TD 4 PROBABILITÉS - COUPLES DE VARIABLES ALÉATOIRES CONTINUES - 1SN

Exercice 1 : un vecteur non-gaussien de lois marginales gaussiennes.
Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires de densité :

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = k \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) & (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^- \\ f(x, y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer k.
2) Déterminer les lois marginales de X et de Y
3) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4) Calculer la covariance du couple (X, Y) notée cov(X, Y).
5) Déterminer les lois de $Z = X + Y$ et de $U = X - Y$ en fonction de $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$
6) Déterminer la loi de $T = Y/X$.

Exercice 2 : Simulation de variables aléatoires normales. Méthode de Box-Müller.
Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de mêmes lois uniformes sur $]0, 1[$. On définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} X & = & \sqrt{-2\ln U}\cos(2\pi V) \\ Y & = & \sqrt{-2\ln U}\sin(2\pi V) \end{array}$$

Montrer que X et Y sont des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes. Application ?

Exercice 3 : couple de variables aléatoires continues.
Soit $\theta > 0$ et $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad / \quad 0 < y < x\right\}$. Un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles a pour densité :

$$\begin{array}{ll} f(x, y) = \theta^2 e^{-\theta x} & (x, y) \in D \\ f(x, y) = 0 & \text{sinon} \end{array}$$

1) Calculer les lois marginales de X et de Y.
2) Calculer la loi de $Z = Y/X$ et montrer que les variables aléatoires X et Z sont indépendantes.

Applications aux sciences du numérique

Exercice 4 : Lois de Rayleigh et de Rice

On considère un couple de variables aléatoires (X, Y) où X et Y sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.

1) Déterminer la loi du couple (R, Θ) puis les lois marginales de R et de Θ lorsque

$$\begin{cases} X = R\cos\Theta \\ Y = R\sin\Theta \end{cases}$$

Que peut on en conclure sur la dépendance des va R et Θ ?

Remarque : on dit que R suit la loi de Rayleigh et on vérifie que sa moyenne et sa variance vérifient $E\left[R\right] = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ et $Var\left[R\right] = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$.

2) Mêmes questions que précédemment lorque X et Y sont deux va indépendantes de lois respectives $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$ et $\mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$. On exprimera les résultats à l'aide de la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\varphi} d\varphi$$

et de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du$$

Remarque : on dit que R suit la loi de Rice et on vérifie que X et Y sont des va indépendantes si et seulement si $m = 0$.

Application : vous verrez plus tard que la modélisation d'un bruit blanc Gaussien centré à bande étroite conduit au signal

$$\begin{aligned} b(t) &= X(t)\cos\left(2\pi f_0 t\right) - Y(t)\sin\left(2\pi f_0 t\right) \\ &= R(t)\cos\left(2\pi f_0 t + \Theta\right) \end{aligned}$$

À chaque instant t, $R(t)$ représente l'amplitude du signal reçu dont il est important de connaître les propriétés statistiques.

Réponses

Exercice 1

1) L'intégrale d'une densité de probabilité étant égale à 1, on en déduit

$$k = \left[\int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^-} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy\right]^{-1}.$$

Par symétrie, on en déduit

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-\times\mathbb{R}^-} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy &= 2\int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dxdy \\
&= 2\left[\int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right]^2 \\
&= 2\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right]^2 \\
&= 2\left[\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx\right]^2 \\
&= \pi
\end{aligned}$$

d'où

$$k = \frac{1}{\pi}.$$

2) En observant la forme du domaine de définition du couple, on en déduit que X et Y sont toutes deux à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus

$$p(x,.) = \int_{\mathbb{R}} p(x,y)dy = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^+} p(x,y)dy \text{ si } x > 0 \\ \int_{\mathbb{R}^-} p(x,y)dy \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

On effectue le calcul pour $x > 0$ (le résultat sera le même pour $x < 0$ par symétrie) et on obtient

$$\begin{aligned}
p(x,.) &= \int_0^\infty \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\int_{-\infty}^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

qui est la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Puisque le résultat est identique pour $x < 0$, on en déduit

$$X \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Par symétrie, on obtient

$$Y \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Cet exemple très classique montre qu'un couple (X,Y) peut être non gaussien même si les lois marginales de X et Y sont gaussiennes.

3) Si les variables X et Y étaient indépendantes, on aurait $p(x,y) = p(x,.)p(.,y), \forall x, y$ et donc comme $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, on aurait

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right], \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Comme ce n'est pas le cas, les variables X et Y ne sont pas indépendantes.
4) Par définition

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Puisque $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a $E[X] = 0$ et donc

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E[XY] = \int\int_{\mathbb{R}^2} xyp(x,y)dxdy.$$

Par symétrie

$$\mathrm{cov}(X,Y) = 2\int\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} xyp(x,y)dxdy.$$

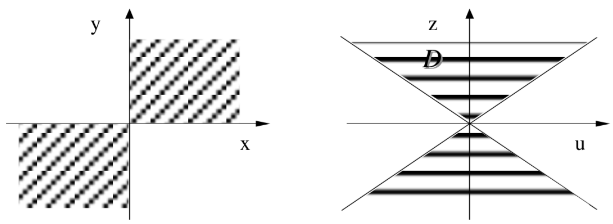
Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty xy\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dy \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\infty x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)dx\right]^2 \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

5) Le changement de variables

$$\begin{cases} Z = X+Y \\ U = X-Y \end{cases}$$

est bijectif car on a $X = \frac{Z+U}{2}$ et $Y = \frac{Z-U}{2}$. Le domaine de définition du couple (Z,U) noté D est représenté sur la figure ci-dessous



La matrice Jacobienne de ce changement de variables est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

d'où $|\det(J)| = \frac{1}{2}$. La densité du couple (Z,U) est donc

$$g(z,u) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\exp\left[-\frac{1}{4}(z^2+u^2)\right] & \text{si } (z,u)\in D \\ \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Les lois marginales de Z et de U s'obtiennent par intégration de $g(z,u)$

$$\begin{aligned} g(z,.) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z,u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)\int_{-|z|}^{|z|}\exp\left(-\frac{u^2}{4}\right)du \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $v = \frac{u}{\sqrt{2}}$, on obtient

$$g(z,.) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) \left[\Phi\left(\frac{|z|}{\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(-\frac{|z|}{\sqrt{2}}\right)\right], \quad z \in \mathbb{R}.$$

La loi marginale de U se détermine de manière similaire

$$\begin{aligned} g(.,u) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(z,u)dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \left[\int_{-\infty}^{-|u|} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right) dz + \int_{|u|}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{4}\right)\right] dz \end{aligned}$$

soit

$$g(.,u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{4}\right) \Phi\left(-\frac{|u|}{\sqrt{2}}\right), \ u \in \mathbb{R}.$$

On remarquera que $Z = X + Y$ et $U = X + Y$ ne suivent pas des lois normales, alors que X et Y suivent toutes les deux des lois normales.
6) On peut effectuer un changement de variables après avoir introduit une variable auxiliaire. Mais peut-être plus simplement, on peut calculer la fonction de répartition de T

$$P[T < t] = P\left[\frac{Y}{X} < t\right] = P[Y < tX, X > 0] + P[Y > tX, X < 0].$$

Puisque Y et X sont de même signe, on a $P[T < t] = 0$ pour $t < 0$. De plus, pour $t > 0$

$$\begin{aligned} P[T < t] &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{tx} ke^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy\right] dx + \int_{-\infty}^{0} \left[\int_{tx}^{0} ke^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy\right] dx \\ &= 2\int_0^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}} \left[\int_0^{tx} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right] dx. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à t, on obtient la densité de T

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\int_0^{+\infty} ke^{-\frac{x^2}{2}} \left[xe^{-\frac{t^2x^2}{2}}\right] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{\left(t^2+1\right)x^2}{2}} dx \end{aligned}$$

soit

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \frac{\left[-e^{-\frac{\left(t^2+1\right)x^2}{2}}\right]_0^{+\infty}}{t^2+1} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2+1} 1_{\mathbb{R}^+}(t)$$

On vérifie que

$$\int_{R^+} \frac{2}{\pi} \frac{1}{t^2+1} dt = 1.$$

Exercice 2

Le changement de variables se décompose comme suit

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{-2\ln U} = R \\ 2\pi V = \Theta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} R\cos\Theta = X \\ R\sin\Theta = Y \end{pmatrix}$$

La première application est bijective de $]0,1[\times]0,1[$ dans $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$
La deuxième application est bijective de $]0,+\infty[\times]0,2\pi[$ dans $\mathbb{R}^2\backslash$ {axe Ox$^+$}
On a classiquement

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{X^2+Y^2} \\ \Theta &= \arctan\left[\frac{Y}{X}\right] + k\pi \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} U &= \exp\left(-\frac{X^2+Y^2}{2}\right) \\ V &= \frac{1}{2\pi}\left[\arctan\left(\frac{Y}{X}\right) + k\pi\right] \end{aligned}$$

La matrice Jacobienne de ce changement de variables est

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) & -y\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \\ \\ \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{-y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} & \frac{1}{2\pi}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice Jacobienne est

$$\det(J) = \frac{1}{2\pi}\frac{x^2}{x^2+y^2}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\left[-1-\frac{y^2}{x^2}\right] = -\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

Le jacobien de la transformation est donc

$$|\det(J)| = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}.$$

D'où la densité du couple (X,Y)

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}1_{\mathbb{R}^2}(x,y).$$

X et Y sont donc deux variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$. Ce résultat est utile car il permet de générer des variables aléatoires indépendantes de lois normales $\mathcal{N}(0,1)$ à partir de lois uniformes indépendantes.

Exercice 3

1) Des calculs élémentaires permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} f(x,.) &= \theta^2 x e^{-\theta x}1_{\mathbb{R}^+}(x) \\ f(.,y) &= \theta e^{-\theta y}1_{\mathbb{R}^+}(y) \end{aligned}$$

Donc Y suit une loi exponentielle de paramètre θ et X suit une loi gamma $\Gamma(\theta,2)$.

2) On pose

$$\begin{cases} Z = \dfrac{Y}{X} \\ T = X \end{cases}$$

Le changement de variables est bijectif de D dans $]0,1[\times\mathbb{R}^+$. Le Jacobien est $|J| = t$ et la densité du couple (Z,T) est

$$g(z,t) = t\theta^2 e^{-\theta t} 1_{]0,1[\times\mathbb{R}^+}(z,t).$$

Par intégration, on en déduit que Z suit une loi uniforme sur $]0,1[$ et que T suit une loi gamma $\Gamma(\theta,2)$. Les variables Z et T sont indépendantes.

Exercice 4

1) On montre par un changement de variables standard que le couple (R,Θ) possède la densité

$$f(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\dfrac{r^2}{2\sigma^2}} 1_{\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[}(r,\theta)$$

puis par intégration

$$\begin{aligned} f(r,.) &= \frac{r}{\sigma^2} e^{-\dfrac{r^2}{2\sigma^2}} 1_{\mathbb{R}^+}(r) \\ f(.,\theta) &= \frac{1}{2\pi} 1_{]0,2\pi[}(\theta) \end{aligned}$$

La loi de R est appelée loi de Rayleigh.

2) La densité du couple (R,Θ) est

$$g(r,\theta) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2 - 2mr\cos\theta + m^2}{2\sigma^2}\right\} 1_{\mathbb{R}^+\times]0,2\pi[}(r,\theta)$$

puis par intégration

$$\begin{aligned} f(r,.) &= \frac{r}{\sigma^2} e^{-\dfrac{r^2+m^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{mr}{\sigma^2}\right) 1_{\mathbb{R}^+}(r) \\ f(.,\theta) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\dfrac{m^2}{2\sigma^2}} + \left(\frac{m\cos\theta}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right) e^{-\dfrac{m^2\sin^2\theta}{2\sigma^2}} F\left(\frac{m\cos\theta}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

La loi de R est appelée loi de Rice.