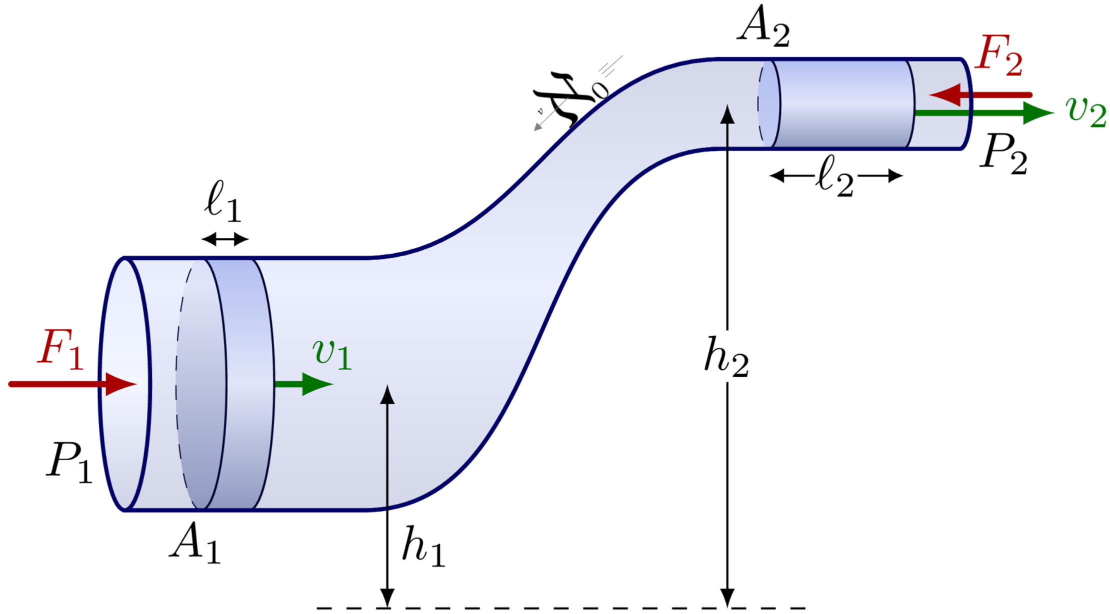
Sinteza gradiva fizike i priprema natjecatelja drugih razreda (školsko i županijsko natjecanje)

Autor: Matej Volarević
Mentor: Damir Rister, prof.
Gimnazija Lucijana Vranjanina

U Zagrebu, lipanj i kolovoz 2024.



Dokument nije lektoriran.

Sadržaj

Napomena: Dodatni sadržaj se ne treba učiti detaljno, a čak niti čitati jer ne pripada gradivu na redovnoj nastavi i natjecateljskom gradivu. Naravno, uvijek valja znati više, tako da je preporuka čitatelju da škicne na te dijelove.

1 Mehanika fluida

Za razliku od krutih tijela više-manje stalnog oblika, postoje i materijali koji prilagođavaju svoj oblik posudama u koje su stavljeni. **Fluid** je zajednički naziv za svaku tvar koja može teći, kao što su plin, tekućina ili plazma. Uloga koju fluidi igraju u svakodnevnom životu je ogromna – udišemo ih, pijemo ih i općenito živimo okruženi njima. U ovom ćemo se poglavlju baviti isključivo plinovima i tekućinama. Plinove obično doživljavamo kao lagano stlačljive tvari, koji poprimaju oblik posude u kojoj se nalaze. Tekućine također lagano mijenjaju oblik, no relativno im je teško promijeniti volumen (dakako, postoje i izuzeci).

Proučavanje fluida započet ćemo razmatranjem istih u mirovanju (statika fluida), dok ćemo u nastavku dati samo osnove dinamike fluida – potonja je u svojoj potpunoj verziji (koja uključuje nelinearnosti, turbulencije itd.) jedna od najkompleksnijih dijelova mehanike. Mehanika fluida ponekad se naziva i **hidromehanikom**[1], koja se, u skladu s gore navedenim, dijeli na hidrostatiku i hidrodinamiku.

1.1 Statika fluida

U homogenom gravitacijskom polju (npr. na površini Zemlje), dok nema drugih sila u nekom inercijskom referentnom sustavu, površina tekućine (npr. vode) postavlja se okomito na vertikalu koju definira gravitacija – od tuda dolazi i riječ "vodoravan" koju koristimo u svakodnevnom životu. Ovo svojstvo nalazi se i u osnovi "zakona spojenih posuda", odnosno činjenice da će nivo tekućine u posudama biti isti ako su one spojene na bilo koji način (ispod nivoa tekućine, dakako). Mi ćemo taj zakon promotriti nakon što proučimo tlak unutar fluida – navedimo još samo da će tekućina u posudi koja rotira poprimiti takav oblik da joj površina bude okomita na rezultatni smjer akceleracije slobodnog pada g i akceleracije ubrzanog neinercijskog sustava a_I (s obzirom na inercijski).

1.1.1 Tlak unutar fluida

Mirujući fluid (i tekućina i plin) djeluje silom okomitom na površinu dodira na svako tijelo ili stijenku posude s kojim je u kontaktu. Ta je sila posljedica činjenice da se molekule i atomi fluida gibaju i sudaraju s površinama stijenki i tijela, iako fluid kao cjelina miruje. Kako molekule fluida nisu čvrsto vezane za određeni položaj u tijelu, napetosti se po fluidu jednoliko šire u svim smjerovima. Zbog toga je za opisivanje tlaka u fluidima posve dovoljno promatrati samo normalnu komponentu na neku površinu – situacija je bitno drukčija u čvrstim materijalima.

Definicija 1.1 – Tlak

Tlak p u fluidu definiramo kao omjer sile F_n okomite (normalne) na neku površinu i same ploštine promatrane površine S:

$$\boxed{p = \frac{F_n}{S}} \tag{1}$$

[1] od *grč.* hýdor – voda

Definicija daje mjernu jedinicu za tlak (koja se zove paskal[2] i obilježava se s Pa) kao:

$$[Pa] = \frac{[N]}{[m^2]}$$

Osim nje u praksi se ponekad koristi i jedinica bar, 1 bar = 10^5 Pa.

Atmosferski tlak p_a je tlak zraka na površini Zemlje – isti mijenja vrijednost s nadmorskom visinom točke gdje ga mjerimo, ali i pod utjecajem vremenskih promjena. Takozvani *normalan atmosferski tlak* definira se kao prosječna vrijednost atmosferskog tlaka na razini mora; on je jednak:

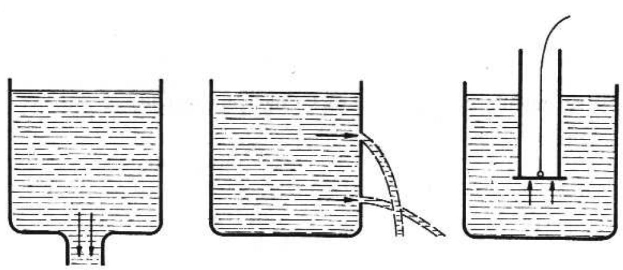
$$p_{a,n} = 101325 \text{ Pa}$$

Ova se vrijednost ponekad naziva i *jednom atmosferom*.

Površina u definiciji tlaka (izraz (1)) ne mora biti površina stijenke posude ili površina tijela uronjenog u fluid, već može biti i zamišljena površina oko proizvoljne točke u fluidu. Tada, dakako fluid s različitih strana površine djeluje na čestice na samoj površini ukupnim silama koje su suprotnog smjera, ali jednakog iznosa – u protivnom bi postojala neto-sila na promatranu površinu i ona kao cjelina ne bi mirovala. Tlak u promatranoj točki tada računamo preko jedne od dvaju sila; budući da su one istog iznosa, svejedno je koju ćemo izabrati.

1.1.2 Pascalovo pravilo

Tlak se javlja po čitavom volumenu fluida. On je povezan sa silama koje djeluju i na dno posude i na njezine bočne stijenke, no i prema gore. Ova potonja nije posve očita kao prve dvije, no jednostavno se ilustrira pomoću pokusa danog na slici 1, sasvim desno. U posudu s tekućinom uvuče se cijev dno kojoj se dno zatvori pločicom zavezanom koncem za samu cijev – pri tome je pločica čvrsto priljubljena za cijev pa ne propušta tekućinu. Uroni li se cijev dovoljno duboko u tekućinu, konac koji ju drži za cijev možemo prerezati, no pločica će ostati u istom položaju zbog sile koja ju gura prema gore, a uzrokovana je tlakom fluida.



Slika 1: Tlak u fluidu: sile koje nastaju zbog tlaka uzrokuju tok fluida kroz rupu na dnu posude (lijevo) i stijenke posude (sredina), no uzrokuju i silu prema gore na pločicu uronjenu pomoću cijevi (koja nije ispunjena fluidom) na neku dubinu u fluidu (desno).

Pascalovo pravilo je direktna posljedica činjenice da se molekule u fluidu mogu pomicati jedna prema drugoj. Kada je mirujući fluid u ravnoteži, svaka je njegova točka podvrgnuta jednakoj sili –

[2] U čast francuskog fizičara, matematičara i izumitelja Blaise Pascala (1623. – 1662.), jednog od pionira hidromehanike.

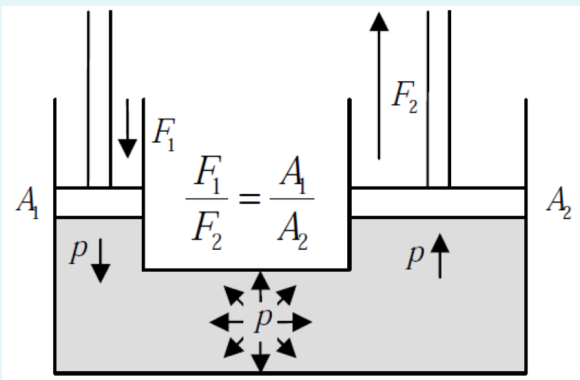
primijenimo li vanjsku silu na fluid, ona se jednoliko širi kroz njega *u svim smjerovima*. Pascalovo pravilo glasi: *tlak se nepromijenjen prenosi kroz fluid*. Ono je temelj za daljnja razmatranja u hidrostatici i nije nezavisan princip nego posljedica osnovnih zakona mehanike. Dakako, promijenimo li na neki način tlak u jednom dijelu fluida, potrebno je neko *vrijeme* da se ta promjena prenese i na ostatak fluida.

Hidraulička preša (ili tijesak) je jednostavna ilustracija Pascalova zakona (slika 2). Pojednostavljeno rečeno, to je uređaj koji služi kao transformator sile.

Definicija 1.2 – Hidraulički tlak

Prema Pascalovom pravilu, tlak kojim mali klip djeluje na nestlačljivu tekućinu $p = F_1/A_1$ prenosi se jednoliko na sve strane, pa tako i na klip površine A_2, na koji tada djeluje sila $F_2 = pA_2$. Dolazimo do izraza

$$\boxed{p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}} \tag{2}$$



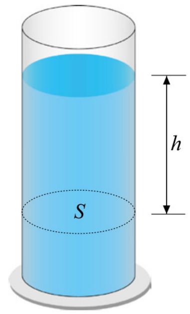
Slika 2: Hidraulička preša (ili tijesak)

Ako je $A_2 \gg A_1$, tada je i $F_2 \gg F_1$. Dakle, hidrauličkom se prešom sila može multiplicirati onoliko puta koliki je omjer površina klipova.

Na opisanom principu rade brojni hidraulički uređaji: dizalice, kočnice, građevinarski strojevi itd. Narušava li rad hidrauličke preše zakon očuvanja energije? Naravno da ne – na strani preše gdje djelujemo manjom silom, pomaci klipa su manji nego na drugoj strani što rezultira u istom radu, odnosno očuvanoj energiji (do na gubitke zbog trenja).

1.1.3 Hidrostatski tlak

Ako težinu fluida možemo zanemariti, tlak je u fluidu jednak po njegovom čitavom volumenu. No što ako je masa fluida nezanemariva? Izračunajmo sada čemu je jednaka promjena tlaka s fluida, a koja je uzrokovana njegovom težinom. Zamislimo valjkastu posudu napunjenu tekućinom. Tekućina djeluje na dno posude silom koju smo nazvali težina. Podijelimo tu težinu s površinom dna, dobit ćemo tlak tekućine na dno posude. Promatrana ploha na koju tekućina djeluje može biti bilo koja ploha unutar tekućine (slika 3).



Slika 3: Tekućina težinom djeluje na površinu S

Definicija 1.3 – Hidrostatski tlak

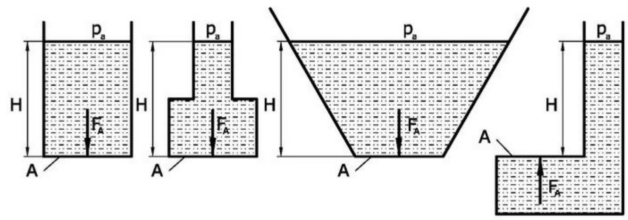
U definicijski izraz za tlak (1) uvrstimo izraz za težinu mg, zatim masu zamijenimo umnoškom gustoće ρ i volumena V, a nakon toga volumen (valjka) zamijenimo umnoškom površine osnovice valjka S i visine h stupca tekućine iznad osnovice:

$$p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho V g}{S} = \frac{\rho S h g}{S} \rightarrow \boxed{p = \rho g h} \tag{3}$$

Tlak koji uzrokuje tekućina djelujući težinom na promatranu plohu nazivamo **hidrostatski tlak**.

Bitno je napomenuti da (3) vrijedi isključivo za tekućine **homogene** gustoće. U svakodnevnom životu gdje se tekućina ne nalazi u vakuumu je hidrostatski tlak na dubini $h = 0$ jednak nuli, međutim na tekućinu djeluje i atmosferski tlak. Mjereći dubinu od površine fluida, ukupni tlak na tekućinu možemo iskazati i kao $p_{uk} = p_h + p_a = \rho g h + p_a$. Dobiveni izraz je u principu primjenjiv na sve fluide, no pri primjeni na plinove treba uzeti u obzir da se istima gustoća obično značajno mijenja u gravitacijskom polju (npr. gustoća zraka na najvišim planinskim vrhovima je čak tri puta manja od gustoće zraka na razini mora). Dakle, pri proučavanju hidrostatskog tlaka plinova, treba uzeti u obzir i način na koji se gustoća mijenja s visinom, dok se analogan efekt za tekućinu obično može posve zanemariti.

Izraz (3) pokazuje da tlak u idealnom mirujućem fluidu ovisi samo o dubini, a ne o npr. obliku posude u kojoj se nalazi fluid. Tekućina koja ispunjava posude različitog oblika do iste visine stvara isti tlak na dnu posuda (vidi sliku 4) – da nije tako, razlika u tlakovima izazvala bi sile koje bi dovele do gibanja fluida. Ova se pojava ponekad iz povijesnih razloga naziva hidrostatskim ili Arhimedovim paradoksom, no izraz (3) jasno pokazuje da u njoj nema išta paradoksalno. Sa slike 4 jasno je što se događa s "viškom težine" u posudi čiji se presjek smanjuje s dubinom: bočne sile kojima stijenke posude djeluju na tekućinu okomite su na stijenke i svojim vertikalnim komponentama točno drže u ravnoteži težinu tekućine u područjima označenim s "1". Treba naglasiti da nivo tekućina u spojenim posudama neće biti jednak, ako su posude napunjene tekućinama različite gustoće.



Slika 4: Hidrostatički (Arhimedov) paradoks: Sila F_A koju stvara hidrostatički tlak na vodoravno dno bilo kakve posude zavisi od dubine nestlačive tekućine H i iznosa površine dna posude A, a ne zavisi o obliku posude

1.1.4 Mjerenje tlaka

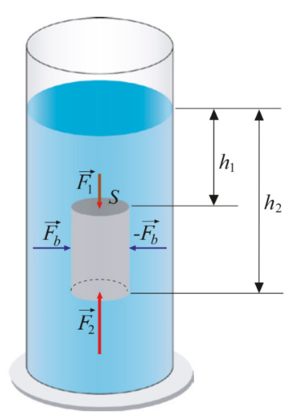
Uređaj za mjerenje tlaka naziva se *tlakomjer* ili *manometar*. Tlakomjer za mjerenje atmosferskog tlaka uobičajeno se naziva *barometrom*. Najjednostavniji tlakomjer je tzv. otvoreni manometar koji radi na sljedećem principu: uzmemo U-cijev i napunimo ju npr. sa živom (živa se koristi jer ima relativno veliku gustoću, ≈13,5 puta veću od vode)[3], te priključimo na posudu s fluidom čiji tlak želimo mjeriti; visina stupca žive će se promijeniti (za h) i traženi tlak računamo kao:

$$p = p_a + \rho_{\mathrm{Hg}} g h$$

Atmosferski tlak se pojavljuje jer je manometar otvoren – koristimo li manometar sa zatvorenom cijevi, u gornjem ga izrazu trebamo izostaviti.

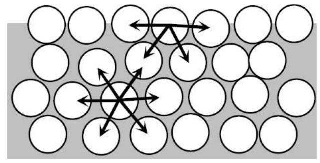
1.1.5 Uzgon

Očito je da voda djeluje na uronjeno tijelo silom orijentiranom suprotno orijentaciji sile teže. Silu kojom fluid djeluje na tijelo koje se nalazi u njemu nazivamo **silom uzgona** ili samo **uzgonom** (F_u). Uzgon je direktna posljedica činjenice da hidrostatski tlak raste s dubinom. Izraz za uzgon izvest ćemo uz pomoć (3) i slike 5.



Slika 5: Uzgon je jednak razlici sila kojima tekućina djeluje na gornju i donju osnovicu valjka

[3]Živa je otrovna i zbog toga rad s njom zahtijeva povećan oprez!



Slika 6: Uz objašnjenje površinske napetosti.

U tekućinu je uronjeno tijelo valjkasta oblika. Tekućina tlači na osnovice valjka i na njegovu bočnu (oblu) plohu. Kolika je rezultantna sila na bočnu plohu? Ukupna sila tekućine na valjak jednaka je rezultanti sila $\vec{F_1}$ i $\vec{F_2}$ kojima tekućina djeluje na osnovice valjka. Rezultanta tih sila jest sila uzgona ($\vec{F_u}$):

$$\vec{F_u} = \vec{F_2} - \vec{F_1}$$

Budući da je donja osnovica na većoj dubini, tekućina na nju djeluje većim tlakom, odnosno silom ($F_2 > F_1$), zbog čega je sila uzgona orijentirana prema gore, suprotno sili teži.

Definicija 1.4 – Uzgon

Iskažimo sile F_1 i F_2 preko hidrostatskog tlaka i površine osnovica:

$$F_u = \rho g h_2 S - \rho g h_1 S = \rho g S(h_2 - h_1)$$

Umnožak $S(h_2 - h_1)$ volumen je valjka (V) pa konačno za silu uzgona imamo

$$\boxed{F_u = \rho g V} \tag{4}$$

[4] Dobiveni rezultat može se izreći i na sljedeći način: svako tijelo uronjeno u fluid prividno izgubi na težini onoliko koliko teži istisnuti fluid – takav opis sile uzgona uobičajeno se naziva **Arhimedovim principom**[5].

Uzgon, dakako, postoji i u zraku, no taj je uzgon malen zbog vrlo male gustoće zraka $\left(\rho \approx 1.3 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right)$.

1.1.6 Dodatni sadržaj: Napetost površine

Vrlo je česta pojava da predmeti gušći od vode ne tonu ako ih pažljivo položimo na površinu vode. Površina vode (i mnogih drugih tekućina) ponaša se kao da se na njoj nalazi "napeta opna" koja sprječava da tijela potonu – jednom kada se ta opna probije, položeno tijelo tone uz uzgon izveden u prethodnom potpoglavlju. Objašnjenje nastanka te površinske napetosti daje slika 6 koja pojednostavljeno prikazuje molekule u nekoj tekućini (realna slika je puno manje pravilna). Na neku molekulu u tekućini djeluju sve okolne istovrsne molekule kratkodosežnim privlačnim silama, tzv. silama kohezije[6]. U unutrašnjosti tekućine, zbog simetrije položaja ostalih molekula, kohezijske se

[4] Izraz (4) vrijedi za tijelo općenitog oblika, što se može izvesti uvođenjem vektora površine i integracijom po čitavoj površini tijela. Zbog čitateljeva sigurnog nerazumijevanja takve matematičke notacije ga molim da izraz (4) prihvati kao istinit i primjenjiv na svako tijelo, neovisno o obliku istog.

[5] Arhimed (287. pr. Kr. – 212. pr. Kr.), grčki matematičar, fizičar i izumitelj.

[6] od *lat.* cohaerere, ostajati zajedno.

sile poništavaju. S druge strane, za molekule na površini, simetrija je razbijena pa na nju djeluje rezultantna sila različita od nule, u smjeru prema dolje (k unutrašnjosti tekućine). Drugim riječima, tekućina pokušava smanjiti svoju površinu – to je razlog zašto kapljice vode (i drugih tekućina) poprimaju kuglast oblik – kugla ima najmanju površinu za dani volumen. Posljedica tendencije tekućina da smanjuju svoju površinu je pojava sile koja djeluje tangencijalno na površinu – to je površinska napetost. Zagrijavanje vode i dodavanje deterdženta smanjuje površinsku napetost vode, što se koristi pri pranju da bi se postigla bolja interakcija s objektom koji se pere.

1.1.7 Dodatni sadržaj: Kapilarne pojave

Međumolekulske sile koje djeluju na molekule u tekućini kratkog su dosega, što se može demonstrirati proučavanjem oblika površine uz samu stijenku posude u kojoj je tekućina: razina tekućine je ili viša ili niža (ovisno o tekućini) od razine na sredini stijenke. Ovu pojavu tumačimo silama koje vladaju između molekula stijenke posude i tekućine, tzv. *silama adhezije*, te sila među (istovrsnim) molekulama tekućine, tj. silama kohezije. Oblik površine ovisit će o smjeru ukupne rezultantne sile na molekule uz stijenku – u slučaju vode, kohezivne sile će biti manje od adhezivnih i uz stijenku površina vode će imati oblik kao na slici 7, lijevo. Za živu će, pak, vrijediti obrnuto: kohezivne sile će biti veće od adhezivnih.

Slika 7: Kapilarnost.

Uronimo li tanku cijev u tekućinu, zbog spomenute nejednakosti kohezivnih i adhezivnih sila tekućina će se u cijevi ili podići (npr. za vodu) ili spustiti (npr. za živu). Ta se pojava naziva kapilarnost, u prvom slučaju govorimo o kapilarnoj elevaciji, a u drugom o kapilarnoj depresiji (slika 7). Kapilarne pojave su često prisutne u prirodi. Higroskopnost[7] mnogih materijala (kao što su beton ili glina) posljedice je upravo kapilarnosti. Kapilare omogućuju prodiranje vode kroz beton ili njeno zadržavanje u tlu. Kapilarne pojave omogućuju npr. i transport tvari kroz međustanični prostor u živim organizmima, kao što je recimo dopremanje vode u listove biljaka. Precizna razmatranja sila kohezije i adhezije postavljaju npr. i fizičke granice na visinu stabala - najviša stabla ne mogu biti viša od ≈ 130 m; u prirodi je najviše nađeno stablo (sekvoja) visoko 115 m.

[7] Svojstvo tvari da dobro upija vodu.

1.2 Dinamika fluida

Dinamika fluida je vrlo važna u mnogim područjima ljudskog djelovanja – od medicine (prijenos tvari krvotokom), preko strojarstva (naftovodi, gibanje zrakoplova), do meteorologije (gibanje oblaka kroz atmosferu) i drugog. Gibanje fluida i gibanje tijela u fluidu podvrgava se, dakako zakonima klasične mehanike, no dodatne teškoće nastaju zbog toga što sile na pojedini dio fluida ovise o kretanju ostalih dijelova fluida. U općenitom slučaju dinamika fluida je stoga vrlo komplicirana tema – mi ćemo ju stoga razmatrati samo u vrlo pojednostavljenom obliku.

Kao prvo, ograničit ćemo se na tzv. *stacionaran tok fluida*, u kojem postoji stalan odnos između brzina u raznim točkama fluida – drugim riječima, svaka čestica kroz proizvoljno odabranu točku prolazi istom brzinom i u istom smjeru. Putanja koju opisuje gibanjem neki (maleni) element volumena fluida naziva se *strujnica*. Tok fluida je stacionaran, ako se strujnice ne mijenjaju u vremenu (iako pojedini elementi fluida, dakako, mijenjaju svoj položaj).

1.2.1 Strujnice i jednadžba kontinuiteta

Teorem 1.1 – Jednadžba kontinuiteta

Pri stacionarnom toku prostor kojim protječe tekućina možemo podijeliti na područja omeđena proizvoljno odabranim strujnicama, kao na slici 8. Na granicama takve zamišljene cijevi, vektor brzine tekućine paralelan je zamišljenim stijenkama pa tekućina ne izlazi iz cijevi kroz stijenke – svaki element mase fluida koji uđe na jednom kraju (kroz poprečni presjek S_1):

$$\Delta m_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t,$$

mora izaći na drugom kraju (kroz poprečni presjek S_2):

$$\Delta m_2 = \rho_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Da ne vrijedi $\Delta m_1 = \Delta m_2$, unutar promatranog sektora cijevi mijenjala bi se masa i situacija ne bi bila stacionarna.

Dakle, mora vrijediti:

$$\Delta m_1 = \Delta m_2 \rightarrow \boxed{\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2} \tag{5}$$

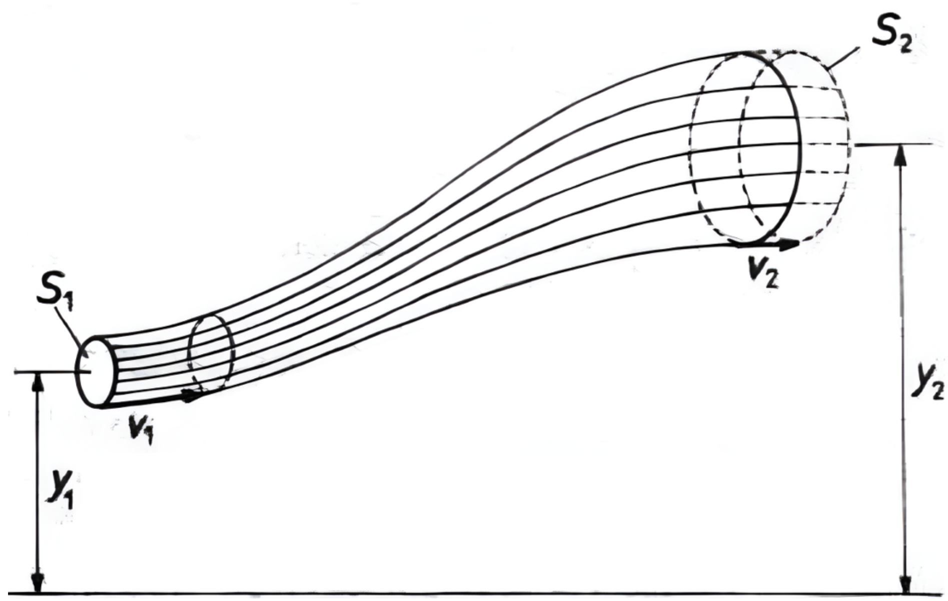
Ova jednadžba je poznata kao **jednadžba kontinuiteta**. Ako ju primjenjujemo na tekućine, onda je gustoća praktički konstantna ($\rho_1 = \rho_2$) pa se jednadžba svodi na:

$$\boxed{S_1 v_1 = S_2 v_2} \tag{6}$$

Definicija 1.5 – Volumni protok

Jednadžba kontinuiteta prikazuje **jednakosti** volumnih protoka. Volumni protok kao fizikalnu veličinu označavamo s q te definiramo kao:

$$q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{[m^3]}{[s]} = [m^3/s]$$



Slika 8: Tok tekućine u polju gravitacijske sile; prikazana je samo jedna "cijev" omeđena odabranim strujnicama.

1.2.2 Bernoullijeva jednadžba

Razmotrimo tečenje nestlačivog fluida u zamišljenoj cijevi čije rubove čine strujnice na slici 8, a unutar Zemljinog gravitacijskog polja (dakako, cijev može biti i stvarna). Kao što je već spomenuto, neto-promjena unutar nekog intervala Δt je ta da je kroz ulazni poprečni presjek S_1 u promatranu cijev ušla neka masa fluida Δm_1, a kroz izlazni poprečni presjek S_2 izašla ista masa fluida Δm_2. Drugim riječima, promjenu unutar Δt možemo shvatiti kao da je masa $\Delta m = \Delta m_1 = \Delta m_2$ prebačena s ulaza u cijev na njen izlaz; ostatak fluida je (zbog stacionarnosti problema) ostao identičan.

Razmotrimo energiju pri opisanoj promjeni. Na početku vremenskog intervala Δt, promatran komad fluida Δm imao je energiju:

$$E_1 = \frac{1}{2}\Delta m_1^2 + \Delta m g y_1;$$

prvi je član u ovom raspisu kinetička energija promatranog elementa fluida, a drugi njegova potencijalna energija. Nakon vremena Δt energija je prebačenog komada fluida Δm jednaka:

$$E_2 = \frac{1}{2}\Delta m_2^2 + \Delta m g y_2.$$

Promjena energije fluida može nastati samo ako je nad njim izvršen neki rad, koji u ovom slučaju vrši okolni fluid (koji se nalazi lijevo od poprečnog presjeka S_1 i desno od poprečnog presjeka S_2 na slici 8). Na ulazu u cijev, nad promatranim fluidom rad vrši sila $F_1 = p_1 S_1$, gdje je p_1 tlak na ulazu. Ta sila gura promatrani komad fluida Δm u cijev i u vremenu Δt izvrši rad:

$$W_1 = F_1 v_1 \Delta t = p_1 S_1 v_1 \Delta t = p_1 \frac{\Delta m}{\rho}.$$

Slično, na izlazu gdje vlada tlak p_2, fluid mase Δm izlaskom iz cijevi izvrši rad:

$$W_2 = -p_2 \frac{\Delta m}{\rho}.$$

Ovaj rad je negativan jer ga promatrani komad fluida vrši nad okolinom.

Teorem 1.2 – Bernoullijeva jednadžba

Ukupan rad izvršen nad elementom fluida Δm u vremenu Δt mijenja njegovu energiju:

$$W_1 + W_2 = E_2 - E_1;$$

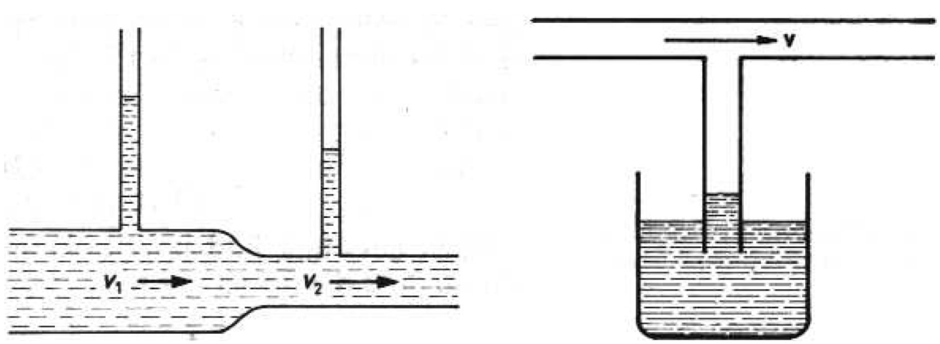
uvrštavanjem dobivamo:

$$p_1 \frac{\Delta m}{\rho} - p_2 \frac{\Delta m}{\rho} = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g y_2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g y_1,$$

$$\boxed{p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2} \tag{7}$$

Ovo je Bernoullijeva jednadžba[a] za strujanje idealnog fluida, koja povezuje bilo koje dvije točke 1 i 2 na istoj strujnici. Principijelno, ona je dobivena iz zakona očuvanja energije (i jednadžbe kontinuiteta). Bernoullijeva jednadžba sadrži, kao specijalan slučaj, i izraz za hidrostatski tlak (koji se dobiva jednostavnim uvrštavanjem $v_1 = v_2 = 0$).

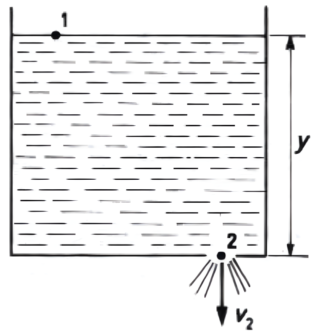
[a]Daniel Bernoulli, 1738.



Slika 9: Potvrda postojanja dinamičkog tlaka.

Prema Bernoullijevoj jednadžbi, tlak u tekućini koja se giba ima tri izvora. Prvi je tlak koji potječe od djelovanja okoline na promatrani dio tekućine, tj. vanjski tlak p_1 i p_2 u jednadžbi. Drugi je hidrostatski tlak koji nastaje zbog djelovanja gravitacijske sile. Konačno, treći je izvor tlak povezan s gibanjem tekućine; on $\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)$ je prisutan samo u tekućini koja se giba, pa se ponekad naziva hidrodinamičkim tlakom. Bernoullijeva jednadžba kaže da na mjestima gdje fluid brže teče (uža cijev!), hidrostatski tlak mora biti manji (kao na slici 9).

Pogledajmo Bernoullijevu jednadžbu na još jednom primjeru, istjecanju tekućine kroz rupicu na dnu posude (slika 10). Neka je otvor na dnu malen (puno manji od poprečnog presjeka čitave posude); po jednadžbi kontinuiteta, brzina spuštanja nivoa tekućine (v_1) tada se može zanemariti.



Slika 10: Istjecanje tekućine kroz otvor na dnu posude

Primijenimo Bernoullijevu jednadžbu na točku 1 koja je na gornjoj površini tekućine u posudi i točku 2 na rupici. Obje točke se nalaze "u zraku", pa je vanjski tlak jednak atmosferskom p_a,

$$p_a + 0 + \rho g y = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + 0.$$

Sređivanjem dobivamo:

$$v_2 = \sqrt{2gy}.$$

Brzina istjecanja ista je kao da tekućina slobodno pada s njene gornje površine u posudi – to je tzv. Torricellijev zakon[8] istjecanja, a vrijedi i onda kada je otvor okrenut na stranu (ili čak prema gore); jedino je važno da se otvor nalazi za y ispod gornje površine tekućine.

Gomila je drugih primjena Bernoullijeve jednadžbe – navedimo samo vjerojatno najvažniju, a ta je objašnjenje leta zrakoplova. Naime, krila zrakoplova konstruiraju se tako da je relativna brzina zraka u odnosu na krilo veća na gornjoj strani krila, nego na donjoj. Dakle, hidrodinamički tlak je veći s gornje strane krila, što (uz praktički jednak hidrostatski tlak) povlači da je vanjski tlak p veći s donje strane krila – stoga postoji rezultantna sila na krilo u smjeru prema gore. To je upravo sila aerodinamičkog uzgona koja omogućuje let zrakoplova.

1.2.3 Dodatni sadržaj: Viskoznost fluida

Prema Bernoullijevoj jednadžbi, u tekućini koja jednoliko protječe kroz vodoravnu cijev jednolika presjeka, tlakovi bi svugdje morali biti jednaki. U stvarnosti to nije tako, tlak zbog unutrašnjeg trenja u tekućini pada u smjeru tečenja. Različiti dijelovi fluida mogu imati različite brzine gibanja ako na fluid nejednoliko djeluju vanjske sile. Ako se dva sloja različitih brzina dodiruju, onda će brži "vući" za sobom sporiji i obrnuto, sporiji će usporavati brži. Slojevi djeluju jedan na drugog silom F istog iznosa; ta sila potječe od unutrašnjeg trenja fluida kojeg zovemo *viskoznost*.

Ako je S površina kontakta dvaju (zamišljenih) slojeva različitih brzina, onda je naprezanje smicanja F/S to veće što je veća razlika brzina gibanja susjednih slojeva. Ako su slojevi razmaknuti za Δy (y

[8] Evangelista Torricelli, 1644.

je os okomita na smjer toka), a brzine gibanja im se razlikuju za Δv, onda vrijedi sljedeća empirička relacija:

$$\frac{F}{S} = \eta\frac{\Delta v}{\Delta y},$$

gdje je η koeficijent viskoznosti (koji se očito mjeri u paskalsekundama, $\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$). Koeficijent viskoznosti jako varira za razne tekućine, tako je npr. za vodu $\eta = 10^{-3}$ $\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$, dok "viskozne tekućine" (razna ulja, glicerin) imaju $\eta > 1$ $\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{s}$.

Koje je mikroskopsko objašnjenje nastanka viskoznosti? Zbog termičkog gibanja, molekule prelaze između zamišljenih slojeva različitih brzina i pri tome "prenose" svoju količinu gibanja – molekule iz bržeg sloja unijet će u sporiji sloj u prosjeku veću količinu gibanja nego što ga imaju okolne molekule (i obrnuto). Iako je broj molekula koji se izmjenjuje među slojevima jednak, ukupna količina gibanja nije. Promjena količine gibanja sloja može se interpretirati kao posljedica postojanja sile – to je upravo sila F u gornjem izrazu. Dakle, viskoznost je posljedica prijenosa količine gibanja među slojevima koji se gibaju različitim brzinama, a do njega dolazi izmjenom molekula fluida među slojevima.

Viskoznost u tekućinama izaziva izjednačavanje gibanja svih dijelova tekućine ako na tekućinu ne djeluju vanjske sile. Štoviše, ako se tekućina giba u nekoj posudi ili cijevi, onda će sile trenja s vremenom tekućinu dovesti do mirovanja. Drugim riječima, sile unutrašnjeg tijela kinetičku energiju će pretvoriti u toplinu.

Viskoznost je, dakle, pojava zbog koje tlak pada duž cijevi kojom teče fluid. Drugim riječima, želimo li potjerati realni fluid kroz dugačku cijev, na njenom ulazu moramo nametnuti tlak koji je bitno veći nego na njenom izlazu. Brzina fluida u cijevi bit će najveća duž sredine cijevi i padati će prema rubovima.

Nađe li se u tekućini neko strano tijelo, trenje tekućine i tijela utječe na njihovu relativnu brzinu i način tečenja. Problem se može shvatiti i drukčije: svaki fluid zbog svoje viskoznosti pruža otpor gibanju nekog stranog tijela u fluidu. To je sila otpora koja je za malene brzine gibanja tijela u fluidu proporcionalna brzini tijela.

Ako u fluidu nema stranih tijela, pri manjim brzinama realni fluid struji **laminarno**, tj. u slojevima – svaki sloj ima svoju brzinu, koje se općenito razlikuju. Ako brzina fluida postane veća od neke kritične, strujanje iz laminarnog prelazi u **turbulentno**. Pri tome nastaje miješanje slojeva fluida i nastaju vrtlozi. Kritična brzina pri kojoj laminarno strujanje prelazi u turbulentno ovisi o viskoznosti i gustoći fluida, te o obliku cijevi kroz koju fluid teče, odnosno o obliku tijela koje se giba kroz fluid.

Hoće li fluid teći laminarno ili turbulentno, može se odrediti pomoću bezdimenzionalnog parametra koji se zove Reynoldsov[9] broj:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v l}{\eta};$$

ovdje je ρ gustoća fluida, v brzina strujanja fluida (ili brzina tijela koje se giba kroz fluid), a η koeficijent viskoznosti. Reynoldsov broj ovisi i o obliku cijevi kroz koju teče fluid (odnosno o dimenziji tijela), a ta se ovisnost uvodi u gornji izraz preko karakteristične duljine l (koja je npr. za

[9] Osborne Reynolds (1842. – 1912.)

cijev kružnog presjeka jednaka promjeru, za kvadratni presjek jednaka stranici kvadrata, za kuglu jednaka polumjeru itd.).

Protjecanje fluida bit će laminarno ako je Reynoldsov broj manji od nekog kritičnog – npr. za strujanje fluida kroz cijev kritični Reynoldsov broj je ≈ 2000. Pogledajmo kao primjer strujanje vode ($\rho = 10^3$ kg/m^3, $\eta = 10^{-3}$ Pa s) kroz cijev polumjera 1 cm. Kritični Reynoldsov broj postiže se za brzinu:

$$v = \frac{\eta \mathrm{Re}}{2r\rho} = \frac{10^{-3} \cdot 2000}{0.02 \cdot 10^3} = 0.1 \text{ m/s}$$

Za brzine bitno manjje od dobivene, tok vode bit će posve laminaran, a za brzine bitno veće od dobivene, tok vode bit će turbulentan – za brzine oko izračunate tok će postepeno prelaziti iz laminarnog u turbulentan.

1.3 Uvodni zadatci

Za uvodne zadatke preporučam riješiti lekcije *Hidrostatski tlak*, *Vanjski ili hidraulički tlak*, *Atmosferski tlak*, *Sila uzgona*, *Jednadžba kontinuiteta i Bernoullijeva jednadžba* te *Test za samoprocjenu 1* cjeline *Statika i dinamika fluida* iz zbirke zadataka iz fizike za 2. razred (nakladnik Alfa, autori Jakov Labor i Jasmina Zelenko Paduan). Link na zadatke i rješenja možete pronaći ovdje, a URL je `https://github.com/MatejVo/Uvodni_zadatci_2._razred`.

1.4 Natjecateljski zadatci

1.4.1 Lakši zadatci

1. (šk2023/2r/z1) Cjevčica uniformnog presjeka, u obliku slova U, otvorena na krajevima i okomito postavljena sadržava ulje ($\rho = 0.9$ g cm^{-3}). Ulje na površini lijeve (A) i desne (B) strane podržava dva pomična cilindrična klipa mase m_A i m_B. Dimenzije cilindra su takve da ne dopuštaju tekućini da prodre između cilindra i stijenke cijevi. Trenje između cilindra i cijevi je zanemarivo. Kad je sustav u ravnoteži, visinska razlika između visina ulja A i B iznosi h = 10 cm, a polumjer cijevi je r = 20 cm. Kolika je razlika između mase m_A i m_B?

2. (šk2023/2r/z4) Kugla je u ravnoteži između dviju tekućina specifične težine $\gamma_1 = 7$ kN m^{-3} i $\gamma_2 = 9$ kN m^{-3}, a ravnina razdvajanja dviju tekućina prolazi kroz njezino težište. Odredi specifičnu težinu materijala od kojega je načinjena kugla.

3. (šk2022/2r/z1) Horizontalna cijev u kojoj teče voda ima početni presjek $S_1 = 100$ cm^2. Nakon toga se cijev sužava i presjek postaje $S_2 = 60$ cm^2. Statički tlak u početnom dijelu cijevi je $p_1 = 4 \cdot 10^5$ Pa (pomoću hidrostatskog se uređaja tlak održava konstantnim), dok je u užem tijelu statički tlak jednak $p_2 = 3 \cdot 10^5$ Pa. Kolike su vrijednosti brzine vode u početnom i užem dijelu cijevi? Izračunaj količinu mase koja prođe kroz cijev u jedinici vremena.

4. (šk2021/2r/z5) Tijelo u zraku je teško $F_1 = 15$ N. Uronjeno u vodu je teško $F_2 = 12$ N. Uronjeno u nepoznatu tekućinu teško je $F_3 = 13$ N. Izračunaj gustoću tijela i gustoću nepoznate tekućine.

5. (šk2020/2r/z3) Tri dječaka, svi jednake mase od $m = 74.8$ kg, grade splav od drvenih debla promjera $d = 0.32$ m i duljine $l = 1.77$ m. Koji je najmanji broj trupaca potreban za izgradnju splavi tako da ka se ta tri dječaka nalaze na splavi, cjelokupni sustav pluta na vodi, tako da noge dječaka ostanu suhe? ($\rho_{\text{drvo}} = 757.7$ kg m^{-3}).

6. (šk2019/2r/z5) Kipar radi na skulpturi koja će biti smještena u središtu jedne fontane. Iz usta skulpture će u fontanu teći vodeni mlaz. Unutar tijela skulpture umetnut će se cijev presjeka $A = 3.14$ cm^2 kojom će voda u vodoravnom smjeru izlaziti brzinom $v = 90.0$ cm s^{-1}. Rupica usta mora biti takva da izlazni vodeni mlaz dostiže udaljenost od izvora $d = 60.0$ cm na visini $h = 120.0$ cm ispod usta, tako da puni posudu fontane. Koliki promjer rupice kipar mora napraviti?

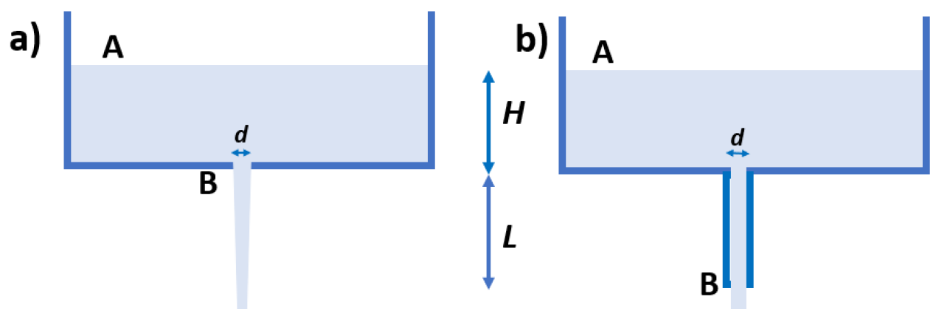
7. (šk2020/2r/z1) Spremnik ima kružni otvor na dnu, promjera d. Želimo usporediti izlazni protok iz spremnika ako je prisutan samo otvor i ako je na otvor spojena okomita cijev duljine L. Uzmi u obzir da je fluid idealan.

   (a) U oba slučaja odredi brzinu tekućine na vertikalnoj udaljenosti L od otvora na spremniku, pod uvjetom da je površina spremnika na visini H u odnosu na dno. Zanemari spuštanje razine površine pri istjecanju.

   (b) Kolika je brzina tekućine na izlaznom dijelu spremnika u oba slučaja (označeno točkom B)?

   (c) Izračunaj izlazni protok u oba slučaja. Koji je učinkovitiji sustav od dva spremnika?

   Uzmi u obzir sljedeće vrijednosti: $H = 5$ m, $d = 20$ cm, $L = 5$ m.



8. (šk2018/2r/z1) Crijevo za zalijevanje ima unutarnji promjer 2 cm i njime struji voda brzinom 1 m/s. Na završnom dijelu cijevi, gdje izlazi voda, nalazi se 24 rupa kružnog presjeka. Promjer svake rupe je 1.2 mm. Odredi brzinu vode koja izlazi iz rupa.

9. (šk2017/2r/z4) Komad drva ima gustoću 0.5 g cm^{-3} i masu 800 g. U drvu se probuši rupa volumena 100 cm^3, koja se napuni olovom. Hoće li tijelo plutati, lebdjeti ili potonuti u vodi?

10. (šk2016/2r/z1) U spojenim cilindričnim posudama se nalazi živa. Polumjer jedne posude je 5 puta veći od polumjera druge. U užu posudu se nalije voda tako da je visina stupca vode u njoj $h = 1.2$ m. Za koliko će se nakon ulijevanja vode spustiti razina žive u užoj posudi, a za koliko će se podignuti u široj? Gustoća žive je 13600 kg m^{-3}, a gustoća vode je 1000 kg m^{-3}.

11. (šk2015/2r/z2) Jezero je tijekom zime pokriveno slojem leda debljine 0.5 m. Koliki je tlak na dubini 2.5 m u jezeru (u 2.5 m se ne ubraja sloj leda)? Gustoća leda je 920 kg m^{-3}, a vode 1000 kg m^{-3}. Atmosferski tlak je 10^5 Pa.

12. (šk2014/2r/z3) U balonu volumena 500 m^3 nalazi se helij gustoće 0.179 kg m^{-3}. Izračunaj težinu koju može nositi taj balon u ravnoteži na visini gdje je gustoća zraka 1.2 kg m^{-3}. Masu materijala od kojeg je napravljen balon možeš zanemariti.

13. (šk2012/2r/z1) Ako u staklenu šuplju kuglu vanjskog promjera 2 cm i mase 1 g stavimo 4 g žive, kugla će lebdjeti u tekućini nepoznate gustoće.

   (a) Izračunaj gustoću nepoznate tekućine.

   (b) Koliko grama žive treba odliti iz kugle da bi kugla plivala u nepoznatoj tekućini tako da joj je četvrtina volumena iznad površine tekućine?

14. (šk2009/2r/z3) Vatrogasnim se šmrkom treba ugasiti požar na visini $h = 5$ m. Ako se pumpom u šmrk dovodi 20 L vode svake sekunde, koliki smije biti maksimalan polumjer (kružnog) otvora na kraju šmrka?

15. (šk2005/2r/z1) Šuplja lopta, unutarnjeg promjera $r_1 = 9$ cm i vanjskog $r_2 = 10$ cm, pliva na tekućini gustoće $\rho = 800$ kg m^{-3}, pri čemu je polovina lopte iznad tekućine.

    (a) Kolika je gustoća tvari od koje je izrađena lopta?

    (b) Kolika bi trebala biti gustoća tekućine da bi u njoj lopta lebdjela?

1.4.2 Umjereni zadatci

1. (šk2023/2r/z2) Voda se iz rijeke pumpa u planinsko selo kroz cijev promjera $d = 15.0$ cm. Rijeka i pumpa su na nadmorskoj visini $h_1 = 564$ m, a selo je na nadmorskoj visini $h_2 = 2096$ m. Ako se svaki dan ispumpa 4500 m^3 vode, kolika je brzina vode unutar cijevi? Uz pretpostavku da voda vrlo sporo teče u rijeci, koliki je tlak na izlazu pumpe s kojim se voda pumpa iz rijeke u selo?

2. (šk2023/2r/z5) Posuda pravokutnoga oblika i površine $A_0 = 1.00$ m^2 otvorena je na vrhu i na početku je napunjena vodom do visine $h_0 = 90.0$ cm. Na desnoj stijenki, na visini $h_1 = 25.0$ cm od tla nalazi se rupa, prvotno začepljena čepom, presjeka $A_1 = 1.0$ cm^2. U određenom se trenutku čep skida i voda počinje slobodno teći. Odredi:

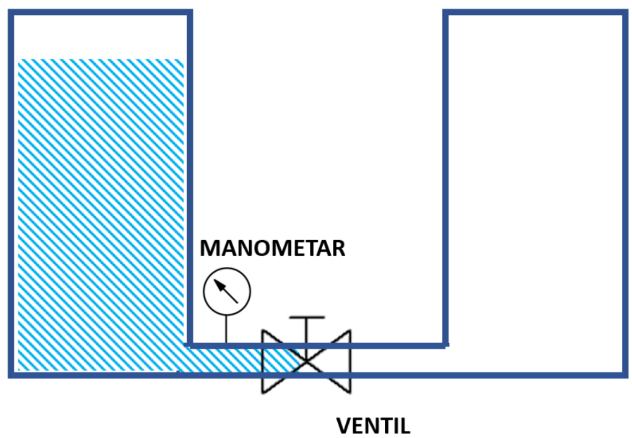
    (a) izraz za brzinu kojom voda izlazi iz rupe u ovisnosti o njezinoj početnoj visini u posudi;

    (b) udaljenost d od posude na kojoj voda dospijeva na tlo odmah nakon otvaranja čepa.

    (c) Naknadno, nakon začepljenja rupe i ponovnog punjenja spremnika (do h_0), na vodu se stavlja zabrtvljeni klip zanemarive mase. Odredi kojom bi silom bilo potrebno gurnuti klip prema dolje da pri otvaranju čepa voda dospije do tla na udaljenosti dvostruko većoj od one određene točkom dobivenom u (b).

3. (šk2022/2r/z2) Plovak, koji se sastoji od cilindra (promjera $d_{\text{cilindar}} = 0.10$ m i visine $h_{\text{cilindar}} = 0.10$ m) i cjevčice (promjera $d_{\text{cjevčica}} = 0.02$ m i visine $h_{\text{cjevčica}} = 1.00$ m), nalazi se u vodi gustoće ρ_{voda}. Valjak je ispunjen tekućinom gustoće $\rho = 1.2$ kg L^{-1}, a cjevčica je ispunjena zrakom. Pri ovim ujvetima valjak je potpuno uronjen u vodu, a samo je dio cjevčice iznad površine vode. Težina praznog plovka je 1.0 N. Odredi visinu cjevčice koja se nalazi u vodi. Zanemari doprinos volumena stijenki plovka.

4. (šk2022/2r/z4) Cijev u obliku slova U sastoji se od dvije jednake okomite grane, s velikim dijelom površine $S = 1\ \mathrm{m}^2$, otvorene prema atmosferi, povezane tankom spojnom cijevi zanemarivog volumena duž koje su postavljeni ventil i mjerač tlaka (vidi sliku). U početku je ventil zatvoren i jedna od grana sadrži tekućinu, gustoće ρ_{voda}, visine $h = 10$ m, dok je druga grana prazna. U određenom trenutku slavina se otvara i nakon faze prigušenih oscilacija tekućina dolazi u stanje ravnoteže zauzimajući dvije grane cijevi. Koliki je ukupni rad sila trenja? Koliko se očitanje tlaka manometra razlikuje od početnog do konačnog stanja?



5. (šk2021/2r/z1) Tijelo mase 10.0 kg i volumena 0.4 m^3 postavljeno je na glatku nepomičnu kosinu nagnutu za 30° u odnosu na horizontalu. S kosinom se izvode dva pokusa spuštanja tijela. U prvom pokusu cjelokupni sustav (masa + kosina) postavljeni su u vakuumu. U drugom pokusu sustav je uronjen u sumporov heksafluorid gustoće 6.16 g L^{-1}. Nacrtaj graf sa silama i njezinim komponentama koje djeluju na tijelo u početnom trenutku. Izračunaj brzinu mase na dnu kosine, nakon 4 s, ako masa s vrha kosine krene iz mirovanja, u slučaju kad je sustav (masa + kosina) u vakuumu i kad je uronjen u plinu. Zanemari sva trenja.

6. (šk2021/2r/z3) Otvoreni spremnik ispunjen je vodom gustoće $\rho_1 = \rho_{\mathrm{voda}}$ i fluidom nepoznate gustoće ρ_2, koji se ne može miješati s vodom. U spremnik je uronjen cilindar gustoće $\rho_3 = 0.4$ kg L^{-1} koji se kreće bez trenja duž vertikalne osi, npr. uzduž okomite nepomične šipke/vodilice. Polumjer cilindra je $r = 0.5$ m, a visina $h = 2.5$ m. U početnom položaju donja ploha cilindra nalazi se na 1 m od dna posude; nivo vode od dna je 1.2 m, a nepoznati fluid je 2.2 m od dna posude (pri čemu je njihova težina u ravnoteži s hidrostatičkim silama). Odredi silu kojom treba djelovati na cilindar da bi se on, u odnosu na početni položaj, spustio za $\Delta z = 0.5$ m i gustoću nepoznatog fluida. Zanemari dimenzije šipke i pretpostavi da je spremnik dovoljno velikog kapaciteta da se pri pomicanju cilindra ne mijenjaju nivoi fluida.

7. (šk2021/2r/z4) Voda teče u okomitoj cijevi stožastog (konusnog) oblika, visokoj 10 m i s presjekom 10 cm^2 na najnižem kraju, te 30 cm^2 na najvišem kraju. Statički tlak na najvišem kraju cijevi je 10^5 Pa, dok je tlak na najnižem kraju $2.01 \cdot 10^4$ Pa. Koliko m^3 vode u sekundi prolazi kroz cijev?

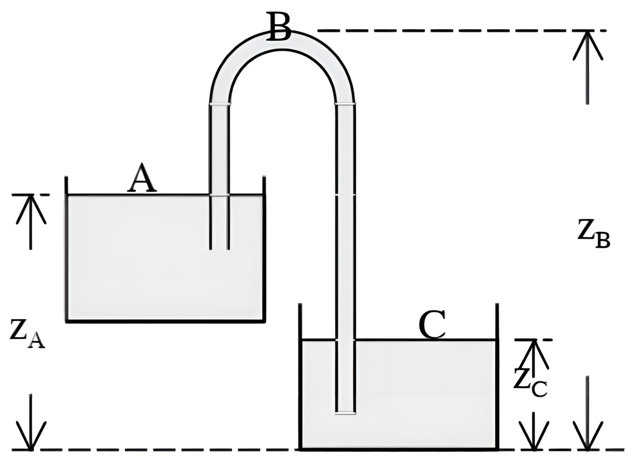
8. (šk2019/2r/z2) Dvije posude međusobno su spojene pomoću sifona kojim se prenosi voda koja se nalazi u njima; razine vode su prikazane na slici.

   (a) U početku sifon sadrži samo zrak. Izvedi izraz za tlak kojim se mora djelovati na površinu vode u posudi A da bi se pokrenulo pretakanje.

   (b) Izračunaj protok vode koja se pretače kada su oba kraja sifona uronjena, a razina vode u oba spremnika se drži konstantnom ubrizgavanjem vode u gornji spremnik i izvlačenjem iz donjeg kroz rupu presjeka $S = 2\ \mathrm{cm}^2$ pri površini vode u posudi C.

   (c) Odredi tlak u cijevi sifona ABC u točkama A, B i C, uz pretpostavku da je njena površina S i da je pretakanje vode u tijeku.

   Zadano je $z_A = 140$ cm, $z_B = 180$ cm, $z_C = 60$ cm, $p_{\mathrm{atm}} = 101300$ Pa, $\rho_{\mathrm{vode}} = 997\ \mathrm{kg/m^3}$.



9. (šk2018/2r/z2) Za popunjavanje bazena koriste se dvije različite pumpe različitog protoka. Druga pumpa trebala bi raditi 2 sata dulje od prve da bi napunila bazen, ukoliko bi sama radila. Uz istovremeni rad obje pumpe, ukupno vrijeme za punjenje bazena je 80 minuta. Koliko dugo bi pumpe trebale raditi pojedinačno da bi svaka zasebno napunila bazen?

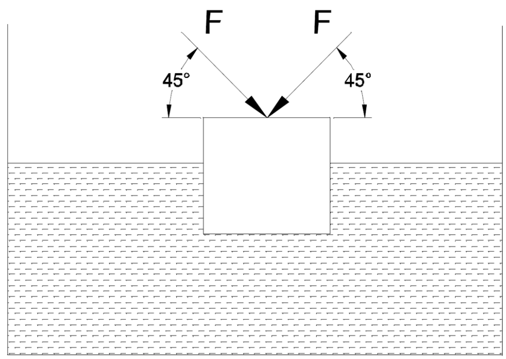
10. (šk2017/2r/z3) Na otvorenom spremniku vode nalaze se dvije vrlo malene rupe na jednoj od strana, jedna iznad druge. Rupe se nalaze na visini 5 cm i 12 cm iznad dna spremnika, koji se nalazi na tlu. Kolika je visina razine vode u spremniku ukoliko mlazovi vode koji izlaze iz ove dvije rupe padaju na isto mjesto na tlu?

11. (šk2016/2r/z2) Kocka volumena $512 \cdot 10^{-6}$ m^3 pliva na vodi tako da je $\frac{3}{4}$ volumena uronjeno u vodu.

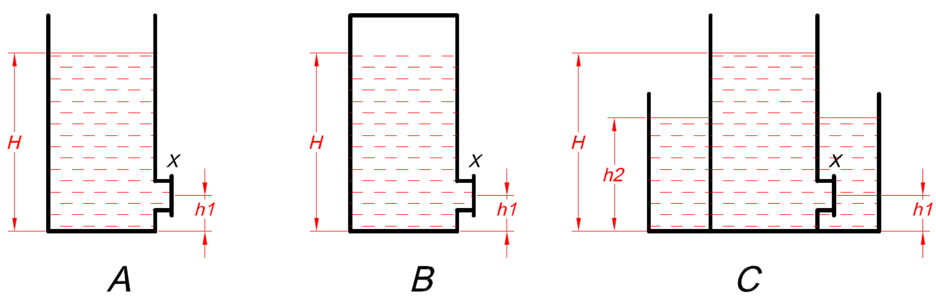
   (a) Izračunaj gustoću materijala od kojeg je napravljena kocka.

   (b) Kolikim silama F moramo djelovati na kocku u smjeru kao na slici da bismo je potpuno potopili?

   Gustoća vode je 1000 kg m^{-3}.



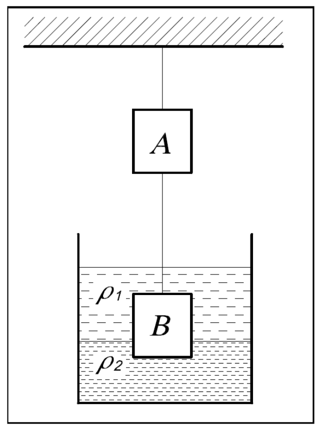
12. (šk2012/2r/z3) Na slikama su prikazane tri jednake posude u koje je ulivena voda. Sve posude imaju oblik kvadra čija je baza dimenzija 6 cm · 6 cm i u svima je razina vode početno jednaka i iznosi H. Posuda B je poklopljena i u prostoru između vode i poklopca je vakuum. Posude A i C su otvorene. Posuda C je uronjena u vodu tako da je ventil X ispod razine vode. U svim se posudama ventil X nalazi na istoj visini h_1 i površina presjeka mu je 4 cm^2. Za svaku posudu izračunaj brzinu istjecanja vode u trenutku kada se ventil X otvori. Atmosferski tlak je 10^5 Pa, $H = 10$ cm, $h_1 = 2$ cm, $h_2 = 8$ cm, gustoća vode je 1000 kg m^{-3}.



13. (šk2011/2r/z3) Dvije kocke obješene su o strop na način kao na slici. Kocka A je u zraku, a kocka B je jednom četvrtinom volumena uronjena u tekućinu gustoće $\rho_2 = 1000$ kg m^{-3}, dok joj je preostali volumen u tekućini gustoće $\rho_1 = 800$ kg m^{-3}. Brid svake kocke je 0.1 m, a napravljene su od materijala gustoće $\rho_K = 960$ kg m^{-3}. Upotrijebljene niti su neeleastične i zanemarive mase.

   (a) Izračunaj silu napetosti niti koja povezuje kocku A sa stropom.

   (b) Ako u jednom trenutku nit koja povezuje kocke pukne, odredi konačni položaj kocke B.

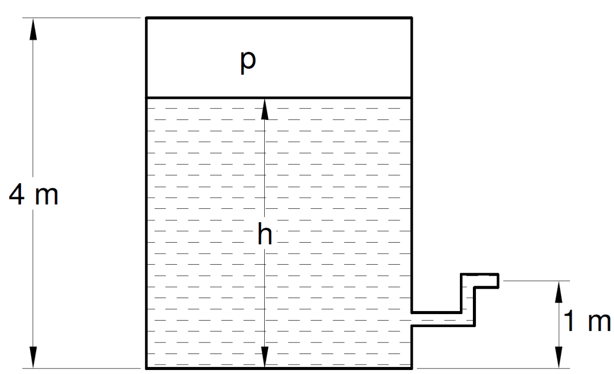


14. (šk2010/2r/z2) Na veliku cisternu pričvršćena je uska cijev kao na slici. Cisterna je napunjena vodom do visine h, zatvorena je na vrhu i termički izolirana. Između poklopca i površine vode nalazi se komprimirani zrak. Kada je visina vode u cisterni $h = 3.5$ m, tlak zraka je $4.2 \cdot 10^5$ Pa. Atmosferski tlak je 10^5 Pa.

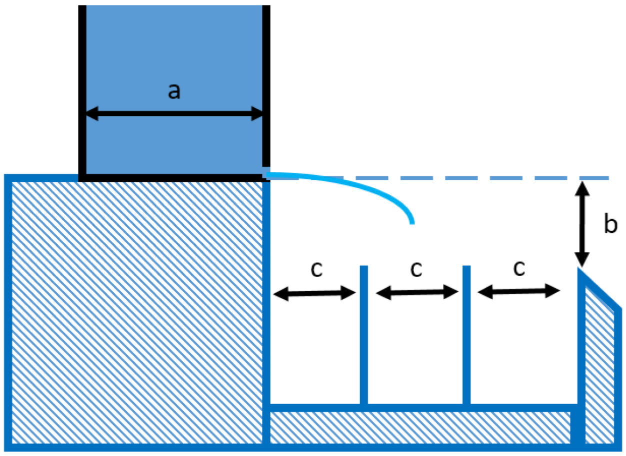
   (a) Izračunaj brzinu istjecanja vode kroz cijev kada je visina vode $h = 3.5$ m.

   (b) Kolika će biti visina vode u cisterni kada voda prestane istjecati kroz cijev?

Gustoća vode je 1000 kg m^{-3}.



15. (šk2019/2r/z4) Odredi količinu vode u posudama 1, 2 i 3 nakon pražnjenja kockastog spremnika stranice $a = 1$ m, kroz otvor zanemarive dimenzije na dnu spremnika. Promjer mlaza i debljine pregrada su zanemarive. Na slici je prikazano kako su postavljeni spremnik i posude. U početnom stanju spremnik je potpuno napunjen i voda u vodoravnom smjeru izlazi kroz otvor i teče bez trenja. Dimenzije sustava su sljedeće: $b = 3.3$ m i $c = 0.7$ m.

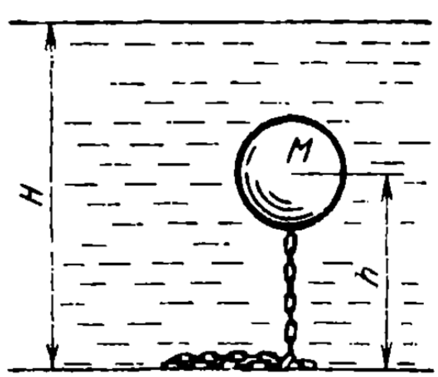


1.4.3 Teži zadatci

1. (žup2021/2r/z5) Posuda koja sadrži tekućinu klizi niz nepomičnu kosinu pod kutom $\varphi = 60°$ s obzirom na horizontalu. Koeficijent trenja između posude i površine je $\mu = 0.15$. Odredi kut θ koji površina tekućine stvara prema kosini tijekom kretanja posude na kosini.

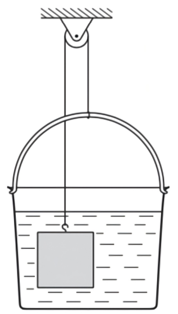
2. (Kup fizike u Lucijanki/2r/z10) Poznato je da je atmosferski tlak Marsa 200 puta manji od Zemljina. Promjer Marsa je oko dva puta manji od promjera Zemlje. Srednja gustoća Zemlje je $\rho_Z = 5500$ kg/m^3, a Marsa $\rho_M = 4000$ kg/m^3. Koliko je puta masa Marsove atmosfere manja od mase atmosfere na Zemlji?

3. (Kup fizike u Lucijanki/2r/z11) Na kuglu mase $M = 10$ kg i promjera $D = 0.3$ m pričvršćen je jednim svojim krajem lanac od željeza, drugi kraj je slobodan. Duljina lanca je $l = 3$ m, a $m = 9$ kg. Ako se kugla i lanac nalaze u vodi kako je prikazano na slici, odredi h. Uzmi da je omjer gustoća željeza i vode jednak 7.85.



4. (drž2023/2r/z1) Tijelo načinjeno od materijala gustoće $\rho_t = 5\rho_{\text{vode}}$ potpuno je uronjeno u posudu napunjenu vodom i pušteno je nultom početnom brzinom s visine h u odnosu na dno posude. Zbog sile viskoznog trenja (pretpostavi da je ona konstantna tijekom gibanja) tijekom spuštanja tijelo izgubi 8% svoje početne energije stižući do dna brzinom $v = 2$ m/s. Izračunaj vrijednost h. Dimenzije tijela zanemarive su u odnosu na visinu h.

5. (MPPP 85) Čvrsta kocka volumena V_i i gustoće ρ_i je povezana na jedan kraj konopa zanemarive mase, drugi je kraj konopa povezan s kantom zanemarive mase koja sadržava vodu gustoće $\rho_v = \dfrac{\rho_i}{10}$.



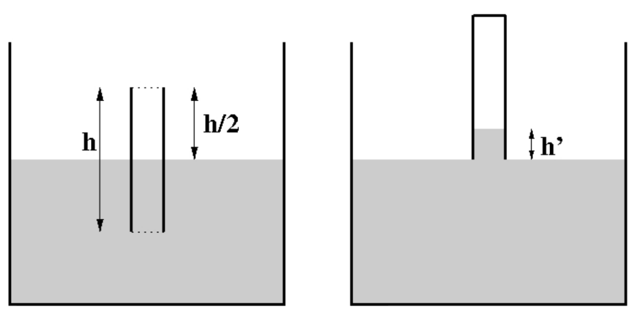
Sustav je u ravnotežnom položaju.

(a) Odredi volumen V_v vode u kanti.

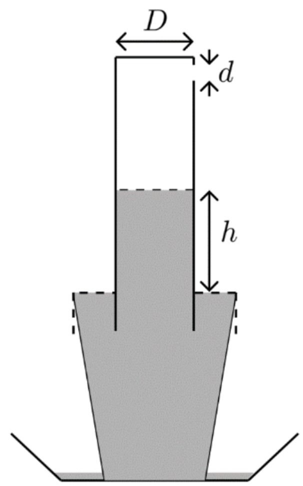
(b) Što bi se dogodilo da još vode dodamo u kantu?

(c) Što bi se dogodilo da malo vode (ili čak sva voda) ispari iz kante?

6. (žup2023/2r/z1) Staklena cijev duljine h = 40 cm, otvorena na oba kraja, gurnuta je u živu do pola svoje visine (slika lijevo). Nakon toga je gornji rub cijevi zatvoren, a cijev podignuta do položaja u kojem se još sasvim malim dijelom nalazi u živi (slika desno). Kolika je visina stupca žive (h') u tom položaju? Atmosferski tlak tijekom ovog procesa je 10^5 Pa, a temperatura je konstantna.



7. (drž2020/2r/z2a) Na bočnoj strani i na dnu prozirnog cilindra promjera D probušena je mala kružna rupica promjera d. Rupa je u početku zatvorena i cilindar se puni vodom gustoće ρ_{voda}. Zatim se cilindar zaokrene i stavi u kantu do vrha napunjenu vodom. Rupa se otvori, zrak ulazi u cilindar i visina $h(t)$ razine vode (mjereno od razine površine vode u kanti) se mjeri u različitim vremenima t. Pretpostavimo da je zrak nekompresibilan fluid gustoće ρ_{zrak} i njegovo ulaženje u cilindar se može opisati pomoću laminarnog toga. Vanjski tlak je atmosferski. Nađi trenutnu brzinu razine vode u cilindru kod visine h vode.

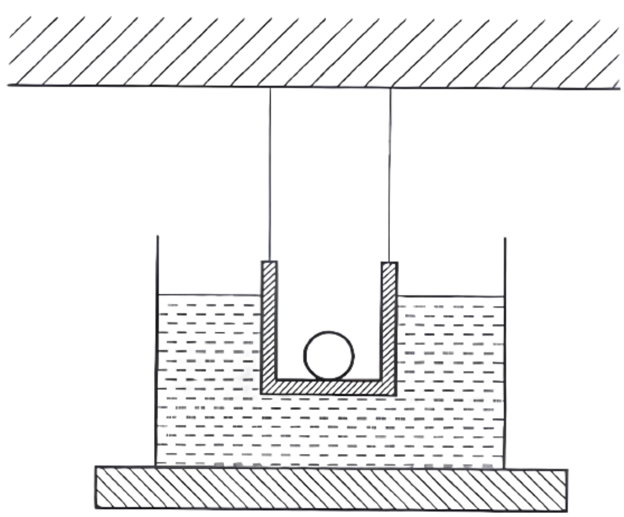


8. (drž2011/2r/z1) Velika cilindrična posuda napunjena vodom stavljena je na podnu vagu. Mala metalna cilindrična posuda u kojoj je metalna kugla visi na nitima i dijelom je uronjena u vodu. Velika posuda, voda u posudi i mala posuda imaju jednaku masu M. Polumjer male posude je r, a visina je $2r$, polumjer velike posude je $2r$. Masa kugle je m. Gustoća vode je ρ_{vode}. Mala posuda i kugla napravljeni su od istog materijala gustoće $\rho > \rho_{\text{vode}}$. Niti na kojima visi mala posuda su zanemarive mase, cijelo vrijeme su napete te su nerastezljive.

(a) Koliko pokazuje vaga ako je u vodu uronjeno $\frac{3}{4}$ visine male metalne posude?

(b) Koliko pokazuje vaga ako izvadimo kuglu?

(c) Kuglu bacimo u vodu. Koliko sada pokazuje vaga?



2 Toplina i termodinamika

2.1 Definicija pojmova i osnovni koncepti

Svatko je od nas, na temelju svakodnevnog iskustva, stvorio jasnu sliku pojmova "toplo" i "hladno", kao način opisivanja informacija dobivenih osjetom topline[10]. Riječ "toplina" koristi se u svakodnevnom govoru u raznim kontekstima, ali ne uvijek s dobro definiranim značenjem. U fizici ta se riječ, dakako, precizno definira. Prvi nam je zadatak izreći tu definiciju i proučiti koliko se ona poklapa s "intuitivnim" značenjem, a koliko sa svakodnevnom upotrebom te riječi zapravo obuhvaćamo druge veličine u fizici (npr. temperaturu).

I bez same definicije, jasno je da su pojmovi toplina i temperatura vezani s čitavim nizom pojava, kao što su agregatna stanja i fazni prijelazi među njima, kemijske reakcije, te s čitavim nizom drugih svojstva tvari (viskoznost, električni otpor itd.).

2.1.1 Toplina i energija

Kako bismo bolje razumjeli prirodu topline, najbolje je da krenemo od svakodnevnog iskustva. Prilikom kočenja, kinetička energija automobila se smanjuje, ali se pritom ne pretvara u potencijalnu energiju. Naime, možemo uočiti da su se kočnice zagrijale. Dakle, mehaničku energiju možemo pretvoriti u toplinu. Slično, znamo da uporabom štednjaka možemo zagrijati posudu s vodom, odnosno električnu energiju pretvoriti u toplinu. Očito je da ne trebamo uvoditi novo svojstvo tvari – toplina jest energija.

U spomenutim primjerima tijela su postala toplija jer je u njih uložena energija. Naravno, nije svaka energija uložena u tijelo postala toplina. Nije svejedno na koji se način energija ulaže u tijelo. Ako tijelo kao cjelina ubrzava radom vanjske sile, onda je uložena energija postala kinetička energija tijela – tijelo se nije ugrijalo. Ako je tijelo izgubilo svoju kinetičku energiju na uzbrdici tako da se uspelo na višu nadmorsku visinu, onda je kinetička energija pretvorena u potencijalnu, ali se tijelo nije zagrijalo. Ta potencijalna energija može se vratiti u kinetičku. U hibridnim automobilima kinetička energija se prilikom zaustavljanja djelomično pretvara u električnu (inducira se elektromotorni napon prema Faradayevom zakonu indukcije (gradivo 3. razreda)) koja se može pohraniti u akumulator i kasnije opet pretvoriti u kinetičku – ponovno nismo stvorili toplinsku energiju. Dakle, što je onda toplina?

Toplina je energija uložena u tijelo tako da se *raspodijeli na razini atoma i molekula.* Tako raspodijeljena energija ne može se sama po sebi pretvoriti u neki drugi oblik energije. Takvo raspodjeljivanje energije možemo usporediti s vazom koja padne na betonski pod. Na početku je vaza bila na nekoj visini i imala potencijalnu energiju. Prilikom padanja ta potencijalna energija pretvorena je u kinetičku pri čemu je težište vaze akceleriralo. Kad je vaza pala na pod, razbila se i sitni komadi dobili su kinetičke energije svaki u svom smjeru. Međutim, težište svih komadića ostalo je mirovati na mjestu pada, skladno sa zakonom očuvanja količine gibanja. Malo je vjerojatno da bi se moglo vanjskim silama djelovati u suprotnom smjeru tako da se komadići vaze ponovno spoje i dobiju kinetičku energiju potrebnu za podizanje vaze na početnu visinu. Proces razbijanja vaze je efektivno

[10] Uz uobičajeno izdvojenih "pet čula" (vid, sluh, njuh, okus i dodir), čovjek posjeduje i niz drugih osjeta, poput npr. osjeta boli i topline ili hladnoće. Neke su životinje pak u stanju osjetiti npr. i magnetsko polje ili strujanje tekućine.

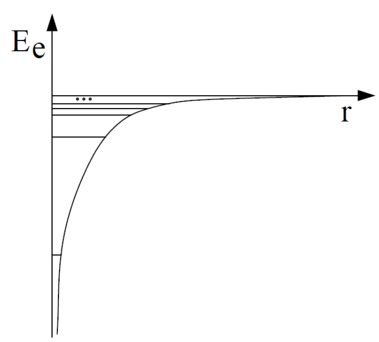
nepovratan (ireverzibilan). Ovdje smo već uveli pojam vjerojatnosti i vidjet ćemo da je toplina blisko povezana sa zakonima vjerojatnosti i statistike.

2.1.2 Dodatni sadržaj: Raspodjela energije na kvantnoj razini

Kako se energija može raspodijeliti na razini atoma? Kada razmatramo procese na razini atoma, moramo uzeti u obzir zakonitosti kvantne mehanike. Na atomskoj razini energija se ne može mijenjati kontinuirano, nego samo skokovito, tj. u kvantima. Kvantni skokovi mogu biti na različitim energetskim skalama. Navest ćemo nekoliko primjera kvantne strukture i s njima povezane energetske skale.

a) Elektron u potencijalu atomske jezgre

Atomska jezgra i elektroni povezani su u atom. Ako zamislimo da je jezgra u ishodištu koordinatnog sustava, potencijalna energija elektrona je negativna. Kažemo da su elektroni u vezanom stanju. Za njihovo odvođenje na beskonačnu udaljenost (tj. ionizaciju atoma) potrebno je uložiti energiju. U vodikovu atomu energija elektrona u osnovnom stanju iznosi -13.6 eV, a energija elektrona u prvom pobuđenom stanju iznosi -3.4 eV. Dakle, za promjenu stanja elektrona iz osnovnog u prvo pobuđeno, potrebno je dovesti kvant energije 10.2 eV. Općenito, tipične energije vezanja elektrona u atomu su reda veličine 1 eV do 10 eV. Izraženo u SI jedinicama, to je $\Delta E \sim 10^{-19}$ J do 10^{-18} J. Ovakve energije imaju kvanti svjetlosti (fotoni) u ultraljubičastom području elektromagnetskog spektra.

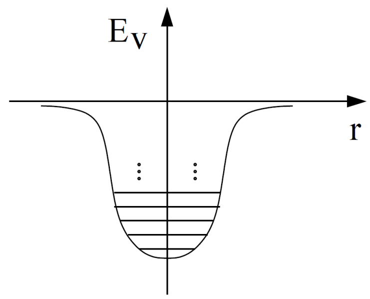


Slika 11: Energijski nivoi elektrona (”spektar”) u atomu.

b) Vibracije atoma u kristalu ili molekuli

Atomi u kristalima ili molekulama imaju svoje ravnotežne položaje. Ako se iz njih pomaknu, javlja se povratna sila koja ih nastoji vratiti u ravnotežni položaj. Za male pomake iz ravnotežnog položaja povratnu silu možemo smatrati harmonijskom, tj. proporcionalnom iznosu pomaka. Drugim riječima, atomi se nalaze u efektivnom harmonijskom potencijalu kojeg stvaraju svi ostali atomi. Zbog Heisenbergove relacije neodređenosti, atomi i u stanju najniže energije osciliraju (tzv. kvantne oscilacije). Međutim, energije oscilacija su veće u pobuđenim stanjima. Energija oscilacije ne može se dodati u proizvoljnom iznosu, nego uvijek samo u točno određenim kvantima. Iznos jednog kvanta određen je masom atoma i konstantom povratne sile. Tipični kvanti vibracijskih energija su 0.1 eV. Izraženo u SI jedinicama, to je

$\Delta E_v \sim 10^{-21}$ J. Ovakve energije imaju fotoni u infracrvenom području elektromagnetskog spektra.



Slika 12: Vibracijski energijski nivoi atoma u kristalnoj rešetci.

c) Rotacije molekula

Budući da su sve energije u prirodi kvantizirane, to vrijedi i za rotaciju molekula. Kvant energije koji se može dodati rotacijskoj energiji neke molekule ovisi o momentu inercije te molekule. Općenito su te energije također u mikrovalnom području $\Delta E_r \sim 10^{-21}$ J, a najpoznatiji primjer je rotacija molekula vode, što koristimo u svakodnevnom životu za zagrijavanje hrane.

d) Spin atomske jezgre u magnetskom polju

Atomske jezgre vrlo često imaju spin, a time i magnetski dipolni moment. Dipolni momenti jezgri su oko tri reda veličine manji od elektronskih. Postavimo li takve jezgre u vanjsko magnetsko polje, one mogu imati samo točno određene energije. Razlike tih energija su kvantizirane i iznose $\Delta E_n \sim 10^{-26}$ J. Ove energije pobuđuju se radiofrekventnim elektromagnetskim valovima. Rezonantno pobuđenje neke jezgre naziva se *nuklearna magnetska rezonancija.*

e) Plin u zatvorenoj posudi

Translacijska kinetička energija atoma i molekula u plinu također je kvantizirana. Kvant energije ovisi o veličini kutije u kojoj se plin nalazi. Za kutiju obujma 1 L kvanti energije potrebni za pobuđenja su $\Delta E_k \sim 10^{-48}$ J. Energija pohranjena u tijelu na razini atoma može biti u raznim pobuđenjima (elektronska, spinska, vibracijska, kinetička, ...). Način kako je pohranjena ovisi o zakonima vjerojatnosti.

2.1.3 Makroskopsko i mikroskopsko stanje

Tijela koja promatramo imaju u pravilu mnoštvo atoma i ako ta tijela gledamo u cjelini, možemo definirati neke fizikalne veličine koje određuju njihova *makroskopska stanja.* To su makroskopski mjerljive veličine, često nametnute izvana, koje određuju stanje tijela u cijelosti kao što su ukupna energija, volumen tijela, magnetizacija, polarizacija, temperatura i sl. Međutim, ako znamo da se tijelo sastoji od N atoma (pri čemu je N jako velik broj), onda nam je jasno da ne možemo točno odrediti u kojem stanju je pojedini atom, ili koliko energije je pohranjeno baš u nekom određenom atomu, ili koji kvantni procesi su sudjelovali u toj raspodjeli energije. Na primjer, dovedemo li u sustav toliko energije koliko je potrebno da se jedan atom pobudi u više energetsko stanje, nećemo znati koji od N atoma je pobuđen. Kažemo da za isto makroskopsko stanje (u ovom slučaju vrijednost ukupne energije sustava) postoji mnoštvo dostupnih *mikroskopskih stanja*, a mi ih ne možemo razlikovati. Mikroskopsko stanje je točno određena jedna raspodjela energije na razini atoma.

2.1.4 Dodatni sadržaj: Osnovni postulat statističke fizike

Najprije ćemo izreći ovaj vrlo važan postulat, a onda ga objasniti na jednostavnom primjeru. Postulat glasi:

Sva dostupna mikroskopska stanja koja se mogu stvoriti za neko makroskopsko stanje jednako su vjerojatna.

Pod **dostupnim stanjem** (*engl.* accesible state) podrazumijevamo neko mikroskopsko stanje koje je moguća realizacija zadanog makroskopskog stanja. Neka kvantna stanja sustava mogu biti energijski dozvoljena realizacija nekog makroskopskog stanja, no ona ne moraju nužno u svakoj situaciji biti dostupna iz raznih razloga. Na primjer, neki sustavi iz danog početnog stanja u neko drugo stanje mogu prelaziti ekstremno sporo (npr. takav je prelazak amorfnog materijala u kristalično stanje pri niskim temperaturama). Odbacimo li takva kvantna stanja kao nedostupna, vrijedi da ako sustavu dovedemo neku energiju, postoji **jednaka vjerojatnost** da se ostvari bilo koje od dostupnih stanja. Drugim riječima, u statističkoj fizici postuliramo da ne postoje razlozi zbog kojih bi neka dostupna mikroskopska stanja bila preferirana na račun drugih. Broj dostupnih stanja standardno označavamo s Ω.

Pod gore spomenutim *izoliranim* sustavom podrazumijevamo sustav konstantne energije, konstantnog broja čestica, konstantnog volumena, te konstantnih drugih veličina koje mogu utjecati na čestice sustava, kao što su gravitacijsko, električno ili magnetsko polje. U nekim situacijama izolirani sustav nije potrebno razmatrati statističkim pristupom jer se npr. nalazi u nekom točno određenom mikroskopskom stanju – najčešće to ipak nije slučaj i sustav trebamo diskutirati s aspekta vjerojatnosti. Sustav kod kojeg je dozvoljena izmjena energije s okolinom, ali ne i izmjena čestica, nazivamo *zatvorenim* sustavom.

Vjerojatnost se općenito određuje promatranjem velikog broja slučaja. Zamislimo da nekom sustavu možemo dovesti neku energiju i zatim utvrditi u kojem se točno mikroskopskom stanju nalazi. Zatim oduzmemo sustavu energiju jednaku dovedenoj, te ju ponovno dovedemo i utvrdimo u kojoj se sada mikroskopskoj realizaciji danog makroskopskog stanja nalazi. Ako takav proces ponovimo velik broj puta moguće je utvrditi koliko se puta ostvarilo pojedino dostupno stanje u ukupnom broju pokušaja (pokusa) – tako određujemo vjerojatnost pojedinog dostupnog stanja.

Opisani postupak dat će pouzdane rezultate samo ako je broj pokusa puno veći (bar par redova veličine) od broja dostupnih stanja. Umjesto ponavljanja pokusa s jednim te istim sustavom, može se zamisliti da na raspolaganju imamo velik broj potpuno jednakih sustava te svakome od njih dovedemo istu energiju i zatim gledamo u kakvim su se dostupnim stanjima našli pojedini od tih sustava. Takav zamišljeni skup jednakih sustava naziva se **statistički ansambl** (ili termodinamički ansambl). Dakle, statistički ansambl je zamišljeni skup jednakih sustava u istom makroskopskom, a u različitim mikroskopskim stanjima. Ako se proučava **izolirani sustav** (tj. sustav konstantne energije), tada se odgovarajući ansambl naziva *mikrokanonskim*.

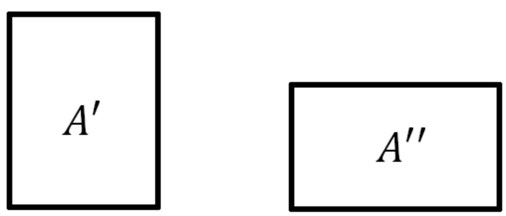
Do sada smo mikroskopska stanja tretirali kao statička, nepromjenjiva u vremenu. To, dakako, nije tako u većini realnih situacija – ako postoji interakcija među česticama sustava, moguć je prelazak iz jednog dostupnog mikroskopskog stanja u drugo (bez promjene ukupne energije), i to unutar relativno kratkog vremenskog perioda. Kada bismo mogli "gledati" pojedina dostupna stanja u različitim trenutcima, opazili bismo da sustav prolazi otprilike jednak broj puta kroz svako od dostupnih stanja. Drugim riječima, svako od dostupnih stanja se pojavljuje s jednakom vjerojatnošću.

Naglasimo još da sve izrečeno vrijedi i za situaciju kada su u sustavu moguća razna pobuđenja (npr. i elektronska, i vibracijska, i spinska). Osnovni postulat statističke fizike je, dakle, posve općenit. Njega ne dokazujemo, nego na njemu razvijamo sustavan opis toplinskih pojava – konzistentnost tog opisa s eksperimentom indirektno dokazuje njegovu ispravnost.

2.2 Toplinsko međudjelovanje

2.2.1 Toplinska ravnoteža

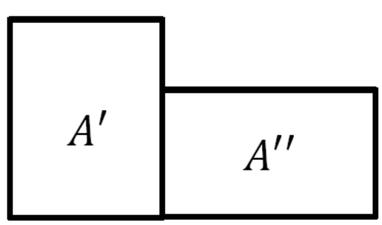
Razmotrimo sada dva odvojena sustava A' i A''. Neka svaki od tih sustava ima dobro definirana makroskopska stanja. Sustav A' ima N' atoma u volumenu V' i ukupnu energiju $E_0^{'}$. Broj dostupnih stanja za tu energiju je $\Omega'(E_0^{'})$. Sustav A'' ima N'' atoma u volumenu V'' i ukupnu energiju $E_0^{''}$. Broj dostupnih stanja za tu energiju je $\Omega^{''}(E_0^{''})$.



Ukupni broj dostupnih stanja za ta dva odvojena sustava jednak je $\Omega'(E_0^{'}) \cdot \Omega^{''}(E_0^{''})$. (Svako stanje prvog sustava možemo kombinirati s bilo kojim stanjem drugog sustava, ali energija, atomi ili pobuđenja ne mogu prelaziti iz jednog sustava u drugi.)

Što se zbiva ako u nekom trenutku (nazovimo ga $t = 0$) ta dva sustava spojimo tako da mogu izmjenjivati energiju? Nazovimo takav novi (spojeni) sustav A. On ima $N = N' + N^{''}$ atoma i energiju $E = E_0^{'} + E_0^{''}$. Sada će broj dostupnih stanja za spojeni sustav biti mnogo veći nego prije spajanja:

$$\Omega(E) \gg \Omega'(E_0^{'}) \cdot \Omega^{''}(E_0^{''}).$$



Broj dostupnih stanja za jednoliku raspodjelu (N pobuđenja lijevo i N pobuđenja desno) je najvjerojatnije i zovemo ga *stanje toplinske ravnoteže.* Možemo reći da je sustav A u trenutku $t = 0$ bio u neravnotežnom stanju. To je bila lokalna fluktuacija. U vremenu $t > 0$, sustav A putem interakcija među atomima evoluira u najvjerojatnije stanje toplinske ravnoteže.

Postizanje toplinske ravnoteže je *nepovratan* ili *ireverzivbilan* proces. Sustav se ikad neće sam vratiti u početno neravnotežno stanje. Trajanje postizanja toplinske ravnoteže zovemo *relaksacijsko vrijeme.* Ono može biti vrlo različito, ovisno o vrsti sustava koje spajamo. Recimo, spojimo li dvije posude s plinom, relaksacijsko vrijeme mjerit će se u milisekundama. Dovedemo li dva metala u dodir, relaksacijsko vrijeme mjerit će se u minutama, a dodirnemo li dva komada stiropora, postizanje toplinske ravnoteže trajat će satima.

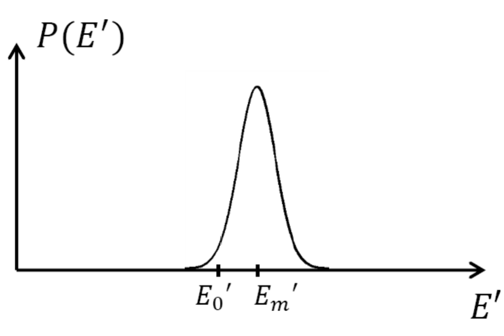
Ako su promatrani sustavi A' i A'' prije spajanja imali jednake energije, njihovo spajanje neće promijeniti stanje. Oni se već u trenutku $t = 0$ nalaze u stanju toplinske ravnoteže. Ovo možemo poopćiti i za slučaj da sustavi A' i A'' nisu iste veličine (tj. nemaju isti broj atoma).

2.2.2 Dodatni sadržaj: Uvjet toplinske ravnoteže

Ako spojimo sustave A' i A'', koji mogu biti različitih veličina, onda oni mogu izmjenjivati energiju. Prije spajanja, energije tih sustava bile su E_0', odnosno E_0''. Ukupna energija je $E = E_0' + E_0''$. Nakon spajanja, sustav A' može imati neku energiju E', a sustav A'' energiju E'', pri čemu se ukupna energija neće promijeniti, tj. $E = E' + E''$. Vjerojatnost da se energija baš tako rasporedi na dva podsustava je

$$P(E') = \frac{\Omega'(E') \cdot \Omega''(E'')}{\Omega(E)} = \frac{\Omega'(E') \cdot \Omega''(E - E')}{\Omega(E)}.$$

Naravno, sustav će biti toplinskoj ravnoteži za onu energiju E' za koju je $P(E')$ maksimalno. Označimo tu energiju s E_m' (tj. $P(E_m' = \max)$. Premda znamo da se energija mijenja u kvantima, ovdje govorimo o sustavima s jako velikim brojem atoma, pa možemo zamisliti da su promjene energija kontinuirane. Onda je i funkcija $\Omega'(E')$ kontinuirana. U stvari, $\Omega'(E')$ će nam predstavljati broj dostupnih stanja koja imaju energiju u intervalu $[E', E' + \delta E']$. Slično ćemo uvesti funkciju vjerojatnosti kao kontinuiranu veličinu. $P(E')$ će nam predstavljati vjerojatnost da energija bude u intervalu $[E', E' + \delta E']$.



Slika 13: Ravnotežno stanje postiže se za $P(E_m') = \max$, tj. onda kada funkcija $P(E')$ ima maksimum.

Kako bismo pronašli maksimum funkcije, trebamo je derivirati i izjednačiti s nulom:

$$\frac{\partial P(E')}{\partial E'} = \frac{1}{\Omega(E)}\left[\frac{\partial \Omega'(E')}{\partial E'}\cdot \Omega''(E'') + \Omega'(E')\cdot \frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E'}\right] = 0.$$

Uzimajući u obzir jednakost $\Omega''(E'') = \Omega''(E - E')$, možemo pisati

$$\frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E'} = -\frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E''}$$

pa imamo

$$\frac{\partial P(E')}{\partial E'} = \frac{\Omega'(E')\cdot \Omega''(E'')}{\Omega(E)}\left[\frac{1}{\Omega'(E')}\cdot\frac{\partial \Omega'(E')}{\partial E'} - \frac{1}{\Omega''(E'')}\cdot\frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E''}\right] = 0.$$

Izraz ispred uglate zagrade je $P(E')$ prema jednadžbi za vjerojatnost jednolikog rasporeda energije na dva podsustava, dakle pozitivan broj, pa slijedi da uglatu zagradu treba izjednačiti s nulom. Time smo dobili *uvjet toplinske ravnoteže* dvaju sustava:

$$\frac{1}{\Omega'(E')}\cdot\frac{\partial \Omega'(E')}{\partial E'} = \frac{1}{\Omega''(E'')}\cdot\frac{\partial \Omega''(E'')}{\partial E''}.$$

Riječima taj uvjet iskazujemo kao: Sustavi A' i A'' su u toplinskoj ravnoteži kad im se izjednače *relativne naglosti promjene broja dostupnih stanja*. Taj se uvjet postiže za energiju E'_m.

Kad su sustavi spojeni, topliji podsustav predaje energiju hladnijem. Neka je na početku A' hladniji od ta dva sustava. Njegova energija će nakon spajanja porasti s E'_0 na E'_m:

$$\Delta E' = E'_m - E'_0 = Q' > 0.$$

Sustav A' je dobio energiju u obliku *topline* Q'. Ovdje smo uveli dogovor da je toplina koju tijelo prima pozitivna. Sustav A'' je predao energiju:

$$\Delta E'' = E''_m - E''_0 = Q'' < 0.$$

Zakon očuvanja energije kaže da mora vrijediti

$$Q' + Q'' = 0.$$

Ako su sustavi u toplinskoj ravnoteži, nema prijenosa energije među njima.

2.2.3 Temperatura

Čestice od kojih su građena sva tijela u prirodi, neprestano se kreću, pri čemu se to kretanje naziva *toplinsko kretanje*. Ukoliko se dva tijela dovedu u kontakt, njihove čestice će se međusobno sudarati i predavati energiju jedna drugoj. Čestice, koje su se kretale brže, će se nakon sudara kretati sporije, a čestice koje su se kretale sporije, će se ubrzati, u skladu sa zakonom očuvanja količine gibanja. To znači da pri dodiru dva tijela dolazi do razmjene energije, pri čemu je tijelo, koje gubi energiju, ono čije su se čestice kretale brže i naziva se *toplije* tijelo, a tijelo koje prima energiju je tijelo čije su se čestice kretale sporije i naziva se *hladnije tijelo*. Taj prijelaz energije će se događati sve dok se ne uspostavi stanje toplinske (termodinamičke) ravnoteže, tema koju smo već obradili 30. i 31. strani. Tada kažemo da su oba tijela na istom nivou zagrijanosti. Kao karakteristika nivoa zagrijanosti tijela služi **temperatura**. Temperatura je dakle termodinamička veličina koja karakterizira stanje termodinamičke ravnoteže makroskopskog sustava. Temperatura se na početku definirala kao $\frac{2}{3}$ kinetičke energije translacijskog kretanja čestica i bila je imenovana *energetskom* ili *kinematičkom* temperaturom (naravno, jer se izražavala u džulima),

$$\Theta = \frac{2}{3}\overline{E}_k.$$

To nije bilo praktično, jer bi mjerenje temperature značilo mjerenje energije svake čestice. Zbog toga je uvedena nova mjerna jedinica za temperaturu, koja je nazvana *stupanj*. Temperatura izražena u stupnjevima se označava s T, i njena definicija glasi

$$k_B T = \frac{2}{3}\overline{E}_k,$$

gdje je k_B Boltzmannova konstanta[11], koja je određena eksperimentalno i iznosi $1.3806 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{stupanj}}$. Pošto je kinetička energija pozitivna veličina, i temperatura mora biti pozitivna veličina. Ovako definirana temperaturna skala se naziva *apsolutnom* odnosno *Kelvinovom*, te se stupnjevi te skale označavaju s K[12]. Ova skala počinje od apsolutne nule, temperature na kojoj prestaje svako toplinsko kretanje. Apsolutna temperatura je uzeta za jednu od sedam osnovnih veličina u SI sustavu mjernih jedinica, a odgovarajuća mjerna jedinica se naziva **kelvin**. Naime, prije 2019. godine, kelvin je bio precizno definiran kao $\frac{1}{273.16}$ dio termodinamičke temperature trojne točke vode. Međutim, 2019. godine kelvin je postao definiran preko Planckove[13] konstante, brzine svjetlosti i frekvencije (prijelaza osnovnog stanja) atoma cezija-133, koju ovdje neću navoditi. U Hrvatskoj, a i u Europi je uobičajeno da se temperatura izražava u Celzijevim[14] stupnjevima (°C). Nula Celzijevih stupnjeva je temperatura skrućivanja vode, dok apsolutna nula (0 K) odgovara temperaturi od $-273.15°$ C. Veza između Kelvinove (apsolutne) temperature T i Celsiusove temperature t je

$$T = t + 273,15°\mathrm{C}.$$

Bitno je uočiti da je temperaturni interval u kelvinima jednak temperaturnom intervalu u Celsiusovim stupnjevima jer je

$$\Delta T = T_2 - T_1 = t_2 + 273.15°\mathrm{C} - (t_1 + 273.15°\mathrm{C}) = t_2 - t_1 = \Delta t.$$

2.2.4 Broj stupnjeva slobode – Ekviparticijski teorem

Broj stupnjeva slobode predstavlja broj načina na koji neko tijelo može *skladištiti* energiju i jednak je broju nezavisnih koordinata, kojima možemo opisati kretanje tijela ili sustava tijela.

[11] Ludwig Boltzmann (1844. – 1906.)
[12] William Thomson, kasnije baron (lord) Kelvin od Largsa (1824. – 1907.)
[13] Max Planck (1858. – 1947.), njemački fizičar, nobelovac.
[14] Anders Celsius (1701. – 1744.)

Ukupna energija neke čestice plina jednaka je zbroju njene kinetičke i potencijalne energije. Kinetičku energiju tijelo može dobiti translacijskim i/ili rotacijskim gibanjem, a potencijalnu energiju od gravitacijske sile Zemlje i međudjelovanja čestica plina. S obzirom da između čestica idealnog plina nema meuđudjelovanja, te da je masa čestica reda veličine 10^{-25} kg, potencijalna energija se može zanemariti. Ukoliko je čestica plina molekula s dva ili više atoma povezanih različitim vezama, te čestice dobivaju i energiju uslijed osciliranja atoma. Dakle, razlikujemo stupnjeve slobode uslijed translacije, rotacije i osciliranja (vibracije).

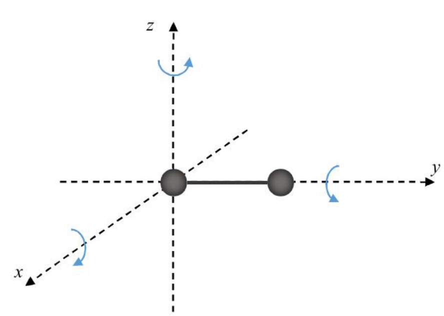
Razmotrimo sada broj stupnjeva slobode jednoatomnih čestica:

- mogu se kretati translatorno duž apscise (x-osi), ordinate (y-osi) i aplikate (z-osi), te njihovo kretanje možemo opisati s tri nezavisne koordinate. Dakle, broj stupnjeva slobode uslijed translacije je $j_T = 3$.
- mogu rotirati oko svoje osi, ali s obzirom da je njihova masa $m \approx 10^{-27}$ kg, a radijus $r \approx 10^{-15}$ m, približna vrijednost momenta inercije im je $I = \dfrac{2}{5}mr^2 \approx 0$ te je i rotacijska energija $E_r = \dfrac{I\omega^2}{2} \approx 0$. Dakle, broj stupnjeva slobode uslijed rotacije je $j_R = 0$.
- nemaju energiju uslijed osciliranja, jer ne ostvaruju veze s drugim atomima. Dakle, broj stupnjeva slobode uslijed osciliranja je $j_O = 0$.

Iz gore navedenog slijedi da je broj stupnjeva slobode jednoatomnih čestica $j_1 = j_T + j_R + j_O = 3$.

Razmotrimo sada broj stupnjeva slobode dvoatomnih molekula (čestica):

- mogu se kretati translacijski duž x-osi, y-osi i z-osi. Njihovo kretanje, kao i za jednoatomne čestice, možemo opisati s tri nezavisne koordinate. Dakle, broj stupnjeva slobode uslijed translacije je $j_T = 3$.
- mogu rotirati oko x-osi, y-osi i z-osi (slika 14), ali ako rotiraju oko osi na kojoj se nalaze oba atoma, kinetička energija uslijed rotacije oko te osi je zanemariva, zbog malih dimenzija i mase čestica (kao kod jednoatomnih). Međutim, rotacija oko preostale dvije osi nije zanemariva. Također se može reći da se uzima u obzir samo broj mogućih rotacija pri kojima se mijenja orijentacija molekule. Dakle, broj stupnjeva slobode uslijed rotacije je $j_R = 2$.
- mogu oscilirati jedna u odnosu na drugu, te njihova kinetička energija zavisi od njihove međusobne udaljenosti. Dakle, broj stupnjeva slobode uslijed osciliranja je $j_O = 1$.



Slika 14: Moguće rotacije dvoatomne molekule. Samo pri rotaciji oko y-osi i z-osi molekula mijenja svoju orijentaciju, te se samo one uzimaju u obzir pri određivanju broja stupnjeva slobode uslijed rotacije

Ipak, na osnovu gore navedenog ne možemo jednoznačno zaključiti koliki je broj stupnjeva slobode dvoatomnih čestica. Za višeatomne čestice se pokazuje da broj stupnjeva slobode ovisi i o temperaturi:

1. $T < 100$ K. $j = j_T = 3 \longrightarrow$ atomi nemaju dovoljno energije za rotiranje i osciliranje;
2. $100 \text{ K} < T < 1000$ K. $j = j_T + j_R = 5 \longrightarrow$ atomi dobiju dovoljno energije da počnu rotirati;
3. $T > 1000$ K. $j = j_T + j_R + j_O = 7 \longrightarrow$ atomi dobiju dovoljno energije da počnu oscilirati.

S obzirom da se na nastavi gotovo uvijek razmatraju plinovi u rasponu temperatura od 100 K do 1000 K, uzimat ćemo da je broj stupnjeva slobode dvoatomnih plinova $j = 5$, tj. nećemo uzimati u obzir njihovo oscilatorno kretanje.

Određivanje broja stupnjeva slobode troatomnih čestica (kao i čestica s još većim brojem atoma) je vrlo kompleksno. Pored svih gore navedenih faktora, taj broj zavisi također i o stereometriji same čestice.

Teorem 2.1 – Ekviparticijski teorem

Ekviparticijski teorem ili zakon o ekviparticiji energije kaže da je kinetička energija podjednako raspoređena po svim stupnjevima slobode, te je srednja kinetička energija jedne čestice onda određena brojem stupnjeva slobode

$$\boxed{\overline{E}_k = \frac{j}{2} k_B T}. \tag{8}$$

Dakle, kinetička energija translacijskog gibanja čestice je $\overline{E}_k = \frac{3}{2} k_B T$, odnosno na svaki stupanj slobode otpada $\frac{1}{2} k_B T$ kinetičke energije, što se podudara s gore navedenom definicijom energetske ili kinematičke temperature. Ukoliko se želi izraziti srednja ukupna energija svih čestica plina, treba voditi računa da je broj stupnjeva slobode uslijed osciliranja tada $2j_O$ zbog doprinosa potencijalne energije osciliranja.

2.2.5 Unutarnja energija i toplina

Definicija 2.1 – Unutarnja energija

Unutarnja energija nekog tijela je energija tog tijela, ali ne uračunavajući njegovu kinetičku energiju kao cjelinu i potencijalnu energiju u polju vanjske sile. Dakle, **unutarnja energija nekog tijela** je kinetička energija translacijskog, rotacijskog i oscilacijskog kretanja njegovih čestica, potencijalna energija međudjelovanja čestica, energija elektronskih ljuski u atomima i nuklearna energija. Ovakva podjela energija ima približan karakter jer jedan oblik energije može prijeći u drugi. U našem razmatranju zanemarit ćemo posljednja dva oblika energije, tako da je unutarnja energija suma kinetičkih i potencijalnih energija čestica sustava

$$U = \sum_i E_{k_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} E_{p_{i,j}},$$

pri čemu je uzeta $\frac{1}{2}$ potencijalnih energija, jer se pri sumiranju javlja potencijalna energija i-te i j-te čestice $E_{i,j}$, te j-te i i-te čestice $E_{j,i}$, a radi se o istoj energiji. Zbog toga je ukupna potencijalna energija polovina sume svih potencijalnih energija. Kod najjednostavnijeg termodinamičkog sustava, tj. kod idealnog plina, međudjelovanje čestica se zanemaruje pa je unutarnja energija suma kinetičkih energija čestica plina

$$U = \sum_i E_{k_i}.$$

Definicija 2.2 – Toplina

Toplina je onaj iznos unutarnje energije koji se prenese s toplijeg tijela na hladnije. Mjerna jedinica topline je džul (J). Dakle, toplina nije svojstvo sustava, niti je funkcija stanja sustava. Ona zavisi od procesa promjene tog stanja. To znači da treba dovesti različite količine topline da sustav prijeđe iz jednog stanja u drugo, ukoliko se taj prijelaz vrši na različite načine.

Količina topline potrebna da se zagrije neko tijelo mase m za ΔT proporcionalna je masi tijela i promjeni temperature tijela,

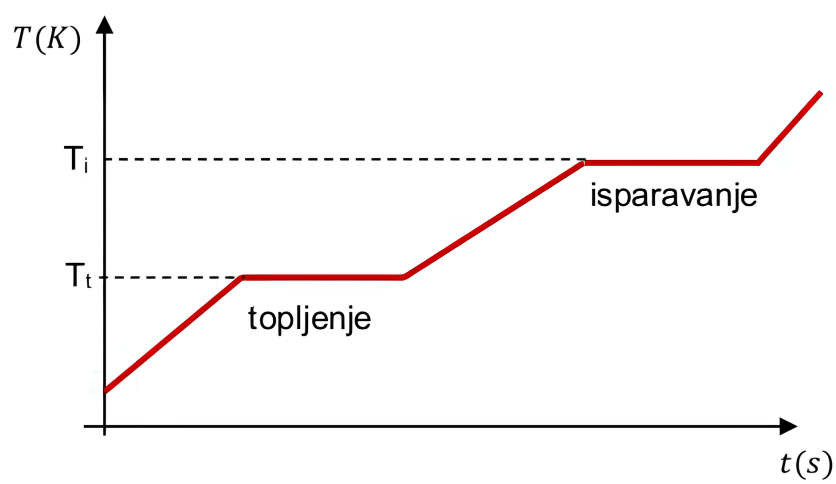
$$\boxed{Q = mc\Delta T = mc(T_2 - T_1)}, \tag{9}$$

pri čemu je koeficijent proporcionalnosti c **specifični toplinski kapacitet** ili specifična toplina te on ovisi o vrsti tijela. Mjerna jedinica mu je $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}$. Definira se kao količina topline koju je potrebno dovesti jednom kilogramu mase da joj se temperatura promijeni za jedan kelvin. Umnožak $mc = C$ predstavlja **toplinski kapacitet** nekog tijela. Mjerna jedinica mu je $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$. Možemo reći da je toplinski kapacitet jednog kilograma mase tvari u stvari specifični toplinski kapacitet. Iz jednadžbe (9) se može zaključiti da količina topline može biti pozitivna i negativna. Kad je $Q > 0$ znači da tijelo prima toplinu, a kad je $Q < 0$ tijelo emitira toplinu.

2.2.6 Fazni prijelazi

U termodinamici je **faza** skup homogenih dijelova sustava, jednakih po svojim osobinama. Na primjer, ako u zatvorenoj posudi imamo vodu, a iznad nje smjesu zraka i vodene pare, znači da imamo sustav koji se sastoji od dvije faze: voda i smjesa zraka i vodene pare. Ako se u vodu doda led, onda on čini treću fazu. Razne kristalne modifikacije jednog tijela također predstavljaju razne faze, npr. grafit i dijamant. Ravnoteža dviju faza, koje se međusobno dodiruju, je moguća samo u određenom temperaturnom intervalu, kojem odgovara određena vrijednost pritiska. Trojna točka je određena vrijednost temperature i pritiska, na kojoj mogu sve tri faze iste tvari (čvrsta, tekuća i plinovita) biti u ravnoteži. Prijelaz iz jedne faze u drugu obično je popraćen apsorpcijom ili otpuštanjem određene količine topline, koja se naziva **latentna toplina**, a takvi prijelazi se nazivaju fazni prijelazi prve vrste (isparavanje, kondenzacija, taljenje, kristalizacija (skrućivanje)).

U tekućinama i čvrstim tijelima na svakoj temperaturi postoje molekule čija je energija dovoljna da savladaju privlačenje drugih molekula, napuste površinu tekućine ili čvrstog tijela i prijeđu u plinsko stanje. Prijelaz tvari iz tekućeg u plinovito agregacijsko stanje naziva se **isparavanje**, a prijelaz čvrstog tijela u plinovito stanje **sublimacija**. Pri isparavanju i sublimaciji tijelo napuštaju najbrže molekule, uslijed čega se srednja energija preostalih molekula smanjuje i tijelo se hladi. Kako bi se temperatura tijela koje isparava održala konstantnom, treba mu neprestano dovoditi toplinu. Specifična toplina isparavanja se mjeri eksperimentalno, a najjednostavnija su kalorimetrijska mjerenja. Suprotan proces isparavanju je **kondenzacija**. Toplina potrošena pri procesu isparavanja predaje se pri kondenzaciji.



Slika 15: Grafički prikaz promjene temperature tijela u vremenu, ukoliko mu se svake sekunde dovodi toplina. Temperatura se ne mijenja dok se faza sustava ne promijeni.

Definicija 2.3 – Promjena agregacijskog stanja

Toplina koju treba predati kilogramu tijela da prijeđe u plin koji se nalazi na istoj temperaturi koju je imao kilogram tijela naziva se **specifična (latentna) toplina isparavanja**, r. Prijelaz čvrstog tijela u tekuće agregacijsko stanje događa se za svako tijelo na određenoj temperaturi, pri čemu se utroši određena količina topline koja se naziva **specifična (latentna) toplina taljenja**, λ. Očvršćivanje (skrućivanje) je suprotan proces taljenju. Toplina potrebna da se tijelo mase m dovede iz jedne faze u drugu pri specifičnoj toplini faznog pri specifičnog toplini faznog prijelaza q ($q = \lambda$ ili $q = r$) jednaka je

$$\boxed{Q = mq}.$$

Ako se tijelu svake sekunde dovodi ista količina topline, promjena temperature izgleda kao na slici 15. Temperatura tijela raste osim kad ono mijenja fazu, tj. dok se tijelo u potpunosti ne otopi ili tekućina ne ispari, temperatura ostaje konstantna.

2.2.7 Širenje čvrstih tijela

U čvrstom tijelu čestice se nalaze na vrlo maloj udaljenosti i osciliraju oko svog ravnotežnog položaja. Zagrijavanjem tijela brzina čestica se povećava te se one sve više međusobno udaljavaju. Ta udaljavanja su vrlo mala, ali uzimajući u obzir ogroman broj čestica ta mala pomicanja svake čestice ipak dovode do promjene dimenzija samog tijela. Pokazuje se da je ta promjena linearna funkcija temperature, u određenom temperaturnom intervalu. Razlikujemo linearno, površinsko i volumno (obujmno) širenje, zavisno od toga promatra li se promjena jedne, dvije ili sve tri dimenzije nekog tijela.

Teorem 2.2 – Linearno širenje tijela

Ako zagrijavamo neku šipku možemo smatrati da se radi o **linearnom širenju** jer je poprečni presjek šipke zanemariv u odnosu s njenom duljinom. Promjena duljine proporcionalna je promjeni temperature (naravno u određenom temperaturnom intervalu),

$$\Delta l = l_2 - l_1 \sim \Delta t.$$

Produljenje tijela također ovisi i o početnoj duljini tijela l_1, te se zbog toga uzima u obzir relativna promjena dužine, koja je također proporcionalna temperaturi

$$\frac{\Delta l}{l_1} = \alpha \Delta t,$$

gdje je koeficijent proporcionalnosti α **termički koeficijent linearnog širenja** i ima mjernu jedinicu K^{-1}. Gornja jednadžba se može napisati i kao

$$\boxed{l_2 = l_1[1 + \alpha(t_2 - t_1)]}, \tag{10}$$

pri čemu je l_1 duljina šipke na temperaturi t_1, a l_2 duljina na temperaturi t_2.

Teorem 2.3 – Površinsko širenje tijela

Promjena površine tanke ploče uslijed zagrijavanja predstavlja **površinsko širenje** jer smatramo da je debljina ploče puno manja od ostale dvije dimenzije. Analogno linearnom širenju, i promjena površine ploče je također proporcionalna promjeni temperature u određenom temperaturnom intervalu,

$$\frac{\Delta S}{S_1} = \beta \Delta t,$$

odnosno

$$\boxed{S_2 = S_1[1 + \beta(t_2 - t_1)]}, \tag{11}$$

pri čemu je $\beta = 2\alpha$ **termički koeficijent površinskog širenja**, S_1 površina na temperaturi t_1, a S_2 površina na temperaturi t_2.

Teorem 2.4 – Volumno širenje tijela

Volumno širenje predstavlja promjenu volumena tijela, ali i fluida, uslijed zagrijavanja. U određenom temperaturnom intervalu to širenje je također proporcionalno temperaturi,

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \gamma \Delta t,$$

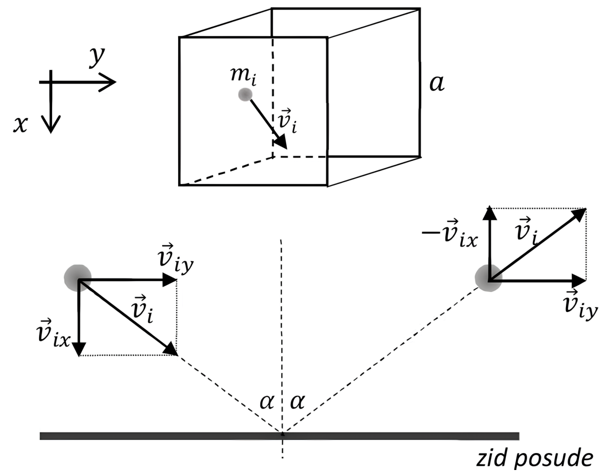
odnosno

$$\boxed{V_2 = V_1[1 + \gamma(t_2 - t_1)]}, \tag{12}$$

pri čemu je $\gamma = 3\alpha$ **termički koeficijent volumnog širenja**, V_1 volumen na temperaturi t_1, a V_2 volumen na temperaturi t_2. Treba napomenuti da se plinovi i tekućine uvijek šire volumno, bez obzira na oblik posude u kojoj se nalaze. Za širenje plinova pri konstantnom pritisku koeficijent volumnog širenja je isti za sve plinove i iznosi $\frac{1}{273.15}\mathrm{K}^{-1}$.

2.2.8 Idealan plin

Najjednostavniji se termodinamički sustav može opisati samo s tri parametra, tlaka, volumena i temperature. Takav sustav je idealan plin. Takvom plinu možemo zanemariti volumen njegovih čestica (atoma, molekula, iona) i njihovo međudjelovanje. Jedini oblik interakcije između čestica plina su njihovi međusobni elastični sudari. Ti sudari se vrlo rijetko događaju tako da se čestice idealnog plina mogu smatrati slobodnim česticama. Iako je idealan plin apstrakcija, dovoljno razrijeđeni plinovi su vrlo bliski idealnom plinu (npr. zrak pri sobnoj temperaturi i atmosferskom tlaku), te je zbog toga njegovo proučavanje značajno.



Slika 16: U posudi oblika kocke, stranice a, nalazi se idealan plin. Proizvoljna čestica mase m_i kreće se brzinom v_i i sudara se sa zidom posude, pri čemu se mijenja samo komponenta brzine koja je okomita na zid.

2.2.9 Jednadžba stanja idealnog plina

Prema molekularno-kinetičkoj teoriji je tlak koji plin stvara na zidove posude u kojoj se nalazi rezultat sudara čestica sa zidovima posude. Prilikom sudara čestice predaju posudi određenu količinu gibanja u nekom vremenskom intervalu, tj. djeluju nekom silom na zidove posude. Tlak plina predstavlja upravo tu silu kojom on djeluje na jediničnu površinu posude, okomito na nju. Kako bi odredili o čemu ovisi taj tlak, potrebno je imati u uvidu neke pretpostavke:

- idealan plin se sastoji od ogromnog broja čestica, koje su međusobno udaljenje na udaljenosti mnogo veće od njihove veličine (razrijeđeni plinovi)
- sudari čestica plina s drugim česticama i sa zidovima posude u kojoj se nalaze su potpuno elastični (ne mijenja se količina gibanja i kinetička energija čestice);
- čestice plina se konstantno kreću pri čemu ijedan smjer kretanja nije vjerojatniji od drugog, tj. čestice se kreću u svim pravcima podjednako.

Neka se u posudi oblika kocke stranica a nalazi N čestica idealnog plina. Promotrimo jednu česticu mase m_i koja se kreće brzinom $\vec{v_i}$ po proizvoljnom pravcu. Prema uvedenoj pretpostavci, ona se elastično sudara sa zidom posude i mijenja pravac kretanja kao što je prikazano na slici 16. Dakle, brzina čestice ne mijenja svoj iznos pri sudaru te zatvara isti kut sa zidom (kao i s vertikalom u odnosu na zid) prije i poslije sudara. Dolazi samo do promjene komponente brzine koja je okomita na zid posude, pri čemu se ta promjena očituje samo u promjeni smjera (tj. u promjeni predznaka). Impuls sile koji jedna čestica preda zidu posude nakon sudara je

$$\Delta p_{ix} = m_i v_{ix} - (-m_i v_{ix}) = 2 m_i v_{ix}.$$

Obzirom da kod idealnog plina nema međudjelovanja čestica, čestica se kreće ravnomjerno pravocrtno između dva sudara, što znači da će se sudar čestice s istom površinom dogoditi opet nakon vremena

$$\Delta t = \frac{s}{v_{ix}} = \frac{2a}{v_{ix}}$$

(čestica će poslije prvog sudara otići do druge stranice kocke i nazad, što znači da će prijeći put koji iznosi dvije dužine stranice kocke). Dijeljenjem zadnje dvije jednadžbe dobivamo silu kojom promatrana čestica djeluje okomito na zid posude površine S,

$$F_i = \frac{\Delta p_{ix}}{\Delta t} = \frac{m_i v_{ix}^2}{a}.$$

Sila kojom bi sve molekule udarale u zid posude se dobije sumiranjem[15] po svim česticama,

$$F = \sum_{i=1}^{N} F_i = \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{N} m_i v_{ix}^2.$$

Ukoliko masu jedne čestice m_i napišemo preko mase plina u posudi m i boja posuda N kao $m_i = \frac{m}{N}$ slijedi da je

$$F = \frac{m}{Na} \sum_{i=1}^{N} v_{ix}^2.$$

U stanju toplinske ravnoteže, pritisak na sve zidove posude je isti, tj. svi pravci su jednako vjerojatni, što znači da su komponente brzina u svim pravcima iste. Tada vrijedi da je

$$v_i = v_{ix}^2 + v_{iy}^2 + v_{iz}^2 = 3v_{ix}^2,$$

i

$$F = \frac{m}{3Na} \sum_{i=1}^{N} v_i^2.$$

S obzirom da su za makroskopske veličine važne srednje vrijednosti, srednja kvadratna brzina kretanja svih molekula je

$$\overline{v^2} = \frac{\sum_{i=1}^{N} v_i^2}{N}.$$

Konačno se za silu kojom čestice plina djeluju okomito na zid posude dobiva

$$F = \frac{m}{3a}\overline{v^2}.$$

Sada se može izraziti tlak plina na zidove posude kao

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m}{3Sa}\overline{v^2} = \frac{m}{3V}\overline{v^2}, \tag{13}$$

gdje je $V = Sa$ volumen promatrane kocke (posude).

[15]Zapravo mi nije palo napamet da neki od vas ne znaju što je sumiranje. Pogledajte ovaj link: https://en.wikipedia.org/wiki/Summation.

Teorem 2.5 – Jednadžba stanja idealnog plina

Srednju brzinu kretanja čestica ćemo sada povezati s temperaturom plina po ekviparticijskom teoremu za jednoatomne čestice. Već je od ranije poznato da je srednja kinetička energija svih čestica plina koje vrše translacijsko gibanje u tri dimenzije jednaka

$$\overline{E}_k = \frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}Nk_BT,$$

što uvrštavanjem u jednadžbu (13) daje

$$p = \frac{Nk_BT}{V},$$

odnosno

$$\boxed{pV = Nk_BT}, \tag{14}$$

što predstavlja **jednadžbu stanja idealnog plina**. Analizirajući jednadžbu (14) može se zaključiti da jednaki volumeni različitih plinova pri jednakom tlaku i temperaturi imaju jednak broj čestica (jer je $\frac{pV}{T} = Nk_B$). Taj zaključak predstavlja **Avogadrov zakon**. Dakle, broj molekula u određenom volumenu ne ovisi o njihovoj veličini ili masi. Ukoliko sada izrazimo broj čestica plina preko količine molova i Avogadrove konstante kao $N = nN_A$, jednadžba stanja postaje

$$\boxed{pV = nRT},$$

pri čemu je uvedena nova konstanta $R = k_BN_A = 8,314\frac{\text{J}}{\text{mol K}}$ koja se naziva **opća plinska konstanta**.

Definicija 2.4 – Koncentracija

Broj nekih jedinki (u slučaju plina su to njegove čestice) u jedinici volumena

$$c = \frac{N}{V}$$

predstavlja njihovu **koncentraciju** i izražava se u m^3. Jednadžba stanja idealnog plina se onda može izraziti i preko koncentracije čestica plina u promatranom volumenu kao

$$p = ck_BT.$$

Ukoliko se idealan plin nalazi na standardnom atmosferskom tlaku od 101325Pa i temperaturi 0°C = 273.15K), volumen jednog mola tog plina će biti

$$V_m = \frac{nRT}{p} = 2,241 \cdot 10^{-2}\,\frac{\text{m}^3}{\text{mol}}$$

i naziva se **normirani molarni volumen idealnog plina**. Količina tvari se sada može izraziti i preko volumena tvari V kao

$$n = \frac{V}{V_m}.$$

Kad se u nekoj hermetički zatvorenoj posudi nalazi smjesa plinova, tada se jednadžba stanja može napisati kao

$$pV = (N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + \cdots)k_B T,$$

gdje je $N_i (i = 1, 2, 3, 4, \dots)$ broj čestica jedne komponente smjese. Dijeljenjem gornje relacije s V slijedi da je

$$p = \frac{N_1 k_B T}{V} + \frac{N_2 k_B T}{V} + \frac{N_3 k_B T}{V} + \cdots = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$$

što znači da je *tlak smjese plinova koji kemijski ne međudjeluju jednak sumi parcijalnih tlakova koji potiču od svih komponenti smjese.* Ovo predstavlja **Daltonov zakon**.

2.2.10 Dodatni sadržaj: Van der Waalsova jednadžba stanja realnog plina

Kako bi opisali neki realni plin, potrebno je uvesti korekciju za tlak i volumen u jednadžbu stanja idealnog plina. Korekcija za tlak se uvodi zbog kohezijskih sila. Naime, tlak se mjeri na zidu posude u kojoj se nalazi plin, a tu je tlak manji jer su kohezijske sile slabije. Korekcija volumena je potrebna zbog činjenice da se volumen čestica plina ipak ne može zanemariti. Uzimajući sve rečeno u obzir jednadžba stanja realnog plina glasi

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - bn) = nRT$$

i naziva se van der Waalsova[16] jednadžba. Koeficijent a je koeficijent koji ovisi o kohezijskim silama, a koeficijent b predstavlja prazan prostor između čestica koje se aproksimiraju kao sfere.

2.3 Termodinamika

Prije ovog potpoglavlja smo proučavali raspodjelu energije unutar sustava bez promjene volumena. Sva toplina dovedena ili odvedena iz sustava mijenjala je unutarnju energiju. Dopustimo li da promatrani sustav mijenja volumen, dio energije pretvorit će se u rad.

2.3.1 Nulti zakon termodinamike

Vidjeli smo da su dva sustava A' i A'' u toplinskoj ravnoteži ako su im temperature jednake, tj. $T' = T''$. Intuitivno nam je vrlo prihvatljiv, ali zbog dosadašnjeg preciznog formalizma ćemo iskazati **nulti zakon termodinamike**:

Ako je tijelo A u toplinskoj ravnoteži s tijelom B, a tijelo B u toplinskoj ravnoteži s tijelom C, onda su i tijela A i C u toplinskoj ravnoteži.

Posljedice ovog zakona su:

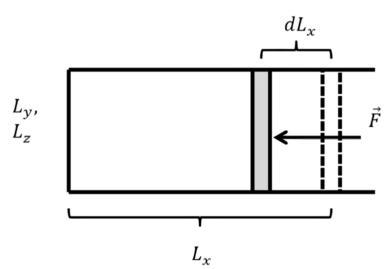
- tijelo je u toplinskoj ravnoteži sa svim tijelima iste temperature;
- toplinskom ravnotežom određujemo stanje tijela;
- temperatura tijela ovisi samo o stanju tijela, a ne o odnosu s drugim tijelima.

[16] Johannes Diderik van der Waals (1837. – 1923.) – nizozemski teorijski fizičar i termodinamičar, nobelovac

Toplinski spremnik
Pretpostavimo da je u gornjim primjerima jedan sustav mnogo veći od drugoga, tj. $A'' \gg A'$. To znači da je u pravilu i ukupna energija prvog sustava mnogo manja od ukupne energije drugog sustava ($E' \ll E''$). Ako oni nemaju jednake temperature, dovedemo li ih u kontakt doći će do izmjene energije među njima – prenijet će se energija ΔE. U sustavu A' relativna promjena energije $\dfrac{\Delta E}{E'}$ je velika, a u sustavu A'' relativna promjena energije $\dfrac{\Delta E}{E''}$ je zanemariva. Dakle, temperatura sustava A'' se neće promijeniti, a temperatura sustava A' će se izjednačiti s temperaturom sustava A''. U takvom slučaju kažemo da je sustav A'' *toplinski spremnik*. Moramo naglasiti da u ovoj konfiguraciji energija sustava A' nije sačuvana. Sustav A' nije zatvoreni sustav, već prima ili predaje energiju toplinskom spremniku.

2.3.2 Rad prilikom promjene volumena

Prisjetimo se da je rad definiran kao djelovanje sile na nekom putu. Sustav kojemu se ne mijenja dimenzija ne može obavljati rad – za rad je nužna promjena volumena. Kao primjer promotrimo neki plin u posudi s pomičnim klipom kao na slici 2.3.2. Neka su poprečne dimenzije posude L_y i L_z nepromjenjive, a vanjska sila može pomicati klim mijenjajući duljinu posude L_x.



Rad koji sila F nepromjenjivog iznosa obavi mijenjajući L_x za ΔL_x iznosi

$$W = -F\Delta L_x.$$

U primjeru koji promatramo promjena duljine je negativna ($\Delta L_x < 0$), a rad vanjske sile koji to uzrokuje definiran je tako da bude pozitivan. Ovo će biti općeniti dogovor: Ako vanjska sila obavlja rad nad našim sustavom, taj rad smatramo pozitivnim. Ako naš sustav obavlja rad nad okolinom, taj rad smatramo negativnim. Budući da za tlak p i promjenu volumena ΔV možemo pisati

$$p = \frac{F}{L_y L_z} \quad ; \quad \Delta V = L_y L_z \Delta L_x,$$

relaciju $W = -F\Delta L_x$ možemo pisati kao

$$\boxed{W = -p\Delta V}.$$

Treba napomenuti da je ovdje važan tlak u sustavu tik uz klip, što ne mora uvijek biti i prosječni tlak cijelog sustava.

Ako je sustav toplinski izoliran, ali može izmjenjivati rad s okolinom, promjena (unutarnje) energije sustava bit će jednaka radu, $U = W$.

2.3.3 Prvi zakon termodinamike

Ako sustav može s okolinom izmjenjivati i toplinu i rad, ukupna promjena energije sustava bit će

$$\boxed{Q = W + \Delta U} \tag{15}$$

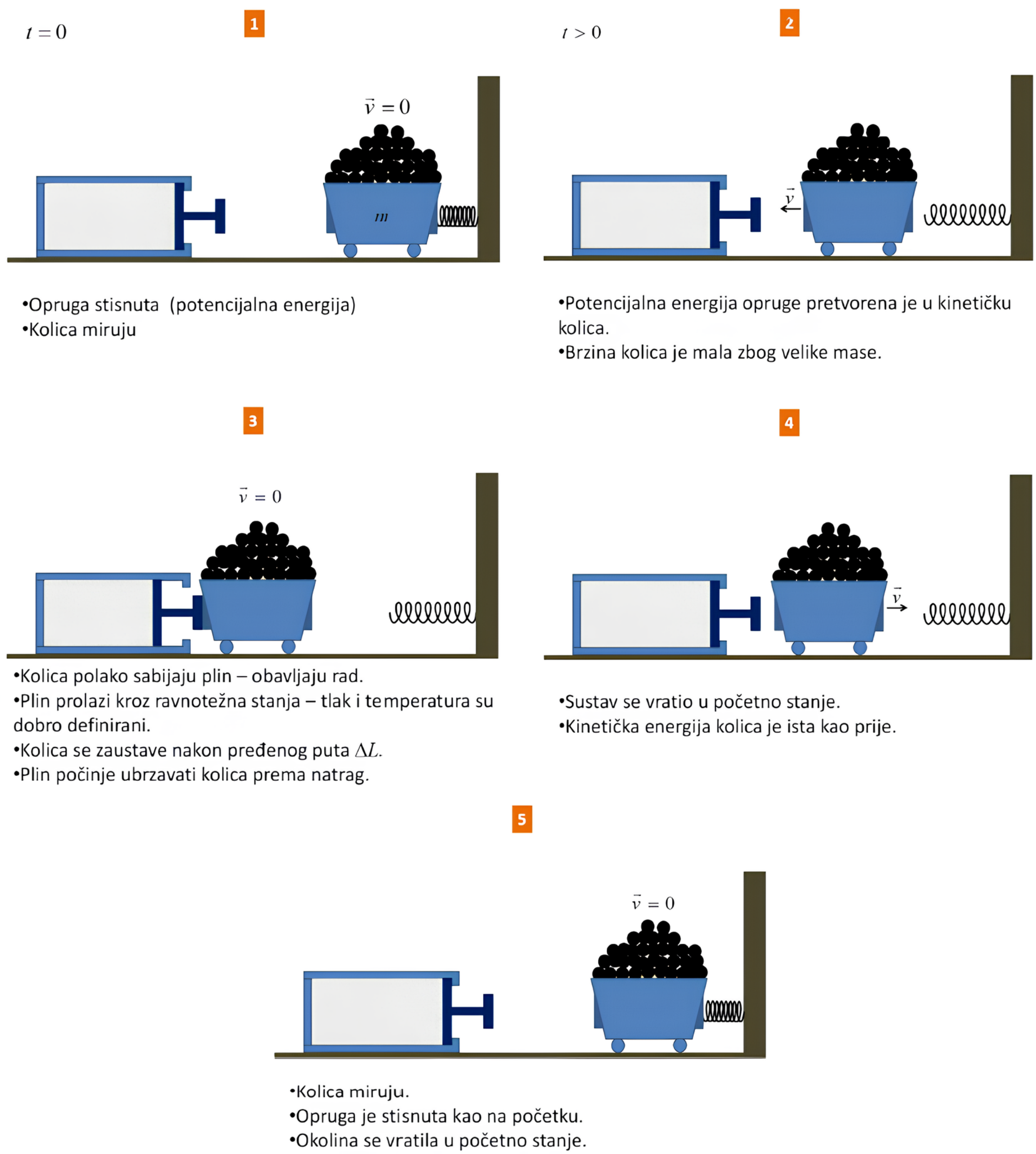
Relacija (15) je iskaz **prvog zakona termodinamike**. To je u stvari zakon očuvanja energije koji kaže da će promjena (unutarnje) energije biti jednaka zbroju dovedene topline i rada uloženog u sustav. Odavde slijedi i dogovor o predznacima – ako se sustavu dovodi toplina i u njega ulaže rad, onda će Q i W biti pozitivne veličine, tj. povećavat će se energija sustava. Ako pak sustav predaje toplinu okolini ili obavlja rad nad okolinom, onda će Q i W biti negativne veličine, tj. smanjivat će se unutarnja energija sustava.

2.3.4 Gotovo ravnotežni procesi

Za bolje razumijevanje termodinamičkih procesa korisno je uvesti idealizaciju *gotovo ravnotežnih procesa*. To su procesi u kojima je sustav u svakom trenutku praktično u stanju unutarnje ravnoteže, tj. temperatura je jednaka u svakom djeliću sustava u nekom trenutku, a isto vrijedi i za tlak. Kako bi proces bio gotovo ravnotežan, mora se odvijati dovoljno sporo kako bi sustav u svakom trenutku mogao pratiti promjene temperature i tlaka. Općenito uvodimo pojam relaksacijskog vremena u nekom sustavu, kao mjeru za uspostavu ravnotežnog stanja u sustavu nakon vanjske promjene tlaka ili temperature. Relaksacijsko vrijeme može u nekim sustavima i procesima biti reda veličine milisekunde, a u nekima to mogu biti sati ili dani. Zaključimo, gotovo ravnotežni procesi su oni koji se događaju sporo na skali karakterističnog relaksacijskog vremena za dani sustav i dani proces.

Jedno od bitnih svojstava ravnotežnih procesa je da su **reverzibilni**. Za neki kružni proces reći ćemo0 da je reverzibilan ako se sustav na kraju ciklusa vrati u prvobitno stanje, ali se i okolina mora vratiti u prvobitno stanje. U takvom procesu sustav prolazi kroz niz gotovo ravnotežnih stanja, što znači da u svakom trenutku možemo za sustav definirati varijable stanja (temperaturu, tlak, volumen, energiju, entropiju itd.)

Radi bolje predodžbe o jednom reverzibilnom kružnom procesu razmotrimo slučaj plina kao promatranog sustava u izoliranoj posudi s pomičnim klipom, te natovarenih kolica i elastične opruke kao okoline. Pojedini stupnjevi u procesu prikazani su na slici 17.



Slika 17: Primjer gotovo ravnotežnog procesa.

Za reverzibilni kružni proces uvijek vrijedi

$$\Delta E = 0.$$

2.3.5 Entropija

Rudolf Clausius je 1865. godine razvio koncept entropije kako bi se moglo i računski dokazati koji su procesi mogući ili nisu. **Entropija** predstavlja analitičku formulaciju drugog zakona termodinamike. Clausius je entropiju definirao kao fizikalnu veličinu koja opisuje promjenu stanja termodinamičkog sustava. Entropija se označava sa S, a kako nas u termodinamici primarno zanima promjena entropije, nju ćemo označavati sa ΔS. Pomoću vrijednosti promjene entropije može se zaključiti je li riječ o mogućem ili nemogućem termodinamičkom procesu.

Definicija 2.5 – Promjena entropije

Promjena entropije definira se izrazom

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}, \tag{16}$$

pri čemu je ΔQ razlika topline koju sustav izmjenjuje s okolinom, a T temperatura sustava. Mjerna jedinica za entropiju jest $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$.

Kad se entropija sustava ne mijenja, tada je $\Delta S = 0$ i govorimo o ravnotežnim procesima. Kod ireverzibilnih procesa vrijedi $\Delta S > 0$. U stvarnosti su prisutni samo ireverzibilni procesi, tako da se entropija stalno povećava. Procesi u kojima je entropija stalna nisu mogući.

Entropija je jedan od najsloženijih pojmova u znanosti o toplini. Ponekad se o entropiji govori kao mjeri koja opisuje uređenost, odnosno neuređenost sustava. Ako entropiju čitatelj doživljava kao apstraktan i nedohvatljiv pojam, autor preporuča gledanje videa na ponuđenom linku (*The Most Misunderstood Concept in Physics*, `https://youtu.be/DxL2HoqLbyA?si=tZso7XmalxkLNwQ-`).

2.3.6 Termodinamička ravnoteža

U prethodnim poglavljima razmatrali smo toplinsku ravnotežu. Ona se postiže kada dva tijela izjednače temperature. Tada nismo dopuštali da sustavi mijenjaju volumene. Sada ćemo dopustiti da sustavi mogu međusobno izmjenjivati i toplinu i rad. Pogledajmo primjer na slici **??**. Neka su sustavi A' i A'' međusobno povezani pomičnim klipom načinjenim od materijala koji dobro prenosi toplinu. Među sustavima djeluju sile, a moguć je i prijenos topline. Kažemo da postoji *termodinamičko međudjelovanje*. Neka su sustavi izolirani od vanjskog svijeta, tj. nije moguće dovođenje ili odvođenje topline, niti promjena ukupnog volumena. Ako sustavi u trenutku spajanja nisu bili u ravnoteži, doći će do pomicanja klipa i do prijenosa topline kroz klip. Ravnotežno stanje dvaju sustava je ono koje je najvjerojatnije (koje ima najveći broj dostupnih mikroskopskih stanja). To je stanje u kojem su izjednačene temeprature dvaju sustava $T' = T''$, ali i tlakovi u njima, $p' = p''$. Tada kažemo da je postignuta *termodinamička ravnoteža*.

Proces postizanja termodinamičke ravnoteže je neravnotežan proces u kojem ukupna entropija poraste,

$$\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' > 0.$$

2.3.7 Drugi zakon termodinamike

Ovaj fascinantan i iznimno važan zakon glasi:

Termodinamički procesi odvijaju se uvijek tako da entropija ukupnog sustava poraste, odnosno $\boxed{\Delta S > 0}$.

Ovaj zakon nam kaže da će ukupni sustav uvijek težiti postizanju makroskopskog stanja najveće vjerojatnosti. Kada bismo imali gotovo ravnotežne procese, moglo bi vrijediti $\Delta S = 0$, međutim, takvi procesi ne postoje. Procesi vrste opisanog na slici 17 su idealizacija i ne postoje u stvarnosti. Podsjetimo se da je prvi zakon termodinamike samo iskaz zakona očuvanja energije. Međutim, drugi zakon termodinamike nam govori o smjeru u kojem se zbivaju procesi.

Povijesno je drugi zakon termodinamike bio formuliran na razne načine. Spomenuti ću dva iskaza koja fenomenološki formuliraju taj isti zakon. Max Planck je drugi zakon termodinamike formulirao riječima: "Nemoguće je konstruirati stroj koji bi u kružnom procesu prouzrokovao samo dizanje utega i hlađenje spremnika." Još je jasnija formulacija koju je izrekao lord Kelvin: "Nemoguće je hlađenjem najhladnijeg spremnika dobiti mehanički rad." Nažalost, ovaj zakon je neumoljiv. Kad bi ga se moglo prevladati, mogli bismo ogromne količine topline koje su spremljene u svjetskim oceanima upotrijebiti za pogon brodova koji po njima plove. Prvi zakon termodinamike ne bi nam priječio da neznatno snizimo temperaturu mora i tako dobivenu energiju upotrijebimo za pokretanje brodskih propelera. Međutim, drugi zakon termodinamike nam kaže da procesi ne mogu spontano ići u tom smjeru. Takav stroj nije moguć. Njemački kemičar Wilhelm Ostwald formulirao je drugi zakon termodinamike riječima "Perpetuum mobile druge vrste nije moguć". Kakvi strojevi koji pretvaraju toplinu u rad su mogući?

Mogući strojevi

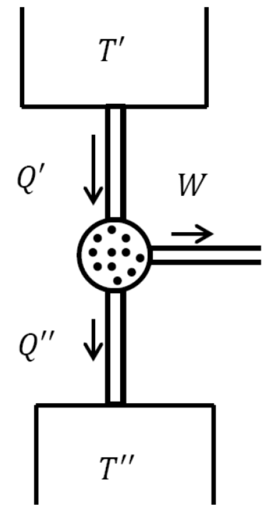
a) Ako imamo djelatnu tvar (koja ima ulogu stroja) i samo jedan toplinski spremnik, moguće je dobiti rad tako što će stroj preuzimati toplinu iz spremnika i volumnom ekspanzijom obavljati rad. Međutim, ako želimo imati kružni proces, na kraju procesa stroj mora imati isti volumen kao na početku. Stoga u drugom dijelu procesa moramo uložiti rad kako bismo smanjili volumen stroja i pri tome vraćamo toplinu spremniku. Ako je proces bio gotovo ravnotežan, na kraju će ukupni dobiveni rad biti nula. U idealnom slučaju takav stroj je moguć, ali je *beskoristan*[17].

b) kako bismo u kružnom procesu mogli dobiti *koristan* rad, moramo imati *dva toplinska spremnika* različitih temperatura T' i T''. Neka u sklopu jednog ciklusa stroj primi toplinu $Q' > 0$ od spremnika na T', preda $Q'' < 0$ spremniku na T'' i obavi koristan rad $W < 0$ nad okolinom[18]. Tražimo da stroj na kraju ciklusa ima istu unutarnju energiju kao na početku, tj. $\Delta E = 0$. Prvi zakon termodinamike nam daje $\Delta E = Q' + Q'' + W = 0$. Ako u obzir uzmemo predznake, dobivamo

$$|W| = Q' + |Q''|.$$

[17] U stvarnosti ne postoje ravnotežni procesi pa bismo u ovakvom stroju morali više rada uložiti prilikom kompresije nego što dobijemo prilikom ekspanzije. Bili bismo na gubitku.

[18] Razlika uloženog i dobivena rada mora biti manja od nula.



Vidimo da je koristan rad moguće dobiti ako je stroj primio više topline nego što je predao. Pogledajmo je li to moguće a da ne kršimo suvremenu formulaciju drugog zakona termodinamike prema kojem ukupna entropija u procesu mora porasti ($\Delta S > 0$). Pogledajmo odvojeno entropije dvaju spremnika i stroja. Prvi spremnik gubi toplinu $-Q' < 0$ pa mu se entropija smanji $\Delta S' = \dfrac{-Q'}{T'} < 0$. Drugi spremnik dobiva toplinu $|Q''| > 0$ pa mu entropija poraste $\Delta S'' = \dfrac{|Q''|}{T''} > 0$. Stroj se vrati u početno stanje pa mu je entropija na kraju ciklusa jednaka kao na početku. Prema tome, da bi drugi zakon termodinamike bio zadovoljen, mora vrijediti

$$\Delta S' + \Delta S'' = \frac{-Q'}{T'} + \frac{|Q''|}{T''} > 0,$$

odnosno

$$\frac{Q'}{|Q''|} < \frac{T'}{T''}. \tag{17}$$

Budući da prema izrazu $|W| = Q' + |Q''|$ za dobivanje korisnog rada mora vrijediti $Q' > |Q''|$, onda je jasno da mora biti $T' > T''$, tj. spremnik od kojeg stroj uzima toplinu mora biti topliji od spremnika kojemu stroj predaje toplinu[19].

Napomenimo da se *dio topline mora predati hladnijem spremniku*, tj. $|Q''| > 0$. Kada bismo željeli postići da ne moramo predati toplinu drugom spremniku ($|Q''| = 0$), entropija hladnijeg spremnika ne bi se promijenila ($\Delta S'' = \dfrac{|Q''|}{T''} = 0$) pa bi ukupna promjena entropije u procesu bila negativna ($\Delta S = \Delta S' = \dfrac{-Q'}{T'} < 0$), što bi bilo u suprotnosti s drugim zakonom termodinamike. Uočimo da je toplina koju moramo predati hladnijem spremniku to manja što je njegova temperatura T'' niža.

[19]Ovaj zaključak vrijedio bi čak i u slučaju da je promatrani kružni proces gotovo ravnotežan. U tom slučaju bi u relaciji (17) umjesto znaka nejednakosti stajao znak jednakosti, ali zbog $Q' > |Q''|$ i dalje mora vrijediti $T' > T''$.

Definicija 2.6 – Koeficijent iskorištenja

Koeficijent iskorištenja toplinskog stroja definiramo kao omjer korisnog rada i topline uzete iz toplijeg spremnika,

$$\boxed{\eta = \frac{|W|}{Q'} = \frac{Q' - |Q''|}{Q'} = 1 - \frac{|Q''|}{Q'}}.$$

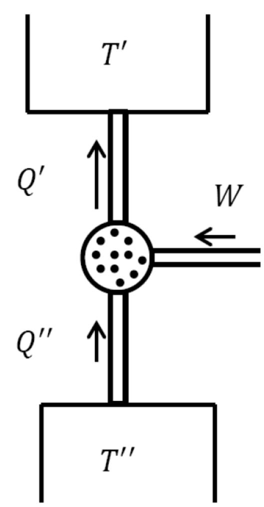
U slučaju gotovo ravnotežnog procesa vrijedilo bi $\boxed{\eta = 1 - \frac{T''}{T'}}$, međutim stvarni procesi ikad nisu idealno ravnotežni pa zbog nejednakosti (17) uvijek vrijedi

$$\eta < 1 - \frac{T''}{T'}.$$

Uočimo da je korisnost (η) to veća što je veći omjer temperatura toplijeg i hladnijeg spremnika $\frac{T'}{T''}$.

Hladnjak

Drugi zakon termodinamike nam kaže i da toplina ne može spontano prelaziti s hladnijeg tijela na toplije. Da bismo hladniji spremnik ohladili tako da toplina prijeđe na topliji spremnik, moramo uložiti vanjski rad. takav stroj nazivamo hladnjakom. Zamislimo da postoji kružni proces u kojem toplina koju uzimamo hladnijem spremniku prelazi na topliji spremnik bez neto uloženog vanjskog rada (tj. $Q' = -Q'' > 0$). Tada bi promjena entropije sustava bila $\Delta S = \Delta S' + \Delta S'' = \frac{Q'}{T'} - \frac{Q''}{T''} < 0$, u suprotnosti s drugim zakonom termodinamike. Prema tome, mora biti $Q' > |Q''|$, a tu razliku možemo postići vanjskim radom hladnjaka $W > 0$.
Hladnjak radi na principu obrnutom od toplinskog stroja, kako je prikazano na slici dolje.



2.3.8 Treći zakon termodinamike

Hladnjakom možemo sniziti temperaturu nekog tijela. Nakon toga možemo pokrenuti novi ciklus i postići još nižu temperaturu. Možemo li takvim postupcima ohladiti neko tijelo na temperaturu apsolutne nule?
Ovdje ćemo, radi potpunosti, izreći fenomenološku formulaciju trećeg zakona termodinamike:

Nemoguće je ohladiti neki sustav na temperaturu apsolutne nule konačnim brojem procesa.

Entropija sustava teži u nulu kada apsolutna temperatura teži u nulu.

$$\boxed{S \to 0 \quad \text{za} \quad T \to 0}.$$

2.3.9 Toplinski kapaciteti

Molarni toplinski kapacitet plina pri konstantnom volumenu označavamo sa C_V, dok molarni toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku označavamo sa C_P. Pri definiranju topline smo iskazali jednakost $C = mc$, gdje je C toplinski kapacitet, a c specifični toplinski kapacitet neke tvari. S obzirom da je unutarnja energija plina konstantnog volumena sa volumnim toplinskim kapacitetom povezana relacijom

$$U = C_V T,$$

po ekviparticijskom teoremu C_V definiramo kao

$$C_V = \frac{j}{2}R.$$

Ako nam je za neki plin poznat npr. C_V, C_P možemo dobiti preko **Mayerove relacije**,

$$C_P - C_V = R,$$

čiji matematički izvod ovdje nisam napisao zbog kompleksnosti te molim čitatelja da ponuđene rezultate prihvati kao istinite. Iz Mayerove relacije i ekviparticijskog teorema također izvodimo i

$$C_P = \left(1 + \frac{j}{2}\right) R$$

te količnik ta dva kapaciteta nazivamo **adijabatskom konstantom**,

$$\kappa = \frac{C_P}{C_V},$$

koja će nam biti od velike koristi za kasnije razmatranje adijabatske promjene stanja plina. U nekim literaturama umjesto oznake κ se koristi oznaka γ za adijabatsku konstantu. Naravno, koristeći Mayerovu relaciju adijabatsku konstantu još možemo zapisati i kao

$$\kappa = 1 + \frac{2}{i}.$$

Po ekviparticijskom teoremu vrijednosti toplinskih kapaciteta za j-atomne plinove,

1. jednoatomni plin: $\boxed{C_V = \frac{3}{2}R}$, $\boxed{C_P = \frac{5}{2}R}$, $\boxed{\kappa = \frac{5}{3}}$;
2. dvoatomni plin: $\boxed{C_V = \frac{5}{2}R}$, $\boxed{C_P = \frac{7}{2}R}$, $\boxed{\kappa = \frac{7}{5}}$;
3. troatomni plin: $\boxed{C_V = 3R}$, $\boxed{C_P = 4R}$, $\boxed{\kappa = \frac{4}{3}}$.

2.4 Termodinamika idealnog plina

Idealni plin je najjednostavniji modelni sustav u kojem možemo provesti termodinamičke račune. U ovom poglavlju pretpostavit ćemo da su svi procesi gotovo ravnotežni, a jednadžba stanja idealnog plina $pV = nRT$ jednostavno povezuje sve varijable stanja.

2.4.1 Politropski proces

Definicija 2.7 – Politropski proces

Politropski proces je termodinamički proces koji zadovoljava relaciju

$$pV^n = \text{konst.},$$

gdje je p tlak plina, V volumen plina i n **politropski eksponent**. Jednadžba politropskog procesa opisuje procese ekspanzije i kompresije koje uključuju izmjenu topline.

Određeni slučajevi:

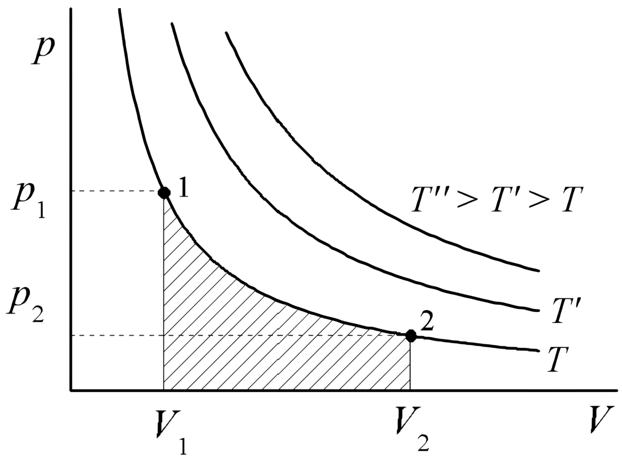
- $n = 0$ za izobarni proces ($p = \text{konst.}$),
- $n = \infty$ za izohorni proces ($V = \text{konst.}$),
- $n = 1$ za izotermni proces ($T = \text{konst.}$) i
- $n = \kappa$ za izentropski (adijabatski reverzibilan) proces.

2.4.2 Izotermna ekspanzija

U ovom procesu posuda s plinom je u trajnom dodiru s toplinskim spremnikom na temperaturi T. Zbog toga vrijedi **Boyle-Mariotteov zakon**

$$pV = \text{konst.},$$

koji je fenomenološki otkriven još u 17. stoljeću. On nam daje odnos tlaka i volumena za neku konstantnu temperaturu. Njegov politropski eksponent je 1. Stoga ovakav proces možemo prikazati u $p-V$ dijagramu, koji je koristan za izračunavanje rada u termodinamičkim procesima. Sva stanja u izotermnom procesu nalaze se na jednoj hiperboli[20] čiji položaj je određen temperaturom. Ta krivulja (hiperbola) naziva se *izoterma*.



Promatramo proces u kojem je početno stanje određeno vrijednostima varijabli p_1, V_1 i T, a konačno stanje vrijednostima p_2, V_2 i T. Formula za rad plina u izotermnoj ekspanziji je dobivena metodom *integriranja* (računanja točne površine ispod krivulje) te glasi

$$\boxed{W = -nRT \ln \frac{V_2}{V_1}}.$$

Obavljeni rad jednak je po iznosu iscrtanoj površini na slici.

Unutarnja energija idealnog plina ne ovisi o volumenu pa je $\Delta E = 0$. Toplina iz spremnika sva je pretvorena u rad,

$$Q = |W| = nRT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

2.4.3 Adijabatska ekspanzija

Ako je sustav toplinski izoliran, a prema vanjskom svijetu može obavljati rad, onda govorimo o *adijabatskom procesu* – procesu u kojem nema izmjene topline s okolinom[21]. Promjena unutarnje energije jednaka je radu, upravo jer je $Q = 0$, sukladno s prvim zakonom termodinamike. Adijabatska ekspanzija je proces koji zadovaljava jednadžbu politropskog procesa te zato vrijedi

$$pV^{\kappa} = \text{konst.}.$$

Koristeći jednadžbu stanja idealnog plina, možemo izvesti i jednakosti

$$TV^{\kappa-1} = \text{konst.}$$

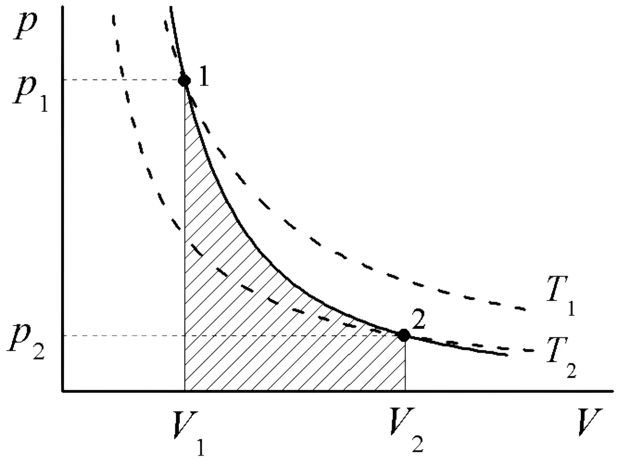
te

$$p^{1-\kappa}T^{\kappa} = \text{konst.}$$

[20]Hiperbola je krivulja. Više o njoj u 3. razredu na matematici. Ako čitatelja zanima, ovdje može pronaći neke informacije (URL je `https://hr.wikipedia.org/wiki/Hiperbola_(krivulja)`).

[21]Adijabatska aproksimacija često se koristi i u slučajevima kada se ekspanzija ili kompresija događa jako brzo, tako da ne stigne doći do izmjene topline.

Budući da je u plinovima uvijek $\kappa > 1$, *adijabata* je u $p - V$ dijagramu strmija od izoterme, kako je prikazano na slici dolje.



Formula za rad plina adijabatske ekspanzije je

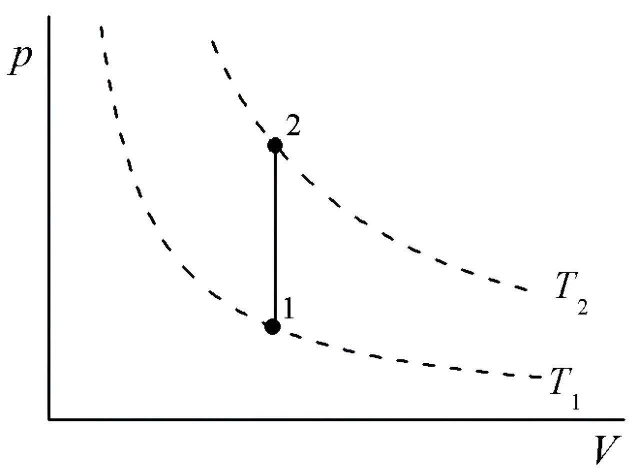
$$\boxed{W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\kappa - 1} = \frac{nR}{\kappa - 1}(T_2 - T_1)} < 0.$$

Sustav obavlja rad prema vanjskom svijetu pa je $W < 0$.

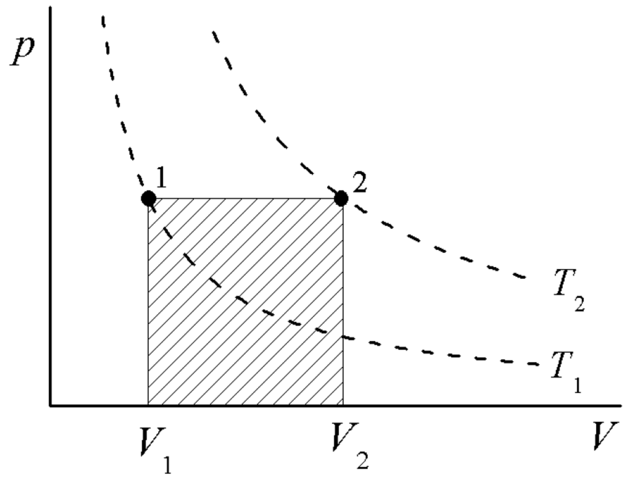
2.4.4 Izohorni proces

U izohornom procesu nema promjene volumena pa je $\boxed{W = 0}$. U $p - V$ dijagramu *izohora* je vertikalna dužina pa je površina ispod nje jednaka nuli. Za odnos tlaka i temperature vrijedi **Charlesov zakon**,

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}.$$



2.4.5 Izobarni proces



U ovom procesu posuda je u dodiru s tlačnim spremnikom, a toplina se dovodi npr. električnim grijačem (može se dovesti i hladnjakom). Kao tlačni spremnik najčešće imamo atmosferu pa je onda tlak na kojem se proces događa približno jednak 1000hPa. Dovedena toplina pretvara se u promjenu unutarnje energije i u rad ($Q = \Delta U - W$). Rad je lako izvesti budući da je funkcija konstanta,

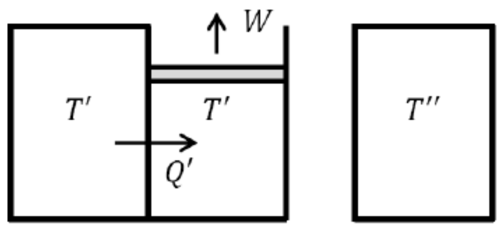
$$\boxed{W = -p\Delta V}.$$

Za izobarni proces vrijedi **Gay-Lussacov zakon**,

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

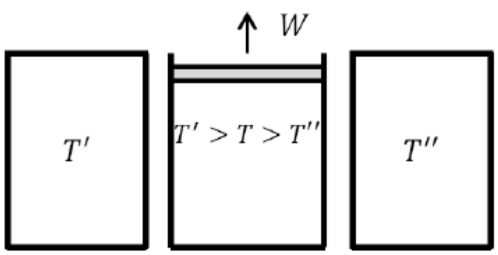
2.4.6 Carnotov kružni proces

Francuski fizičar Sadi Carnot teorijski je 1824. opisao jedan jednostavan, gotovo ravnotežan kružni proces za dobivanje rada. Pretpostavio je da neki radni plin može promjenom volumena izmjenjivati rad s okolinom te da se može selektivno dovesti u kontakt od dva toplinska spremnika ili se izolirati od njih.
Topliji spremnik je na temperaturi T', a hladniji na temperaturi T''. Proces ima 4 koraka.



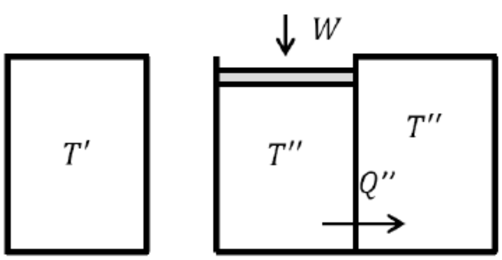
1. korak: *Izotermna ekspanzija*

Radna tvar je u toplinskom kontaktu s toplinskim spremnikom. Obavlja rad nad okolinom; uzima toplinu iz toplijeg spremnika.



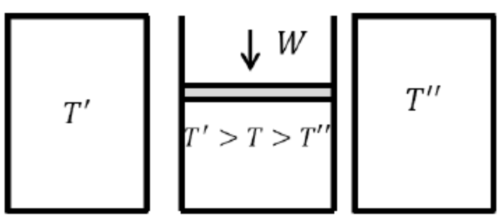
2. korak: *Adijabatska ekspanzija*

Radna tvar je izolirana od oba spremnika. Obavlja rad nad okolinom. Temperatura joj se mijenja (hladi se) od T' do T''.



3. korak: *Izotermna kompresija*

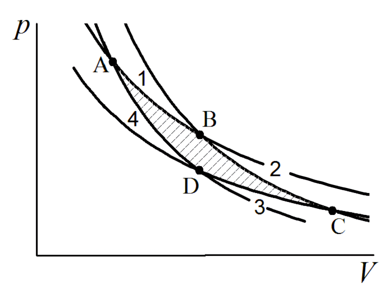
Radna tvar je u toplinskom kontaktu s toplijim spremnikom. Uzima rad iz okoline; predaje toplinu hladnijem spremniku.



4. korak: *Adijabatska kompresija*

Radna tvar je izolirana od oba spremnika. Okolina obavlja rad nad radnom tvari. Radna tvar se grije do T'. Na kraju 4. koraka je radna tvar u početnom stanju.

Ovaj kružni proces možemo prikazati u $p - V$ dijagramu,



Proces kružno ide po točkama $A \to B \to C \to D \to A$. Rad koji se predaje okolini je površina ispod krivulja 1 i 2. Rad koji se uzima iz okoline je integral ispod krivulja 3 i 4. Izračunajmo ova četiri rada.

U prvom koraku, proces je izoterman na temperaturi T' i rad je

$$W_1 = W_{AB} = -nRT' \ln \frac{V_B}{V_A}.$$

U drugom koraku, proces je adijabatski i rad je

$$W_2 = W_{BC} = -\frac{p_B V_B - p_C V_C}{\kappa - 1}.$$

U trećem koraku, proces je izoterman na temperaturi T'' i rad je

$$W_3 = W_{CD} = -nRT'' \ln \frac{V_C}{V_D}.$$

U četvrtom koraku, proces je adijabatski i rad je U četvrtom koraku, proces je adijabatski i rad je

$$W_4 = W_{DA} = -\frac{p_A V_A - p_D V_D}{\kappa - 1}.$$

Budući da su točke A i B na istoj izotermni, vrijedi $p_A V_A = p_B V_B$. Slično vrijedi $p_C V_C = p_D V_D$. Stoga je zbroj radova u koracima 2 i 4 jednak $W_2 + W_4 = 0$. Koristan rad je

$$W_1 + W_3 = -nR\left(T' \ln \frac{V_B}{V_A} - T'' \ln \frac{V_C}{V_D}\right).$$

Budući da su točke A i D na istoj adijabati, vrijedi $T' V_A^{\kappa-1} = T'' V_D^{\kappa-1}$. Slično su točke B i C na istoj adijabati pa vrijedi $T' V_B^{\kappa-1} = T'' V_C^{\kappa-1}$. Podijelimo li te dvije relacije, dobit ćemo

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{V_D}{V_C}$$

pa je koristan rad

$$\boxed{W = nR\left(T'' - T' \ln \frac{V_B}{V_A}\right)}.$$

2.5 Uvodni zadatci

Za uvodne zadatke preporučam riješiti lekcije *Čestična građa tvari*, *Linearno toplinsko rastezanje, plošno i volumno toplinsko širenje*, *Tlak idealnog plina*, *Izobarna i izohorna promjena stanja plina*, *Izotermna promjena stanja plina*, *Izobarna, izohorna i izotermna promjena stanja plina*, *Jednadžba stanja idealnog plina*, *Test za samoprocjenu 2*, *Unutarnja energija i toplina*, *Unutarnja energija idealnog plina*, *Promjene agregacijskih stanja i prijenos topline*, *Promjena unutarnje energije radom*, *Prvi zakon termodinamike*, *Kružni proces, toplinski strojevi, rashladni stroj i toplinska pumpa*, *Drugi zakon termodinamike* i *Test za samoprocjenu 3* cjelina *Čestična građa tvari* i *Termodinamički sustavi i procesi* iz zbirke zadataka iz fizike za 2. razred (nakladnik Alfa, autori Jakov Labor i Jasmina Zelenko Paduan). Link na zadatke i rješenja možete pronaći ovdje, a URL je `https://github.com/MatejVo/Uvodni_zadatci_2._razred`.

2.6 Natjecateljski zadatci

2.6.1 Lakši zadatci

1. (šk2023/2r/z3) Jednakokračni trapez ima kose bočne stranice i veliku bazu sastavljene od triju željeznih šipka ($\alpha_1 = 1.2 \cdot 10^{-5}$ C^{-1}) koje pri temperaturi $T_0 = 0°$ C sve imaju istu duljinu $L_A = 1$ m. Sporednu bazu čini bakrena šipka ($\alpha_2 = 1.7 \cdot 10^{-5}$C^{-1}), koja pri temperaturi T_0 ima duljinu $L_B = 99.85$ cm. Izračunaj pri kojoj temperaturi trapez postaje kvadrat.

2. (šk2020/2r/z2) Otvorena staklena boca volumena 500 cm^3 puna je zraka. Bocu i zrak koji sadrži zagrijemo do 227° C i zatim ju uronimo u vodu grlom prema dolje. Kolika je masa vode koja će ući u bocu kad se temperatura zraka u njoj snizi na 27° C? Zanemari promjenu volumena boce s temperaturom i uzmi u obzir da kad se boca i plin koji sadrži termaliziraju, nivo vode unutar i izvan boce će biti isti.

3. (šk2020/2r/z5) U cilindru poprečnog presjeka $S = 0.01$ m^2 se nalazi idealni plin. Cilindar je zatvoren klipom mase $m = 1$ kg i može kliziti bez trenja. Cilindar se već dulje vrijeme nalazi na temperaturi 23° C i klip miruje na visini $h_1 = 1$ m. Otvaranjem ventila iz cilindra se polako ispusti dio plina te se ventil zatvori. Ravnotežni položaj klipa je sada na visini $h_2 = 0.8$ m. Odredi broj molova koji se sada nalaze u cilindru. Za koliko se treba povisiti temperatura kako bi se klip vratio na početnu visinu od 1 m?

4. (šk2019/2r/z1) Spremnik kapaciteta 20 dm^3 sadrži dušik na tlaku 10^7 Pa i temperaturi 20° C. Spremnik se zatim spoji s drugim spremnikom koji je potpuno prazan, kapaciteta 10 dm^3. Ukoliko je nakon ekspanzije plin iste temperature kao i na početku, izračunaj koliki je tlak plina poslije ekspanzije i koliko kilograma dušika se nalazi u svakom spremniku. Molarna masa dušika je $M_N = 14 \, \frac{\text{g}}{\text{mol}}$, a kemijska formula dušika N_2.

5. (šk2019/2r/z4) Čelična šipka ima promjer 3.000 cm na 25° C. Prsten od mesinga ima unutarnji promjer od 2.992 cm na 25° C. Pronađi najnižu temperaturu pri kojoj će štap stati u prsten. $\alpha_{\text{čelik}} = 11 \cdot 10^{-6}$ C^{-1}, $\alpha_{\text{mesing}} = 19 \cdot 10^{-6}$ C^{-1}.

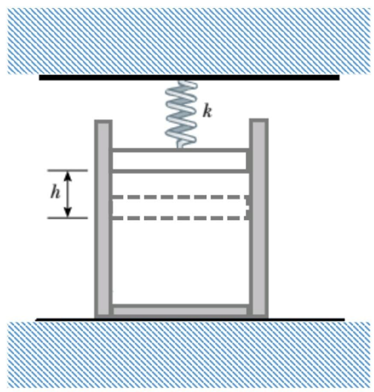
6. (šk2018/2r/z3) Na gornjem rubu cilindrične psude nalazi se disk od kositra ($\alpha_{\text{kositar}} = 22 \cdot 10^{-6}$ C^{-1}). Polumjer posude je $r = 15$ cm na temperaturi od $T = 300$ K i disk prekriva rub s

viškom od $\Delta r = 0.1$ mm te je visina diska znatno manja od dubine posude. Kolika treba biti temperatura diska kako bi upao u posudu?

7. (šk2018/2r/z5) U cilindru koji stoji na podlozi nalazi se pomični klip koji je spojen pomoću opruge s elastičnom konstantom $2 \cdot 10^3 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$ za fiksnu točku na stropu (vidi sliku). Na početku, kada je cilindar napunjen s 5 L idealnog plina pri tlaku od 1 atm (1 atm = 101300 Pa) i temperaturi od 20.0 ° C, klip je u ravnoteži i opruga je u opuštenom stanju.

   (a) Klip ima površinu od 0.01 m^2, kliže bez trenja i ima zanemarivu masu. Koliko će se klip pomaknuti ako se temperatura povisi na 250° C?

   (b) Koliki je tlak plina pri temperaturi od 250° C?



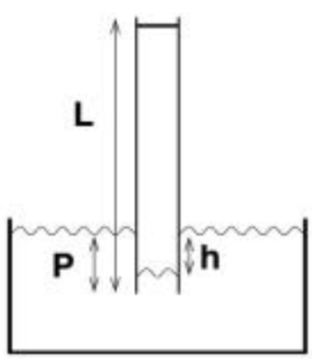
8. (šk2017/2r/z1) Fiksna cijev presjeka 2 dm^2 i visine $L = 1$ m zatvorena je na gornjoj strani pomoću klipa bez trenja i zanemarive mase. Donji kraj je otvoren i uronjen na dubinu $P =$ 10 cm u kadu punu vode. Temperatura sustava 37° C. Na početku, klip se nalazi na gornjem kraju i razina vode u cijevi jednaka je onoj u posudi.

   (a) Koliki je volumen koji zauzima zrak? Koliki je broj molova zraka u cijevi?

   U nekom drugom trenutku stavi se uteg mase m na klip, klip se spusti zajedno s razinom vode u cijev $h = 8$ cm ispod površine vode u posudi, kako je prikazano na slici.

   (b) Koliki je tada apsolutni tlak zraka u cijevi?

   (c) Za koliko se pri tim uvjetima promijenio volumen (u litrama) koji zauzima zrak u cijevi (s nepromjenjivom temperaturom)?

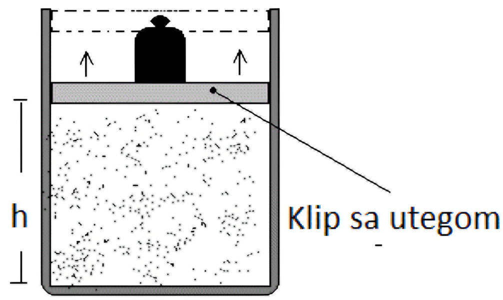


9. (šk2017/2r/z2) Cilindar s klipom postavljen je vertikalno. Klip ima zanemarivu debljinu i masu, površina mu je A i može kliziti bez trenja. Na klip je postavljen uteg mase m, kako je prikazano na slici. n molova idealnog plina nalaze se u cilindru na temperaturi T i tlaku p. Klip s masom m je u ravnoteži na visini h. Atmosferski tlak je p_{atm} a g je ubrzanje sile teže.

   (a) Pronađi izraz za visinu h na kojoj je klip sa utegom u ravnoteži, pomoću zadanih veličina.

   (b) Je li tlak p unutar cilindra manji, jednak ili veći od atmosferskog tlaka p_0?

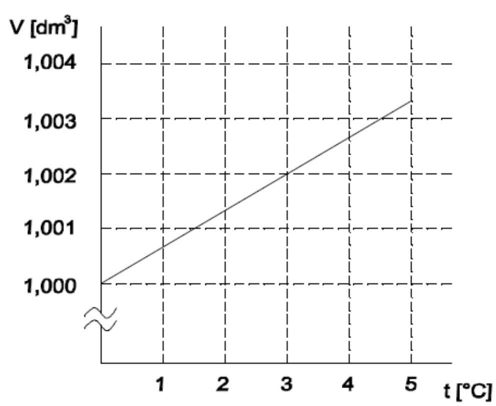
   (c) Ukoliko plin u cilindru zagrijemo $T = 30°$ C uz sljedeće vrijednosti: $m = 1$ kg, $A = 500$ cm^2 i $n = 2$ mol, izračunaj koliki je h.



10. (šk2017/2r/z5) Dvije šipke, jedna od željeza, a druga od mesinga, na 0° C imaju istu duljinu od 160 cm. Na kojim temperaturama je njihova razlika u dužini 2 mm? ($\alpha_{\text{željezo}} = 1.2 \cdot 10^{-5}$ C^{-1}, $\alpha_{\text{mesing}} = 1.9 \cdot 10^{-5}$ C^{-1})

11. (šk2016/2r/z3) Idealni plin mase 10 g pri 7° C ima volumen 4 dm^3. Nakon zagrijavanja pri stalnom tlaku gustoća plina iznosi $8 \cdot 10^{-4} \dfrac{\text{g}}{\text{dm}^3}$. Na koju temperaturu je ugrijan plin? Koliki je rad po svakom molu plina pri tome obavljen?

12. (šk2016/2r/z5) Grafički prikaz ovisnosti volumena etanola o temperaturi je na donjoj slici. Gustoća etanola na 0° C je 800 $\dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Izračunaj gustoću etanola na temperaturi 4.2°.

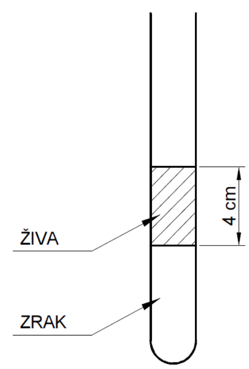


13. (šk2015/2r/z1) U bakrenom kalorimetru mase 500 g nalazi se 200 g vode temperature 20° C. Koliku bi masu leda temperature −5° C trebalo dodati kako bi konačna temperatura bila

10° C? Specifični toplinski kapacitet vode je 4190 $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$, leda 2093 $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$, bakra 390 $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$, a latentna toplina taljenja leda je $3.35 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$.

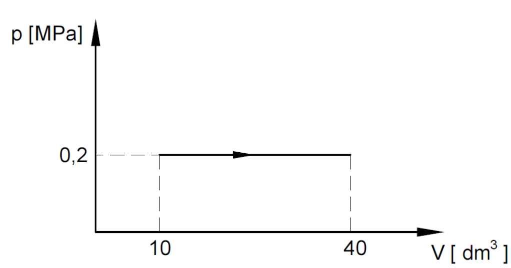
14. (šk2015/2r/z2) Jezero je tijekom zime pokriveno slojem leda debljine 0.5 m. Koliki je tlak na dubini 2.5 m u jezeru (u 2.5 m se ne ubraja sloj leda)? Gustoća leda je 920 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a vode 1000 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Atmosferski tlak je 10^5 Pa.

15. (šk2015/2r/z4) Staklena cijev s jednim otvorenim krajem postavljena je vertikalno kao na slici. Visina stupca žive je 4 cm. Ispod žive je zrak volumena 6 cm^3. Površina presjeka cijevi je 0.1 cm^2. Atmosferski tlak je 10^5 Pa. Gustoća žive je 13600 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Koliki će biti volumen zraka u cijevi ispod žive kada se u cijev doda 26 g žive? Pretpostavi da je zrak idealni plin.

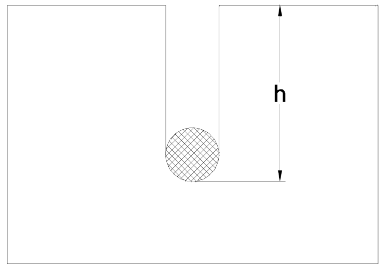


2.6.2 Umjereni zadatci

1. (šk2015/2r/z3) U posudi s pokretnim klipom nalazi se idealni plin. Početni volumen plina je 10 dm^3. Ekspanzija plina do konačnog volumena 40 dm^3 prikazana je $p-V$ grafom. Specifični toplinski kapacitet plina pri stalnom tlaku je $C_P = 1040\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$, a njegova molarna masa je 28 $\frac{\text{g}}{\text{mol}}$.
   (a) Izračunaj koliki je rad obavio plin pri ekspanziji.
   (b) Kolika je količina topline dovedena plinu tijekom širenja?
   (c) Za koliko se promijenila unutarnja energija plina?



2. (šk2016/2r/z4) Željezna kuglica polumjera 2 cm ugrije se na temperaturu 300° C te stavi na površinu velike kocke leda temperature 0° C. Do koje će dubine h kuglica upasti u led, ako je konačni položaj kuglice u ledu kao na slici? Gustoća željeza je 7900 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Latentna toplina taljenja leda je $3.3 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}}$. Specifični toplinski kapacitet leda je 460 $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$. Pretpostavi da je sustav izoliran od okoline i da su gustoća i specifični toplinski kapacitet željeza stalni.



3. (šk2024/2r/z2) Dana je visoka posuda ispunjena trima slojevima tekućine: glicerinom, vodom i uljem. U njoj miruje vertikalno položena šipka konstantnoga poprečnog presjeka i visine 1 m tako da je jednom sedminom svoje visine uronjena u glicerin, četirima sedminama u vodu, a preostalim dvjema u ulje. Pretpostavljajući da se tekućine ne miješaju te da je cijeli sustav u ravnotežnome stanju, odredi gustoću materijala od kojega je napravljena šipka. Koliko bi trebao biti dubok sloj vode da spomenuta šipka u ravnotežnome položaju točno dodiruje glicerin svojim donjim krajem, a da je pritom cijela uronjena u tekućine u posudi? Uzmi da je gustoća glicerina 1260 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, vode 1000 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a ulja 800 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

4. (šk2024/2r/z5) Ekspanzijska komora parnoga stroja na jednome je kraju zatvorena pomičnim klipom površine 5 dm^2 koji može po njoj kliziti bez trenja. U trenutku kad je razmak između klipa i zida komore jednak 8 cm, klip se počinje udaljavati od njega pod djelovanjem konstantne sile pare od 50 kN. Odredi kolika je konačna temperatura pare ako je klip izvršio 2 kJ rada. Pretpostavi da je temperatura komore u početku jednaka 120° C te da se para može opisati jednadžbom stanja idealnog plina.

5. (žup2024/2r/z1) Mali mjehurić počinje se s dubine 75 cm vrlo polako uzdizati u visokoj čaši ispunjenoj idealnim fluidom gustoće 3102 kg m^{-3} i konstantne temperature -200° C. Ako je mjehurić sastavljen od 0.05 mola molekula mase $4.982 \cdot 10^{-25}$ kg, odredi na kojoj dubini se volumen mjehurića poveća za jednu osminu. Odredi i ukupnu silu na mjehurić na toj dubini. Pretpostavi da se plin u mjehuriću može opisati jednadžbom stanja idealnog plina te da se mjehurić ne razdvaja pri uzdizanju.

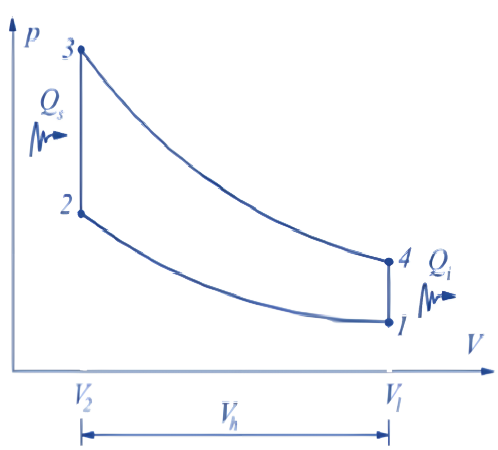
6. (žup2024/2r/z2) Dane su tri posude, prva je ispunjena jednim kilogramom leda temperature -10° C, druga s dva kilograma vode temperature 10° C, a treća sa šest petina kilograma vode temperature 95° C. Ako smiješ više puta po dvije posude staviti u termalni kontakt i razdvojiti ih kad želiš te ako je to jedini način prijenosa topline u tome sustavu (dakle, posuda koja nije u kontaktu i s jednom drugom posudom ne prima ni gubi toplinu), odredi koja je najveća temperatura na koju se može podići posuda s ledom. Specifični toplinski kapacitet leda je 2.1 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$, vode 4.19 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg K}}$, specifična toplina taljenja leda 330 $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$, dok se kapaciteti materijala od kojih su napravljene posude mogu zanemariti.

7. (žup2024/2r/z3) Posuda volumena 7 L ispuni se s 2 mola idealnog plina i zabrtvi tako da je u njoj konačni tlak trostruko veći od atmosferskoga. Na posudu se zatim s pomoću jednosmjernoga ventila spoji druga, vakuumirana, posuda dvostruko manjega volumena. Ventil propušta čestice iz veće u manju posudu dokle god je tlak u većoj posudi za najmanje 5 kPa veći od tlaka u manjoj posudi. Primjećeno je da je nakon toga u manjoj posudi 2 puta više čestica nego u većoj posudi. Kolike su konačne temperature plina u svakoj posudi? Cijeli je sustav termički izoliran od okoline. Zanemari toplinske kapacitete materijala od kojih su napravljene posude i ventil.

8. (žup2024/2r/z4) Između dvaju konačno velikih toplinskih spremnika postavljena su dva identična Carnotova stroja. Jedan radi kao toplinski stroj, uzimajući 1 kJ topline iz toplijega spremnika svake sekunde te predaje 40% svojega izlaznog rada drugom stroju koji se time pogoni kao hladnjak. Ako djelovanjem trećih, vanjskih strojeva održavamo temperature spremnika konstantima na 500 K i 100 K, odredi koliko topline u jedinici vremena svaki od Carnotovih strojeva predaje ili uzima od spremnika te koliko, povrh toga, topline u jedinici vremena vanjski strojevi trebaju dovoditi ili odvoditi od svakoga spremnika kako bi se oni održali na stalnoj temperaturi.

9. (žup2024/2r/z5) Kružni proces kroz koji prolazi jedan mol jednoatomnoga idealnog plina sastoji se redom (dva procesa koji su spomenuti jedan za drugim spojeni su, kao i posljednji s prvim) od adijabatske ekspanzije, izohornoga hlađenja, izobarnoga hlađenja te ekspanzije oppisane pravcem $p = \alpha V$, pri čemu je α nepoznata, pozitivna konstanta. Tlak i volumen plina na krajnjim točkama adijabate jednaki su: $p_1 = 3$ MPa, $V_1 = 1\ \mathrm{m}^3$, $p_2 = 944.9408$ kPa, $V_2 = 2\ \mathrm{m}^3$. Skiciraj, ne nužno u mjerilu, taj proces u $p-V$ dijagramu i naznači smjer u kojem se odvija. Odredi koliko topline plin prima ili predaje u svakome dijelu kružnog procesa ako je tlak u točki u kojoj se sijeku izobara i pravac $p = \alpha V$ jednak $p_4 = 1$ kPa.

10. (žup2023/2r/z1) Pavao ima auto s motorom obujma $V_h = 1000\ \mathrm{cm}^3$ i komorom izgaranja obujma $V_2 = 200\ \mathrm{cm}^3$. Motor koristi Ottov kružni proces (dva adijabatska i dva izohorna procesa, kako je navedeno na slici dolje). Pri usisu mješavine plinova (goriva i zraka) tlak je $p_1 = 94.2$ kPa i temperatura je $T_1 = 50°$ C. Poznato je da mješavina ima sljedeća svojstva: $\kappa = 1.35$ (konstanta adijabatskog procesa), $M = 30.34\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$ (efektivna molarna masa mješavine), $L_C = 1862\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg}}$ (specifična toplina izgaranja) i $C_V = 0.83\ \frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{kg\ K}}$ (specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu). Izračunaj masu smjese plina pri usisu, temperaturu T_2, T_3 i T_4 te tlakove p_2, p_3 i p_4. Konačno, izračunaj korisnost motora Šiminog motora.



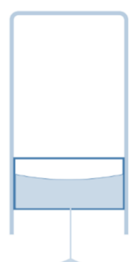
11. (žup2023/2r/z3) Toplinski kapacitet nekog tijela linearno raste s temperaturom: $C(T) = aT + b$, uz $a = 2.1\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$, $b = 167.4\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$. Nacrtaj graf $C(T)$ te izračunaj količinu topline koju tijelo apsorbira kada se njegova temperatura promijeni od 20° C do 80° C. Pretpostavi da nema gubitaka topline prema okolini.

12. (žup2023/2r/z4) U posudi se nalazi 500 g napitka (specifične topline 4000 $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg\ K}}$) na temperaturi od 18° C. U napitak se stave četiri kocke leda na 0° C od po 20 g, koje se nakon konačnog vremena otope.

    (a) Koja je temperatura pića u trenutku otapanja kocki leda?

    (b) Kolika je konačna ravnotežna temperatura sustava?

13. (žup2022/2r/z1) Određena količina jednoatomnog idealnog plina nalazi se u izoliranom cilindru volumena V_0, zatvorenog klipom odozdo. Klip je napravljen od izolacijskog materijala sa šupljinom ispunjenom pijeskom, ukupne mase M_0. Početni tlak plina jednak je $p_0 = \frac{p_{\mathrm{atm}}}{4}$, gdje je p_{atm} vanjski atmosferski tlak. U početku je sustav u ravnoteži. Za određeno vrijeme, pijesak koji se nalazi u klipu počinje vrlo sporo izlaziti kroz malu rupu u klipu (vidi sliku), sve dok se ukupna masa klipa ne smanji na jednu trećinu početne. Doprinosi trenja su zanemarivi. Izračunaj konačni tlak i volumen plina kao funkciju p_0 i V_0.



14. (žup2022/2r/z2) Komad metala mase $m_1 = 200$ g, uronjen u 275 g nepoznate tekućine, podiže njenu temperaturu s 10° C na 12° C. Drugi komad istog metala $m_2 = 250$ g na istoj temperaturi kao i prvi, uronjen u 168 g iste nepoznate tekućine, podiže temperaturu s 10° C na 14° C. U oba slučaja nepoznata tekućina tijekom cijelog procesa ostaje u istom, tekućem, agregatnom stanju. Izračunaj početne temperature dvaju komada metala. Naravno, zanemari moguće gubitke prema okolini.

15. (žup2022/2r/z5) Jednoatomni idealni plin provodi reverzibilni kružni proces od tri dijela: izohorni, koji dovodi plin iz početnog stanja A (p_A, V_A) u stanje B u kojem je tlak dvostruko veći, adijabatsko širenje do stanja C i izotermna kompresija koja vraća sustav iz C u početno stanje A.

    Nacrtaj na $p - V$ grafu procese i izračunaj

    (a) omjer tlakova $\frac{p_C}{p_A}$ i omjer volumena $\frac{V_C}{V_A}$;

    (b) korisnost navedenog kružnog procesa;

    (c) snagu koju razvija hipotetski motor koji izvodi ovaj kružni proces, počevši od stanja A karakteriziranog s $p_A = 100$ kPa i $V_A = 24$ L te radi na frekvenciji od 75 kružnih procesa u minuti.

2.6.3 Teži zadatci

1. (žup2023/2r/z5) Za potrebe proizvodnje mehaničke energije predloženo je korištenje sunčeve energije. Pretvorba bi se vršila toplinskim strojem u kojem se sunčeva energija prikupljena pomoću pločastog kolektora prenosila njegovom radnom fluidu. Ovaj toplinski stroj radi ciklički i izmjenjuje toplinu s vanjskim zrakom. Iz iskustva znamo da je specifični toplinski tok, prikupljen kolektorom, jednak $\phi = 600 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ kada radi na 90° C. Uz pretpostavku da je vanjska temperatura zraka 21° C, izračunaj minimalnu površinu kolektora za sustav koji daje snagu od 1 kW.

2. (drž2023/2r/z3) Jednoatomni idealni plin prolazi kroz kružni termodinamički proces prikazan na slici. Svi su procesi kvazistatični[22]. Sustav je u početku u stanju A i prolazi kroz ekspanziju predstavljenu ravnom linijom u $p-V$ grafu dok ne dođe u stanje B. Odatle se vraća u početno stanje pomoću adijabatske kompresije. Dane su sljedeće vrijednosti: $V_A = 3$ dm^3, $p_A = 3.36$ kPa, $V_B = 24$ L.

   (a) Izračunaj vrijednost p_B.

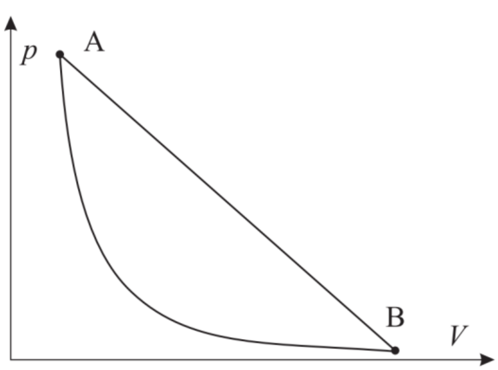
   (b) Odredi jednadžbu pravca koji opisuje proces od A do B pišući ga u obliku $p = mV + q$. Izračunaj vrijednosti m i q.

   (c) Odredi volumen i tlak u stanjima u kojima sustav postiže maksimalnu i minimalnu temperaturu.

   (d) U procesu A u B sustav prvo apsorbira toplinu do nekoga međustanja Y, a zatim otpušta toplinu do B. Izračunaj p_Y i V_Y.

   (e) Izračunaj učinkovitost toplinskoga stroja koji izvodi ovakav ciklus.

   (f) Izračunaj učinkovitost koju bi isti sustav postigao da izvodi Carnotov ciklus s iste maksimalne i minimalne temperature.

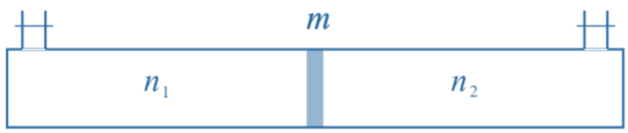


[22] U termodinamici, kvazistatički proces, poznat i kao kvazi-ravnotežni proces, je termodinamički proces koji se odvija dovoljno sporo da sustav ostane u unutarnjoj fizikalnoj termodinamičkoj ravnoteži.

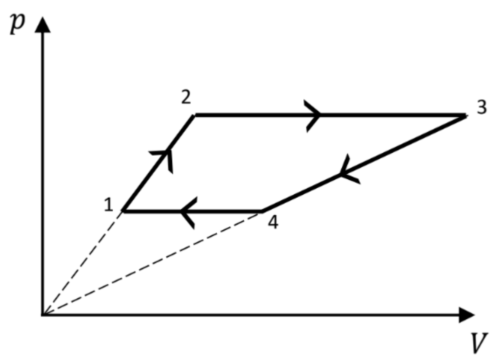
3. (drž2022/2r/z2) Cilindar presjeka $A = 100\text{cm}^2$ i duljine $l = 100$ cm postavljen je vodoravno. Stjenke su toplinski izolirane i zanemarivog toplinskog kapaciteta. Unutar cilindra može kliziti klip mase $m = 0.13$ kg i zanemarive debljine, zanemariva trenja. Specifični toplinski kapacitet tvari od koje je napravljen klip iznosi $c = 390\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$.

   (a) Na početku, u lijevom dijelu cilindra se nalazi $n_1 = 2.3$ mola jednoatomskog idealnog plina na temperaturi $T_1 = 90°$ C, a u drugom dijelu n_2 mola jednoatomskog idealnog plina na temperaturi $T_2 = 46°$ C. Klip se nalazi 53 cm od lijeve stijenke cilindra i u mehaničkoj je ravnoteži. Odredi u tom početnom trenutku n_2, odnosno količinu plina koja se nalazi u desnoj strani cilindra.

   (b) Nakon toga ostavimo sustav da dođe u toplinsku ravnotežu. Ako je na početku temperatura klipa bila $T_0 = 100°$ C, odredi ravnotežnu temperaturu sustava i koliko se tada klip pomaknuo.



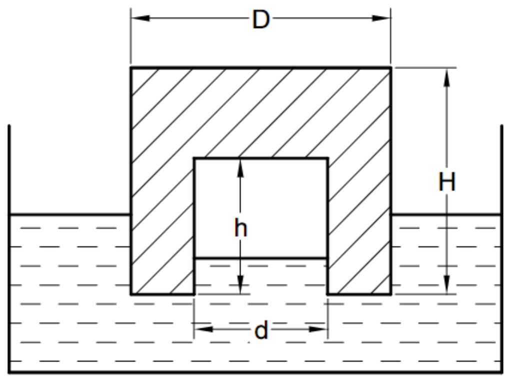
4. (Kup fizike u Lucijanki/2r/z9) 3 mola idealnog jednoatomnog plina izvode ciklus prikazan na slici. Temperatura plina u različitim stanjima je jednaka $T_1 = 400$ K, $T_2 = 800$ K, $T_3 = 2400$ K i $T_4 = 1200$ K. Odredi rad plina po jednom ciklusu.



5. (drž2022/2r/z4) Hermetički zatvoren cilindar visine $H = 1$ m napunjen je vodom (koju možemo smatrati idealnom tekućinom) do visine $h_0 = 90$ cm. Volumen koji ne zauzima voda ispunjen je idealnim plinom pri početnom tlaku od 8 atm i temperaturi $T = 300$ K. Na dnu cilindra napravljena je rupa zanemarive površine u odnosu na baznu površinu cilindra. Nađi izraz brzine izlaza vode iz rupe kao funkciju visine h tekućine, uz pretpostavku da širenje plina kako voda izlazi odgovara izotermnom procesu. Izračunaj i početnu brzinu kojom voda izlazi iz rupe, brzinu kada se visina tekućine prepolovi u odnosu na početnu vrijednost te vrijednost h na kojoj voda prestaje izlaziti.

6. (drž2009/2r/z2) Oblak mase M adijabatski se diže od neke točke A u atmosferi do točke B.

   (a) Ako su tlakovi u te dvije točke $p_A = 105$ kPa i $p_B = 90$ kPa, a temperatura u točki A je $T_A = 20°$ C, izračunaj koju će temperaturu oblak imati u točki B. Adijabatska konstanta κ za zrak iznosi $\kappa \approx 1.4$.



(b) Pretpostavi da gustoća zraka u atmosferi opada linearno s visinom. Ako je gustoća zraka u točki A jednaka $\rho_A = 1.2$ kg m^{-3}, izračunaj razliku u visini između te dvije točke.

7. (drž2015/2r/z2) Cilindrična posuda od aluminija, ispunjena zrakom pri atmosferskom tlaku 10^5 Pa, uroni se u vodu s otvorom prema dolje. Uz pretpostavku izotermne kompresije zraka tijekom uranjanja, izračunaj konačni tlak unutar posude. Gustoće aluminija i vode su, redom, 2700 kg m^{-3}. Težinu zraka zanemari. Zadane informacije su $H = 0.1$ m, $h = 0.08$ m, $D = 0.1$ m, $d = 0.08$ m.

8. (drž2016/2r/z1) U cilindričnoj posudi nalazi se tekućina gustoće $\rho = 1000$ kg m^{-3}. Dno posude je promjera $D = 0.4$ m, a otvor na vrhu je promjera $d = 0.1$ m. U posudu se polako stavi klip. Trenje između klipa i posude zanemari, pretpostavi savršeno brvtljenje i izotermnu promjenu stanja zraka prilikom spuštanja klipa. Konačni položaj mirnog i neopterećenog klipa prikazan je na desnoj slici. Izračunaj masu klipa. Zadane informacije su $H = 0.28$ m, $L = 0.14$ m, $L_1 = 0.15$ m. Atmosferski tlak iznosi 100000 Pa.