Uvodna dodatna nastava – Fizika – Ponavljanje prvog razreda

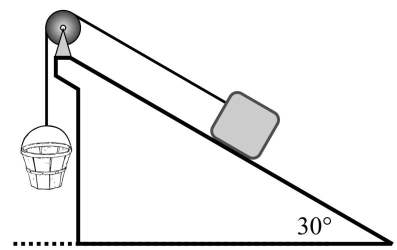
Rujan 2024.

1 Zadatci

1. (Kup fizike u Lucijanki/1r/z9) Silu trenja na zrakoplov koji se giba jednoliko pravocrtno možemo zapisati kao kv^2, gdje je k konstanta aeordinamičkog otpora, a v trenutačna brzina zrakoplova. Kada se zrakoplov giba brzinom v_1, motor razvija snagu P_1. Ako se snaga motora poveća na $2P_1$, zrakoplov će letjeti novom brzinom iznosa αv_1. Odredi vrijednost konstante α.

2. (šk2021/2r/z2) Kazaljke sata pokazuju 3 sata. Za koliko će se vremena kazaljke prvi put naći pod pravim kutom?

3. (šk2022/1r/z3) U sustavu prikazanom na slici na jedan kraj užeta pričvršćen je uteg mase 2 kg, a na drugi kraj užeta prazna kanta mase 0,75 kg. Kanta se giba prema gore, a uteg kliže niz kosinu stalnom brzinom. Ako se u kantu stavi teret mase m', kanta se giba prema dolje, a uteg uz kosinu stalnom brzinom. Nagib kosine je 30° u odnosu na horizontalu. Kosina je nepomična. Uže je nerastezljivo i zanemarive mase.



   (a) Postoji li trenje između utega i kosine?

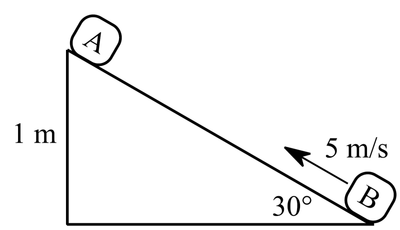
   (b) Izračunaj masu tereta m'.

4. (žup2022/1r/z4) Dunja stoji na krovu nebodera $\mathcal{A}$, čija je visina 64 m, i baci lopticu u horizontalnom smjeru brzinom v_1 prema neboderu $\mathcal{B}$. Jagoda se nalazi na krovu nebodera $\mathcal{B}$ i baci lopticu u horizontalnom smjeru brzinom v_2 prema neboderu $\mathcal{A}$. Jagoda je bacila svoju lopticu 0,4 s nakon Dunje. Loptice se sudare u zraku na polovici horizontalne udaljenosti između nebodera i na visini od tla jednakoj 20% visine nebodera $\mathcal{A}$. Horizontalna udaljenost između dva nebodera jednaka je visini nebodera $\mathcal{B}$.

   (a) Izračunaj visinu nebodera $\mathcal{B}$.

   (b) Izračunaj početne brzine obje loptice, v_1 i v_2.

5. (šk2015/1r/z5) Dva tijela jednakih masa u početnom trenutku nalaze se u položaju prikazanom na slici. Jedno tijelo pušteno je iz mirovanja s vrha kosine visine 1 m, a drugo je gurnuto uz kosinu iz njenog podnožja brzinom 5 m s^{-1}. Trenje između tijela i kosine je zanemarivo. Dimenzije tijela su znatno manje u odnosu na dimenzije kosine. Uzmi da je $g = 10$ m s^{-2}.



   (a) Izračunaj na kojoj udaljenosti od položaja kosine će se tijela sudariti.

   (b) Nakon sudara tijela se nastavljaju gibati zajedno (sudar je plastičan). Izračunaj iznos i smjer brzine tijela neposredno nakon sudara.

6. (Kalda Mechanics/z67) Kuglica se nalazi na vrhu nepomične sfere radijusa R, puno veće od kuglice. U određenom trenutku kuglica bez početne brzine krene kliziti niz sferu. Pronađi visinu na kojoj kuglica gubi kontakt sa sferom u odnosu na horizontalu. Zanemari trenje.

2 Rješenja

1. U ovom zadatku je ključno iskoristiti formulu za razvijenu snagu tijela koje se giba jednolikom brzinom – a koje se opire nekoj konstantnoj sili koja djeluje suprotno smjeru gibanja. Ta formula je naravno $P = Fv$. Kada motor razvije snagu P_1, vrijedi da je

$$P_1 = F_{\text{otpora (1)}} v_1 = k v_1^2 v_1 = k v_1^3.$$

Kada se snaga motora poveća na $2P_1$, vrijedi

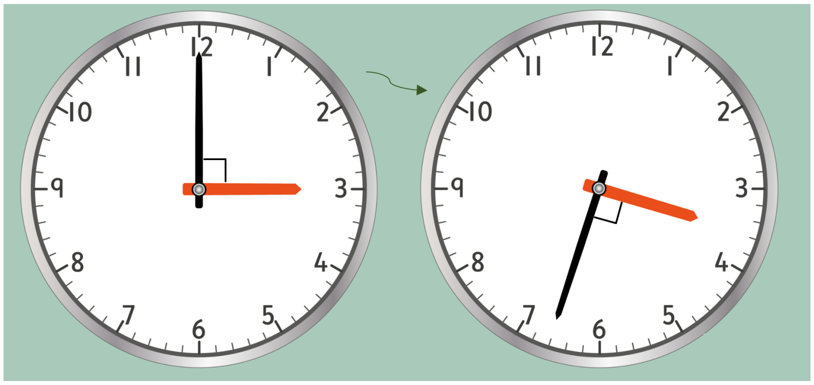
$$2P_1 = F_{\text{otpora (2)}} v_2 = k v_2^2 v_2 = k(\alpha v_1)^2 \alpha v_1 = k\alpha^3 v_1^3.$$

Znamo da je $P_1 = k v_1^3$ te je zato

$$2k v_1^3 = k\alpha^3 v_1^3 \quad\longrightarrow\quad \alpha^3 = 2 \quad\longrightarrow\quad \boxed{\alpha = \sqrt[3]{2}}.$$

---

2. Uz malo promišljanja o gibanju kazaljki sata nakon 3 sata, zaključujemo da će se novi pravi kut među kazaljkama desiti za manje od sat vremena, odnosno negdje između 30 i 35 minuta, kako je prikazano na slici.



Kutne brzine satne i minutne kazaljke redom zapisujemo kao

$$\omega_{\text{satna kazaljka}} = \frac{360°}{720\ \text{min}}, \qquad \omega_{\text{minutna kazaljka}} = \frac{360°}{60\ \text{min}}.$$

Uočavamo odnos među dvama kutnim brzinama, $\omega_{\text{minutna kazaljka}} = 12\omega_{\text{satna kazaljka}}$. Uvjet pravog kuta među kazaljkama zapisujemo kao

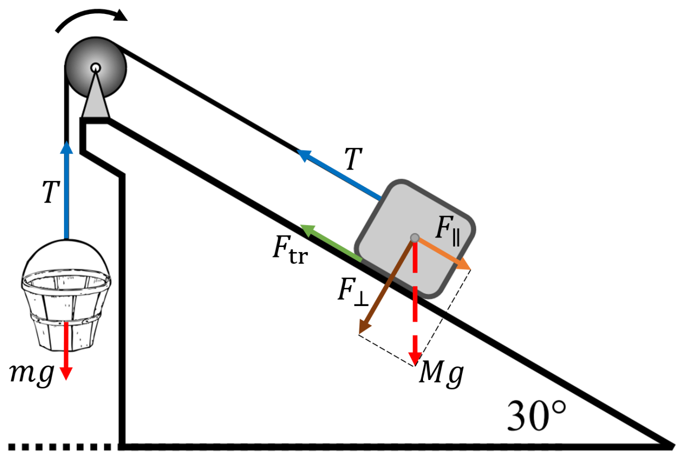
$$\theta_{\text{minutna kazaljka}} - (\theta_{\text{satna kazaljka}} + 90°) = 90° \quad\longrightarrow\quad \theta_{\text{minutna kazaljka}} - \theta_{\text{satna kazaljka}} = 180°.$$

Kutu satne kazaljke smo u zadnjem izrazu lijevo dodali 90° jer je na početku (u 3 sata) satna kazaljka bila za 90° ispred minutne. S obzirom da kutnu brzinu također definiramo kao *prijeđen kut* u vremenu $\left(\omega = \frac{\theta}{t}\right)$, zadnji izraz zapisujemo kao

$$\omega_{\text{minutna kazaljka}} t - \omega_{\text{satna kazaljka}} t = 180° \quad\longrightarrow\quad t\left(\frac{360°}{60\ \text{min}} - \frac{360°}{720\ \text{min}}\right) = 180° \quad\longrightarrow\quad \boxed{t = 32\ \text{min}\ 43{,}64\ \text{s}}.$$

---

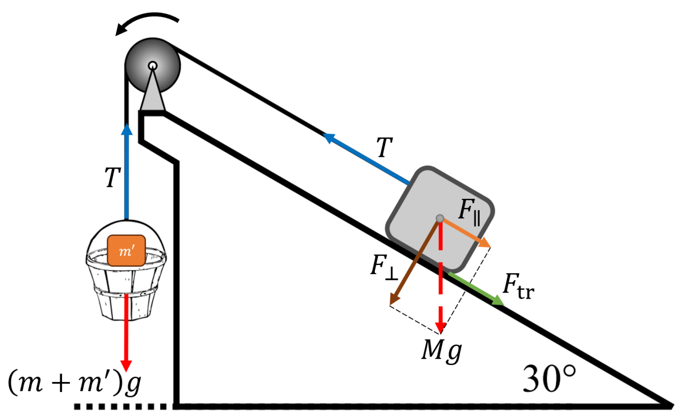
3. Skicirajmo dijagram sila na sustav bez dodane mase u kanti.



(a) S obzirom na to da se sustav dva utega bez dodane mase giba niz kosinu stalnom brzinom, zaključujemo da je rezultantna sila na sustav jednaka nuli, što implicira da $\boxed{\text{postoji trenje između utega i kosine}}$. Tvrdnju postojanja trenja dokazujemo rješavanjem nejednadžbe $F_{\parallel} - mg > 0$, koju potvrđujemo uvrštavanjem vrijednosti M i m iz uvjeta zadatka. Jednadžbu gibanja sustava niz kosinu zapisujemo kao

$$F_{\parallel} - F_{\mathrm{tr}} - T - mg = 0 \qquad \longrightarrow \qquad Mg\sin 30^\circ = \mu Mg\cos 30^\circ + T + mg. \tag{1}$$

(b) Ako u praznu kantu dodamo uteg mase m', sustav se giba jednolikom brzinom uz kosinu. Nacrtajmo novi dijagram sila sustava.



Sustav se ponovno giba jednolikom brzinom te zaključujemo da je rezultantna sila na sustav ponovno jednaka nuli. Jednadžbu gibanja sustava uz kosinu zapisujemo kao

$$(m+m')g - T - F_{\parallel} - F_{\mathrm{tr}} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad T + Mg\sin 30^\circ + \mu Mg\cos 30^\circ = mg + m'g. \tag{2}$$

Zbrajajući (1) i (2) dobivamo

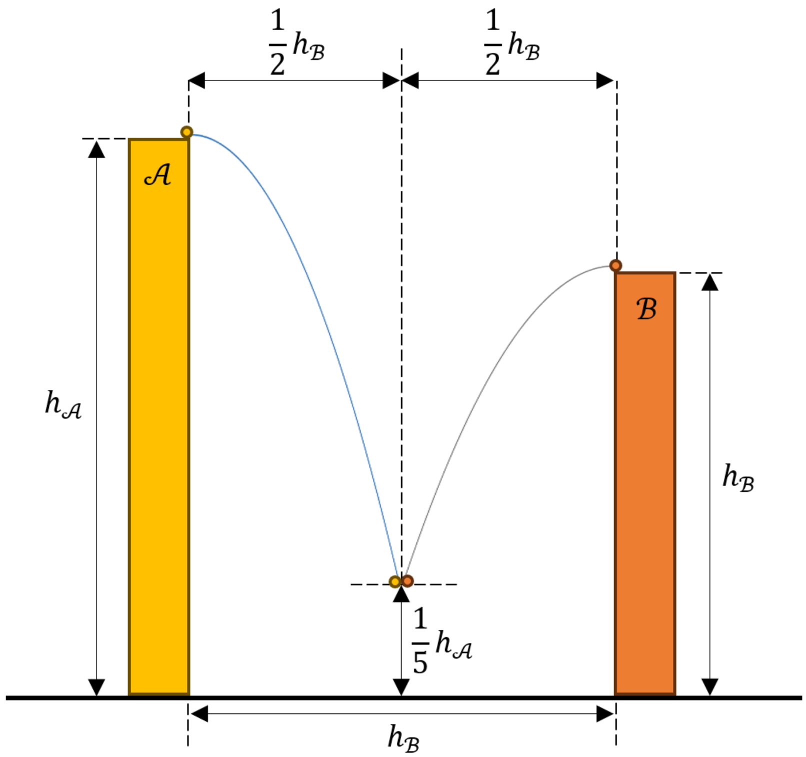
$$Mg\sin 30^\circ + T + Mg\sin 30^\circ + \mu Mg\cos 30^\circ = \mu Mg\cos 30^\circ + T + mg + mg + m'g.$$

Zbrajajući neke, a skraćivajući druge monome dobivamo traženu masu m',

$$2Mg\sin 30^\circ = 2mg + m'g \qquad \longrightarrow \qquad Mg = 2mg + m'g \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{m' = M - 2m = 0{,}5\ \mathrm{kg}}.$$

---

4. Nacrtajmo skicu zadatka.



Loptica koju je bacila Dunja je pala s visine $h_{\mathcal{A}}$ te se na visini $\frac{1}{5}h_{\mathcal{A}}$ sudarila s Jagodinom lopticom. Vrijednost $h_{\mathcal{A}}$ nam je poznata iz zadatka te možemo zaključiti da je vrijeme pada Dunjine loptice zato

$$\Delta h_1 = \frac{4}{5}h_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}gt_{\mathcal{A}}^2 \qquad \longrightarrow \qquad t_{\mathcal{A}} = \sqrt{\frac{2\Delta h_1}{g}} = \sqrt{\frac{8h_{\mathcal{A}}}{5g}} = 3{,}23 \text{ s}.$$

Ako je Jagoda bacila svoju lopticu 0,4 s nakon Dunje, vrijeme leta njezine kuglice je $t_{\mathcal{B}} = t_{\mathcal{A}} - 0{,}4 \text{ s} = 2{,}83 \text{ s}$. Jagodina je loptica pala s visine $h_{\mathcal{B}}$ na visinu $\frac{1}{5}h_{\mathcal{A}}$ u vremenu $t_{\mathcal{B}}$. Vrijednost $h_{\mathcal{B}}$ zato dobivamo iz jednadžbe

$$\Delta h_2 = h_{\mathcal{B}} - \frac{1}{5}h_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2}gt_{\mathcal{B}}^2 \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{h_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}gt_{\mathcal{B}}^2 + \frac{1}{5}h_{\mathcal{A}} = 52 \text{ m}}.$$

Naravno, po uvjetu zadatka su dometi horizontalnih hitaca dviju kuglica jednaki, $D_{\mathcal{A}} = D_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2}h_{\mathcal{B}}$. Možemo iskoristiti formulu za domet horizontalnog hica kako bi izračunali početne brzine dviju kuglica,

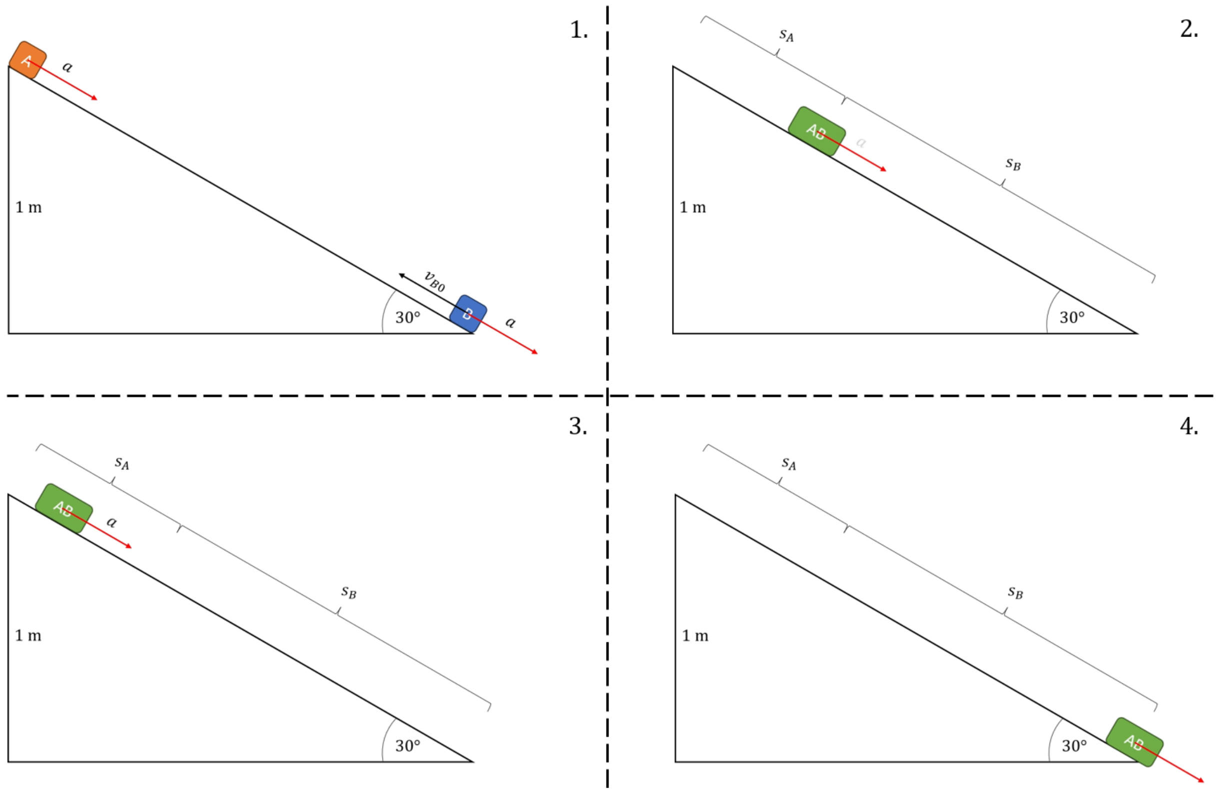
$$D_{\mathcal{A}} = v_1\sqrt{\frac{2\Delta h_1}{g}} = v_1\sqrt{\frac{8h_{\mathcal{A}}}{5g}} \longrightarrow \boxed{v_1 = \frac{\frac{1}{2}h_{\mathcal{B}}}{\sqrt{\frac{8h_{\mathcal{A}}}{5g}}} = \frac{h_{\mathcal{B}}}{2\sqrt{\frac{8h_{\mathcal{A}}}{5g}}} = 8{,}05 \text{ m s}^{-1}},$$

$$D_{\mathcal{B}} = v_2\sqrt{\frac{2\Delta h_2}{g}} = v_2\sqrt{\frac{2\left(h_{\mathcal{B}} - \frac{1}{5}h_{\mathcal{A}}\right)}{g}} \longrightarrow \boxed{v_2 = \frac{\frac{1}{2}h_{\mathcal{B}}}{\sqrt{\frac{10h_{\mathcal{B}} - 2h_{\mathcal{A}}}{5g}}} = \frac{h_{\mathcal{B}}}{2\sqrt{\frac{10h_{\mathcal{B}} - 2h_{\mathcal{A}}}{5g}}} = 9{,}20 \text{ m s}^{-1}}.$$

Početne brzine kuglica smo mogli izračunati i preko $t_{\mathcal{A}}$ i $t_{\mathcal{B}}$,

$$v_1 = \frac{D_{\mathcal{A}}}{t_{\mathcal{A}}} = \frac{h_{\mathcal{B}}}{2t_{\mathcal{A}}} = 8{,}05 \text{ m s}^{-1} \qquad \text{i} \qquad v_2 = \frac{D_{\mathcal{B}}}{t_{\mathcal{B}}} = \frac{h_{\mathcal{B}}}{2t_{\mathcal{B}}} = 9{,}20 \text{ m s}^{-1}.$$

5. Nacrtajmo skicu.



(a) Neposredno nakon ispaljivanja tijela B početnom brzinom $v_{0(\mathrm{B})} = 5\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ uz kosinu, tijelo A kreće ubrzavati niz kosinu, a tijelo B usporavati uz kosinu akceleracijom koju računamo kao

$$F_{\parallel} = ma = mg\sin 30^\circ \qquad \longrightarrow \qquad a = g\sin 30^\circ = \frac{1}{2}g = 5\ \mathrm{m\ s^{-1}}.$$

Duljina kosine je $l = \dfrac{h}{\sin 30^\circ} = \dfrac{1\ \mathrm{m}}{\sin 30^\circ} = 2\ \mathrm{m}$. Očito vrijedi da je zbroj prijeđenih putova dvaju tijela prije plastičnog sudara upravo jednak duljini kosine, odnosno $s_A + s_B = l$. Prijeđene putove tijela A i B možemo iskazati kao

$$s_A = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{i} \qquad s_B = v_{0(\mathrm{B})}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Ako uvrstimo upravo iskazane puteve u $s_A + s_B = l$, dobivamo vrijeme od početka gibanja sustava do sudara,

$$\frac{1}{2}gt^2 + v_{0(\mathrm{B})}t - \frac{1}{2}gt^2 = l \qquad \longrightarrow \qquad v_{0(\mathrm{B})}t = l \qquad \longrightarrow \qquad t = \frac{l}{v_{0(\mathrm{B})}} = 0{,}4\ \mathrm{s}.$$

Uvrštavajući dobiveni t u formulu za s_B dobivamo traženu udaljenost od podnožja kosine na kojoj će se tijela sudariti,

$$\boxed{s_B = v_Bt - \frac{1}{2}gt^2 = 1{,}6\ \mathrm{m}} \qquad (\text{naravno, } s_A = l - s_B = 0{,}4\ \mathrm{m}).$$

(b) S obzirom da znamo vrijednosti s_A i s_B, možemo s lakoćom odrediti brzine tijela A i B neposredno prije njihovog sudara,

$$v_A = \sqrt{2as_A} = \sqrt{gs_A} = 2\ \mathrm{m\ s^{-1}} \qquad \text{i} \qquad v_B = \sqrt{v_{0(\mathrm{B})}^2 - 2as_B} = \sqrt{v_{0(\mathrm{B})}^2 - gs_B} = 3\ \mathrm{m\ s^{-1}}.$$

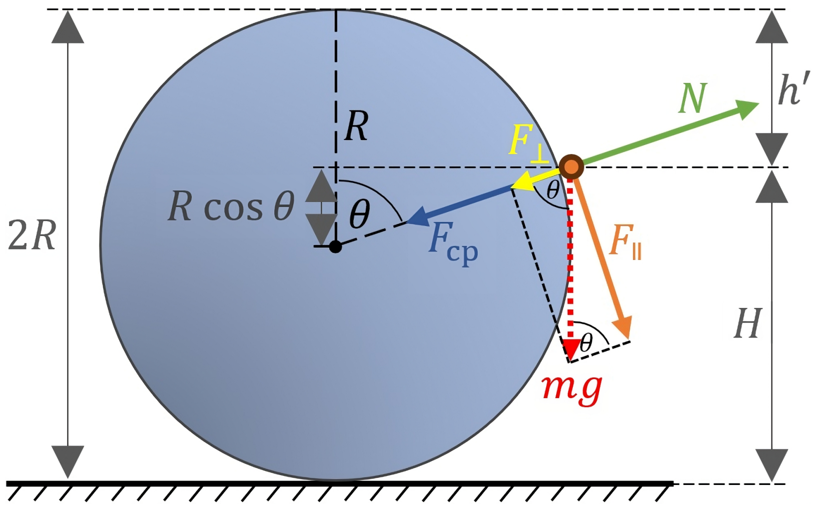
Uvrštavajući dobivene brzine u zakon očuvanja energije za plastične sudare dobivamo traženu brzinu spojenih tijela neposredno nakon sudara,

$$-mv_A + mv_B = 2mv' \qquad \longrightarrow \qquad \boxed{v' = \frac{v_B - v_A}{2} = 0{,}5\ \mathrm{m\ s^{-1}}}.$$

Naravno, količina gibanja tijela A u prethodnom izrazu ima negativan predznak jer se giba suprotno smjeru gibanja tijela B i smjeru gibanja dvaju tijela nakon sudara.

---

6. Nacrtajmo dijagram sila na kuglicu neposredno prije gubitka kontakta.



Tijekom gibanja kuglice na sferi je po trećem Newtonovom zakonu centripetalna sila na kuglicu jednaka razlici komponente sile teže okomite na sfernu podlogu i sile reakcije podloge,

$$F_{\text{cp}} = mg\cos\theta - N$$

Nakon odvajanja je naravno jedina sila koja djeluje na kuglicu sila teža te se kuglica nastavlja gibati po paraboličnoj putanji. U trenutku gubitka kontakta kuglice sa sferom je sila reakcije sferne podloge jednaka nuli, odnosno

$$\frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta - 0 \qquad \longrightarrow \qquad mv^2 = mgR\cos\theta. \tag{3}$$

Po zakonu očuvanja energije vrijedi

$$\frac{mv^2}{2} = mgh' \qquad \longrightarrow \qquad mv^2 = 2mgh'$$

te je zato

$$2mgh' = mgR\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad 2h' = R\cos\theta. \tag{4}$$

Sa slike vidimo da vrijedi $h' + R\cos\theta = R$ što uvrštavamo u (4) kako bi dobili

$$2(R - R\cos\theta) = R\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad 2R = 3R\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad \cos\theta = \frac{2}{3}.$$

Zaključno, visina H u odnosu na horizontalu na kojoj se kuglica odvaja od sfere je jednaka

$$\boxed{H = R + R\cos\theta = \frac{5}{3}R}.$$