Linearyzacja*

Krzysztof Arent†

1 Wstęp

Celem ćwiczenia jest poznanie podstawowych pojęć i procedur leżących u podstaw linearyzacji systemu nielinowego przez sprzężenie zwrotne i zmianę współrzędnych (transformację stanu).

Ćwiczenie składa się z dwóch zasadniczych części. Najpierw, w rozdziale 3, badana jest linearyzacja wejście-stan dla nieliniowego systemu SISO. Następnie, w rozdziale 4, wybrane techiki linearyzacji wejściowo-wyjściowej są stosowane w celu odsprzężenia sygnału zakłócającego w liniowym układzie regulacji nadążnej.

2 Czynności wstępne

Rozpakuj archiwum `zadanie_5.zip`, załączone do tego ćwiczenia, gdzieś w kartotece `~/matlab`. Utworzona kartoteka `zadanie_5` powinna zawierać dwa m-pliki:

- `dynamikaPojedynczegoWahadlaZElastycznoscia.m`
- `odsprzeganieZaklocen.m`

Sprawdź, że obydwa m-pliki są skryptami wykonywalnymi w środowisku Matlab.

3 Stabilizacja pojedyńczego wahadła z elastycznością w przegubie

Zweryfikuj obliczenia z Example 6.10 w [1] i przeanalizuj uzyskane wyniki. W tym celu posłuż się m-plikiem `dynamikaPojedynczegoWahadlaZElastycznoscia.m` i wykonaj wszystkie zadania sformułowane w jego kodzie (w formie komentarzy). Zawrzyj w sprawozdaniu obliczenia ręczne do zadań 1-3. Dodatkowo, wykonaj następujące zadania.

ZADANIE 3 : Czu implementacja testu inwolutywności w m-pliku pozwala na pozytywne bądź negatywne rozstrzygnięcia? Uzasadnij swoją odpowiedź.

ZADANIE 7 : Scharakteryzuj wpływ wartości zmiennej `closedLoopEigenValues` na czas ustalania się trajektorii stanu.

---

*Ćwiczenie laboratoryjne do kursu Teoria sterowania (W12AIR-SM0007, W12AIR-SM0723).

†Katedra Cybernetyki i Robotyki, Wydział Elektroniki, Fotoniki i Mikrosystemów, Politechnika Wrocławska

4 Odsprzęganie zakłócenia

4.1 Szybkie wprowadzenie teoretyczne

Rozważmy liniowy system dynamiczny

$$\dot{x} = Ax + bu + ed, \tag{1}$$
$$y = cx \tag{2}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^4$, $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, $b,\ d \in \mathbb{R}^{4\times 1}$, $c \in \mathbb{R}^{1\times 4}$. Parametry systemu są następujące:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e = \begin{bmatrix} e_0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Zmienne u, y, d oznaczają wejście, wyjście i zakłócenie odpowiednio.

Zadanie sterowania polega na

- wyeliminowaniu wpływu zakłócenia d na wyjście y,
- śledzeniu przez wyjście y trajektorii referencyjnej r.

Do realizacji powyżej nakreślonego zadania można wykorzystać techniki właściwe dla linearyzacji przez sprzężenie zwrotne i zmianę współrzędnych.

Łatwo sprawdzić, że po wyeliminowaniu x z (1), (2) zależność pomiędzy y, u, d jest następująca:

$$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + \cdots + a_0 y = \ddot{u} + b_1 \dot{u} + b_0 u + \dot{d} + e_0 d. \tag{4}$$

Zauważmy, że z perspektywy u, stopień względny wynosi $\rho = 2$ natomiast z perspektywy d, stopień względny wynosi $\sigma = 3$.

Zróżniczkujmy y w (2) po czasie.

$$\dot{y} = c\dot{x} = cAx + cbu + ced = cAx \quad \text{o ile } cb = 0 \text{ i } ce = 0. \tag{5}$$

Powtóżmy operację różniczkowania.

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= \frac{d}{dt}(c\dot{x}) = cA\dot{x} = cA^2x + cAbu + cAed \\ &= cA^2x + cAbu \quad \text{o ile } cAb \neq 0 \text{ i } cAe = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Na wyjście y jawny wpływ ma u ale nie d w (6). Dlatego jest uzasadnione użycie (6) do syntezy prawa sterowania. Niech

$$u = Fx + Gv \tag{7}$$

gdzie v jest pomocniczym wejściem i

$$F = -(cAb)^{-1}cA^2, \quad G = (cAb)^{-1}. \tag{8}$$

Wówczas układ sprzężenia zwrotnego (6), (7) może być reprezentowany przez następujące równanie różniczkowe:

$$\ddot{y} = v \tag{9}$$

Reprezentacja równoważna do (9) typu wejście/stan/wyjście może być następująca:

$$\begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v, \tag{10}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Niech

$$p(s) = s^2 + p_1 s + p_0 \tag{12}$$

będzie wielomianem Hurwitza zmiennej zespolonej s. Jeśli

$$v = \begin{bmatrix} -p_0 & -p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + p_0 r \tag{13}$$

to (10), (11), (13) może być przekształcone do postaci

$$\ddot{y} + p_1 \dot{y} + p_0 y = p_0 r. \tag{14}$$

Łatwo sprawdzić, że jeśli $r(t) = 1(t)$ to $y(t) \to r(t)$. Dlatego (13) może być zastosowana do śledzenia trajektorii referencyjnych wolno zmieniających się w czasie.

Prawo sterowania (13) można zapisać następująco:

$$v = -p_0 cx - p_1 cAx + p_0 r. \tag{15}$$

Podstawiając (15) do (7) uzyskujemy

$$u = (F - G(p_0 c + p_1 cA))x + Gp_0 r \tag{16}$$

Prawo sterowania (16) umożliwia osiągnięcie celów sterowania.

Równania układu sprzężenia zwrotnego (1), (2), (16) mogą być przekształcone do zwartej formy:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_{cl} x + b_{cl} r + ed \\ y &= cx \end{aligned} \tag{17}$$

gdzie

$$A_{cl} = A + b(F - G(p_0 c + p_1 cA)) \tag{18}$$

$$b_{cl} = bGp_0 \tag{19}$$

4.2 Zadania do wykonania

Zadanie polega na porównaniu systemu (1), (2) z systemem (17) i uważnym zbadaniu własności (17). W tym celu należy posłużyć się m-plikiem `odsprzeganieZaklocen.m` i wykonać wszystkie zadania sformułowane w jego kodzie (w formie komentarza).

5 Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno mieć postać archiwum `task_5.zip`, które zawiera:

- dokumenty w formacie .pdf lub .png z odpowiedziami na pytania i polecenia sformułowane w `dynamikaPojedynczegoWahadlaZElastycznoscia.m` oraz w rozdziale 3;
- dokumenty w formacie .pdf lub .png z odpowiedziami na pytania i polecenia sformułowane w `odsprzeganieZaklocen.m` oraz w rozdziale 4.

Literatura

[1] J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, 1991.