TD 3 Probabilités - Couples de Variables Aléatoires Discrètes - 1SN

Exercice 1 : Tirages sans remise.

On considère une urne constituée de $N > 1$ boules numérotées de 1 à N. On tire deux boules sans remise dans cette urne. On note X_1 le numéro de la première boule et X_2 le numéro de la seconde boule.
1) Déterminer les lois de X_1, X_2 et du couple (X_1, X_2) (on prendra soin de préciser les domaines de ces variables et vecteur aléatoires).
2) Déterminer la covariance entre X_1 et X_2. On rappelle que :

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3) Déterminer la loi du couple (Z, U) avec $Z = X_1 - X_2$ et $U = X_1$ (on prendra soin de représenter graphiquement l'ensemble des valeurs possibles du couple (Z, U)). En déduire la loi de Z.

Exercice 2 : Décorrélation n'implique pas indépendance !

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et Y une variable aléatoire binaire prenant les valeurs $+1$ et -1 avec $P[Y=1] = P[Y=-1] = \frac{1}{2}$. On suppose que X et Y sont indépendantes et on pose $Z = XY$.
1) Déterminer la loi de Z
2) Déterminer la covariance du couple (X, Z) notée cov(X, Z)
3) Calculer $P[X + Z = 0]$ et en déduire que X et Z ne sont pas indépendantes.

Exercice 3 : couple de variables aléatoires discrète et continue.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles telles que Y suit une loi exponentielle de paramètre c (de densité notée $g(y)$) et pour $y > 0$ la loi de X sachant $Y = y$ est la loi de Poisson de paramètre y :

$$\begin{array}{lr} g(y) = ce^{-cy} & y > 0 \\ g(y) = 0 & y \leq 0 \\ P[X = k | Y = y] = \frac{y^k}{k!}e^{-y} & k \in \mathbb{N} \end{array}$$

Déterminer $P[X = k]$.

Exercice 4 : parties entières et fractionnaires

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1[$. Si k est un entier fixé ($k \in \mathbb{N}$*), on définit les variables aléatoires X et Y de la façon suivante :

$$\begin{array}{rcl} X & = & \text{Ent}(kU) \\ Y & = & \text{Frac}(kU) = kU - \text{Ent}(kU) \end{array}$$

où Ent(kU) et Frac(kU) désignent les parties entières et fractionnaires de kU. Montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, la première de loi uniforme sur $\{0, ..., k-1\}$, la seconde de loi uniforme sur $[0, 1[$

Applications aux sciences du numérique

Exercice 5 : paquets prioritaires et non prioritaires

On suppose que le nombre de paquets X arrivant dans un commutateur de réseau pendant un intervalle de temps Δ suit une loi de Poisson de paramètre λ. Afin de garantir une certaine qualité de service dans ce réseau, on distingue les paquets prioritaires des paquets non-prioritaires. On note $p \in]0,1[$ la probabilité qu'un paquet soit prioritaire et Y le nombre de paquets prioritaires arrivant au commutateur pendant l'intervalle de temps Δ. On suppose également que les instants d'arrivées de paquets sont des variables aléatoires indépendantes.

1) Déterminer la loi conditionnelle de $Y \,|X = x$ puis la loi du couple (X, Y).

2) Quelle est la loi marginale de Y ? Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3) On pose $Z = X - Y$. Que représente Z ? En déduire sa loi (sans aucun calcul).

4) Quelle est la loi du couple (Z, Y) ? Les variables aléatoires Z et Y sont-elles indépendantes ?

Réponses

Exercice 1

1) X_1 et X_2 suivent des lois uniformes sur $\{1,...,N\}$ tandis que le couple (X_1,X_2) suit une loi uniforme sur $\{(i,j), i\in\{1,...,N\}, j\in\{1,...,N\}, i\neq j\}$, c'est-à-dire

$$P[X_1=i,X_2=j]=\frac{1}{N(N-1)}\qquad i\in\{1,...,N\}, j\in\{1,...,N\}, i\neq j$$

2) Il est clair que $E[X_1]=E[X_2]=\frac{N+1}{2}$. De plus

$$\begin{aligned}E[X_1X_2] &= \sum_{i\neq j} ij\frac{1}{N(N-1)}\\ &= \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i\neq j} ij\\ &= \frac{1}{N(N-1)}\left[\sum_{i,j} ij-\sum_i i^2\right]\end{aligned}$$

Des calculs simples permettent d'obtenir

$$E[X_1X_2]=\frac{(N+1)(3N+2)}{12}$$

et par suite

$$\text{cov}(X_1,X_2)=-\frac{N+1}{12}$$

3) Le changement de variables est tel que

$$\begin{cases} Z=X_1-X_2\\ U=X_1\end{cases}\iff\begin{cases} X_1=U\\ X_2=U-Z\end{cases}$$

donc il est bijectif de

$$\{(i,j), i\in\{1,...,N\}, j\in\{1,...,N\}, i\neq j\}$$

dans

$$\{(u,z), u\in\{1,...,N\}, z\in\{u-N,...,u-1\}, z\neq 0\}$$

Le couple (Z,U) suit une loi uniforme sur son ensemble de définition.
Z est à valeurs dans $\{-(N-1),...,-2,-1\}\cup\{1,2,...,N-1\}$ et
On a

$$P[Z=z]=\frac{N-|z|}{N(N-1)}\qquad z\in\{-(N-1),...,-2,-1\}\cup\{1,2,...,N-1\}$$

Exercice 2

1) On détermine la fonction de répartition de Z

$$\begin{aligned}P[Z<z] &= P[XY<z]\\ &= P[X<z,Y=1]+P[-X<z,Y=-1]\end{aligned}$$

Puisque X et Y sont indépendantes,on a

$$\begin{aligned}P[Z<z] &= P[X<z]P[Y=1]+P[X>-z]P[Y=-1]\\ &= F(z)\times\frac{1}{2}+F(z)\times\frac{1}{2}\\ &= F(z)\end{aligned}$$

où $F(z)$ est la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donc $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2) On a

$$\begin{aligned}
\text{cov}\,(X,Z) &= E\,[XZ] - E\,[X]\,E\,[Z] \\
&= E\left[X^2Y\right] - E\,[X]\,E\,[XY] \\
&= E[X^2]E[Y] - E\,[X]\,E\,[XY]
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'indépendance de X et de Y pour obtenir la dernière égalité. Puisque $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a $E\,[X] = 0$. Puisque Y prend les valeurs ± 1 de manière équiprobable, on a $E[Y] = 0$. Donc

$$\text{cov}\,(X,Z) = 0$$

3)

$$\begin{aligned}
P\,[X + Z = 0] &= P\,[X + XY = 0] \\
&= P\,[X(1+Y) = 0] \\
&= P\,[Y = -1] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

On a une chance sur 2 d'avoir $Z = -X$, donc X et Z ne sont pas indépendantes même si $\text{cov}(X,Z) = 0$. Ceci est un exemple de couple de variables aléatoires non indépendantes de covariance nulle

Exercice 3
L'objectif de cet exercice est d'étudier un exemple de couple de variables aléatoires (X,Y) tel que l'une des deux variables Y est discrète tandis que l'autre variable X est continue. En utilisant les résultats concernant les probabilités conditionnelles, on obtient

$$\begin{aligned}
P\,[Y = k] &= \int_{\mathbb{R}} P[X = k|Y = y]g(y)dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{y^k}{k!} e^{-y} \times ce^{-cy} dy \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{cy^k}{k!} e^{-(c+1)y} dy.
\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $u = (c+1)y$, on obtient

$$\begin{aligned}
P\,[Y = k] &= \int_0^{+\infty} \frac{c}{k!} \frac{u^k}{(c+1)^k} e^{-u} \times \frac{du}{c+1} \\
&= \frac{c}{(c+1)^{k+1}},\ k \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

en utilisant le fait que

$$\Gamma(k+1) = \int_0^{+\infty} u^k e^{-u} du = k!.$$

Exercice 4
Loi de X
Il est clair que X est à valeurs dans $\{0,...,k-1\}$. De plus

$$\begin{aligned}
P\,[X = i] &= P\,[i \leq kU < i+1] \\
&= P\left[\frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\
&= \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} du = \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Donc X suit la loi uniforme sur $\{0, ..., k-1\}$
Loi de Y
Il est clair que Y est à valeurs dans $[0, 1[$.
Pour $y < 0$, il est clair que $P[Y < y] = 0$
Pour $y \geq 1$, il est clair que $P[Y < y] = 1$
Pour $y \in [0, 1[$, on a

$$\begin{aligned}
P[Y < y] &= P\left[\bigcup_{i=0}^{k-1} \{Y < y, X = i\}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} P[Y < y, X = i] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} P[kU - i < y, i \leq kU < i+1] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} P\left[U < \frac{y+i}{k}, \frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} P\left[\frac{i}{k} \leq U < \frac{y+i}{k}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y}{k} = y
\end{aligned}$$

Donc Y suit la loi uniforme sur $[0, 1[$
Indépendance de X et de Y
Pour montrer que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, il suffit de montrer que

$$P[X = i, Y < y] = P[X = i]\, P[Y < y] \qquad \forall i \in \{0, ..., k-1\}, \forall y \in [0, 1[$$

Or

$$\begin{aligned}
P[X = i, Y < y] &= P[i \leq kU < i+1, kU - i < y] \\
&= P\left[U < \frac{y+i}{k}, \frac{i}{k} \leq U < \frac{i+1}{k}\right] \\
&= \frac{y}{k} \text{ (d'après ce qui précède)}
\end{aligned}$$

On a bien $P[X = i, Y < y] = P[X = i]\, P[Y < y]$, ce qui signifie que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 5
1) Comme X suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a

$$P[X = x] = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda), \forall x \in \mathbb{N}$$

Sachant que $X = x$, il y a x paquets dans le réseau. Chaque paquet ayant une probabilité p d'être prioritaire, on en en déduit (loi binomiale)

$$P[Y = y | X = x] = \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \quad y \in \{0, ..., x\}.$$

La loi du couple (X, Y) est donc définie par

$$P[Y = y, X = x] = P[Y = y | X = x] P[X = x] = \binom{x}{y} p^y (1-p)^{x-y} \times \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda) \quad (x, y) \in \mathbb{N} \times \{0, ..., x\}.$$

2) La loi marginale de Y est définie par

$$P[Y=y]=\sum_{x\in\mathbb{N}} P[Y=y,X=x]=\sum_{x=y}^{+\infty} P[Y=y,X=x], \quad y\in\mathbb{N}$$

car toutes les valeurs de $P[Y=y,X=x]$ sont nulles pour $x<y$. On en déduit

$$P[Y=y]=\sum_{x=y}^{+\infty}\frac{x!}{y!(x-y)!}p^y(1-p)^{x-y}\times\frac{\lambda^x}{x!}\exp(-\lambda)=\frac{p^y}{y!}\exp(-\lambda)\sum_{x=y}^{+\infty}\frac{1}{(x-y)!}(1-p)^{x-y}\lambda^x.$$

En faisant le changement de variables $z=x-y$, on obtient

$$P[Y=y]=\frac{p^y}{y!}\exp(-\lambda)\sum_{z=0}^{+\infty}\frac{1}{z!}(1-p)^z\lambda^{z+y}=\frac{(\lambda p)^y}{y!}e^{-\lambda}\sum_{z=0}^{+\infty}\frac{1}{z!}[\lambda(1-p)]^z$$

soit

$$P[Y=y]=\frac{(\lambda p)^y}{y!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^y}{y!}e^{-\lambda p}, \quad y\in\mathbb{N}.$$

On reconnait une loi de Poisson de paramètre λp, i.e., $Y\sim\mathcal{P}(\lambda p)$. Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes car pour $x<y$, on a

$$P[Y=y,X=x]=0\neq P[Y=y]P[X=x].$$

3) $Z=X-Y$ représente le nombre de paquets non prioritaires. Comme la probabilité qu'un paquet ne soit pas prioritaire est $q=1-p$, on en déduit $Z\sim\mathcal{P}(\lambda q)$.

4) La loi du couple (Z,Y) est définie par

$$P[Z=i,Y=j]=P[X-Y=i,Y=j]=P[X=i+j,Y=j],\forall(i,j)\in\mathbb{N}^2$$

soit, en utilisant la loi de (X,Y) déterminée précédemment

$$P[Z=i,Y=j]=\frac{(i+j)!}{i!j!}p^j(1-p)^i\frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}e^{-\lambda}.$$

En remarquant que $e^{-\lambda}=e^{-\lambda(p+q)}$, on obtient

$$P[Z=i,Y=j]=\frac{(\lambda q)^i}{i!}e^{-\lambda q}\times\frac{(\lambda p)^j}{j!}e^{-\lambda p}=P[Y=j]P[Z=i].$$

Les variables aléatoires Z et Y sont donc indépendantes.