
Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 2

Úloha 1. Napíšte vytvárajúcu postupnosť pre formuly:

- a) $((p \wedge q) \vee p) \rightarrow ((p \wedge q) \vee \neg p)$
- b) $((p \wedge p) \wedge (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge p) \wedge (p \wedge p))$

Úloha 2. Napíšte dve ďalšie (rôzne) vytvárajúce postupnosti pre formuly z úlohy 1.

Úloha 3. Zakreslite vytvárajúce stromy pre formuly z úlohy 1.

Úloha 4. Vypíšte všetky (a) priame podformuly a (b) podformuly pre formuly z úlohy 1.

Úloha 5. Určte stupeň formúl z úlohy 1.

Úloha 6. Zadefinujte:

- a) $\text{sub}(A)$ – množinu všetkých podformúl formuly A ;
- b) $\text{vcount}(A, p)$ – počet výskytov výrokovej premennej p vo formule A ;
- c) $\text{ccount}(A)$ – počet logických spojok vo formule A ;
- d) $\text{pcount}(A)$ – počet výskytov zátvoriek vo formule A .

Úloha 7. Majme danú množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r, \dots\}$ a jej ohodnotenie $v = \{p \mapsto t, q \mapsto f, r \mapsto f, \dots\}$. Zistite, či ohodnotenie v spĺňa nasledovné formuly:

- a) $((\neg p \rightarrow q) \wedge \neg(\neg q \vee p))$
- b) $((\neg p \rightarrow q) \wedge (\neg q \rightarrow (q \vee \neg(q \rightarrow r))))$
- c) $((\neg(q \vee \neg r) \vee q) \rightarrow (r \rightarrow ((p \vee \neg p) \wedge \neg(q \rightarrow r))))$
- d) $((((p \wedge \neg p) \vee \neg r) \vee q) \leftrightarrow (r \rightarrow ((p \vee \neg p) \vee \neg(r \wedge q))))$,
kde $(A \leftrightarrow B)$ je skratkou za $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$.

Úloha 8. O každej z nasledujúcich formúl nad $\mathcal{V} = \{p, q, r, \dots\}$ rozhodnite, či je (i) tautológia, (ii) splniteľná, (iii) falzifikovateľná, alebo (iv) nespĺniteľná:

- a) $((p \wedge \neg p) \vee (p \vee \neg p))$
- b) $((p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge q))$
- c) $(\neg(q \wedge \neg q) \rightarrow ((p \vee \neg p) \rightarrow (p \wedge \neg p)))$
- d) $((\neg(q \vee \neg r) \vee q) \rightarrow (r \rightarrow ((p \vee \neg p) \wedge \neg(q \rightarrow r))))$

Domáca úloha du01. Riešenie domácej úlohy odovzdajte najneskôr v pondelok **13. marca 2017**:

- v čitateľnej papierovej podobe na začiatku prednášky o 11:30;
- elektronicky najneskôr o 23:59:59 cez svoj repozitár na github.com ako pull-request do vetvy (base) **du01** repozitára (base fork) **FMFI-UK-1-AIN-412/lpi17-vášAisLogin**. Odovzdávaný dokument uložte do súboru **du01.pdf** v adresári **du01** vo vetve **du01**. Dokument **musí byť vo formáte PDF**. Vytvorte ho podľa svojich preferencií (T_EXom, textovým procesorom, tlačou do PDF z webového prehliadača, ...), **nesmie** však obsahovať obrázky rukou písaného textu ani screenshoty.

Úloha má hodnotu 2 body [po 1 bode za každú časť a), b)].

- a) Spojka *a nie*, označovaná symbolom \nrightarrow , je binárna logická spojka s nasledovným významom:

$A \not\rightarrow B$ je pravdivé vtt A je pravdivé a B je nepravdivé.

Vybudujte teóriu výrokovej logiky používajúcej spojky \neg a \rightarrow , teda zdefinujte pojem: (i) formuly, (ii) vytvárajúcej postupnosti pre formulu, (iii) vytvárajúceho stromu pre formulu, (iv) splnenia formuly pri ohodnotení výrokových premenných.

- b) Hovoríme, že binárna logická spojka α je *definovateľná* zo spojok β_1, β_2, \dots , ak existuje formula, obsahujúca iba spojky β_1, β_2, \dots a výrokové premenné p a q , ekvivalentná s formulou $(p \alpha q)$.

Hovoríme, že unárna logická spojka α je *definovateľná* zo spojok β_1, β_2, \dots , ak existuje formula, obsahujúca iba spojky β_1, β_2, \dots a výrokovú premennú p , ekvivalentná s formulou αp .

Napríklad \vee je definovateľná z \neg a \wedge pretože $(p \vee q)$ je ekvivalentná s $\neg(\neg p \wedge \neg q)$ (samozrejme, ekvivalenciu tých dvoch formúl by bolo treba ešte dokázať).

Dokážte, že:

- (i) \rightarrow a $\not\rightarrow$ sú definovateľné zo spojok \neg , \wedge a \vee ;
- (ii) \neg , \wedge , \vee a \leftrightarrow sú definovateľné z \neg a \rightarrow .