Examen de télécommunications
Première année Sciences du Numérique

Feuille A4 recto verso autorisée.
Téléphones portables interdits, Durée : 1h30.

23 mai 2022

1 Consignes

Répondre directement sur l'énoncé pour les questions et l'exercice 2 Donnez ici :

- Votre nom :
- Votre prénom :

2 Questions (5 points)

Entourez directement sur l'énoncé la lettre correspondant à la réponse choisie.
Plusieurs réponses peuvent être possibles pour une même question.
0.5 point par question.
!! -0.10 point par réponse fausse, ou réponse manquante quand plusieurs choix possibles !!

2.1 Question 1

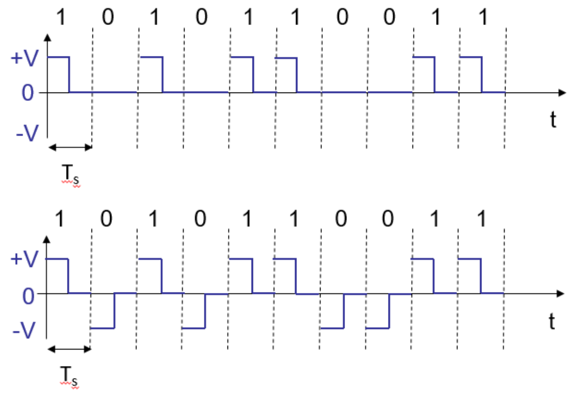
Une transmission réalisée en bande de base est transmission pour laquelle :

- Réponse A : Le signal transmis est un signal mis en forme de manière basique (symboles binaires et filtre rectangulaire),
- Réponse B : Le signal transmis possède une densité spectrale de puissance qui s'étend autour de la fréquence 0,
- Réponse C : Le signal transmis n'est pas transporté sur fréquence porteuse.

2.2 Question 2

La figure suivante présente deux signaux transportant la même information binaire. Afin de générer le deuxième signal, qu'avons nous changé par rapport au premier :

- Réponse A : Le mapping.
- Réponse B : La réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme.
- Réponse C : La période symbole.
- Réponse D : Vous n'avez pas assez d'éléments pour répondre à la question.



2.3 Question 3

On considère une transmission avec un mapping délivrant des symboles binaires à moyenne nulle et un filtre de mise en forme rectangulaire de durée T_s, T_s représentant la période symbole. Cette transmission sera :

- Réponse A : Plus efficace spectralement qu'une transmission transportant des symboles 4-aires à moyenne nulle et utilisant un filtre de mise en forme rectangulaire de durée T_s.
- Réponse B : Plus efficace spectralement qu'une transmission transportant des symboles binaires à moyenne nulle et utilisant un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé de roll-off 0.5.
- Réponse C : Moins efficace spectralement qu'une transmission transportant des symboles 4-aires à moyenne nulle et utilisant un filtre de mise en forme rectangulaire de durée T_s.
- Réponse D : Moins efficace spectralement qu'une transmission transportant des symboles 4-aires à moyenne nulle et utilisant un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé de roll-off 0.5.

2.4 Question 4

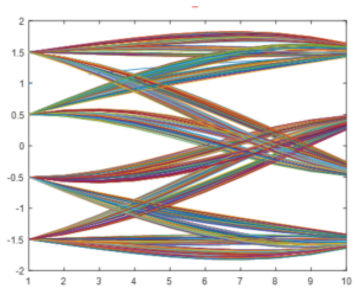
En considérant qu'il est possible de transmettre un débit symbole R_s de 6000 symboles/s, avec une modulation QPSK, on pourra transmettre un débit binaire maximal de :

- Réponse A : 3000 bits/s.
- Réponse B : 6000 bits/s.
- Réponse C : 12000 bits/s.
- Réponse D : Vous n'avez pas assez d'éléments pour répondre à la question.

2.5 Question 5

Soit une chaine de transmission transportant des symboles 4-aires. La figure suivante donne le diagramme de l'oeil qui a été tracé, sans bruit, sur le signal en sortie du filtre de réception sur une durée T_s (composée de 10 échantillons espacés de T_e). La chaine de transmission :

- Réponse A : Peut respecter le critère de Nyquist.
- Réponse B : Ne peut pas respecter le critère de Nyquist.
- Réponse C : Ne peut pas respecter le critère de Nyquist tant que le débit symbole n'est pas assez élevé.
- Réponse D : Vous n'avez pas assez d'éléments pour répondre à la question.



2.6 Question 6

On considère une chaine de transmission utilisant un filtre de mise en forme et un filtre de réception en racine de cosinus surélevé de même roll off égal à 0.5. En considérant un canal de propagation idéal de bande 30 kHz (c'est-à-dire réponse en fréquence plate sur la bande du canal), si on veut pouvoir respecter le critère de Nyquist et transmettre un débit binaire de 60 kbits/s, on pourra utiliser une modulation :

- Réponse A : 2-PAM.
- Réponse B : 4-PAM.
- Réponse C : 8-PAM.
- Réponse D : QPSK.
- Réponse E : 8-PSK.
- Réponse F : $16-QAM$.

2.7 Question 7

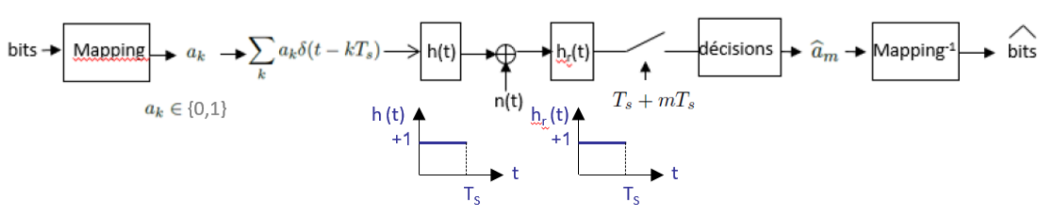
Soit une chaine de transmission transportant des symboles 4-aires et respectant le critère de Nyquist. En supposant que l'on utilise les seuils optimaux pour la décision, respecter le critère de filtrage adapté permet :

- Réponse A : de maximiser le rapport signal à bruit aux instants de décision.
- Réponse B : de minimiser le rapport signal à bruit aux instants de décision.
- Réponse C : d'obtenir le taux d'erreur symbole minimal, quel que soit le mapping utilisé.
- Réponse E : d'obtenir le taux d'erreur binaire minimal, quel que soit le mapping utilisé.

2.8 Question 8

Soit la transmission de la figure suivante. En considérant un détecteur à seuil pour prendre les décisions, quel est le seuil de décision optimal à utiliser dans cette chaine de transmission ?

- Réponse A : 0.
- Réponse B : 0.5.
- Réponse C : $0.5T_s$.
- Réponse D : T_s.



2.9 Question 9

Soit un modulateur numérique constitué d'un mapping binaire avec symboles appartenant à l'alphabet $\{+/-1\}$ et d'un filtre de mise en forme dont la réponse impulsionnelle est rectangulaire de durée T_s, le débit symbole étant $R_s = 1/T_s$. On place en réception un filtre dont la réponse impulsionnelle est rectangulaire de durée $\frac{T_s}{2}$. On échantillonne à $\frac{T_s}{2} + mT_s$ et on utilise un détecteur à seuil avec un seuil à 0 pour prendre les décisions. Le taux d'erreur binaire obtenu sera :

- Réponse A : $> Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$.
- Réponse B : $< Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$.
- Réponse C : $= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$.

$\frac{E_b}{N_0}$ représente le rapport signal à bruit par bit à l'entrée du récepteur.

2.10 Question 10

En supposant, dans tous les cas, des symboles indépendants, équiprobables, à moyenne nulle, le respect du critère de Nyquist et du critère de filtrage adapté et des seuils optimaux de décision, une modulation 16-QAM avec filtrage de mise en forme rectangulaire de durée T_s :

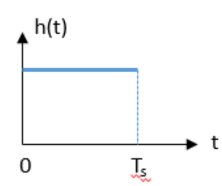
- Réponse A : Est plus efficace en puissance qu'une modulation 16-QAM avec filtrage de mise en forme en racine de cosinus surélevé,
- Réponse B : Est moins efficace spectralement qu'une modulation 16-QAM avec filtrage de mise en forme en racine de cosinus surélevé.
- Réponse C : Est plus efficace en puissance qu'une modulation 8-PSK avec filtrage de mise en forme rectangulaire de durée T_s.
- Réponse D : Est moins efficace en puissance qu'une modulation QPSK avec filtrage de mise en forme rectangulaire de durée T_s.

3 Exercice 1 (10 points)

On considère, dans cet exercice, une modulation OOK (On Off Keying) en bande de base. C'est une modulation binaire définie par les 2 morceaux de signaux suivants : $s_0(t) = 0 \ pour \ 0 \leq t \leq T_s$ et $s_1(t) = V \ pour \ 0 \leq t \leq T_s$. T_s représente la période symbole. $s_0(t)$ est le morceau de signal utilisé pour transmettre un bit 0, tandis que $s_1(t)$ est le morceau de signal utilisé pour transmettre un bit 1. Les bits à transmettre seront supposés équiprobables et indépendants. Le signal en sortie du modulateur sera noté $x(t)$.

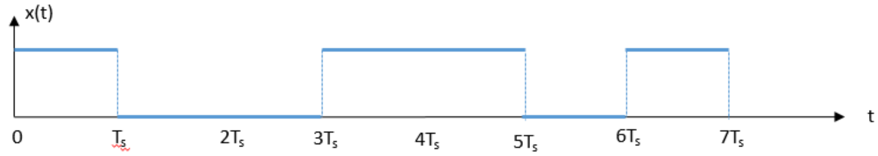
1. Donnez le mapping et la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme permettant de générer le signal $x(t)$ modulé en OOK.

Bits	Symboles
0	0
1	V



2. Tracer le signal $x(t)$ pour la suite de bits émise : 1001101.
3. Calculez la densité spectrale de puissance du signal OOK $x(t)$. On la notera $S_x(f)$.

$$m_a = E[a_k] = \frac{1}{2} \times (0) + \frac{1}{2} \times (V) = \frac{V}{2}$$



$$\sigma_a^2 = E\left[|a_k - m_a|^2\right] = \frac{1}{2} \times (|-\frac{V}{2}|^2) + \frac{1}{2} \times (|V - \frac{V}{2}|^2) = \frac{V^2}{4}$$

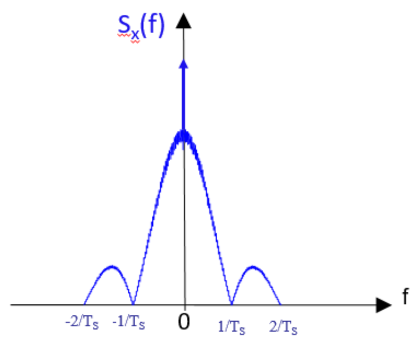
$$R_a(k) = 0 \; \forall k \neq 0$$

$$H(f) = T_s sinc\left(\pi f T_s\right) e^{-j2\pi f T_s}$$

$$S_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T_s} \int_R |H(f)|^2 df + \frac{|m_a|^2}{T_s^2} \sum_k |H\left(\frac{k}{T_s}\right)|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right)$$

$$= \frac{V^2}{4T_s} \int_R |h(t)|^2 dt + \frac{V^2}{4T_s^2} \sum_k sinc^2(\pi k)\delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right) = \frac{V^2 T_s}{4} sinc^2(\pi f T_s) + \frac{V^2}{4}\delta(f)$$

4. Tracez $S_x(f)$ pour $f \in \left[-\frac{2}{T_s}, \frac{2}{T_s}\right]$



5. A partir de l'expression de $S_x(f)$, montrez que la puissance du signal OOK $x(t)$ est $P_x = \frac{V^2}{2}$. On donne $\int_R B^2 sinc^2\left(\pi B f\right) df = B$ et on rappelle que $sinc(u) = \frac{\sin(u)}{u}$ et que $\int_R \delta\left(f\right) df = 1$ (ou plus exactement : la transformée de Fourier inverse d'un Dirac est égale à 1 en tout point). Si problème sur cette question, le résultat peut être admis pour la suite.

$$Px = \int_R S_x(f) df = \frac{V^2 T_s}{4} \int_R sinc^2(\pi f T_s) df + \frac{V^2}{4} \int_R \delta(f) df$$

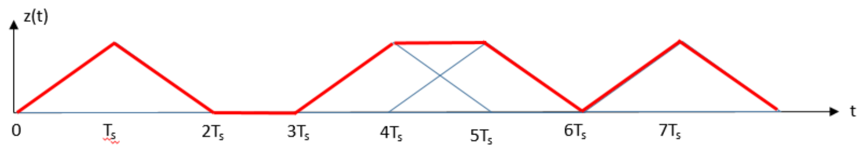
$$= \frac{V^2}{4T_s} \int_R T_s^2 sinc^2(\pi f T_s) df + \frac{V^2}{4} \int_R \delta(f) df$$

$$= \frac{V^2}{4} + \frac{V^2}{4} = \frac{V^2}{2}$$

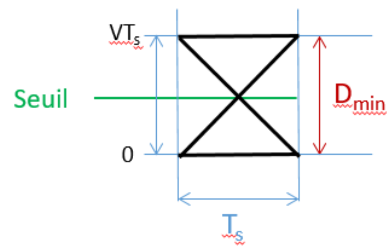
6. On supposera pour toute la suite que le canal est AWGN (pas de filtre canal, juste un ajout de bruit) et qu'on utilise un filtre de réception avec une réponse impulsionnelle donnée par $h_r(t) = 1 \; pour 0 \leq t \leq T_s, \; 0 \; ailleurs.$

   (a) Cette chaine de transmission pourra t-elle respecter le critère de Nyquist ? Justifiez votre réponse. Oui pour $t_0 = T_s$ (convolution de deux rectangle de durée T_s donnant un triangle de durée $2T_s$ et max en T_s

   (b) Sans bruit, tracer le signal $z(t)$ obtenu en sortie du filtre de réception, de réponse impulsionnelle $h_r(t)$ donnée précédemment, la suite de bits émise : 1001101.



(c) Toujours sans bruit, tracez le diagramme de l'oeil obtenu en sortie du filtre de réception avec une base de temps de T_s.



(d) Proposez un instant optimal t_0 pour démarrer l'échantillonnage en expliquant votre choix. On échantillonnera alors aux instants $t_0 + mT_s$, $m = 0, 1, 2, ...$.
$t_0 = T_s$ pour respecter le critère de Nyquist

(e) En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux, quelle est la distance minimale entre deux symboles reçus sans bruit ? Justifiez votre réponse.
$D_min = VT_s$ (cf diagramme de l'oeil)

(f) On choisira d'utiliser un détecteur à seuil. Déterminer le seuil optimal à utiliser en expliquant votre choix.
$VT_s/2$ (cf diagramme de l'oeil)

(g) En supposant que l'on échantillonne aux instants optimaux et que l'on utilise le seuil optimal de décision, donner le taux d'erreur binaire de la transmission en fonction de T_s et de σ_w, σ_w^2 représentant la puissance du bruit en sortie du filtre de réception $h_r(t)$.
$TEB = TES = Q\left(\frac{D_{min}}{2\sigma_w}\right) = Q\left(\frac{VT_s}{2\sigma_w}\right)$

(h) Calculer la puissance du bruit en sortie du filtre de réception σ_w^2 en fonction de N_0 et de T_s.
$sigma_w^2 = \frac{N_0}{2}\int_R |H_r(f)|^2 df = \frac{N_0}{2}\int_R |h_r(t)|^2 dt = \frac{N_0 T_s}{2}$

(i) Calculez l'énergie par bit à l'entrée du récepteur, E_b, en fonction de T_s.
$E_b = E_s = P_x T_s = \frac{V^2 T_s}{2}$

(j) Déduire des questions précédentes l'expression du taux d'erreur binaire en fonction de E_b/N_0.
$TEB = Q\left(\frac{VT_s}{2\sigma_w}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

7. La figure 1 trace le TEB obtenu pour la chaine de transmission étudiée et le compare au taux d'erreur binaire donné par $TEB = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$.

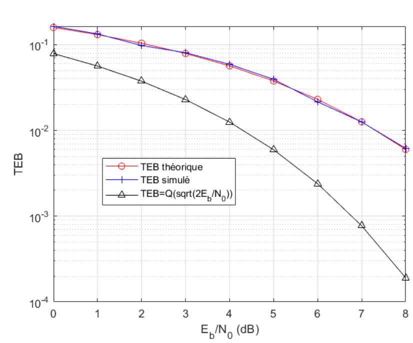


Figure 1: Tracé des TEBs

(a) La chaine de transmission étudiée est-elle, en puissance, plus efficace, moins efficace, identiquement efficace, si on la compare à celle donnant le $TEB = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$? Expliquez votre réponse.
Moins efficace car pour obtenir le même TEB il faut un E_b/N_0 plus important dans la chaine étudiée

(b) Que représente le TEB donné par $Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$? Que devrait-on modifier dans la chaine étudiée afin de pouvoir l'obtenir ?
Le TEB optimal pour une chaine de transmission de type 2-PAM. Pour l'obtenir il faudrait utiliser des symboles binaires à moyenne nulle

4 Exercice 2 (5 points)

Ajoutez, dans le programme Matlab suivant, les commentaires permettant d'identifier les différents blocs de la chaine de transmission implantée. Attention utilisez les bons termes techniques pour chaque opération réalisée et pensez à ajouter le type de modulation utilisée dans l'en-tête du programme.

```
%Implantation d'une chaine de transmission
%utilisant une modulation de type 2-ASK ⇔ 2-PSK

%Fréquence d'échantillonnage
Fe=24000;
%Débit binaire
Rb=3000;
%Niveau de Eb/N0 souhaité en dB
EbN0dB=10;
%Ordre de la modulation
M=2
%Fréquence porteuse
fp=2*10^3;
%Période d'échantillonnage
Te=1/Fe;
%Débit symbole
Rs=Rb/log2(M);
%Facteur de suréchantillonnage
Ns=Fe/Rs;
%Génération de la réponse impulsionnelle du filtre de mise en forme
h=ones(1,Ns);
%Génération de la réponse impulsionnelle du filtre de réception (filtrage adapté)
hr=fliplr(h);
% Génération de l'information binaire
bits=randi([0,1],1,1000);
% Mapping binaire à moyenne nulle
ak=2*bits-1;
%Suréchantillonnage (génération de la suite de Diracs pondérés par les symboles)
diracs=kron(ak,[1 zeros(1,Ns-1)]);
%Filtrage de mise en forme (génération de l'enveloppe complexe associée au signal à transmettre)
xe=filter(h,1,diracs);
%Transposition de fréquence (génération du signal modulé sur porteuse)
x=real(xe.*exp(j*2*pi*fp*[0:Te:(length(xe)-1)*Te]));
%Calcul de la puissance du signal transmis
Px=mean(abs(x).^2);
%Calcul de la puissance du bruite à introduire pour travailler au niveau de Eb_N0 souhaité
Pn=Px*Ns/(2*log2(M)*10^(EbN0dB/10));
%Génération du bruit
n=sqrt(Pn)*randn(1,length(x));
%Ajout du bruit
r=x+n;
%Retour en bande de base avec filtrage passe-bas = filtre adapté
```

```
z=filter(hr,1,r.* cos(2*pi*fp*[0:Te:(length(r)-1)*Te]));
%Choix de l'instant d'échantillonnage.
n0=Ns;
%Echantillonnage à n0+mNs
zm=z(n0:Ns:end);
%Décisions sur les symboles
am=sign(real(zm));
%Demapping
bm=(am+1)/2;
%Calcul du TEB
TEB=length(find((bm-bits) ~=0))/length(bits);
```