

# Teoria Sterowania

## Metoda strzałów wielopunktowych z wykorzystaniem algorytmów optymalizacji nieliniowej Laboratorium 5

### 1 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest analiza badania problemu mieszania katalizatorów z wykorzystaniem algorytmu optymalizacji nieliniowej, a także zbadanie wpływów wartości początkowych na wynik wykonywanego zadania.

### 2 Opis problemu

Problemem postawiony w ćwiczeniu jest rozwinięciem problemu mieszania katalizatorów, w którym należało znaleźć najwyższy wskaźnik jakości. Proces został opisany dwoma równaniami różniczkowymi oraz jednym równaniem algebraicznym:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u(10x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = u(x_1 - 10x_2) - (1 - u)x_2 \\ x_3 = 1 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

$$u = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7]$$

Analogicznie jak w problemie strzałów punktowych podzielony został wektor

$$\begin{aligned} x_1(0) &= [1 \ 0] \\ x_2(0) &= [u_4 \ u_6] \\ x_3(0) &= [u_5 \ u_7] \end{aligned}$$

Następnie w celu wyznaczenia rozwiązania zadania zostały zdefiniowane wartości maksymalne (górna granica) i minimalne (dolna granica) wektora  $u$

$$u_{ub} = [1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0], \quad u_{lb} = [0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0 \ 0.0],$$

oraz wektor początkowy  $u_0$  który pozwolił na rozpoczęcie poszukiwań i został wyznaczony w następujący sposób

$$u_0 = \frac{u_{ub} + u_{lb}}{2} = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5].$$

Kolejno stosując wykorzystane założenia, zostało wyznaczone rozwiązanie za pomocą funkcji *fmincon*, która pozwoliła na minimalizację funkcji celu wielu zmiennych. W ten sposób otrzymano rozwiązanie wektora  $u$  dla największego wskaźnika jakości przy minimalizacji dokładności i przy zachowaniu spójnych trajektorii.

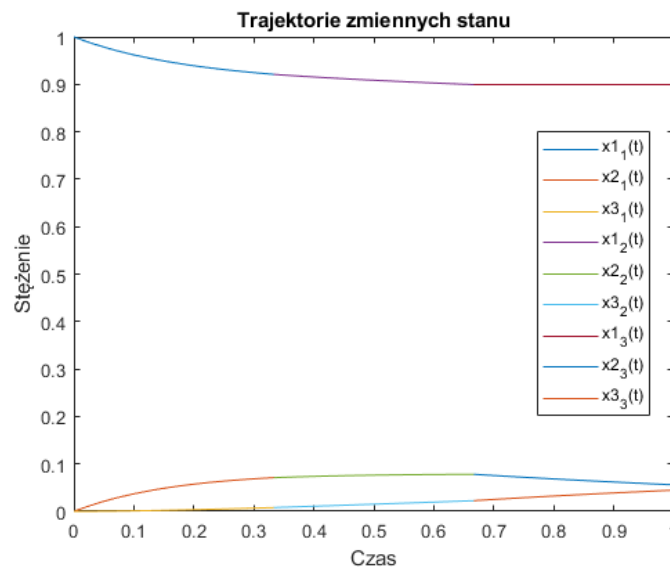
### 3 Wykonanie zadania

#### 3.1 Podstawowe badanie wskaźnika jakości

W celu realizacji zadania została wyznaczona dokładność dla wskaźnika kary wynoszącego  $10^4$  oraz początkowego wektora  $u_0$  równego

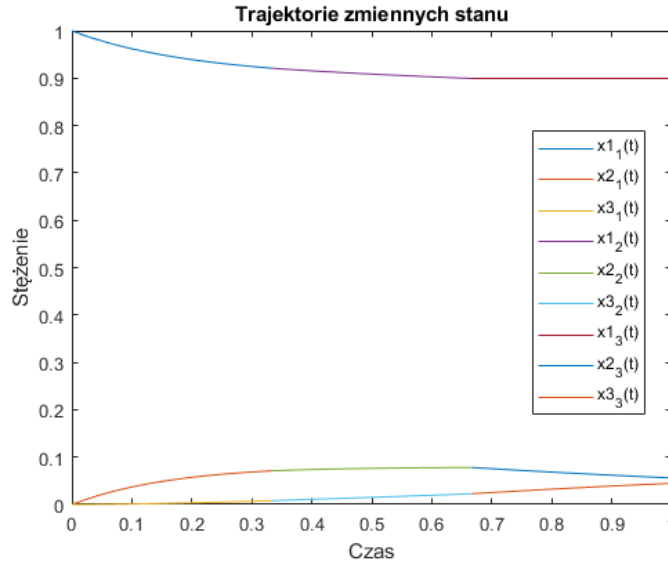
$$u_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Dla badanego przypadku wektor rozwiązań wyniósł  $u = [0.4883 \ 0.4273 \ 0 \ 0.9210 \ 0.8993 \ 0.0710 \ 0.0781]$ , a dokładność -0.0446, otrzymany wykres został przedstawiony na rysunku 1.



Rysunek 1: Wykres trajektorii zmiennych stanu dla obliczonego wektora  $u = [0.4883 \ 0.4273 \ 0 \ 0.9210 \ 0.8993 \ 0.0710 \ 0.0781]$

Sprawdzono także, ile wynosi wskaźnik jakości przy wykorzystaniu metody strzałów wielopunktowych, dla otrzymanego wektora, otrzymując wynik 0.0446 oraz wykres trajektorii przedstawiony na rysunku 2.



Rysunek 2: Wykres trajektorii zmiennych stanu wektora  $u$  wyznaczonego przez metodę strzałów wielopunktowych

## 3.2 Badanie wpływu wartości początkowych

### 3.2.1 Wskaźnik kary

Następnie zbadano wpływ wskaźnika kary, wykorzystywanego do obliczania dokładności, w następujący sposób

$$dokladnosc = -(x_{3.3}[end] - k \cdot (r_1 + r_2)),$$

gdzie  $x_{3.3}[end]$  jest ostatnim elementem trajektorii,  $r_1$  to kwadrat różnicy pomiędzy początkiem pierwszego a końcem drugiego podprzedziału, a  $r_2$  to kwadrat różnicy pomiędzy początkiem drugiego a końcem trzeciego podprzedziału.

W poniższej analizie zdecydowano się zbadać mniejszy oraz większy współczynnik kary  $k$ . Różnica pomiędzy badanymi wskaźnikami kary była wielkości jednego rzędu. Zbyt duże zwiększanie jak i zmniejszanie wskaźnika kary powodowało rozłączenie trajektorii zmiennych stanu co zaprezentowano na rysunkach 3a i 3d.

Wykresy dla zbadanych wartości wskaźnika kary przy wektorze początkowym wynoszącym

$$u_0 = [0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5 \quad 0.5]$$

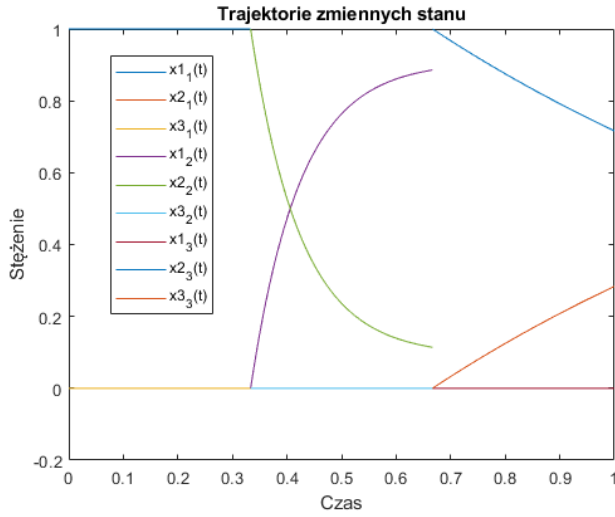
zostały przedstawione na rysunku 3, a poszczególne otrzymane wartości przedstawiono w tabeli 1 i 2.

Tabela 1: Wyniki analizy wpływu wskaźnika kary dla wykresów przedstawionych na rysunku 3b i 3c

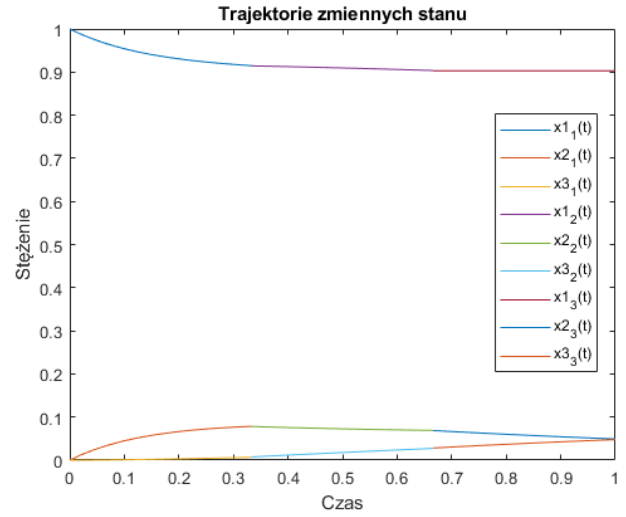
Wskaźnik kary	$10^3$	$10^5$
Wskaźnik jakości	0.0470	0.0462
Liczba iteracji	47	111
Wektor $u$	[0.6322 0.1796 0 0.9144 0.9031 0.0782 0]	[0.6342 0.1752 0 0.9148 0.9044 0.0786 0.0689]

Tabela 2: Wyniki analizy wpływu wskaźnika kary dla wykresów przedstawionych na rysunku 3a i 3d

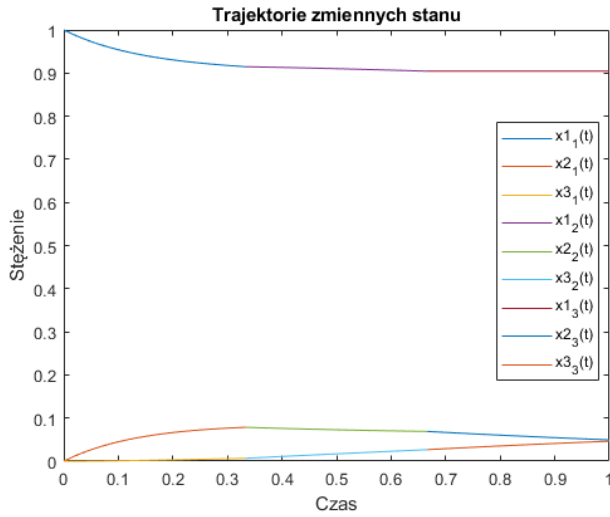
Wskaźnik kary	10	$10^{10}$
Wskaźnik jakości	35.9782	$3.5695 \cdot 10^{10}$
Liczba iteracji	4	2
Wektor $u$	[0 1 0 0 0 1 1]	[0 1 0.5 0 0 1 1]



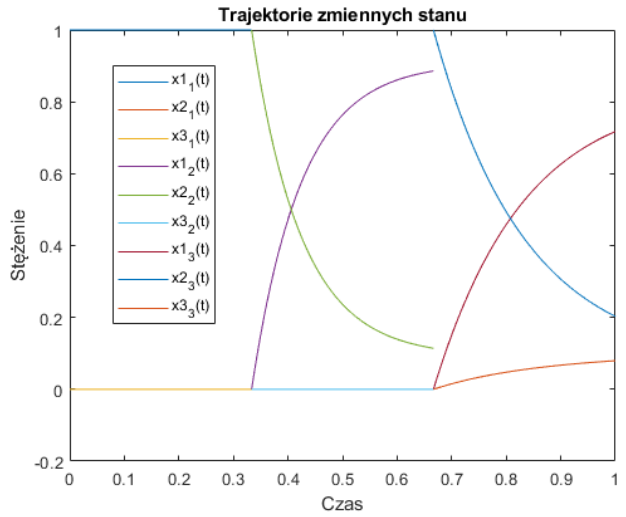
(a)  $k = 10$



(b)  $k = 10^3$



(c)  $k = 10^5$



(d)  $k = 10^{10}$

Rysunek 3: Wpływ współczynnika kary na trajektorię zmiennych stanu

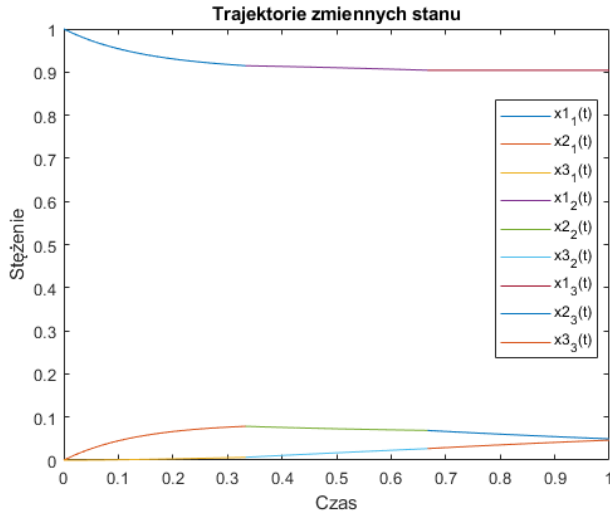
Przy wybranej różnicy wskaźnika kary różnice na wykresach 3b i 3c nie są zbyt dobrze widoczne. Znaczną różnicę można jednak zauważyć w czasie wykonywania się programów. Im mniejszy wskaźnik kary tym program potrzebował mniej czasu aby wyznaczyć najlepszy wektor  $u$ .

### 3.2.2 Wektor początkowy

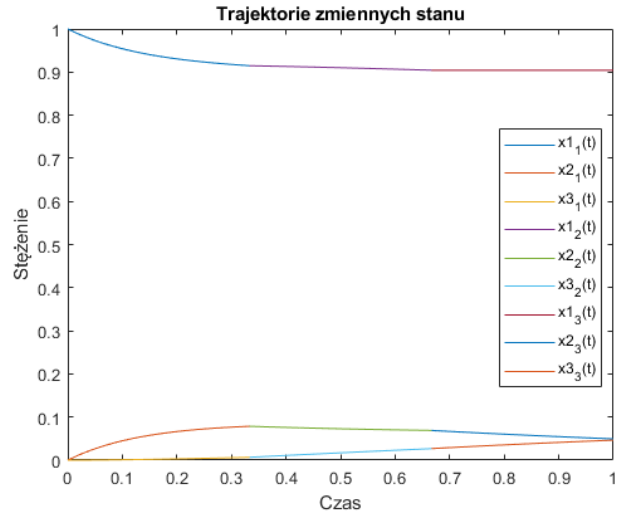
Następnie zbadano wpływ wektora początkowego  $u_0$  na trajektorię stanu oraz dokładności (czyli ujemnego wskaźnika jakości) przy wskaźniku kary wynoszącym  $10^4$ . Przeanalizowano wykresy, przy podstawieniu jako wektor  $u_0$  wektorów z zeszłych laboratoriów, zostały one przedstawione na rysunku 4, a wartości wyników analizowanych przykładów zostały przedstawione w tabeli 3.

Tabela 3: Wyniki analizy wpływu wektora początkowego

Wektor $u_0$	[0.5 0.5 0.5 0.927905 0.92609 0.080897 0.08069]	[1 1 0 0.9120 0.9110 0.0892 0.0909]
Wskaźnik jakości	0.0463	0.0463
Liczba iteracji	51	62
Wektor $u$	[0.6340 0.1760 0 0.9148 0.9042 0.0786 0.0689]	[0.6340 0.1760 0 0.9148 0.9042 0.0786 0.0689]



(a)  $u_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.927905 \ 0.92609 \ 0.080897 \ 0.08069]$



(b)  $u_0 = [1.0000 \ 1.0000 \ 0 \ 0.9120 \ 0.9110 \ 0.0892 \ 0.0909]$

Rysunek 4: Wpływ wartości wektora początkowego na trajektorię zmiennych stanu

Pomimo różnych wektorów początkowych program działający na funkcji *fmincon* w obu przypadkach wyznaczył jednakowy wektor końcowy. Świadczyć to może o braku zależności pomiędzy wektorem wejściowym a wektorem wyznaczony jako najlepszy dla danego wybranego kryterium. Różnicą w działaniu programów ponownie okazała się liczba iteracji potrzebna do wyznaczenia wektora  $u$ . Pomimo, iż wektor  $u_0 = [1 \ 1 \ 0 \ 0.9120 \ 0.9110 \ 0.0892 \ 0.0909]$ , dawał większy wskaźnik jakości w poprzednim sprawozdaniu doprowadzenie go do najlepszego wektora końcowego zajęło programowi więcej czasu.

## 4 Wnioski

Przy podstawowej maksymalizacji wskaźnika jakości, otrzymana dokładność w wartości bezwzględnej jest równa wartości wskaźnika jakości, który otrzymano z obliczeń zadania rozwiązanego metodą strzałów wielopunktowych. Również wykresy przedstawiające trajektorie zmiennych stanu, obliczone obiema metodami są identyczne, co świadczy o blizniaczym wykonywaniu metody i "trafieniu" prawidłowego wektora rozwiązań w metodzie strzałów wielopunktowych. Dowodzi to poprawności działania programów, ponieważ uzyskiwana dokładność w uzyskana za pomocą funkcji *fmincon* jest symetrią wskaźnika jakości względem osi OX w metodzie strzałów wielopunktowych.

W zależności wartości wskaźnika kary zmieniała się wartość wskaźnika jakości oraz ilość wykonanych iteracji programu. W przypadku gdy wskaźnik kary mała program potrzebował mniejszej ilości iteracji na rozwiązanie problemu, jednak dla za niskiej wartości wskaźnika kary równego 10 oraz pomimo limitu iteracji 200, program nie jest w stanie poprawnie ujednolicić trajektorii i zatrzymuje działanie po 4 iteracjach. W przypadku gdy współczynnik kary jest większy program potrzebował większej liczby iteracji, co można zaobserwować w tabeli 1, gdzie dla współczynnika kary wynoszącego  $10^5$  liczba iteracji wyniosła 111 żeby otrzymać jednolitą trajektorię. Jednak dla przypadku drastycznego wzrostu wskaźnika kary, program kończył działanie po 2 iteracjach, nie otrzymując tym samym jednolitej trajektorii. A więc dla pewnego przedziału wskaźnik kary potrzebuje mniejszej liczby iteracji do wyznaczenia najlepszego wektora  $u$ , tym samym zapewniając największy wskaźnik jakości. Jednak po przekroczeniu pewnej dolnej i górnej granicy przedziału tendencja się odwraca i program nie znajduje poprawnego rozwiązania zadania.

Z badania wartości wektora początkowego  $u_0$ , w przypadku gdy składowe wektora początkowego są zbliżone do wartości składowych wektora końcowego, program wymaga mniejszej ilości iteracji do uzyskania największego wskaźnika jakości. Dla wszystkich przypadków trzeci parametr wektorów wyznaczonych funkcją *fmincon* wynosi 0, co potwierdza obserwację z poprzedniego sprawozdania.

Ze względu na brak ograniczeń wskaźnika kar wybrano wartości względnie bliskie podanej w programie. W celu uniknięcia rozjechania się trajektorii co zostało zaprezentowane na rysunkach 3a i 3d.

Najwyższy wskaźnik jakości otrzymano dzięki badaniu wpływu współczynnika kary na wartość współczynnika jakości, uzyskując najlepszy wynik dla wektora początkowego wynoszącego

$$u_0 = [0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5 \ 0.5],$$

wskaźnika kary równego  $10^3$  oraz przy liczbie iteracji 47, otrzymując dokładność -0.0470 oraz wskaźnik jakości 0.0470.