Stabilizacja podwójnego wahadła na wózku na bazie algorytmu sterowania z rozmieszczaniem biegunów*

Krzysztof Arent†

1 Wprowadzenie

Celem ćwiczenia jest ustabilizowanie podwójnego wahadła na wózku w pozycji pionowej, przy czym prawo sterowania ma być oparte o pierwszą metodę Lapunowa i algorytm sterowania z rozmieszczaniem biegunów.

Ćwiczenie składa się z dwóch zasadniczych części. Najpierw są analizowane i badane fundamentalne własności algorytmu sterowania z rozmieszczaniem biegunów, w rozdziale 3. Następnie jest rozwijany i badany sterownik stabilizujący podwójne wahadło na wózku w pionie, w rozdziale 4.

2 Czynności wstępne

Rozpakuj archiwum `zadanie_4.zip`, załączone do tego ćwiczenia, gdzieś w kartotece `~/matlab`. Utworzona kartoteka `zadanie_4` powinna zawierać dwa m-pliki:

- `rozmieszczanieBiegunow.m`
- `dynamikaDwuWahadlaNaWozku2.m`

Sprawdź, że obydwa m-pliki są skryptami wykonywalnymi w środowisku Matlab.

3 Algorytm sterowania z rozmieszczaniem biegunów

W ramach tej części ćwiczenia należy przeprowadzić szereg badań numerycznych. Do tego celu warto użyć skrypt `rozmieszczanieBiegunow.m`.

Badania numeryczne są oparte na dwóch parach macierzy: (1) i (2).

$$A_1 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\Omega^2 & 0 & 0 & 2\Omega R \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\Omega}{R} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{mR^2} \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie $m = 2$, $\Omega = \frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}$, $R = \sqrt[3]{\frac{4\cdot 10^{14}}{\Omega^2}}$.

*Ćwiczenie laboratoryjne do kursu Teoria sterowania (W12AIR-SM0007, W12AIR-SM0723).

†Katedra Cybernetyki i Robotyki, Wydział Elektroniki, Fotoniki i Mikrosystemów, Politechnika Wrocławska

$$
A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{g(M_1+M_2)}{M} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(M+M_1+M_2)}{L_1 M} & -\frac{M_2 g}{L_1 M_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g(M+M_1+M_2)}{L_1 M} & \frac{g(L_1 M_1+L_1 M_2+L_2 M_2)}{L_1 L_2 M_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
\qquad
B_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ -\frac{1}{L_1 M} \\ \frac{1}{L_1 M} \end{bmatrix} \tag{2}
$$

gdzie $M = 100$, $M_1 = 10$ $M_2 = 10$ $L_1 = 2$ $L_2 = 1$.

A_1, B_1 są parametrami aproksymacji liniowej dynamiki satelity z [1] (zob. strona 393).

A_2, B_2 są parametrami aproksymacji liniowej dynamiki dwuwahadła na wózku z [1] (zob. Załącznik). Dwuwahadło na wózku jest przedmiotem rozważań w rozdziale 4.

3.1 Sterowalność

Rozważmy układ sprzężenia zwrotnego od stanu:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{3}$$
$$u = Fx. \tag{4}$$

Podstawiając (4) do (3) otrzymujemy:

$$\dot{x} = (A + BF)x. \tag{5}$$

Dla $i = 1, 2$ wykonaj następujące działania.

1. Wyznacz zbiór wartości własnych A_i ($\mathrm{spec}(A_i)$);

2. Wyznacz zbiór wartości własnych $A_i + B_i F$ ($\mathrm{spec}(A_i + B_i F)$), gdzie F jest losowo wybraną macierzą. Elementy F muszą mieć ten sam rząd wielkości co elementy macierzy A_i i B_i. Sprawdzić, czy $\mathrm{spec}(A_i) \cap \mathrm{spec}(A_i + B_i F) = \emptyset$?

3. Jeśli $\mathrm{spec}(A_i) \cap \mathrm{spec}(A_i + B_i F) \neq \emptyset$ to jakie wnioski mogą być sformułowane w kontekście asymptotycznej stabilizacji systemu (3) przez sprzężenie zwrotne od stanu (4)?

Niech

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} B_i & A_i B_i & A_i^2 B_i & \dots & A_i^{n_i - 1} B_i \end{bmatrix} \tag{6}$$

gdzie $n_1 = 4$, $n_2 = 4$. Zmienna n_i oznacza wymiar przestrzeni stanu i-tego systemu.

Dla $i = 1, 2$ wykonaj następujące działania

1. Oblicz rank Ω_i.

Czy można stwierdzić, że poniższe stwierdzenia są prawdziwe?

$$\text{rank } \Omega_i < n \Leftrightarrow \text{spec}(A_i) \cap \text{spec}(A_i + B_i F) \neq \emptyset \tag{7}$$

$$\text{rank } \Omega_i = n \Leftrightarrow \exists F \textbf{ takie, że } \text{spec}(A_i) \cap \text{spec}(A_i + B_i F) = \emptyset \tag{8}$$

Jakie wnioski można sformułować na temat związku pomiędzy rank Ω **i asymptotyczną stabilizacją systemu** (3) **przez sprzężenie zwrotne od stanu** (4)**? Czy istnieje możliwość asymptotycznej stabilizacji punktu równowagi satelity przez liniowe sprzężenie zwrotne od stanu** (4)**?**

Przypominamy, że liniowy system dynamiczny (A, B) jest sterowalny wtedy i tylko wtedy gdy rank $\Omega(A, B) = n$. Z uwagi na błędy numeryczne proponujemy by zamiast rzędu $\Omega(A, B)$ testować nieosobliwość macierzy $\Omega(A, B)\Omega(A, B)^T$.

3.2 Zmiana współrzędnych

Rozważmy układ sprzężenia zwrotnego (3), (4). Niech $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ będzie macierzą nieosobliwą. Zdefiniujmy $\tilde{x} = Tx$. Pokaż, że system (3), (4) może być przetransformowany do postaci

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}u, \tag{9}$$

$$u = \tilde{F}\tilde{x}, \tag{10}$$

gdzie $\tilde{A} = TAT^{-1}$, $\tilde{B} = TB$, $\tilde{F} = FT^{-1}$.

Udowodnij formalnie, że $\text{spec}(A) = \text{spec}(\tilde{A})$. Zweryfikuj to twierdzenie empirycznie wykonując proste eksperymenty numeryczne:

Dla $i := 1, 2$ wykonaj następujące działania:

1. wyznacz $\text{spec}(A_i)$;
2. wyznacz $\text{spec}(T_i A_i T^{-1})$ gdzie T_i jest losowo wybraną macierzą kwadratową, taką że jej elementy są tego samego rzędu wielkości co elementy A_i;
3. porównaj $\text{spec}(A_i)$ i $\text{spec}(T_i A_i T^{-1})$.

Przedstaw i krótko omów wyniki uzyskane w kroku 3-cim powyższej procedury.

Kanoniczna postać sterownika Rozważmy parę (A_2, B_2). Niech $v^T := \Omega_2^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Oblicz w Matlabie

$$T = \begin{bmatrix} v^T \\ v^T A_2 \\ v^T A_2^2 \\ \vdots \\ v^T A_2^5 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_2 = TA_2T^{-1}, \quad \tilde{B}_2 = TB_2. \tag{11}$$

Zweryfikuj przez eksperyment numeryczny, że

- $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$ jest parą w kanonicznej postaci sterownika, tzn.

$$\tilde{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\tilde{a}_0 & -\tilde{a}_1 & -\tilde{a}_2 & -\tilde{a}_3 & -\tilde{a}_4 & -\tilde{a}_5 \end{bmatrix} \quad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

- wielomian charakterystyczny $\tilde{A}_2$ ma postać $\mu_{\tilde{A}_2}(s) = s^6 + \tilde{a}_5 s^5 + \cdots + \tilde{a}_1 s + \tilde{a}_0$.

Wyjaśnij na czym polegają zalety kanonicznej postaci sterownika z perspektywy projektowania algorytmu sterowania z rozmieszczaniem biegunów?

3.3 Formuła Ackermanna

Rozważmy pary (A_2, B_2), $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2)$. Chcemy wyznaczyć macierze F i $\tilde{F}$, takie że

$$\mu_{A_2+B_2F}(s) = \mu_{\tilde{A}_2+\tilde{B}_2\tilde{F}}(s) = \mu^*(s), \tag{13}$$

gdzie $\mu_{A_2+B_2F}(s)$, $\mu_{\tilde{A}_2+\tilde{B}_2\tilde{F}}$ są wielomianami charakterystycznymi $(A_2 + B_2F)$, $(\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2\tilde{F})$ odpowiednio i $\mu^*(s)$ jest wielomianem charakterystycznym układu sprzężenia zwrotnego, zadanym przez projektanta.

Niech

$$\begin{aligned} \mu^*(s) =& s^6 + \mu_5^* s^5 + \cdots + \mu_1^* s + \mu_0^* \\ =& (s + 7.5 + 0.3i) \cdot (s + 6.5 + 0.9i) \cdot (s + 3.3 + 2.3i) \cdot \cdots \\ & (s + 7.5 - 0.3i) \cdot (s + 6.5 - 0.9i) \cdot (s + 3.3 - 2.3i). \end{aligned} \tag{14}$$

Oblicz w Matlabie

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_0 - \mu_0^* & \ldots & \tilde{a}_5 - \mu_5^* \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$F = \tilde{F}T. \tag{16}$$

Zweryfikuj poprzez eksperyment numeryczny, że

- $$\tilde{A}_2 + \tilde{B}_2\tilde{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mu_0^* & -\mu_1^* & -\mu_2^* & -\mu_3^* & -\mu_4^* & -\mu_5^* \end{bmatrix}; \tag{17}$$

- równanie (13) jest spełnione.

Wyrażenie (15) może być łatwo przekształcone do postaci

$$F = -\begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_2 & A_2B_2 & \ldots & A_2^5 B_2 \end{bmatrix}^{-1} \mu^*(A_2) \tag{18}$$

przy uzyciu twierdzenia Cayleya-Hamiltona (zadanie opcjonalne). Wyrażenie (18) jest znane jako formuła Ackermanna.

Przestaw i omów wyniki badań symulacyjnych układu sprzężenia zwrotnego (3), (4) **gdy** (A, B, F) **są równe** $(\tilde{A}_2, \tilde{B}_2, \tilde{F})$ **and** (A_2, B_2, F) **odpowiednio.**

4 Stabilizacja podwójnego wahadła na wózku

Przeczytaj uważnie tekst zadania *Stabilizacja podwójnego wahadła* (Stabilization of a Double Pendulum [1]). Wykonaj wszystkie obliczenia i symulacje wymagane w rozdziałach A.6.1÷A.6.4 [1] przy użyciu Matlaba, w szczególności modułu Symbolic Math Toolbox. W tym celu można wykorzystać skrypt `dynamikaDwuWahadlaNaWozku2.m`.

Uwaga!

A.6.3 [1] Ta część jest ograniczona do analizy stabilności i sterowalności.

A.6.4 [1] Ta część jest ograniczona do pierwszego wypunktowania.

5 Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno mieć postać archiwum `zadanie_4.zip`, które zawiera:

- dokumenty .pdf or .png z odpowiedziami na pytania i polecenia z rozdziału 3 (zaznaczone wytłuszczoną czcionką);
- m-pliki do badań symulacyjnych w rozdziale 4;

Literatura

[1] J. W. Polderman and J. C. Willems. *Introduction to Mathematical Systems Theory. A Behavioral Approach.* Springer New York, NY, 1998.

Załącznik

W tekście zadania *Stabilization of a Double Pendulum* w [1] znaleziono kilka błędów. Ich korekty są zamieszczone poniżej.

A.6.1, strona 396: Modeling Prawidłowa postać energii kinetycznej dwuwahadła na wózku jest następująca:

$$\begin{aligned} K(q,\theta_1,\theta_2,\dot{q},\dot{\theta}_1,\dot{\theta}_2) = &\frac{1}{2}M\dot{q}^2 + \\ &\frac{1}{2}M_1((\dot{q}+L_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2+(L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2)+ \\ &\frac{1}{2}M_2((\dot{q}+L_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\cos(\theta_1+\theta_2))^2+ \\ &\qquad (L_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1+L_2(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\sin(\theta_1+\theta_2))^2). \end{aligned} \tag{19}$$

A.6.1, page 397: Linearization, (A.19), (A.22) Formuły (A.19), (A.22) nie są poprawne. Prawidłowa postać równań ruchu dwuwahadła na wózku, otrzymana z równań Eulera-Lagrangea (odpowiednik (A.19)), jest dana przez (20), (21), (22).

$$
\begin{aligned}
&M\ddot{q} + M_1(-L_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 + \ddot{q} + L_1\cos\theta_1\ddot{\theta}_1)\\
&+ M_2(-L_1\sin\theta_1\dot{\theta}_1^2 - L_2\sin(\theta_1+\theta_2)(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)^2 + \ddot{q}\\
&+ L_1\cos\theta_1\ddot{\theta}_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2)(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)) = u
\end{aligned} \tag{20}
$$

$$
\begin{aligned}
&- gL_1(M_1+M_2)\sin\theta_1 - gL_2M_2\sin(\theta_1+\theta_2) - 2L_1L_2M_2\sin\theta_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\\
&- L_1L_2M_2\sin\theta_2\dot{\theta}_2^2 + L_1M_1\cos\theta_1\ddot{q} + L_1M_2\cos\theta_1\ddot{q} + L_2M_2\cos(\theta_1+\theta_2)\ddot{q} + L_1^2M_1\ddot{\theta}_1\\
&+ L_1^2M_2\ddot{\theta}_1 + L_2^2M_2\ddot{\theta}_1 + 2L_1L_2M_2\cos\theta_2\ddot{\theta}_1 + L_2M_2(L_2+L_1\cos\theta_2)\ddot{\theta}_2 = 0
\end{aligned} \tag{21}
$$

$$
L_2M_2(-g\sin(\theta_1+\theta_2) + L_1\sin\theta_2\dot{\theta}_1^2 + \cos(\theta_1+\theta_2)\ddot{q} + (L_2+L_1\cos\theta_2)\ddot{\theta}_1 + L_2\ddot{\theta}_2) = 0 \tag{22}
$$

A.6.2, page 398: Linearization

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -\frac{g(M_1+M_2)}{M} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{g(M+M_1+M_2)}{L_1M} & -\frac{M_2g}{L_1M_1} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{g(M+M_1+M_2)}{L_1M} & \frac{g(L_1M_1+L_1M_2+L_2M_2)}{L_1L_2M_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\\
B &= \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{M}\\ -\frac{1}{L_1M}\\ \frac{1}{L_1M} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & L_1+L_2 & L_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{23}
$$