Dodatna nastava 2 – Fizika – Statika fluida

Listopad 2024.

Napomena:
Pročitajte poglavlje *Statika fluida*. Zatim ga ponovno pročitajte. Potrudite se shvatiti i razumjeti gradivo do kore. Prođite kroz Alfinu zbirku zadataka iz fizike za upoznavanje tipa zadataka. Za svaku nedoumicu oko gradiva se obratite profesoru ili meni. Možete se i pokušati snaći na internetu. Ako imate nedoumica oko ponuđenih zadataka ili njihovih rješenja, slobodno mi se javite u bilo koje doba dana na +385 99 8421 792.
Sretno!

1 Zadatci

1. (šk2022/2r/z3) Cjevčica uniformnog presjeka, u obliku slova U, otvorena na krajevima i okomito postavljena sadržava ulje ($\rho = 0.9$ g cm^{-3}). Ulje na površini lijeve (A) i desne (B) strane podržava dva pomična cilindrična klipa mase m_A i m_B. Dimenzije cilindra su takve da ne dopuštaju tekućini da prodre između cilindra i stijenke cijevi. Trenje između cilindra i cijevi je zanemarivo. Kad je sustav u ravnoteži, visinska razlika između visina ulja A i B iznosi $h = 10$ cm, a polumjer cijevi je $r = 20$ cm. Kolika je razlika između mase m_A i m_B?

2. (šk2021/2r/z5) Tijelo u zraku je teško $F_1 = 15$ N. Uronjeno u vodu je teško $F_2 = 12$ N. Uronjeno u nepoznatu tekućinu teško je $F_3 = 13$ N. Izračunaj gustoću tijela i gustoću nepoznate tekućine. Uzmi da je gustoća vode $\rho_{\text{vode}} = 1000$ kg m^{-3}.

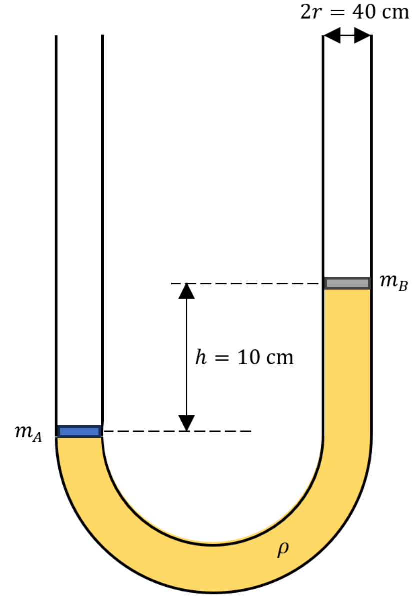
3. (šk2023/2r/z4) Kugla je u ravnoteži između dviju tekućina specifične težine $\gamma_1 = 7$ kN m^{-3} i $\gamma_2 = 9$ kN m^{-3}, a ravnina razdvajanja dviju tekućina prolazi kroz njezino težište. Odredi specifičnu težinu materijala od kojega je načinjena kugla.

4. (šk2018/2r/z2) Za popunjavanje bazena koriste se dvije različite pumpe različitog protoka. Druga pumpa trebala bi raditi 2 sata dulje od prve da bi napunila bazen, ukoliko bi sama radila. Uz istovremeni rad obje pumpe, ukupno vrijeme za punjenje bazena je 80 minuta. Koliko dugo bi pumpe trebale raditi pojedinačno da bi svaka zasebno napunila bazen?

5. (žup2021/2r/z5 – Prekrasna klasična mehanika!) Posuda koja sadrži tekućinu klizi niz nepomičnu kosinu pod kutom $\varphi = 60°$ s obzirom na horizontalu. Koeficijent trenja između posude i površine je $\mu = 0{,}15$. Odredi kut θ koji površina tekućine stvara prema kosini tijekom kretanja posude na kosini.

2 Rješenja

1. Nacrtajmo prvo kvalitativnu skicu.



Ako je uz uvjete zadatka sustav u ravnoteži, tada tlak koji djeluje na ulje s lijeve strane uzrokovan težinom tijela m_A mora biti jednak zbroju tlaka uzrokovanog težinom tijela m_B i hidrostatskog tlaka ulja na razini mase m_A. Dakle, vrijedi jednakost

$$p_{m_A} = p_{m_B} + \rho_{\text{ulja}} g h,$$

gdje je g gravitacijsko ubrzanje Zemlje ($g = 9{,}81 \text{ m s}^{-2}$). Površina na koju djeluju p_{m_A} i p_{m_B} je jednaka površini poprečnog presjeka cijevi, oblika kruga, koja je jednaka $r^2\pi$. Iskoristimo definiciju tlaka kako bi raspisali p_{m_A} i p_{m_B}:

$$\frac{m_A g}{r^2\pi} = \frac{m_B g}{r^2\pi} + \rho_{\text{ulja}} g h \qquad \longrightarrow \qquad m_A g = m_B g + \rho_{\text{ulja}} g h r^2 \pi.$$

Ako prebacimo $m_B g$ na lijevu stranu, faktoriziramo g i zatim podijelimo obje strane s g, dobivamo traženu razliku masa m_A i m_B,

$$m_A g - m_B g = \rho_{\text{ulja}} g h r^2 \pi \qquad \longrightarrow \qquad m_A - m_B = \rho_{\text{ulja}} h r^2 \pi = \boxed{11{,}3 \text{ kg}}.$$

---

2. Ako je tijelo u zraku teško $F_1 = 15$ N, tada možemo pretpostaviti da je sila uzgona zanemariva zbog izuzetno male gustoće zraka te je sila teža rezultantna sila na tijelo dok se nalazi u zraku. Zato vrijedi $F_1 = 15 \text{ N} = mg \longrightarrow m = \dfrac{15 \text{ N}}{g} = 1{,}53 \text{ kg}$. Ako tijelo kojem smo upravo našli masu teži $F_2 = 12$ N u vodi, zaključujemo da je F_2 rezultantna sila na tijelo jednaka

$$F_2 = mg - F_{\text{uzgona}} = mg - \rho_{\text{vode}} g V_{\text{tijela}} = F_1 - \rho_{\text{vode}} g V_{\text{tijela}} = 12 \text{ N}.$$

Algebarskom manipulacijom ovog izraza možemo odrediti izraz za V_{tijela} koji uvrštavamo u formulu za gustoću tijela,

$$V_{\text{tijela}} = \frac{F_1 - F_2}{\rho_{\text{vode}} g} \qquad \longrightarrow \qquad \rho_{\text{tijela}} = \frac{m}{V_{\text{tijela}}} = \frac{m}{\frac{F_1 - F_2}{\rho_{\text{vode}} g}} = \frac{m g \rho_{\text{vode}}}{F_1 - F_2} = \frac{F_1 \rho_{\text{vode}}}{F_1 - F_2} = \boxed{5000 \text{ kg m}^{-3}}.$$

Ako je u nepoznatoj tekućini tijelo teško $F_3 = 13$ N, tada kao i prije vrijedi

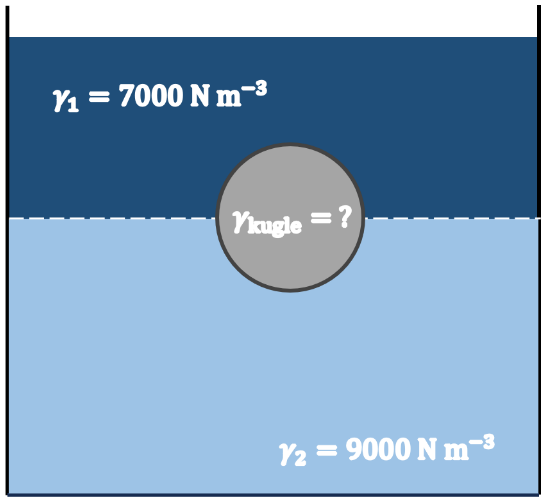
$$F_3 = mg - F_{\text{uzgona}} = F_1 - \rho_{\text{nepoznate tekućine}} g V_{\text{tijela}} = F_1 - \frac{\rho_{\text{nepoznate tekućine}}}{\rho_{\text{tijela}}} mg = F_1 - \frac{\rho_{\text{nepoznate tekućine}}}{\rho_{\text{tijela}}} F_1.$$

Naravno, algebarskom manipulacijom dobivamo

$$\rho_{\text{nepoznate tekućine}} = \frac{F_1 - F_3}{F_1}\rho_{\text{tijela}} = \boxed{666{,}6\ \text{kg m}^{-3}}.$$

---

3. Za početak, nacrtajmo kvalitativnu skicu. Naravno, *težište* kugle je njezino središte.



Proučimo sada mjernu jedinicu koja nam je zadana u zadatku. Ako je *specifična težina* nekog tijela izražena u N m^{-3}, to nam implicira da je svaki m^3 tog tijela težak onoliko koliko iznosi specifična težina podijeljena s m^3. Dakle, svaki m^3 tekućine specifične težine γ_1 je težak 7 kN. Uočimo da možemo odrediti gustoću te tekućine koristeći informaciju o specifičnoj težini. Ako je $\gamma = \frac{mg}{V}$, tada je $\rho_1 = \frac{\gamma_1}{g}$. Jednako tako je $\rho_2 = \frac{\gamma_2}{g}$. S obzirom da je kugla u mirovanju, a ravnina razdvajanja dviju tekućina prolazi kroz njezino težište, zaključujemo da vrijedi jednakost

$$mg = F_{\text{uzgona }(\gamma_1)} + F_{\text{uzgona }(\gamma_2)} \quad\longrightarrow\quad mg = \rho_1 g\frac{V_{\text{kugle}}}{2} + \rho_2 g\frac{V_{\text{kugle}}}{2} \quad\longrightarrow\quad 2m = \rho_1 V_{\text{kugle}} + \rho_2 V_{\text{kugle}}.$$

Ako iskoristimo jednakost gustoća tekućina i njihovih specifičnih težina, možemo odrediti specifičnu težinu kugle,

$$2m = \frac{\gamma_1}{g}V_{\text{kugle}} + \frac{\gamma_2}{g}V_{\text{kugle}} \quad\longrightarrow\quad 2mg = V_{\text{kugle}}(\gamma_1+\gamma_2) \quad\longrightarrow\quad \boxed{\frac{mg}{V_{\text{kugle}}} = \gamma_{\text{kugle}} = \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = 8\ \text{kN m}^{-3}}.$$

---

4. Za rješavanje ovakvog zadatka ćemo trebati iskoristiti definiciju volumnog protoka, $q = \frac{V}{t}$. Neka je V volumen bazena kojeg treba napuniti. Ako bi druga pumpa trebala raditi 2 sata dulje od prve da bi napunila bazen, tada je

$$t_2 = t_1 + 2\ \text{h} \quad\longrightarrow\quad \frac{V}{q_2} = \frac{V}{q_1} + 120\ \text{min},$$

što implicira $q_2 < q_1$. Ako je ukupno vrijeme bazena uz istovremeni rad obje pumpe 80 minuta, tada je

$$t_{1\ \text{i}\ 2} = 80\ \text{min} = \frac{V_1}{q_1} = \frac{V_2}{q_2} = \frac{V_1}{\frac{V}{t_1}} = \frac{V_2}{\frac{V}{t_2}} \quad\longrightarrow\quad \frac{V_1}{V}t_1 = \frac{V_2}{V}t_2 = 80\ \text{min} \quad\longrightarrow\quad V_1t_1 = V_2t_2.$$

Naravno, vrijedi $V_1 + V_2 = V$. Zato je

$$V_1t_1 = (V - V_1)t_2 \quad\longrightarrow\quad V_1t_1 = (V-V_1)(t_1 + 120\ \text{min}) \quad\longrightarrow\quad \frac{t_1}{t_1 + 120\ \text{min}} = \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{V}{V_1} - 1.$$

Naime, prije smo odredili da je $\frac{V_1}{V}t_1 = 80$ min pa je zato $\frac{V}{V_1} = \frac{t_1}{80 \text{ min}}$. Stoga vrijedi

$$\frac{t_1}{t_1 + 120 \text{ min}} = \frac{t_1}{80 \text{ min}} - 1,$$

što je jednadžba s jednom nepoznanicom koju transformacijom pretvaramo u kvadratnu jednadžbu. Zanemarujući mjerne jedinice uz koeficijente dobivamo

$$t_1^2 - 40t_1 - 9600 = 0,$$

čija su rješenja $t_{1,1} = 120$ min i $t_{1,2} = -80$ min. Negativno rješenje odbacujemo te uzimamo $\boxed{t_1 = 120 \text{ min} = 2 \text{ h}}$, iz čega po uvjetu zadatka slijedi $\boxed{t_2 = 240 \text{ min} = 4 \text{ h}}$.

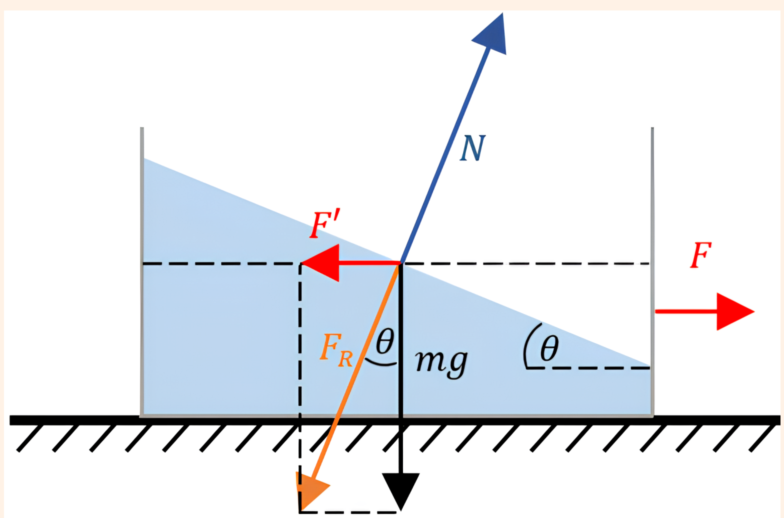
---

5. U ovom zadatku se vraćamo na koncept neinercijskih sustava iz 1. razreda. Specifično, u pitanju je neinercijski sustav posude s tekućinom. Kako možemo odrediti kut kojeg tekućina zatvara s horizontalom ako na posudu djeluje neka rezultantna sila F?

Teorem – Površina fluida pod kutom

Ravnina koju čini površina nekog fluida je **uvijek** okomita na vektor rezultantne sile koji djeluje na taj fluid.

Primjer. Razmotrimo posudu oblika kocke koja se nalazi na horizontalnoj površini. Neka je smjer gravitacijskog ubrzanja vertikalno prema dolje. Nacrtajmo dijagram sila:



Uočavamo trigomometrijsku relaciju

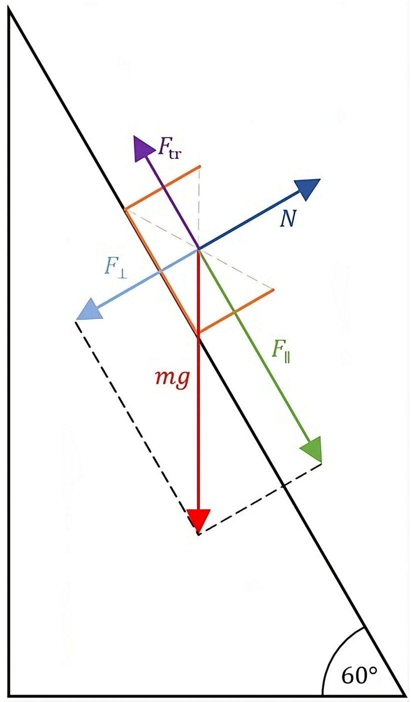
$$\text{tg}\ \theta = \frac{F'}{mg}.$$

Zbog trećeg Newtonovog zakona vrijedi $F = F'$ pa je zato

$$\text{tg}\ \theta = \frac{F}{mg} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} \longrightarrow \boxed{\theta = \text{arctg}\left(\frac{a}{g}\right)}.$$

Kut θ je po sličnosti trokuta upravo kut pod kojim je nagnut fluid u odnosu na horizontalu.

Nacrtajmo dijagram sila na posudu. Preko točnog crteža ćemo dobiti dovoljno informacija kako bi s lakoćom iskoristili ponuđeni teorem za računanje traženog kuta u zadatku.



Silu težu (mg) vektorski rastavljamo na $F_\perp$ i $F_\parallel$. $F_\perp$ i sila reakcije podloge se poništavaju. Stoga je rezultantna sila na posudu jednaka

$$F_R = ma = F_\parallel - F_{\mathrm{tr}} = mg\sin 60^\circ - \mu mg\cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}mg - \frac{1}{2}\mu mg.$$

Ako poništimo masu s obje strane jednadžbe, možemo dobiti iznos ubrzanja posude s fluidom niz kosinu,

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}g - \frac{1}{2}\mu g = 7{,}76 \text{ m s}^{-2}.$$

Iznos horizontalne akceleracije tijela je $a_{\mathrm{h}} = a\cos 60^\circ = 3{,}88 \text{ m s}^{-2}$, a vertikalne akceleracije $a_{\mathrm{v}} = a\sin 60^\circ = 6{,}72 \text{ m s}^{-2}$. S obzirom da fluid ima neki iznos vertikalne akceleracije, on *osjeća* da je za njega gravitacijsko ubrzanje jednako $g - a_{\mathrm{v}} = 3{,}09 \text{ m s}^{-2}$. *Ali Matej, kako misliš osjeća? Kako je moguće da fluid osjeća manje gravitacijsko ubrzanje?* Ovdje se pozivam na Einsteinovu *najsretniju misao*, kada je zamislio radnika na krovu kako pada s te građevine. Shvatio je da tijekom pada mora biti u bestežinskom stanju. Ako vam je taj koncept teško shvatiti, zamislite da se nalazite u liftu koji odjednom krene padati prema dolje gravitacijskim ubrzanjem. S obzirom da ste i vi u liftu, vi bi jednako tako padali prema dolje te ne biste osjećali svoju težinu, bili bi kao na svemirskoj postaji. Stoga vrijedi da ako tijelo akcelerira prema dolje nekim ubrzanjem a ($a < g$), tada ono *osjeća* da je njegovo gravitacijsko ubrzanje $g - a$.

Iskoristimo ponuđeni teorem. Kut kojeg fluid zatvara s <u>horizontalom</u> je jednak

$$\theta_{\mathrm{h}} = \mathrm{arctg}\left(\frac{a_{\mathrm{h}}}{g - a_{\mathrm{v}}}\right) = 51{,}46^\circ.$$

Zato je kut koji fluid zatvara s <u>kosinom</u> jednak

$$\boxed{\theta = \left|\mathrm{arctg}\left(\frac{a_{\mathrm{h}}}{g - a_{\mathrm{v}}}\right) - 60^\circ\right| = 8{,}54^\circ}$$