Dodatna nastava 3 – Fizika – Dinamika fluida

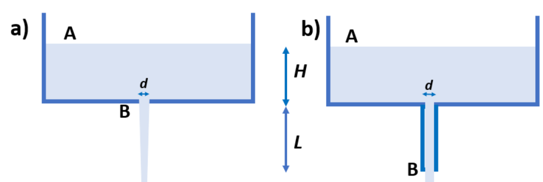
Listopad 2024.

Napomena:
Pročitajte poglavlje *Dinamika fluida*. Zatim ga ponovno pročitajte. Potrudite se shvatiti i razumjeti gradivo do kore. Prođite kroz Alfinu zbirku zadataka iz fizike za upoznavanje tipa zadataka. Za svaku nedoumicu oko gradiva se obratite profesoru ili meni. Možete se i pokušati snaći na internetu. Ako imate nedoumica oko ponuđenih zadataka ili njihovih rješenja, slobodno mi se javite u bilo koje doba dana na +385 99 8421 792.
Sretno!

1 Zadatci

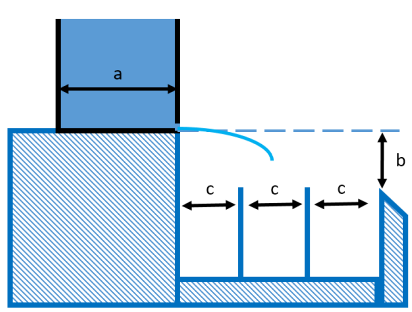
1. (šk2020/2r/z1) Spremnik ima kružni otvor na dnu, promjera d. Želimo usporediti izlazni protok iz spremnika ako je prisutan samo otvor i ako je na otvor spojena okomita cijev duljine L. Uzmi u obzir da je fluid idealan.
   (a) U oba slučaja odredi brzinu tekućine na vertikalnoj udaljenosti L od otvora na spremniku, pod uvjetom da je površina spremnika na visini H u odnosu na dno. Zanemari spuštanje razine površine pri istjecanju.
   (b) Kolika je brzina tekućine na izlaznom dijelu spremnika u oba slučaja (označeno točkom B)?
   (c) Izračunaj izlazni protok u oba slučaja. Koji je učinkovitiji sustav od dva spremnika?

   Uzmi u obzir sljedeće vrijednosti: $H = 5$ m, $d = 20$ cm, $L = 5$ m.



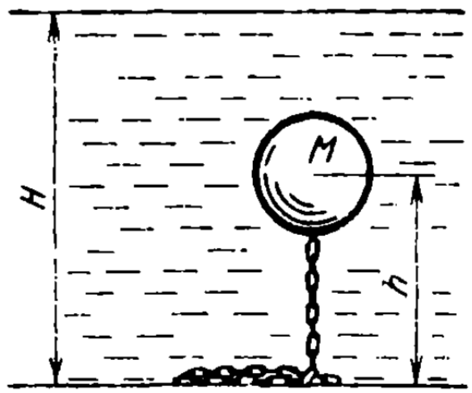
2. (šk2021/2r/z1) Tijelo mase 10.0 kg i volumena 0.4 m^3 postavljeno je na glatku nepomičnu kosinu nagnutu za 30° u odnosu na horizontalu. S kosinom se izvode dva pokusa spuštanja tijela. U prvom pokusu cjelokupni sustav (masa + kosina) postavljeni su u vakuumu. U drugom pokusu sustav je uronjen u sumporov heksafluorid gustoće 6.16 g L^{-1}. Nacrtaj graf sa silama i njezinim komponentama koje djeluju na tijelo u početnom trenutku. Izračunaj brzinu mase na dnu kosine, nakon 4 s, ako masa s vrha kosine krene iz mirovanja, u slučaju kad je sustav (masa + kosina) u vakuumu i kad je uronjen u plinu. Zanemari sva trenja.

3. (žup2019/2r/z4) Odredi količinu vode u posudama 1, 2 i 3 nakon pražnjenja kockastog spremnika stranice a = 1 m, kroz otvor zanemarive dimenzije na dnu spremnika. Promjer mlaza i debljine pregrada su zanemarive. Na slici je prikazano kako su postavljeni spremnik i posude. U početnom stanju spremnik je potpuno napunjen i voda u vodoravnom smjeru izlazi kroz otvor i teče bez trenja. Dimenzije sustava su sljedeće: $b = 3.3$ m i $c = 0.7$ m.

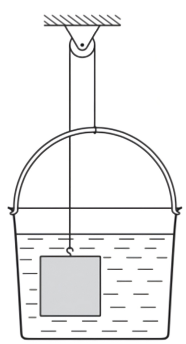


4. (Kup fizike u Lucijanki/2r/z10) Poznato je da je atmosferski tlak Marsa 200 puta manji od Zemljina. Promjer Marsa je oko dva puta manji od promjera Zemlje. Srednja gustoća Zemlje je $\rho_Z = 5500$ kg/m^3, a Marsa $\rho_M = 4000$ kg/m^3. Koliko je puta masa Marsove atmosfere manja od mase atmosfere na Zemlji?

5. (Kup fizike u Lucijanki/2r/z11) Na kuglu mase $M = 10$ kg i promjera $D = 0.3$ m pričvršćen je jednim svojim krajem lanac od željeza, drugi kraj je slobodan. Duljina lanca je $l = 3$ m, a $m = 9$ kg. Ako se kugla i lanac nalaze u vodi kako je prikazano na slici, odredi h. Uzmi da je omjer gustoća željeza i vode jednak 7.85.



6. (MPPP 85) Čvrsta kocka volumena V_i i gustoće ρ_i je povezana na jedan kraj konopa zanemarive mase, drugi je kraj konopa povezan s kantom zanemarive mase koja sadržava vodu gustoće $\rho_v = \dfrac{\rho_i}{10}$.



Sustav je u ravnotežnom položaju.

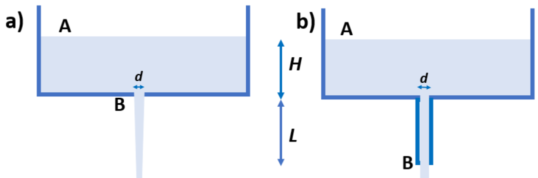
(a) Odredi volumen V_v vode u kanti.

(b) Što bi se dogodilo da još vode dodamo u kantu?

(c) Što bi se dogodilo da malo vode (ili čak sva voda) ispari iz kante?

2 Rješenja

1. (a) Primjenjujemo Bernoullijevu jednadžbu između točke A smještene blizu površine fluida u spremniku i točke L smještene okomito ispod otvora, na udaljenosti L od nje.



Na slici lijevo (slučaj **a**) vrijedi

$$p_A + \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g(H+L) = p_L + \frac{\rho v_L^2}{2}.$$

U ovom je slučaju $p_A = p_L = p_{\text{atm}}$ i $v_A \approx 0$, po uvjetu zadatka. Zato je

$$v_L = \sqrt{2g(H+L)} = 14{,}0 \text{ m s}^{-1}.$$

Na slici desno (slučaj **b**) možemo zapisati Bernoullijevu jednadžbu između površine fluida u spremniku i točke L na izlazu iz cijevi točno kao i prije te još uvijek vrijedi $p_A = p_L = p_{\text{atm}}$. Zaključujemo da su dvije brzine identične.

(b) Sada pišemo Bernoullijevu jednadžbu između točke koja se nalazi blizu površine i točke B koja se nalazi u izlaznom dijelu spremnika.
Na slici lijevo (slučaj **a**) vrijedi

$$p_A + \frac{\rho v_A^2}{2} + \rho g(H+L) = p_B + \frac{\rho v_B^2}{2} + \rho g L.$$

Naravno, $p_A = p_B = p_{\text{atm}}$ te je zato

$$v_B = \sqrt{2gH} = 9{,}90 \text{ m s}^{-1}.$$

Na slici desno (slučaj **b**) i dalje vrijedi Bernoullijeva jednadžba, a zbog jednadžbe kontinuiteta brzina u cijevi mora biti konstantna, s obzirom na to da je fluid nekompresibilan, a presjek je konstantan. Dakle, imamo $v_B = \sqrt{2g(H+L)}$. Brzina protoka iz spremnika je stoga veća u slučaju **b**.

(c) Protok u oba slučaja na slici je

$$q_A = \frac{d^2\pi}{4}\sqrt{2gH} = 0{,}311 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1},$$
$$q_B = \frac{d^2\pi}{4}\sqrt{2g(H+L)} = 0{,}440 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}.$$

Dakle, veći je u slučaju **b**.

2. Težina tijela je jednaka $mg - F_u = mg - \rho g V$. Sila koja djeluje na tijelo paralelno s kosinom je

$$F_{\|} = (mg - \rho g V)\sin 30^\circ = \frac{1}{2} g(m - \rho V).$$

Akceleracija tijela niz kosinu je

$$a = \frac{g(m-\rho V)}{2m} = \frac{g}{2} - \frac{\rho g V}{2m}.$$

Nakon 4 sekunde će brzina tijela u vakuumu biti

$$v_1 = \frac{1}{2} g t = 19{,}62 \text{ m s}^{-1},$$

a u plinu će biti

$$v_2 = at = \frac{gt}{2} - \frac{\rho g V t}{2m} = 14{,}78 \text{ m s}^{-1}.$$

3. Iz jednadžbi za kosi hitac moguće je pronaći minimalnu brzinu koja je potrebna da bi fluid ulazi u svaki spremnik. Također postoje brzine koje prebacuju fluid preko sva tri spremika. U tom slučaju je

$$b = \frac{gt^2}{2}, \quad 3c = v_1 t \quad \longrightarrow \quad b = \frac{g}{2}\left(3\frac{c}{v_1}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad v_1 = 3c\sqrt{\frac{g}{2b}} = 2{,}56 \text{ m s}^{-1}.$$

Brzina vode na izlazu rupice ovisi o visinama vode u spremniku i vezane su kroz Bernoullijevu jednadžbu,

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = 0{,}334 \text{ m}.$$

Za drugi spremnik vrijedi

$$b = \frac{gt^2}{2}, \quad 2c = v_2 t \quad \longrightarrow \quad b = \frac{g}{2}\left(2\frac{c}{v_2}\right)^2 \quad \longrightarrow \quad v_2 = c\sqrt{\frac{2g}{b}} = 1{,}707 \text{ m s}^{-1} \quad \longrightarrow \quad h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = 0{,}148 \text{ m}.$$

Za treći spremnik vrijedi

$$b = \frac{g}{2}t^2, \quad c = v_3 t \quad \longrightarrow \quad b = \frac{g}{2}\left(2\frac{c}{v_3}\right) \quad \longrightarrow \quad v_3 = 0{,}853 \text{ m s}^{-1} \quad \longrightarrow \quad h_3 = \frac{v_3^2}{2g} = 0{,}037 \text{ m s}^{-1}.$$

Količina vode koja ne uđe niti u jedan spremnik je

$$V = a^2(a - h_1) = 0{,}666 \text{ m}^3.$$

U tri spremnika rasporede se sljedeće količine,

$$V_1 = a^2(h_1 - h_2) = 0{,}186 \text{ m}^3, \qquad V_2 = a^2(h_2 - h_3) = 0{,}111 \text{ m}^3, \qquad V_3 = a^2 h_3 = 0{,}037 \text{ m}^3.$$

4. Atmosferski tlak Marsa se očituje po formuli

$$p_M = \frac{F_M}{S_M} = \frac{m_M g_M}{4r_M^2\pi},$$

a Zemlje

$$p_Z = \frac{m_Z g_Z}{4r_Z^2\pi}.$$

Ako je promjer Marsa oko dva puta manji od promjera Zemlje, tada je

$$p_Z = \frac{m_Z g_Z}{16r_M^2\pi}.$$

Iz formule za atmosferski tlak Marsa imamo da je $16r_M^2\pi = \dfrac{4m_M g_M}{p_M}$, što možemo uvrstiti u zadnji izraz,

$$p_Z = \frac{m_Z g_Z p_M}{4m_M g_M} = \frac{m_Z g_Z}{4m_M g_M} p_M.$$

Po uvjetu zadatka je $p_Z = 200p_M$ te je zato

$$800 = \frac{m_Z g_Z}{m_M g_M}.$$

Ako je formula za gravitacijsko ubrzanje neke planete

$$g = \frac{GM}{r^2} = \frac{G\rho V}{r^2} = \frac{G\rho}{r^2}\frac{4}{3}r^3\pi = \frac{4G\rho r\pi}{3},$$

a promjer Marsa je oko dva puta manji od promjera Zemlje, tada imamo

$$800 = \frac{m_Z}{m_M}\frac{\rho_Z r_Z}{\rho_M r_M} = 2\frac{m_Z}{m_M}\frac{\rho_Z}{\rho_M} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{m_Z}{m_M} = 291.$$

Masa Marsove atmosfere je 291 puta manja od mase Zemljine atmosfere.

5. Kada kugla lebdi, tada je

$$Mg + \frac{h-r}{l} mg = \rho_V g \cdot \frac{4}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 \pi + \rho_V g \frac{\frac{h-r}{l} m}{\rho_Z}.$$

Ako skratimo g i još sredimo imamo

$$M + \frac{2h-D}{2l} m = \rho_v \frac{D^3}{6}\pi + \frac{\rho_v}{\rho_z}\frac{(2h-D)m}{2l} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{2h-D}{2l} m \left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_z}\right) = \rho_v \frac{D^3}{6}\pi - M.$$

Manipulacijom po h dobivamo

$$2h - D = 2l \frac{\rho_v \frac{D^3}{6}\pi - M}{m\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_z}\right)} \qquad \longrightarrow \qquad h = \frac{2l \frac{\rho_v \frac{D^3}{6}\pi - M}{m\left(1 - \frac{\rho_v}{\rho_z}\right)} + D}{2} = \boxed{1{,}73 \text{ m}}.$$

6. (a) Sila uzgona na kocku je $\rho_v g V_i$ i ona gura kocku prema gore te kantu dolje. U ravnotežnom stanju, sila napetosti užeta T mora djelovati protiv težine kocke i sile uzgona,

$$T = (\rho_i V_i - \rho_v V_i)g.$$

Slično za vodu/kantu,

$$T = (\rho_v V_v + \rho_v V_i)g.$$

Izjednačavanjem ovih dviju sila imamo

$$\rho_v V_v = \rho_i V_i - 2\rho_v V_i \qquad \longrightarrow \qquad V_v = 8V_i.$$

(b) Efektivna težina na lijevoj strani se neće promijeniti, ali će kanta biti teža. Ako je konačan volumen vode V_f manji od $10V_i$, tek će na $V_f = 10V_i$ sustav biti u ravnotežnom stanju. Ako je kocka izvan vode, tada će sustav biti u ravnotežnom stanju u nekoj točki gdje je kocka djelomično uronjena u vodu. Jednom kada je $V_f > 10V_i$, kanta će samo nastaviti padati.

(c) Kocka će padati sve dok ne udari dno kante te će tada sustav ostati takav, statičan jer kocka ne može proći kroz kantu.