

# Probabilités

Thierry Malon et Jean-Yves Tournet<sup>(1)</sup>

(1) Université de Toulouse, ENSEEIHT-IRIT

[Thierry.Malon@enseeiht.fr](mailto:Thierry.Malon@enseeiht.fr), [jyt@n7.fr](mailto:jyt@n7.fr)

# Images optique et radar



# Plan du cours

- Chapitre 1 : Éléments de base du calcul des probabilités
  - Triplet de Probabilité  $(\Omega, C, P)$
  - Équiprobabilité - Dénombrement
  - Probabilités conditionnelles
  - Indépendance
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites

# Bibliographie

- B. Lacaze, M. Maubourguet, C. Mailhes et J.-Y. Tourneret, Probabilités et Statistique appliquées, Cépadues, 1997.
- Athanasios Papoulis and S. Unnikrishna Pillai, Probability, Random Variable and Stochastic Processes, McGraw Hill Higher Education, 4th edition, 2002.

# Triplet de Probabilité $(\Omega, \mathcal{C}, P)$

- $\Omega$  : Ensemble des résultats d'expérience
- $\mathcal{C}$  : Ensemble des événements
  - $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$
  - $\Omega \in \mathcal{C}$  (événement certain)
  - si  $A \in \mathcal{C}$  alors  $\overline{A} \in \mathcal{C}$  (événement contraire)
  - si  $A_i \in \mathcal{C}, i \in I$  ( $I$  fini ou infini dénombrable), alors  $\cup A_i \in \mathcal{C}$
- $P$  : application probabilité de  $\mathcal{C}$  dans  $[0, 1]$ 
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
  - $P(\cup A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$  si les événements  $A_i$  sont disjoints.

# Propriétés

## ● Événements

- $\emptyset \in \mathcal{C}$

- si  $A_i \in \mathcal{C}, i \in I$  ( $I$  fini ou infini dénombrable), alors  
 $\cap A_i \in \mathcal{C}$

## ● Probabilité

- $P(\emptyset) = 0$

- si  $A \subset B$ , alors,  $P(A) \leq P(B)$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

# Vocabulaire

- si  $a \in \Omega$  alors  $\{a\}$  est un événement élémentaire
- si  $\Omega = \cup_{i \in I} A_i$  avec  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , on dit que  $\{A_i\}_{i \in I}$  est un système complet d'événements
- $(\Omega, \mathcal{C})$  espace probabilisable
- $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  espace probabilisé
- $\mathcal{C}$  tribu ou  $\sigma$ -algèbre

# Équiprobabilité - Dénombrement

## ● Définition

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

## ● Exemples

● Jet d'un dé

● Tirages avec remise dans une urne à 2 catégories

$$P(k \text{ succès sur } n \text{ expériences}) = \binom{n}{k} P_s^k (1 - P_s)^{n-k}$$

avec  $k = 0, \dots, n$ ,  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $P_s$  est la probabilité du succès sur une expérience et  $n$  est le nombre d'expériences identiques et indépendantes.



# Probabilités conditionnelles

## • Définition

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ ou } P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

## • Théorème des probabilités totales

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

pour tout système complet d'événements  $\{A_i\}$ .

## • Formule de Bayes

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

# Indépendance

## • Deux événements

Deux événements  $A$  et  $B$  sont **indépendants** si et ssi

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ ou } P(A|B) = P(A)$$

## • Généralisation

On dit que  $\{A_i\}_{i \in I}$  est famille d'événements **mutuellement indépendants** si et ssi

$$P\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} P(A_i), \quad \forall J \subset I$$

## 👉 Exercice d'application

# Que faut-il savoir ?

- Probabilité d'une **réunion** d'événements :  $P(A \cup B) = ?$
- Probabilité de **l'évènement contraire** :  $P(\overline{A}) = ?$
- **Equiprobabilité** :  $P(A) = ?$
- Loi **Binomiale** :  $P(k \text{ succès sur } n \text{ expériences}) = ?$
- Probabilité **conditionnelle** :  $P(A|B) = ?$
- **Indépendance** :  $P(A \cap B) = ?$
- Formule de **Bayes** :  $P(A|B) = ?$

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Éléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
  - Définition
  - Loi d'une variable aléatoire
  - Fonction de répartition
  - Exemples fondamentaux
  - Espérance mathématique
  - Changements de variables
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
- ...

# Variable aléatoire réelle

## ● Définition

Soient  $(\Omega, \mathcal{C}, P)$  un triplet de probabilité qui est associé à l'expérience et  $(\Omega', \mathcal{C}')$ , avec  $\Omega' \subset \mathbb{R}$  un espace probabilisable qui résume les quantités qui nous intéressent. Une variable aléatoire réelle  $X$  est une application de  $\Omega$  dans  $\Omega'$  qui possède la propriété de mesurabilité :

$$\forall (a, b) \in \mathcal{C}', \{\omega | X(\omega) \in (a, b)\} \in \mathcal{C}.$$

## ● Exemple : somme des résultats de deux dés

$$X : \begin{array}{l} \Omega \longrightarrow \Omega' \\ (m, n) \longmapsto m + n \end{array}$$

# Variable aléatoire discrète

- Loi d'une variable aléatoire discrète

$\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$  est fini ou infini dénombrable. La loi de  $X$  est définie par

- l'ensemble des valeurs possibles de  $X$  :  $\{x_i, i \in I\}$

- les probabilités associées  $p_i = P[X = x_i]$  avec

$$\sum_{i \in I} p_i = 1 \text{ et } P[X \in \Delta] = \sum_{x_i \in \Delta} p_i$$

- Exemples

- Jet d'un dé

- Jet d'une pièce

- ...

# Variables aléatoires continues

- **Loi d'une variable aléatoire continue**

$\{X(\omega), \omega \in \Omega\}$  est infini non dénombrable avec  $P[X = x_i] = 0, \forall x_i$ . La loi de  $X$  est définie par

- **l'ensemble des valeurs possibles de  $X$**  qui est en général une réunion d'intervalles

- **une densité de probabilité**  $p : \begin{matrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto p(x) \end{matrix}$  telle que

$$p(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\int_{\mathbb{R}} p(u) du = 1,$$

$$P[X \in \Delta] = \int_{\Delta} p(u) du.$$

# Variables aléatoires continues

## Remarques

- On peut avoir  $p(x) > 1$ .

- $$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P[X \in [x, x+dx]]}{dx} = \lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\int_{-\infty}^{x+dx} p(u) du - \int_{-\infty}^x p(u) du}{dx}.$$

Donc

$$\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{P[X \in [x, x+dx]]}{dx} = F'(x) = p(x)$$

- $P[X \in [x, x+dx]] \simeq p(x)dx$  pour  $dx$  “petit”

- lien avec l’histogramme

## Exemples

- Loi uniforme sur  $[a, b]$
- Loi normale



# Variable aléatoire mixte

## Loi d'une variable aléatoire mixte

$\{X(\omega), \omega \in \Omega\} = E \cup \{x_i, i \in I\}$  est la réunion de deux ensembles, le premier  $E$  est infini non dénombrable avec  $P[X = x] = 0, \forall x \in E$ , le deuxième est fini ou infini dénombrable avec  $p_i = P[X = x_i] > 0$ . La loi de  $X$  est définie par

•  $\{x_i, i \in I\}$  avec  $p_i = P[X = x_i] > 0$

•  $E$  et une densité de probabilité  $p$  telle que

$$\begin{aligned} p(x) &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{\mathbb{R}} p(u) du + \sum_{i \in I} p_i &= 1 \\ P[X \in \Delta] &= \int_{\Delta} p(u) du + \sum_{x_i \in \Delta} p_i \end{aligned}$$

## Exemple : Tension aux bornes d'un voltmètre

# Exemples Fondamentaux de Loïs Discrètes

- Loi de Bernoulli :  $X \sim \mathcal{B}e(p)$

$$P[X = 1] = p \text{ et } P[X = 0] = q = 1 - p$$

Lancer d'une pièce, "Succès ou Echec", ...

- Loi binomiale :  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$

$$P[X = k] = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n$$

Probabilité d'avoir  $k$  succès sur  $n$  expériences,  $X = \sum_{i=1}^n X_i$   
où  $X_i$  suit une loi de Bernoulli, ...

- Loi de Poisson :  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$P[X = k] = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda), \quad k \in \mathbb{N}$$

Loi du nombre d'arrivées pendant un temps donné

# Exemples Fondamentaux de Lois Continues

• **Loi uniforme** :  $X \sim \mathcal{U}([a, b])$

$$p(x) = \frac{1}{b - a}, \quad x \in [a, b]$$

• **Loi normale ou Gaussienne** :  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[ -\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right], \quad x \in \mathbb{R}$$

• **Loi gamma** :  $X \sim \mathcal{Ga}(\alpha, \beta)$

$$p(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x > 0$$

Pour  $\alpha = 1$ , on a la **loi exponentielle**

## LOIS DE PROBABILITÉ DISCRÈTES

**m** : moyenne     $\sigma^2$  : variance    **F. C.** : fonction caractéristique

$p_k = P[X = k]$      $p_{1,\dots,m} = P[X_1 = k_1, \dots, X_m = k_m]$

LOI	Probabilités	m	$\sigma^2$	F. C.
Uniforme	$p_k = \frac{1}{n}$ $k \in \{1, \dots, n\}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{e^{it} (1 - e^{itn})}{n (1 - e^{it})}$
Bernoulli	$p_1 = P[X = 1] = p$ $p_0 = P[X = 0] = q$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$	$p$	$pq$	$pe^{it} + q$
Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$	$p_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \{0, 1, \dots, n\}$	$np$	$npq$	$(pe^{it} + q)^n$
Binomiale négative	$p_k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!} p^n q^k$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}$	$n \frac{q}{p}$	$n \frac{q}{p^2}$	$\left( \frac{p}{1 - qe^{it}} \right)^n$
Multinomiale	$p_{1,\dots,m} = \frac{n!}{k_1! \dots k_m!} p_1^{k_1} \dots p_m^{k_m}$ $p_j \in [0, 1] \quad q_j = 1 - p_j$ $k_j \in \{0, 1, \dots, n\}$ $\sum_{j=1}^m k_j = n \quad \sum_{j=1}^m p_j = 1$	$np_j$	Variance : $np_j q_j$ Covariance : $-np_j p_k$	$\left( \sum_{j=1}^m p_j e^{it} \right)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ $\lambda > 0 \quad k \in \mathbb{N}$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp [\lambda (e^{it} - 1)]$
Géométrique	$p_k = pq^{k-1}$ $p \in [0, 1] \quad q = 1 - p$ $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$	$\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$

# LOIS DE PROBABILITÉ CONTINUES

**m** : moyenne     $\sigma^2$  : variance    **F. C.** : fonction caractéristique

LOI	Densité de probabilité	m	$\sigma^2$	F. C.
Uniforme	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $x \in ]a, b[$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$
Gamma $\Gamma(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\theta x} x^{\nu-1}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\nu}{\theta}$	$\frac{\nu}{\theta^2}$	$\frac{1}{(1 - i\frac{t}{\theta})^\nu}$
Inverse gamma $IG(\theta, \nu)$	$f(x) = \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\theta}{x}} \frac{1}{x^{\nu+1}}$ $\theta > 0, \nu > 0$ $x \geq 0$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{\theta}{\nu-1}$ si $\nu > 1$	$\frac{\theta^2}{(\nu-1)^2(\nu-2)}$ si $\nu > 2$	(*)
Première loi de Laplace	$f(x) = \frac{1}{2} e^{- x }$	0	2	$\frac{1}{1+t^2}$
Normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$	m	$\sigma^2$	$e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$
Khi <sub>2</sub> $\chi_\nu^2$ $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2})$	$f(x) = k e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{\nu}{2}-1}$ $k = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})}$ $\nu \in \mathbb{N}^*, x \geq 0$	$\nu$	$2\nu$	$\frac{1}{(1-2it)^{\frac{\nu}{2}}}$
Cauchy $c_{\lambda, \alpha}$	$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda \left(1 + \left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right)^2\right)}$ $\lambda > 0, \alpha \in \mathbb{R}$	(-)	(-)	$e^{i\alpha t - \lambda t }$
Beta $B(a, b)$	$f(x) = k x^{a-1} (1-x)^{b-1}$ $k = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$ $a > 0, b > 0$ $x \in ]0, 1[$ avec $\Gamma(n+1) = n! \forall n \in \mathbb{N}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$	(*)

# Fonction de répartition

## ● Définition

$$F : \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \\ x \longmapsto F(x) = P[X < x] \end{array}$$

## ● Propriétés

●  $F$  croissante

●  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

●  $F$  caractérise une loi de probabilité

● Si  $X$  est une va discrète, le graphe de  $F$  est une fonction en escaliers

● Si  $X$  est une va continue,  $F$  est continue et  $F(x) = \int_{-\infty}^x p(u)du$ , i.e.,  $p(x) = F'(x)$

# Espérance mathématique

## ● Définition

$$E[\alpha(X)] = \begin{cases} X \text{ va discrète : } & \sum_{i \in I} \alpha(x_i) p_i \\ X \text{ va continue : } & \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u) du \\ X \text{ va mixte : } & \sum_{i \in I} \alpha(x_i) p_i + \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u) du \end{cases}$$

## ● Propriétés

- Constante :  $E(\text{cste}) = \text{cste}$
- Linéarité :  $E(aX + b) = aE(X) + b$

## ● Exemples

- Moments non centrés :  $E(X^n)$  ( $n = 1$  : moyenne)
- Moments centrés :  $E([X - E(X)]^n)$  ( $n = 2$  : variance)
- Fonction caractéristique :  $\phi_X(t) = E[\exp(itX)]$

# Exemples simples

## • Variables aléatoires discrètes

$$E[X] = \sum_{i \in I} x_i P[X = x_i], \quad E[X^2] = \sum_{i \in I} x_i^2 P[X = x_i]$$

$$E[e^{jtX}] = \sum_{i \in I} e^{jtx_i} P[X = x_i]$$

## • Variables aléatoires continues

$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} up(u)du, \quad E[X^2] = \int_{\mathbb{R}} u^2 p(u)du$$

$$E[e^{jtX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{jtu} p(u)du$$



# Propriétés

## • Variance

- $\text{var}(X) = E \left( [X - E(X)]^2 \right) = E(X^2) - E(X)^2$

- Ecart Type :  $\sqrt{\text{variance}}$

- $\text{var}(aX + b) = a^2 \text{var}(X)$

## • Fonction caractéristique

- Caractérise une loi de probabilité

- Cas continu

$$\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} p(u) du$$

est la transformée de Fourier de  $p$ .

## • Exemples de calculs

# Changements de variables

## ● Problème

Étant donnée une variable aléatoire réelle  $X$  de loi connue, on cherche à déterminer la loi de  $Y = g(X)$  où  $g$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

## ● Variables aléatoires discrètes

### ● Définition

$$P[Y = y_j] = \sum_{i|y_j=g(x_i)} p[X = x_i]$$

### ● Exemple

$$Y = (X - 2)^2 \text{ avec } X \sim \mathcal{P}(\lambda)$$

# Changements de va continues

- $g$  bijective

- **Théorème** : si  $X$  est une va continue à valeurs dans un ouvert  $O_X \subset \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  application **bijective** de  $O_X$  dans un ouvert  $O_Y \subset \mathbb{R}$  différentiable ainsi que son inverse  $g^{-1}$ , alors  $Y = g(X)$  est une va continue de densité

$$p_Y(y) = p_X[g^{-1}(y)] \left| \frac{dx}{dy} \right|.$$

où  $\frac{dx}{dy}$  est le Jacobien de la transformation.

- **Exemple 1** :  $Y = 1/X$  avec  $X \sim \mathcal{E}(1)$ .
- **Idée de preuve et preuve**
- **Exemple 2** :  $Y = aX + b$  avec  $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ .

# Changements de va continues

- $g$  bijective par morceaux

On suppose que  $g$  est différentiable sur chaque morceau ainsi que son inverse.

- **Méthode** : On ajoute la contribution de chaque bijection.

- **Exemple** :  $Y = X^2$  avec  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

- $g$  non bijective et non bijective par morceaux

- Détermination de la **fonction de répartition**

- Détermination de la **fonction caractéristique**

# Que faut-il savoir ?

- Loi d'une variable aléatoire **discrète** : ?
- Loi d'une variable aléatoire **continue** : ?
- Appartenance à un intervalle** :  $P[X \in \Delta] = ?$
- Signification d'une densité** :  $P[X \in [x, x + dx]] \simeq ?$
- Fonction de répartition** :  $F(x) = ?$
- Espérance mathématique** :  $E[X] = ?$ ,  $E[X^2] = ?$
- Variance** :  $\text{Var}[X] = ?$ , **Ecart-type** : ?
- Relations utiles** :  $E[aX + b] = ?$ ,  $\text{Var}[aX + b] = ?$
- Fonction caractéristique** :  $\phi(t) = ?$
- Changement de variables** : ?

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Éléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
  - Définition
  - Fonction de répartition
  - Lois marginales, lois conditionnelles, indépendance
  - Espérances mathématiques
  - Changements de variables
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites

# Couple de va réelles

## • Définition

Soit  $(\Omega, C, P)$  un espace **probabilisé** et  $(\Omega', C')$  un espace **probabilisable** avec  $\Omega' \subset \mathbb{R}^2$  et  $C'$  construit à partir des réunions et intersections finies ou dénombrables des pavés  $(a, b) \times (c, d)$  de  $\mathbb{R}^2$ . Un couple  $(X, Y)$  de variables aléatoires réelles est une **application mesurable de  $\Omega$  dans  $\Omega'$** .

## • notation

On notera  $P[(X, Y) \in \Delta]$ ,  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ , la probabilité que le couple  $(X, Y)$  prenne ses valeurs dans  $\Delta$ .

# Loi d'un couple de va

## • Variables aléatoires discrètes

La loi du couple  $(X, Y)$  est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble fini ou dénombrable) noté  $\{(x_i, y_j), i \in I, j \in J\}$  et par les probabilités associées  $p_{ij} = P[X = x_i, Y = y_j]$ ,  $i \in I, j \in J$  telles que  $p_{ij} > 0$  et  $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$ .

## • Variables aléatoires continues

La loi du couple  $(X, Y)$  est définie par l'ensemble des valeurs possibles du couple (qui est un ensemble infini non dénombrable), en général une réunion d'intervalles de  $\mathbb{R}^2$ , et par une densité de probabilité  $p(x, y)$  telle que

$$p(x, y) \geq 0, \text{ et } \int \int_{\mathbb{R}^2} p(x, y) dx dy = 1.$$



# Loi d'un couple de va

## • Variables aléatoires discrètes et continues

La loi du couple  $(X, Y)$ , où  $X$  est discrète à valeurs dans  $\{x_i, i \in I\}$  et  $Y$  est continue, est définie par le domaine de définition du couple et par un ensemble de densités de probabilités  $p_i(y), i \in I$  tel que

$$p_i(y) \geq 0, \text{ et } \sum_{i \in I} \int_{\mathbb{R}} p_i(y) dy = 1.$$

# Propriétés

## ● Couples de va discrètes

$$P[(X, Y) \in \Delta] = \sum_{(i,j)|(x_i,y_j) \in \Delta} P[X = x_i, Y = y_j], \quad \Delta \subset \mathbb{R}^2$$

## ● Couples de va continues

$$P[(X, Y) \in \Delta] = \int \int_{\Delta} p(u, v) du dv, \quad \Delta \subset \mathbb{R}^2$$

Remarque : signification de  $p(u, v)$

## ● Couples de va discrètes et continues

$$P[(X, Y) \in \Delta \times \Delta'] = \sum_{i|x_i \in \Delta} \int_{\Delta'} p_i(v) dv, \quad \Delta \times \Delta' \subset \mathbb{R}^2$$

# Fonction de répartition

## ● Définition

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1] \\ (x, y) \mapsto F(x, y) = P[X < x, Y < y]$$

## ● Propriétés

- C'est une fonction **étagée** lorsque  $(X, Y)$  est un couple de va **discrètes**
- C'est une fonction **continue** lorsque  $(X, Y)$  est un couple de va **continues** avec

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y p(u, v) du dv \text{ d'où } p(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

# Lois marginales

## • Cas discret

$$P[X = x_i] = p_{i.} = \sum_{j \in J} p_{ij}$$

$$P[Y = y_j] = p_{.j} = \sum_{i \in I} p_{ij}$$

## • Cas continu

$$\text{densité de } X : p(x, .) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dy$$

$$\text{densité de } Y : p(., y) = \int_{\mathbb{R}} p(x, y) dx$$

# Lois marginales

## • Cas discret

$$p_{00} = \frac{1}{2}, p_{01} = \frac{1}{6}, p_{10} = \frac{1}{6}, p_{11} = \frac{1}{6}.$$

Lois de  $X$  et de  $Y$  ?

## • Cas continu

$$p(x, y) = \begin{cases} \theta^2 e^{-\theta x} & \text{si } x > y > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que  $X \sim \Gamma(\theta, 2)$  et que  $Y \sim \Gamma(\theta, 1)$ .

# Lois conditionnelles

Les lois conditionnelles d'un couple  $(X, Y)$  sont les lois de  $X|Y = y$  et de  $Y|X = x$ .

## • Cas discret

$$P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{p_{ij}}{p_{.j}}$$

$$P[Y = y_j | X = x_i] = \frac{p_{ij}}{p_{i.}}$$

## • Cas continu

$$\text{densité de } X|Y = y \quad p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p(., y)}$$

$$\text{densité de } Y|X = x \quad p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x, .)}$$

# Théorème de Bayes

## • Cas discret

$$P[X = x_i | Y = y_j] = \frac{P[Y = y_j | X = x_i] P[X = x_i]}{P[Y = y_j]}$$

## • Cas continu

$$p(x | y) = \frac{p(y | x)p(x, .)}{p(., y)}$$

# Indépendance

Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont **indépendantes** si

$$P[X \in \Delta, Y \in \Delta'] = P[X \in \Delta] P[Y \in \Delta'], \forall \Delta, \forall \Delta'$$

## • Cas discret

$$p_{ij} = p_{i.} p_{.j} \quad \forall i \in I, \forall j \in J$$

## • Cas continu

$$p(x, y) = p(x, .) p(., y) \quad \forall x, \forall y$$

ou

$$p(x|y) = p(x, .), \quad \forall x, \forall y$$



# Propriété

si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires **indépendantes** et  $\alpha$  et  $\beta$  sont des applications **continues** de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $\alpha(X)$  et  $\beta(Y)$  sont des variables aléatoires **indépendantes**. La réciproque est vraie si  $\alpha$  et  $\beta$  sont des applications **bijectives**. Par contre, dans le cas où  $\alpha$  et  $\beta$  ne sont pas bijectives, la réciproque est fausse. On vérifiera par exemple que le couple  $(X, Y)$  de densité

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + xy) & \text{si } |x| < 1 \text{ et } |y| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est tel que  $X^2$  et  $Y^2$  sont indépendantes alors que  $X$  et  $Y$  ne le sont pas.

# Espérance mathématique

## ● Définition

$$E[\alpha(X, Y)] = \begin{cases} X \text{ et } Y \text{ va discrètes : } & \sum_{i,j \in I \times J} \alpha(x_i, y_j) p_{ij} \\ X \text{ et } Y \text{ va continues : } & \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u, v) p(u, v) du dv \end{cases}$$

## ● Propriétés

● **Constante** :  $E(\text{cste}) = \text{cste}$

● **Linéarité** :

$$E[a\alpha(X, Y) + b\beta(X, Y)] = aE[\alpha(X, Y)] + bE[\beta(X, Y)]$$

● Définition **cohérente** (cas continu) :

$$E[\alpha(X)] = \int_{\mathbb{R}^2} \alpha(u) p(u, v) du dv = \int_{\mathbb{R}} \alpha(u) p(u, \cdot) du$$

● **Indépendance** : si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes, alors

$$E[\alpha(X)\beta(Y)] = E[\alpha(X)] E[\beta(Y)], \quad \forall \alpha \forall \beta$$

# Exemples

## • Moments centrés et non centrés

$$m_{ij} = E(X^i Y^j), \quad i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$$

$$\mu_{ij} = E([X - E(X)]^i [Y - E(Y)]^j), \quad i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}$$

## • Covariance et matrice de covariance

$$\text{cov}(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$E[\mathbf{V}\mathbf{V}^T] = \begin{pmatrix} \text{var}X & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(X, Y) & \text{var}Y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} X - E[X] \\ Y - E[Y] \end{pmatrix}$$

## • Fonction caractéristique

$$\phi_{X,Y}(u_1, u_2) = E[\exp(i\mathbf{u}^T \mathbf{W})], \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2)^T, \mathbf{W} = (X, Y)^T.$$

# Coefficient de Corrélation

## ● Définition

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y},$$

où  $\sigma_X$  et  $\sigma_Y$  sont les écart-types des va  $X$  et  $Y$ .

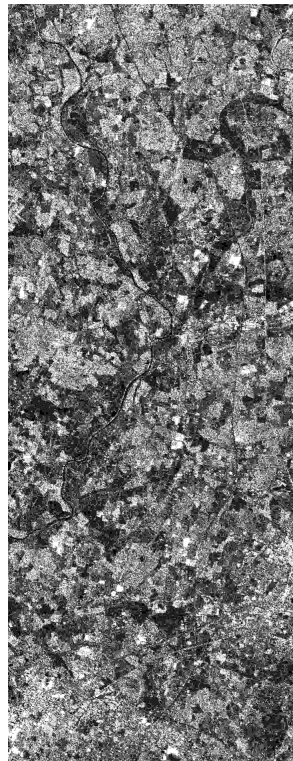
## ● Propriétés

- $-1 \leq r(X, Y) \leq 1$
- $r(X, Y) = \pm 1$  si et ssi  $X$  et  $Y$  sont reliées par une relation **affine**
- si  $X$  et  $Y$  sont des va **indépendantes**, alors  $r(X, Y) = 0$  mais la réciproque est fausse

## ● Conclusion

$r(X, Y)$  est une mesure imparfaite mais très pratique du **lien** entre les va  $X$  et  $Y$ .

## Données réelles : images de Gloucester



(a) Avant



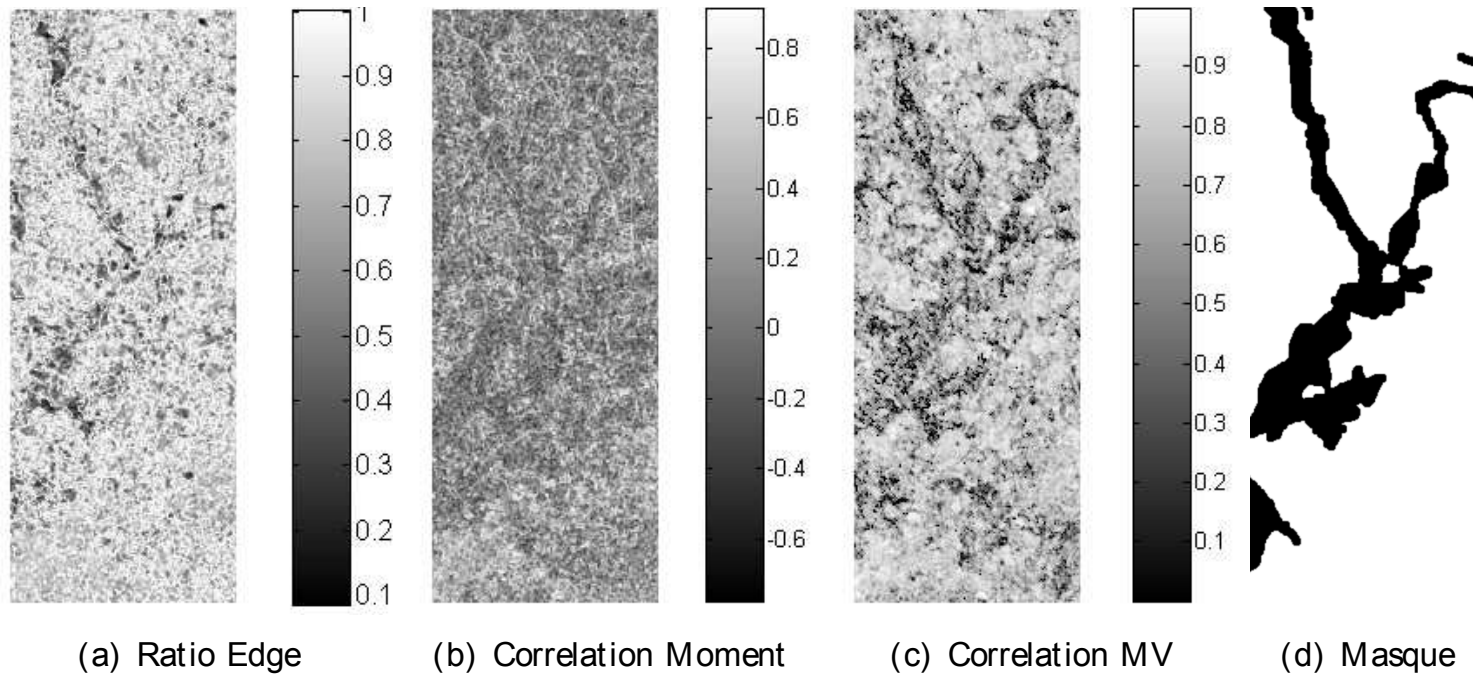
(b) Après



(c) Masque

Images radar ERS ( $3049 \times 1170$  pixels) de Gloucester, Angleterre, avant et après une inondation

## Application aux images de Gloucester : cartes de changement



Cartes de changement pour les images de Gloucester obtenues pour une fenêtre d'estimation de taille  $n = 15 \times 15$

# Espérance conditionnelle

## ● Théorème

$$E[\alpha(X, Y)] = E_X[E_Y[\alpha(X, Y)|X]]$$

## ● Exemple

Déterminer  $E[Y_N]$  lorsque

$$Y_N = \sum_{i=1}^N X_i$$

où  $P[X_i = 1] = p$ ,  $P[X_i = 0] = q = 1 - p$  et  $N$  est une variable de loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

# Changements de variables

- **Problème**

Étant donné un couple de variables aléatoires réelles  $(X, Y)$  de loi connue, on cherche à déterminer la loi de  $(U, V) = g(X, Y)$  où  $g$  est une fonction de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $U$  et  $V$  sont deux fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

- **Variables aléatoires discrètes**

- **Définition**

$$P[(U, V) = (u_k, v_l)] = \sum_{i,j | g(x_i, y_j) = (u_k, v_l)} p[X = x_i, Y = y_j]$$

- **Exemple**  
voir TD



# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

## • Théorème pour $g$ bijective

si  $(X, Y)$  est un couple de va continues à valeurs dans un ouvert  $O \subset \mathbb{R}^2$  et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application **bijective** de  $O$  dans un ouvert  $\Delta \subset \mathbb{R}^2$  continument différentiable ainsi que son inverse  $g^{-1}$ , alors  $(U, V) = g(X, Y)$  est un couple de va continues de densité

$$p_{U,V}(u, v) = p_{X,Y} [g^{-1}(u, v)] |\det(J)|,$$

où  $J$  est la matrice Jacobienne définie par

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

## • Exemples

### • Exemple 1

$X \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,  $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,  $X$  et  $Y$  indépendantes.

Quelle est la loi du couple  $(U, V)$  avec  $U = X + Y$  et  $V = X$  ?

### • Exemple 2

$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $X$  et  $Y$  va indépendantes.

Quelle est la loi de  $(R, \Theta)$  avec  $X = R \cos \Theta$  et  $Y = R \sin \Theta$  ?

## • Généralisation

Si  $g$  est bijective par morceaux, on ajoute les contributions de chaque morceau.

# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

## ● Problème

Si  $(X, Y)$  est un couple de va continues de loi connue et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on cherche la loi de  $U = g(X, Y)$ .

## ● Solution 1

- **Variable intermédiaire** : on introduit une va  $V = h(X, Y)$  (e.g.,  $V = X$  ou  $V = Y$ ), on cherche la loi du couple  $(U, V)$ , puis la loi marginale de  $U$
- **Exemple** :  $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,  $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,  $X$  et  $Y$  indépendantes. Quelle est la loi de  $U = X + Y$  ?

# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

## ● Problème

Si  $(X, Y)$  est un couple de va continues de loi connue et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on cherche la loi de  $U = g(X, Y)$ .

## ● Solution 2

- Calcul de la fonction de répartition de  $U$

$$\begin{aligned} P[U < u] &= P[g(X, Y) < u] \\ &= P[(X, Y) \in \Delta_u] \\ &= \int_{\Delta_u} p(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

- Exemple :  $X \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,  $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$ ,  $X$  et  $Y$  indépendantes. Quelle est la loi de  $U = X + Y$  ?

# Changements de va continues de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- **Problème**

Si  $(X, Y)$  est un couple de va continues de loi connue et  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on cherche la loi de  $U = g(X, Y)$ .

- **Solution 3** : Cas particulier de  $U = X + Y$ ,  $X$  et  $Y$  indépendantes

- Calcul de la **fonction caractéristique** de  $U$ .

- **Exemple** :  $X \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ ,  $Y \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ ,  $X$  et  $Y$  indépendantes. Quelle est la loi de  $U = X + Y$  ?

# Que faut-il savoir ?

- Loi d'un couple de va **discrètes** et **continues** : ?
- Appartenance à un intervalle** :  $P[(X, Y) \in \Delta] = ?$
- Comment calculer les lois **marginale**s d'un couple ?
- Comment calculer les lois **conditionnelles** d'un couple ?
- Indépendance** de deux variables aléatoires ?
- Espérance mathématique** :  $E[XY] = ?$
- Covariance** :  $\text{cov}(X, Y) = ?$
- Coeff. de corrélation** :  $r(X, Y) = ?$ ,  $r(X, Y) \in ?$  Intérêt ?
- Espérances conditionnelles** : ?
- Trois méthodes de **changements de variables** : ?

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Éléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
  - Définition
  - Transformation affine
  - Lois marginales, lois conditionnelles, indépendance
  - Lois du  $\chi^2$ , de Student et de Fisher
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites

# Vecteur Gaussien

## ● Définition

On dit que  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  suit une loi normale à  $n$  dimensions et on notera  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$ , si la densité de probabilité de  $\mathbf{X}$  s'écrit

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\Sigma)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{m}) \right]$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$  et  $\Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique définie positive.

## ● Cas particuliers

- $n = 1$

- $\Sigma$  diagonale



# Vecteur Gaussien

## • Exercice

$$p(x, y) \propto \exp \left( -x^2 - \frac{3}{2}y^2 - xy + 4x + 7y \right)$$

Quelle est la loi de  $(X, Y)$  ?

# Signification de $\mathbf{m}$ et $\Sigma$

- Fonction caractéristique

$$\phi(\mathbf{u}) = E \left( e^{i\mathbf{u}^T \mathbf{X}} \right) = \exp \left( i\mathbf{u}^T \mathbf{m} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u} \right)$$

- Fonction génératrice des moments

$$\theta(\mathbf{u}) = E \left( e^{\mathbf{u}^T \mathbf{X}} \right) = \exp \left( \mathbf{u}^T \mathbf{m} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u} \right)$$

- $\mathbf{m}$  et  $\Sigma$

- $\mathbf{m}$  est le vecteur moyenne

- $\Sigma$  est la matrice de covariance

# Cas Bivarié

## ● Fonction caractéristique

$$\phi(\mathbf{u}) = \exp \left[ i(u_1 m_1 + u_2 m_2) - \frac{1}{2} \Sigma_{11} u_1^2 - \frac{1}{2} \Sigma_{22} u_2^2 - \Sigma_{12} u_1 u_2 \right]$$

## ● Dérivées partielles

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial u_1} = \phi(\mathbf{u})(im_1 - \Sigma_{12}u_2 - \Sigma_{11}u_1)$$

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial u_2} = \phi(\mathbf{u})(im_2 - \Sigma_{12}u_1 - \Sigma_{22}u_2)$$

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{u})}{\partial u_1 \partial u_2} = \phi(\mathbf{u})(im_1 - \Sigma_{12}u_2 - \Sigma_{11}u_1)(im_2 - \Sigma_{12}u_1 - \Sigma_{22}u_2) - \Sigma_{12}\phi(\mathbf{u})$$

## ● Moments

$$\left. \frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial u_1} \right|_{u=0} = iE[X_1] = im_1, \quad \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial u_2} \right|_{u=0} = iE[X_2] = im_2$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi(\mathbf{u})}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{u=0} = -E[X_1 X_2] = -m_1 m_2 - \Sigma_{12}$$

# Transformation affine

• **Problème** : Soit  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$  un vecteur Gaussien. Quelle est la loi de  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ , où  $\mathbf{Y}$  est un vecteur aléatoire de  $\mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^p$  et  $\mathbf{A}$  est une matrice de taille  $p \times n$  avec  $p \leq n$  ?

• **Idée** : on calcule la fonction génératrice de  $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$

$$\theta_{\mathbf{Y}}(\mathbf{v}) = \exp \left[ \mathbf{v}^T (\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{b}) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{A} \Sigma \mathbf{A}^T \mathbf{v} \right]$$

• **Conclusion**

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{b}, \mathbf{A}\Sigma\mathbf{A}^T)$$

si  $\mathbf{A}$  est de rang  $p$  (i.e., de rang maximal).

# Lois marginales

## • Hypothèses

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{X}'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma), \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}' \\ \mathbf{m}'' \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma' & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \Sigma'' \end{pmatrix}$$

## • Problème

Quelle est la loi de  $\mathbf{X}'$  ?

## • Conclusion

$$\mathbf{X}' \sim \mathcal{N}_p(\mathbf{m}', \Sigma')$$

où  $p$  est la dimension de  $\mathbf{X}'$ .

# Indépendance

## • Hypothèses

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{X}'' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma), \quad \mathbf{m} = \begin{pmatrix} m' \\ m'' \end{pmatrix}, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma' & M \\ M^T & \Sigma'' \end{pmatrix}$$

## • Conclusion

$\mathbf{X}'$  et  $\mathbf{X}''$  sont des vecteurs **indépendants** si et ssi  $M = 0$ .

## • Résultat admis

Les **lois conditionnelles** d'un vecteur gaussien sont des lois gaussiennes

# Loi du chi2

## ● Définition

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont  $n$  va indépendantes de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$  suit une loi du chi2 à  $n$  degrés de liberté.

## ● Propriétés

● Densité de probabilité :  $p_n(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(y)$

● Fonction caractéristique :  $\phi_n(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$

● Moyenne et variance :  $E(Y) = n$  et  $\text{var}(Y) = 2n$

● Additivité : si  $Y \sim \chi_n^2$ ,  $Z \sim \chi_m^2$ ,  $Y$  et  $Z$  ind. alors

$$Y + Z \sim \chi_{n+m}^2$$

# Loi de Student

- Définition

Si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $Y \sim \chi_n^2$ ,  $X$  et  $Y$  indépendantes, alors

$$Z = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_n$$

- Propriétés

- Densité de probabilité

$$p_n(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{z^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

- Moyenne et variance (pour  $n > 2$ )

$$E(Z) = 0 \text{ et } \text{var}(Z) = \frac{n}{n-2}$$

- pour  $n = 1$ , on a une loi de Cauchy



# Loi de Fisher

## ● Définition

Si  $X \sim \chi_n^2$ ,  $Y \sim \chi_m^2$ ,  $X$  et  $Y$  indépendantes, alors

$$Z = \frac{X/n}{Y/m} \sim f_{n,m}$$

## ● Propriétés

● Densité de probabilité connue (voir livres)

● Moyenne et variance (pour  $m > 4$ )

$$E(Z) = \frac{m}{m-2} \text{ et } \text{var}(Z) = \frac{2m^2(n+m-2)}{n(m-4)(m-2)^2}$$

# Théorème de Cochran

## ● Hypothèses

Soit  $\mathbf{X}$  un vecteur Gaussien de loi  $\mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ , où  $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sigma^2 > 0$  et  $\mathbf{I}_n$  la matrice identité de taille  $n \times n$ . Soient  $p$  sous-espaces vectoriels orthogonaux  $E_1, \dots, E_p$  de dimensions  $d_1, \dots, d_p$  tels que  $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$  et  $\mathbf{Y}_k = \mathbf{P}_k \mathbf{X}$  la projection orthogonale de  $\mathbf{X}$  sur  $E_k$  ( $\mathbf{P}_k$  matrice de projection orthogonale sur  $E_k$ ).

## ● Conclusions

- Les vecteurs  $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_p$  sont indépendants et  $\mathbf{Y}_k \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{P}_k \mathbf{m}, \sigma^2 \mathbf{P}_k)$
- Les variables aléatoires  $Z_k = \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{P}_k \mathbf{m}\|^2$  sont indépendantes et  $\frac{Z_k}{\sigma^2} \sim \chi_{d_k}^2$ .

# Preuve

📌 Vecteurs  $\mathbf{Y}_k$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_p \end{pmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

avec  $\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^T = \mathbf{P}_k^2$  et  $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_j = \mathbf{0}$  for  $i \neq j$ .

📌 Variables  $Z_k$

Si  $\mathbf{e}_{k,1}, \dots, \mathbf{e}_{k,d_k}$  est une base orthonormée de  $E_k$ , alors le vecteur  $\mathbf{Y}_k - \mathbf{P}_k \mathbf{m}$  s'écrit

$\mathbf{Y}_k - \mathbf{P}_k \mathbf{m} = \sum_{i=1}^{d_k} \tilde{y}_{k,i} \mathbf{e}_{k,i}$  avec  $\tilde{y}_{k,i}$  projection de  $\mathbf{X} - \mathbf{m}$  sur  $\mathbf{e}_{k,i}$  donc  $\tilde{y}_{k,i} = \mathbf{e}_{k,i}^T (\mathbf{X} - \mathbf{m}) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Comme les vecteurs  $\mathbf{e}_{k,1}, \dots, \mathbf{e}_{k,d_k}$  sont orthogonaux, les variables  $\tilde{y}_{k,1}, \dots, \tilde{y}_{k,d_k}$  sont indépendantes, donc

$$\sum_{i=1}^{d_k} \frac{\tilde{y}_{k,i}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{d_k}^2.$$

**Remarque :**  $E(\tilde{y}_{k,i}^2) = \mathbf{e}_{k,i}^T (\sigma^2 \mathbf{I}_n) \mathbf{e}_{k,i} = \sigma^2$ .

# Statistiques des échantillons gaussiens

## • Théorème

Soit  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  un échantillon de variables aléatoires réelles indépendante de même loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ . Alors la moyenne empirique  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  et la variance empirique  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  sont des variables aléatoires **indépendantes** telles que

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right) \text{ et } \frac{n-1}{\sigma^2} S^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

## • Preuve

Utiliser le fait que  $Y_1 = \bar{X}\mathbf{1}$  est la projection orthogonale de  $\mathbf{X}$  sur  $F$  engendré par  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T$  (car  $\langle \mathbf{X} - \bar{X}\mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = 0$ ) et que  $Y_2 = \mathbf{X} - \bar{X}\mathbf{1}$  est la projection de  $\mathbf{X}$  sur  $F^\perp$ .

# Que faut-il savoir ?

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{m}, \Sigma)$$

- Signification de  $\mathbf{m}$  et de  $\Sigma$  ?
- Transformation affine ( $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ ) d'un vecteur gaussien ? Condition sur la matrice  $\mathbf{A}$  associée ?
- Lois marginales d'un vecteur gaussien ?
- Indépendance de deux sous vecteurs d'un vecteur gaussien ? Application: théorème de Cochran.
- loi de  $Y = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$  ?

# Plan du cours

- Chapitre 1 : Éléments de base du calcul des probabilités
- Chapitre 2 : Variables aléatoires réelles
- Chapitre 3 : Couples de variables aléatoires réelles
- Chapitre 4 : Vecteurs Gaussiens
- Chapitre 5 : Convergence et théorèmes limites
  - Convergence (en loi, en probabilité, en moyenne quadratique, presque sure)
  - Théorèmes limites (loi des grands nombres, théorème de la limite centrale)

# Convergence en loi

## ● Définition

La suite de va  $X_1, \dots, X_n$  **converge en loi** vers la va  $X$  si et ssi la suite des fonctions de répartition  $F_n(x) = P[X_n < x]$  converge simplement vers  $F(x) = P[X < x]$  **en tout point  $x$  où  $F$  est continue.**

## ● Notation

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$$

## ● Exemple

$$P[X_n = 1] = \frac{1}{n} \text{ et } P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$$

# Convergence en loi

## ● Propriétés

### ● Théorème de Levy

$X_n$  cv en loi vers  $X$  si et ssi  $\phi$  continue en  $t = 0$  et

$$\phi_n(t) = E[e^{itX_n}] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \phi(t) = E[e^{itX}], \forall t.$$

● Si  $X_n$  est une suite de va continues de densités  $p_n(x)$  et que  $p_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} p(x)$  p.p., alors  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$ .

● Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, alors

$$g(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} g(X).$$



# Convergence en probabilité

## ● Définition

La suite de va  $X_1, \dots, X_n$  converge en probabilité vers la va  $X$  si et ssi  $\forall \epsilon > 0$ , on a

$$P[|X_n - X| > \epsilon] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

## ● Notation

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} X$$

● Exemple :  $X_n$  de densité  $p_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{(1+e^{-nx})^2}$ .

## ● Propriété

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} X$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, alors

$$g(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} g(X).$$

# Convergence en moyenne quadratique

## ● Définition

La suite de va  $X_1, \dots, X_n$  converge en moyenne quadratique vers la va  $X$  si et ssi

$$E[(X_n - X)^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

## ● Notation

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{MQ}} X$$

## ● Exemple

$$P[X_n = n] = \frac{1}{n^p} \text{ et } P[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n^p}$$

avec  $p = 2$  et  $p = 3$ .

# Convergence presque sûre

## ● Définition

La suite de v.a.  $X_1, \dots, X_n$  converge presque sûrement vers la v.a.  $X$  si et ssi

$$X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega), \quad \forall \omega \in A | P(A) = 1.$$

## ● Notation

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{PS}} X$$

## ● Comparaison entre les différents types de convergence

# Loi faible des grands nombres

## Loi faible des grands nombres

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des va indépendantes et de même loi de moyenne  $E[X_k] = m < \infty$ , alors la va

$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  converge en probabilité vers  $m$ .

## Preuve

$$\varphi_{\bar{X}_n}(t) = E \left[ e^{it \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k} \right] = E \left[ \prod_{k=1}^n e^{i \frac{t}{n} X_k} \right] = \left[ \varphi \left( \frac{t}{n} \right) \right]^n$$

Dév. de Taylor de  $\phi$

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + t\lambda(t) = 1 + itm + t\lambda(t)$$

# Preuve

On en déduit

$$\ln [\varphi_{\overline{X}_n}(t)] = n \ln \left[ 1 + i \frac{t}{n} m + \frac{t}{n} \lambda \left( \frac{t}{n} \right) \right] = n \left[ i \frac{t}{n} m + \frac{t}{n} \lambda \left( \frac{t}{n} \right) \right]$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\overline{X}_n}(t) = e^{itm} \quad \forall t$$

i.e.,

$$\overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} m \Leftrightarrow \overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{P}} m$$

# Loi forte des grands nombres

## Loi forte des grands nombres

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des va indépendantes et de même loi de moyenne  $E[X_k] = m < \infty$  et de variance  $\sigma^2 < \infty$ , alors la va  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  converge en moyenne quadratique vers  $m$ .

## Preuve

$$E \left[ (\bar{X} - m)^2 \right] = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n E [(X_k - m) (X_l - m)]$$

Mais

$$E [(X_k - m) (X_l - m)] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

# Preuve

Donc

$$E \left[ (\bar{X}_n - m)^2 \right] = \frac{\sigma^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

i.e.,

$$\bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{MQ} m$$

# Théorème de la limite centrale

## • Théorème de la limite centrale

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont des va indépendantes et de même loi de moyenne  $E[X_k] = m < \infty$  et de variance  $\sigma^2 < \infty$ , alors la va centrée réduite  $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}$  converge en loi vers la loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

## • Preuve

$$\varphi_{Y_n}(t) = E[e^{itY_n}] = e^{-\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma}} \prod_{k=1}^n E\left[e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X_k}\right]$$

Mais

$$E\left[e^{i\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}X_k}\right] = \varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)$$



# Preuve

Donc

$$\ln [\varphi_{Y_n} (t)] = -\frac{itm\sqrt{n}}{\sigma} + n \ln \varphi \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

En utilisant le développement de Taylor de  $\varphi$

$$\varphi (t) = \varphi (0) + t\varphi' (0) + \frac{t^2}{2}\varphi'' (0) + t^2\lambda (t)$$

On en déduit

$$\ln [\varphi_{Y_n} (t)] = -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{n}\lambda \left( \frac{t}{\sigma\sqrt{n}} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{Y_n} (t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad \forall t \Leftrightarrow Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

# Que faut-il savoir ?

- Convergence en **loi** ?
- Convergence en **moyenne quadratique** ?
- $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  converge en probabilité vers ? Conditions ?
- $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  converge en moyenne quadratique vers ? Conditions ?
- $Y_n = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - ?}{?}$  converge en loi vers ?