Оптимизациона функција

- До сада смо сматрали да је позната или дефинисана **једна оптимизациона функција**
- То је тачно уколико постоји само **један критеријум оптимизације**
- Како се дефинише оптимизациона функција уколико постоји више критеријума оптимизације?
- Критеријуми могу бити по суштински различитим величинама
  - појачање и прилагођење,
  - струја/напон и физичке димензије,
  - техничке карактеристике и цена,
  - време и остварена добит,
  - број линија кода и функционалност рачунарског програма, итд.

Неки примери оптимизације са више критеријума

- Запаковати што више апликативних опција у што мањи електрични уређај
- Направити што је могуће бржи чип са што је могуће мањим Џуловим губицима
- Написати што је могуће бржи код са што мање линија кода у програмском језику
- Пронаћи оптимално управљање системом са што је могуће једноставнијим алгоритмом
- Урадити испитни задатак за што краће време, а добити највишу оцену

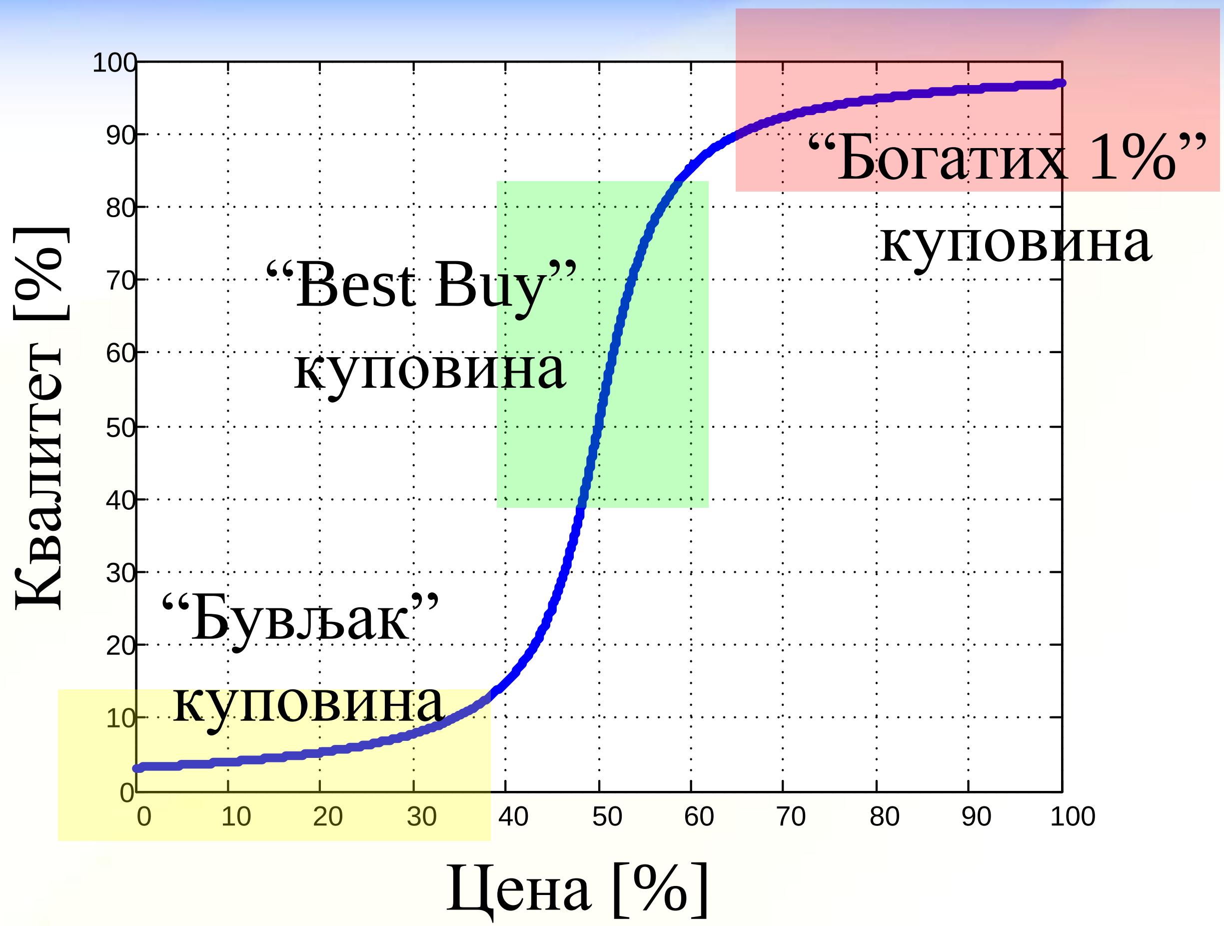
Куповина: илустративни пример супротстављених критеријума

- Посматраћемо пример куповине
- Купац, у принципу, увек води рачуна о два критеријума који су супротстављени
  - Критеријум #1: максимизирати добит (купити што квалитетније или што више)
  - Критеријум #2: минимизирати количину новца
- Да ли у таквим случајевима постоји једно најбоље (оптимално) решење?

Оптимално решење постоји само ако постоји ЈЕДАН критеријум

- Ако фиксирамо други критеријум (количину новца)
  - тада је оптимално решење оно које максимизира добит (први критеријум)
- Ако фиксирамо први критеријум (добит)
  - тада је оптимално решење оно које минимизира дату количину новца (други крит.)
- Уколико дозволимо постојање опсега вредности по оба критеријума, **нема** једног оптималног решења!

Пример из економије: зависност квалитета од цене



Теорија оптимизације са више критеријума

- Вилфредо Парето (1848–1923)
- Инжењер и економиста
- Бавио се теоријом оптимизације искоришћења ресурса у економији
- Вишекритеријумска оптимизација или парето оптимизација
- Синоними: парето скуп = парето фронт = парето граница

Дефиниција парето фронта

- Посматрамо оптимизациони проблем са G критеријума, f^k, које минимизирамо
- Формално, формирамо вектор критеријума $\boldsymbol{f}=(f^1, f^2,\ldots, f^G)$
- Посматрамо два (могућа) решења: $\boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{f}_2$
- $\boldsymbol{f}_1$ доминира $\boldsymbol{f}_2$ уколико $f_1^{\,i} \leq f_2^{\,i}$ за свако i и за бар једно i је $f_1^{\,i} < f_2^{\,i}$, где i иде по свих G критеријума
- Парето фронт је скуп свих решења за која не постоје (друга) доминантна решења (енглески: set of nondominated solutions)
- Парето фронт представља скуп најбољих компромиса
- Најједноставније је проверити да ли за испитивано решење постоји бар једно доминатно решење – ако постоји, онда испитивано решење није тачка парето фронта

Илустрација: скуп од 12 решења проблема са 2 критеријума

Испитивано решење

Доминантно решење

Решење за које не постоји доминантно (nondominated solution)

f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)
f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)
f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)
f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)
f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)
f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)
f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)
f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)
f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)
f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)
f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)
f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)

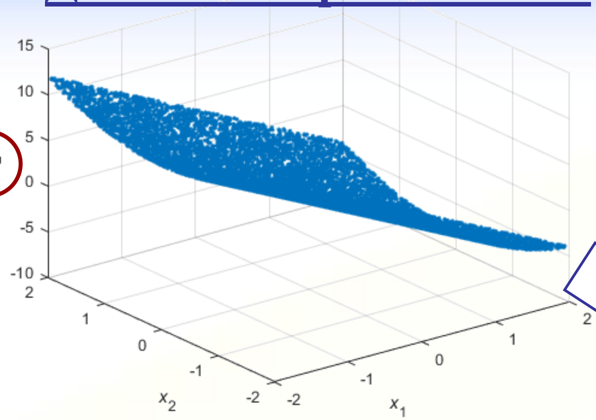
f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)	f_{01}=(1.682, 6.283)
f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)	f_{02}=(4.125, 3.751)
f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)	f_{03}=(1.697, 5.212)
f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)	f_{04}=(4.699, 6.803)
f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)	f_{05}=(4.995,18.992)
f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)	f_{06}=(0.422,11.877)
f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)	f_{07}=(2.416, 9.357)
f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)	f_{08}=(4.721,18.455)
f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)	f_{09}=(3.677, 3.134)
f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)	f_{10}=(1.436, 5.455)
f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)	f_{11}=(0.202,11.480)
f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)	f_{12}=(0.265,11.983)

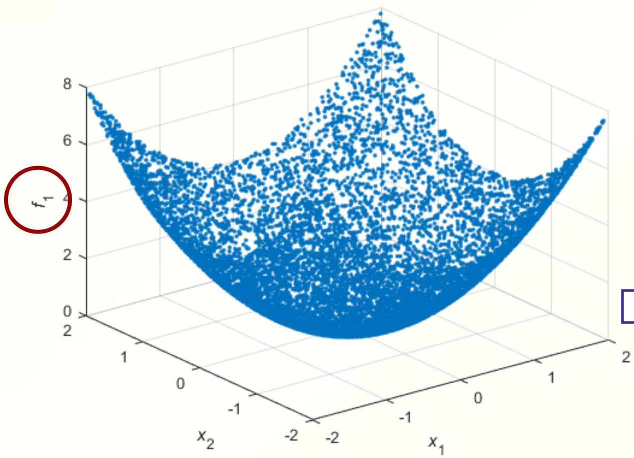
Парето фронт је…

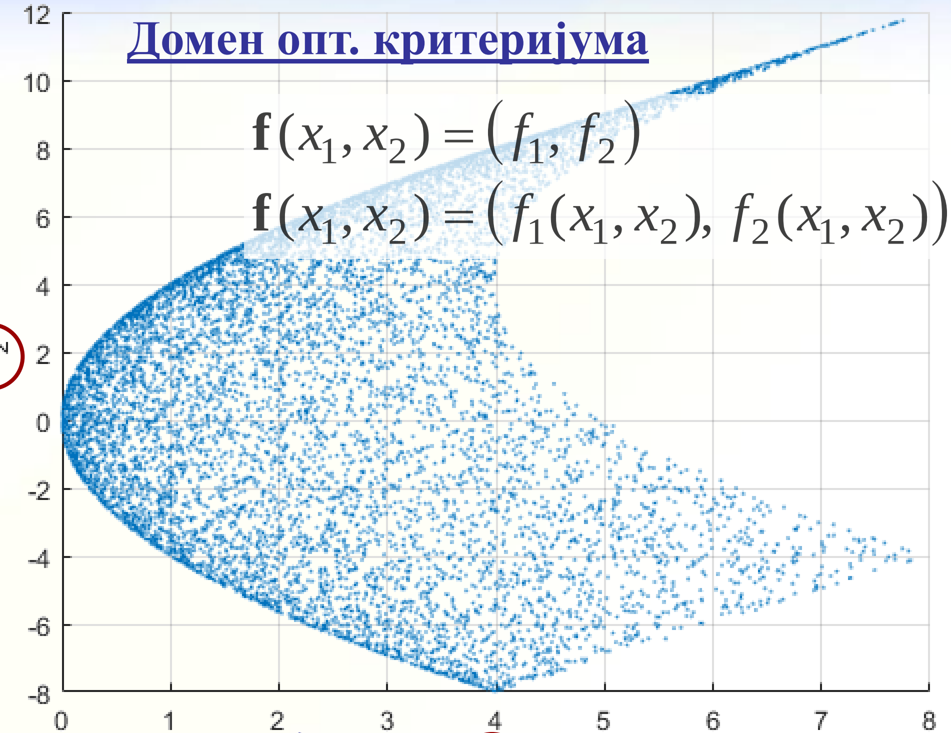
- Геометријско место тачака у простору оптимизационих критеријума чији је број димензија највише $G-1$, где је G број критеријума
  - уколико постоји 2 критеријума парето фронт је крива,
  - уколико постоји 3 критеријума парето фронт је површ,
  - уколико постоји 4 критеријума парето фронт је запремина, итд.
- Уколико постоје несупротстављени критеријуми, број димензија парето фронта се (у принципу) смањује

Домен опт. промењивих и домен критеријума

Домен опт. промењивих

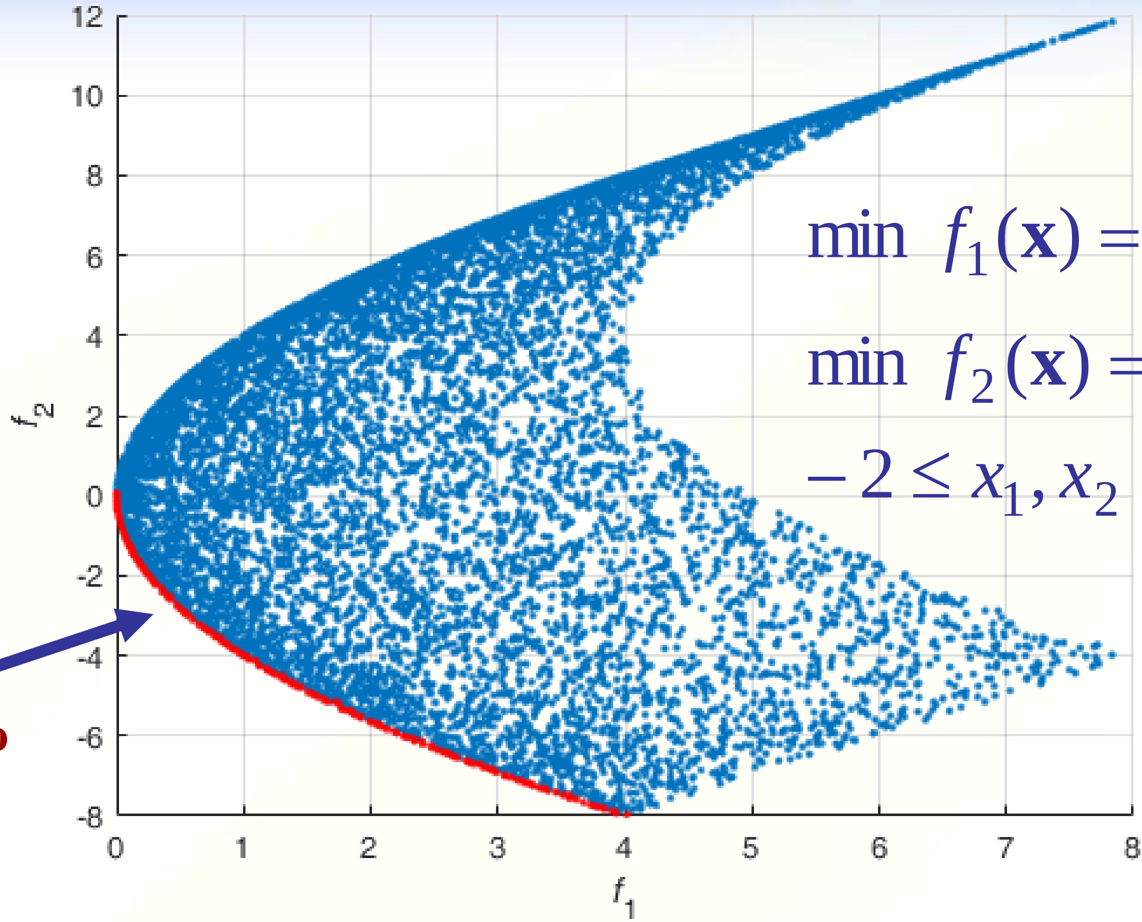






Број критеријума и број промењивих је различит у општем случају!

Пример парето фронта #1: два критеријума



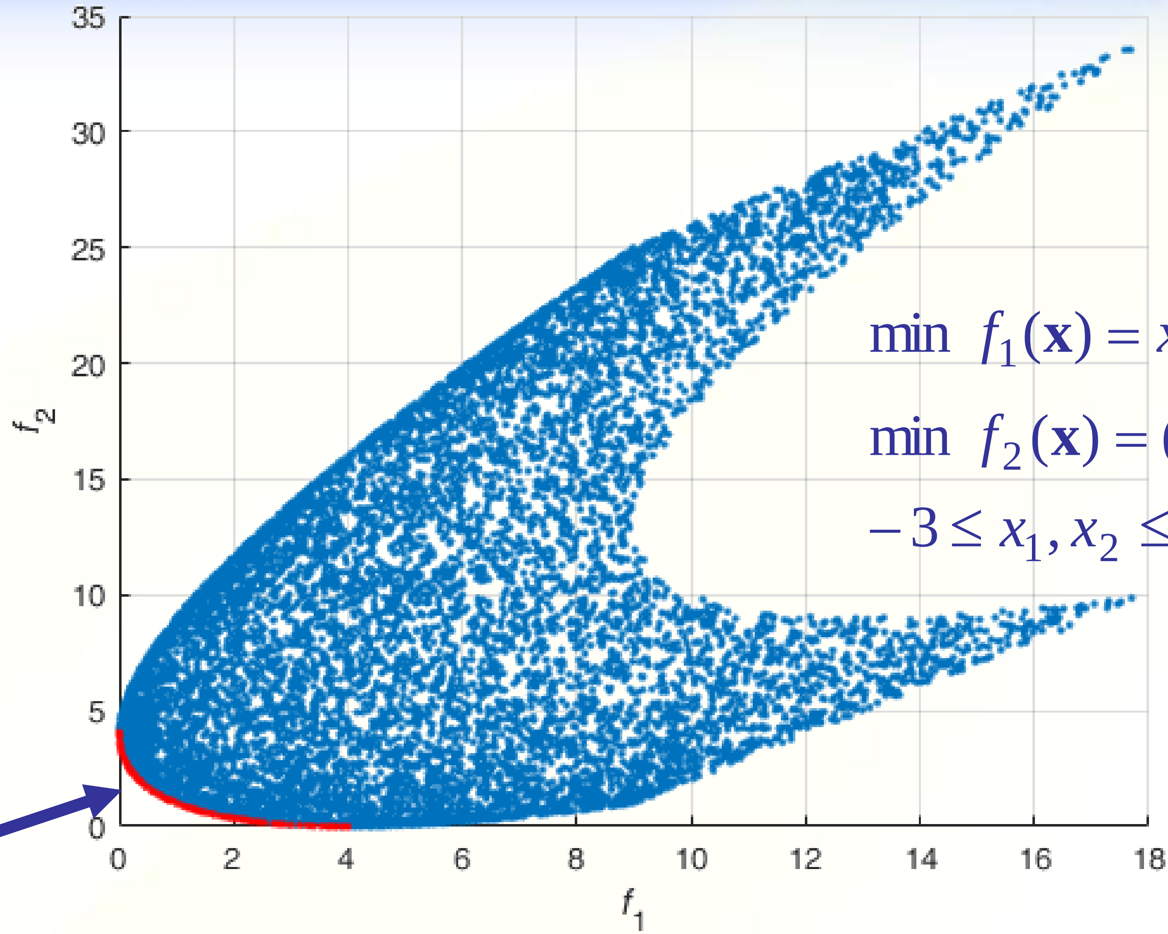
$$\min\ f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\min\ f_2(\mathbf{x}) = -4x_1 + x_2^2$$

$$-2 \le x_1, x_2 \le 2$$

Парето фронт

Пример парето фронта #2: два (друга) критеријума



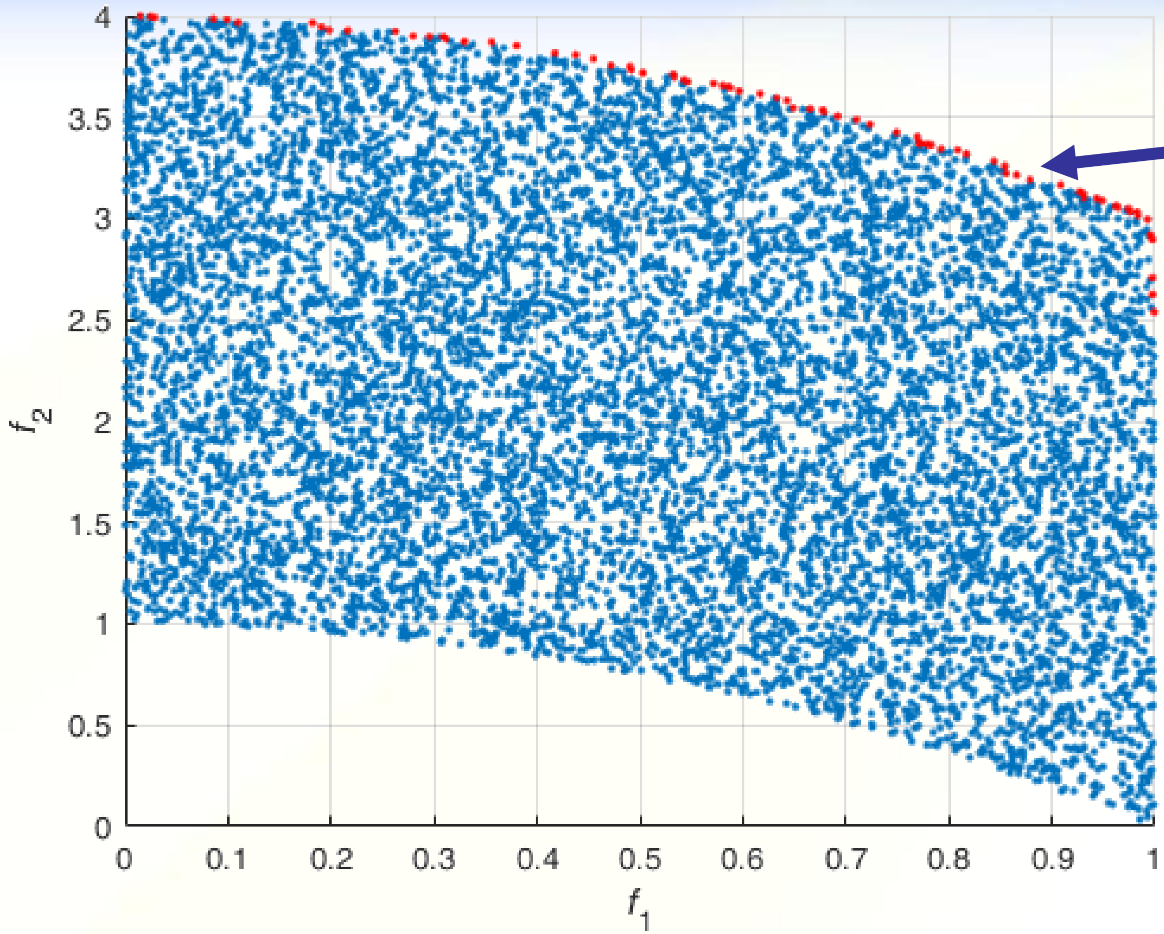
$$\min\ f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\min\ f_2(\mathbf{x}) = (x_1 + 2)^2 + x_2^2$$

$$-3 \le x_1, x_2 \le 3$$

Парето фронт

Пример парето фронта #3: максимизација



Парето фронт

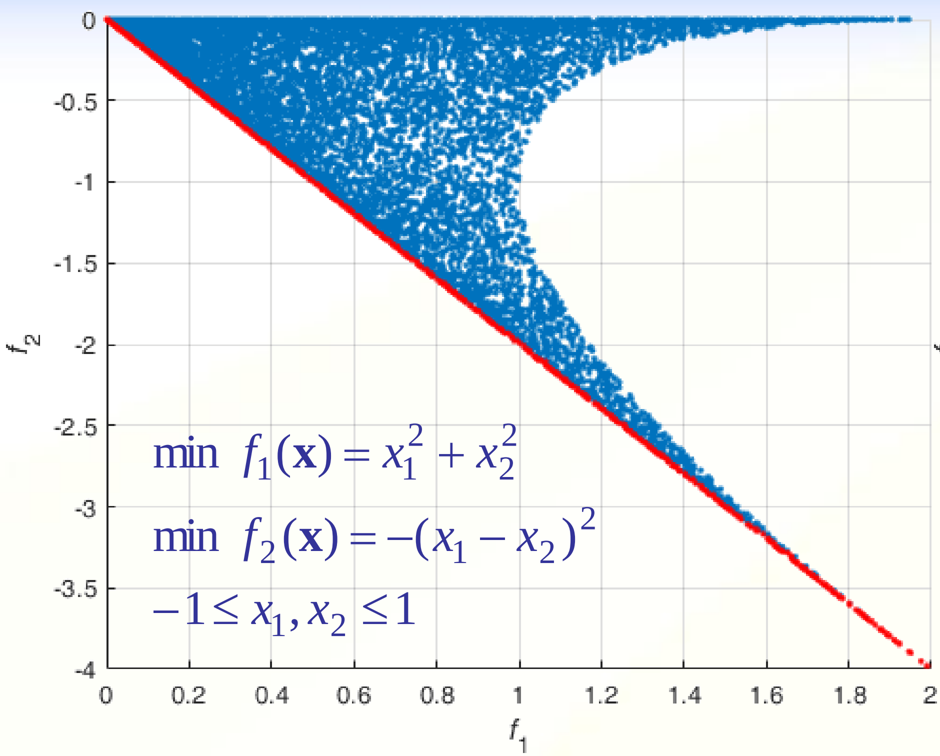
$$\max\ f_1(\mathbf{x}) = x_1$$

$$\max\ f_2(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2 + x_2$$

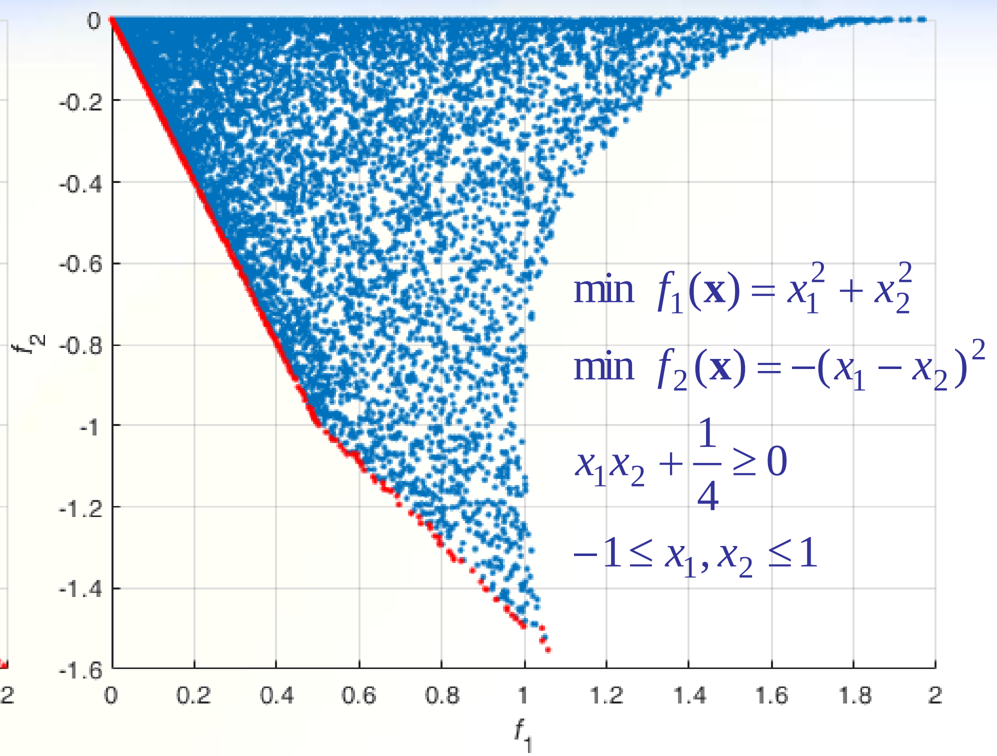
$$0 \le x_1 \le 1$$

$$0 \le x_2 \le 3$$

Пример парето фронта #4: додатни услови



$$\min\ f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\min\ f_2(\mathbf{x}) = -(x_1 - x_2)^2$$
$$-1 \le x_1, x_2 \le 1$$



$$\min\ f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$$
$$\min\ f_2(\mathbf{x}) = -(x_1 - x_2)^2$$
$$x_1 x_2 + \frac{1}{4} \ge 0$$
$$-1 \le x_1, x_2 \le 1$$

- Додатни услови МЕЊАЈУ парето фронт

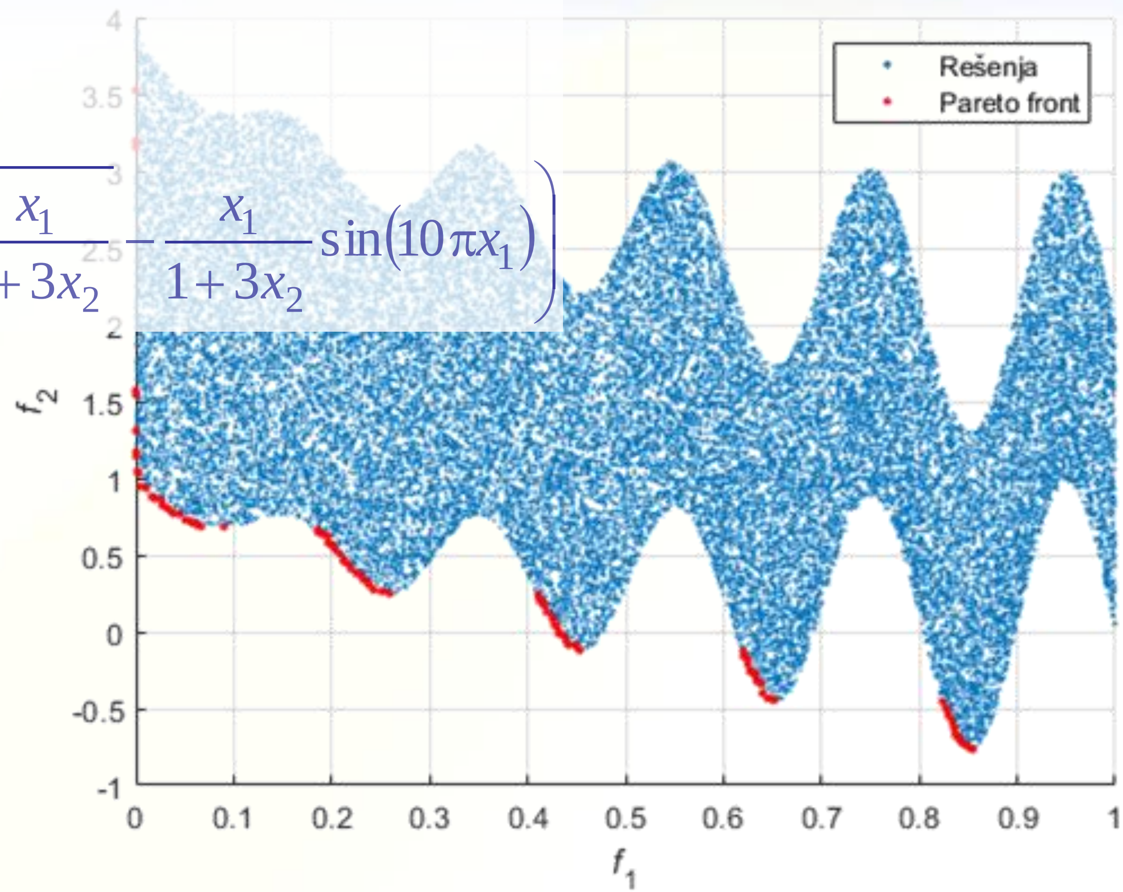
Пример парето фронта #5: фронт може имати прекиде!

$$0 \le x_1, x_2 \le 1$$

$$\min \ f_1(\mathbf{x}) = x_1$$

$$\min \ f_2(\mathbf{x}) = (1+3x_2)\left(1-\sqrt{\frac{x_1}{1+3x_2}}-\frac{x_1}{1+3x_2}\sin(10\pi x_1)\right)$$

- Парето фронт може имати прекиде!



Пример парето фронта #6: фронт може бити неконвексан

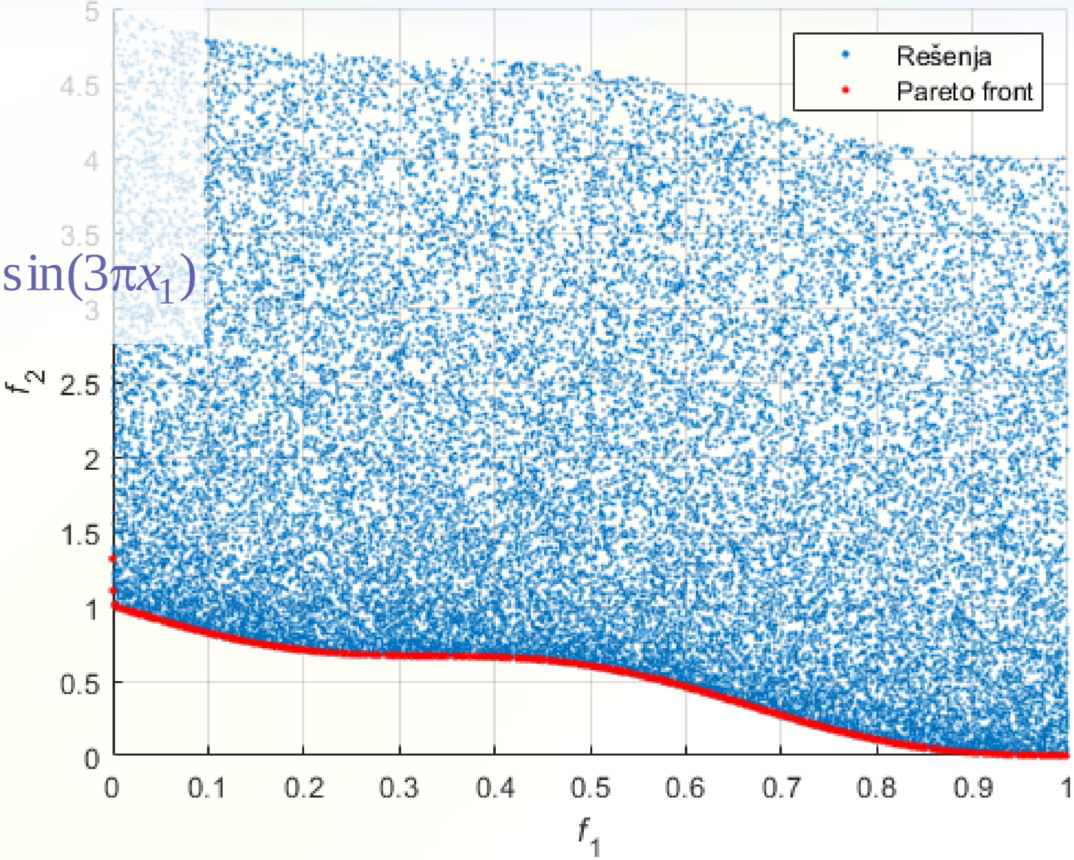
$$0 \le x_1 \le 1$$

$$-2 \le x_2 \le 2$$

$$\min \ f_1(\mathbf{x}) = x_1$$

$$\min \ f_2(\mathbf{x}) = 1 + x_2^2 - x_1 - \frac{1}{10}\sin(3\pi x_1)$$

- Парето фронт може бити неконвексан



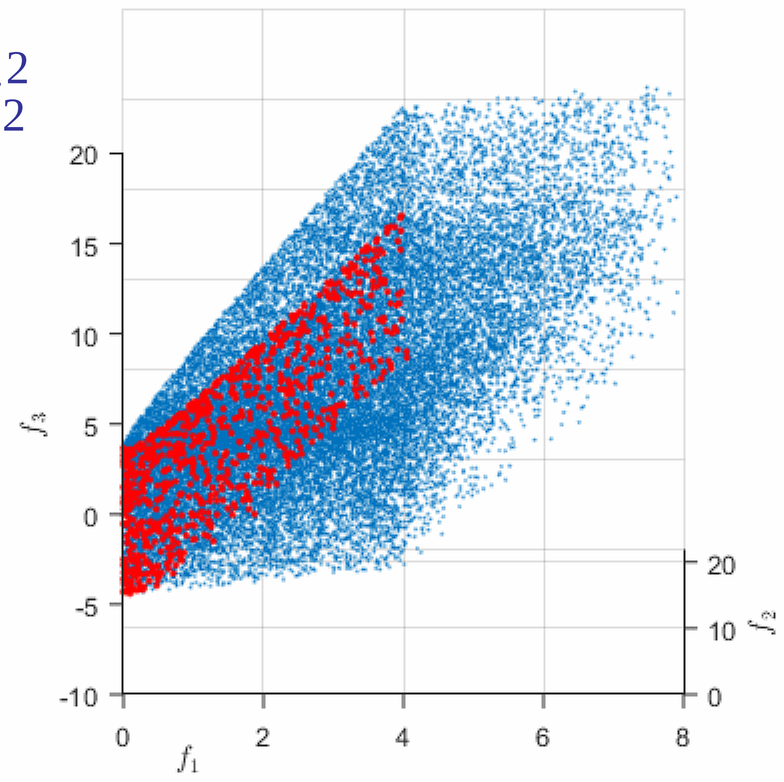
Пример парето фронта #7: 2D парето фронт

$$\min\ f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\min\ f_2(x_1, x_2, x_3) = 10 - 4x_1 + x_2^2$$

$$\min\ f_3(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 2x_3^2$$

$$-2 \le x_1, x_2, x_3 \le 2$$



- Оптимизација са три критеријума
- Парето фронт је 2D површ

Проналажење Парето фронта

- Оптимизациони проблеми који се срећу у инжењерској пракси по правилу имају више критеријума
- По (неписаном) правилу критеријуми оптимизације у реалним проблемима су супротстављени
- Теоријски: за све вишекритеријумске проблеме најбоље што можемо је да пронађемо парето фронт
- Како пронаћи парето фронт?
- Како то урадити ефикасно?

Потпуна претрага и провера да ли решење припада парето фронту

- Најједноставнији начин за проналажење парето фронта је провера свих тачака у оптимизационом простору да ли припадају парето фронту или не
- Тачке се могу генерисати
  - потпуним претраживањем
    (за опт. просторе са коначним бројем решења)
  - систематским претраживањем
  - случајним претраживањем
- Ово је **изузетно неефикасан** начин, јер у пракси најчешће није могуће потпуно претражити оптмизациони простор
- Ефикаснија решења:
  коришћење оптмизационих алгоритама

#1: Комбиновање критеријума са тежинским факторима

- Комбиновање више критеријума у јединствену оптимизациону функцију коришћењем тежинских фактора

$$f = w_1 * f_1 + w_2 * f_2$$

- Овај приступ води ка сабирању величина које су по природи различите
- Примери:
  цена и квалитет, брзина процесора и температура, функције електронског уређаја и његова запремина, итд.
- Избор тежинских фактора зависи од конкретног проблема и природе величина које се оптимизују
  (инжењер мора сам да их изабере на основу “искуства”)

Теорија и инжењерска пракса

- Теорија: парето фронт се добија ако узмемо све могуће вредности за тежинске факторе и урадимо оптимизацију за сваку комбинацију
- Бесконачно вредности коефицијената + бесконачно комбинација тежинских фактора = непрактичан приступ
- Које тежинске коефицијенте узети у пракси?
- Више покушаја или морамо имати предзнање о појединачним критеријумима
- Генерално, неефикасан начин и зависан од предзнања корисника

#2: Nondominated sorting GA (NSGA)

- Заснива се на стандардном ГА са изменама у делу за рачунање описне функције
- Израчунавају се описне функције за сваки критеријум, за свако решење у генерацији
- Проналазе се сва (nondominated solutions) решења која одговарају процењеном парето фронту у текућој генерацији
- Додељује се rank#1 и понавља се док сва решења нису рангирана

NSGA: одређивање парето фронта

- Описна функција на основу које се бирају решења за укрштање се рачуна на основу ранга (први ранг је бољи од осталих)
- Укрштање и мутација се раде на стандардан начин примерен ГА
- Парето фронт се памти и побољшава током генерација (тј. током оптимизације)

Рачунање описне функције за NSGA

- Решења се организују у скупове (нише)

- Број нише: $m_i = \sum_{j=1}^{N_{\text{pop}}} Sh\left(d_{i,j}\right)$

Растојање у простору критеријума између решења ***i*** и ***j***

$$Sh\left(d_{i,j}\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{d_{i,j}}{\sigma_{\text{share}}} & d_{i,j} < \sigma_{\text{share}} \\ 0 & d_{i,j} \geq \sigma_{\text{share}} \end{cases}$$

Полупречник скупа (нише)

- Оптимизациона функција: $F_i = Rank_i \cdot \left(1 + \dfrac{m_i}{q}\right)$

Укупан број решења у скупу (ниши)

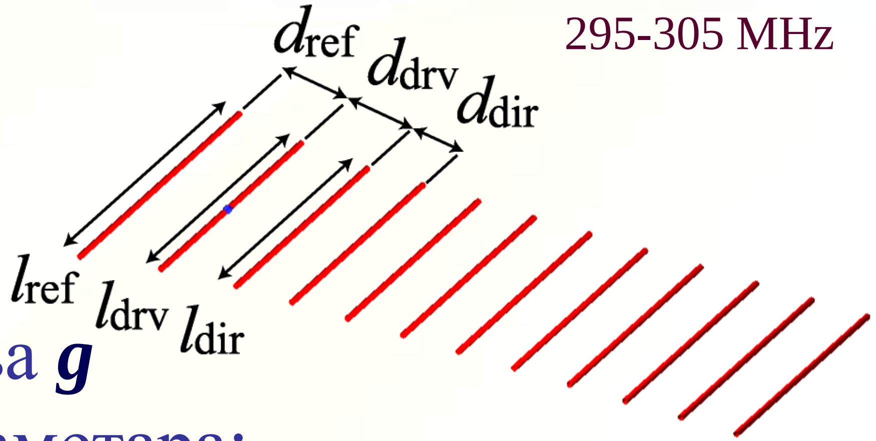
#3: Процена локалних минимума за проналажење парето фронта

- Комбиновање свих критеријума у једну описну функцију коришћењем тежинских фактора
- Вишеструко покретање оптимизације за различите комбинације тежинских фактора
- ПЛМ проналази више оптимума у једном покретању
- Та решења увек представљају процену парето фронта у датом покретању
- Памћење парето фронта за вишеструко покретање и одређивање решења која доминирају у фронту

Инжењерски пример: оптимизација антене

- Минимизирати коефицијент рефлексије s_{11}
- Максимизирати усмерено појачање у главном правцу зрачења g

295-305 MHz



- 6 оптимизационих параметара: $0{,}2\ \mathrm{m} \le l_{\mathrm{ref}}, l_{\mathrm{drv}}, l_{\mathrm{dir}}, d_{\mathrm{ref}}, d_{\mathrm{drv}}, d_{\mathrm{dir}} \le 0{,}8\ \mathrm{m}$
- **Парето фронт:** колико појачање морамо да "жртвујемо" да бисмо истовремено имали и добро прилагођену антену?

Поставка оптимизације

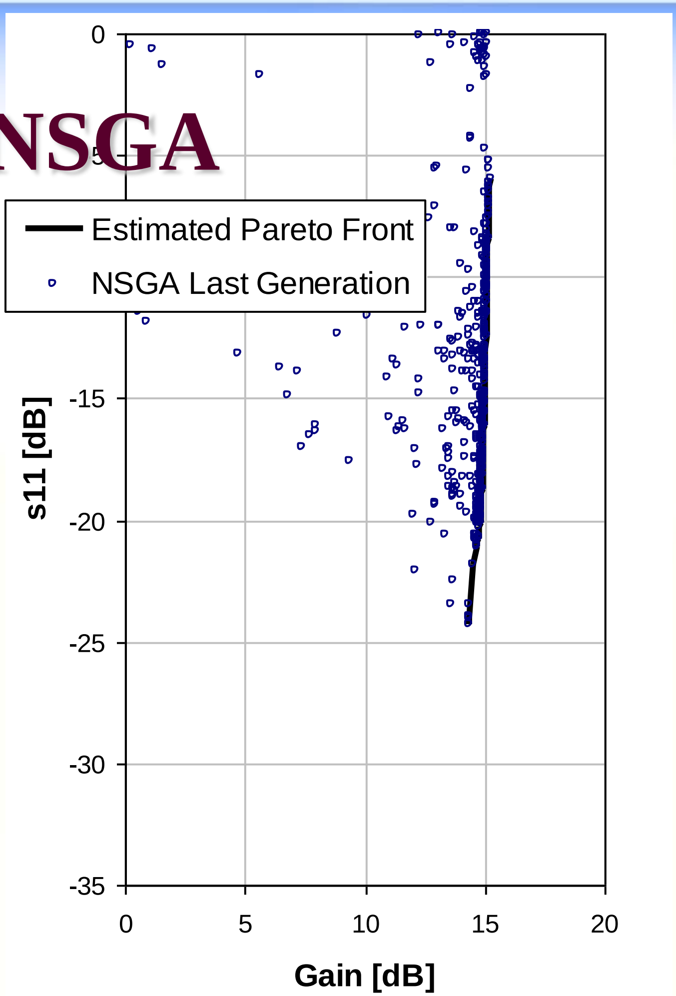
- **NSGA:** 500 решења, 40 генерација,
  20 000 итерација укупно
- **ПЛМ:** 7 комбинација тежинских фактора w_1, w_2

w_1	**1**	**1**	**10**	**1**	**100**	**0**	**1**
w_2	**1**	**10**	**1**	**100**	**1**	**1**	**0**

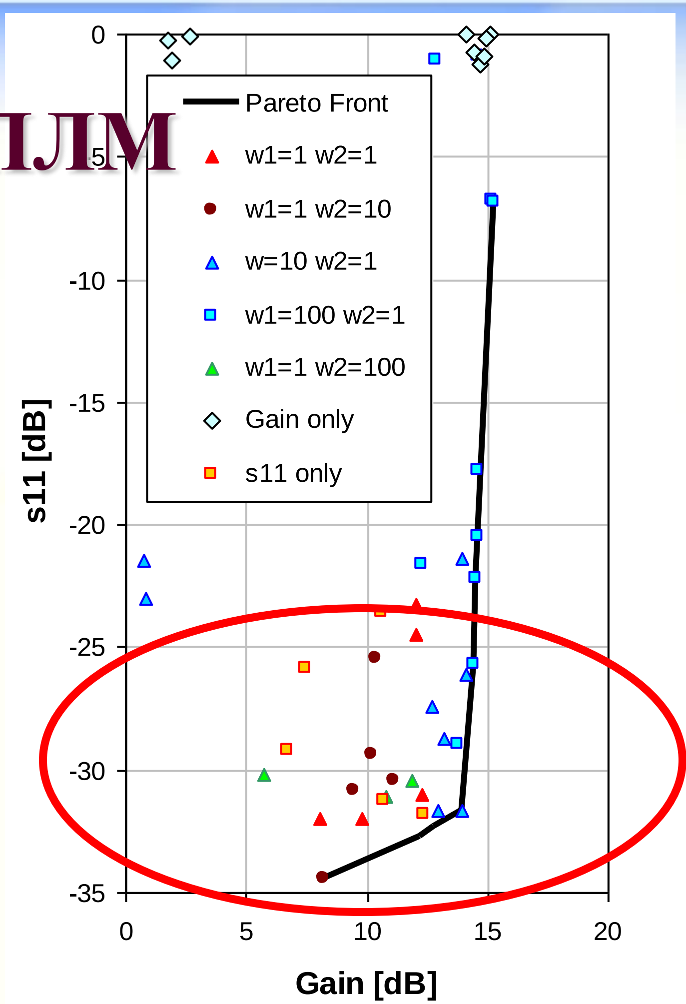
  ~3 000 итерација за једну комбинацију
  20 000 итерација укупно
- 20 **независних покретања**
  како би се проценило понашање алгоритама у статистичком смислу

Процењени парето фронт: резултати су комплементарни!

NSGA



ПЛМ



Предности и мане NSGA и ПЛМ алгоритама

- NSGA:
  - нема тежинских фактора
  - парето фронт се проналази у једном покретању
  - спора конвергенција (дуготрајна оптимизација)
  - потенцијални проблеми са оштрим минимумима
- ПЛМ:
  - бржа конвергенција од NSGA
  - мање зависан од тежинских коефицијената од вишеструког покретања основних опт. алгоритама
  - избор тежинских фактора зависи од проблема

Друге опције за проналажење парето фронта

- Постоје и други алгоритми за проналажење парето фронта
- Практично сви “еволутивни алгоритми” имају верзије за вишекритеријумску оптимизацију
- У литератури се често помиње и NSGA2
- Генерално, проналажење парето фронта је знатно сложенији оптимизациони проблем од оптимизације по једном критеријуму
- Пре почетка оптимизације увек проверити да ли се ради о оптимизацији са једним или више критеријума и на основу тога организовати оптимизацију

Алгоритми за проналажење парето фронта

- MOGA: **M**ulti-**O**bjective **G**enetic **A**lgorithm
- NPGA: **N**iched **P**areto **G**enetic **A**lgorithm
- Predator-Prey Evolution Strategy
- Distributed Reinforced Learning Approach
  - агентима додељене различите опт. функције
- NCGA: **N**eighborhood **C**onstrained **GA**
  - критеријуми се претварају у ограничења
- Nesh GA
  - поправљање једног по једног критеријума (док се остали не дирају)
- MOEA: **M**ulti-**O**bjective **E**volutionary **A**lgorithms

Отворена питања за проблеме са више критеријума

- Како онемогућити груписање решења у једном делу оптимизационог простора?
- Како се перформансе алгоритама за одређивање парето фронта скалирају са повећањем броја критеријума?
- Како обезбедити конвергенцију алгоритма ка свим деловима парето фронта?
- Како поредити перформансе алгоритама?
- Како приказати парето фронт?

Парето оптималност и компромиси

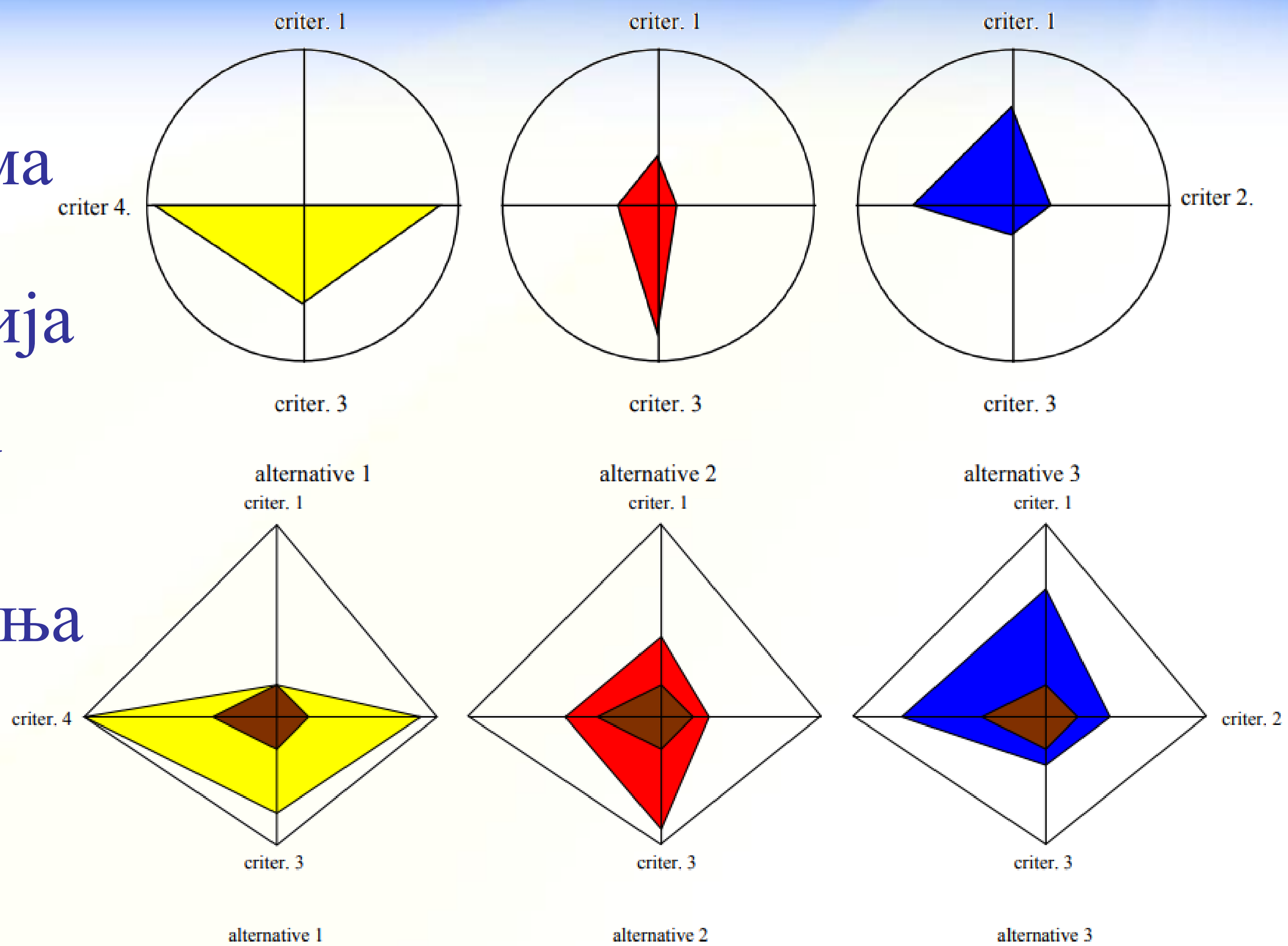
- Већина људи, ван математике, инжењерства и економије НИЈЕ чула за појам парето оптималности
- Међутим, најбољи могући компромиси се јасно (интуитивно) разумеју
  - A good compromise is like a good sentence, or a good piece of music. Everybody can recognize it. They say: 'Huh. It works. It makes sense.‘
- Одређивање једне тачке парето фронта је једнако решавању једног проблема са једним критеријумом
- Одређивање парето фронта у већини инжењерских апликација је данас на граници (или изван) доступних рачунарских ресурса!

Како искористити парето фронт?

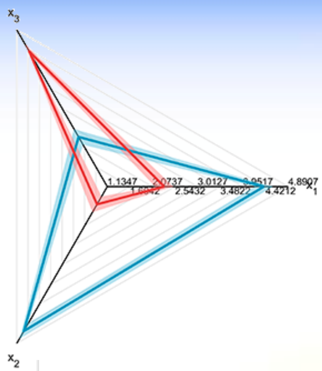
- Уколико је познат **тачан парето фронт** или је позната “најбоља” процена парето фронта имамо увид у скуп свих најбољих компромиса које можемо да направимо за задати проблем
- Шта даље?
- Како одабрати једно од компромисних решења?
- Избор “најбољег” компромиса зависи од онога ко је у позицији да доноси одлуку
- Теорија игара и аутоматско одлучивање

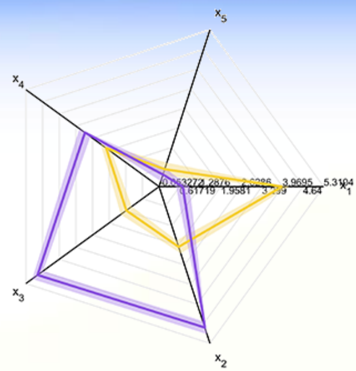
Како визуелно приказати најбоље могуће компромисе?

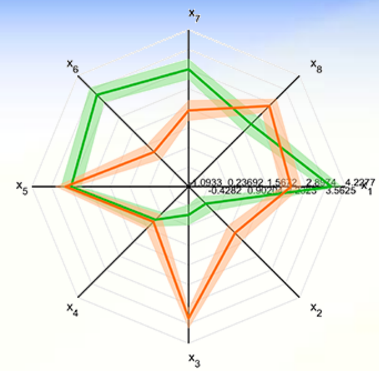
- Пример:
  4 критеријума
- У питању је максимизација по сваком критеријуму
- Графички приказ решења
  - Radar chart
  - Spider chart
  - Star chart

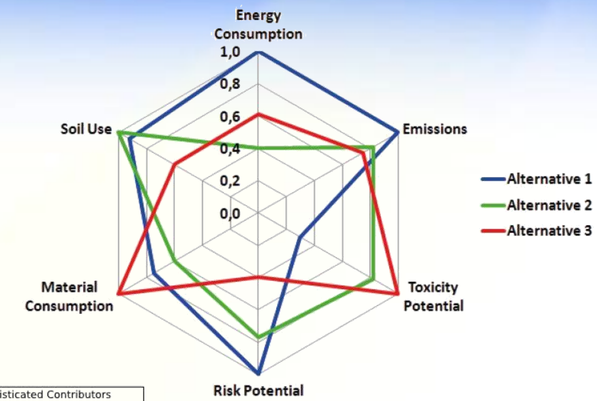


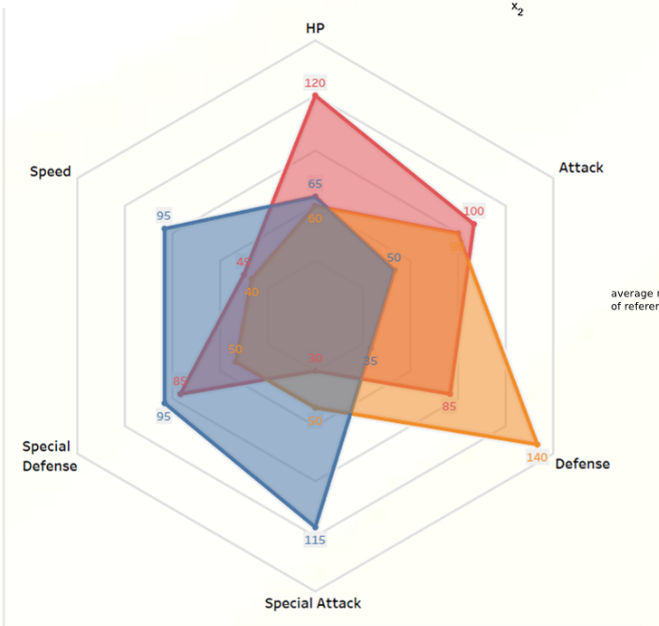
Примери графичког приказа тачака парето фронта

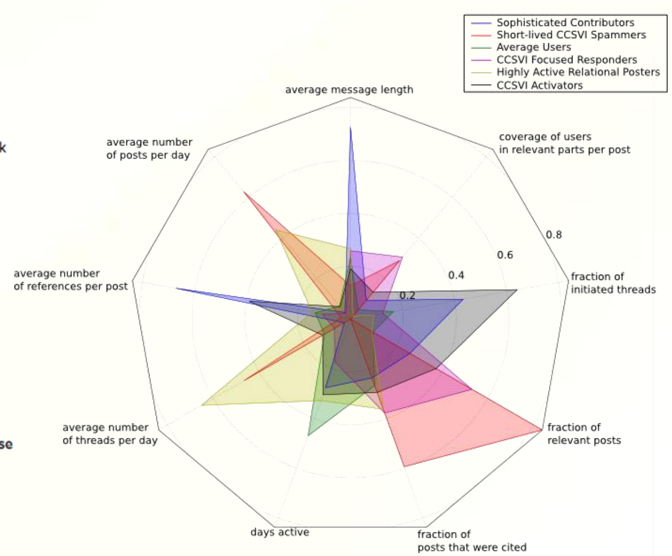


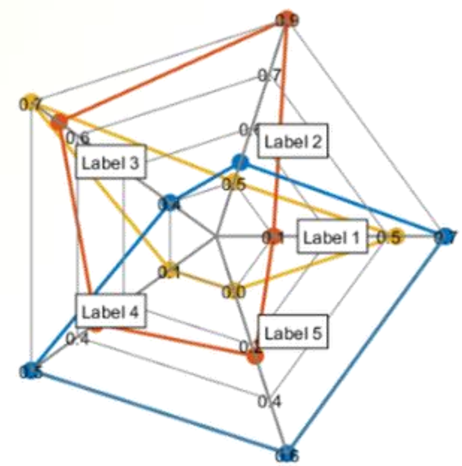












Задатак за вежбе

- Проценити парето фронт вишекритеријумске оптимизације функција двеју промењљивих
- Два проблема: без и са додатних услова

$$\begin{aligned}&\min\ f_1(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2\\&\min\ f_2(\mathbf{x}) = -(x_1 - x_2)^2\\&-1 \le x_1, x_2 \le 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\min\ f_1(\mathbf{x}) = 2x_1^2 + x_2^2\\&\min\ f_2(\mathbf{x}) = -(x_1 - x_2)^2\\&x_1 x_2 + \frac{1}{4} \ge 0\\&-1 \le x_1, x_2 \le 1\end{aligned}$$

Задатак детаљи

- Генерисати 10000 тачака
  случајно изабраних из домена оптимизационих променљивих са униформном расподелом
- Израчунати вредности
  оптимизационих функција у свим тачкама
- Пронаћи доминантна решења
- Нацртати:
  - све генерисане тачке у домену критеријума и
  - јасно означити парето фронт (доминантна решења)

Бонус задатак

- Текст и подаци из задатка са трећих вежби (одређивање стабла минималног збира тежина грана са “пеналима” за гранања)
- Одредити парето фронт (два критеријума)
  - Минимизирати збир тежина (растојања) грана стабла
  - Минимизирати број гранања у стаблу
    (ако три или више грана полазе из истог чвора,
    додати број грана минус два у оптимизациону функцију)
- Потпуно претражити оптимизациони простор и пронаћи све тачке парето фронта (nondominated sorting)
- Записати све пронађене тачке парето фронта у ASCII фајл заједно са вредностима опт. функција за критеријуме