

Fibonacciho čísla - dôkaz $O(\log n)$ vzorcov

Lukáš Gajdošech

Pre ilustráciu si na začiatok vypíšme niekoľko prvých členov Fibonacciho postupnosti: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34. Máme vzorce na výpočet Fibonacciho čísel, ktorých pravdivosť chceme dokázať:

$$F_{2j} = F_j^2 + F_{j+1}^2 \quad (1)$$

$$F_{2j+1} = (2F_j + F_{j+1}) * F_{j+1} \quad (2)$$

Rovnica (1) - dôkaz matematickou indukciou

Báza: Vzorec zjavne triviálne platí pre $j \in 0, 1$. Aby to bolo aspoň trochu zaujímavé, skúsme $j = 2$:

$$F_{2*2} = F_2^2 + F_{2+1}^2 = 1^2 + 1^2 = 2 = F_4$$

Indukčný krok: Predpokladáme, že vzorec platí pre j a dokážeme, že platí aj pre $j + 1$, teda že:

$$F_{2(j+1)} = F_{2j+2} = \boxed{F_{j+1}^2 + F_{j+2}^2} \quad (3)$$

Na to nám stačí trochu algebry:

$$\begin{aligned} F_{2j+2} &= F_{2j} + F_{2j+1} \stackrel{\text{IP}}{=} F_j^2 + F_{j+1}^2 + F_{2j+1} \stackrel{\text{rovnic (2)}}{=} F_j^2 + F_{j+1}^2 + (2F_j + F_{j+1}) * F_{j+1} = \\ &= F_j^2 + F_{j+1}^2 + 2F_j * F_{j+1} + F_{j+1}^2 = F_j^2 + F_{j+1}(F_{j+1} + 2F_j) + F_{j+1}^2 = F_j^2 + F_{j+1}(F_{j+2} + F_j) + F_{j+1}^2 \\ &= F_j^2 + F_{j+1} * F_j + F_{j+1} * F_{j+2} + F_{j+1}^2 = F_j(F_j + F_{j+1}) + F_{j+1} * F_{j+2} + F_{j+1}^2 = F_j * F_{j+2} + F_{j+1} * F_{j+2} + F_{j+1}^2 \\ &= F_{j+2}(F_j + F_{j+1}) + F_{j+1}^2 = F_{j+2}F_{j+2} + F_{j+1}^2 = \boxed{F_{j+1}^2 + F_{j+2}^2} \end{aligned}$$

□

Rovnica (2) - dôkaz matematickou indukciou

Báza: Podobne ako v prvom prípade, pre malé argumenty je to nuda, skúsme $j = 3$:

$$F_{2*3+1} = (2 * F_3 + F_{3+1}) * F_{3+1} = (2 * 1 + 2) * 2 = 8 = F_7$$

Indukčný krok Chceme dokázať platnosť pre $j + 1$ teda:

$$F_{2(j+1)+1} = F_{2j+2+1} = F_{2j+3} = \boxed{(2 * F_{j+1} + F_{j+2}) * F_{j+2}} \quad (4)$$

Úpravy v tomto prípade vyjdú ešte krajšie:

$$\begin{aligned} F_{2j+3} &= F_{2j+1} + F_{2j+2} \stackrel{\text{IP}}{=} (2F_j + F_{j+1}) * F_{j+1} + F_{2j+2} \stackrel{\text{rovnic (3)}}{=} (2F_j + F_{j+1}) * F_{j+1} + F_{j+1}^2 + F_{j+2}^2 = \\ &= 2 * F_j * F_{j+1} + 2 * F_{j+1}^2 + F_{j+2}^2 = F_{j+2} * (F_{j+2} + \frac{2 * F_{j+1} * F_j + 2 * F_{j+1}^2}{F_{j+2}}) = \\ &= F_{j+2} * (F_{j+2} + \frac{2 * F_{j+1}(F_j + F_{j+1})}{F_{j+2}}) = F_{j+2} * (F_{j+2} + \frac{2 * F_{j+1} * F_{j+2}}{F_{j+2}}) = \boxed{(2 * F_{j+1} + F_{j+2}) * F_{j+2}} \end{aligned}$$

□

Poznámka: Nevie, či je úplne OK, že som v dôkaze rovnice (1) využil rovnicu (2) a v dôkaze rovnice (2) rovnicu (3), ktorú sme získali v prvom dôkaze. Vytvára to *cyklickú závislosť*, týmto spôsobom by som nedokázal jednu bez druhej...