

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Tia Krofel, Brina Ribič, Matej Rojec

VaR on option portfolio

Seminarska naloga pri predmetu Upravljanje tveganj

Mentor: dr. Aleš Ahčan

Ljubljana, 2022

Contents

1	Elementary definitions for options	3
2	Osnovno o VaR	3
2.1	Kako izračunamo VaR?	3
2.1.1	Mean variance framework	4
2.1.2	Historical simulation	4
2.1.3	Monte Carlo simulacija	4
2.2	Prednosti in slabosti	4
3	Nonlinear VaR	4

1 Elementary definitions for options

A stock option is the right to buy or sell a stock at a certain price in the future. The stock is called the underlying security (we usually say just the underlying). There are two main types of options, a put and a call option. A call option gives the owner the right to buy the underlying, while a put option gives the holder the right to sell the underlying. The price at which the stock may be bought or sold is the exercise price, also called the striking price. A stock option affords this right to buy or sell for only a limited period of time; thus, each option has an expiration date. We will focus on listed options, meaning they are traded on an exchange where a secondary market exists, thus we will not cover the topic of over the counter options.

To summarise a stock options contract is defined by following 4 characteristics:

1. the option type (put, call),
2. the expiration date of the contract,
3. the striking price of the contract,
4. the underlying stock name.

An options is closely linked to its underlying stock. Meaning that its price changes as the price of the underlying changes.

2 Osnovno o VaR

"Value at Risk" oziroma VaR je mera, ki je opredeljena kot največja potencialna sprememba v vrednosti portfelja pri določeni, dovolj visoki stopnji zaupanja za vnaprej določeno časovno obdobje. Ponavadi je stopnja zaupanja 95% ali 99%. VaR nam pove, koliko lahko izgubim z $x\%$ verjetnostjo v nekem časovnem obdobju. Ponavadi se uporablja krajše časovno obdobje, recimo dan, teden ali nekaj tednov. To pomeni, če je VaR za neko sredstvo 100 milijonov evrov v obdobju enega tedna s stopnjo zaupanja 95%, potem je samo 5% verjetnost, da bo vrednost sredstva padla za več kot 100 milijonov evrov v katerem koli tednu.

Pri opcijah pa ni tako preprosto, saj mora ocena tveganja upoštevati nelinearno gibanje cen (gamma učinek) in posredna volatilitnost (vega učinek). Za opcije bomo nelinearno gibanje cen ocenili analitično (delta-gamma) ali s simulacijo.

Let us now give a formal definition of value at risk.

Definicija 1. Let X be a random variable on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and $\alpha \in (0, 1)$. $\text{VaR}_\alpha(X)$ is defined as the $(1 - \alpha)$ quantile of $-X$. So:

$$\text{VaR}_\alpha(X) := -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) > \alpha\} = F_X^{-1}(1 - \alpha).$$

2.1 Kako izračunamo VaR?

Obstajajo trije osnovni pristopi, kako izračunati VaR. Lahko jo izračunamo analitično s predpostavkami o porazdelitvah donosov za tržna tveganja, zraven pa moramo upoštevati variance in kovariance med temi tveganji. VaR lahko ocenimo tudi s hipotetičnim portfeljem preko historyčnih podatkov ali z Monte Carlo simulacijo.

2.1.1 Mean variance framework

2.1.2 Historical simulation

2.1.3 Monte Carlo simulacija

2.2 Prednosti in slabosti

3 Nonlinear VaR

VaR meri tržno tveganje portfelja. Tu si portfelj predstavljamo kot množico pozicij, od katerih je vsaka sestavljena iz osnovnih vrednostnih papirjev. Zato razvrstimo pozicije v preprostejše, ki so linearne, in v pozicije izvedenih finančnih instrumentov, ki jih lahko še naprej razdelimo v linearne ali nelinearne pozicije izvedenih finančnih instrumentov.

Osnovna različica VaR predpostavlja linearno povezavo med donosi in spremembo vrednosti pozicije. Tu predpostavljamo, da imajo donosi vrednostnega papirja večrazsežno pogojno normalno porazdelitev.

Pri opcijskih pozicijah je nelinearna povezava med spremembo vrednosti pozicije in donosom. To lahko pojasnimo s preprosto opcijo na delnico. Cena opcije je $V(P_t, K, \tau, \rho, \sigma)$ v odvisnosti od cene delnice P_t ob času t , izvršilne cene K , časa dospelosti τ . Cena opcije je odvisna tudi od netvegane obrestne mere ρ nekega vrednostnega papirja, ki ima enak čas dospelosti kot opcija ter od standardnega odklona σ logaritma cene delnice v časovnem obdobju opcije.

Pri delta-gama pristopu še vedno predpostavljamo, da so donosi vrednostnih papirjev normalno porazdeljeni. Dodatno dopuščamo nelinearno zvezo med vrednostjo pozicije in donosi temelja. Natančneje, dovoljujemo gama učinek, torej da relativna sprememba portfelja iz derivativov (v našem primeru opcij) ni več normalno porazdelja. Zaradi tega ne moremo več VaR definirati kot 1.65 krat standardni odklon portfelja. Namesto tega VaR izračunamo v dveh glavnih korakih. Najprej izračunamo prve štiri momente porazdelitve donosa portfelja, tj., povprečje, standardni odklon, **skewness**, **kurtosis**. Potem poiščemo porazdelitev, ki ima enake prve štiri momente kot porazdelitev donosa portfelja in izračunamo peti percentil (ali prvi, odvisno od problema). Od tod potem dobimo VaR.