PROBABILITÉS

I. Formules de Base

Def - Probabilités Conditionnelles :

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$
$$p(x, y) = p(x|y)p(., y)$$

Def – Espérence :

$$E(\alpha(X)) = \begin{cases} \sum_{i \in I} \alpha(x_i)P(x_i) \\ \int_{\mathbb{R}} \alpha(u)p(u)du \end{cases}$$

Th - Probabilités Totales :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B|A_i)P(A_i)$$

Th - Formule de BAYES :

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$
$$p(x|y) = \frac{p(x|y)p(x, .)}{p(., y)}$$

II. Probabilités Continues

Def - Probabilités Continues :

$$P[X \in \Delta] = \int_{\Delta} p(u)du$$

Def – Loi Normale :

$$X \sim N(m, \sigma^2) \qquad p_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Th – Changement de VA Continues Par g Bijective :

$$Y = g(X) \qquad p_Y(y) = p_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

$(U,V)=g(X,Y)$ $\quad p_{U,V}(u,v)=p_{X,Y}[g^{-1}(u,v)]|det(J)|$ avec $J=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

Prop – Indépendance :

Si X et Y sont indépendantes et α et β sont continues, alors $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ le sont aussi

III. Vecteurs Gaussiens

Def – Vecteur Gaussien :

$X \sim N_n(m,\Sigma)$ $\quad p_X(x)=\frac{1}{\sqrt{det(\Sigma)}(2\pi)^{n/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)^T\Sigma^{-1}(x-m)\right]$

Prop – Transformation Affine :

$X \sim N_n(m,\Sigma)$ $\quad Y=AX+b$ $\quad Y \sim N_p(Am+b, A\Sigma A^T)$

Prop – Lois Marginales :

$X=\begin{pmatrix} X' \\ X'' \end{pmatrix} \sim N_n(m,\Sigma)$, $m=\begin{pmatrix} m' \\ m'' \end{pmatrix}$, $\Sigma=\begin{pmatrix} \Sigma' & M \\ M^T & \Sigma'' \end{pmatrix}$

$X' \sim N_p(m',\Sigma')$

X' et X'' sont indépendants si et ssi M = 0

Prop – Loi du Chi2 :

$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ ... \\ X_n \end{pmatrix} \sim N_n\left(\begin{pmatrix} 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}, I_n\right)$ $\quad Y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$

$E(Y)=n$ $\quad Var(Y)=2n$

$p_Y(y)=\frac{y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}I_{\mathbb{R}^+}(y)$

$\phi_n(t)=(1-2it)^{-\frac{n}{2}}$

Si $Y \sim \chi_n^2$, $Z \sim \chi_m^2$ et Y et Z ind. alors $Y+Z \sim \chi_{n+m}^2$

IV. Convergence et Théorèmes Limites

Def – Convergence en Loi :

$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\rightarrow}} X$

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers X si et ssi $F_n(x)=P[X_n<x]$ CVS vers $F(x)=P[X<x]$

Def – Convergence en Probabilité :

$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\rightarrow}} X$

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si et ssi $\forall\, \epsilon>0$ on a $P(|X_n-X|>\epsilon) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

Def – Convergence en Moyenne Quadratique :

$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{MQ}{\rightarrow}} X$

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers X si et ssi $E[(X_n-X)^2] \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$

Th – Loi Faible de Grands Nombres :

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des va indés de même loi et de moyenne m < ∞ alors

$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est telle que $\bar{X}_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\rightarrow}} m$

Th – Loi Forte de Grands Nombres :

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des va indés de même loi et de moyenne m < ∞ et de variance σ² < ∞ alors

$\bar{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ est telle que $\bar{X}_n \underset{n\to\infty}{\overset{QP}{\rightarrow}} m$

Th – Limite Centrale :

$(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des va indés de même loi et de moyenne m < ∞ et de variance σ² < ∞ alors

$Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-nm}{\sqrt{n\sigma^2}}$ est telle que $Y \underset{n\to\infty}{\overset{L}{\rightarrow}} N(0,1)$