INTRODUCTION AUX TELECOMMUNICATIONS
Première année télécommunications et réseaux
2022 – 2023

Correction du TD3
Impact du bruit - Filtrage adapté - Calcul de TEB - Efficacité en puissance

I. Exercice 1 : Études de chaines de transmission en bande de base sur canal AWGN

Soit le système de transmission donné par la figure 1. On considèrera un mapping binaire à moyenne nulle (symboles $a_k \in \{-1, 1\}$ indépendants et équiprobables) et un bruit $n(t)$ blanc et gaussien, de densité spectrale de puissance égale à $\frac{N_0}{2}$ quelle que soit la fréquence.

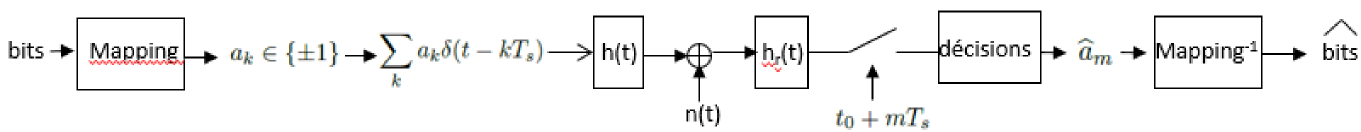

Fig. 1. chaîne de transmission considérée dans l'exercice 1

A. Question

Identifier, sur la figure 1, le modulateur bande de base, le canal et le démodulateur bande de base.

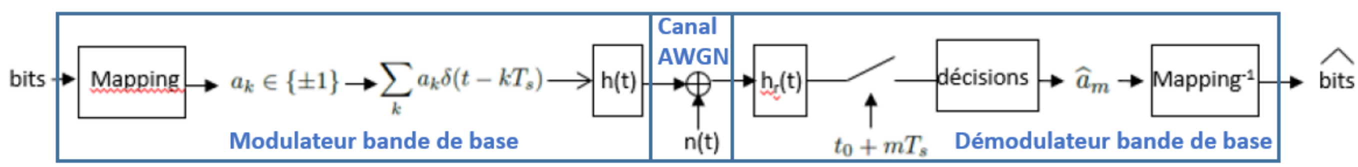

Fig. 2. Identification des élements de la chaine

B. Chaine 1 à étudier

On considère ici des réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception, $h(t)$ et $h_r(t)$, rectangulaires de durée T_s et de hauteur 1, T_s représentant la durée symbole.

1) A quelle condition la chaîne de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ?
   La réponse impulsionnelle causale de toute la chaine, $g(t) = h(t) * h_r(t)$ (pas de filtre canal), est ici un triangle de base $2T_s$, centré en T_s avec une hauteur de T_s (figure 3).
   La condition pour respecter le critère de Nyquist ici est d'échantillonner à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 = T_s$. On a alors

$$g(t_0) = T_s \neq 0$$
$$g(t_0 + pT_s) = 0 \; \forall \, p \in Z^*$$

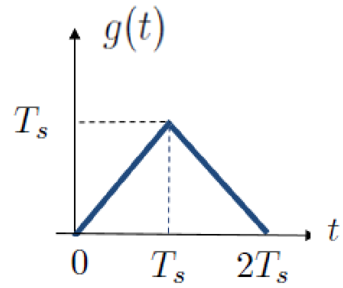

Fig. 3. Réponse impulsionnelle causale de toute la chaine 1

2) En supposant que l'on vérifie le critère de Nyquist sur la transmission, calculer le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage $t_0 + mT_s$ (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception).
En prenant $t_0 = T_s$, on obtient en sortie de l'échantillonneur à $t_0 + mT_s$: $a_m g(t_0) + w_m$.
On a donc

$$SNR = \frac{E\left[|a_m g t_0)|^2\right]}{\sigma_w^2}$$

avec

$$\sigma_w^2 = \int_R \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 \, df \text{ (relation de Wiener Lee)}$$

mais aussi

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} \int_R |h_r(t)|^2 \, dt \text{ (Egalité de Parseval)}$$

D'où :

$$SNR = \frac{E\left[|a_m g(t_0)|^2\right]}{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 \, df} = \frac{E\left[|a_m|^2\right] g^2(t_0)}{\frac{N_0}{2}\int_R |h_r(t)|^2 \, dt} = \frac{\left(\frac{1}{2}|-1|^2 + \frac{1}{2}|+1|^2\right) \times T_s^2}{\frac{N_0}{2} T_s} = \frac{2T_s}{N_0}$$

3) On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.
Seuil en 0 car :
- pour $z_m = a_m g(t_0) + w_m < 0$: $p(z_m|a_m = -1) > p(z_m|a_m = +1)$
- pour $z_m = a_m g(t_0) + w_m > 0$: $p(z_m|a_m = +1) > p(z_m|a_m = -1)$.

(règle du maximum de vraisemblance). En effet (loi des probabilités totales et symboles équiprobables) :

$$p(z_m) = \frac{1}{2} p(z_m|a_m = -1) + \frac{1}{2} p(z_m|a_m = +1)$$

donne le mélange de Gaussiennes donné par la figure 6.

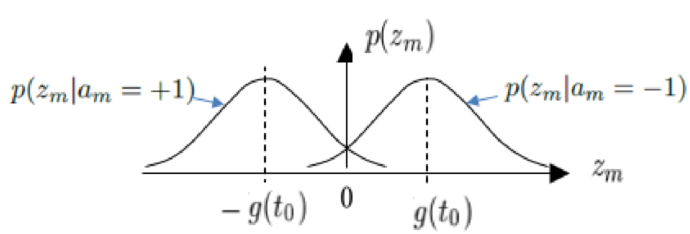

Fig. 4. Densité de probabilité de z_m

4) En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et σ_w, σ_w^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.
$TEB = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma_w}\right)$ car le critère de Nyquist est respecté et émission de symboles ± 1. D'où ici

$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{\sigma_w}\right)$$

5) Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ_w^2 en fonction de N_0 et de T_s.
Déjà fait plus haut :

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2\, df = \frac{N_0}{2}\int_R |h_r(t)|^2\, dt = \frac{N_0 T_s}{2}$$

6) Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s, en fonction de T_s.

$$E_s = P_r T_s$$

si P_r représente la puissance du signal reçu,

$$r(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT_s)$$

avec $h_e(t) = h(t) * h_c(t)$ qui représente la forme d'onde reçue. On a donc

$$P_r = \int_R S_r(f) df$$

avec

$$S_r(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s}|H_e(f)|^2 \text{ (symboles } a_k \text{ à moyenne nulle et indépendants)}$$

et

$$H_e(f) = H(f)H_c(f) = H(f) \text{ (pas de filtre canal)}$$

D'où

$$E_s = \int_R |H(f)|^2\, df = \int_R |h(t)|^2\, dt = T_s \text{ (Parseval)}$$

7) Déduire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction de E_b/N_0, rapport signal sur bruit par bit à l'entrée du récepteur, pour la chaine étudiée.
En reportant les expressions de σ_w^2 et E_s dans l'expression du TEB obtenue plus haut :

$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{\sigma_w}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

(un symbole code un bit ici : $E_b = E_s$)

C. *Chaine 2 à étudier*

On considère maintenant une réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme, $h(t)$, rectangulaire de durée T_s et de hauteur 1 et une réponse impulsionnelle du filtre de réception, $h_r(t)$, rectangulaire de durée $\frac{T_s}{2}$ et de hauteur 1, T_s représentant la durée symbole. On donne le produit de convolution entre $h(t)$ et $h_r(t)$ dans la figure 5.

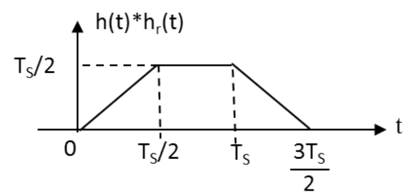

Fig. 5. Produit de convolution entre les réponses impulsionnelles des filtres de mise en forme et de réception.

1) A quelle condition la chaîne de communication peut-elle vérifier le critère de Nyquist ?
La réponse impulsionnelle causale de toute la chaine, $g(t) = h(t) * h_r(t)$ (pas de filtre canal), est donnée par la figure 5. La condition pour respecter le critère de Nyquist ici est d'échantillonner à $t_0 + mT_s$ avec $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2}, T_s\right]$. On a alors

$$g(t_0) = T_s \neq 0$$
$$g(t_0 + pT_s) = 0 \;\forall\; p \in Z^*$$

2) En supposant que l'on vérifie le critère de Nyquist sur la transmission, calculer le rapport signal sur bruit aux instants d'échantillonnage $t_0 + mT_s$ (on admettra que la puissance du bruit échantillonné et filtré est identique à celle du bruit filtré et on calculera donc cette puissance en sortie du filtre de réception). Comparer le rapport signal sur bruit obtenu ici avec celui obtenu précédemment.
En prenant $t_0 \in \left[\frac{T_s}{2}, T_s\right]$, on obtient en sortie de l'échantillonneur à $t_0 + mT_s$: $a_m g(t_0) + w_m$.
On a donc

$$SNR = \frac{E\left[|a_m g(t_0)|^2\right]}{\sigma_w^2}$$

avec

$$\sigma_w^2 = \int_R \frac{N_0}{2} |H_r(f)|^2 \, df \text{ (relation de Wiener Lee)}$$

mais aussi

$$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} \int_R |h_r(t)|^2 \, dt \text{ (Egalité de Parseval)}$$

D'où :

$$SNR = \frac{E\left[|a_m g(t_0)|^2\right]}{\frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df} = \frac{E\left[|a_m|^2\right] g^2(t_0)}{\frac{N_0}{2}\int_R |h_r(t)|^2 dt} = \frac{\left(\frac{1}{2}|-1|^2 + \frac{1}{2}|+1|^2\right) \times \left(\frac{T_s}{2}\right)^2}{\frac{N_0}{2}\frac{T_s}{2}} = \frac{T_s}{N_0}$$

Le SNR obtenu ici est plus mauvais que le précédent. On peut constater, en effet, que nous recevons $\pm\frac{T_s}{2} + w_m$ au lieu de $\pm T_s + w_m$. La distance min entre deux symboles reçus sans bruit est plus faible (T_s au lieu de $2T_s$), la sensibilité au bruit sera donc plus forte et on devrait trouver par la suite un TEB plus important que pour la chaine 1.

3) On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.
Seuil en 0 car :
- pour $z_m = a_m g(t_0) + w_m < 0 : p(z_m | a_m = -1) > p(z_m | a_m = +1)$
- pour $z_m = a_m g(t_0) + w_m > 0 : p(z_m | a_m = +1) > p(z_m | a_m = -1)$.

(règle du maximum de vraisemblance). En effet (loi des probabilités totales et symboles équiprobables) :

$$p(z_m) = \frac{1}{2}p(z_m|a_m = -1) + \frac{1}{2}p(z_m|a_m = +1)$$

donne le mélange de Gaussiennes donné par la figure 6.

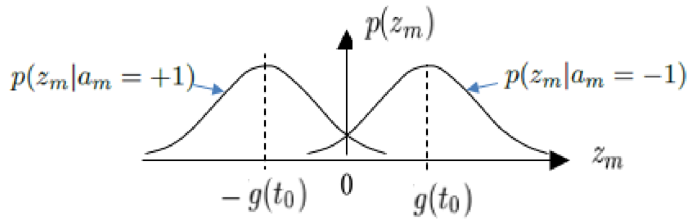

Fig. 6. Densité de probabilité de z_m

4) En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et σ_w, σ_w^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.
   $TEB = Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma_w}\right)$ car le critère de Nyqusit est respecté et émission de symboles ± 1. D'où ici
   $$TEB = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right)$$
5) Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ_w^2 en fonction de N_0 et de T_s.
   Déjà fait plus haut :
   $$\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2\, df = \frac{N_0}{2}\int_R |h_r(t)|^2\, dt = \frac{N_0 T_s}{4}$$
   .
6) Calculer l'énergie des symboles à l'entrée du récepteur, E_s, en fonction de T_s.
   $$E_s = P_r T_s$$
   si P_r représente la puissance du signal reçu,
   $$r(t) = \sum_k a_k h_e(t - kT_s)$$
   avec $h_e(t) = h(t) * h_c(t)$ qui représente la forme d'onde reçue. On a donc
   $$P_r = \int_R S_r(f)df$$
   avec
   $$S_r(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s}|H_e(f)|^2 \text{ (symboles } a_k \text{ à moyenne nulle et indépendants)}$$
   et
   $$H_e(f) = H(f)H_c(f) = H(f) \text{ (pas de filtre canal)}$$
   D'où
   $$E_s = \int_R |H(f)|^2\, df = \int_R |h(t)|^2\, dt = T_s \text{ (Parseval)}$$

7) Déduire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire (TEB) en fonction de E_b/N_0, rapport signal sur bruit par bit à l'entrée du récepteur, pour la chaine étudiée. Comparer le TEB obtenu ici avec celui obtenu précédemment. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ? Expliquer votre réponse.
En reportant les expressions de σ_w^2 et E_s dans l'expression du TEB obtenue plus haut :

$$TEB = Q\left(\frac{T_s}{2\sigma_w}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

(un symbole code un bit ici : $E_b = E_s$)

On a bien

$$Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) > Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

(voir fonction $Q(X)$: figure 7), comme on pouvait s'y attendre car le critère de filtrage adapté n'est pas respecté ici, le SNR aux instants de décision n'est donc pas maximisé (comme nous l'avons constaté précédemment) et le TES (=TEB ici) n'est donc pas minimisé.

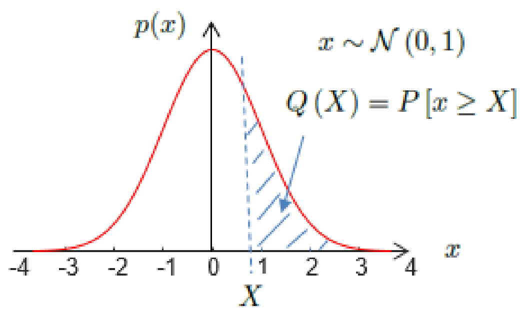

Fig. 7. Définition de la fonction $Q(X)$

II. EXERCICE 2 : ETUDE DU MAPPING

On transmet une suite de bits équiprobables et indépendants à travers un canal de transmission à bruit $n(t)$ additif, blanc et gaussien de densité spectrale de puissance $S_n(f) = N_0/2\ \forall f \in \mathbb{R}$. Le modulateur utilisé est de type NRZ à 4 niveaux et utilise le mapping suivant : 00 : -3, 01 : -1, 11 : $+1$, 10 : $+3$. Le filtre de réception est adapté à la forme d'onde reçue et on suppose que l'on échantillonne aux instants optimaux.

1) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole -1 alors que l'on a émis -3.

$$\begin{aligned} P\left(\widehat{a}_m = -1 | a_m = -3\right) &= P\left(-2g(t_0) \leq -3g(t_0) + w_m \leq 0\right) \\ &= P\left(g(t_0) \leq w_m \leq 3g(t_0)\right) \\ &= Q\left(\frac{g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

(voir figure 8 : $p(x)$ représente la densité de probablité de x qui suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance 1. Ici $x = \frac{w_m}{\sigma}$ et l'aire hachurée représente la probabilité recherchée).

2) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole $+1$ alors que l'on a émis -3.

$$\begin{aligned} P\left(\widehat{a}_m = +1 | a_m = -3\right) &= P\left(0 \leq -3g(t_0) + w_m \leq 2g(t_0)\right) \\ &= P\left(3g(t_0) \leq w_m \leq 5g(t_0)\right) \\ &= Q\left(\frac{3g(t_0)}{\sigma}\right) - Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

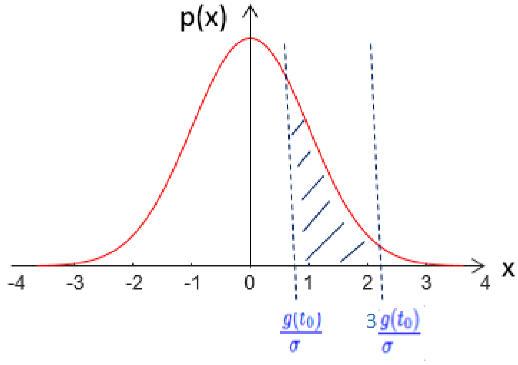

Fig. 8.

3) Calculer la probabilité de détecter (en sortie du bloc décision) le symbole $+3V$ alors que l'on a émis $-3V$.

$$\begin{aligned} P\left(\widehat{a}_m = +3 | a_m = -3\right) &= P\left(-3g(t_0) + w_m \geq 2g(t_0)\right) \\ &= P\left(w_m \geq 5g(t_0)\right) \\ &= Q\left(\frac{5g(t_0)}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

4) AN : $V = 1$, $N_0 = 10^{-3} V^2/Hz$, $R_b = 1$ kbps

$$\frac{g(t_0)}{\sigma} = \frac{T_s}{\sqrt{\frac{N_0}{2} T_s}} = \sqrt{\frac{2T_s}{N_0}} = \sqrt{\frac{2}{N_0 R_s}} = \sqrt{\frac{4}{N_0 R_b}} = 2$$

D'où :

$$P\left(\widehat{a}_m = -1 | a_m = -3\right) = Q\left(2\right) - Q\left(6\right) = 0.0228$$
$$P\left(\widehat{a}_m = +1 | a_m = -3\right) = Q\left(6\right) - Q\left(10\right) = 9.87 \times 10^{-10}$$
$$P\left(\widehat{a}_m = +3 | a_m = -3\right) = Q\left(10\right) = 7.62 \times 10^{-24}$$

5) La règle de codage choisie vous parait-elle intéressante ? Si oui, quel est son intérêt ?
On constate que, pour un symbole émis donné, la probabilité de se tromper avec le symbole qui se trouve à distance minimale est beaucoup plus importante que la probabilité de se tromper avec un symbole qui se trouve à une distance supérieure. En négligeant les probabilités de se tromper avec un symbole qui n'est pas à distance minimale on arrive à :

$$TEB \simeq \frac{TES}{log_2(M)}$$

si on utilise un mapping de Gray (un seul bit change entre deux symboles se trouvant à distance minimale, donc un symbole erroné $=$ un seul bit erroné sur $\log_2(M)$ si on a $\log_2(M)$ bits mappés dans un symbole, où M représente l'ordre de la modulation).

6) Sachant que le taux d'erreur symbole de la liaison est donné par :

$$TES = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Avec la règle de codage choisie pour le mapping donnez le taux d'erreur binaire (TEB) de la liaison, en expliquant votre réponse.

Le mapping choisi est un mapping de Gray, on a donc :

$$TES \approx \frac{TEB}{log_2(M)} \approx \frac{TEB}{2} \approx \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

en négligeant les probabilités de se tromper avec un symbole qui n'est pas à distance minimale de celui émis.

La fonction $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ est donnée par la figure 9.

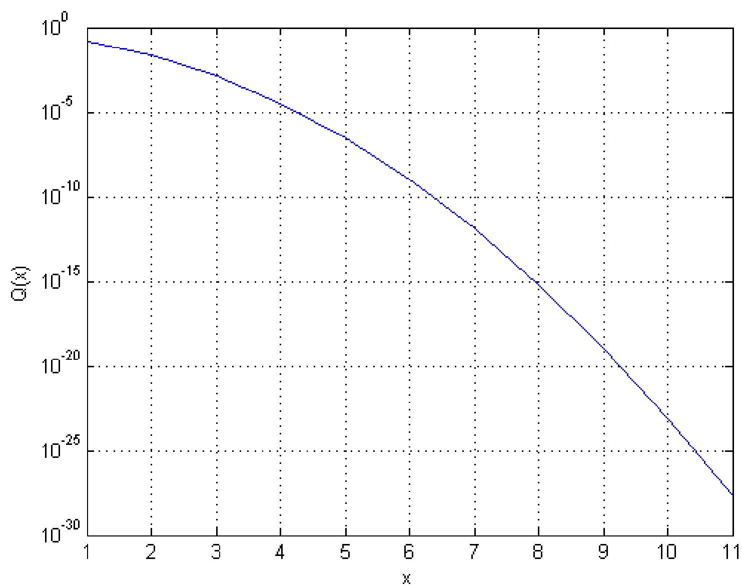

Fig. 9. Fonction $Q(x)$