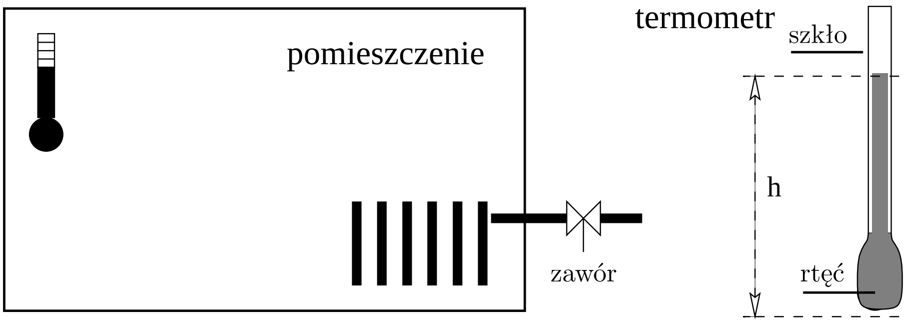
# Regulacja temperatury pomieszczenia*

Rozważmy zagadnienie regulacji temperatury w pomieszczeniu, Rysunek 1.




Rysunek 1: Regulacja temperatury.

Temperatura zależy od ilości ciepła dostarczonego do pomieszczenia przez system grzewczy oraz od temperatury otoczenia. Ilość dostarczonego ciepła regulowana jest przy pomocy zaworu. Decyzja w jaki sposób ustawić zawór jest oparta na wynikach pomiaru termometru. Używany jest termometr rtęciowy. To oznacza, że temperatura nie jest mierzona bezpośrednio, ale na podstawie wysokości słupka rtęci, który oczywiście zależy od temperatury pomieszczenia. Zadanie jest następujące. Należy zaproponować i zbadać sposób sterowania zaworem, który zagwarantuje utrzymanie temperatury 273 K w pomieszczeniu.

1. Zaczniemy od wyprowadzenia modelu opisującego dynamikę układu sterowania. Zmienne, którymi jesteśmy zainteresowani, są następujące:

   **$u$:** pozycja nastawy (zmienna sterująca);

   **$T_o$:** temperatura otoczenia (zakłócenie);

   **$T_p$:** temperatura w pomieszczeniu (zmienna sterowana);

   **$h$:** wysokość słupka rtęci (zmienna pomiarowa).

   Przy wyprowadzaniu modelu przydatne jest wprowadzenie paru zmiennych pomocniczych. W szczególności:

   **$q$:** ilość ciepła dostarczonego do pomieszczenia doprowadzeniem z zaworem w danym momencie czasu;

*Tłumaczenie na język polski ćwiczenia pt. A Temperature Control of a Container z książki [1].

$q_o$**:** ilość ciepła dostarczonego do pomieszczenia z otoczenia w danym momencie czasu;

$q_{sz}$**:** ilość ciepła dostarczonego do szkła termometru z pomieszczenia w danym momencie czasu;

$q_{Hg}$**:** ilość ciepła dostarczonego do rtęci w termometrze ze szkła termometru w danym momencie czasu;

$T_{sz}$**:** temperatura szkła termometru;

$T_{Hg}$**:** temperatura rtęci;

$A_{sz}$**:** wewnętrzny przekrój szklanej rurki z rtęcią;

$V_{sz}$**:** objętość szklanego pojemnika termometru;

$V_{Hg}$**:** objętość rtęci w termometrze.

Zauważ, iż rozsądne jest założenie, że strumień ciepła przez granicę ośrodków fizycznych jest proporcjonalny do różnicy temperatur po obu stronach granicy, a zmiana temperatury ośrodka jest proporcjonalna do ilości dostarczonego ciepła. Ponadto, materiały rozszerzają się proporcjonalnie do ich temperatury. Zatem $A_{sz}$ jest proporcjonalny do $T_{sz}^2$, $V_{sz}$ jest proporcjonalny do $T_{sz}^3$, $V_{Hg}$ jest proporcjonalny do $T_{Hg}^3$.

Uzasadnij, że powyższe spostrzeżenia prowadzą do następujących zależności:

$$q = a_0 u \tag{1}$$

$$q_o = a_1(T_o - T_p) \qquad q_{sz} = a_2(T_p - T_{sz}) \qquad q_{Hg} = a_3(T_{sz} - T_{Hg}) \tag{2}$$

$$\frac{dT_p}{dt} = b_1(q_o + q) \qquad \frac{dT_{sz}}{dt} = b_2(q_{sz} + q_{Hg}) \qquad \frac{dT_{Hg}}{dt} = b_3 q_{Hg} \tag{3}$$

$$A_{sz} = c_1 T_{sz}^2, \quad V_{sz} = c_2 T_{sz}^3, \quad V_{Hg} = c_3 T_{Hg}^3, \quad h = \frac{V_{Hg} - V_{sz}}{A_{sz}} \tag{4}$$

Parametry systemu $a_0$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, $b_1$, $b_2$, $b_3$, $c_1$, $c_2$, $c_3$ są dodatnimi stałymi zależnymi od geometrii i własności materiałów. W termometrze $c_2$ musi być większe od $c_3$ gdyż kiedy $T_{Hg}$ i $T_{sz}$ osiągną wyższe ustalone wartości, $h$ powinno wzrosnąć. Właśnie z tego powodu materiały takie jak rtęć są używane w termometrach. Ich temperaturowe współczynniki rozszerzalności są duże.

Powyższe równania mogą być zapisane w formie wejście/śtan//wyjście, gdzie $u$ i $T_o$ będą zmiennymi wejściowymi, $h$, $T_p$ zmiennymi wyjściowymi, $T_p$, $T_{sz}$, $T_{Hg}$ zmiennymi stanu, a pozostałe zmienne będą wyeliminowane. Zauważmy, że dla $u^* = 0$, wszystkie temperatury równe 273 $K$ i $h^*$ odpowiadające (4) są punktem równowagi. Niech $T_p = 273 + \hat{T}_p$, $T_{sz} = 273 + \hat{T}_{sz}$, $T_{Hg} = 273 + \hat{T}_{Hg}$, $h = h^* + \hat{h}$, $T_o = 273 + \hat{T}_o$ Przybliżenie liniowe systemu w otoczeniu punktu równowagi $(T_p, T_{sz}, T_{Hg}, h) = (273, 273, 273, h^*)$ ma postać:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{T}_p &= \alpha_1(\hat{T}_o - \hat{T}_p) + \beta_1 u \\
\frac{d}{dt}\hat{T}_{sz} &= \alpha_2(\hat{T}_p - \hat{T}_{sz}) + \alpha_3(\hat{T}_{Hg} - \hat{T}_{sz}) \\
\frac{d}{dt}\hat{T}_{Hg} &= \alpha_4(\hat{T}_{sz} - \hat{T}_{Hg}) \\
\hat{h} &= \gamma_1 \hat{T}_{Hg} - \gamma_2 \hat{T}_{sz}
\end{aligned} \tag{5}$$

Parametry występujące w powyższym układzie równań są wszystkie dodatnie, gdzie $\gamma_1 > \gamma_2$. W pozostałej części ćwiczenia należy przyjąć następujące wartości parametrów: $\beta_1 = 0.1$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0.1$, $\alpha_4 = 0.2$, $\gamma_1 = 0.7$, $\gamma_2 = 0.05$.

2. Rozważmy najpierw przypadek bez sterowania, $u = 0$. Załóżmy, że temperatura otoczenia wzrosła o jedną jednostkę,

$$\hat{T}_o = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Niech $\hat{T}_p(0) = \hat{T}_{sz}(0) = \hat{T}_{Hg}(0) = 0$. Wykreśl na jednym rysunku odpowiedzi $\hat{T}_p$, $\hat{T}_{sz}$, $\hat{T}_{Hg}(0)$ na to pobudzenie. Na oddzielnym wykresie przedstaw odpowiedź $\hat{h}$. Co się dzieje z tą wielkością dla początkowych wartości czasu ? Podaj interpretację fizyczną. Obserwowane zjawisko będziemy nazywać reakcją odwrotną.

3. Rozważmy obecnie użycie sterowania. Wydaje się logiczne użycie proporcjonalnego prawa sterowania

$$u = K_P \hat{h} \tag{7}$$

Jeżeli mierzona temperatura maleje dostarczamy więcej ciepła i odwrotnie. Obecnie zbadamy zachowanie się tego prawa sterowania dla kilku wartości $K_P$. Niech $\hat{T}_o(0) = 0$, $\hat{T}_p(0) = 1$, $\hat{T}_{sz}(0) = 0$, $\hat{T}_{Hg}(0) = 0$. Wykreśl $\hat{T}_p$ dla różnych wartości $K_P$. Pokaż, że jeżeli $K_P$ jest małe, zachowanie, w szczególności czas ustalania[1], nie jest dobry. Pokaż, że dla dużych $K_P$ zachowanie układu również pozostaia wiele do życzenia (nadkompensacja). Spróbuj to zinterpretować fizycznie. Zaproponuj jakąś dobrą wartość $K_P$.

4. Obecnie użyjemy sterownik (7) i zbadamy odpowiedź na pobudzenie skokowe sterowanego systemu. Niech $\hat{T}_o$ znowu będzie skokiem jednostkowym, (6), i $\hat{T}_p(0) = \hat{T}_{sz}(0) = \hat{T}_{Hg}(0) = 0$. Wykonaj symulację $\hat{T}_p$ dla różnych wartości $K_P$. Zwróć szczególną uwagę na wartość ustaloną[2] $\hat{T}_p$. Wykreśl wartość ustaloną w funkcji $K_P$. Następnie, biorąc pod uwagę czas ustalania, przesterowanie[3], błąd stanu ustalonego[4] zaproponuj najlepszą wartość $K_P$. Wykreśl $\hat{T}_o$ i $\hat{T}_p$ dla tego sterownika.

5. Sterownik z poprzedniego podpunktu nie był w stanie skompensować wzrostu stanu ustalonego temperatury otoczenia. Jedną z możliwości rozwiązania obecnej sytuacji jest sterowanie nie tylko na podstawie $h$ ale również na bazie całki z $h$. Zauważmy, że sterownik zależny od całki z $h$ nie może akceptować ustalonego błędu i w takim przypadku będzie generował sygnał korekcji.

   Rozważmy zatem następujące prawo sterowania:

$$\frac{dz}{dt} = h, \quad u = K_P h + K_I z \tag{8}$$

Niech $\hat{T}_o$ będzie skokiem jednostkowym a warunki początkowe będą zerowe: $\hat{T}_p(0) = \hat{T}_{sz}(0) = \hat{T}_{Hg}(0) = z(0) = 0$. Przyjąć za $K_P$ wartość otrzymaną w poprzednim podpunkcie i wykonać symulacje dla szerokiego zakresu $K_I$. Zaproponować najlepszą wartość $K_I$. Przedstawić wykres $\hat{T}_o$ i odpowiedź $\hat{T}_p$ na to pobudzenie.

---

[1] $\min\{t \geq 0| \ |\hat{T}_p(t') - \hat{T}_p(\infty)| \leq 0.05\hat{T}_p(\infty)$ dla $t' \geq t\}$

[2] $\hat{T}_p(\infty) = \lim_{t\to\infty} \hat{T}_p(t)$

[3] $\max_{t\geq 0} \frac{\hat{T}_p(t) - \hat{t}(\infty)}{\hat{T}(\infty)} 100$

[4] $\hat{T}_p(\infty) - 0$. Zero jest tą wartością, która powinien osiągnąć $\hat{T}_p(\infty)$ w efekcie działń sterownika.

## Literatura

[1] J. W. Polderman and J. C. Willems. *Introduction to Mathematical Systems Theory. A Behavioral Approach*. Springer New York, NY, 1998.