1 Rappels d'algèbre linéaire

Matrice de permutation

$$P_\sigma := \left(\sum_{j=1}^{n} E_{\sigma(i),j}\right)_i$$

avec $E_{i,j}$ la matrice élémentaire (i, j).

Théorème de Schur $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \underbrace{U^* = U^{-1}}_{\text{unitaire}} \wedge U^*AU \in \mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{C})$

1.1 Méthodes itératives

Principe On cherche une suite $x^{(p)}$ de $\mathbb{R}^n$ convergeant vers la solution de $Ax = b$:

$$\forall x^{(0)} \quad x^{(p+1)} = H(x^{(p)})$$

Propriétés

- A n'est jamais modifiée
- Problème du suivi de la convergence et du choix du test d'arrêt
- Solution obtenue inexacte
- Matrice doit vérifier conditions de convergence
- Vitesse de convergence dépend de la matrice

2 Décomposition en valeurs singulières

Objectif Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$.

On pose $A = U\Sigma V^\top$ avec $\begin{cases} U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ V \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \\ \Sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

On a

$$\Sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_i & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_i & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right)$$

2.1 SVD d'une matrice

SVD Singular value decomposition
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $rgA \geq 1$

2.1.1 Propriétés

1. A est symétrique réelle semi-définie-positive i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ x^\top(A^\top A)x \geq 0$ i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \|Ax\|^2 \geq 0$
2. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$
3. $A^\top A$ est orthoDZ: $\begin{cases} \ker(A^\top A) & = \ker A \\ \mathrm{im}(A^\top A) & = \mathrm{im}(A^\top) \end{cases}$

   Preuve ***(de 3.)***

   - $\ker A \subset \ker(A^\top A)$: $\mathbb{TRIVIAL}$
   - $\ker A \supset \ker(A^\top A)$ Soit $x \in \ker(A^\top A)$.
     On a
     $$\begin{aligned} A^\top A x &= 0 \\ \implies x^\top(A^\top A x) &= 0 \\ \implies \|Ax\|^2 &= 0 \\ \implies x &\in \ker A \end{aligned}$$
   - $\mathrm{im}\, A \subset \mathrm{im}(A^\top A)$
     $$\begin{aligned} \dim\ker(A^\top A) + \mathrm{rg}(A^\top A) &= n \\ \implies \mathrm{rg}(A^\top A) &= n - \dim\ker(A^\top A) \\ &= n - \dim\ker A \qquad \text{car } \ker A = \ker(A^\top A) \\ &= \mathrm{rg}\, A \\ &= \mathrm{rg}(A^\top) \\ \implies \mathrm{im}(A^\top A) &\subset \mathrm{im}\, A \end{aligned}$$
   - $\mathrm{im}\, A \supset \mathrm{im}(A^\top A)$: $\mathbb{TRIVIAL}$
4. $A^\top A \in GL_n(\mathbb{R}) \iff \mathrm{rg}\, A = n$

   Preuve ***(de 4.)***
   $$\begin{aligned} A^\top A \in GL_n(\mathbb{R}) &\iff \ker(A^\top A) = \{0\} \\ &\iff \ker A = \{0\} \\ &\iff \mathrm{rg}\, A = n \qquad \text{par théorème du rang} \end{aligned}$$

2.2 Construction de la SVD de A

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tel que $\operatorname{rg} A \geq 1$. On note $r := \operatorname{rg} A$.

- $\dim \ker(A^\top A) = n - r$ par théorème du rang.
  Donc $0 \in \operatorname{Sp}(A^\top A)$ et $\operatorname{mult}_{A^\top A}(0) = n - r$
- On note $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} = \operatorname{Sp}(A^\top A) \subset \mathbb{R}_+^*$, **telles que** $i < j \implies \lambda_i \leq \lambda_j$
  On note $(v_i)_{i \in [\![1,r]\!]}$ une bond DZante de $A^\top A$ associée à $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$
  Et on pose enfin

$$\mathcal{E} = \left(\underbrace{v_1, \dots, v_r}_{\text{bon de } (\ker A)^\top}, \underbrace{v_{r+1}, \dots, v_n}_{\text{bon de } \ker A} \right)$$

- On pose $V = (v_1, \dots, v_r) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ Et

$$\forall i \in [\![1,n]\!] u_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned}
\forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2 \quad \langle U_i, U_j \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \langle A v_i, A v_j \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i \lambda_j}} \left\langle \underbrace{A^\top A v_i}_{\lambda_i v_i}, A^\top A v_j \right\rangle \\
&= \sqrt{\frac{\lambda_i}{\lambda_j}} \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{\delta_{ij}} && \text{car } (v_i)_i \text{ orthonormée} \\
&= \delta_{ij} && \text{car si } i = j \text{, ça fait 1, sinon ça fait 0}
\end{aligned}$$

  Donc $(U_i)_i$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}^m$
  Donc $\operatorname{rg}(U_i)_{i \in [\![1,n]\!]} = r$
  Or $(u_i)_i \subset \operatorname{im} A$
  D'où $(u_i)_i \subset \operatorname{im} A$ et $(\operatorname{rg} u_i)_i = \operatorname{rg} A$
  Donc $(U_i)_i = \operatorname{im} A$
  et $(U_i)_i$ bon de $\operatorname{im} A$.
  D'où $0 \in \operatorname{Sp}(A^\top A)$ avec $\operatorname{im} A$
  On la complète en $(U_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$ bon de $\mathbb{R}^m$

$$\mathcal{F} = \left(\underbrace{u_1, \dots, u_r}_{\text{bon de im } A}, \underbrace{u_{r+1}, \dots, u_m}_{\text{bon de } (\text{im } A)^\top} \right)$$

Posons $U = (U_1, \dots, U_m) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Remarque $\forall i \in [\![1, r]\!]$

$$Bu_i = \mu_i u_i$$

Avec B, μ_i à determiner.

$$\begin{aligned}
AA^\top U_i &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \underbrace{}_{=\lambda_i v_i} \underbrace{AA^\top A v_i}_{\text{par def de } v_i} \\
&= \sqrt{\lambda_i} A v_i \\
&= \lambda_i \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A v_i \right)}_{U_i} \\
&= \lambda_i U_i
\end{aligned}$$

D'où U_i vecteur propre de $AA^\top$ associé à λ_i

- On pose

$$\begin{aligned}
\Sigma &= U^\top A V \\
&= U^\top \left(\underbrace{Av_1, \dots, Av_r}_{\sqrt{\lambda_i} u_i}, \underbrace{Av_{r+1}, \dots, Av_n}_{0 \text{ car } v_i \in \ker A} \right) \\
&= \begin{pmatrix} u_1^\top \\ \vdots \\ u_m^\top \end{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{\lambda_j} \langle u_i, u_j \rangle | (0)}{\sqrt{\lambda_j} \langle u_i, u_j \rangle | (0)} \right) \\
&= \left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{\lambda_1} & & (0) & \\ & \ddots & & (0) \\ (0) & & \sqrt{\lambda_r} & \\ \hline & (0) & & (0) \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\implies A = U \sigma V^\top$$

Définition: SVD de A Décomposition de la forme

$$A = U\Sigma V^\top$$

Avec U, Σ, V comme définies précédemment
On appelle valeurs singulières notées $(\sigma_i)_i$ les valeurs propres racines carrées