Prednášky z Matematiky (4) – Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2016/2017

2. prednáška

Sémantika výrokovej logiky

27. februára 2017

Obsah 2. prednášky

1. Výroková logika
   - Syntax výrokovej logiky
   - Sémantika výrokovej logiky
   - Tautológie, splniteľnosť, ekvivalencia

Symboly jazyka výrokovej logiky

Definícia 3.1 (podľa [Smullyan, 1979, I.1.1], rovnako ďalšie)

Symbolmi jazyka výrokovej logiky sú:

- *výrokové premenné* z nejakej nekonečnej spočítateľnej množiny $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$, ktorej prvkami nie sú symboly $\neg$, $\land$, $\lor$, $\to$, (a), ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- *logické* symboly (*logické spojky*): $\neg$, $\land$, $\lor$, $\to$ (nazývané, v uvedenom poradí, „*nie*“, „*a*“, „*alebo*“, „*ak* …, *tak* …“);
- *pomocné* symboly: (a) (*ľavá zátvorka* a *pravá zátvorka*).

Spojka $\neg$ je *unárna* (má jeden argument).
Spojky $\land$, $\lor$, $\to$ sú *binárne* (majú dva argumenty).

Dohoda

Výrokové premenné budeme *označovať* písmenami p, q, …, podľa potreby aj s dolnými indexmi.

Formuly výrokovej logiky

Definícia 3.2

Formulou výrokovej logiky (skrátene *formulou*) nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je postupnosť symbolov vytvorená podľa nasledovných pravidiel:

- Každá výroková premenná je formulou (voláme ju *atomická f.*).
- Ak A je formulou, tak aj $\neg A$ je formulou (*negácia* formuly A).
- Ak A a B sú formulami, tak aj $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \to B)$ sú formulami (*konjunkcia*, *disjunkcia*, *implikácia* formúl A a B).

Nič iné nie je formulou.

Dohoda

Formuly označujeme veľkými písmenami A, B, C, X, Y, Z, podľa potreby s indexmi. Množinu všetkých formúl označíme $\mathcal{E}$.

Formula je matematickou formalizáciou zloženého výroku.

Alternatívna definícia formuly

Definícia pomocou vytvárajúcej postupnosti

Definícia 3.3

Vytvárajúcou postupnosťou je ľubovoľná konečná postupnosť, ktorej každý člen je výroková premenná, alebo má tvar $\neg A$, pričom A je nejaký predchádzajúci člen postupnosti, alebo má jeden z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$, kde A a B sú nejaké predchádzajúce členy postupnosti.

Definícia 3.4

Postupnosť symbolov A je *formula*, ak existuje vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je A. Túto postupnosť voláme tiež vytvárajúca postupnosť pre A.

Príklad 3.5

Nájdime vytvárajúcu postupnosť pre formulu $(\neg p \to (p \lor q))$.

Spomeňte si II.1

Ktoré z nasledujúcich postupností symbolov sú formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r, \ldots\}$?

A: $(p \lor \neg q \lor \neg r)$, B: $(p \land \neg(q \to r))$, C: $\neg(\neg(\neg p))$.

Jednoznačnosť rozkladu formúl výrokovej logiky

Tvrdenie 3.6 (o jednoznačnosti rozkladu)

Pre každú formulu X platí práve jedna z nasledujúcich možností:

- *X je výroková premenná.*
- *Existuje práve jedna formula A taká, že $X = \neg A$.*
- *Existujú práve jedna dvojica formúl A, B a jedna spojka $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ také, že $X = (A \, b \, B)$.*

Príklad 3.7

Jednoznačnosť rozkladu by pri neopatrnej definícii formuly *nemusela platiť*. Nájdime takú definíciu „formuly“ a „formulu“, ktorá sa nedá jednoznačne rozložiť:

> *„Formulou“ výrokovej logiky* nad mn. výrok. prem. $\mathcal{V}$ je postupnosť symbolov vytvorená podľa nasledovných pravidiel: ...

Vytvárajúci strom formuly

Definícia 3.8

Vytvárajúci strom pre formulu X je binárny strom T obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni T je formula X,
- ak vrchol obsahuje formulu $\neg A$, tak má práve jedno dieťa, ktoré obsahuje formulu A,
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \, b \, B)$, kde b je jedna z binárnych spojok, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu A a pravé formulu B,
- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami.

Príklad 3.9

Nájdime vytvárajúci strom pre formulu
$((p \wedge q) \rightarrow ((\neg p \vee \neg\neg q) \vee (q \rightarrow \neg p)))$.

Podformuly

Definícia 3.10 (Priama podformula)

- Priamou podformulou $\neg A$ je formula A.
- Priamymi podformulami $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \to B)$ sú formuly A (*ľavá* priama podformula) a B (*pravá* priama podformula).

Definícia 3.11 (Podformula)

Vzťah *byť podformulou* je najmenšia relácia na formulách spĺňajúca:

- Ak X je priamou podformulou Y, tak X je podformulou Y.
- Ak X je podformulou Y a Y je podformulou Z, tak X je podformulou Z.

Príklad 3.12

Vymenujme priame podformuly a podformuly $((p \vee \neg q) \wedge \neg(q \to p))$.

Spomeňte si II.2

Sú nasledujúce tvrdenia pravdivé? Odpovedzte áno/nie.

a) *Vďaka jednoznačnosti rozkladu má každá formula práve jednu priamu podformulu.*

b) *Postorderový výpis vytvárajúceho stromu formuly X je vytvárajúcou postupnosťou tejto formuly.*

Stupeň formuly

Definícia 3.13 (Stupeň formuly [deg(X)])

- Výroková premenná je stupňa 0.
- Ak A je formula stupňa n, tak $\neg A$ je stupňa $n+1$.
- Ak A je formula stupňa n_1 a B je formula stupňa n_2, tak $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ a $(A \rightarrow B)$ sú stupňa $n_1 + n_2 + 1$.

Definícia 3.13 (Stupeň formuly [deg(X)] stručne, symbolicky)

- $\deg(p) = 0$ pre každú $p \in \mathcal{V}$,
- $\deg(\neg A) = \deg(A) + 1$ pre každú $A \in \mathcal{E}$,
- $\deg((A \wedge B)) = \deg((A \vee B)) = \deg((A \rightarrow B)) = \deg(A) + \deg(B) + 1$ pre všetky A, $B \in \mathcal{E}$.

Príklad 3.14

Aký je stupeň formuly $((p \vee \neg q) \wedge \neg(q \rightarrow p))$?

Indukcia na stupeň formuly

Veta 3.15 (Princíp indukcie na stupeň formuly)

Nech P je ľubovoľná vlastnosť formúl ($P \subseteq \mathcal{E}$). Ak platí súčasne

báza indukcie: *každá formula stupňa* 0 *má vlastnosť P,*

indukčný krok: *pre každú formulu X z predpokladu, že všetky formuly menšieho stupňa ako* $\deg(X)$ *majú vlastnosť P, vyplýva, že aj X má vlastnosť P,*

tak všetky formuly majú vlastnosť P ($P = \mathcal{E}$).

Príklad 3.16

Dokážme:

Množina všetkých formúl vo vytvárajúcom strome formuly X je rovná zjednoteniu množiny všetkých podformúl X s $\{X\}$.

Vyskúšajte si II.3

Stupeň formuly $((\neg p \to q) \wedge q)$ je ....

Množina výrokových premenných formuly

Definícia 3.17 (Množina výrok. prem. formuly [vars(X)])

- Ak p je výroková premenná, množinou výrokových premenných atomickej formuly p je $\{p\}$.
- Ak V je množina výrokových premenných formuly A, tak V je tiež množinou výrok. prem. formuly $\neg A$.
- Ak V_1 je množina výrok. prem. formuly A a V_2 je množina výrok. prem. formuly B, tak $V_1 \cup V_2$ je množinou výrok. prem. formúl $(A \land B)$, $(A \lor B)$ a $(A \rightarrow B)$.

Definícia 3.17 (vars(X) stručnejšie)

- Ak p je výroková premenná, tak $\text{vars}(p) = \{p\}$.
- Ak A a B sú formuly, tak $\text{vars}(\neg A) = \text{vars}(A)$ a $\text{vars}((A \land B)) = \text{vars}((A \lor B)) = \text{vars}((A \rightarrow B)) = \text{vars}(A) \cup \text{vars}(B)$.

Sémantika výrokovej logiky

- Syntax jazyka výrokovej logiky hovorí iba tom, ako sa zapisujú formuly ako postupnosti symbolov.
- Samé o sebe tieto postupnosti nemajú žiaden ďalší *význam*.
- Ten im dáva *sémantika* jazyka výrokovej logiky.
- Za význam výrokov považujeme ich pravdivostnú hodnotu.

Ohodnotenie výrokových premenných

- Výrokové premenné predstavujú jednoduché výroky.
- Ich *význam* (pravdivosť) nie je pevne daný.
- Môže závisieť od situácie, stavu sveta (Sára ide na párty, svieti slnko, zobral som si dáždnik, ...).
- Ako vieme *programátorsky* popísať pravdivosť výrokových premenných v nejakom stave sveta? A *matematicky*?

Definícia 3.18

Nech (t, f) je usporiadaná dvojica pravdivostných hodnôt, $t \neq f$, pričom hodnota t predstavuje pravdu a f nepravdu.
Ohodnotením množiny výrokových premenných $\mathcal{V}$ nazveme každé zobrazenie v množiny $\mathcal{V}$ do množiny $\{t, f\}$ (teda každú funkciu $v \colon \mathcal{V} \to \{t, f\}$).
Výroková premenná p je *pravdivá* pri ohodnotení v, ak $v(p) = t$.
Výroková premenná p je *nepravdivá* pri ohodnotení v, ak $v(p) = f$.

Ohodnotenie výrokových premenných

Príklad 3.19

Zoberme $t \neq f$ (napr. $t = 1$, $f = 0$), $\mathcal{V} = \{\text{a}, \text{á}, \text{ä}, \ldots, \text{ž}, 0, \ldots, 9, \_\}^{+}$.
Dnešné ráno by popísalo ohodnotenie v_1 množiny $\mathcal{V}$, kde (okrem iného):

$$v_1(\text{svieti\_slnko}) = t \qquad v_1(\text{zobral\_som\_si\_dáždnik}) = f$$

Minulotýždňové ráno opisuje ohodnotenie v_2, kde okrem iného

$$v_2(\text{svieti\_slnko}) = f \qquad v_2(\text{zobral\_som\_si\_dáždnik}) = f$$

Jednu zo situácií v probléme pozývania kamarátov na párty by popísalo ohodnotenie, v ktorom (okrem iného):

$$v_3(\text{sara}) = t \qquad v_3(\text{kim}) = f \qquad v_3(\text{jim}) = t$$

Prečo „okrem iného“?

Splĺňanie výrokových formúl

- Na formulu sa dá pozerať ako na podmienku, ktorú stav sveta buď *splĺňa* (je v tomto stave pravdivá) alebo *nesplĺňa* (je v ňom nepravdivá).
- Z pravdivostného ohodnotenia výrokových premenných v nejakom stave sveta, vieme *jednoznačne* povedať, ktoré formuly sú v tomto stave splnené.

Príklad 3.20

Nech v_3 je ohodnotenie množiny $\mathcal{V} = \{\mathsf{a}, \dots, \mathsf{z}\}^+$, také že

$$v_3(\mathsf{kim}) = t \qquad v_3(\mathsf{jim}) = f \qquad v_3(\mathsf{sara}) = t.$$

Splĺňa svet s týmto ohodnotením formulu $(\neg\mathsf{jim} \to \neg\mathsf{sara})$?
Zoberieme vytvárajúcu postupnosť, prejdeme ju zľava doprava:

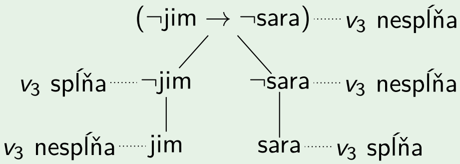
Formulu	jim	sara	$\neg$jim	$\neg$sara	$(\neg\mathsf{jim} \to \neg\mathsf{sara})$
ohodn. v_3	nesplĺňa	splĺňa	splĺňa	nesplĺňa	nesplĺňa

Splňanie výrokových formúl — vytvárajúci strom

Príklad 3.20 (pokračovanie)

$$v_3(\text{kim}) = t \qquad v_3(\text{jim}) = f \qquad v_3(\text{sara}) = t.$$

Iná možnosť je použiť vytvárajúci strom:



Splĺňanie výrokových formúl — program

- Proces zisťovania, či ohodnotenie splĺňa formulu, vieme naprogramovať:

```
def satisfies(v, A):
    ...
```

- Veľmi podobne vieme zadefinovať splnenie matematicky.

Spĺňanie výrokových formúl — definícia

Definícia 3.21

Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných. Nech v je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Pre všetky výrokové premenné p z $\mathcal{V}$ a všetky formuly A, B nad $\mathcal{V}$ definujeme:

- v spĺňa atomickú formulu p vtt $v(p) = t$;
- v spĺňa formulu $\neg A$ vtt v nespĺňa A;
- v spĺňa formulu $(A \wedge B)$ vtt v spĺňa A a v spĺňa B;
- v spĺňa formulu $(A \vee B)$ vtt v spĺňa A alebo v spĺňa B;
- v spĺňa formulu $(A \rightarrow B)$ vtt v nespĺňa A alebo v spĺňa B.

Dohoda

- Skratka *vtt* znamená *vtedy a len vtedy, keď*.
- Vzťah *ohodnotenie v spĺňa formulu X* skrátene zapisujeme $v \models X$, *ohodnotenie v nespĺňa formulu X* zapisujeme $v \not\models X$.
- Namiesto *v (ne)spĺňa X* hovoríme aj *X je (ne)pravdivá pri v*.

Splĺňanie výrokových formúl — príklad

Príklad 3.22

Nech v_3 je ohodnotenie množiny $\mathcal{V} = \{\mathsf{a}, \dots, \mathsf{z}\}^+$, také že

$$v_3(\mathsf{kim}) = t \qquad v_3(\mathsf{jim}) = f \qquad v_3(\mathsf{sara}) = t.$$

Zistime, ktoré z formúl

$$((\mathsf{kim} \lor \mathsf{jim}) \lor \mathsf{sara})$$
$$(\mathsf{kim} \to \neg\mathsf{sara}) \qquad (\mathsf{jim} \to \mathsf{kim}) \qquad (\neg\mathsf{jim} \to \neg\mathsf{sara})$$

ohodnotenie v_3 splĺňa a ktoré nesplĺňa.

$\deg(X)$	v_3 splĺňa X	v_3 nesplĺňa X
0	kim, sara	jim
1	$\neg$jim, (kim $\lor$ jim), (jim $\to$ kim)	$\neg$sara
2	((kim $\lor$ jim) $\lor$ sara)	(kim $\to$ $\neg$sara)
3		($\neg$jim $\to$ $\neg$sara)

Splňanie výrokových formúl

Dohoda

V ďalších definíciách a tvrdeniach predpokladáme, že sme si *pevne zvolili* nejakú množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ a hodnoty t, f.
„Formulou" rozumieme formulu nad množinou výrok. prem. $\mathcal{V}$.
„Ohodnotením" rozumieme ohodnotenie množiny výrok. prem. $\mathcal{V}$.

Tvrdenie 3.23

Splnenie výrokovej formuly pri ohodnotení výrokových premenných závisí iba od ohodnotenia (konečného počtu) výrokových premenných, ktoré sa v nej vyskytujú.
Presnejšie: *Pre každú formulu X a všetky ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré zhodujú na množine výrokových premenných vyskytujúcich sa v X, platí $v_1 \models X$ vtt $v_2 \models X$.*

Splňanie výrokových formúl

Dôkaz.

Indukciou na stupeň formuly X.

Báza: Nech X je stupňa 0. Podľa vety o jednoznačnosti rozkladu a definície stupňa musí byť $X = p$ pre nejakú výrokovú premennú. Zoberme ľubovoľné ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré sa zhodujú na premenných v X, teda na p. Podľa definície splňania $v_1 \models p$ vtt $v_1(p) = t$ vtt $v_2(p) = t$ vtt $v_2 \models p$.

Krok: Nech X je stupňa $n > 0$ a tvrdenie platí pre všetky formuly stupňa nižšieho ako n (indukčný predpoklad). Zoberme ľubovoľné ohodnotenia v_1 a v_2, ktoré sa zhodujú na premenných v X. Podľa definície stupňa a jednoznačnosti rozkladu nastáva práve jeden z prípadov:

- $X = \neg A$ pre práve jednu formulu A. Pretože $\deg(X) = \deg(A) + 1 > \deg(A)$, podľa ind. predpokladu tvrdenie platí pre A. Ohodnotenia v_1 a v_2 sa zhodujú na premenných v A (rovnaké ako v X). Preto $v_1 \models A$ vtt $v_2 \models A$, a teda $v_1 \models \neg A$ vtt $v_1 \not\models A$ vtt $v_2 \not\models A$ vtt $v_2 \models \neg A$.
- $X = (A \land B)$ pre práve jednu dvojicu formúl A, B. Pretože $\deg(X) = \deg(A) + \deg(B) + 1 > \deg(A)$ aj $\deg(B)$, podľa ind. predpokladu pre A aj B tvrdenie platí. Podobne pre ďalšie binárne spojky.

Tautológia, (ne)splniteľnosť, falzifikovateľnosť

Definícia 3.24

Formulu X nazveme *tautológiou* (skrátene $\models X$) vtt je splnená pri každom ohodnotení výrokových premenných.

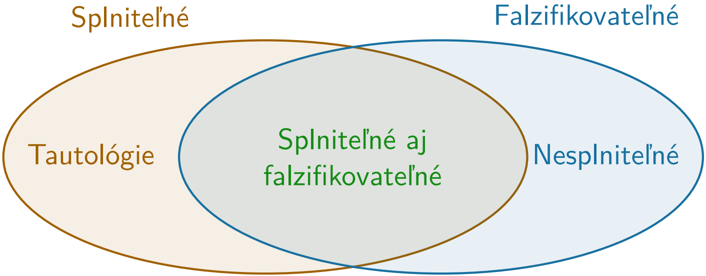
Príklad 3.25

$(p \lor \neg p)$, $\neg(p \land \neg p)$, $(\neg\neg p \to p)$, $(p \to \neg\neg p)$, $(p \to (q \to p))$, $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$, $((\neg q \to \neg p) \to (p \to q))$

Definícia 3.26

Formulu X nazveme *splniteľnou* vtt je splnená pri aspoň jednom ohodnotení výrokových premenných.
Formulu X nazveme *nesplniteľnou* vtt nie je splniteľná.
Formulu X nazveme *falzifikovateľnou* vtt je nesplnená pri aspoň jednom ohodnotení výrokových premenných.

„Geografia“ výrokových formúl podľa spĺňania



- Tautológie sú výrokovologické pravdy. Sú zaujímavé najmä pre klasický pohľad na logiku ako skúmanie správneho usudzovania.
- Vo výpočtovej logike je zaujímavá splniteľnosť a konkrétne spĺňajúce ohodnotenia.

Obrázok podľa [Papadimitriou, 1994]

Zamyslite sa II.4

Ak formula *nie* je falzifikovateľná, je:

A: splniteľná, B: nesplniteľná, C: tautológia.

Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.