Laborator 4

Sîrbu Matei-Dan

5 noiembrie 2020

Repartiția binomială $\mathbf{B}_i(\mathbf{n}; \mathbf{p})$

Definiția: *O variabilă aleatoare X are o repartiție binomială de parametrii n și p, dacă repartiția sa are forma:*

$$X \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}_{\substack{k=\overline{0,n} \\ n\in\mathbb{N}}}, p \geq 0, p+q=1$$

Avem

$$p_{n,k} = C_n^k p^k q^{n-k} \geq 0, k = \overline{0,n} \text{ și } \sum_{k=0}^{n} p_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1.$$

Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X binomiale este:

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{[x]-1} p_{n,k},\ [x] \text{ fiind partea întreagă a lui X.}$$

Funcția caracteristică corespunzătoare repartiției binomiale este:

$$\varphi(t) = M(e^{itx}) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{itk} p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (e^{it} \cdot p)^k q^{n-k}$$
$$\varphi(t) = (pe^{it} + q)^n.$$

Media variabilei aleatoare X binomiale este:

$$M(X) = np.$$

Dispersia variabilei aleatoare X binomiale este:

$$D^2(X) = npq.$$

Abaterea pătratică medie a variabilei aleatoare X binomiale este:

$$\sigma(X) = \sqrt{D^2(X)} = \sqrt{npq}.$$

Repartiția uniformă continuă

Definiția: *O variabilă aleatoare X are o repartiție uniformă continuă de parametrii a și b, dacă densitatea sa de repartiție este:*

$$\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], 0 \leq a \leq b \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}.$$

Avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x)\,dx = 1.$$

Media variabilei aleatoare X cu repartiție uniformă de parametrii a și b este:

$$M(x) = \frac{a+b}{2}.$$

Dispersia variabilei aleatoare X cu repartiția uniformă de parametrii a și b este:

$$D^2(x) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Funcția de repartiție a variabilei aleatoare X cu repartiția uniformă de parametrii a și b este:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \rho(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}.$$

Funcția caracteristică a variabilei aleatoare X cu repartiția uniformă de parametrii a și b este:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{it(b-a)}(e^{itb} - e^{ita}), & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}.$$

Sisteme de ecuații liniare

Un ansamblu de egalități de forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1}$$

se numește *sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute* $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Elementele $a_{ij}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$ se numesc *coeficienți*, iar elementele $b_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,m}$ se numesc *termeni liberi*.

Sistemul (1) poate fi scris și sub formă matriceală:

$$A \cdot X = B \text{ sau } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1,m}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Matricea extinsă a sistemului (1) este:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$