

Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2016/2017

6. prednáška

Korektnosť a úplnosť tablového kalkulu

27. marca 2017

Obsah 6. prednášky

- 1 Výroková logika
 - Tablový kalkul
 - Opakovanie
 - Korektnosť
 - Tablový dôkaz splniteľnosti
 - Hintikkova lema
 - Úplnosť

Označené formuly a ich sémantika

Definícia 3.77

Nech X je formula výrokovkej logiky.

Postupnosti symbolov \mathbf{TX} a \mathbf{FX} nazývame *označenými formulami*.

Definícia 3.78

Nech v je ohodnotenie výrokových premenných a X je formula.

Potom

- v spĺňa \mathbf{TX} vtt v spĺňa X ;
- v spĺňa \mathbf{FX} vtt v nespĺňa X .

Dohoda

Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+ , X_7^+ .

Pre množiny označených formlí budeme používať písmená S , T s horným indexom $+$ a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+ , T_3^+ .

Jednotný zápis označených formúl — α

Definícia 3.79 (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je typu α , ak má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y .

Takéto formuly budeme označovať písmenom α ;

α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca

a α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \wedge Y)$	\mathbf{TX}	\mathbf{TY}
$\mathbf{F}(X \vee Y)$	\mathbf{FX}	\mathbf{FY}
$\mathbf{F}(X \rightarrow Y)$	\mathbf{TX}	\mathbf{FY}
$\mathbf{T}\neg X$	\mathbf{FX}	\mathbf{FX}
$\mathbf{F}\neg X$	\mathbf{TX}	\mathbf{TX}

Pozorovanie 3.80 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.

Ak v spĺňa α , tak v spĺňa α_1 a v spĺňa α_2 .

Jednotný zápis označených formúl — β

Definícia 3.81 (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je typu β , ak má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y .

Takéto formuly budeme označovať písmenom β ;

β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca a β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \wedge Y)$	\mathbf{FX}	\mathbf{FY}
$\mathbf{T}(X \vee Y)$	\mathbf{TX}	\mathbf{TY}
$\mathbf{T}(X \rightarrow Y)$	\mathbf{FX}	\mathbf{TY}

Pozorovanie 3.82 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.

Ak v spĺňa β , tak v spĺňa β_1 alebo v spĺňa β_2 .

Tablo pre množinu označených formúl

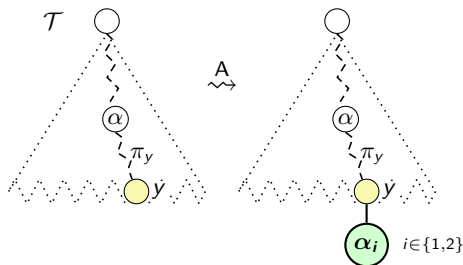
Definícia 3.83

Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene tablo pre S^+) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných rekurzívnych pravidiel:

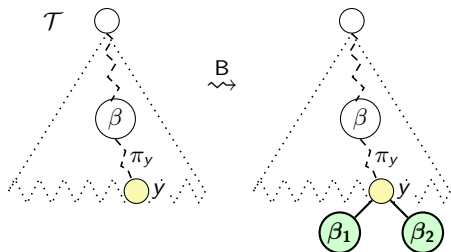
- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+ .
- Nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé *priame rozšírenie* \mathcal{T} ktoroukoľvek z operácií:
 - A: Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α , tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2 .
 - B: Ak sa na vetve π_y vyskytuje nejaká označená formula β , tak ako deti y pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2 .
 - Ax: Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+ .

Tablá, tablové pravidlá, operácie rozšírenia



α	α	α_1	α_2
α_1	T ($X \wedge Y$)	TX	TY
α_2	F ($X \vee Y$)	FX	FY
	F ($X \rightarrow Y$)	TX	FY
	T $\neg X$	FX	FX
	F $\neg X$	TX	TX



β	β	β_1	β_2
$\beta_1 \mid \beta_2$	F ($X \wedge Y$)	FX	FY
	T ($X \vee Y$)	TX	TY
	T ($X \rightarrow Y$)	FX	TY

y je list v table \mathcal{T} , π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 3.84

Vetvou tabla \mathcal{T} je každá cesta od koreňa \mathcal{T} k niektorému listu \mathcal{T} . Označená formula X^+ sa *vyskytuje na vetve* π v \mathcal{T} vtt sa nachádza v niektorom vrchole na π . Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \text{formulas}(\pi)$.

Definícia 3.85

Vetva π tabla \mathcal{T} je *uzavretá* vtt sa na nej vyskytujú označené formuly **FX** a **TX** pre nejakú formulu X . Inak je π *otvorená*.

Tablo \mathcal{T} je *uzavreté* vtt každá jeho vetva je uzavretá. Naopak, \mathcal{T} je *otvorené* vtt aspoň jedna jeho vetva je otvorená.

Korektnosť

Korektnosť (angl. *soundness*) kalkulu neformálne znamená, že vždy, keď sa nám podarí v kalkule niečo dokázať, tak to aj skutočne platí.

Veta 3.86 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je uzavreté tablo pre S^+ . Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 3.87

Nech S je množina formúl a X je formula.

Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{TA} \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{FX}\}$ (skr. $S \vdash X$), tak X vyplýva z S ($S \models X$).

Dôsledok 3.89

Nech X je formula a existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{FX}\}$ (skr. $\vdash X$). Potom X je tautológia ($\models X$).

Korektnosť — dôkaz

Spĺňanie a priame rozšírenie

Definícia 3.90

Nech S^+ je množina označených formúl, nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie množiny výrokových premenných.

Hovoríme, že v *spĺňa vetvu* π v table \mathcal{T} vtt v spĺňa všetky označené formuly obsiahnuté vo vrcholoch na vetve π .

Hovoríme, že v *spĺňa tablo* \mathcal{T} , ak spĺňa niektorú jeho vetvu.

Lema 3.91 (K1)

Nech S^+ je množina označených formúl, nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie množiny výrokových premenných.

Ak v spĺňa S^+ a v spĺňa \mathcal{T} , tak v spĺňa aj každé priame rozšírenie \mathcal{T} .

Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models S^+$. Nech v spĺňa \mathcal{T} a v ňom vetvu π . Nech \mathcal{T}_1 je rozšírenie \mathcal{T} .
Nastáva jeden z prípadov:

- \mathcal{T}_1 vzniklo z \mathcal{T} operáciou A, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v \mathcal{T} , pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y . Ak $\pi \neq \pi_y$, tak \mathcal{T}_1 obsahuje π a teda je splnené.
Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj α , pretože spĺňa π . Potom v musí spĺňať aj α_1 a α_2 . Spĺňa teda vetvu π_z v table \mathcal{T}_1 , ktorá rozširuje splnenú vetvu π o vrchol z obsahujúci splnenú ozn. formulu α_1 alebo α_2 . Preto v spĺňa tablo \mathcal{T}_1 .
- \mathcal{T}_1 vzniklo z \mathcal{T} operáciou B, pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v \mathcal{T} , pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y . Ak $\pi \neq \pi_y$, tak \mathcal{T}_1 obsahuje π a teda je splnené.
Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj β , pretože spĺňa π . Potom ale v musí spĺňať aj β_1 alebo β_2 . Ak v spĺňa β_1 , tak spĺňa aj vetvu π_{z_1} v table \mathcal{T}_1 , a preto v spĺňa tablo \mathcal{T}_1 . Ak v spĺňa β_2 , spĺňa aj π_{z_2} , a teda aj \mathcal{T}_1 .
- \mathcal{T}_1 vzniklo z \mathcal{T} operáciou Ax, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v \mathcal{T} , pričom z obsahuje formulu $X^+ \in S^+$. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak \mathcal{T}_1 obsahuje π a teda je splnené.
Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa vetvu π_z v table \mathcal{T}_1 , pretože je rozšírením splnenej vetvy π o vrchol z obsahujúci splnenú formulu X (pretože $v \models S^+$). Preto v spĺňa tablo \mathcal{T}_1 . □

Korektnosť — dôkaz

Spĺňanie množiny označených formúl a tabiel

Lema 3.92 (K2)

Nech S^+ je množina označených formúl, nech \mathcal{T} je tablo pre S^+ a v je ohodnotenie. Ak v spĺňa S^+ , tak v spĺňa \mathcal{T} .

Dôkaz lemy K2.

Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models S^+$. Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla \mathcal{T} dokážeme, že v spĺňa každé tablo \mathcal{T} pre S^+ .

Ak má \mathcal{T} jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $X^+ \in S^+$, ktorá je splnená pri v . Preto je splnená jediná vetva v \mathcal{T} , teda aj \mathcal{T} .

Ak \mathcal{T} má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla \mathcal{T}_0 , ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako \mathcal{T} . Podľa indukčného predpokladu teda v spĺňa \mathcal{T}_0 . Podľa predchádzajúcej lemy potom v spĺňa aj \mathcal{T} . \square

Korektnosť — dôkaz

Dôkaz vety o korektnosti.

Sporom: Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je uzavreté tablo pre S^+ . Nech v je ohodnotenie, ktoré spĺňa S^+ . Potom podľa lemy K2 v spĺňa tablo \mathcal{T} , teda v spĺňa niektorú vetvu π v \mathcal{T} . Pretože \mathcal{T} je uzavreté, aj vetva π je uzavretá, teda π obsahuje označené formuly **T** X a **F** X pre nejakú formulu X . Ale $v \models \mathbf{T}X$ vtt $v \models X$ a $v \models \mathbf{F}X$ vtt $v \not\models X$, čo je spor. □

Otvorené tablo a splniteľnosť

Čo ak nevieme nájsť uzavreté tablo pre nejakú množinu ozn. formúl?

Definícia 3.93 (Úplná vetva a úplné tablo)

Nech S^+ je množina označených formúl a \mathcal{T} je tablo pre S^+ .

Vetva π v table \mathcal{T} je *úplná* vtt má všetky nasledujúce vlastnosti:

- pre každú ozn. formulu α , ktorá sa vyskytuje na π , sa aj obidve α_1 a α_2 vyskytujú na π ,
- pre každú ozn. formulu β , ktorá sa vyskytuje na π , sa aspoň jedna z ozn. formúl β_1 alebo β_2 vyskytuje na π .
- každá $X^+ \in S^+$ sa vyskytuje na π .

Tablo \mathcal{T} je *úplné* vtt každá vetva je buď úplná alebo uzavretá.

Príklad 3.94

Vybudujme úplné tablo pre \mathbf{FX} , kde

$$X = (((p \vee q) \wedge (r \vee p)) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))).$$

Lema 3.95 (o existencii úplného tabla)

Nech S^+ je konečná množina označených formúl.

Potom existuje úplné tablo pre S^+ .

Dôkaz.

Vybudujme tablo \mathcal{T}_0 pre S^+ tak, že do koreňa vložíme niektorú formulu z S^+ a opakovaním operácie Ax postupne doplníme ostatné.

Potom tablo postupne rozširujeme tak, že vyberieme ľubovoľný list y tabla \mathcal{T}_i , ktorého vetva π_y je otvorená a nie je úplná. Potom nastane aspoň jedna z možností:

- Na π_y sa nachádza nejaká formula α , ale nenachádza sa niektorá z formúl α_1 a α_2 .
- Na π_y sa nachádza nejaká formula β , ale nenachádza sa ani jedna z formúl β_1 a β_2 .

Ak platí prvá alebo obe možnosti, aplikujeme operáciu A. Ak platí druhá možnosť, aplikujeme operáciu B. Získame tablo \mathcal{T}_{i+1} , s ktorým proces opakujeme. Tento proces po konečnom počte krokov (prečo?) vytvorí nejaké tablo \mathcal{T}_n , v ktorom už neexistuje vetva, ktorá by bola otvorená a nebola úplná. Teda každá vetva v \mathcal{T}_n je buď uzavretá alebo úplná, čiže \mathcal{T}_n je úplné. □

Nadol nasýtené množiny a Hintikkova lemma

Definícia 3.96

Množina označených formúl S^+ sa nazýva *nadol nasýtená* vtt platí:

(H₀) v S^+ sa nevyskytujú naraz **T** p a **F** p pre žiadnu výrokovú premennú p ;

(H₁) ak $\alpha \in S^+$, tak $\alpha_1 \in S^+$ a $\alpha_2 \in S^+$;

(H₂) ak $\beta \in S^+$, tak $\beta_1 \in S^+$ alebo $\beta_2 \in S^+$.

Pozorovanie 3.97

Nech π je úplná otvorená vetva nejakého tabla \mathcal{T} .

Potom množina všetkých formúl na π je nadol nasýtená.

Lema 3.98 (Hintikkova)

Každá nadol nasýtená množina S^+ je splniteľná.

Dôkaz Hintikkovej lemy.

Chceme vytvoriť ohodnotenie v , ktoré splní všetky formuly z S^+ .

Definujme v pre každú výrokovú premennú p takto:

- ak $\mathbf{T}p \in S^+$: $v(p) = t$,
- ak $\mathbf{F}p \in S^+$: $v(p) = f$,
- ak ani $\mathbf{T}p$ ani $\mathbf{F}p$ nie sú v S^+ , tak $v(p) = t$.

v je korektne definované vďaka H_0 .

Indukciou na stupeň formuly dokážeme, že v spĺňa všetky formuly z S^+ :

- v očividne spĺňa všetky označené premenné z S^+ .
- $X^+ \in S^+$ je buď α alebo β :
 - ▶ Ak X^+ je α , potom obidve $\alpha_1, \alpha_2 \in S^+ (H_1)$, sú nižšieho stupňa X^+ , a teda podľa indukčného predpokladu sú splnené pri v , preto v spĺňa aj α .
 - ▶ Ak X^+ je β , potom aspoň jedna z β_1, β_2 je v $S^+ (H_2)$. Nech je to ktorákoľvek, je nižšieho stupňa ako X^+ , teda podľa IP ju v spĺňa, a preto v spĺňa β .

□

Úplnosť

Úplnosť kalkulu neformálne znamená, že je dostatočne silný, aby sa v ňom dali dokázať všetky dôsledky teórií.

Veta 3.99 (o úplnosti)

*Nech S^+ je konečná nesplniteľná množina označených formúl.
Potom existuje uzavreté tablo pre S^+ .*

Dôsledok 3.100

*Nech S je konečná teória a X je formula.
Ak $S \models X$, tak $S \vdash X$.*

Dôsledok 3.101

Nech X je formula. Ak $\models X$, tak $\vdash X$.

Úplnosť platí aj pre nekonečné množiny, ale dôkaz je ťažší.

Úplnosť — dôkaz

Dôkaz vety o úplnosti.

Podľa lemy o existencii úplného tabla vieme pre S^+ nájsť úplné tablo \mathcal{T} , teda také, že každá vetva je buď uzavretá alebo úplná. Ak by niektorá vetva bola otvorená, potom musí byť úplná, a teda nadol uzavretá. Podľa Hintikkovej lemy by bola splniteľná. Pretože obsahuje všetky formuly z S^+ , bola by aj S^+ splniteľná, čo je spor s nesplniteľnosťou S^+ .

Preto musia byť všetky vetvy tabla \mathcal{T} uzavreté. □

Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*.

Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig.

First-Order Logic, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnosť, složitost, nutnost*. Academia,

2002. Prístupné aj na

<http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf>.