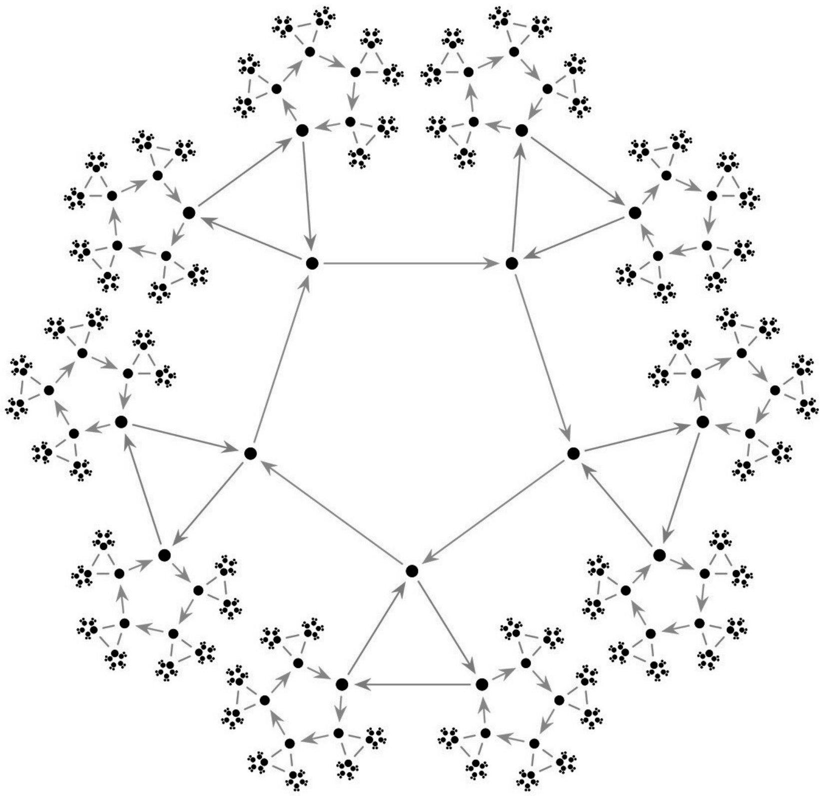
INTRODUCERE ÎN TEORIA GRAFURILOR

CÂTEVA CONSIDERAȚII ASUPRA CONCEPTELOR ESENȚIALE CARE STAU LA BAZA TEORIEI GRAFURILOR ȘI ALGORITMILOR FUNDAMENTALI UTILIZAȚI ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR COMPUTAȚIONALE



Un graf Cayley pentru $C_3 * C_5$.

DE

SÎRBU MATEI-DAN

hello@msirbu.eu

BRAȘOV, DECEMBRIE 2020

Capitolul 1

Despre conceptul de *graf*

1.1 Terminologie

Definim în mod informal un graf ca fiind o colecție de „noduri” unite prin „muchii”, ca în exemplul următor:

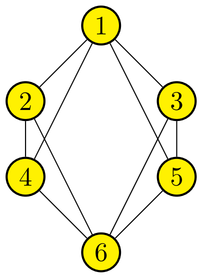


Figura 1.1: Un graf neorientat oarecare.

Definiția 1. *Un **graf** este o pereche (V, E), unde V este o mulțime finită de elemente, numite noduri (**V**ertices), iar E este o mulțime finită de perechi de noduri, numite muchii (**E**dges).*

Dacă perechile din mulțimea E sunt ordonate, atunci spunem că graful este ***orientat***, sau ***digraf***; în caz contrar, graful este ***neorientat***. De asemenea, două noduri unite de o muchie se numesc ***adiacente***. Conceptul analog muchiilor aplicabil grafurilor orientate este ***arcul***.

1.2 Dimensiunile unui graf

De obicei, notăm cu n numărul de noduri ale unui graf; mai precis, $n = |V|$. Cu m vom nota numărul de muchii, adică $m = |E|$. În graful din figura 1.1, n este 6, iar m este 10.

Teorema 1. *Dacă un graf neorientat are n noduri, atunci **numărul total de grafuri neorientate**[2] care se pot forma cu aceste noduri este $g = 2^{C_n^2}$.*

Teorema 2. *Graful* ***complet****, graful care are toate muchiile posibile, conține* $m = \frac{n(n-1)}{2}$ *muchii, dacă este neorientat.*

Spunem despre un nod că este ***izolat*** dacă nu aparține niciunei muchii. Întrucât nodurile izolate sunt inutile în majoritatea aplicațiilor, presupunem că nu există astfel de noduri; în acest caz, știm despre numărul de muchii că este $m \geq \frac{n}{2}$.

Astfel, deducem, utilizând simbolul O al lui Landau (notația *big-O*), că în general, $m = O(n^2)$, iar în majoritatea aplicațiilor, $m = \Omega(n)$, limite care sunt aplicabile și digrafurilor. Din punct de vedere terminologic, grafurile cu $m = \Theta(n)$ se numesc ***rare***, iar cele cu $m = \Theta(n^2)$ sunt ***dense***[1].

1.3 Conexitate

Definiția 2. *Un* ***subgraf*** $G' = (V', E')$ *este un subgraf al lui* $G = (V, E)$ *dacă* $V' \subseteq V$ *și* $E' \subseteq E$.

Definiția 3. *Un* ***lanț*** *este o succesiune de noduri* $v_0, v_1, \ldots, v_l$, $l \geq 0$, *cu* $(v_i, v_{i+1}) \in E$ *pentru* $i = \overline{0,\ l-1}$. *Analog, în cazul grafurilor orientate, această succesiune de noduri se numește* ***drum***.

Un lanț este ***simplu*** dacă nu trece de două ori prin aceeași muchie. În caz contrar, se numește lanț ***compus***. Este de remarcat faptul că un lanț poate avea lungime nulă.

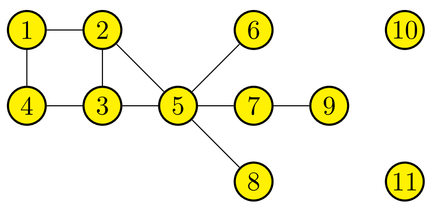
Definiția 4. *Un* ***ciclu*** *este un drum cu* $l \geq 3$, $v_0 = v_l$ *cu toate nodurile și muchiile distincte.*

Definiția 5. ***Gradul*** *unui nod* v_k *al grafului* G *este egal cu numărul muchiilor incidente cu nodul și se notează cu* $d(v_k)$.

În funcție de gradul nodurilor putem distinge câteva cazuri particulare[2]. Un ***nod terminal*** este incident cu o singură muchie, adică $d(v_k) = 1$. Un ***nod izolat*** nu este adiacent cu nici un alt nod al grafului, adică nu se găsește în extremitatea niciunei muchii; altfel spus, $d(v_k) = 0$. Un exemplu[2]:

Graful $G = (V, E)$ din figură este definit astfel:

- $V = \{1, 2, 3, \ldots, 11\}$
- $E = \{(1,2), (1,4), (2,3), (2,5), (3,4), (3,5), (5,6), (5,7), (5,8), (7,9)\}$



Despre graful G putem spune că:

- $d(v_5) = 5$, deoarece 5 are 5 muchii incidente: $(2,5), (3,5), (5,6), (5,7)$ și $(5,8)$.
- $d(v_9) = 1$, adică 9 este *nod terminal*, deoarece are o singură muchie incidentă: $(7,9)$.
- $d(v_{10}) = 0$, adică 10 este *nod izolat*, deoarece nu are muchii incidente.

Bibliografie

[1] Harold N. Gabow. *Graph Theory Definitions.* The Department of Computer Science at the University of Colorado Boulder, 2008.

[2] Mariana Miloșescu. *Informatică intensiv: C++: manual pentru clasa a XI-a, ed. a 3-a.* Editura Didactică și Pedagogică, 2012.