Examen Calcul Scientifique

Durée : 1h30

▷ **Exercice 1.** Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang $r \geq 1$ telle que $m \leq n$. On pose

$$\Pi = I_n - A^T(AA^T)^+A$$

avec $(AA^T)^+$ la matrice pseudo-inverse de (AA^T).

1- On suppose $r = m$:

a- Montrer que AA^T est inversible.

b- Que vaut Π ?

2- On suppose $r < m$:

a- Montrer que Π est symétrique et calculer Π^2. Conclure quant à Π.

b- Depuis $A = U\Sigma V^T$ la SVD de A, donner une expression de Π ne dépendant que de U, V ou Σ.

▷ **Exercice 2.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à résoudre le système $Ax = b$ avec des méthodes itératives construites depuis l'algorithme 1:

Dans tout ce qui suit, on suppose que le test d'arrêt s'est activé à l'itération m :

$$\forall j = 1 \cdots m-1, \quad h_{j+1,j} > 0 \text{ et } h_{m+1,m} = 0.$$

On pose:

- $V_m = [v_1, \cdots, v_m] \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$,
- $H_m \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ telle que $[H_m]_{i,j} = h_{i,j}$ avec $1 \leq i, j \leq m$,
- $\bar{H}_m \in \mathcal{M}_{m+1,m}(\mathbb{R})$ telle que $[\bar{H}_m]_{i,j} = h_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq m+1$ et $1 \leq j \leq m$.

Algorithm 1

1: Choisir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leq n$
2: $r_0 = b - Ax_0$; $\beta = \|r_0\|_2$
3: $v_1 = r_0/\|r_0\|_2$;
4: **for** $j = 1, 2, \ldots, m$ **do**
5: $\quad w_j = Av_j - \sum_{i=1}^{j} h_{i,j} v_i$ avec $h_{i,j} = v_i^T A v_j \quad \forall i = 1 \cdots j$
6: $\quad h_{j+1,j} = \|w_j\|_2$
7: $\quad$ **if** $h_{j+1,j} = 0$ **then**
8: $\qquad$ m = j
9: $\qquad$ Arrêt
10: $\quad$ **end if**
11: $\quad v_{j+1} = w_j/h_{j+1,j}$
12: **end for**

Etude de l'Algorithme 1

1- Quel processus est associé à cet algorithme ?

2- Comme vu en TP, proposer un algorithme réalisant l'étape 5 ? Vous l'expliciterez et justifierez votre choix.

3- Quelles sont les complexités calcul, à savoir le nombre d'opérations en virgule flottante, et mémoire obtenue après m itérations ?

4- On suppose $m = 4$ pour cette question. Représenter les matrices H_m et $\bar{H}_m$.

5- Montrer que les colonnes de V_{m+1}, et donc de V_m, sont orthonormales deux à deux.

On admet les relations suivantes :

$$AV_m = V_m H_m + h_{m+1,m} v_{m+1} e_m^T \tag{1}$$

$$AV_m = V_{m+1} \bar{H}_m \tag{2}$$

6- Montrer que $V_m^T A V_m = H_m$.

Un algorithme pour résoudre $Ax = b$

On suppose avoir réalisé m itérations de l'Algorithme 1 depuis $x_0 \in \mathbb{R}^n$ avec $r_0 = b - Ax_0$ et $\beta = \|r_0\|_2$, avec m tel que

$$\forall j = 1 \cdots m, \quad h_{j+1,j} > 0$$

7- Justifier que la matrice H_m est inversible.

8- On note $y_m \in \mathbb{R}^n$ la solution du système $H_m y = \beta e_1$ avec e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Proposer un algorithme de résolution de ce système basé sur une factorisation de la matrice H_m. Vous donnerez la complexité calcul et mémoire de celui-ci.

9- On note $x_m = x_0 + V_m y_m$. Montrer que

$$\|b - Ax_m\|_2 = h_{m+1,m}|e_m^T y_m|$$

10- Justifier pourquoi cet algorithme converge en au plus n itérations vers la solution de $Ax = b$.

11- Donner la complexité calcul et mémoire de cette approche pour obtenir la solution x. Commenter l'intérêt de son utilisation vis-à-vis du gradient conjugué dans le cas où A est symétrique définie positive.