Dynamika satelity telekomunikacyjnego.
Wprowadzenie do Symbolic Math Toolbox w Matlabie.*

Krzysztof Arent†

1 Wprowadzenie

Celem ćwiczenia jest nabycie podstawowych umiejętności w zakresie modelowania i analizy systemów mechanicznych ze szczególnym uwzględnieniem stabilności punktu równowagi systemu. Ćwiczenie jest opartne na zadaniu *Satellite Dynamics* z [1]. W założeniu należy je zrealizować na dwa sposoby. Najpierw w sposób tradycyjny, gdzie obliczenia symboliczne przeprowadzane są ręcznie, na kartce papieru, a badania symulacyjne są realizowane w oparciu o elementarne funkcje środowiska Matlab/Simulink. Następnie przy użyciu *Symbolic Math Toolbox* i pewnych zaawansowanych funkcji Matlaba.

2 Czynności wstępne

Rozpakuj archiwum `zadanie_3.zip`, załączone do ćwiczenia, gdzieś w kartotece `~/matlab`. Utworzona kartoteka `zadanie_3` zawiera dwa m-pliki:

- `dynamikaSatelity1.m`
- `dynamikaSatelity2.m`

Sprawdź, że obydwa powyższe m-pliki są skryptami wykonywalnymi w środowisku Matlab.

3 Dynamika satelity telekomunikacyjnego: podejście tradycyjne

Przeczytaj uważnie tekst zadania `Dynamika satelity telekomunikacyjnego` (ang. Satellite Dynamics [1]). Wykonaj wszystkie obliczenia wymagane w rozdziałach 2÷6 (polskiego tłumaczenia) ręcznie, na papierze. W szczególności,

1. wyprowadź równania dynamiki satelity telekomunikacyjnego (5) and (7) na gruncie równań Eulera-Lagrange'a;
2. wykaż, że $R^3\Omega^2 = k$;

*Ćwiczenie laboratoryjne do kursu Teoria sterowania (W12AIR-SM0007, W12AIR-SM0723).

†Katedra Cybernetyki i Robotyki, Wydział Elektroniki, Fotoniki i Mikrosystemów, Politechnika Wrocławska

3. przekształć równania dynamiki satelity telekomuniacyjnego do postaci równań ze zmiennymi stanu;

4. sprawdź, że $x(t) = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ i $x(t) = \begin{bmatrix} \sqrt[3]{\frac{k}{(\Omega+\Delta)^2}} & 0 & \Delta t & \Delta \end{bmatrix}^T$ są rozwiązaniami równań dynamiki ze zmiennymi stanu satelity telekomunikacyjnego i wyjaśnij co z tego wynika dla stabilności punktu równowagi;

5. wyprowadź przybliżenie liniowe równań dynamiki ze zmiennymi stanu satelity telekomunikacyjnego w punkcie równowagi i wyjaśnij, czy na jego podstawie można uzyskać jakieś rozstrzygnięcie dla stabilności punktu równowagi satelity.

Zaimplementuj uzyskane w wyniku obliczeń równania dynamiki ze zmiennymi stanu satelity telekomunikacyjnego oraz ich przybliżenie liniowe w Matlabie/Simulinku. Wcześniej wspomniany plik `dynamikaSatelity1.m` może posłużyć jako zalążek, choć nie jest to obligatoryjne.

4 Satelita telekomunikacyjny: podejście z zastosowaniem systemu algebry komputerowej

Zadanie *Dynamika satelity telekomunikacyjnego* zostanie wykonane ponownie ale tym razem z użyciem *Symbolic Math Toolbox* Matlaba. W tym celu posłużymy się m-plikiem `dynamikaSatelity2.m`, którego listing jest zamieszczon poniżej. Na ten etap ćwiczenia składają się z dwie części:

1. szybkiego wprowadzenia do *Symbolic Math Toolbox*,

2. badań symulacyjnych.

4.1 Szybkie wprowadzenie do *Symbolic Math Toolbox*

Tradycyjne (ręczne, na kartce papieru) techniki wyprowadzania równań dynamiki są efektywne jedynie w prostych przypadkach. W przypadku systemów złożonych uzasadnione jest użycie systemu algebry komputerowej (ang. Symbolic Algebra Systems). Przykładem takiego systemu jest *Symbolic Math Toolbox*.

1. Przeczytaj uważnie kod `dynamikaSatelity2.m` i spróbuj zrozumieć znaczenie poszczególnych jego fragmentów.

2. Posługując się funkcją `help` Matlaba pozyskaj podstawowe informacje na temat funkcji *Symbolic Math Toolbox* użytych w rozważanym kodzie:

   - `syms`, `sym`, `double`;
   - `diff`;
   - `subs`, `simplify`, `solve`;
   - `jacobian`;
   - `matlabFunction`.

3. Uruchom `dynamikaSatelity2.m` w Matlabie. Porównaj wyniki obliczeń pośrednich, przechowywanych w przestrzeni roboczej Matlaba, z wynikami obliczeń ręcznych z rozdziału 3. W szczególności, przeanalizuj zgodność wyników z tymi przechowywanymi przez zmienne zmienne:

- `L`, `eqn1`, `EQN1`, `eqn2`, `EQN2`;
- `f`
- `JA`, `JB`, `SA`, `SB`, `A`, `B`,

Oceń czy kod z `dynamikaSatelity2.m` może być łatwo rozwinięty dla bardzoej złożonych systemów dynamicznych, w celu wyprowadzenia równań dynamiki dla tych systemów, badania ich własności czy do ich analizy symulacyjnej.

```
%% A.4 DYNAMIKA SATELITY
clear all
close all

%% A.4.2 Modelowanie matematyczne
% konstruowanie (deklarowanie) zmiennych symbolicznych i funkcji symbolicznych
syms t r(t) th(t) phi(t) D2r D2phi x1 x2 x3 x4 ur uth dr dth R OMEGA DELTA M K

% definiowanie parametrow satelity
T=24*60*60;             % s, okres obrotu Ziemi
m=2;                    % kg
k=4e14;                 % m^3/s^2
omega=2*pi/T;           % rad/s
rR=(k/omega^2)^(1/3);   % m, srednica orbity satelity

% energia kinetyczna i potencjalna satelity
PE=-(K*M)/r;
KE=sym(1)/2*M*(diff(r,t)^2 + r^2*diff(th,t)^2);

% funkcja Lagrange satelity
L=KE-PE;

% dynamika satelity wyrazona przez rownania Eulera-Lagrange'a
D11  = diff(L,diff(r(t),t));
D21  = diff(L,r);
eqn1 = diff(D11,t) - D21 == ur+dr;
% wyrazenie zmiennej th przy uzyciu zmiennej phi poprzez operacje
% podstawienia
EQN1 = subs(eqn1, th(t), phi(t)+OMEGA*t);

D12  = diff(L,diff(th(t),t));
D22  = diff(L,th);
eqn2 = diff(D12,t) - D22 == uth+dth;
% wyrazenie zmiennej th przy uzyciu zmiennej phi poprzez operacje
% podstawienia
EQN2 = subs(eqn2, th(t), phi(t)+OMEGA*t);

% przeksztalcenie rownan dynamiki satelity do ukladu rownan ze zmiennymi stanu
%
% krok 1: w miejsce r, r', phi, phi' sa podstawiane x1, x2, x3, x4 w
% rownaniach EQN1 and EQN2. r'' i phi '' sa zastapione przez  D2r i D2phi
% odpowiednio. Ostatnie podstawienie ma charakter techniczny i jest wykonane
% z uwagi na wymagania funkcji solve, uzytej ponizej
E1 = subs(EQN1, ...
     {diff(r,t,t), diff(phi,t,t), diff(r,t), diff(phi,t), r(t), phi(t)},...
```

```
    {D2r, D2phi, x2, x4, x1, x3});

E2 = subs(EQN2, ...
    {diff(r,t,t), diff(phi,t,t), diff(r,t), diff(phi,t), r(t), phi(t)},...
    {D2r, D2phi, x2, x4, x1, x3});

% krok 2: wyrazenie r'', phi'', reprezentowanych przez D2r i D2phi, przez
% zmienne stanu x1, x2, x3, x4
[F1, F2]=solve(E1, E2, D2r, D2phi);

% krok 3: uproszczenie wyrazen otrzymaych w kroku 2
%
F1=simplify(F1);
F2=simplify(F2);

% krok 4 (dynamika satelity telekomunikacyjnego)
% x'=f(x,u)
% y =h(x,u)
% derivation of f and h:
f=[x2;F1;x4;F2];
h=[x1;x3];

%% A.4.3 analiza punktu rownowagi
% weryfikacja wybranych rozwiazan ukladu rownan satelity ze zmiennymi stanu

disp('A.4.3')

% x(t)=[R;0;0;0];
test1=simplify(diff([R;0;0;0],t)...
    -subs(f,{x1,x2,x3,x4,ur,dr,uth,dth,K},...
    {R,0,0,0,0,0,0,0,OMEGA^2*R^3}));
if all(test1==0)
    disp('x(t)=[R;0;0;0] ...
         jest rozwiazaniem ukladu rownan ze zmiennymi stanu satelity');
end

% x(t)=[(K/(OMEGA+DELTA)^2)^(1/3);0;DELTA*t;diff(DELTA*t,t)];
test2=simplify(diff([(K/(OMEGA+DELTA)^2)^(1/3);0;DELTA*t;diff(DELTA*t,t)],t)...
    -subs(f,{x1,x2,x3,x4,ur,dr,uth,dth},...
    {(K/(OMEGA+DELTA)^2)^(1/3),0,DELTA*t,diff(DELTA*t,t),0,0,0,0}));
if all(test2==0)
    disp('x(t)=[(K/(OMEGA+DELTA)^2)^(1/3);0;DELTA*t;diff(DELTA*t,t)] ...
         jest rozwiazaniem ukladu rownan ze zmiennymi stanu satelity');
end

%% A.4.4 Linearyzacja
% wyznaczanie macierzy A, B, C w przyblizeniu liniowym rownania
% x'=f(x,u)
% y =h(x,u)
% w punkcie rownowagi

% krok 1: wyliczanie jakobianow
JA=jacobian(f,[x1,x2,x3,x4]);
```

```
JB=jacobian(f,[ur,uth,dr,dth]);
JC=jacobian(h,[x1,x2,x3,x4]);

% krok 2: wyliczanie macierzy symbolicznych A, B, C, stowarzyszonych
% z punktem rownowagi [R,0,0,0]', z uwzglednieniem ze
% K=OMEGA^2*R^3
SA=simplify(subs(JA,{x1,x2,x3,x4,ur,dr,uth,dth,K},{R,0,0,0,0,0,0,0,OMEGA^2*R^3}));
SB=simplify(subs(JB,{x1,x2,x3,x4,ur,dr,uth,dth},{R,0,0,0,0,0,0,0}));
SC=simplify(subs(JC,{x1,x2,x3,x4},{0,0,0,0}));

%
% krok 3: wyznaczanie wartosci numerycznych macierzy A, B, C przez podstawienie
% parametrow satelity pod odpowiednie zmienne symboliczne
% w macierzach symbolicznych otrzymanych w kroku 2.
A=double(simplify(subs(SA, {K,M,OMEGA,R},{k,m,omega, rR})));
B=double(simplify(subs(SB, {K,M,OMEGA,R},{k,m,omega, rR})));
C=double(simplify(subs(SC, {K,M,OMEGA,R},{k,m,omega, rR})));

%
% krok 4:
% x'=A*x + B*u
% liniowe przyblizenie f(x,u) przez fl(x,u):=A*x + B*u
fl=A*[x1;x2;x3;x4]+B*[ur;dr;uth;dth];

%% A.4.5 Analiza modelu
% stabilnosc przyblizenia liniowego
% disp('A.4.5')

disp('A.4.5')
disp('testowanie stabilnosci:')
ev=eig(A);
disp(ev);

%% A.4.6 Symulacje
% badania symulacyjne dynamiki satelity

% definicja typowego sygnalu wejciowego uzywanego podczas badan symulacyjnych
% dynamiki satelity
u0=@(t)0;

% 0
% system w punkcie rownowagi

% warunki poczatkowe i zaklocenie radialne
dr0=@(t)0;
x0=[rR;0;0;0];
x0L=x0-[rR;0;0;0];

% tworzenie kodu dla dynamiki satelity (sD)
sDf=subs(f,{K,M,OMEGA,R,dr,dth,ur,uth},{k,m,omega,rR,dr0,u0,u0,u0});
sD = matlabFunction(sDf,'Vars',{t,[x1;x2;x3;x4]});
% tworzenie kodu dla aproksymacji liniowej dynamiki satelity (sLD)
sLDfl=subs(fl,{dr,dth,ur,uth},{dr0,u0,u0,u0});
```

```
sLD = matlabFunction(sLDfl,'Vars',{t,[x1;x2;x3;x4]});

% symulacja i kreslenie wykresow dla dynamiki satelity (sD)
[ts,ys] = ode45(sD,[0 T],x0);
figure(1)
subplot(2,1,1)
plot(ts,ys)
title("model nieliniowy")
xlabel("t[s]"), ylabel("x")
% symulacja i kreslenie wykresow dla aproksymacji liniowej dynamiki satelity (sLD)
[ts,ys] = ode45(sLD,[0 T],x0L);
subplot(2,1,2)
plot(ts,ys)
title("aproksymacja liniowa")
xlabel("t[s]"), ylabel("x")

% 1
% 1%--we zaburzenie r(0) wzgledem promienia orbity geostacjonarnej

% warunki poczatkowe (radialne zaklocenie jest niezmienione)
x0=[rR*1.01;0;0;0];
x0L=x0-[rR;0;0;0];

% ZADANIE 1
% symulacja i kreslenie wykresow dla dynamiki satelity (sD)

% symulacja i kreslenie wykresow dla aproksymacji liniowej dynamiki satelity (sLD)



% 1%-we zaburzenie phi(0) wzgledem pelnego obrotu Ziemi wzgledem swojej osi

% warunki poczatkowe (radialne zaklocenie jest niezmienione)
x0=[rR;2*pi/100;0;0];
x0L=x0-[rR;0;0;0];

% ZADANIE 2
% symulacja i kreslenie wykresow dla dynamiki satelity (sD)

% symulacja i kreslenie wykresow dla aproksymacji liniowej dynamiki satelity (sLD)



% 2
% radialne zaklocenie skokowe o wartosci 5% grawitacyjnego przyciagania
% satelity przez ziemie

% warunki poczatkowe i radialne zaklocenie
dr1=@(t)(sign(t)+1)*m*9.81/2*0.05;
x0=[rR;0;0;0];
x0L=x0-[rR;0;0;0];

% ZADANIE 3
```

```
205 % tworzenie kodu dla dynamiki satelity (sD)
206 sDf= 0; %jest nieprawidlowo (zrobione w celu zapewnienia wykonywalnosci skryptu)
207 sD = 0; %jest nieprawidlowo
208 % tworzenie kodu dla aproksymacji liniowej dynamiki satelity (sLD)
209 sLDfl= 0; %jest nieprawidlowo
210 sLD =  0; %jest nieprawidlowo
211
212 % symulacja i kreslenie wykresow dla dynamiki satelity (sD)
213
214 % symulacja i kreslenie wykresow dla aproksymacji liniowej dynamiki satelity (sLD)
215
216
217 % 3
218 % radialne zaklocenie o charakterze okresowym z amplituda rowna 5%
219 % grawitacyjnego przyciagania satelity przez Ziemie o okresie rownym okresowi
220 % obrotu Ziemi
221
222 % radialne zaklocenie (warunki poczatkowe sa niezmienione)
223 dr2=@(t)cos(2*pi/T*t)*m*9.81*0.05;
224
225
226 % ZADANIE 4
227 % tworzenie kodu dla dynamiki satelity (sD)
228 sDf= 0; %jest nieprawidlowo (zrobione w celu zapewnienia wykonywalnosci skryptu)
229 sD = 0; %jest nieprawidlowo
230 % tworzenie kodu dla aproksymacji liniowej dynamiki satelity (sLD)
231 sLDfl= 0; %jest nieprawidlowo
232 sLD = 0;  %jest nieprawidlowo
233
234 % symulacja i kreslenie wykresow dla dynamiki satelity (sD)
235
236 % symulacja i kreslenie wykresow dla aproksymacji liniowej dynamiki satelity (sLD)
```

4.2 Badania symulacyjne

Przeanalizuj kod `dynamikaSatelity2.m` od linijki 132 do 166. Użyj ten fragment jako wzór i na jego podstawie uzupełnij brakujące fragmenty w kodzie. Natępnie przeprowadź badania symulacyjne zgodnie z wymogami rozdziału 6-go zadania *Dynamika satelity telekomunikacyjnego*. Sprawdź czy uzyskane wyniki są zgodne z wynikami uzyskanymi podczas realizacji zadań z rozdziału 3.

5 Sprawozdanie

Sprawozdanie powinno mieć formę archiwum `task_3.zip`, zawierającego:

- skany z kartek z wynikami obliczeń ręcznych, wykonywanych w ramach poleceń z rozdziału 3;
- m-pliki do badań symulacyjnych wymagane w rozdziale 3;
- uzupełniony plik `sateliteDynamics2.m` z kodem umożliwiającym badania symulacyjne w ramach rozdziału 4.

Literatura

[1] J. W. Polderman and J. C. Willems. *Introduction to Mathematical Systems Theory. A Behavioral Approach.* Springer New York, NY, 1998.

Załącznik

W oryginalnej wersji ćwiczenia (zob. rozdział *Satellite Dynamics* w [1]) występuje kilka błędów typograficznych. W polskim tłumaczeniu zostały one poprawione. Poniżej zamieszczono wyrażenia, które są skorygowane i odróżniają polskie tłumaczenie od wersji oryginalnej

A.4.2, strona 392: energia potencjalna

$$P(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = -\frac{km}{r} \tag{1}$$

A.4.2, strona 392: drugie równanie w (A.14)

$$\frac{d^2\theta}{dt} = -2\frac{\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}}{r} + \frac{u_\theta}{mr^2} + \frac{d_\theta}{mr^2} \tag{2}$$

A.4.2, strona 392: drugie równanie w (A.15)

$$\frac{d^2\phi}{dt} = -2\frac{\frac{dr}{dt}(\frac{d\phi}{dt} + \Omega)}{r} + \frac{u_\theta}{mr^2} + \frac{d_\theta}{mr^2} \tag{3}$$

A.4.4, strona 394: dwie identyczne kolumny przy u_θ i d_θ

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{mR^2} \end{bmatrix} \tag{4}$$