

Modelowanie i Identyfikacja

Raport z pierwszych trzech zajęć laboratoryjnych

Jan Rybarz

29 Marca 2025

Spis treści

1	Wprowadzenie	3
2	Laboratorium 0 - Generatory liczb pseudolosowych	3
2.1	Opis zadania	3
2.2	Metoda przekształcenia pól kształtnego	3
2.3	Metoda rekurencyjna	4
2.4	Wyznaczanie okresu generatora	5
3	Laboratorium 1 - Metoda odwracania dystrybucyj	6
3.1	Opis zadania	6
3.2	Matematyczne wyprowadzenie rozkładów	6
3.3	Wyniki i analiza	7
3.4	Problemy i ograniczenia metody odwracania dystrybucyj	9
4	Laboratorium 2 - Metoda odrzucania	9
4.1	Opis zadania	9
4.2	Matematyczne wyprowadzenie	10
4.2.1	Rozkład $f(x) = x + 1$ dla $x \in (-1, 0]$ oraz $f(x) = -x + 1$ dla $x \in (0, 1]$	10
4.2.2	Rozkład o funkcji gęstości z warunkiem $\int f(x) dx = 1$	10
4.2.3	Rozkład półokręgu	10
4.2.4	Rozkład normalny $N(0, 1)$	10
4.3	Wyniki i analiza	11
4.4	Wydajność metody odrzucania	13
5	Podsumowanie	13

1 Wprowadzenie

W niniejszym raporcie przedstawiono realizację trzech laboratoriów z przedmiotu "Modelowanie i Identyfikacja". W każdym z nich generowane były liczby losowe za pomocą różnych metod, a następnie analizowano ich właściwości. Głównym celem było zapoznanie się z technikami generacji liczb losowych oraz ich analizą w kontekście przyjętych modeli.

2 Laboratorium 0 - Generatory liczb pseudolosowych

2.1 Opis zadania

Celem zajęć było zaimplementowanie generatorów liczb losowych opartych na:

- Przekształceniu piłokształtnym,
- Równaniu rekurencyjnym o postaci:

$$X_{n+1} = (a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + c) \mod m \quad (1)$$

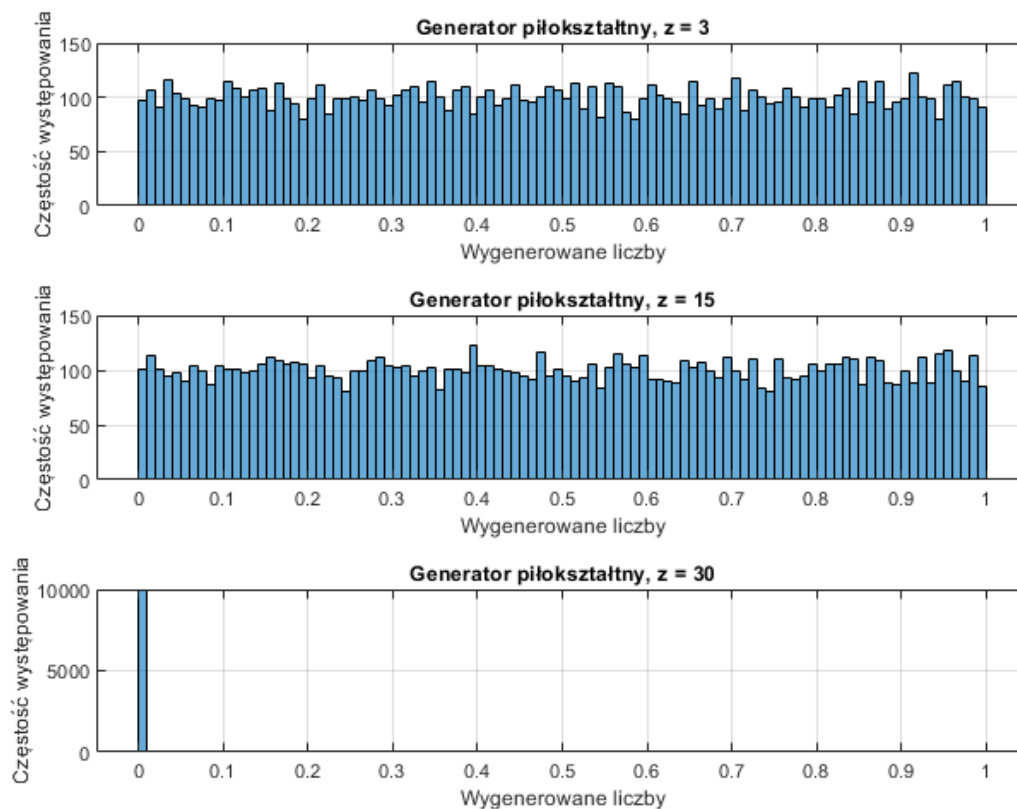
2.2 Metoda przekształcenia piłokształtnego

Generator oparty na przekształceniu piłokształtnym wykorzystuje wzór:

$$X_{n+1} = X_n \cdot z - \lfloor X_n \cdot z \rfloor \quad (2)$$

Gdzie:

- X_n - wartość początkowa,
- z - liczba zębów piły,
- $\lfloor \cdot \rfloor$ - funkcja podłogi.



Rysunek 1: Histogramy wygenerowanych liczb dla różnych wartości z

Analiza: Wykresy przedstawiają wpływ liczby zębów z na rozkład generowanych liczb. Dla małych wartości z (np. 3), histogram jest bardziej równomierny. Przy większych wartościach z liczby kumulują się w wąskim zakresie, co oznacza, że generator traci swoje właściwości losowe.

Sekwencyjność: Jak zauważono w tabeli 1, istnieje powtarzalność sekwencji po 20 próbkach, co świadczy o ograniczonym okresie generatora. Przykładowo, próbka nr 1 jest taka sama jak próbka nr 21, co oznacza, że generator powtarza sekwencję.

Tabela 1: Pierwsze 40 wygenerowanych liczb (zaokrąglone do dwóch miejsc po przecinku)

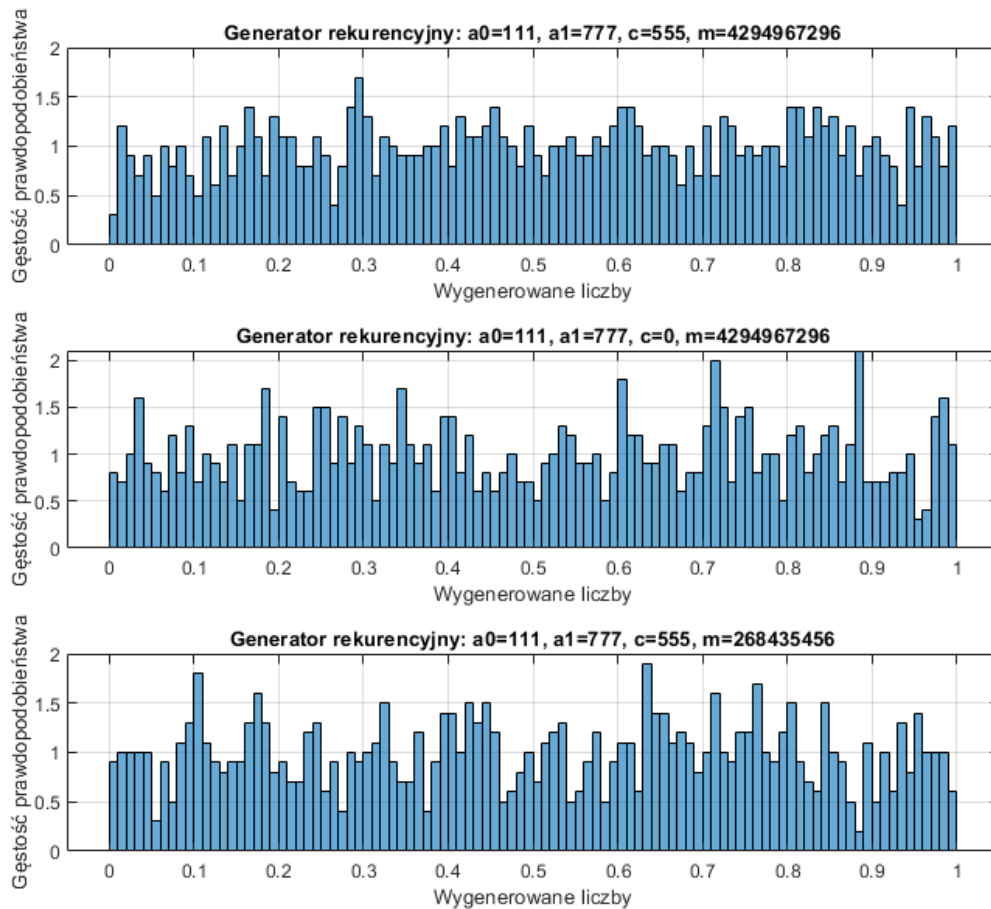
Nr próbki	Wartość	Nr próbki	Wartość
1	0.29	21	0.29
2	0.87	22	0.87
3	0.61	23	0.61
4	0.83	24	0.83
5	0.49	25	0.49
6	0.47	26	0.47
7	0.41	27	0.41
8	0.23	28	0.23
9	0.69	29	0.69
10	0.07	30	0.07
11	0.21	31	0.20
12	0.63	32	0.59
13	0.89	33	0.77
14	0.67	34	0.32
15	0.01	35	0.96
16	0.03	36	0.87
17	0.09	37	0.61
18	0.27	38	0.83
19	0.81	39	0.49
20	0.43	40	0.47

Wnioski: Generator pilokształtny jest prosty, ale jego skuteczność jest ograniczona przez okres sekwencji. Wykresy i analiza pokazują, że wartości z mają istotny wpływ na generowane liczby.

2.3 Metoda rekurencyjna

Generator liczb pseudolosowych o równaniu rekurencyjnym jest definiowany przez wzór:

$$X_{n+1} = (a_0 X_n + a_1 X_{n-1} + c) \mod m \quad (3)$$



Rysunek 2: Histogramy generowane za pomocą generatora rekurencyjnego z różnymi parametrami

Analiza: Na powyższym wykresie przedstawiono histogramy wygenerowane za pomocą generatora rekurencyjnego z różnymi zestawami parametrów. Każdy z histogramów pokazuje pewną równomierność, ale widać, że zmiana parametrów a_0 , a_1 , c i m znacząco wpływa na rozkład generowanych liczb.

Wpływ parametrów:

- Wprowadzenie stałej c zwiększa równomierność generowanych liczb.
- Zmiana wartości m powoduje istotną zmianę w zakresie generowanych liczb.
- Parametry a_0 i a_1 wpływają na okres generatora oraz równomierność rozkładu.

Wnioski: Generator rekurencyjny pozwala na uzyskanie bardziej równomiernego rozkładu niż generator piłokształtny, jednak dobór odpowiednich parametrów ma kluczowe znaczenie dla jakości generowanych liczb.

2.4 Wyznaczanie okresu generatora

Okres generatora liczby pseudolosowych został wyznaczony poprzez analizę powtarzalności ciągu wygenerowanych wartości. Dla każdej wartości początkowej X_0 oraz liczby zębów z , wygenerowano określoną liczbę próbek n . Następnie porównano kolejne wartości w celu wykrycia cykliczności, czyli powtarzającej się sekwencji.

W praktyce okres wyznaczano poprzez iteracyjne porównywanie wartości próbek z początkowym segmentem ciągu. W przypadku wykrycia identycznego fragmentu (z dokładnością do ustalonego progu błędu), okres generatora był równy liczbie próbek pomiędzy początkiem i końcem powtarzającej się sekwencji.

Analiza wykazała, że długość okresu zależy bezpośrednio od wartości początkowej oraz liczby zębów z . Dla małych wartości z okres był dłuższy, natomiast dla większych wartości generator szybko wpadał w cykl.

3 Laboratorium 1 - Metoda odwracania dystrybucyj

3.1 Opis zadania

Metoda odwracania dystrybucyj polega na generowaniu liczb losowych za pomocą odwrotności dystrybucyj dla zadanego rozkładu prawdopodobieństwa. Przeanalizowano generację następujących rozkładów:

- Rozkład o gęstości $f(x) = 2x$ dla $x \in [0, 1]$,
- Rozkład o gęstości $f(x) = x + 1$ dla $x \in (-1, 0)$ oraz $f(x) = -x + 1$ dla $x \in [0, 1]$,
- Rozkład wykładniczy,
- Rozkład Laplace'a.

3.2 Matematyczne wyprowadzenie rozkładów

Rozkład o gęstości $f(x) = 2x$ dla $x \in [0, 1]$:

$$F(x) = \int_0^x 2t \, dt = t^2 \Big|_0^x = x^2 \quad (4)$$

Odwrotność dystrybucyj:

$$F^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad (5)$$

Rozkład o gęstości $f(x) = x + 1$ dla $x \in (-1, 0)$ oraz $f(x) = -x + 1$ dla $x \in [0, 1]$:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x+1)^2}{2}, & x \in [-1, 0] \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, & x \in [0, 1] \end{cases} \quad (6)$$

Odwrotność dystrybucyj:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} -1 + \sqrt{2y}, & y \in [0, 0.5] \\ 1 - \sqrt{2(1-y)}, & y \in (0.5, 1] \end{cases} \quad (7)$$

Rozkład wykładniczy:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0 \quad (8)$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (9)$$

Odwrotność dystrybucyj:

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - y) \quad (10)$$

Rozkład Laplace'a:

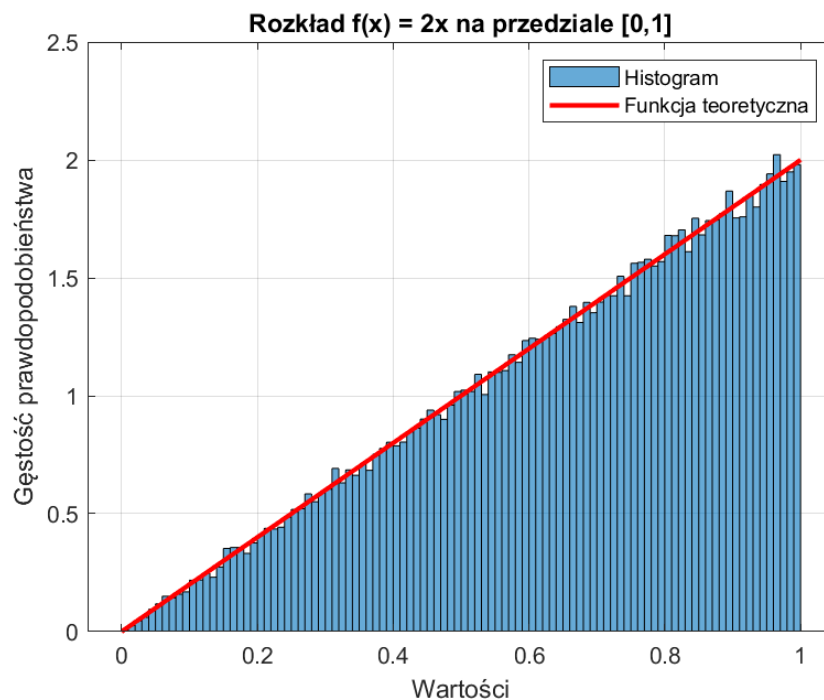
$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (11)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x, & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (12)$$

Odwrotność dystrybucyj:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} \ln(2y), & y \in [0, 0.5] \\ -\ln(2(1-y)), & y \in (0.5, 1] \end{cases} \quad (13)$$

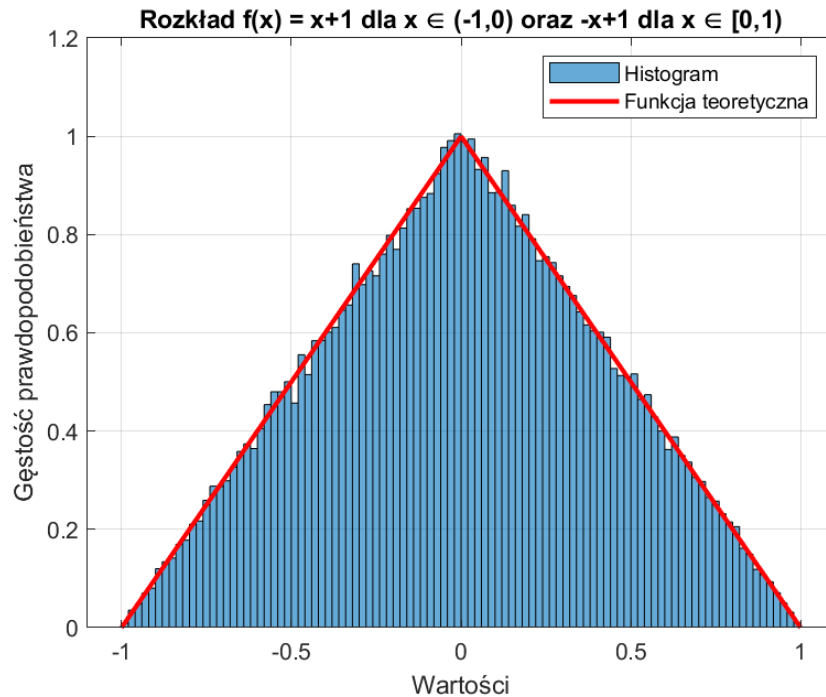
3.3 Wyniki i analiza



Rysunek 3: Rozkład $f(x) = 2x$ na przedziale $[0, 1]$.

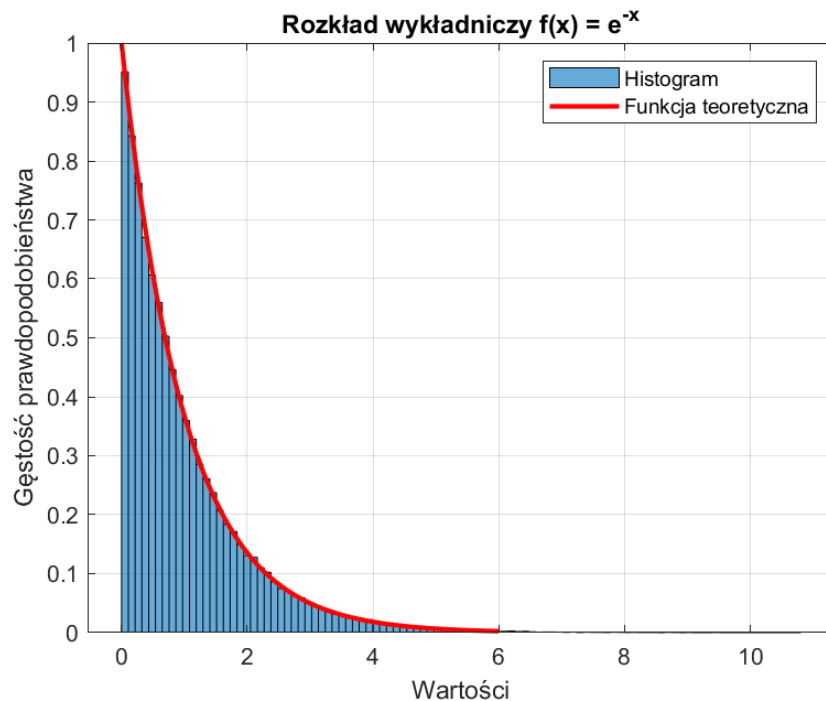
Analiza: Histogram pokazuje, że rozkład jest rosnący w sposób liniowy, co jest zgodne z teoretycznym wzorem funkcji gęstości. Funkcja odwrotna została poprawnie zaimplementowana.

Wnioski: Metoda odwracania dystrybuanty działa poprawnie dla wszystkich rozkładów, dla których można wyznaczyć odwrotność funkcji dystrybuanty. Dla rozkładów bardziej złożonych konieczne jest stosowanie innych metod generacji liczb losowych.



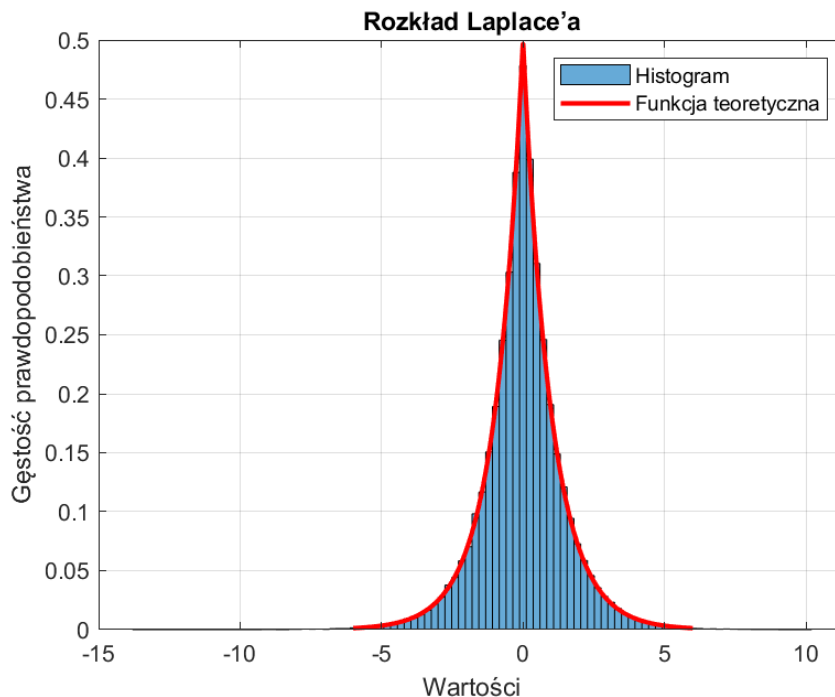
Rysunek 4: Rozkład $f(x) = x + 1$ dla $x \in (-1, 0)$ oraz $f(x) = -x + 1$ dla $x \in [0, 1]$.

Analiza: Histogram przedstawia rozkład o symetrycznym kształcie przypominającym trójkąt. Funkcja gęstości jest rosnąca na przedziale $(-1, 0)$ i malejąca na przedziale $[0, 1]$.



Rysunek 5: Rozkład wykładniczy $f(x) = e^{-x}$

Analiza: Histogram przedstawia typowy rozkład wykładniczy, w którym wartości większe od zera występują z mniejszym prawdopodobieństwem niż wartości bliskie zera. Funkcja teoretyczna dobrze pokrywa się z histogramem.



Rysunek 6: Rozkład Laplace'a

Analiza: Histogram jest symetryczny względem zera z charakterystycznym pikiem w środku. Rozkład Laplace'a jest bardziej skupiony wokół wartości średniej niż rozkład normalny, co jest dobrze widoczne na wykresie.

Wnioski: Metoda odwracania dystrybuanty jest prosta do zaimplementowania, ale skuteczność zależy od możliwości wyznaczenia odwrotnej funkcji dystrybuanty. W przypadku bardziej skomplikowanych rozkładów może być wymagane użycie innych metod.

3.4 Problemy i ograniczenia metody odwracania dystrybuanty

Metoda odwracania dystrybuanty jest efektywna, gdy funkcja dystrybuanty posiada analityczną postać odwrotną. Jednakże, w wielu przypadkach, zwłaszcza dla bardziej złożonych rozkładów, wyznaczenie tej odwrotnej funkcji jest trudne lub wręcz niemożliwe.

Ponadto, przy generowaniu liczb z rozkładów o gęstości skupionej w wąskich przedziałach (np. rozkład wykładniczy), metoda może prowadzić do uzyskiwania wartości skrajnych z dużą częstotliwością. Problem ten staje się bardziej widoczny w sytuacji, gdy dystrybuanta rośnie bardzo szybko lub bardzo wolno na pewnych przedziałach.

W takich przypadkach stosowanie metody odwracania dystrybuanty może być mniej efektywne w porównaniu z metodami alternatywnymi, takimi jak metoda odrzucania, która nie wymaga wyznaczania odwrotnej funkcji.

4 Laboratorium 2 - Metoda odrzucania

4.1 Opis zadania

Metoda odrzucania polega na generowaniu liczb losowych przy użyciu funkcji pomocniczej oraz warunku akceptacji. Przeanalizowano generację dla następujących rozkładów:

- Rozkład $f(x) = x + 1$ dla $x \in (-1, 0]$ oraz $f(x) = -x + 1$ dla $x \in (0, 1]$,
- Rozkład o funkcji gęstości z warunkiem $\int f(x)dx = 1$,
- Rozkład półokręgu,
- Rozkład normalny $N(0, 1)$.

4.2 Matematyczne wyprowadzenie

4.2.1 Rozkład $f(x) = x + 1$ dla $x \in (-1, 0]$ oraz $f(x) = -x + 1$ dla $x \in (0, 1]$

$$\int_{-1}^0 (x+1) dx + \int_0^1 (-x+1) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Zatem funkcja gęstości jest poprawna. Wybierzemy funkcję pomocniczą $g(x) = 1$ na przedziale $[-1, 1]$.

$$c = \sup(f(x)) = 1$$

Warunek akceptacji:

$$u \leq \frac{f(x)}{c \cdot g(x)} = f(x)$$

4.2.2 Rozkład o funkcji gęstości z warunkiem $\int f(x) dx = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 50, & x \in [0, 0.01] \\ c, & x \in (0.01, 1] \end{cases}$$

$$\int_0^{0.01} 50 dx + \int_{0.01}^1 c dx = 1$$

$$0.5 + c \cdot 0.99 = 1 \implies c = \frac{0.5}{0.99} \approx 0.505$$

Funkcja pomocnicza $g(x)$ to funkcja jednostajna na przedziale $[0, 1]$ z maksymalnym współczynnikiem $c = 50$.

4.2.3 Rozkład półokręgu

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

Całkowita powierzchnia pod krzywą:

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Funkcja gęstości:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{\pi}{2}}$$

Funkcja pomocnicza $g(x) = 1$, co wymaga współczynnika:

$$c = \sup(f(x)) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

4.2.4 Rozkład normalny $N(0, 1)$

Dla rozkładu normalnego $N(0, 1)$:

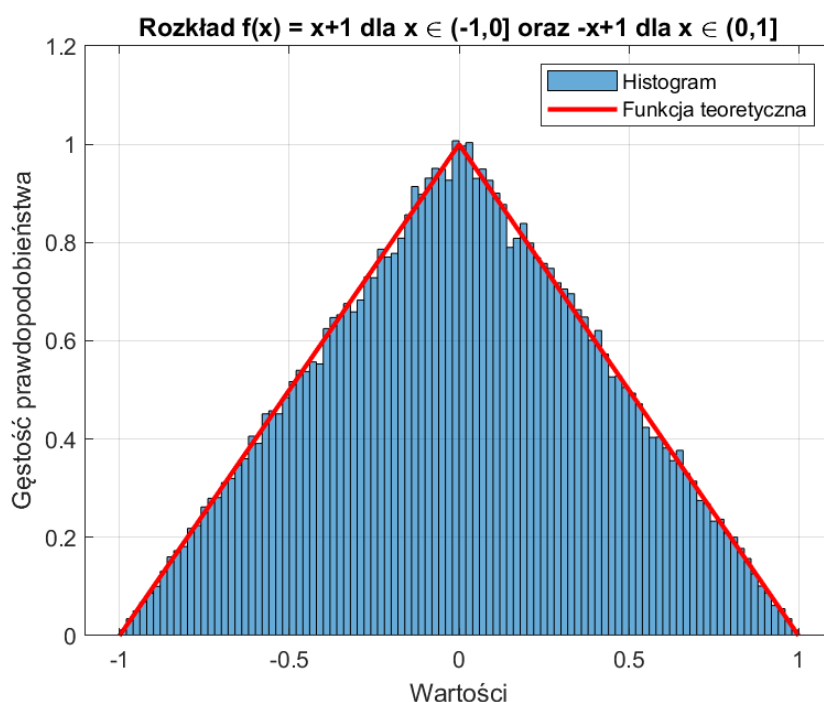
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Metoda odrzucania z funkcją pomocniczą $g(x)$ będącą rozkładem wykładniczym o współczynniku λ . Warunek akceptacji to:

$$u \leq \frac{f(x)}{c \cdot g(x)}$$

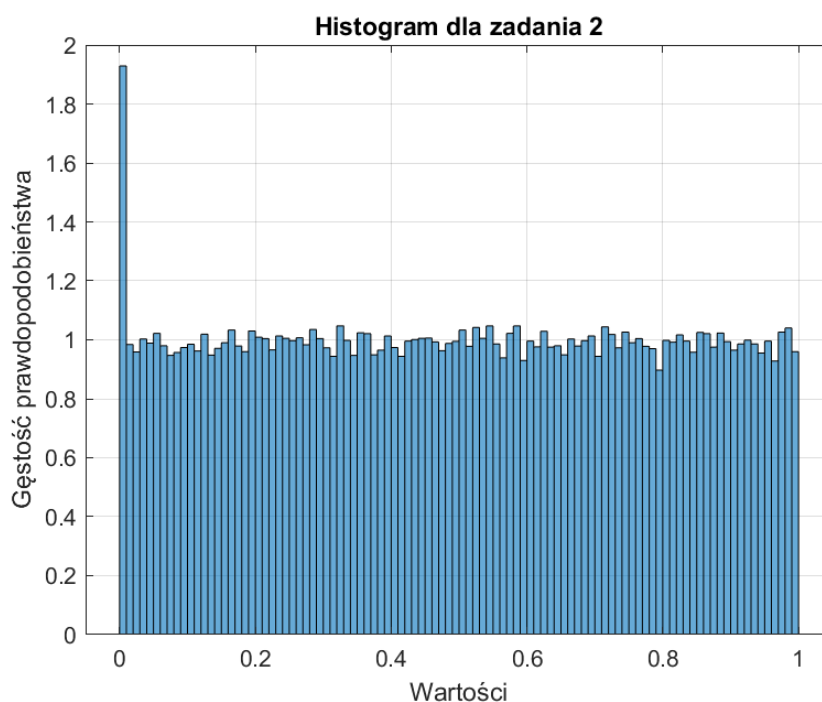
Wnioski: Metoda odrzucania jest uniwersalna i pozwala na generowanie dowolnych rozkładów. Jej skuteczność zależy jednak od prawidłowego doboru funkcji pomocniczej. Im bardziej funkcja pomocnicza przypomina docelowy rozkład, tym większa jest skuteczność metody. W przypadku źle dobranych funkcji pomocniczych, wydajność generowania może być bardzo niska.

4.3 Wyniki i analiza



Rysunek 7: Rozkład $f(x) = x + 1$ dla $x \in (-1, 0]$ oraz $f(x) = -x + 1$ dla $x \in (0, 1]$.

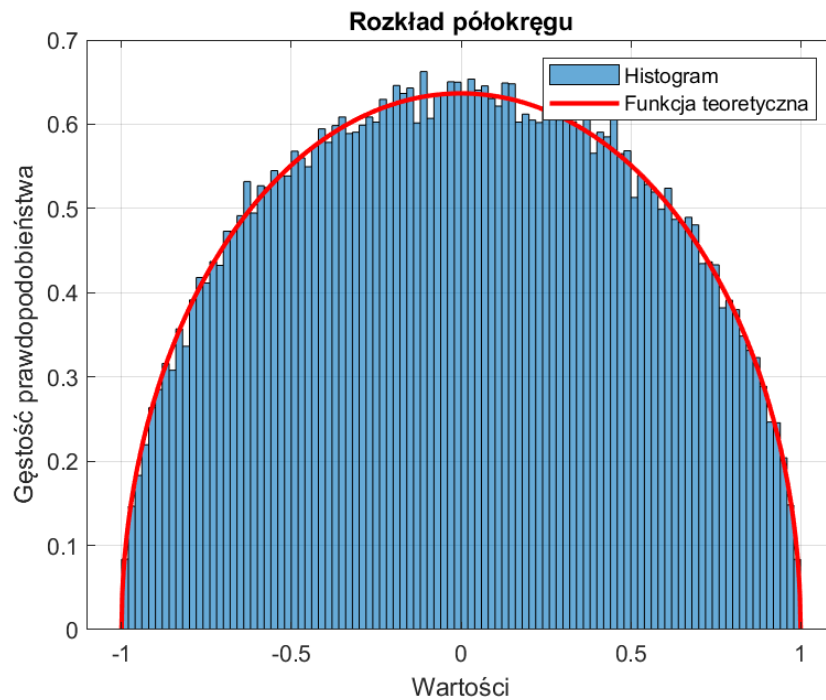
Analiza: Histogram przedstawia rozkład o symetrycznym kształcie przypominającym trójkąt. Metoda odrzucania umożliwia wygenerowanie rozkładu o zadanej gęstości prawdopodobieństwa.



Rysunek 8: Rozkład o funkcji gęstości z warunkiem $\int f(x)dx = 1$.

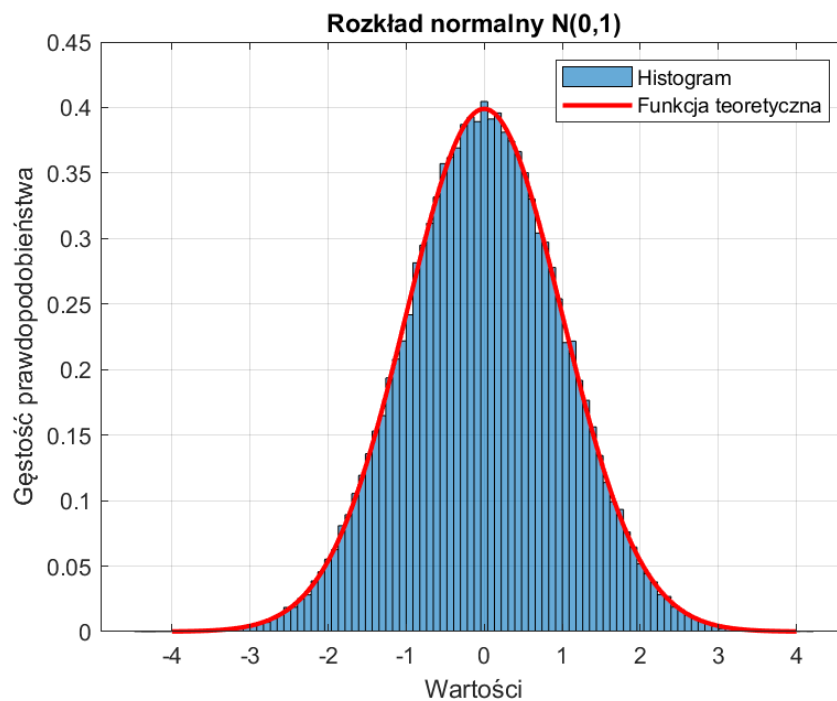
Analiza: Na wykresie widać, że rozkład generowany metodą odrzucania osiąga równomierność, jed-

nak pojawia się wysoki pik w okolicy zera. Może to wskazywać na niedokładność w doborze funkcji pomocniczej.



Rysunek 9: Rozkład półokręgu.

Analiza: Histogram dobrze pokrywa się z funkcją teoretyczną przedstawioną na wykresie. Rozkład półokręgu generowany jest prawidłowo i posiada oczekiwany kształt.



Rysunek 10: Rozkład normalny $N(0,1)$.

Analiza: Generowany rozkład normalny dobrze pokrywa się z funkcją teoretyczną. Metoda odrzuca-

nia pozwala na uzyskanie rozkładu normalnego z odpowiednio dobraną funkcją pomocniczą.

Wnioski: Metoda odrzucania jest uniwersalna i pozwala na generowanie dowolnych rozkładów. Jej skuteczność zależy jednak od prawidłowego doboru funkcji pomocniczej. Im bardziej funkcja pomocnicza przypomina docelowy rozkład, tym większa jest skuteczność metody. W przypadku źle dobranych funkcji pomocniczych, wydajność generowania może być bardzo niska.

4.4 Wydajność metody odrzucania

Metoda odrzucania jest stosunkowo uniwersalna, ale jej wydajność zależy od kilku czynników, w tym głównie od wyboru funkcji pomocniczej $g(x)$. Im bardziej funkcja pomocnicza przypomina rozkład docelowy, tym większa szansa na zaakceptowanie wygenerowanej wartości, co znacząco wpływa na efektywność.

Wybór funkcji pomocniczej ma kluczowe znaczenie, ponieważ w przypadku jej znacznego odstępstwa od kształtu rozkładu docelowego, liczba odrzuconych próbek znacząco wzrasta, powodując wzrost czasu obliczeń.

Porównując metodę odrzucania z metodą odwracania dystrybuanty, można zauważyć, że metoda odrzucania jest bardziej uniwersalna, ale mniej wydajna w przypadku złego doboru funkcji pomocniczej. W szczególności, gdy rozkład docelowy ma "długi ogon" (jak w rozkładzie Cauchy'ego), metoda odrzucania może wymagać wygenerowania bardzo dużej liczby próbek w celu uzyskania wartości w pożądanym zakresie.

W przypadku rozkładów o gęstości wykładniczej, metoda odwracania dystrybuanty jest bardziej efektywna, ponieważ posiada prostą analityczną odwrotność. Z kolei dla rozkładów o bardziej skomplikowanych kształtach (np. rozkładu półokręgu), metoda odrzucania okazuje się skuteczniejsza, jeśli dobór funkcji pomocniczej jest odpowiedni.

5 Podsumowanie

W niniejszym raporcie przeanalizowano trzy metody generacji liczb losowych:

- Generator pilokształtny,
- Generator rekurencyjny,
- Metoda odwracania dystrybuanty,
- Metoda odrzucania.

Każda z metod posiada swoje zalety i ograniczenia. Generatory pilokształtne są proste do zaimplementowania, ale mogą prowadzić do powtarzających się cykli. Generatory rekurencyjne pozwalają na uzyskanie długich cykli, ale ich jakość zależy od doboru parametrów. Metoda odwracania dystrybuanty jest łatwa w implementacji, jeśli można wyznaczyć funkcję odwrotną, natomiast metoda odrzucania jest uniwersalna, ale wymaga doboru odpowiedniej funkcji pomocniczej.

Wnioski uzyskane podczas realizacji poszczególnych laboratoriów potwierdzają skuteczność omawianych metod. Każda z metod znajduje swoje zastosowanie w zależności od potrzeb i wymagań generowanego rozkładu.