Dynamika satelity telekomunikacyjnego*

1 Wprowadzenie

Najważniejszym osiągnięciem cywilnego programu badań kosmicznych jest niewątpliwie komunikacja satelitarna. Zamiast transmitować informacje przez kable, przesyła się je od nadajnika do satelity, a stamtąd do odbiornika na ziemi. Z oczywistych powodów satelita telekomunikacyjny powinien być umieszczony na nieboskłonie w stałej pozycji względem ziemi. Takie satelity nazywane są satelitami geostacjonarnymi.

Orbitę geostacjonarną satelita osiąga dzięki intensywnej pracy swoich silników. Ze względu na ograniczoną ilość paliwa, wskazane jest by silniki nie byly stale używane w celu utrzymania satelity na orbicie, ale sporadycznie, do niezbędnej korekcji jego orbity. Rodzi się zatem pytanie czy istnieje orbita goestacjonarna na której satelita może być utrzymany tylko pod wpływem siły grawitacji ziemi ? Czy taka orbita jest stabilna ? Jeżeli nie, jakie sterowania są niezbędne aby utrzymać satelitę na tej orbicie ?

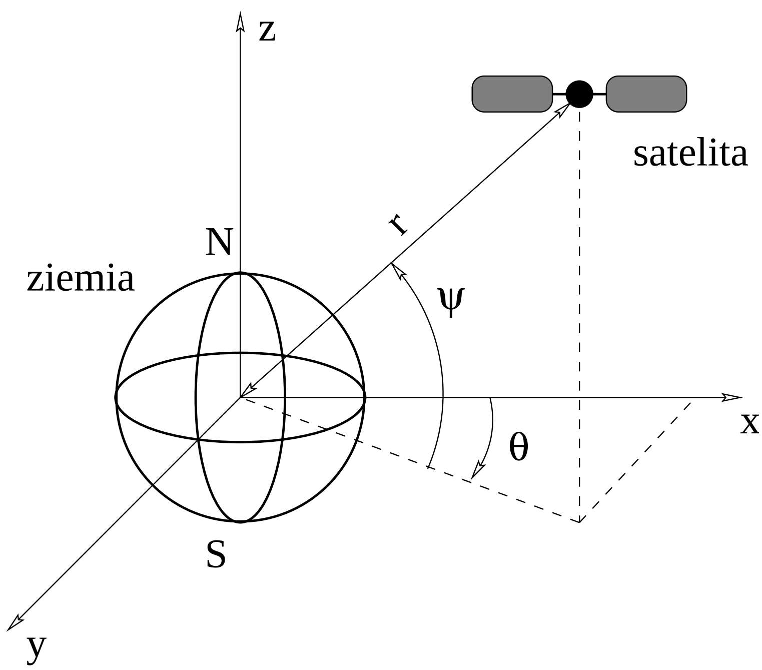
Jeżeli założymy, że satelita jest jedynie pod wpływem pola grawitacyjnego ziemi, wówczas jego orbitę określają prawa Keplera. Satelita będzie przesuwał się po eliptycznej orbicie z centrum ziemi w jednej z jego ogniskowych. Ponieważ ziemia obraca się wokół osi przechodzącej przez bieguny południowy i północny, z prędkością $2\pi\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{dzień}}$, orbita geostacjonarna musi być okręgiem na płaszczyźnie równika. Prawa Keplera również implikują, że istnieje związek pomiędzy średnicą orbity i okresem obrotu, który w przypadku satelity geostacjonarnego musi być taki sam jak okres obrotu ziemi. Jedno z pierwszych zadań będzie polegało na wyznaczeniu wysokości takiej orbity geostacjonarnej.

2 Modelowanie matematyczne

Satelita jest przedmiotem oddziaływania czterech rodzajów sił:

1. Siły odśrodkowej $\vec{F}_{in}$.
2. Grawitacyjnego przyciągania ziemii, $\vec{F}_g$.
3. Sił zewnętrznych wywoływanych przez silniki $\vec{F}_{jet}$ – to są nasze sterowania.
4. Innych zewnętrznych sił takich jak grawitacja księżyca i słońca, wiatr słoneczny. Siły te oznaczymy $\vec{F}_d$. Będziemy je traktowali jak zakłócenia. Celem naszego sterowania będzie kompensacja ich nieprzewidywalnego wpływu na ruch satelity.

*Tłumaczenie na język polski ćwiczenia pt. Satellite Dynamics z książki [1].



Rysunek 1: Satelita na orbicie ziemskiej.

Pozycję satelity można opisać przy pomocy współrzędnych biegunowych (r, ϕ, θ), zob. Rysunek 1. Poszczególne zmienne są wzajemnie powiązane, niemniej z powodów wymienionych we wstępie będziemy rozważać ruch satelity wewnątrz płaszczyzny równika. Otrzymaną geometrię przedstawia Rysunek 2.

Oznaczmy wersory radialne i transwersalne przez $\vec{1}_r$ i $\vec{1}_\theta$ odpowiednio. Wówczas $\vec{r} = r \cdot \vec{1}_r$. Następnie zaobserwujmy, że

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{1}_r &= \frac{d\theta}{dt}\vec{1}_\theta \quad \text{i} \quad \frac{d}{dt}\vec{1}_\theta = -\frac{d\theta}{dt}\vec{1}_r, \\ \frac{d}{dt}\vec{r} &= \frac{dr}{dt}\vec{1}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{1}_\theta, \\ \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} &= (\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2)\vec{1}_r + (r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt})\vec{1}_\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Siła odśrodkowa $\vec{F}_{in}$ jest zatem dana wzorem

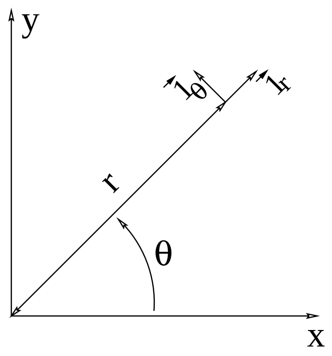
$$m\frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = m(\frac{d^2r}{dt^2} - r(\frac{d\theta}{dt})^2)\vec{1}_r + m(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt})\vec{1}_\theta, \tag{2}$$

gdzie m oznacza masę satelity. Grawitacyjne oddziaływanie ziemi na satelitę opisuje równanie

$$\vec{F}_g = -k\frac{m}{r^2}\vec{1}_r, \tag{3}$$

gdzie $k = 4 \cdot 10^{14}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$ otrzymuje się mnożąc stałą grawitacji przez masę ziemi.

Niech silniki satelity wytwarzają siłę F_{jet}. Zdekomponujmy tę siłę na składową radialną u_r i transwersalną u_θ. Podobnie zdekomponujmy siłę zaburzającą na d_r i d_θ.



Rysunek 2: Wektory $\vec{1}_\theta$ i $\vec{1}_r$.

Zatem $\vec{F}_{\mathrm{jet}} = u_r\vec{1}_r + u_\theta\vec{1}_\theta$ i $\vec{F}_{\mathrm{d}} = d_r\vec{1}_r + d_\theta\vec{1}_\theta$. Biorąc pod uwagę, że suma sił oddziaływujących na satelitę wynosi zero, otrzymujemy

$$m(\frac{d^2}{dt^2}r - r(\frac{d\theta}{dt})^2)\vec{1}_r + m(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt})\vec{1}_\theta + k\frac{m}{r^2}\vec{1}_r = \vec{F}_{\mathrm{jet}} + \vec{F}_{\mathrm{d}}. \tag{4}$$

Wydzielając składową radialną i transwersalną mamy

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= r(\frac{d\theta}{dt})^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{u_r}{m} + \frac{d_r}{m}, \\ \frac{d^2\theta}{dt^2} &= -\frac{2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}}{r} + \frac{u_\theta}{r^2 \cdot m} + \frac{d_\theta}{r^2 \cdot m}. \end{aligned} \tag{5}$$

Powyższe równania różniczkowe dają nam równania dynamiki wiążące zmienne r, θ ze zmiennymi sterującymi u_r, u_θ i zaburzeniami d_r i d_θ.

Równania (5) można również otrzymać z równań Euler'a-Lagrange'a. Aby to zrobić należy najpierw wyznaczyć energię potencjalną i kinetyczną satelity. Wprowadźmy zmienną $\dot{r}$, prędkość radialną satelity, oraz $\dot{\theta}$, prędkość zmiany θ. Energia potencjalna P i kinetyczna K są następujące:

$$P(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = -\frac{k \cdot m}{r}, \quad K(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2). \tag{6}$$

Lagranżjan L wynosi $K - P$. Zgodnie z zasadą Lagrange'a równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}(r, \theta, \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}) - \frac{\partial L}{\partial r}(r, \theta, \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}) &= u_r + d_r, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}(r, \theta, \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}) - \frac{\partial L}{\partial \theta}(r, \theta, \frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}) &= u_\theta + d_\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Wyprowadź równania (5) z równań (7).

3 Analiza punktu równowagi

Wykaż, iż istnieje R takie, że trajektoria $r(t) = R$, $\theta(t) = \Omega t$, gdzie $\Omega = \frac{2\pi}{\text{dzień}}$, $u_r(t) = 0$, $u_\theta(t) = 0$, $d_r(t) = 0$, $d_\theta(t) = 0$ jest rozwiązaniem równań ruchu satelity. Wyjaśnij dlaczego odpowiada to orbicie geostacjonarnej ? Oblicz R.

Powyższe obliczenia pozwolą stwierdzić, że orbita geostacjonarna znajduje się 42000 km od centrum ziemi, zatem w przybliżeniu 36000 km od jej powierzchni. W dwukierunkowej komunikacji telefonicznej powoduje to opóźnienie o przynajmniej 4×36000[km][km] $\approx \frac{1}{2}[s]$. Zauważ, że to może być uciążliwe w przypadku międzykontynentalnej rozmowy telefonicznej.

Wprowadźmy nową zmienną $\phi(t) = \theta(t) - \Omega t$. Równania na r i ϕ przyjmą postać

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{dt^2} &= r(\frac{d\phi}{dt} + \Omega)^2 - \frac{k}{r^2} + \frac{u_r}{m} + \frac{d_r}{m}, \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} &= -\frac{2\frac{dr}{dt}(\frac{d\phi}{dt} + \Omega)}{r} + \frac{u_\theta}{r^2 \cdot m} + \frac{d_\theta}{r^2 \cdot m}. \end{aligned} \tag{8}$$

Aby dokończyć wyprowadzanie modelu, należy wyznaczyć obserwowane wyjście. Niech będzie to kąt prześwitu $\phi(t) = \theta(t) - \Omega t$. Zauważmy, że otrzymaliśmy system z wejściami sterującymi u_r i u_θ, wejściami zakłócającymi d_r i d_θ, zmiennymi stanu r, ϕ $\dot{r}$, $\dot{\phi}$, wyjściem pomiarowym ϕ i wyjściem sterowanym ϕ. Sprawdzić, że $r^* = R$, $\phi^* = 0$, $u_r^* = 0$, $u_\theta^* = 0$, $d_r^*(t) = 0$, $d_\theta^* = 0$ jest punktem równowagi układu równań (8). To właśnie w tej pozycji chcielibyśmy mieć umieszczonego satelitę przez cały czas.

Obecnie zbadamy stabilność tego punktu równowagi. Wykazać, że $r(t) = \sqrt[3]{K/(\Omega + \delta)^2}$, $\phi(t) = \delta t$, $u_r(t) = 0$, $u_\phi(t) = 0$, $d_r(t) = 0$, $d_\phi(t) = 0$, gdzie $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta + \Omega > 0$ jest również rozwiązaniem (8). Uzasadnić, że to oznacza, iż orbita geostacjonarna nie jest stabilna. Innymi słowy, mała dewiacja od punktu równiowagi może spowodować dryft kąta prześwitu.

Niesterowany ruch jest zatem niestabilny. Dlatego niezbędne będzie oddziaływanie na satelitę takie, które zapewni utrzymanie go na orbicie geostacjonarnej.

4 Przybliżenie liniowe

Wprowadź zmienne stanu r, $\frac{dr}{dt}$, ϕ, $\frac{d\phi}{dt}$ i zapisz (8) w formie wejście/stan/wyjście. Wyznacz przybliżenie liniowe równań dynamiki w otoczeniu geostacjonarnego punktu równowagi. Powinno wyjść

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta \dot{r} \\ \Delta \phi \\ \Delta \dot{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\Omega^2 & 0 & 0 & 2R\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2\Omega}{R} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta \dot{r} \\ \Delta \phi \\ \Delta \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R^2 m} \end{bmatrix} u_\phi + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d_r + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R^2 m} \end{bmatrix} d_\phi \\ \Delta \phi &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta r \\ \Delta \dot{r} \\ \Delta \phi \\ \Delta \dot{\phi} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

gdzie $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, m – masa satelity, $R = 4.2 \cdot 10^7$m.

5 Analiza modelu

Czy przybliżenie liniowe systemu jest stabilne, asymptotycznie stabilne, czy też niestabilne ? Czy jest ono sterowalne względem u_r, u_θ, obu sterowań ? Co z obserwowalnością ?

6 Symulacje

Wykonać symulację r i ϕ dla modelu nieliniowego i jego przybliżenia liniowego w następujących sytuacjach:

1. Weź małe (1%) początkowe zaburzenie $r(0)$. Powtórz dla małych zaburzeń $\phi(0)$.
2. Wykreśl odpowiedzi sygnału wyjściowego na zakłócenia równe 5% grawitacyjnego przyciągania ziemi. Takie zakłócenie może być spowodowane oddziaływaniem księżyca.
3. Powtórz punkt drugi dla radialnego zakłócenia, zakładając że jest ono okresowe, z okresem równym okresowi obrotu ziemi.

Literatura

[1] J. W. Polderman and J. C. Willems. *Introduction to Mathematical Systems Theory. A Behavioral Approach.* Springer New York, NY, 1998.