SPA 2 MATEJ SPAJIĆ

ZADAĆA 1

1. 1. a) ULANČAVANJE

KLJUČEVI: 77, 69, 39, 70, 6, 8, 40, 89, 49, 15

HASH TABLICA: $m = 19$

k - KLJUČ

$h(k) = k \bmod m$

KLJUČ $\xrightarrow{h(\text{KLJUČ})}$ INDEKS U HASHU

KLJUČ	INDEKS
77	1
69	12
39	1
70	13
6	6
8	8
40	2
89	13
49	11
15	15

NIL

NIL

	NIL	40			6	8			49	69	NIL		15			

NULTI INDEKS ... 18. INDEKS

b) DVOSTRUKO PROBIRANJE

$i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$

$h(k,i) = (h_1(k) + i \cdot h_2(k)) \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod m$, $h_2(k) = 1 + (k \bmod (m-1))$

$h(77,0) = (h_1(77) + 0 \cdot h_2(77)) \bmod 19 = 1$

$h(69,0) = 12$

$h(39,0) = 1 \Rightarrow h(39,1) = (h_1(39) + 1 \cdot h_2(39)) \bmod 19 =$
$= 5 \bmod 19 = 5$

$h(70,0) = 13$

$h(6,0) = 6$

$h(8,0) = 8$

$h(40,0) = 2$

$h(89,0) = 13 \Rightarrow h(89,1) = (h_1(89) + 1 \cdot h_2(89)) \bmod 19 =$
$= (13 + 18) \bmod 19 = 12 \Rightarrow h(89,2) =$
$= 11$

$h(49,0) = 11 \Rightarrow h(49,1) = 6 \Rightarrow h(49,2) = 1 \Rightarrow h(49,3) = 15$

$h(15,0) = 15 \Rightarrow h(15,1) = 12 \Rightarrow h(15,2) = 9$

	77	40		39	6		8	15		89	69	70		49		

0 ... 18.

① 2.

HASH F-JA $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i ((\mathrm{mod})\, 8)$ NIJE UNIVERZALNA.

npr. $n=2$ | $a_1 = a_2 = a_3$

17 | 71 $\Rightarrow$ $1 \cdot 1 + 7 \cdot 1 = 8 \bmod 8 = 0$

$7 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 8 \bmod 8 = 0$

ILI ZA:

62 | 88 $\Rightarrow$ $6 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 8 \bmod 8 = 0$

$8 \cdot 1 + 8 \cdot 1 = 16 \bmod 8 = 0$

② UZ PRETPOSTAVKU UNIFORMNOG RASPRŠENJA, OČEKIVANI BROJ KOLIZIJA MOŽEMO DOBITI PREKO SUME SVIH KOLIZIJA (KOLIZIJA SVAKOG MOGUĆEG ELEMENTA).

DEFINIRAMO X – SLUČ. VAR. KOJA MODELIRA KOLIZIJE ZA $0, \ldots, n-1$ KLJUČEVA

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & \frac{1}{m} & \frac{2}{m} & \cdots & \frac{n-1}{m} \end{pmatrix}$$

$$EX = \sum_{i=1}^{n} \frac{n-i}{m} = \frac{n^2 - \frac{n(n+1)}{2}}{m} = \frac{n^2 - n}{2m} = \frac{n(n-1)}{2m}$$

③ 1. m – VELIČINA HASH TABLICE

n – KLJUČEVI, PRI ČEMU VRIJEDI $n \leq \frac{m}{2}$

PRI UNIFORMNOM RASPRŠIVANJU BROJ PRAZNIH MJESTA JE BAREM $\frac{m}{2}$ ZBOG UVJETA NA n.

VJEROJATNOST DOGAĐAJA DA DOĐEMO NA ISTI INDEKS (NA ONAJ KOJI VEĆ IMA NEŠTO U HASHU) U SVAKOM OD PRVIH k PROBIRANJA UZ PRETPOSTAVKU DA IMAMO >k PROBIRANJA, UVIJEK JE $\leq \left(\frac{1}{2}\right)^k$ tj.

$$\leq \frac{1^k}{2^k} = \frac{1}{2^k} = 2^{-k}$$

2. AKO JE $k = 2\lg n$ ONDA JE VJEROJATNOST:

$$\leq 2^{-2\lg n} = 2^{\lg n^{-2}} = \frac{1}{n^2} \Rightarrow O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3. $X = \max\{x_i : 1 \leq i \leq n\}$:

$Pr\{X > 2\lg n\} = Pr\{x_1 > 2\lg n \cup x_2 > 2\lg n \cdots \cup x_n > 2\lg n\} =$

$= Pr\{\cup_i x_i > 2\lg n\} \leq \sum_{i=1}^{n} Pr\{x_i > 2\lg n\} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow O\left(\frac{1}{n}\right)$

4. $EX \leq \sum_{i=1}^{n} i \cdot Pr\{X = i\} \leq Pr\{X \leq 2\lg n\}\, 2\lg n + Pr\{X > 2\lg n\}\, n =$

$$= \frac{n-1}{n}\, 2\lg n + \frac{1}{n} \cdot n = 2\lg n + 1 - \frac{2 \cdot \lg n}{n} \in O(\lg n)$$