UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Finančna matematika – 2. stopnja

Tia Krofel, Brina Ribič, Matej Rojec

VaR on option portfolio

Seminarska naloga pri predmetu Upravljanje tveganj

Mentor: dr. Aleš Ahčan

Ljubljana, 2022

Kazalo

1. Uvod

2. Osnovno o opcijah

Opcija je pogodba med nosilcem opcije (kupcem) in izdajateljem opcije o nakupu oziroma prodaji osnovnega premoženja (temelja) po določeni ceni K imenovani izvršilna cena. Če opcija daje nosilcu pravico nakupa temelja, jo imenujemo nakupna opcija, če pa daje pravico prodaje, jo imenujemo prodajna opcija. Glede na to, kdaj je možna izvršitev opcije, ločimo več vrst opcij. Najbolj preprosta je evropska opcija, ki daje pravico izvršitve samo ob zapadlosti. Ameriška opcija daje pravico izvršitve kadarkoli do vključno trenutka zapadlosti. Poznamo tudi druge vrste opcij, ki jih skupno imenujemo eksotične opcije.

Označimo s $t = 0$ čas izadje opcije, s $t = T$ pa čas zapadlosti. Naj bo S_t cena osnovnega premoženja ob času $t \in [0, T]$. Vrednost opcije za nosilca opcije je enaka razliki med ceno osnovnega premoženja v času izvršitve in izvršilno ceno, če je zanj pozitivna. Sicer opcije ne izvrši in je njena vrednost enaka 0. Izplačilo evropske nakupne opcije ob času T je

$$C_T = max\{S_T - K, 0\}, \tag{1}$$

saj se mu v primeru, ko je $S_T < K$ ne splača izvršiti opcije, torej je njeno izplačilo 0. Izplačilo evropske prodajne opcije pa je enako

$$P_T = max\{0, K - S_T\}. \tag{2}$$

Kupec opcije mora ob nakupu opcije plačati premijo. Kako visoka je ta premija, je precej komplicirano izračunati. Premijo oziroma vrednost opcije bomo računali z Black-Scholesovim modelom. Cena evropske prodajne opcije ob času t je

$$V_t = Ke^{-R(T-t)}\Phi(-d_2) - S_t\Phi(-d_1), \tag{3}$$

kjer je

- K izvršilna cena opcije,
- R netvegana obrestna mera,
- S_0 cena temelja ob času 0.

Konstanti d_1 in d_2 izračunamo s formulama

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln(\frac{S_0}{K}e^{RT}) + \frac{\sigma^2}{2}T}{\sigma\sqrt{T}}, \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned} \tag{4}$$

Tu je σ volatilnost donosov temelja. Podobno formulo dobimo za izračun premije evropske nakupne opcije

$$V_t = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-R(T-t)}\Phi(d_2). \tag{5}$$

Glavna predpostavka v tem modelu je, da ima temelj zvezno neodvisno enako normalno porazdeljene donose. Naš cilj bo oceniti tveganje opcij glede na temelj. To bomo naredili s t. i. grškimi parametri.

3. Osnovno o VaR

"Value at Risk"oziroma VaR je mera, ki je opredeljena kot največja potencialna sprememba v vrednosti portfelja pri določeni, dovolj visoki stopnji zaupanja za vnaprej določeno časovno obdobje. Ponavadi je stopnja zaupanja 95% ali 99%. VaR nam pove, koliko lahko izgubim z $x\%$ verjetnostjo v nekem časovnem obdobju. Ponavadi se uporablja krajše časovno obdobje, recimo dan, teden ali nekaj tednov. To pomeni, če je VaR za neko sredstvo 100 milijonov evrov v obdobju enega tedna s stopnjo zaupanja 95%, potem je samo 5% verjetnost, da bo vrednost sredstva padla za več kot 100 milijonov evrov v katerem koli tednu.

Obstajajo trije osnovni pristopi, kako izračunati VaR. Lahko ga izračunamo analitično s predpostavkami o porazdelitvah donosov za tržna tveganja, zraven pa moramo upoštevati variance in kovariance med temi tveganji. VaR lahko ocenimo tudi s hipotetičnim portfeljem preko historičnih podatkov ali z Monte Carlo simulacijo.

Nas bo zanimalo, kaj se zgodi, če imamo sredstvo, ki je izvedeni finančni instrument. V tem primeru moramo nekoliko modificirati VaR. Recimo pri opcijah, moramo pri oceni tveganja upoštevati nelinarno gibanje cen (gamma učinek) in posredna volatilnost (vega učinek). Za opcije bomo nelinearno gibanje cen ocenili analitično (delta-gamma) ali s simulacijo.

3.1. **Kako izračunamo VaR.**

3.1.1. *Variančno-kovariančna metoda.* Variančno-kovariančna metoda je parametrična metoda, ki predpostavlja, da so donosi, kateri določajo vrednost portfelja, porazdeljeni normalno. Slučajna spremenljivka je porazdeljena normalno s parametroma μ (povprečje) in varianco σ^2 oziroma standardnim odklonom σ, če je gostota podana z

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp[-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2], \tag{6}$$

kjer je $x \in \mathbb{R}$. Ta metoda je uporabna, ker je v celoti definirana samo z dvema parametroma. Hkrati nam zagotavlja direktne formule za izračun kumulativnih porazdelitvenih funkcij; velja namreč

$$P(X < x) = \mu + \alpha_{cl}\sigma, \tag{7}$$

kjer je cl izbrana stopnja zaupanja (npr. 95%) in α_{cl} je standardna normalna spremenljivka pri izbrani stopnji zaupanja (npr. $\alpha_{0.95} = 1.645$).

VaR za eno naložbo je potem enak

$$VaR = MV \cdot \alpha_{cl} \cdot \sigma, \tag{8}$$

kjer je MV tržna vrednost temelja. Pri izračunu VaR za portfelj, ki je sestavljen iz več pozicij, moramo upoštevati tudi diverzifikacije oziroma razpršitve naložb. Pri opcijah se ta metoda izkaže za učinkovito, potrebno jo je le nekoliko modificirati. Ker je vrednost opcije odvisna od več dejavnikov ter imamo nelinearno povezavo med vrednostjo opcije in donosnostjo temelja, moramo izračunati še nekaj dodatnih parametrov, da bo rezultat korekten.

3.1.2. *Zgodovinska simulacija.* Zgodovinska simulacija omogoča zelo preprosto in intuitivno oceno VaR. Temelji na vrstnem redu opazovanih podatkov; recimo, da imamo 100 opažanj, potem je šesto po vrsti VaR pri stopnji zaupanja 95%. Zavedati pa se moramo, da lahko pride do večjih napak pri tem načinu izračuna VaR zaradi ekstremnih dogodkov, dolžine opazovanega obdobja, ... Prav tako ta metoda ni primerna za izračun nelinernega VaR oziroma za izračun VaR za opcije, saj je historične podatke za opcije težko dobiti in jih med seboj primerjati.

3.1.3. *Monte Carlo simulacija.* Monte Carlo simulacija je danes v praksi zelo uporabna saj je precej prilagodljiva za veliko različic VaR. Izkazalo se bo, da je uporabna tudi za izračun nelinearnega VaR.

4. Nelinearen VaR

Osnovna različica VaR predpostavlja linearno povezavo med donosi in spremembo vrednosti pozicije oziroma da je relativna sprememba portfelja linearna funkcija donosa temelja (delnice, obveznice ...) Tu predpostavljamo, da imajo donosi vrednostnega papirja večrazsežno normalno porazdelitev.

Pri opcijskih pozicijah je nelinearna povezava med spremembo vrednosti pozicije in donosom. To lahko pojasnimo s preprosto opcijo na delnico. Cena opcije je $V(S_t, K, T, R, \sigma)$ v odvisnosti od cene delnice S_t ob času t, izvršilne cene K, časa dospelosti T. Cena opcije je odvisna tudi od netvegane obrestne mere R nekega vrednostnega papirja, ki ima enak čas dospelosti kot opcija ter od standardnega odklona σ cene delnice v časovnem obdobju opcije. Zato moramo uporabiti drugačen pristop za računanje VaR za portfelj iz opcij. Uporabili bomo delta, gama in delta-gama pristop.

Pri vseh različicah še vedno predpostavljamo, da so donosi vrednostnih papirjev porazdeljeni normalno. Dodatno dopuščamo nelinearno zvezo med vrednostjo pozicije in donosi temelja. Natančneje, dovoljujemo gama učinek, torej da relativna sprememba portfelja iz derivativov (v našem primeru opcij) ni več normalno porazdelja. Zaradi tega ne moremo več VaR definirati kot 1.65 krat standardni odklon portfelja. Namesto tega VaR izračunamo v dveh glavnih korakih. Najprej izračunamo prve štiri momente porazdelitve donosa portfelja, tj., povprečje, standardni odklon, **skewness**, **kurtosis**. Potem poiščemo porazdelitev, ki ima enake prve štiri momente kot porazdelitev donosa portfelja in izračunamo peti percentil (ali prvi, odvidno od problema). Od tod dobimo VaR.