

Introducere în teoria grafurilor

Sîrbu Matei-Dan

decembrie 2020

Capitolul 1

Despre conceptul de *graf*

1.1 Terminologie

Definim în mod informal un graf ca fiind o colecție de „noduri” unite prin „muchii”, ca în exemplul următor:

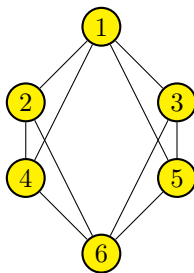


Figura 1.1: Un graf neorientat oarecare.

Definiția 1. Un **graf** este o pereche (V, E) , unde V este o mulțime finită de elemente, numite **noduri** (**Vertices**), iar E este o mulțime finită de perechi de noduri, numite **muchii** (**Edges**).

Dacă perechile din mulțimea E sunt ordonate, atunci spunem că graful este **orientat**, sau **digraf**; în caz contrar, graful este **neorientat**. De asemenea, două noduri unite de o muchie se numesc **adiacente**. Conceptul analog muchiilor aplicabil grafurilor orientate este **arcul**.

1.2 Dimensiunile unui graf

De obicei, notăm cu n numărul de noduri ale unui graf; mai precis, $n = |V|$. Cu m vom nota numărul de muchii, adică $m = |E|$. În graful din figura 1.1, n este 6, iar m este 10.

Teorema 1. Dacă un graf neorientat are n noduri, atunci **numărul total de grafuri neorientate** care se pot forma cu aceste noduri este $g = 2^{C_n^2}$.

Teorema 2. Graful **complet**, graful care are toate muchiile posibile, conține $m = \frac{n(n-1)}{2}$ muchii, dacă este neorientat.

Spunem despre un nod că este **izolat** dacă nu aparține niciunei muchii. Întrucât nodurile izolate sunt inutile în majoritatea aplicațiilor, presupunem că nu există astfel de noduri; în acest caz, știm despre numărul de muchii că este $m \geq \frac{n}{2}$.

Astfel, deducem, utilizând simbolul O al lui Landau (notația *big-O*), că în general, $m = O(n^2)$, iar în majoritatea aplicațiilor, $m = \Omega(n)$, limite care sunt aplicabile și digrafulor. Din punct de vedere terminologic, graful cu $m = \Theta(n)$ se numesc **rare**, iar cele cu $m = \Theta(n^2)$ sunt **dense**.

1.3 Conexitate

Definiția 2. Un **subgraf** $G' = (V', E')$ este un subgraf al lui $G = (V, E)$ dacă $V' \subseteq V$ și $E' \subseteq E$.

Definiția 3. Un **lanț** este o succesiune de noduri v_0, v_1, \dots, v_l , $l \geq 0$, cu $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pentru $i = \overline{0, l-1}$. Analog, în cazul grafulor orientate, această succesiune de noduri se numește **drum**.

Un lanț este **simplu** dacă nu trece de două ori prin aceeași muchie. În caz contrar, se numește lanț **compus**. Este de remarcat faptul că un lanț poate avea lungime nulă.

Definiția 4. Un **ciclu** este un drum cu $l \geq 3$, $v_0 = v_l$ cu toate nodurile și muchiile distincte.

Bibliografie

- [1] Harold N. Gabow. *Graph Theory Definitions*. The Department of Computer Science at the University of Colorado Boulder, 2008.
- [2] Mariana Miloşescu. *Informatică intensiv: C++: manual pentru clasa a XI-a, ed. a 3-a*. Editura Didactică şi Pedagogică, 2012.