

Matematika 4 – Logika pre informatikov: Cvičenie 3

Úloha 1. Je daná teória T nad $\mathcal{V} = \{a, b, \dots, z\}^+$:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} (p \rightarrow (q \wedge r)) \\ ((q \rightarrow p) \vee (s \rightarrow r)) \\ (\neg p \rightarrow (\neg r \wedge s)) \end{array} \right\}$$

Zistite, či z T vyplývajú nasledovné formuly:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| a) p | e) $((p \wedge q) \rightarrow s)$ |
| b) q | f) $((s \wedge r) \rightarrow \neg p)$ |
| c) $\neg r$ | g) $((s \vee p) \rightarrow r)$ |
| d) $((p \wedge q) \rightarrow r)$ | h) $((p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow p))$ |

Úloha 2. Vyriešte pomocou výrokovej logiky nasledovný hlavolam podľa R. M. Smullyana [1]:

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých A, B, C . Inšpektorka Fishcousová počas vyšetovania zistila tieto skutočnosti:

- | | |
|--|---|
| a) Ak je A vinný a B nevinný, je vinný C . | d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem A, B, C a aspoň jeden z nich je vinný. |
| b) C nikdy nepracuje sám. | |
| c) A nikdy nepracuje s C . | |

Zistite, koho z podozrivých má inšpektorka obviniť, kto je určite nevinný a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť.

Návod. Sformalizujte zistené fakty ako teóriu T . Rozhodnite, koho vina a koho nevina zo sformalizovanej teórie vyplýva. Zistite, koho vina a nevina je od T nezávislá.

Úloha 3. Dokážte alebo vyvráťte:

- | | |
|---|---|
| a) $\{\} \models X$ vtt X je tautológia. | f) Formula $(X \rightarrow Y)$ je nespĺniteľná vtt X je tautológia a Y je nespĺniteľná. |
| b) Formuly X a Y sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia. | g) Formula X je nezávislá od $\{\}$ vtt X je splniteľná a falzifikovateľná. |
| c) Ak $T \models \neg X$, tak $T \not\models X$. | h) Ak formula X logicky nevyplýva z T a ani nie je nezávislá od T , tak T je splniteľná a vyplýva z nej negácia X . |
| d) Ak $T \not\models X$, tak $T \models \neg X$. | |
| e) $S \models (X \rightarrow Y)$ vtt $S \cup \{X\} \models Y$. | |

Tvrdenie 1. Nech A, B a C sú ľubovoľné formuly, \top je ľubovoľná tautológia a \perp je ľubovoľná nespĺniteľná formula. Nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné:

$(A \wedge (B \wedge C))$ a $((A \wedge B) \wedge C)$	asociativita	$(A \wedge A)$ a A idempotencia
$(A \vee (B \vee C))$ a $((A \vee B) \vee C)$		$(A \vee A)$ a A
$(A \wedge (B \vee C))$ a $((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$	distributívnosť	$(A \vee (A \wedge B))$ a A absorpcia
$(A \vee (B \wedge C))$ a $((A \vee B) \wedge (A \vee C))$		$(A \wedge (A \vee B))$ a A
$\neg(A \wedge B)$ a $(\neg A \vee \neg B)$	de Morganove pravidlá	$(A \wedge \top)$ a A identita
$\neg(A \vee B)$ a $(\neg A \wedge \neg B)$		$(A \vee \perp)$ a A
$(A \wedge B)$ a $(B \wedge A)$	komutatívnosť	$(A \vee \neg A)$ a \top vylúč. tretieho
$(A \vee B)$ a $(B \vee A)$		$(A \wedge \neg A)$ a \perp spor
$(A \rightarrow B)$ a $(\neg A \vee B)$	nahradenie \rightarrow	$\neg\neg A$ a A dvojité negácia

Úloha 4. Dokážte *nájdением postupnosti ekvivalentných úprav*, teda substitúcií využívajúcich ekvivalencie z tvrdenia 1, že nasledujúce dvojice formúl sú ekvivalentné:

- a) $((p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge q))$ a p
- b) $((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)) \vee q$ a $(p \vee q)$
- c) $((p \rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge (r \vee \neg q)))$ a $\neg(q \vee p)$
- d) $((p \vee (q \vee r)) \wedge (p \vee (t \vee \neg q))) \wedge (p \vee (\neg t \vee r))$ a $(p \vee (r \wedge (t \vee \neg q)))$

Úloha 5. Rozhodnite o nasledujúcich formulách, či sú literálmi, klauzulami, v disjunktívnom normálnom tvare, v konjunktívnom normálnom tvare:

- a) p
- b) $\neg r$
- c) $\neg \neg q$
- d) $((p \vee q) \rightarrow r)$
- e) $((p \vee \neg q) \vee (q \vee \neg r))$
- f) $((p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge \neg r))$
- g) $(p \wedge (q \wedge (\neg q \wedge \neg r)))$
- h) $((p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg r \wedge \neg p)$
- i) $((p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg p)$
- j) $((p \wedge q) \vee (q \vee \neg(r \wedge p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$
- k) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$
- l) $((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \wedge \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$
- m) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee (\neg r \wedge \neg p)$
- n) $((p \vee q) \wedge (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \vee \neg p)$
- o) $((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))) \vee \neg(r \wedge \neg p)$
- p) $((p \vee q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))) \wedge (\neg r \wedge \neg p)$

Pri formulách v konjunktívnom normálnom tvare určte, z koľkých klauzúl sa skladajú.

Úloha 6. Pre každú formulu X z úlohy 5, ktorá je v disjunktívnom normálnom tvare, nájdite všetky ohodnotenia výrokových premenných vyskytujúcich sa v X , ktoré spĺňajú X .

Literatúra

- [1] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.