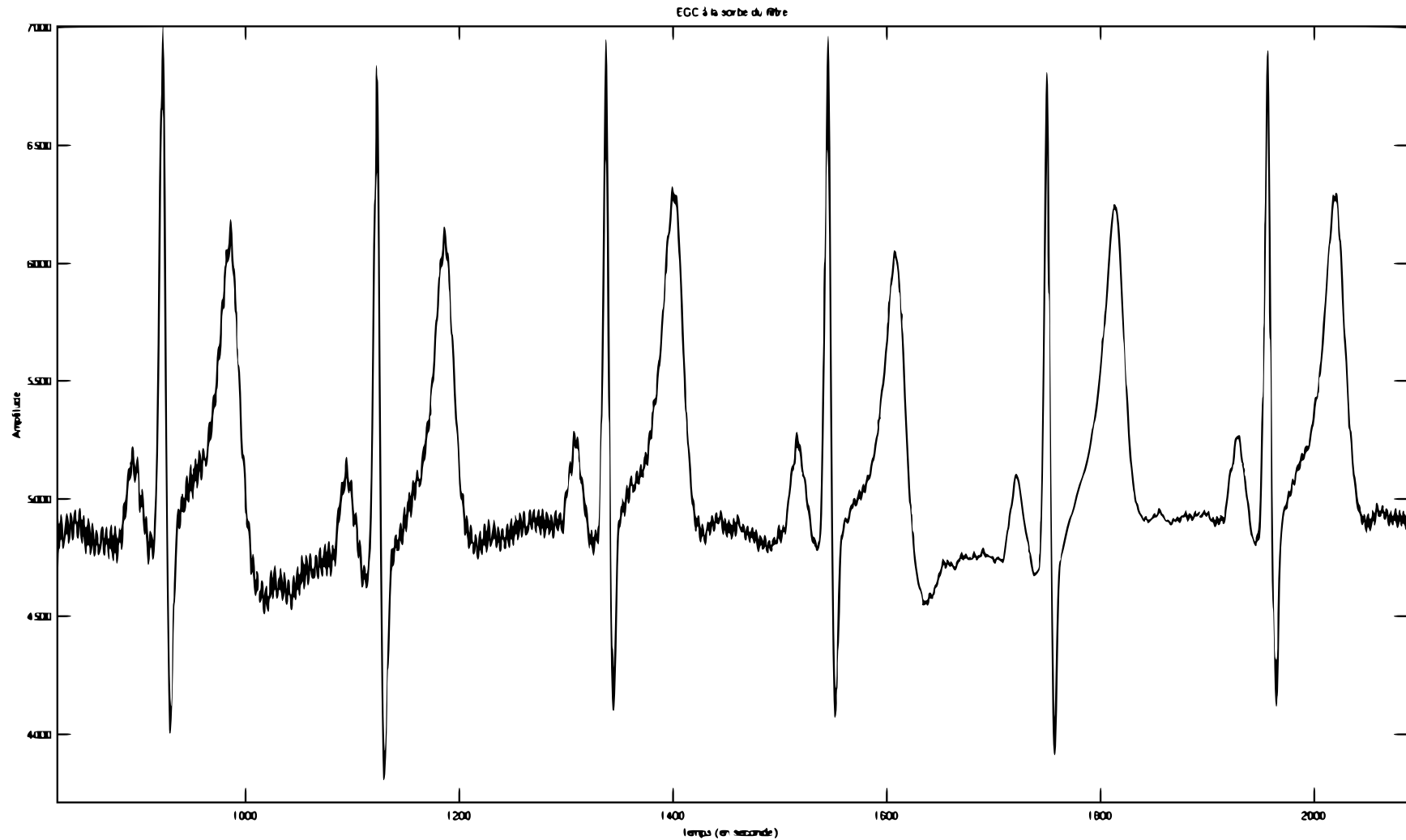
- ☞ **Convolution**

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u) h(t - u) du = h(t) * x(t)$$

ECG avant filtrage



ECG après filtrage



Commentaires

- La **linéarité** ne suffit pas. Contre-exemple

$$y(t) = m(t)x(t)$$

- CNS de **Stabilité BIBO**

$$\int_{\mathbb{R}} |h(t)| dt < \infty, \text{ i.e., } h \in L^1$$

- Réponse impulsionnelle et Transmittance**

$$H(f) = \text{TF} [h(t)] = \int_{\mathbb{R}} h(t) \exp(-j2\pi ft) dt$$

Si $x(t) = \delta(t)$ alors $y(t) = h(t)$. Ceci permet d'obtenir la seule réponse impulsionnelle possible.

Réalisabilité d'un filtre

• Domaine temporel

- (1) $h(t)$ réelle
- (2) $h(t) \in L^1$ (stabilité)
- (3) $h(t)$ causale (filtre sans mémoire)

• Domaine spectral

- (1) Symétrie hermitienne : $H^*(-f) = H(f)$
- (2) ne peut se traduire
- (3) $H(f) = -j\tilde{H}(f)$, où $\tilde{H}(f) = H(f) * \frac{1}{\pi f}$ est la transformée de Hilbert de H (preuve dans le cours manuscrit).

Écriture équivalente

En écrivant $H(f) = H_r(f) + jH_i(f)$, on obtient

$$H_r(f) = H_i(f) * \frac{1}{\pi f}$$

$$H_i(f) = - H_r(f) * \frac{1}{\pi f}$$

Identifier une relation de filtrage linéaire

● Signaux déterministes

$$y(t) = x(t) * h(t) \Leftrightarrow Y(f) = X(f)H(f)$$

● Signaux aléatoires : Isométrie fondamentale

$$\text{Si } x(t) \stackrel{I}{\longleftrightarrow} e^{j2\pi ft}, \text{ alors } y(t) \stackrel{I}{\longleftrightarrow} e^{j2\pi ft} H(f)$$

● Exemples

$$\bullet y(t) = \sum_{k=1}^n a_k x(t - t_k)$$

$$\bullet y(t) = x'(t)$$

$$\bullet y(t) = x(t)m(t)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
 - Introduction
 - Relations de Wiener-Lee
 - Formule des interférences
 - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Relations de Wiener Lee

- Densité spectrale de puissance

$$s_y(f) = s_x(f) |H(f)|^2$$

- Intercorrélation

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)$$

- Autocorrélation

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h^*(-\tau)$$

Preuves (signaux à énergie finie)

• Densité spectrale d'énergie

$$s_y(f) = |Y(f)|^2 = |X(f)H(f)|^2 = s_x(f)|H(f)|^2$$

• Intercorrélation

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \int_{\mathbb{R}} y(u)x^*(u - \tau)du \\ &= \int_{\mathbb{R}} Y(f) [e^{-j2\pi f\tau} X(f)]^* df \\ &= \int_{\mathbb{R}} X(f)H(f) [e^{j2\pi f\tau} X^*(f)] df \\ &= \int_{\mathbb{R}} s_x(f)H(f)e^{j2\pi f\tau} df = \text{TF}^{-1}[s_x(f)H(f)] \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Preuve (signaux à puissance finie)

• Intercorrélation

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} y(t) x^*(t - \tau) dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \left[\int_{\mathbb{R}} h(v) x(t - v) dv \right] x^*(t - \tau) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(v) \left[\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t - v) x^*(t - \tau) dt \right] dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} h(v) R_x(\tau - v) dv \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

• etc ...

Preuves (signaux aléatoires)

● Intercorrélation

$$\begin{aligned} R_{yx}(\tau) &= E[y(t)x^*(t - \tau)] \\ &= \langle y(t), x(t - \tau) \rangle \\ &= \langle e^{j2\pi ft} H(f), e^{j2\pi f(t-\tau)} \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft} H(f) e^{-j2\pi f(t-\tau)} s_X(f) df \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(f) e^{j2\pi f\tau} s_X(f) df \\ &= h(\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Preuves (signaux aléatoires)

● Autocorrélation

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= E[y(t)y^*(t - \tau)] \\ &= \langle y(t), y(t - \tau) \rangle \\ &= \langle e^{j2\pi ft} H(f), e^{j2\pi f(t-\tau)} H(f) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{j2\pi ft} H(f) e^{-j2\pi f(t-\tau)} H^*(f) s_x(f) df \\ &= \int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_x(f) e^{j2\pi f\tau} df \\ &= \text{TF}^{-1} \{ s_x(f) |H(f)|^2 \} \\ &= h(\tau) * h^*(-\tau) * R_x(\tau) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Preuves (signaux aléatoires)

• Autocorrélation

$$R_y(\tau) = \text{TF}^{-1}\{s_x(f)|H(f)|^2\}$$

• Densité Spectrale de Puissance

$$s_y(f) = s_x(f)|H(f)|^2 \quad \text{CQFD}$$

Valeur moyenne

• Propriété

$$E[Y(t)] = E[X(t)]H(0)$$

• Preuve

$$\begin{aligned} E[Y(t)] &= E \left[\int_{\mathbb{R}} X(t-u)h(u)du \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} E[X(t-u)]h(u)du \\ &= E[X(t)] \int_{\mathbb{R}} h(u)du \quad (\text{signal stationnaire}) \\ &= E[X(t)]H(0) \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
 - Introduction
 - Relations de Wiener-Lee
 - Formule des interférences
 - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Formule des interférences

• Hypothèses

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t) \text{ et } y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

• Conclusion

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \int_{\mathbb{R}} s_x(f) H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f \tau} df$$

• Preuve (signaux à énergie finie)

$$\begin{aligned} R_{y_1 y_2}(\tau) &= \int y_1(t) y_2^*(t - \tau) dt = \int_{\mathbb{R}} Y_1(f) [Y_2(f) e^{-j2\pi f \tau}]^* df \\ &= \int_{\mathbb{R}} H_1(f) H_2^*(f) e^{j2\pi f \tau} s_x(f) df \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
 - Introduction
 - Relations de Wiener-Lee
 - Formule des interférences
 - Exemples
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires

Exemples

- **Filtre Passe-bas**
 - Transmittance

$$H(f) = \Pi_F(f)$$

- Réponse impulsionnelle

$$h(t) = F \operatorname{sinc}(\pi F t)$$

non causale et $\notin L^1 \Rightarrow$ troncature + décalage

- **Filtres liaisons montante et descendante** d'une chaîne de transmission

Filtre adapté : maximisation du SNR

● Signal observé

$$x(t) = s(t) + n(t), \quad t \in [0, T]$$

$s(t)$ signal déterministe à énergie finie et $n(t)$ signal aléatoire stationnaire de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $s_n(f)$.

● Filtrage

$$y(t) = y_s(t) + y_n(t) = s(t) * h(t) + n(t) * h(t)$$

● Rapport signal sur bruit à l'instant $t = t_0$

$$\text{SNR}(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_n^2(t_0)]}$$

Expression équivalente du SNR

$$SNR(t_0) = \frac{y_s^2(t_0)}{E[y_n^2(t_0)]} = \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} H(f) S(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_n(f) df}$$

• Numérateur

$$y_s(t) = TF^{-1} [S(f)H(f)] = \int_{\mathbb{R}} H(f) S(f) e^{j2\pi f t} df$$

• Dénominateur

• Wiener Lee

$$s_{y_n}(f) = s_n(f) |H(f)|^2$$

• Puissance

$$P_{y_n} = E[y_n^2(t_0)] = R_{y_n}(0) = \int_{\mathbb{R}} s_n(f) |H(f)|^2 df$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\left| \int_{\mathbb{R}} a(f) b^*(f) df \right|^2 \leq \int_{\mathbb{R}} a(f) a^*(f) df \int_{\mathbb{R}} b(f) b^*(f) df$$

• Numérateur

$$\left| \int_{\mathbb{R}} H(f) S(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} a(f) b^*(f) df \right|^2$$

avec $a(f) = \sqrt{s_n(f)} H(f)$ et $b(f) = \frac{S^*(f)}{\sqrt{s_n(f)}} e^{-j2\pi f t_0}$.

• Dénominateur

$$\int_{\mathbb{R}} s_n(f) |H(f)|^2 df = \int_{\mathbb{R}} a(f) a^*(f) df$$

Expression du filtre adapté

● Cauchy-Schwartz

$$SNR(t_0) = \frac{\left| \int_{\mathbb{R}} H(f) S(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^2 s_n(f) df} \leq \int_{\mathbb{R}} b(f) b^*(f) df$$

avec égalité pour $a(f) = kb(f)$, i.e.,

$$H(f) = k \frac{S^*(f)}{s_n(f)} e^{-j2\pi f t_0}$$

● Cas d'un bruit blanc

$$H(f) = K S^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \Leftrightarrow h(t) = K s^*(t_0 - t)$$

Symétrie oy + Translation

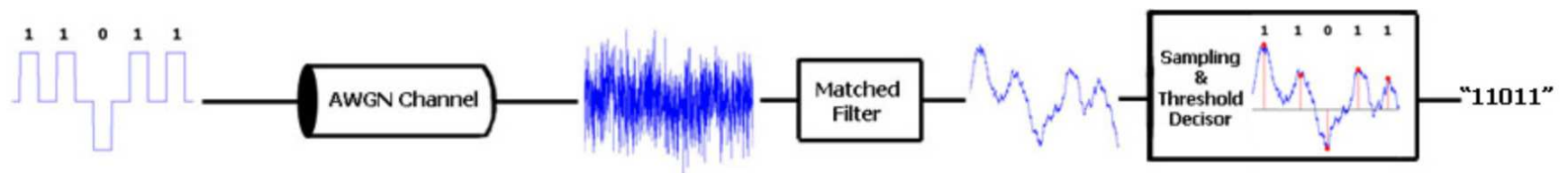
SNR maximum

● Définition

$$SNR(t_0)^{\max} = \int_{\mathbb{R}} b(f)b^*(f)df = \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{N_0} |S(f)|^2 df = \frac{2E}{N_0}$$

où E est l'énergie du signal. On voit donc que le rapport signal à bruit maximal ne dépend pas de la forme du signal mais uniquement de son **énergie**.

● Page wikipedia Matched Filter



Que faut-il savoir ?

- Reconnaître une relation de filtrage linéaire
- Densité spectrale de puissance de la sortie d'un filtre
- Intercorrélation entre l'entrée et la sortie d'un filtre
- Moyenne de la sortie d'un filtre
- Formule des interférences
- Réponse impulsionnelle causale et $\in L^1$, sinon ...

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
 - Introduction
 - Quadrateur
 - Quantification

Introduction

- Transformation sans mémoire

$$y(t) = g[x(t)]$$

- Exemples

- Quadrateur

$$y(t) = x^2(t)$$

- Quantification

$$y(t) = x_Q(t)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
 - Introduction
 - Quadrateur
 - Quantification

Quadratureur

- Signaux déterministes

$$Y(f) = X(f) * X(f)$$

- Exemples

- Sinusoïde : $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$

$$Y(f) = \frac{A^2}{2} \delta(f) + \frac{A^2}{4} [\delta(f - 2f_0) + \delta(f + 2f_0)]$$

Disparition de la fréquence f_0 et apparition de la fréquence $2f_0$

- Somme de sinusoïdes : Termes d'intermodulation

- Sinus cardinal : doublement de la largeur de bande

Signal aléatoire gaussien

● Définition

On dit qu'un signal aléatoire $X(t)$ est gaussien si pour tout ensemble d'instants (t_1, \dots, t_n) , le vecteur $[X(t_1), \dots, X(t_n)]^T$ est un vecteur gaussien de \mathbb{R}^n .

● Loi univariée de $X(t)$

La loi de $X(t)$ est alors une loi gaussienne de densité

$$p[X(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{[X(t) - m(t)]^2}{2\sigma^2(t)} \right\}.$$

Si le signal $X(t)$ est stationnaire au sens large alors

$$m(t) = E[X(t)] = m, \text{ et } \sigma^2(t) = E[X^2(t)] - E^2[X(t)] = R_X(0) - m^2.$$

donc les paramètres de la densité de $X(t)$ sont indépendants du temps.

Signal aléatoire gaussien

● Loi bivariable de $[X(t), X(t - \tau)]$

La loi du vecteur $\mathbf{V}(t) = [X(t), X(t - \tau)]^T$ est alors une loi gaussienne de \mathbb{R}^2 de densité

$$p[x(t), x(t - \tau)] = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\boldsymbol{\Sigma}(t)|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [\mathbf{V}(t) - \mathbf{m}(t)]^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(t) [\mathbf{V}(t) - \mathbf{m}(t)] \right\}.$$

où $\mathbf{m}(t) = [m_1(t), m_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur moyenne, avec $m_1(t) = E[X(t)]$ and $m_2(t) = E[X(t - \tau)]$, et $\boldsymbol{\Sigma}(t) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est la matrice de covariance définie par

$$\boldsymbol{\Sigma}(t) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2(t, \tau) & \sigma_{1,2}(t, \tau) \\ \sigma_{1,2}(\tau) & \sigma_2^2(t, \tau) \end{pmatrix}$$

où $\sigma_1^2(t, \tau)$ et $\sigma_2^2(t, \tau)$ sont les variances de $X(t)$ et de $X(t - \tau)$ et $\sigma_{1,2}(t, \tau)$ est la covariance $[X(t), X(t - \tau)]^T$. Si le signal $X(t)$ est stationnaire au sens large alors

$$\sigma_i(t, \tau) = R_X(0) - m^2 \text{ et } \sigma_{1,2}(t, \tau) = E[X(t)X(t - \tau)] - E[X(t)]E[X(t - \tau)] = R_X(\tau) - m^2.$$

donc les paramètres de la densité de $\mathbf{V}(t)$ sont indépendants du temps.

Stationnarité de $Y(t) = g[X(t)]$

Si $X(t)$ est un signal aléatoire stationnaire, alors pour toute non-linéarité g , $Y(t)$ est également un signal aléatoire stationnaire. En effet

📌 Moyenne

$$E[Y(t)] = E\{g[X(t)]\} = \int g[x(t)]p[x(t)]dx(t).$$

Comme les paramètres de $p[x(t)]$ ne dépendent que de $R_X(0)$ et de m , $E[Y(t)]$ est une quantité indépendante de t .

📌 Fonction d'autocorrélation

$$E[Y(t)Y(t-\tau)] = \int \int g[x(t)]g[x(t-\tau)]p[x(t), x(t-\tau)]dx(t)dx(t-\tau).$$

Comme les paramètres de $p[x(t), x(t-\tau)]$ ne dépendent que de $R_X(\tau)$, $R_X(0)$ et de m , $E[Y(t)Y(t-\tau)]$ est une quantité indépendante de t .

Le signal $Y(t)$ est donc **stationnaire au sens large**. Sa moyenne dépend de $R_X(0)$ et de m et sa fonction d'autocorrélation dépend de $R_X(\tau)$, $R_X(0)$ et de m .

Quadrateur pour signaux aléatoires

- Théorème de Price

- Hypothèses

- (X_1, X_2) vecteur Gaussien de vecteur moyenne nul

- $Y_1 = g(X_1)$ et $Y_2 = g(X_2)$

- Conclusion

$$\frac{\partial E(Y_1 Y_2)}{\partial E(X_1 X_2)} = E \left(\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \right)$$

- Application au quadrateur

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + K$$

Détermination de K

• Moments d'une loi Gaussienne centrée

$$E(X^{2n+1}) = 0, \quad E(X^{2n}) = [(2n-1) \times (2n-3) \dots \times 3 \times 1] \sigma^{2n}$$

• $\tau = 0$

$$K = R_Y(0) - 2R_X^2(0) = 3R_X^2(0) - 2R_X^2(0) = R_X^2(0)$$

• $\tau \rightarrow +\infty$

$$K = R_Y(+\infty) - 2R_X(+\infty) = R_X^2(0)$$

• Autocorrélation

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

Summary

• Autocorrélation

$$R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$$

• Densité spectrale de puissance

$$s_Y(f) = 2s_X(f) * s_X(f) + R_X^2(0)\delta(f)$$

Plan du cours

- Chapitre 1 : Corrélations et Spectres
- Chapitre 2 : Filtrage Linéaire
- Chapitre 3 : Traitements Non-linéaires
 - Introduction
 - Quadrateur
 - Quantification

Quantification

● Principe

$$x_Q(t) = i\Delta q_i = x_i \text{ et } x_i - \frac{\Delta q_i}{2} \leq x(t) \leq x_i + \frac{\Delta q_i}{2}$$

● Définitions

- Pas de quantification Δq_i
- Quantification uniforme $\Delta q_i = \Delta q = \frac{2A_{\max}}{N}$
- Niveaux de quantification: x_i
- Nombre de bits de quantification $N = 2^n$

Erreur de quantification

- Hypothèse

$\epsilon(t)$ suit la loi uniforme sur $\left[-\frac{\Delta q}{2}, \frac{\Delta q}{2}\right]$, i.e., $N \geq 2^8$

- Rapport signal sur bruit de quantification

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\epsilon^2} \right)$$

- Variance du bruit : $\sigma_\epsilon^2 = \frac{(\Delta q)^2}{12}$

- Sinusoïde : $\sigma_x^2 = \frac{A^2}{2}$

- Conclusion

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + 1.76$$

Remarques

- Généralisation à un signal Gaussien

$$2S\sigma = N\Delta q \Rightarrow \text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + \dots$$

- Quantification non uniforme

Que faut-il savoir ?

- **Traitement non-linéaire** = possibilité de créer de nouvelles fréquences
- Savoir appliquer le théorème de **Price**. Intérêt ?
- Définition et propriétés de la **quantification**
- Savoir calculer le **rapport signal sur bruit** de quantification