

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Ю. М. ИНШАКОВ М. С. ПОРТНОЙ

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ СИГНАЛОВ
ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ АКТИВНУЮ
ЭЛЕКТРИЧЕСКУЮ ЦЕПЬ**

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
2024

УДК 621.3.01(07)

ББК 3 21я7

И74

Иншаков Ю. М., Портной М. С.

И74 Исследование прохождения сигналов через линейную активную электрическую цепь: учеб.-метод. пособие. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2024. 48 с.

ISBN 978-5-7629-3252-3

Рассматриваются вопросы анализа характеристик активных электрических RC -цепей и проходящих через цепи сигналов, а также описывается моделирование активных RC -цепей с применением программных средств Mathcad-15 по следующим разделам курса теоретических основ электротехники: операторный и спектральный методы анализа переходных процессов в линейных цепях, вопросы синтеза и чувствительности активных RC -цепей.

Предназначено для студентов по направлениям подготовки «Радиотехника», «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», «Конструирование и технология электронных средств» в рамках дисциплины «Теоретические основы электротехники» очной и очно-заочной форм обучения. Может быть полезно для студентов всех направлений и специальностей электротехнического университета.

УДК 621.3.01(07)

ББК 3 21я7

Рецензент д-р техн. наук, проф. Н. В. Коровкин (СПбПУ).

Утверждено

редакционно-издательским советом университета
в качестве учебно-методического пособия

ISBN 978-5-7629-3252-3

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2024

ВВЕДЕНИЕ

Цель курсовой работы – практическое освоение методов анализа искажений электрических сигналов, проходящих через линейные активные RC -цепи, а также рассмотрение вопросов проектирования активных RC -цепей по заданным передаточным функциям и оценки чувствительности цепей к изменению их параметров.

ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ

Курсовую работу оформляют в виде пояснительной записки в соответствии с ГОСТ 7.32–2017 «Система стандартов по информации, библиотечному и издательскому делу. Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления» и в соответствии с распоряжением ректора СПбГЭТУ № 3003 от 09.11.2015 «Требования к оформлению научно-технических отчетов». Титульный лист оформляют в соответствии с образцом, помещенным на стенде кафедры ТОЭ.

Первым листом пояснительной записки должно быть оглавление, вторым – техническое задание; в конце пояснительной записки приводят заключение (выводы по курсовой работе в целом) и список использованной литературы. Все листы пояснительной записки следует пронумеровать.

Схемы и графики с указанием порядкового номера и названия рисунка размещают в соответствующих местах записки.

Расчеты следует сопровождать краткими комментариями и ссылками на использованную литературу. Необходимые для построения графиков результаты расчетов сводят в таблицы.

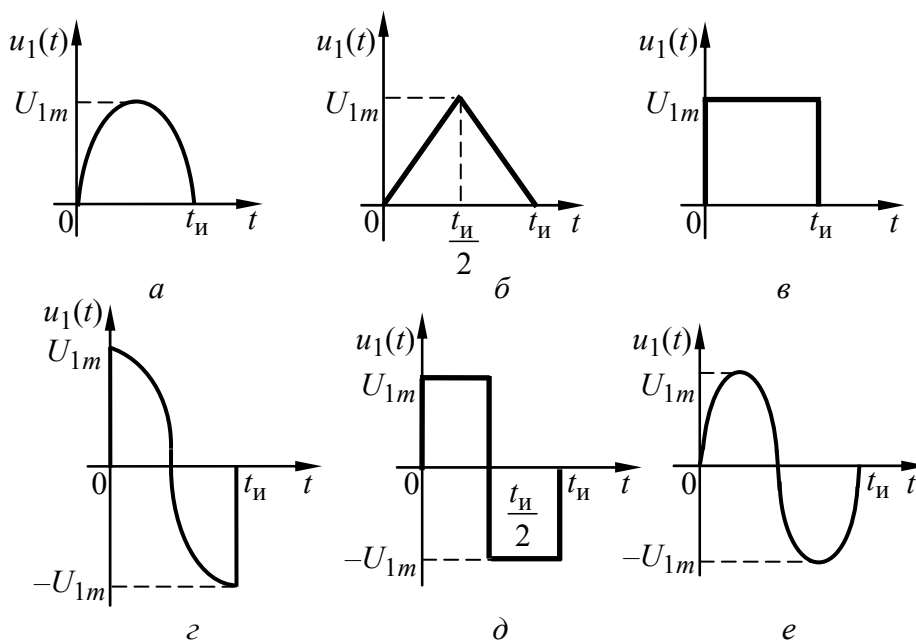
Схемы, обозначения элементов, таблицы, графики, обозначения величин и единиц измерения должны соответствовать действующим стандартам; по осям графиков указывают единицы измерения и масштаб величин.

Защита курсовой работы осуществляется посредством индивидуального собеседования преподавателя (комиссии) со студентом. К защите курсовой работы допускаются студенты, представившие полностью и правильно выполненную работу. При выставлении оценки учитываются: понимание студентом выполненных расчетов и графических построений, знание использованных методов анализа и синтеза активных RC -цепей, умение трактовать и контролировать полученные результаты, а также оценка ответов на контрольные вопросы по курсовой работе.

1. ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

В курсовой работе требуется выполнить следующие пункты: 1) найти по заданной передаточной функции реакцию активной RC -цепи при воздействии одиночного импульса; 2) рассчитать переходную и импульсную характеристики активной цепи; 3) найти спектральные характеристики аналогового входного сигнала и частотные характеристики цепи; 4) вычислить установившуюся реакцию цепи при воздействии периодической последовательности импульсов; 4) рассчитать параметры элементов активной цепи по заданной передаточной функции; 5) найти для активной цепи относительную чувствительность полюсной добротности к изменению коэффициента усиления усилителя.

В каждом варианте курсовой работы исследуем активную RC -цепь (см. варианты схем, табл. 1.1, 1.2). Активная цепь второго порядка содержит пассивные RC -элементы, а также 1 или 2 операционных усилителя (ОУ). Схема описывается тройками чисел. При построении схемы по заданным тройкам чисел используют следующие правила. Первое число тройки чисел является порядковым номером элемента, два последующих – номера узлов, к которым подключен элемент цепи; для источника напряжения (ИН) отсчет узлов производится от «+» к «–». После тройки чисел приводится условное буквенное обозначение элемента. Во всех вариантах ОУ (идеальные или с конечным усилением K) заданы тройками чисел: первая цифра – инвертирующий вход, вторая – неинвертирующий, третья – выход.



Коэффициенты нормированной передаточной функции проектируемой активной RC -цепи заданы в табл. 1.1; параметры и вид входных одиночных сигналов длительностью $t_{\text{и}}$ указаны в табл. 1.2. Периодические сигналы имеют ту же форму, что и одиночные сигналы, период их повторения $T = 2t_{\text{и}}$.

Таблица 1.1

Номер варианта задания	Коэффициенты передаточной функции активного RC -звена				
	a_2	a_1	a_0	b_1	b_0
1	0	0	7,33	2,15	3,85
2	0	0	7,9	2,4	7,16
3	0	0	0,66	0,82	0,33
4	1,75	0	0	1,8	2,07
5	1,13	0	0	0,85	0,95
6	2,64	0	0	0,72	0,56
7	0	0	6,0	1,7	3,5
8	0	0	5,52	2,2	4,4
9	0	2,53	0	0,95	1,25
10	1,82	0	0	0,9	1,17
11	0	1,75	0	1,12	0,76
12	0	2,63	0	2,0	2,2
13	0,76	0	0	1,3	0,9
14	0	2,9	0	1,6	1,85
15	0	4,53	0	1,4	2,85
16	0,83	0	0	2,0	5,3
17	0	0	1,28	1,2	1,6
18	0	1,2	0	1,3	1,44
19	0	2,44	0	0,9	1,3
20	0	1,5	0	1,0	1,0
21	0	1,9	0	1,25	1,0
22	0	3,9	0	1,5	3,5
23	0	0	1,38	1,0	1,5
24	0	1,15	0	0,8	0,45
25	0	3,08	0	1,1	1,0
26	0	0	7,33	2,15	3,85
27	0	0	7,9	2,4	7,16
28	0	0	0,66	0,82	0,33
29	1,75	0	0	1,8	2,07
30	1,13	0	0	0,85	0,95

Варианты схем

Схема 1. 115 – ИН u_1 ; 212 – R_2 ; 323 – R_3 ; 435 – C_4 ; 0У – 534, k ; 624 – C_6 .

Схема 2. 116 – ИН u_1 ; 212 – R_2 ; 0У – 623, $k = 1$; 434 – R_4 ; 546 – C_5 ; 0У – 645, k ; 725 – C_7 .

Схема 3. 115 – ИН u_1 ; 212 – R_2 ; 325 – R_3 ; 423 – R_4 ; 535 – C_5 ; 0У – 534, k ; 724 – C_7 .

Схема 4. 115–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 323– C_3 ; 435– R_4 ; 0У–534, k ; 624– R_6 .

Схема 5. 116–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 0У– 623, $k = 1$; 434– C_4 ; 546– R_5 ; 0У– 645, k ; 725– R_7 .

Схема 6. 115–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 325– R_3 ; 423– C_4 ; 535– R_5 ; 0У–534, k ; 724– R_7 .

Схема 7. 116–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 326– R_3 ; 0У– 623, $k = 1$; 534– R_5 ; 646– C_6 ; 0У– 645, k ; 825– C_8 .

Схема 8. 115–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 325– C_3 ; 423– R_4 ; 535– C_5 ; 0У–354, k ; 724– R_7 .

Схема 9. 115–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 325– C_3 ; 423– C_4 ; 535– R_5 ; 0У–534, k ; 724– R_7 .

Схема 10. 116–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 326– R_3 ; 0У– 623, $k = 1$; 534– C_5 ; 646– R_6 ; 0У– 645, k ; 825– R_8 .

Схема 11. 115–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 323– C_3 ; 435– R_4 ; 535– C_5 ; 0У–534, k ; 724– R_7 .

Схема 12. 115–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 323– C_3 ; 435– R_4 ; 0У–354, k ; 624– C_6 .

Схема 13. 115–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 325– R_3 ; 423– C_4 ; 535– R_5 ; 0У–354, k ; 724– C_7 .

Схема 14. 115–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 323– R_3 ; 435– C_4 ; 0У–354, k ; 624– R_6 .

Схема 15. 115–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 323– R_3 ; 435– R_4 ; 535– C_5 ; 0У–354, k ; 724– C_7 .

Схема 16. 116–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 326– R_3 ; 0У–623, $k = 1$; 534– C_5 ; 646– R_6 ; 0У– 465, k ; 825– C_8 .

Схема 17. 116–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 326– C_3 ; 0У–623, $k = 1$; 534– R_5 ; 6460У 465, k ; 825

Схема 18. 116–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 326– C_3 ; 0У–623, $k = 1$; 534– C_5 ; 646– R_6 ; 0У– 645, k ; 825– R_8 .

Схема 19. 116–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 0У– 623, $k = 1$; 434– C_4 ; 546– R_5 ; 0У– 465, k ; 725– C_7 .

Схема 20. 116–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 0У–623, $k = 1$; 434– R_4 ; 546– C_5 ; 0У– 465, k ; 725– R_7 .

Схема 21. 115–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 323– C_3 ; 435– R_4 ; 0У–354, k ; 624– C_6 .

Схема 22. 116–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 0У–623, $k = 1$; 434– C_4 ; 546– R_5 ; 0У–465, k ; 725– C_7 .

Схема 23. 116–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 0У–623, $k = 1$; 434– R_4 ; 546– R_5 ; 646– C_6 ; 0У–645, k ; 825– C_8 .

Схема 24. 116–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 0У–623, $k = 1$; 434– R_4 ; 546– R_5 ; 646– C_6 ; 0У–465, k ; 825– R_8 .

Схема 25. 115–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 325– R_3 ; 423– R_4 ; 535– C_5 ; 0У–354, k ; 724– R_7 .

Схема 26. 115–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 323– R_3 ; 435– C_4 ; 0У–534, k ; 624– C_6 .

Схема 27. 116–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 0У–623, $k = 1$; 434– R_4 ; 546– C_5 ; 0У–645, k ; 725– C_7 .

Схема 28. 115–ИН u_1 ; 212– R_2 ; 325– R_3 ; 423– R_4 ; 535– C_5 ; 0У–534, k ; 724– C_7 .

Схема 29. 115–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 323– C_3 ; 435– R_4 ; 0У–534, k ; 624– R_6 .

Схема 30. 116–ИН u_1 ; 212– C_2 ; 0У–623, $k = 1$; 434– C_4 ; 546– R_5 ; 0У–645, k ; 725– R_7 .

Таблица 1.2

№ вар.	Параметры сигнала			№ вар.	Параметры сигнала		
	Рис. (с. 4)	Амплитуда U_{1m} , В	Длительность $t_{и}$, мс		Рис. (с. 4)	Амплитуда U_{1m} , В	Длительность $t_{и}$, мс
1	<i>a</i>	2,0	2,6	16	<i>в</i>	4,0	2,5
2	<i>б</i>	3,0	3,0	17	<i>a</i>	3,0	3,0
3	<i>с</i>	4,0	6,0	18	<i>в</i>	4,0	3,0
4	<i>в</i>	2,0	2,0	19	<i>с</i>	3,0	4,0
5	<i>д</i>	2,0	4,0	20	<i>д</i>	4,0	4,0
6	<i>a</i>	2,0	6,0	21	<i>б</i>	4,0	4,0
7	<i>с</i>	3,0	2,5	22	<i>e</i>	3,0	3,0
8	<i>б</i>	3,0	2,0	23	<i>с</i>	3,0	3,0
9	<i>д</i>	2,5	4,0	24	<i>в</i>	2,0	5,0
10	<i>в</i>	4,0	5,0	25	<i>e</i>	2,0	3,0
11	<i>a</i>	3,0	4,0	26	<i>б</i>	2,0	2,6
12	<i>б</i>	3,0	2,0	27	<i>д</i>	3,0	3,0
13	<i>с</i>	2,0	3,0	28	<i>в</i>	4,0	6,0
14	<i>a</i>	3,0	2,0	29	<i>a</i>	2,0	2,0
15	<i>д</i>	3,0	3,0	30	<i>e</i>	2,0	4,0

1.1. Порядок выполнения курсовой работы

1. Произвести нормирование параметров и переменных цепи.
2. Записать передаточную функцию активной RC -цепи с заданными коэффициентами. Рассчитать нули и полюсы заданной передаточной функции активной цепи

$$H_U(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}. \quad (1.1)$$

Изобразить координаты вычисленных нулей и полюсов на комплексной плоскости; найти приблизительную длительность свободного процесса в активной цепи по значению вещественной части полюсов.

3. Найти изображение входного одиночного импульса воздействия и вычислить реакцию активной RC -цепи операторным методом; построить график реакции; приближенно оценить время затухания переходных процессов в цепи.

4. Вычислить переходную и импульсную характеристики активной цепи по заданной передаточной функции; построить их графики.

5. Определить амплитудный и фазовый спектры входного одиночного импульса и построить их графики.

6. Рассчитать амплитудно-частотную (АЧХ) и фазочастотную (ФЧХ) характеристики активной цепи; построить графики АЧХ- и ФЧХ-цепи, а также график амплитудно-фазовой характеристики; определить полосу пропускания цепи и оценить время запаздывания сигналов, спектр которых попадает в полосу пропускания.

7. Найти амплитудный и фазовый спектры выходного одиночного импульса и построить их графики.

8. Определить амплитудный и фазовый спектры периодического входного сигнала; ограничиться 10 гармониками разложения сигнала в ряд Фурье; построить графики исходного входного периодического сигнала и сигнала, представленного рядом Фурье (изобразить отдельно 3 первые составляющие ряда).

9. Произвести приближенный расчет реакции цепи по спектру при периодическом воздействии; построить график реакции; оценить искажения передачи сигналов при прохождении через исследуемую активную цепь сравнением ширины спектра воздействия и полосы пропускания цепи.

10. Вычислить параметры активной RC -цепи второго порядка, используя заданную передаточную функцию.

11. Рассчитать для активной RC -цепи относительную чувствительность полюсной добротности к изменению коэффициента усиления усилителя.

12. Сделать выводы по курсовой работе.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ

Для удобства производимых в курсовой работе исследований активных RC -цепей все вычисления выполняем с нормированными коэффициентами передаточных функций (см. табл. 1.1). Отметим, что длительность $t_{\text{и}}$ входных сигналов активных цепей которую нормируем при выполнении курсовой работы, задана в миллисекундах (см. табл. 1.1).

2.1. Вычисление реакции активной RC -цепи при воздействии одиночного импульса

Расчет реакции активной RC -цепи выполняем при воздействии одиночного импульса по заданной передаточной функции (1.1):

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (2.1)$$

где $U_1(s)$ – изображение входного сигнала активной цепи; $U_2(s)$ – изображение выходного сигнала.

В выражении (2.1) числитель и знаменатель передаточной функции (ПФ) заданы полиномами оператора Лапласа « s »; знаменатель ПФ записан в приведенной форме, т. е. коэффициент $b_2 = 1$. Все коэффициенты a_k и b_k – вещественные числа.

Находим изображение реакции активной RC -цепи

$$U_2(s) = U_1(s)H_U(s).$$

При решении этого уравнения изображение реакции $U_2(s)$ представим в виде *дробно-рациональной* функции оператора « s »:

$$U_2(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{a_m s^m + a_{(m-1)} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{s^n + b_{(n-1)} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}, \quad (2.2)$$

где m – порядок полинома числителя $M(s)$; n – порядок полинома знаменателя $N(s)$, записанного в приведенной форме ($b_n = 1$).

Находим полюсы s_k изображения (корни знаменателя $N(s) = 0$) и представляем изображение $U_2(s)$ в виде суммы простых дробей:

$$U_2(s) = \frac{M(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)} = A_0 + \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{s-s_k},$$

где A_k определяем по теореме разложения

$$A_0 = U_2(\infty); \quad A_k = (s-s_k)U_2(s)|_{s=s_k}.$$

Заметим, что $A_0 \neq 0$, если степени полиномов числителя и знаменателя (2.2) равны, т. е. $m = n$.

Находим реакцию $u_2(t)$ активного RC -звена, используя формулы перехода к оригиналам [1]:

$$u_2(t) = A_0\delta(t) + \left[\sum_{k=1}^n A_k e^{s_k t} \right] \delta_1(t).$$

2.2. Примеры изображений импульсов различной формы

В курсовой работе для исследования активных RC -цепей используем входные импульсные сигналы различной формы: прямоугольной, синусоидальной, косинусной, треугольной и типа меандр.

2.2.1. Изображение импульса прямоугольной формы

Импульс прямоугольной формы с амплитудой U_{1m} и длительностью $t_{\text{имп}}$ показан на рис. 2.1, а.

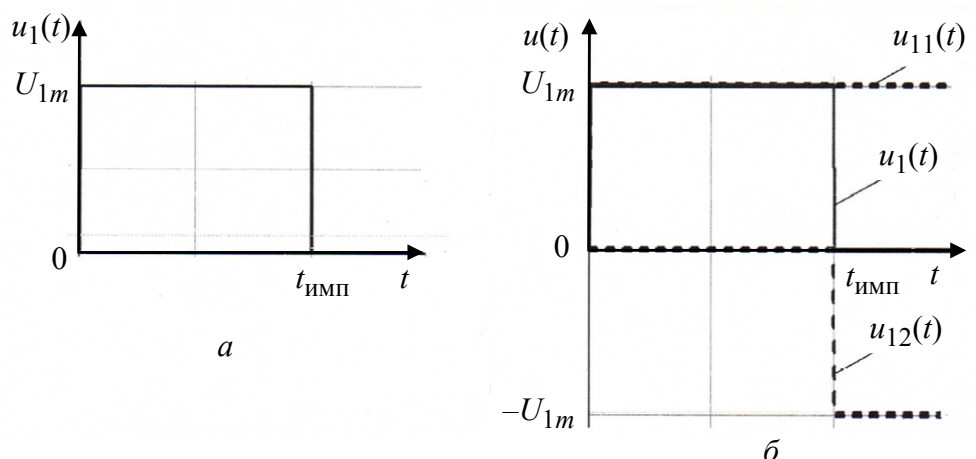


Рис. 2.1

Оригинал прямоугольного импульса можно описать двумя временными функциями (рис. 2.1, б), первая из которых $u_{11}(t)$ положительной полярности начинается при $t = 0_+$, а вторая $u_{12}(t)$ отрицательной полярности запаздывает

на время $t = t_{\text{имп}}$. Запишем временную функцию оригинала импульса прямоугольной формы и представим изображение импульса, используя теорему запаздывания:

$$u_1(t) = U_{1m}\delta_1(t) - U_{1m}\delta_1(t - t_{\text{имп}}); \quad U_1(s) = \frac{U_{1m}}{s} - \frac{U_{1m}}{s}e^{-st_{\text{имп}}}. \quad (2.3)$$

2.2.2. Изображение импульса синусоидальной формы

Импульс синусоидальной формы с амплитудой U_{1m} , длительностью $t_{\text{имп}}$ и угловой частотой $\omega_0 = 2\pi / t_{\text{имп}}$ показан на рис. 2.2, а.

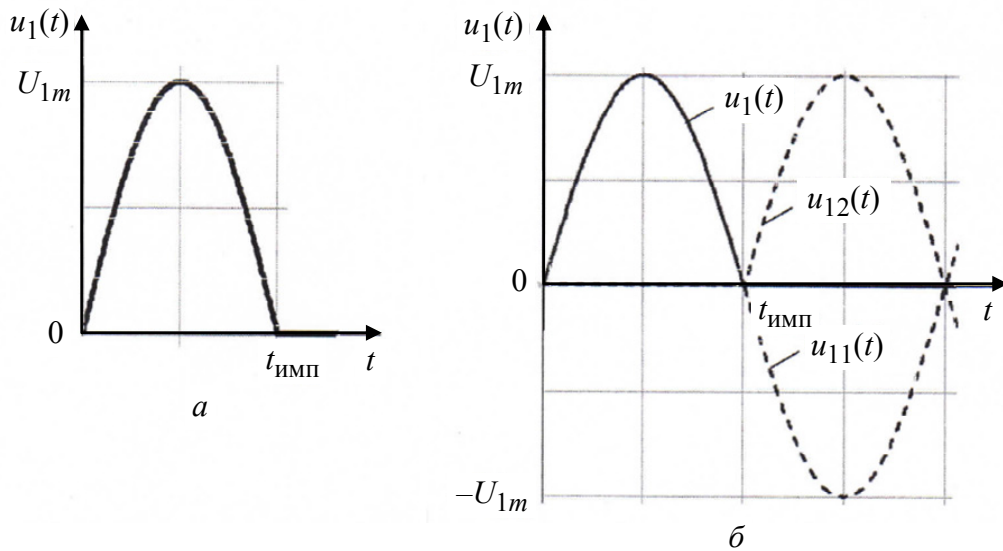


Рис. 2.2

Оригинал импульса синусоидальной формы можно описать двумя временными функциями положительной полярности (рис. 2.2, б), первая из которых $u_{11}(t)$ соответствует времени $t = 0_+$, а вторая $u_{12}(t)$ запаздывает на время $t = t_{\text{имп}}$. Запишем временную функцию оригинала импульса синусоидальной формы и представим изображение импульса, используя теорему запаздывания:

$$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega_0 t) \delta_1(t) + U_{1m} \sin \omega_0(t - t_{\text{имп}}) \delta_1(t - t_{\text{имп}});$$

$$U_1(s) = \frac{U_{1m}\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{U_{1m}\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-st_{\text{имп}}}. \quad (2.4)$$

2.2.3. Изображение импульса косинусной формы

На рис. 2.3, а показан импульс косинусной формы с амплитудой U_{1m} , длительностью $t_{\text{имп}}$ и угловой частотой $\omega_0 = 2\pi / t_{\text{имп}}$.

Оригинал импульса косинусной формы можно описать двумя временными функциями положительной полярности (рис. 2.3, б), первая из которых $u_{11}(t)$

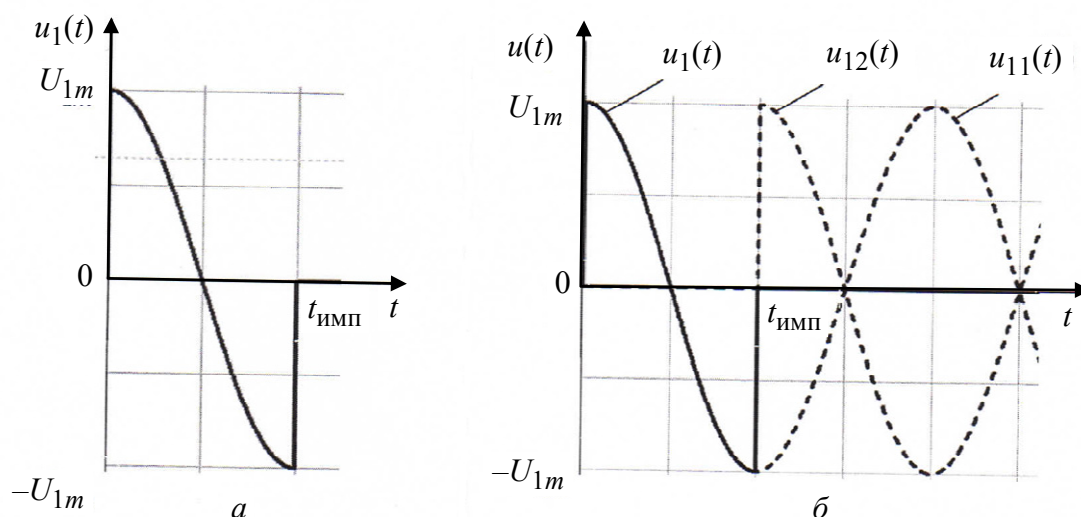


Рис. 2.3

соответствует времени $t = 0_+$, а вторая $u_{12}(t)$ запаздывает на время $t = t_{\text{имп}}$. Запишем временную функцию оригинала импульса косинусной формы и представим изображение этого импульса, используя теорему запаздывания:

$$u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega_0 t) \delta_1(t) + U_{1m} \cos \omega_0(t - t_{\text{имп}}) \delta_1(t - t_{\text{имп}});$$

$$U_1(s) = \frac{U_{1m}s}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{U_{1m}s}{s^2 + \omega_0^2} e^{-st_{\text{имп}}}. \quad (2.5)$$

2.2.4. Изображение импульса треугольной формы

Импульс треугольной формы с амплитудой U_{1m} и длительностью $t_{\text{имп}}$ показан на рис. 2.4, а.

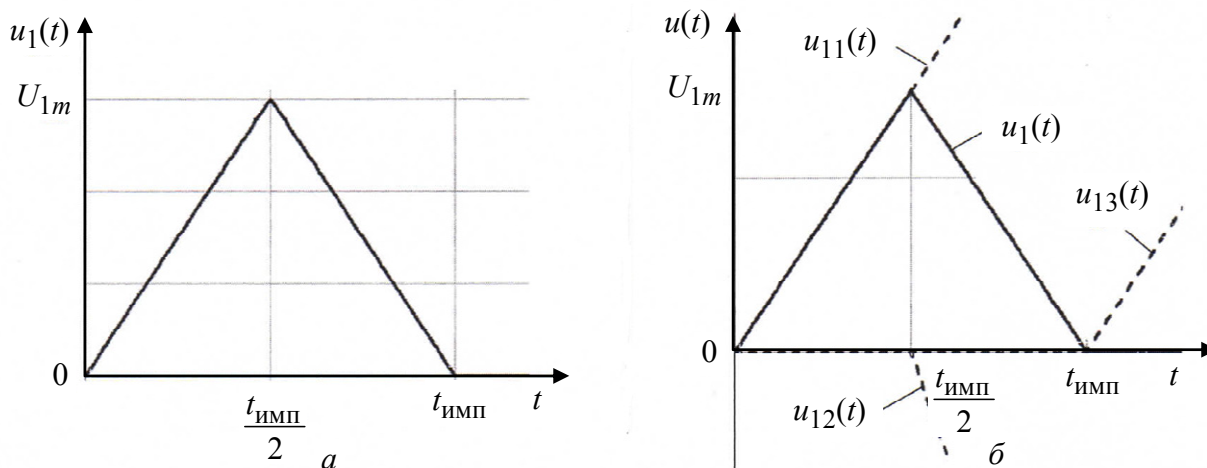


Рис. 2.4

Оригинал импульса (рис. 2.4, б) опишем тремя временными функциями, первая из которых $u_{11}(t)$ положительной полярности соответствует времени $t = 0_+$, вторая $u_{12}(t)$ отрицательной полярности запаздывает на время $t = t_{\text{имп}} / 2$ и третья $u_{13}(t)$ положительной полярности — на время $t = t_{\text{имп}}$.

Запишем временную функцию оригинала импульса треугольной формы и представим изображение импульса, используя теорему запаздывания:

$$u_1(t) = U_{1m}t\delta_1(t) - 2U_{1m}\left(t - \frac{t_{\text{имп}}}{2}\right)\delta_1\left(t - \frac{t_{\text{имп}}}{2}\right) + U_{1m}\delta_1(t - t_{\text{имп}});$$

$$U_1(s) = \frac{U_{1m}}{s^2} \left[1 - 2e^{-\frac{st_{\text{имп}}}{2}} + e^{-st_{\text{имп}}} \right]. \quad (2.6)$$

2.2.5. Изображение импульса типа меандр

Импульс типа меандр с амплитудой U_{1m} и длительностью $t_{\text{имп}}$ показан на рис. 2.5, а.

Запишем аналитически функцию первой производной оригинала импульса типа меандр:

$$u_1^{(1)}(t) = U_{1m}\delta(t) - 2U_{1m}\delta(t - t_{\text{имп}}/2) + U_{1m}\delta(t - t_{\text{имп}}), \quad (2.7)$$

где для описания в точках разрыва функции $u_1^{(1)}(t)$ использованы три импульсные функции (рис. 2.5, б), первая из которых $U_{1m}\delta(t)$ соответствует времени $t = 0_+$, вторая $[-2U_{1m}\delta(t - t_{\text{имп}}/2)]$ запаздывает на время $t = t_{\text{имп}}/2$, а третья $U_{1m}\delta(t - t_{\text{имп}})$ – на время $t = t_{\text{имп}}$.

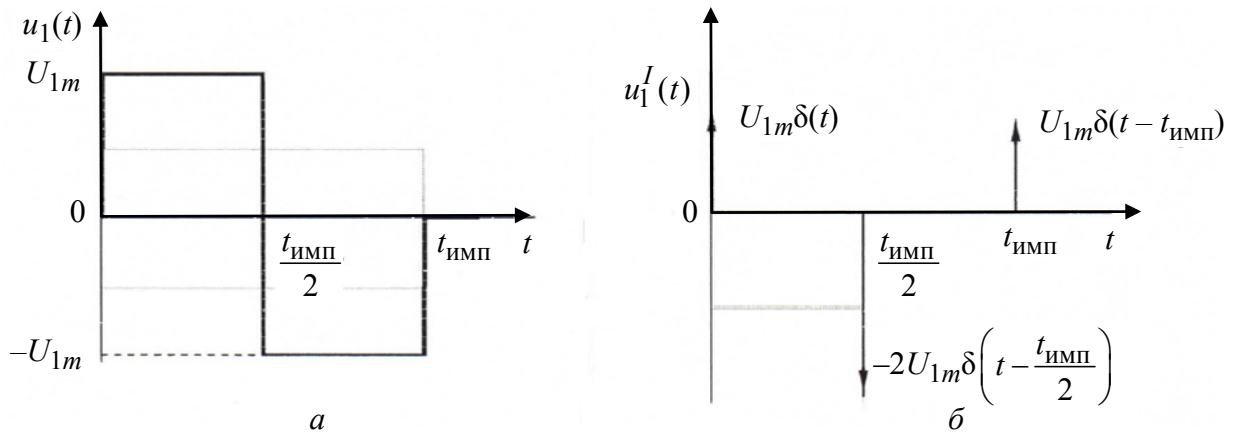


Рис. 2.5

Интегрируя выражение (2.7), найдем временную функцию оригинала импульса типа меандр:

$$u_1(t) = U_{1m}\delta_1(t) - 2U_{1m}\delta_1(t - t_{\text{имп}}/2) + U_{1m}\delta_1(t - t_{\text{имп}}),$$

Запишем изображение импульса типа меандр, используя теорему запаздывания:

$$U_1(s) = \frac{U_{1m}}{s} \left[1 - 2e^{-\frac{st_{\text{имп}}}{2}} + e^{-st_{\text{имп}}} \right]. \quad (2.8)$$

2.2.6. Изображение импульса с формой синусоидальной волны

Импульс с формой синусоидальной волны показан на рис. 2.6, а. Параметры сигнала следующие: амплитуда U_{1m} , длительность $t_{\text{имп}}$, период гармонической функции $T_0 = t_{\text{имп}}$ и угловая частота $\omega_0 = 2\pi / T_0$.

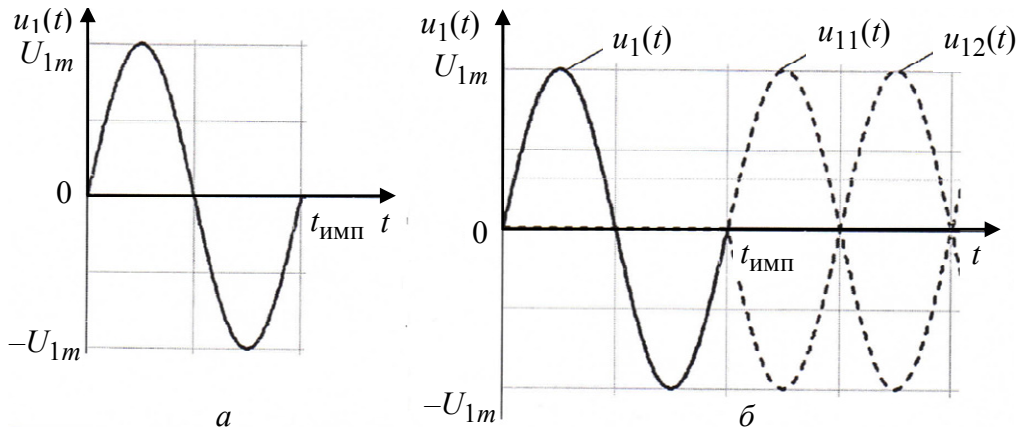


Рис. 2.6

Импульс (рис. 2.6, а) опишем двумя временными функциями (рис. 2.6, б), первая из которых $u_{11}(t)$ положительной полярности соответствует времени $t = 0_+$, а вторая $u_{12}(t)$ отрицательной полярности запаздывает на время $t = t_{\text{имп}}$.

Найдем временную функцию оригинала импульса с формой синусоидальной волны и запишем изображение импульса, используя теорему запаздывания:

$$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega_0 t) \delta_1(t) - U_{1m} \sin \omega_0(t - t_{\text{имп}}) \delta_1(t - t_{\text{имп}});$$

$$U_1(s) = \frac{U_{1m} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{U_{1m} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-st_{\text{имп}}}. \quad (2.9)$$

2.3. Переходная и импульсная характеристики активной RC-цепи

2.3.1. Переходная характеристика активной RC-цепи

Переходная характеристика активной RC-цепи численно равна реакции цепи при нулевых начальных условиях на единственное в цепи воздействие в виде единичной ступенчатой функции $u_1(t) = U_{1m} \delta_1(t)$, где $U_{1m} = 1$ В – коэффициент, выравнивающий размерность; $\delta_1(t)$ – безразмерная единичная ступенчатая функция.

Изображение переходной характеристики активной цепи $H_1(s)$ находим по формуле (2.2), используя заданную передаточную функцию цепи $H_U(s)$:

$$H_1(s) = L[h_1(t)] = L[\delta_1(t)] H_U(s) = \frac{H_U(s)}{s}, \quad (2.10)$$

где $L[\delta_1(t)] = 1/s$ – изображение единичной ступенчатой функции $\delta_1(t)$.

При решении уравнения (2.10) изображение $H_1(s)$ определим в виде *дробно-рациональной* функции оператора Лапласа « s »:

$$H_1(s) = \frac{M(s)}{sN(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s(s^2 + b_1 s + b_0)}.$$

Определив три полюса s_k изображения $H_1(s)$, найдем оригинал переходной характеристики по теореме разложения:

$$H_1(s) = L[h_1(t)] = \frac{M(s)}{s(s-s_1)(s-s_2)} = \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{s-s_k}, \quad (2.11)$$

где коэффициенты A_k (вычеты в полюсах) $H_1(s)$ рассчитываем по формуле

$$A_k = (s-s_k)H_1(s)|_{s=s_k}.$$

При нахождении оригинала переходной характеристики $h_1(t)$ активного RC -звена необходимо использовать формулу для перехода к оригиналу

$$h_1(t) = \left[\sum_{k=1}^3 A_k e^{s_k t} \right] \delta_1(t).$$

2.3.2. Импульсная характеристика активной RC -цепи

Импульсная характеристика активной RC -цепи численно равна реакции при нулевых начальных условиях на единственное в цепи воздействие в виде единичной импульсной функции $u_1(t) = U_{1m} \delta(t)$, где $U_{1m} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$ – коэффициент, выравнивающий размерность; $\delta(t)$ – единичная импульсная функция, имеющая размерность (1/с).

Изображение импульсной характеристики активной цепи $H(s)$ найдем, используя заданную передаточную функцию цепи $H_U(s)$:

$$H(s) = L[h(t)] = L[\delta(t)] H_U(s) = H_U(s), \quad (2.12)$$

где $L[\delta(t)] = 1$ – изображение единичной импульсной функции $\delta(t)$.

При решении уравнения (2.12) изображение $H(s)$ можно представить в виде *дробно-рациональной* функции оператора Лапласа « s »:

$$H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (2.13)$$

где $M(s)$ – полином числителя; $N(s)$ – полином знаменателя.

При условии, что дробь (2.13) является правильной, определим два полюса s_k изображения и найдем оригинал импульсной характеристики по теореме разложения:

$$H(s) = L[h(t)] = \frac{M(s)}{(s-s_1)(s-s_2)} = A_0 + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{s-s_k}, \quad (2.14)$$

где коэффициенты A_k рассчитаем по формуле

$$A_0 = H(\infty); \quad A_k = (s-s_k)H(s)|_{s=s_k}.$$

При нахождении оригинала импульсной характеристики $h(t)$ активной RC -цепи используем формулу

$$h(t) = A_0\delta(t) + \left[\sum_{k=1}^2 A_k e^{s_k t} \right] \delta_1(t). \quad (2.15)$$

При условии, что дробь (2.13) является неправильной, когда степень полинома числителя $M(s)$ равна степени полинома знаменателя $N(s)$, необходимо, выделив целую часть из неправильной дроби, получить изображение $H(s)$ в следующем виде:

$$H(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = a_2 + \frac{(a_1 - a_2 b_1)s + (a_0 - a_2 b_0)}{s^2 + b_1 s + b_0} = a_2 + \frac{M_1(s)}{N(s)}.$$

Полученная дробь $M_1(s)/N(s)$ является правильной и ее можно представить в виде суммы простых дробей:

$$H(s) = L[h(t)] = a_2 + \frac{M_1(s)}{(s-s_1)(s-s_2)} = a_2 + \sum_{k=1}^2 \frac{A_k}{s-s_k}.$$

Для нахождения оригинала импульсной характеристики $h(t)$ активной RC -фильтра можно использовать формулы перехода к оригиналу

$$h(t) = a_2\delta(t) + \left[\sum_{k=1}^2 A_k e^{s_k t} \right] \delta_1(t).$$

Следует отметить, что импульсную характеристику активной цепи для проверки вычислений можно найти, выполнив операцию дифференцирования переходной характеристики

$$h(t) = \frac{dh_1(t)}{dt}.$$

2.4. Частотные характеристики активной RC -цепи

Важнейшей характеристикой активной RC -цепи является амплитудно-фазовая характеристика – комплексная передаточная функция $H(j\omega)$, которую находят как отношение комплексной амплитуды выходного напряжения \dot{U}_{2m} к комплексной амплитуде входного напряжения \dot{U}_{1m} :

$$H(j\omega) = \dot{U}_{2m} / \dot{U}_{1m}.$$

Амплитудно-фазовую характеристику (АФХ) цепи определяют в широком диапазоне частот от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$ и записывают в показательной форме:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

где $|H(j\omega)|$ – модуль амплитудно-фазовой характеристики называют амплитудно-частотной характеристикой цепи, а $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ – аргумент амплитудно-фазовой характеристики называют фазочастотной характеристикой цепи.

В алгебраической форме АФХ имеет вид:

$$H_U(j\omega) = H_U(\omega) \cos \varphi(\omega) + jH_U(\omega) \sin \varphi(\omega) = H_1(\omega) + jH_2(\omega), \quad (2.16)$$

где $H_1(\omega)$ и $H_2(\omega)$ – вещественная и мнимая части амплитудно-фазовой характеристики.

На основании (2.16) можно записать

$$H_U(\omega) = \sqrt{H_1^2(\omega) + H_2^2(\omega)}; \quad \varphi(\omega) = \arg \operatorname{tg} \frac{H_2(\omega)}{H_1(\omega)}.$$

В курсовой работе амплитудно-фазовую характеристику активной RC -цепи вычисляем по заданной передаточной функции $H_U(s)$ заменой оператора Лапласа « s » на оператор комплексной частоты « $j\omega$ »:

$$H_U(j\omega) = H_U(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{(a_0 - a_2\omega^2) + ja_1\omega}{(b_0 - \omega^2) + jb_1\omega}. \quad (2.17)$$

Из (2.17) определяем амплитудно-частотную $H(\omega)$ и фазочастотную $\varphi(\omega)$ характеристики активной RC -цепи:

$$H(\omega) = \sqrt{\frac{(a_0 - a_2\omega^2)^2 + (a_1\omega)^2}{(b_0 - \omega^2)^2 + (b_1\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arg \operatorname{tg} \frac{a_1\omega}{a_0 - a_2\omega^2} - \arg \operatorname{tg} \frac{b_1\omega}{b_0 - \omega^2}.$$

Частотные характеристики фильтров являются фундаментальными понятиями теории электрических цепей и широко используются на практике. Требования к АЧХ и ФЧХ различных радиоэлектронных устройств являются определяющими при проектировании активных RC -фильтров, так как от их исполнения во многом зависит качество информации в системах передачи.

2.4.1. Оценка времени задержки выходного сигнала активной RC -цепи по фазочастотной характеристике

По фазочастотной характеристике активной RC -цепи приближенно вычисляем время задержки выходного гармонического сигнала.

Фазовая задержка – это время задержки гармонического сигнала $u_1(t) = U_{1m} \cos(\omega t + \alpha_1)$ с амплитудой U_{1m} и начальной фазой α_1 при прохождении через электрическую цепь. У сигнала на выходе цепи начальная фаза изменяется:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= H_U(\omega) U_{1m} \cos[\omega t + \varphi_{\text{зад}}(\omega) + \alpha_1] = \dots \\ &= H_U(\omega) U_{1m} \cos\left[\omega\left(t + \frac{\varphi_{\text{зад}}(\omega)}{\omega}\right) + \alpha_1\right] = U_{2m} \cos[\omega(t + t_{\text{зад}}) + \alpha_1], \end{aligned}$$

где $U_{2m} = H_U(\omega) U_{1m}$ – амплитуда выходного гармонического сигнала.

Следовательно, время задержки сигнала на выходе активной линейной цепи приближенно вычисляем по углу наклона фазочастотной характеристики в полосе пропускания цепи

$$t_{\text{зад}} = \frac{\varphi_{\text{зад}}(\omega)}{\omega} \approx \frac{\Delta\varphi_{1-2}}{\Delta\omega_{1-2}}, \quad (2.18)$$

где $\Delta\varphi_{1-2}(\omega)$ – приращение ФЧХ в диапазоне частот $\Delta\omega_{1-2}$ между точками 1 и 2 фазочастотной характеристики.

2.5. Расчет чувствительности передаточной функции активной RC-цепи к отклонению параметров элементов

В процессе производства и эксплуатации радиоэлектронных устройств значения параметров их элементов неизбежно отличаются от расчетных значений, что приводит к изменению передаточных функций устройств. Эти изменения могут являться следствием технологического разброса параметров элементов схем. Также изменения передаточных характеристик радиоэлектронных устройств наблюдаются при их эксплуатации как за счет старения элементов схем, так и при влиянии внешних факторов (температуры, радиации, влажности и т. д.). Отклонения передаточных функций допускаются такими, при которых работа радиоэлектронных устройств не нарушается. Поэтому чем меньше изменения передаточных функций устройств при одних и тех же отклонениях параметров элементов, тем лучше качество работы этих устройств. Для оценки влияния изменения передаточных функций устройств к отклонению параметров элементов используют понятие *чувствительности*.

На рис. 2.7 схематично представлена электрическая цепь N , на входе которой включен источник напряжения \dot{U}_1 .

Пусть Z -параметр изменяемого элемента цепи N , а $H_U(j\omega)$ – передаточная функция, зависящая от параметра этого элемента.

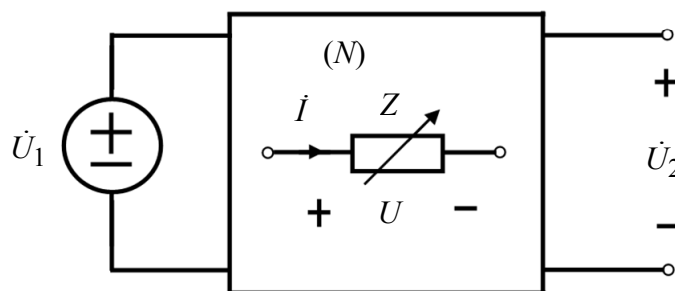


Рис. 2.7

Абсолютной чувствительностью передаточной функции $H_U(j\omega)$ к изменению Z -параметра называют предел отношения абсолютного изменения передаточной функции к абсолютному отклонению Z -параметра:

$$S_Z^H(j\omega) = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{\Delta H_U(j\omega)}{\Delta z} = \frac{dH_U(j\omega)}{dz}.$$

Относительной чувствительностью передаточной функции $H(j\omega)$ к отклонению Z -параметра называют предел отношения относительного изменения передаточной функции к относительному изменению Z -параметра:

$$S_Z^H(j\omega) = \lim_{\Delta Z \rightarrow 0} \frac{\Delta H_U(j\omega) / H_U(j\omega)}{\Delta z / z} = \frac{dH_U(j\omega)}{dz} \frac{z}{H_U(j\omega)}. \quad (2.19)$$

Кроме этого выражения используют относительную логарифмическую (классическую) чувствительность передаточной функции:

$$S_Z^H(j\omega) = \frac{d \ln H(j\omega)}{d \ln z}. \quad (2.20)$$

Представим передаточную функцию $H(j\omega)$ (амплитудно-фазовую характеристику) в показательной форме записи, т. е. через амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (2.21)$$

Тогда, подставив (2.21) в (2.20), найдем относительную чувствительность АЧХ и ФЧХ при изменении Z -параметра:

$$\begin{aligned} S_Z^H(j\omega) &= \operatorname{Re} \left[S_Z^H(j\omega) \right] + j \operatorname{Im} \left[S_Z^H(j\omega) \right] = \frac{d \ln \left[H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \right]}{dz / z} = \dots \\ &= \frac{dH(\omega)}{dz} \frac{z}{H(\omega)} + j \frac{d\varphi(\omega)}{dz} z. \end{aligned}$$

Отсюда относительная чувствительность амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик передаточной функции имеют вид

$$\operatorname{Re}\left[S_Z^H(j\omega)\right] = \frac{dH(\omega)}{dz} \frac{z}{H(\omega)} \approx \frac{\Delta H(\omega) / H(\omega)}{\Delta z / z}; \quad (2.22)$$

$$\operatorname{Im}\left[S_Z^H(j\omega)\right] = \frac{d\varphi(\omega)}{dz} z \approx \frac{\Delta\varphi(\omega)}{\Delta z / z}. \quad (2.23)$$

Из соотношений (2.22) и (2.23) найдем относительное изменение АЧХ и абсолютное изменение ФЧХ при относительном отклонении параметра Z :

$$\frac{\Delta H(\omega)}{H(\omega)} \approx \frac{\Delta z}{z} \operatorname{Re}\left[S_Z^H(j\omega)\right]; \quad \Delta\varphi(\omega) \approx \frac{\Delta z}{z} \operatorname{Im}\left[S_Z^H(j\omega)\right].$$

Следует отметить, что на основании формулы (2.19), полученной для вычисления относительной чувствительности передаточной функции $H_U(j\omega)$ активного звена к отклонению Z -параметра (рис. 2.7), можно записать аналогичное выражение для вычисления относительной чувствительности полюсной добротности Q_p активного RC -звена второго порядка к изменению коэффициента k усиления усилителя:

$$S_k^{Q_p} = \frac{dQ_p}{dk} \frac{k}{Q_p}. \quad (2.24)$$

При записи выражения (2.24) было учтено, что значения полюсной добротности и коэффициента усиления активного RC -звена являются вещественными числами.

2.6. Типовой пример курсовой работы

При выполнении курсовой работы по заданной нормированной передаточной функции требуется найти реакцию активной RC -цепи при воздействии импульсного сигнала, вычислить переходную и импульсную характеристики цепи, исследовать амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики, найти спектральные характеристики одиночного и периодического сигналов на входе и выходе цепи. По графику реакции цепи при воздействии импульсного сигнала необходимо приближенно найти время задержки выходного сигнала и оценить время затухания переходного процесса в цепи; вычислить относительную чувствительность полюсной добротности активного RC -звена к изменению коэффициента k усиления усилителя; найти абсолютное изменение полюсной добротности при изменении коэффициента усиления звена.

2.6.1. Построение схемы активной цепи по заданным параметрам

Пусть схема активной RC -цепи (рис. 2.8) задана тройками чисел. Цепь: 115 – ИН U_1 ; 212 – R_2 ; 325 – C_3 ; 423 – R_4 ; 535 – C_5 ; 0У – 534, k ; 724 – R_7 .

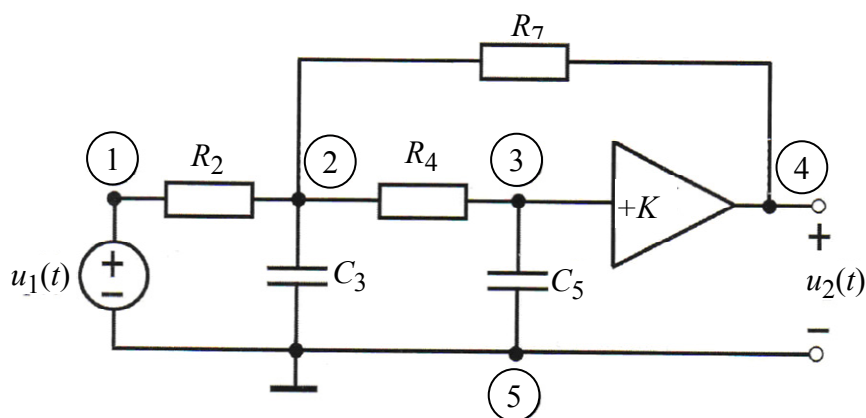


Рис. 2.8

В задании активной RC -цепи первая цифра указывает номер элемента схемы, а две другие цифры являются номерами узлов, к которым подключен элемент. Узел с наибольшим номером 5 (рис. 2.8) является базисным, потенциал его равен нулю. Номера узлов на схеме указаны в кружках. В активной RC -цепи используются входной источник напряжения $u_1(t)$ и операционный усилитель напряжения с коэффициентом усиления $+K$. Во всех вариантах ОУ (идеальные или с конечным усилением K) заданы тройками чисел: первая цифра – инвертирующий вход, вторая – неинвертирующий; третья – выход. Напряжение на выходе ОУ $u_2(t) = u_4^y(t) = Ku_{35}(t)$.

Пусть на входе рассматриваемой активной цепи включен источник напряжения $u_1(t)$, сигнал которого имеет вид импульса синусоидальной формы (см. рис. 2.2, а) с амплитудой $U_{1m} = 2$ В и длительностью $t_{\text{имп}} = 2$ мс. Необходимо найти реакцию активной цепи при воздействии заданного сигнала, изобразить график реакции; приближенно найти время задержки реакции относительно входного сигнала и оценить время затухания переходного процесса в цепи.

Следует отметить, что все выполняемые в курсовой работе вычисления надо производить с нормированными параметрами элементов цепи, что позволяет упростить все производимые расчеты. Важно указать, что в табл. 1.1 заданы нормированные коэффициенты передаточных функций активных цепей. Нужно учесть, что в табл. 1.2 длительность входных сигналов задана в миллисекундах. Поэтому при выполнении курсовой работы необходимо произвести нормирование длительности входных сигналов.

2.6.2. Нормирование параметров и переменных цепи

В курсовой работе при нормировании времени t^* , сопротивлений R^* и емкостей C^* используют следующие формулы [1]:

$$t^* = t / t_0; \quad R^* = R / R_0; \quad C^* = C / C_0, \quad (2.25)$$

при этом базисное значение времени целесообразно принять $t_0 = 1$ мс, так как длительности входных импульсов в табл. 2.3 заданы в миллисекундах.

Установим следующие базисные параметры: для сопротивлений $R_0 = 100$ кОм и напряжений $U_0 = 1$ В. Учитывая эти базисные параметры [2], найдем значение базисной емкости $C_0 = t_0 / R_0 = 10^{-8}$ Ф.

Замечание: все дальнейшие расчеты в курсовой работе необходимо выполнять с нормированными параметрами, поэтому для упрощения всех дальнейших записей знак (*) можно не записывать.

2.6.3. Расчет нулей и полюсов передаточной функции активной RC-цепи

Примем в качестве примера следующие параметры нормированной передаточной функции активной RC-цепи второго порядка (см. рис. 2.8):

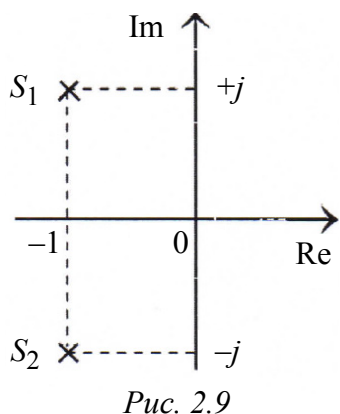


Рис. 2.9

$$H_U(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{3}{s^2 + 2s + 2}. \quad (2.26)$$

Приравнивая знаменатель $N(s) = s^2 + 2s + 2 = 0$, определим полюсы ПФ: $s_1 = -1 + j$; $s_2 = -1 - j$.

Учитывая, что нули ПФ находятся в бесконечности, изобразим на комплексной плоскости только полюсы ПФ (рис. 2.9).

2.6.4. Вычисление операторным методом реакции активной RC-цепи

В курсовой работе необходимо рассчитать реакцию цепи при воздействии одиночного импульса синусоидальной формы (рис. 2.2), построить график реакции цепи при ненормированном времени (в миллисекундах); найти приближенно время задержки выходного сигнала и оценить время затухания переходного процесса в цепи.

Представим ранее найденную временную функцию импульса синусоидальной формы (2.4), а также изображение импульса:

$$u_1(t) = U_{1m} \sin(\omega_0 t) \delta_1(t) + U_{1m} \sin \omega_0 (t - t_{\text{имп}}) \delta_1(t - t_{\text{имп}});$$

$$U_1(s) = \frac{U_{1m} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{U_{1m} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} e^{-st_{\text{имп}}}.$$

Вычислим изображение первой составляющей входного импульса синусоидальной формы:

$$U_1^{(1)}(s) = \frac{U_{1m}\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} = \frac{2 \cdot 1,5708}{s^2 + 2,467} = \frac{3,1416}{s^2 + 2,467}, \quad (2.27)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2t_{\text{имп}}} = 1,5708$ – угловая частота гармонического колебания;

$T = 2t_{\text{имп}} = 4$ – период гармонического колебания.

Запишем изображение первой составляющей реакции цепи по заданной передаточной функции (2.26) и первой составляющей изображения входного сигнала (2.27):

$$U_2^{(1)}(s) = U_1^{(1)}(s)H_U(s) = \frac{3,1416 \cdot 3}{(s^2 + 2,467)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{9,428}{(s^2 + 2,467)(s^2 + 2s + 2)}.$$

Найдем значения четырех полюсов изображения $U_2^{(1)}(s)$: $s_1 = j1,5708$; $s_2 = -j1,5708$; $s_3 = -1 + j$; $s_4 = -1 - j$, и запишем изображение $U_2^{(1)}(s)$ в виде суммы простых дробей:

$$U_2^{(1)}(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \frac{A_3}{s - s_3} + \frac{A_4}{s - s_4},$$

где вычеты A_k найдем по теореме разложения:

$$\begin{aligned} A_1 &= (s - s_1)U_2^{(1)}(s) \Big|_{s=s_1=j1,5708} = \frac{9,428}{(s_1 - s_2)(s_1^2 + 2s_1 + 2)} = \\ &= \frac{9,428}{(j1,5708 + j1,5708)((j1,5708)^2 + 2 \cdot j1,5708 + 2)} = \\ &= \frac{9,428}{3,1416e^{j90^\circ} \cdot 3,17e^{j98,4^\circ}} = 0,9464e^{-j188,4^\circ}; \end{aligned}$$

$$* \\ A_2 = A_1 = 0,9464e^{j188,4^\circ};$$

$$A_3 = (s - s_3)U_2^{(1)}(s) \Big|_{s=s_3=-1+j} = \frac{9,428}{3,176e^{-j39^\circ} \cdot 2e^{j90^\circ}} = 1,486e^{-j51^\circ};$$

$$* \\ A_4 = A_3 = 1,486e^{j51^\circ}.$$

Далее определим первую составляющую реакции цепи, используя формулы для перехода к оригиналу:

$$\begin{aligned}
U_2^{(1)}(s) &= A_1 e^{js_1 t} + A_2 e^{js_2 t} + A_3 e^{js_3 t} + A_4 e^{js_4 t} = \dots \\
&= 2|A_1| \cos(\omega_1 t + \beta_1) + 2|A_3| e^{-\alpha_3 t} \cos(\omega_3 t + \beta_3) = \dots \\
&= 1,8928 \cos(1,5708t - 188,4^\circ) + 2,96 e^{-t} \cos(t - 51^\circ).
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Запишем реакцию цепи, алгебраически складывая первую и вторую составляющие реакции, и учтем запаздывание второй составляющей $u_2^{(2)}(t) = u_2^{(1)}(t - t_{\text{имп}})$ на время длительности импульса $t_{\text{имп}} = 2$:

$$\begin{aligned}
u_2(t) &= u_2^{(1)}(t) + u_2^{(2)}(t) = \\
&= [1,8928 \cos(1,5708t - 188,4^\circ) + 2,96 e^{-t} \cos(t - 51^\circ)] \delta_1(t) + \\
&+ [1,8928 \cos(1,5708(t-2) - 188,4^\circ) + 2,96 e^{-(t-2)} \cos((t-2) - 51^\circ)] \delta_1(t-2).
\end{aligned}$$

На рис. 2.10 изображены графики входного $u_1(t)$ и выходного $u_2(t)$ сигналов активной RC -цепи, представленные при ненормированном времени.

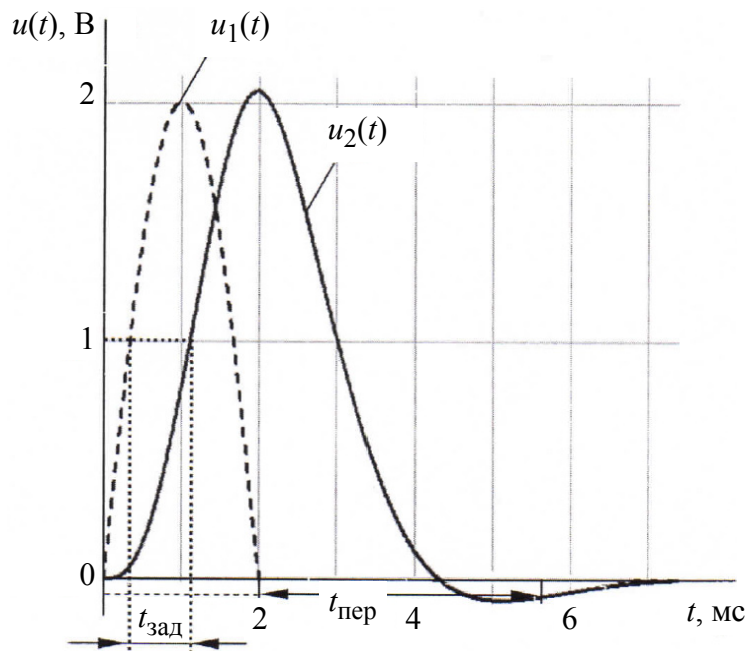


Рис. 2.10

На этом графике определяем время задержки выходного сигнала $u_2(t)$ относительно входного $u_1(t)$.

В табл. 2.1 представлены результаты расчетов первой $u_2^{(1)}(t)$ и второй $u_2^{(2)}(t)$ составляющих реакции, а также выходного сигнала $u_2(t)$ при ненормированном времени.

Таблица 2.1

$t, \text{ мс}$	$u_2^{(1)}(t)$	$u_2^{(2)}(t)$	$u_2(t)$	$t, \text{ мс}$	$u_2^{(1)}(t)$	$u_2^{(2)}(t)$	$u_2(t)$
0,0	0,0	0,0	0,0	3,2000	-0,3947	1,1644	0,7697
0,2000	0,0108	0,0	0,0108	3,4000	-0,9538	1,5125	0,5587
0,4000	0,0799	0,0	0,0799	3,6000	-1,4226	1,8032	0,3806
0,6000	0,2372	0,0	0,2372	3,8000	-1,7566	1,9930	0,2363
0,8000	0,4861	0,0	0,4861	4,0000	-1,9238	2,0479	0,1241
1,0000	0,8071	0,0	0,8071	4,2000	-1,9077	1,9486	0,0408
1,2000	1,1644	0,0	1,1644	4,4000	-1,7098	1,6921	-0,0177
1,4000	1,5125	0,0	1,5125	4,6000	-1,3489	1,2931	-0,0558
1,6000	1,8032	0,0	1,8032	4,8000	-0,8597	0,7821	-0,0777
1,8000	1,9930	0,0	1,9930	5,0000	-0,2894	0,2022	-0,0872
2,0000	2,0479	0,0	2,0479	5,2000	0,3068	-0,3947	-0,0879
2,2000	1,9486	0,0108	1,9594	5,4000	0,8712	-0,9538	-0,0826
2,4000	1,6921	0,0799	1,7720	5,6000	1,3489	-1,4226	-0,0737
2,6000	1,2931	0,2372	1,5303	5,8000	1,6938	-1,7566	-0,0629
2,8000	0,7821	0,4861	1,2681	6,0000	1,8723	-1,9238	-0,0515
3,0000	0,2022	0,8071	1,0093	6,2000	1,8673	-1,9077	-0,0405

2.6.5. Вычисление времени задержки реакции активной RC-цепи

Определим время задержки сигнала $u_2(t)$ на выходе активной RC-цепи (рис. 2.10). Для этого на уровне половины амплитуды входного сигнала $u_1(t)$ изобразим горизонтальную линию и из ее точек пересечения с графиками $u_1(t)$ и $u_2(t)$ проведем две вертикальные линии до пересечения с осью времени. Определим приближенно время задержки $t_{\text{зад}}$ выходного сигнала (в миллисекундах). Для рассматриваемого примера время задержки реакции цепи $t_{1\text{зад}} \approx 0,79 \text{ мс}$.

2.6.6. Вычисление времени переходного процесса в активной RC-цепи

Вычисление времени переходного процесса в активной RC-цепи произведем *аналитическим способом* и по графику выходного сигнала $u_2(t)$ (рис. 2.10).

При аналитическом способе вычисление нормированного времени переходного процесса выполним с использованием коэффициента затухания цепи $t_{\text{пер}}^* = 3/|\alpha| = 3$, где $|\alpha| = 1$ – вещественная часть полюсов ($s_{1,2} = -1 \pm j$) передаточной функции цепи. Тогда ненормированное время переходного процесса $t_{\text{пер}} = t_{\text{пер}}^* \cdot t_0 = 3 \text{ мс}$.

Найдем время переходного процесса по графику выходного сигнала $u_2(t)$ цепи (рис. 2.11). В выражении (2.28) свободная составляющая реакции

$$u_{2\text{св}}^{(1)}(t) = 2|A_3|e^{-t} \cos(t + \beta_3).$$

Поскольку значение функции $e^{-3} \approx 0,05$, отсюда следует другой способ вычисления времени переходного процесса. По графику выходного сигнала $u_2(t)$ найдем время окончания переходного процесса, при котором значение реакции цепи составляет величину $\approx 5\%$ от максимального значения реакции $|U_{2\max}|$. На графике выходного сигнала $u_2(t)$ проведем горизонтальную линию на уровне $(0,05|U_{2\max}|)$. Длительность переходного процесса $t_{\text{пер}} \approx 3,6$ мс определим от времени окончания входного сигнала $t_{\text{имп}} = 2$ мс до времени окончания переходного процесса, т. е. до точки пересечения горизонтальной линии с графиком $u_2(t)$.

2.6.7. Вычисление операторным методом переходной характеристики активной RC-цепи

Переходная характеристика $h_1(t)$ численно равна реакции цепи при нулевых начальных условиях на единственное в цепи воздействие в виде единичной ступенчатой функции $u_1(t) = U_{1m}\delta_1(t)$, где $U_{1m} = 1$ В – коэффициент размерности; $\delta_1(t)$ – безразмерная единичная ступенчатая функция.

Найдем изображение переходной характеристики цепи $h_1(t)$, используя заданную передаточную функцию $H_U(s)$:

$$H_1(s) = L[h_1(t)] = L[\delta_1(t)]H_U(s) = \frac{H_U(s)}{s} = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 2)}.$$

Определим три полюса изображения $H_1(s)$: $s_1 = 0$; $s_1 = -1 + j$; $s_2 = -1 - j$, и запишем изображение $H_1(s)$ в виде суммы простых дробей:

$$H_1(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s - s_1} + \frac{A_3}{s - s_2},$$

где вычеты A_k найдем по теореме разложения:

$$\begin{aligned} A_1 &= sH_1(s)|_{s=0} = \frac{3}{(s^2 + 2s + s)} \Big|_{s=0} = 1,5; \\ A_2 &= (s - s_1)H_1(s) \Big|_{s=-1+j} = \frac{3}{(-1+j)(-1+j+1+j)} = \dots \\ &= \frac{3}{1,4145e^{j135^\circ} \cdot 2e^{j90^\circ}} = 1,061e^{-j225^\circ} = 1,061e^{j135^\circ}; \\ &\quad * \\ A_3 &= A_2 = 1,061e^{-j135^\circ}. \end{aligned}$$

Запишем переходную характеристику по формулам для перехода к оригиналу:

$$h_1(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{js_2 t} + A_3 e^{js_3 t} = 1,5 + 2|A_2| e^{-\alpha_2 t} \cos(\omega_2 t + \beta_2) = \dots \\ = 1,5 + 2,122 e^{-t} \cos(t + 135^\circ).$$

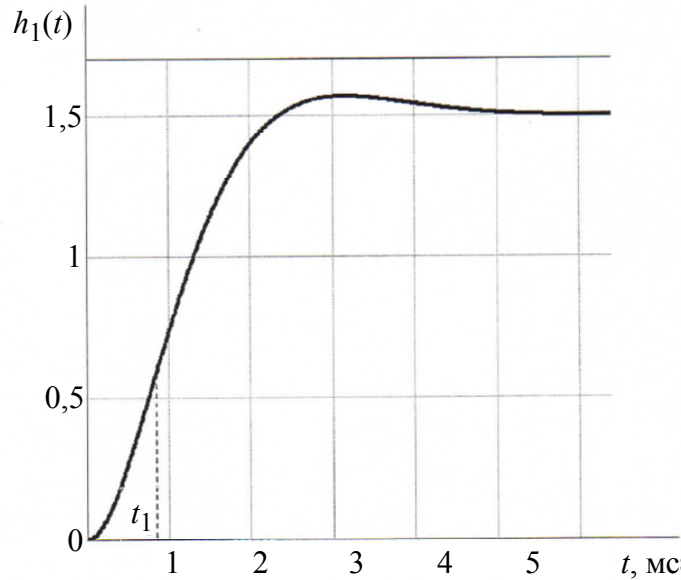


Рис. 2.11

На рис. 2.11 показан график переходной характеристики $h_1(t)$ при ненормированном времени. Установившееся значение переходной характеристики $h_{1\text{ВН}} = 1,5$ уточним по теореме о предельном значении оригинала:

$$h_{1\text{ВН}} = \lim [sH_1(s)]_{s \rightarrow 0} = \lim \left[\frac{3}{s^2 + 2s + 2} \right]_{s \rightarrow 0} = 1,5.$$

2.6.8. Вычисление операторным методом импульсной характеристики активной RC-цепи

Импульсная характеристика $h(t)$ численно равна реакции цепи при нулевых начальных условиях на единственное в цепи воздействие источника напряжения $u_1(t)$ в виде единичной импульсной функции $u_1(t) = U_{1m} \delta(t)$, где $U_{1m} = 1 \text{ В} \cdot \text{с}$ – коэффициент размерности; $\delta(t)$ – единичная импульсная функция, которая имеет размерность частоты (1/с).

Изображение импульсной характеристики цепи $H(s)$ найдем по заданной передаточной функции цепи $H_U(s)$ на основании (2.12):

$$H(s) = L[h(t)] = L[\delta(t)]H_U(s) = H_U(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 2},$$

где $L[\delta(t)] = 1$ – изображение единичной импульсной функции.

Запишем два полюса изображения импульсной характеристики: $s_1 = -1 + j$ и $s_2 = -1 - j$, и представим изображение $H(s)$ в виде суммы простых дробей:

$$H(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2},$$

где вычеты A_k найдем по теореме разложения:

$$A_1 = (s - s_1)H(s)_{s=-1+j} = \frac{3}{-1+j+1+j} = \frac{3}{j2} = 1,5e^{-j90^\circ};$$

$$A_2 = A_1^* = 1,5e^{j90^\circ}.$$

Запишем импульсную характеристику, используя формулу перехода к оригиналу:

$$h(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} = 2|A_1|e^{-\alpha_1 t} \cos(\omega_1 t + \beta_1) = 3e^{-t} \cos(t - 90^\circ).$$

На рис. 2.12 показан график импульсной характеристики $h(t)$, представленный при ненормированном времени.

При сравнении графиков переходной $h_1(t)$ и импульсной $h(t)$ характеристик отметим свойства этих функций:

а) у переходной характеристики при времени $t_1 = 0,8$ мс имеется изменение угла наклона функции $h_1(t)$, (т. е. при времени $t = t_1$ производная функции $h_1(t)$ имеет максимальное значение), поэтому при времени t_1 на графике импульсной характеристики наблюдается максимум функции $h(t)$;

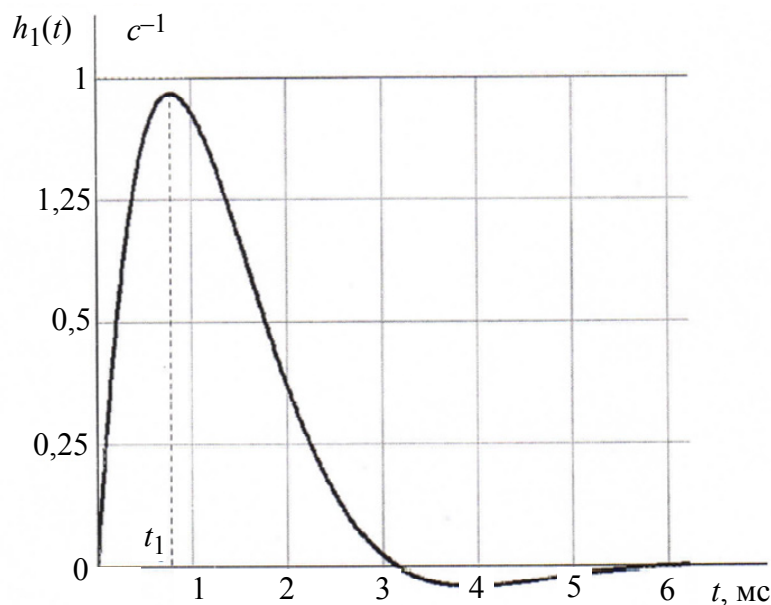


Рис. 2.12

б) при времени $t_2 = 3,2$ мс на графике переходной характеристики имеется максимум функции $h_1(t)$, при этом времени на графике импульсной характеристики наблюдается переход через нулевое значение функции $h(t)$.

Отмеченные свойства рассмотренных графиков объясняются тем, что импульсную характеристику определяем как производную от переходной характеристики $h(t) = dh_1(t) / dt$.

2.6.9. Вычисление амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик активной RC-цепи

Найдем частотные характеристики активной RC-цепи (см. рис. 2.8). Для этого определим комплексную частотную характеристику цепи $H_U(j\omega)$ по заданной передаточной функции $H_U(s)$ цепи (2.25) заменой оператора Лапласа « s » на комплексную частоту « $j\omega$ »:

$$H_U(j\omega) = H_U(s)|_{s=j\omega} = \frac{3}{s^2 + 2s + 2}|_{s=j\omega} = \frac{3}{(2 - \omega^2) + j2\omega}.$$

Вычислим амплитудно-частотную $H_U(\omega)$ и фазочастотную $\varphi(\omega)$ характеристики цепи:

$$H_U(\omega) = |H_U(j\omega)| = \frac{3}{\sqrt{(2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\omega}{2 - \omega^2}.$$

Результаты вычислений частотных характеристик активной RC-цепи представлены на графиках амплитудно-частотной (рис. 2.13), фазочастотной (рис. 2.14) и амплитудно-фазовой (рис. 2.15) характеристик.

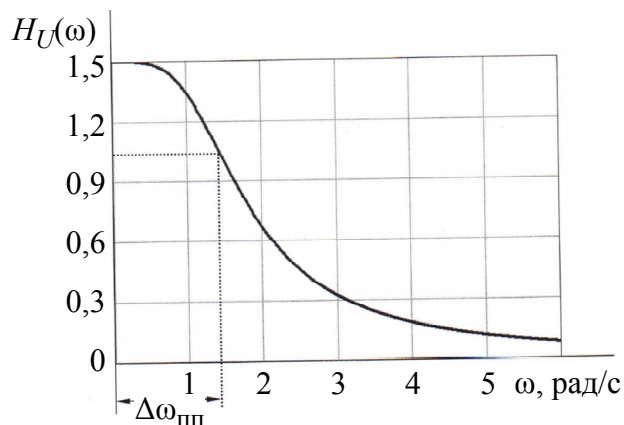


Рис. 2.13

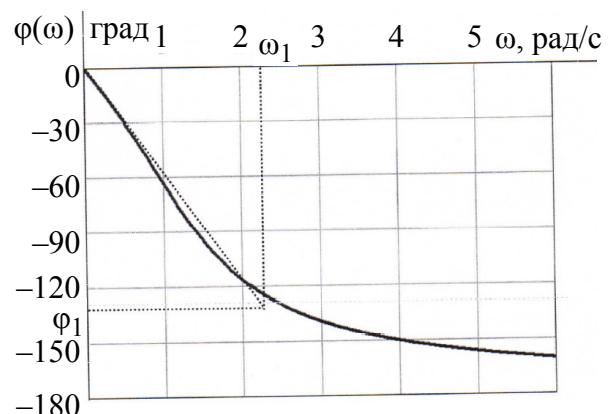


Рис. 2.14

По графику АЧХ определим полосу пропускания цепи. Для этого на графике $H_U(\omega)$ построим пунктирную горизонтальную линию на уровне $0,707H_{U\max}$ и из точки пересечения этой линии с графиком $H_U(\omega)$ опустим

перпендикуляр на частотную ось. Полосу пропускания ($\Delta\omega_{\text{пп}} \approx 1,4$ рад/с) цепи найдем по диапазону частот от начала координат до частоты, при которой перпендикуляр пересекается с частотной осью.

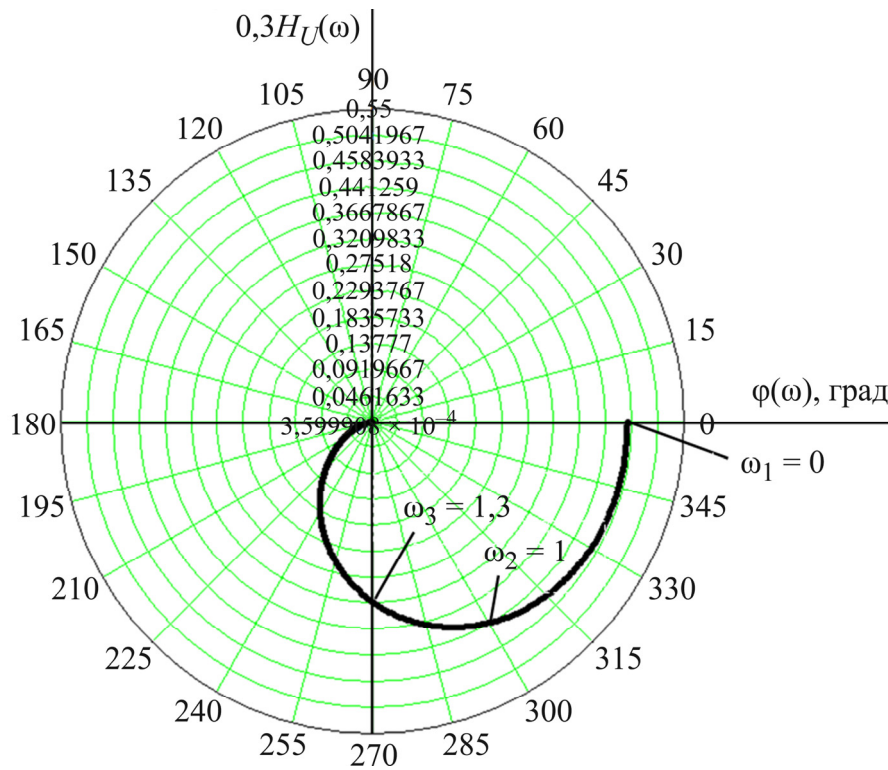


Рис. 2.15

По виду графика АЧХ сделаем вывод, что рассматриваемая активная RC-цепь (см. рис. 2.8) является фильтром нижних частот.

Время задержки выходного сигнала (см. рис. 2.11) вычисляем приближенно по углу наклона графика ФЧХ (см. рис. 2.14) в полосе пропускания активной RC-цепи ($\Delta\omega_{\text{пп}} \approx 1,4$ рад/с):

$$t_{\text{зад}} = \frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \approx \frac{\Delta\varphi(\omega)}{\Delta\omega}.$$

Для вычисления времени задержки $t_{\text{зад}}$ на графике ФЧХ (см. рис. 2.14) из начала координат построим пунктирную линию по направлению касательной ФЧХ. В точке резкого изменения наклона графика ФЧХ определим координаты границы касательной $\omega_1 = \Delta\omega = 2,25$ рад/с и $\varphi_1 = \Delta\varphi = -130^\circ$. Время задержки выходного сигнала цепи найдем по углу наклона касательной:

$$t_{2\text{зад}} \approx \frac{\Delta\varphi(\omega)}{\Delta\omega} = \frac{|-130^\circ|\pi}{180^\circ \cdot 2,25} \approx 1,008 \text{ мс},$$

где выполнено преобразование приращения фазы $\Delta\varphi = -130^\circ$ из градусов в радианы.

Отметим, что время задержки $t_{\text{зад}} \approx 0,79$ мс выходного сигнала цепи, вычисленное по графику на рис. 2.10, отличается на $\delta t_{\text{зад}} \approx 12,7\%$ от времени задержки, вычисленного по графику ФЧХ (см. рис. 2.14)

На рис. 2.15 показан график амплитудно-фазовой характеристики цепи $H_U(j\omega)$, которая построена в полярной системе координат АЧХ и ФЧХ, рассчитанных в широком диапазоне частот $[0 \dots 20 \text{ рад/с}]$. На графике АФХ по оси ординат значения АЧХ указаны в масштабе $0,3H_U(\omega)$, а по угловым координатам значения ФЧХ представлены в градусах. График АФХ начинается при частоте $\omega = 0$ из точки с координатами $[1,5, 0^\circ]$ и заканчивается при частоте $\omega \approx 20 \text{ рад/с}$ в точке с координатами $[0, 180^\circ]$ по АЧХ и ФЧХ.

Следует отметить, что исследование амплитудно-фазовых характеристик активных RC-цепей широко используют в системах радиоэлектроники для определения устойчивости активных цепей, а также при проектировании автогенераторов гармонических колебаний.

2.6.10. Спектральные характеристики одиночного импульса в форме синусоидальной полуволны

Рассмотрим спектральные характеристики одиночного импульса в форме синусоидальной полуволны (см. рис. 2.2), амплитуда которого $U_m = 2$ В и длительность $t_{\text{имп}} = 2$ мс. Найдем спектральную плотность [2] одиночного импульса, используя формулу (2.4) изображения сигнала:

$$\begin{aligned} U_1(j\omega) &= U_1(s)|_{s=j\omega} = \frac{U_{1m}\omega_0}{(j\omega)^2 + \omega_0^2} (1 + e^{-j\omega t_{\text{имп}}}) = \\ &= \frac{2U_{1m}\omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2} \left(\frac{e^{j0,5\omega t_{\text{имп}}} + e^{-j0,5\omega t_{\text{имп}}}}{2} \right) e^{-j0,5\omega t_{\text{имп}}} = \\ &= \frac{2U_{1m}\omega_0}{-\omega^2 + \omega_0^2} \cos\left(\frac{\omega t_{\text{имп}}}{2}\right) e^{-j0,5\omega t_{\text{имп}}}, \end{aligned}$$

где $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/t_{\text{имп}}$ – угловая частота, $T_0 = 2t_{\text{имп}}$ – период гармонического колебания.

Отметим, что выражение в круглых скобках было заменено по формуле Эйлера косинусной функцией. Определим амплитудный $U_1(\omega)$ и фазовый $\alpha_1(\omega)$ спектры импульса в форме синусоидальной полуволны:

$$U_1(\omega) = |U_1(j\omega)| = \left| \frac{2U_{1m}\omega_0}{-\omega_0^2 + \omega^2} \cos(0,5\omega t_{\text{имп}}) \right| = \left| \frac{U_{1m} 2t_{\text{имп}}}{\pi(-1 + \Omega^2)} \cos(0,5\Omega\pi) \right|;$$

$$\alpha_1(\omega) = -0,5\omega t_{\text{имп}} + (\pi) = -0,5\pi\Omega + (\pi),$$

где выполнено дополнительное нормирование введением нормированной частоты $\Omega = \omega / \omega_0$.

Следует отметить, что фазовый угол π в формуле фазового спектра $\alpha_1(\omega)$ прибавляется для диапазонов частот, в которых $\cos(0,5\pi\Omega_n)$ имеет отрицательные значения.

Выполним анализ амплитудного спектра импульса в виде синусоидальной полуволны:

а) при частоте $\Omega = 0$ получим $U(0) = \frac{2U_m t_{\text{имп}}}{\pi}$;

б) найдем значения частот Ω_n , при которых амплитудный спектр

$$U(\Omega_n) = \left| \frac{2U_m}{\omega} \cos(0,5\pi\Omega_n) \right| = 0.$$

Значения частот Ω_n определим при условии, что гармоническая функция $\cos(0,5\pi\Omega_n) = 0$. Это соответствует условию: $0,5\pi\Omega_n = 0,5\pi(2n+1)$. Отсюда значения частот $\Omega_n = (2n+1)$, при которых амплитудный спектр $U(\Omega_n) = 0$;

в) определим значения частот Ω_k , при которых амплитудный спектр имеет максимальные значения. Значения частот Ω_k определим при условии, что гармоническая функция $|\cos(0,5\pi\Omega_k)| = 1$, что соответствует условию $0,5\pi\Omega_k = \pi k$. Отсюда значения частот, при которых амплитудный спектр $U(\Omega_k) = 1$.

Составим таблицу амплитудного и фазового спектров импульса в форме синусоидальной полуволны при частотах ω_k , кратных частоте гармонического колебания $\omega_0 = \pi / t_{\text{имп}}$.

В табл. 2.2 значения амплитудного спектра нормированы к амплитуде импульса U_{1m} . Следует отметить, что при частоте $\omega = 0$ значение амплитудного спектра определяется площадью импульса. На рис. 2.16 представлены графики амплитудного и фазового спектров импульса синусоидальной формы, амплитуда которого $U_{1m} = 2$ В и длительность $t_{\text{имп}} = 2$ с.

Важно заметить, что на частотах $\omega_k = 3\pi k / t_{\text{имп}}$ амплитудный спектр $U_1(\omega_k) = 0$, при этом у комплексной спектральной характеристики $U_1(j\omega)$ изменяется знак с (+) на (−), что отражается на графике ФЧХ скачком на 180° .

Таблица 2.2

Ω_k	0	1	2	3	4	5	6
ω_k	0	$\frac{\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{2\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{3\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{4\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{5\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{6\pi}{t_{\text{имп}}}$
ω_k	0	1,5718	3,1415	4,7123	6,2832	7,8539	9,4247
$\frac{U_1(\omega_k)}{U_{1m}}$	$\frac{2t_{\text{имп}}}{\pi}$	$\frac{t_{\text{имп}}}{2}$	$\frac{2t_{\text{имп}}}{3\pi}$	0	$\frac{2t_{\text{имп}}}{15\pi}$	0	$\frac{2t_{\text{имп}}}{35\pi}$
$U_1(\omega_k)$	2,546	2	0,8488	0	0,1697	0	0,0727
$\alpha_1(\omega_k)$	0	$-0,5\pi$	$-\pi$	$-\pi/2$ $-1,5\pi$	$-\pi$	$-\pi/2$ $-1,5\pi$	$-\pi$

Исследуемый импульс синусоидальной формы имеет конечную длительность $t_{\text{имп}}$, тогда как комплексная спектральная характеристика в соответствии с преобразованием Фурье [2] не ограничена по частоте в пределах $(-\infty \div +\infty)$.

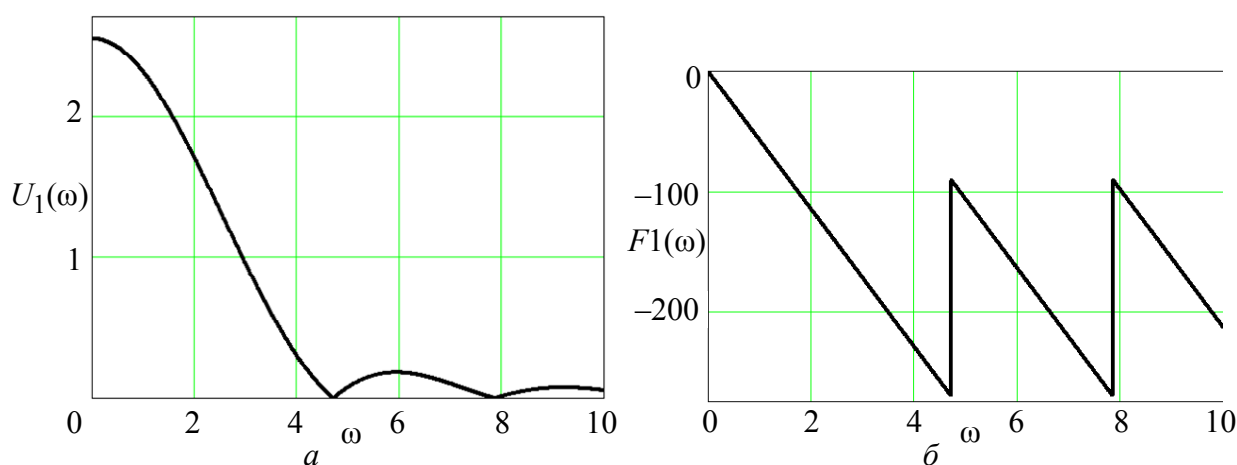


Рис. 2.16

На графиках (рис. 2.16) амплитудный и фазовый спектры при отрицательных значениях частот не представлены, так как они физически не реализуемы, а являются формальным преобразованием комплексного ряда Фурье.

2.6.11. Спектральные характеристики периодических импульсов в форме синусоидальной полуволны

Рассмотрим спектральные характеристики периодических импульсов в форме синусоидальной полуволны (рис. 2.17), амплитуды которых $U_{1m} = 2$ В, длительность $t_{\text{имп}} = 2$ с и период повторения $T_1 = 2t_{\text{имп}} = 4$ с.

Спектры периодических импульсов U_{1mk} являются дискретными, поскольку они существуют только для дискретных значений частот $k\omega_1$. Амплитудные спектры периодических импульсов U_{1mk} и одиночного импульса

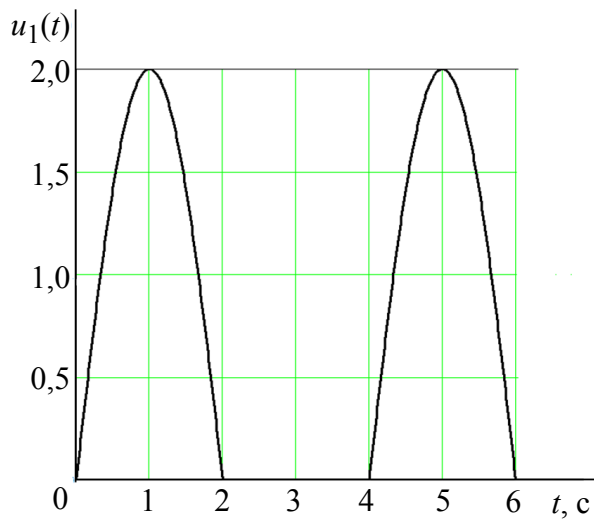


Рис. 2.17

$|U_{1m}(jk\omega_1)|$ синусоидальной формы (см. рис. 2.2) при дискретных значениях частот $\omega = k\omega_1$ связаны между собой соотношениями

$$U_{10} = \frac{1}{T} U_1(0) = \frac{1}{2t_{\text{имп}}} U_1(0);$$

$$U_{1mk} = \frac{2}{T} |U_{1m}(jk\omega_1)| = \frac{1}{t_{\text{имп}}} |U_{1m}(jk\omega_1)|,$$

$$\alpha_{1k} = \alpha_1(k\omega_1),$$

где $\omega_1 = 2\pi / T_1$ – частота первой гармоники, k – номер гармоники разложения в ряд Фурье периодических импульсов синусоидальной формы.

В табл. 2.3 представлены результаты расчетов спектров периодических импульсов в форме синусоидальной полуволны для частот ω_k , кратных частоте первой гармоники $\omega_1 = 1,5718$.

Таблица 2.3

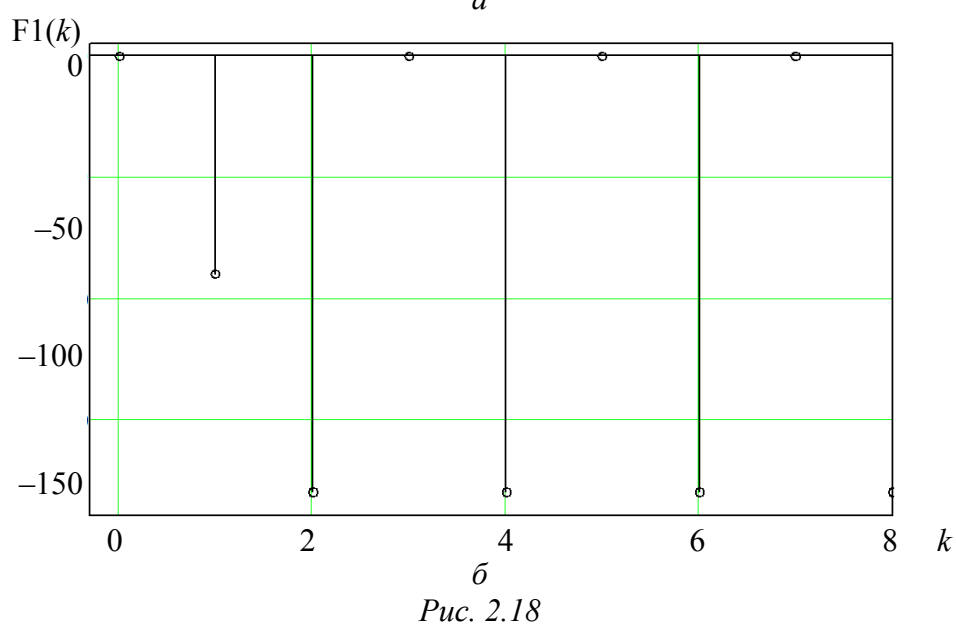
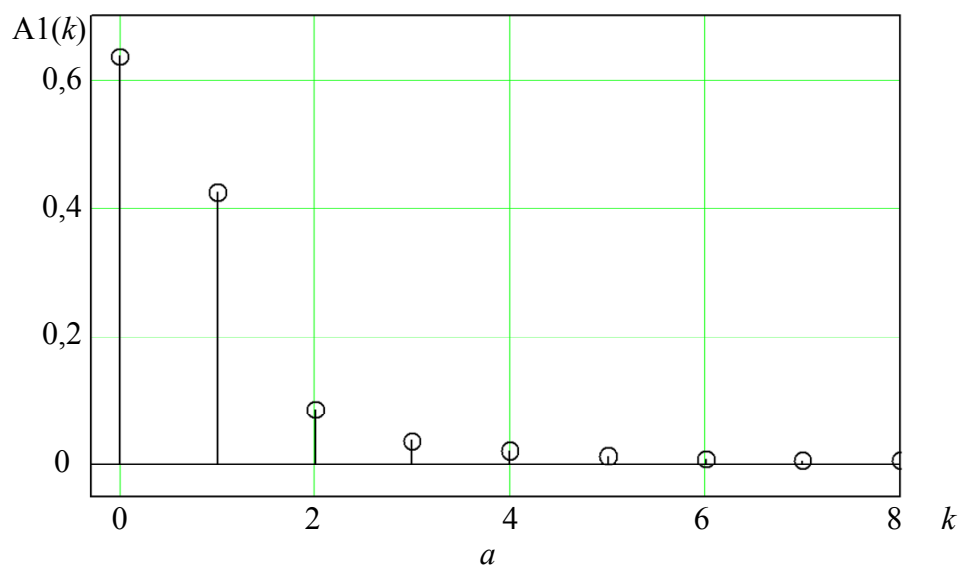
ω_k	0	$\frac{\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{2\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{3\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{4\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{5\pi}{t_{\text{имп}}}$	$\frac{6\pi}{t_{\text{имп}}}$
ω_k	0	1,5718	3,1415	4,7123	6,2832	7,8539	9,4247
U_{1mk}	$\frac{U_{1m}}{\pi}$	$\frac{U_{1m}}{2}$	$\frac{2U_{1m}}{3\pi}$	0	$\frac{2U_{1m}}{15\pi}$	0	$\frac{2U_{1m}}{35\pi}$
α_{1k}	0	$-0,5\pi$	$-\pi$	–	$-\pi$	–	$-\pi$

На рис. 2.18 представлены дискретный амплитудный и фазовый спектры периодических импульсов в форме синусоидальной полуволны (рис. 2.17), амплитуды которых $U_{1m} = 2$ В, длительность $t_{\text{имп}} = 2$ с и период повторения $T_1 = 2t_{\text{имп}} = 4$ с.

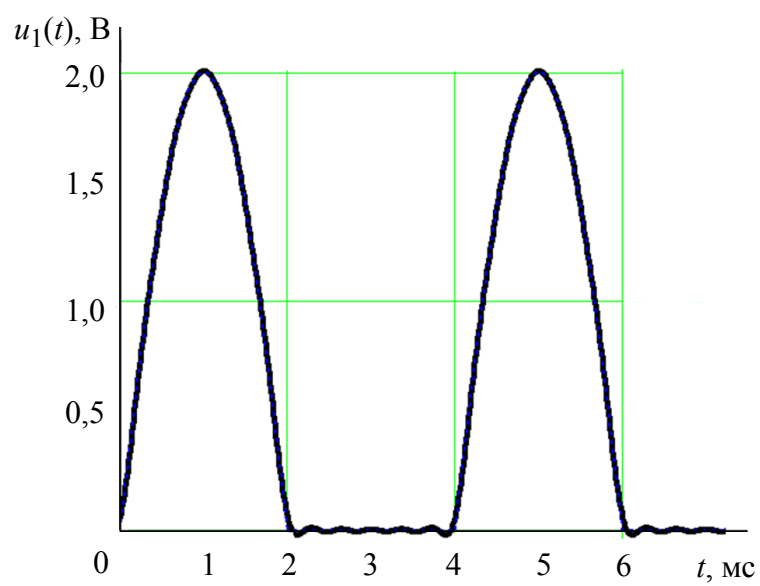
По результатам расчетов спектров (табл. 2.3) запишем разложение периодического сигнала в виде ряда Фурье:

$$u_1(t) = U_{1m} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{3\pi} \cos(2\omega_1 t - \pi) + \frac{2}{15\pi} \cos(4\omega_1 t - \pi) + \frac{2}{35\pi} \cos(6\omega_1 t - \pi) \right) =$$

$$= 0,6366 + \sin \omega_1 t - 0,4244 \cos 2\omega_1 t - 0,0848 \cos 4\omega_1 t - 0,0363 \cos 6\omega_1 t.$$



Puc. 2.18



Puc. 2.19

На рис. 2.19 представлен график периодических импульсов в форме синусоидальной полуволны, аппроксимированных шестью членами ряда Фурье.

Следует отметить, что рассмотренный сигнал является гладким (без скачков), поэтому для его хорошей аппроксимации достаточно небольшое число членов ряда Фурье. Кроме того, у аппроксимированного сигнала наблюдаются небольшие колебания ($\approx 2\%$) между импульсами.

2.6.12. Синтез активной RC-цепи

Синтез активной RC-цепи (см. рис. 2.8) заключается в определении параметров всех элементов по заданной структуре цепи (см. табл. 1.2) и нормированной передаточной функции (2.26). Параметры элементов активного звена будем вычислять по заданным коэффициентам передаточной функции:

$$H_U(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}.$$

В проектируемых схемах активных звеньев некоторые из коэффициентов числителя передаточных функций (см. табл. 1.1) равны нулю, что соответствует трем типам реализуемых фильтров:

1) фильтр нижних частот (ФНЧ), для которого $a_1 = a_2 = 0$ и два нуля передаточной функции находятся в бесконечности комплексной плоскости;

2) полосовой фильтр, для которого $a_1 = 0$ и один нуль функции передачи находится в начале координат;

3) фильтр верхних частот (ФВЧ), для которого $a_1 = a_0 = 0$ и два нуля передаточной функции находятся в начале координат.

Следует отметить, что в рассматриваемом примере курсовой работы проектирование схемы активного RC-фильтра будем выполнять по заданным коэффициентам знаменателя b_1 и b_0 передаточной функции (2.26):

$$H_U(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{3}{s^2 + 2s + 2}.$$

Поскольку два коэффициента знаменателя b_1 и b_0 передаточной функции определены заданием (см. табл. 1.1), то вычисление параметров элементов реализуемого активного RC-звена сводится к решению двух уравнений (обычно называемых компонентными). Для составления компонентных уравнений необходимо записать узловые уравнения заданного звена (см. табл. 1.2). Решение записанных узловых уравнений относительно потенциала выходно-

го напряжения необходимо для получения передаточной функции, коэффициенты которой определяются параметрами пассивных и активных элементов звена. Сравнение коэффициентов b_1 и b_0 знаменателя заданной передаточной функции (2.26) и коэффициентов при комплексной переменной « s » и свободном члене знаменателя полученной передаточной функции позволяет найти два компонентных уравнения. Следует отметить, что если общее число определяемых параметров элементов активного звена больше двух, тогда параметрами некоторых элементов необходимо задаться.

Рассмотрим в качестве примера определение передаточной функции по напряжению активного RC -звена, схема которого показана на рис. 2.8. Перед составлением системы алгебраических уравнений с использованием метода узловых напряжений предварительно выполним в схеме преобразование входного источника напряжения \dot{U}_1 с последовательно соединенным сопротивлением R_2 в эквивалентный источник тока $G_2\dot{U}_1$ (рис. 2.20).

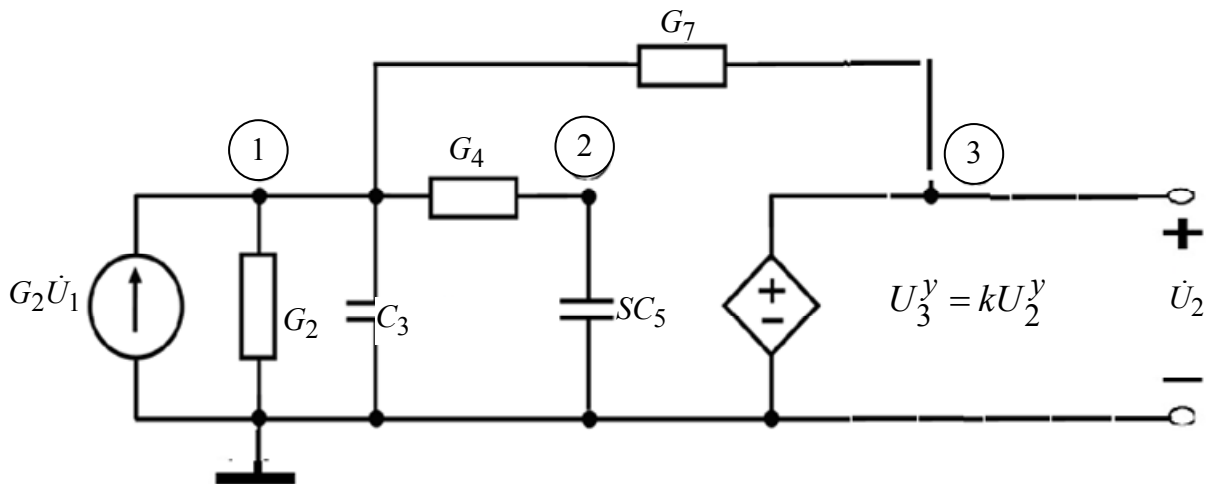


Рис. 2.20

Составленная система алгебраических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} (sC_3 + G_2 + G_4 + G_7)\dot{U}_1^y - G_4\dot{U}_2^y - G_7\dot{U}_3^y = G_2\dot{U}_1; \\ -G_4\dot{U}_1^y + (sC_5 + G_4)\dot{U}_2^y + 0 = 0. \end{cases}$$

В полученную систему алгебраических уравнений добавляем уравнение, учитывая свойство операционного усилителя, – зависимость между потенциалами третьего и второго узлов $\dot{U}_3^y = k\dot{U}_2^y$. Для упрощения анализа активной RC -цепи (см. рис. 2.8) можно принять равенство параметров пассивных элементов: $R_2 = R_4 = R_7 = R$ и $C_3 = C_5 = C$. При этом допущении получим систему двух алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (sC + 3G)\dot{U}_1^y - G(1+k)\dot{U}_2^y = G\dot{U}_1; \\ -G\dot{U}_1^y + (sC + G)\dot{U}_2^y = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Решим эту систему уравнений относительно напряжения второго узла. Учитывая уравнение $\dot{U}_3^y = k\dot{U}_2^y$, определим искомую передаточную функцию активной RC -цепи по напряжению, в которой запишем обозначения нормированных параметров пассивных элементов, а также в правой части представим заданную передаточную функцию (2.26):

$$H_U(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\dot{U}_3^y}{U_1(s)} = \frac{\frac{k}{R_*^2 C_*^2}}{s^2 + s\left(\frac{3}{R_* C_*}\right) + \frac{1+k}{R_*^2 C_*^2}} = \frac{3}{s^2 + 2s + 2}. \quad (2.30)$$

Произведя сравнение коэффициентов полиномов знаменателей обеих дробей выражения (2.30), составим два компонентных уравнения с нормированными параметрами элементов $R_* = R_1 = R_2 = R_3$; $C_* = C_1 = C_2$:

$$\frac{3}{R_* C_*} = 2; \quad (2.31)$$

$$\frac{1+k}{(R_* C_*)^2} = 2. \quad (2.32)$$

В уравнении (2.31) коэффициент в правой части равен коэффициенту полинома знаменателя (2.30) оператора « s ». В уравнении (2.32) коэффициент в правой части равен свободному члену полинома знаменателя (2.30). В уравнениях (2.31) и (2.32) три неизвестных параметра элементов, следовательно, для решения этих уравнений необходимо задать известным один из параметров. Примем в качестве известного параметра емкость $C_* = 1$. После подстановки этого параметра в уравнение (2.31), найдем сопротивление $R_* = 1,5$. После решения уравнение (2.32) найдем коэффициент усиления усилителя

$$k = 2(R_* C_*)^2 - 1 = 2(1,5 \cdot 1)^2 - 1 = 3,5. \quad (2.33)$$

Используя известные базисные параметры элементов (26) $R_6 = 100$ кОм и $C_6 = 10^{-9}$ Ф, найдем ненормированные параметры пассивных элементов активной цепи (см. рис. 2.8):

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_* \cdot R_6 = 150 \text{ кОм}; \quad C_1 = C_2 = C_* \cdot C_6 = 0,01 \text{ мкФ}. \quad (2.34)$$

2.6.13. Полосная добротность активной RC-цепи

Полосную добротность Q_p активной RC-цепи второго порядка обычно находят по графику АЧХ как отношение резонансной частоты к полосе пропускания. Значение полюсной добротности можно также определить по заданной передаточной функции (2.26), представив ее в следующем виде:

$$H_U(s) = \frac{a_0}{s^2 + b_1s + b_0} = \frac{a_0}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q_p} + \omega_0^2} = \frac{3}{s^2 + 2s + 2}. \quad (2.35)$$

Сравнивая коэффициенты оператора « s » и свободные члены полиномов знаменателей обеих дробей, получим два уравнения:

$$\omega_0 / Q_p = 2; \quad \omega_0^2 = 2.$$

Отсюда найдем значения резонансной частоты и полюсной добротности: $\omega_0 = \sqrt{2} = 1,4142$; $Q_p = 0,5\omega_0 = 0,5\sqrt{2} = 0,7071$. Из представленных расчетов следует, что переходные процессы у исследуемой активной RC-цепи имеют колебательный характер, так как значение $Q_p > 0,5$. Однако колебания переходных процессов незначительны из-за небольшого значения полюсной добротности $Q_p < 1$, что видно на графике $h_1(t)$ (см. рис. 2.11).

2.6.14. Вычисление относительной чувствительности полюсной добротности к изменению коэффициента усиления усилителя активной RC-цепи

По формуле (2.24) можно вычислить относительную чувствительность полюсной добротности к изменению коэффициента усиления усилителя активной RC-цепи. Предварительно представим полюсную добротность и резонансную частоту, выраженные с использованием нормированных параметров пассивных элементов и коэффициента усиления усилителя. При сравнении коэффициентов оператора « s » и свободных членов полиномов знаменателей передаточных функций (2.30) и (2.35), получим два уравнения:

$$\frac{\omega_0}{Q_p} = \frac{3}{R_*C_*}; \quad \omega_0^2 = \frac{1+k}{R_*^2C_*^2}. \quad (2.36)$$

Из второго выражения (2.36) найдем резонансную частоту, в формуле которой использован коэффициент усиления k :

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{1+k}}{R_*C_*}.$$

Разделив полученное выражение на первую формулу (2.36), определим полюсную добротность, в выражении которой использован коэффициент усиления k :

$$Q_p = \frac{\sqrt{1+k}}{3}. \quad (2.37)$$

Подставив (2.37) в (2.24), найдем относительную чувствительность полюсной добротности к изменению коэффициента усиления усилителя активной RC -цепи:

$$S_k^{Q_p} = \frac{dQ_p}{dk} \frac{k}{Q_p} = \frac{1}{3} \frac{d(\sqrt{1+k})}{dk} \frac{3k}{\sqrt{1+k}} = \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{1+k}} \frac{3k}{\sqrt{1+k}} = \frac{k}{2(1+k)}. \quad (2.38)$$

Формулу (2.37) можно представить с использованием приращений коэффициента усиления и полюсной добротности

$$S_k^{Q_p} \approx \frac{(\Delta Q_p / Q_p)}{(\Delta k / k)}.$$

Отсюда получим

$$\frac{\Delta Q_p}{Q_p} \approx \left(\frac{\Delta k}{k} \right) S_k^{Q_p}. \quad (2.39)$$

Следовательно, относительное приращение полюсной добротности можно найти как произведение относительного приращения коэффициента усиления и чувствительности полюсной добротности.

Покажем сказанное на примере. Найдем по формуле (2.37) значение чувствительности полюсной добротности, например, при коэффициенте усиления $k = 3,5$ активной RC -цепи (см. рис. 2.8):

$$S_k^{Q_p} = \frac{k}{2(1+k)} = \frac{3,5}{2(1+3,5)} = 0,3888.$$

Примем допустимое приращение коэффициента усиления равным 2 %, что составляет относительную величину $(\Delta k / k) = 0,02$. Тогда по формуле (2.39) найдем относительное приращение полюсной добротности:

$$\frac{\Delta Q_p}{Q_p} \approx \left(\frac{\Delta k}{k} \right) S_k^{Q_p} = 0,02 \cdot 0,3888 = 0,007776,$$

что составляет величину отклонения 0,7776 %.

На основании произведенных вычислений можно сделать заключение, что у исследованной активной RC -цепи относительная чувствительность полюсной добротности при изменении коэффициента усилителя является не-

большой. Для подтверждения этого заключения вычислим предельное значение относительной чувствительности полюсной добротности при больших значениях коэффициента усилителя ($k \rightarrow \infty$):

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [S_k^{Q_p}] = \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{k}{2(1+k)} \right] = 0,5.$$

Представленный расчет подтверждает низкую относительную чувствительность полюсной добротности к изменению коэффициента усиления усилителя.

2.7. Контрольные вопросы по курсовому расчету

1. Комплексная форма ряда Фурье.
2. Понятие о комплексной спектральной характеристике и комплексной амплитуде периодического несинусоидального сигнала.
3. Спектры непериодических сигналов и их преобразование по Фурье. Интеграл Фурье.
4. Спектральная характеристика одиночного прямоугольного импульса. Ширина спектра этого сигнала.
5. Частотные характеристики электрической цепи, передающей электрический сигнал без искажения. Понятие о полосе пропускания электрической цепи.
6. Каковы фильтрующие свойства вашей цепи? Как по АЧХ и ФЧХ оценить искажения сигнала на выходе цепи? Как определить полосу пропускания цепи?
7. Как приближенно выглядят графики АЧХ, ФЧХ и АФХ цепи, передаточная функция которой имеет вид $H(s) = 0,5(s^2 + 2)/[(s + 1)(s + 2)]$?
8. Составление узловых уравнений для цепей с ИТУН.
9. Составление узловых уравнений для цепей с операционными усилителями. Передаточная функция инвертирующего усилителя, реализованного на операционном усилителе.
10. Анализ частотных характеристик схемы инвертирующей интегрирующей RC -цепи, реализованной на основе операционного усилителя.
11. Анализ частотных характеристик схемы инвертирующей дифференцирующей RC -цепи, реализованной с использованием операционного усилителя.
12. Передаточная функция инвертирующего сумматора сигналов, реализованного с использованием операционного усилителя.
13. Что такое переходная характеристика цепи? Как ее найти, используя передаточную функцию цепи?
14. Как найти значения переходной характеристики активной RC -цепи при значениях времени $t = 0^+$ и $t \rightarrow \infty$?

15. Что такое импульсная характеристика цепи? Как ее найти, используя передаточную функцию цепи? Как связаны между собой импульсная и переходная характеристики цепи?

16. Как выглядит график функции $f(t)$, если $f(t) = 10e^{-2t} \cos(100t - 45^\circ)$.

17. Чем отличаются графики двух заданных функций $f_1(t) = 10t\delta_1(t - 2)$ и $f_2(t) = 10(t - 2)\delta_1(t - 2)$? Постройте графики этих функций.

18. Как найти изображение трапецеидального импульса?

19. $H(s) = (s + 1)/(s + 2)$. Найдите функции $h_1(t)$ и $h(t)$. Постройте графики этих функций.

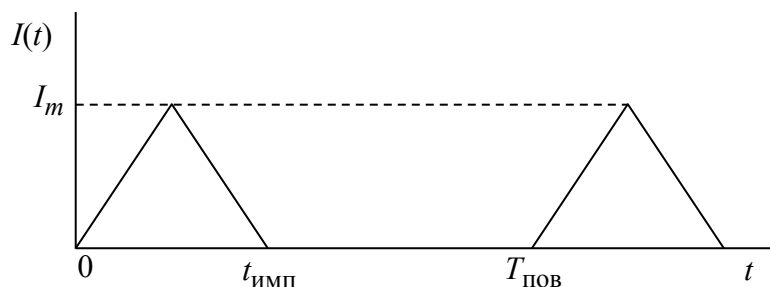
20. $F(s) = (s + 1)/(s + 2)$. Найдите оригинал функции $f(t)$ по заданному изображению $F(s)$. Постройте график функции $f(t)$.

21. $F(s) = 4/[s(s^2 + 4)]$. Найдите оригинал функции $f(t)$ по заданному изображению $F(s)$. Постройте график функции $f(t)$.

22. Как выглядит график функции $f(t)$, если $f(t) = 10e^{-2(t-3)} \times \sin[6,28(t-3)]$.

23. Почему по окончании на входе цепи одиночного импульса реакция цепи $f_{\text{ВЫХ}}(t) \neq 0$?

24. Найдите среднее значение периодического сигнала $i(t)$. Дано: $I_m = 5$ А; $t_{\text{ИМП}} = 1$ с; $T_{\text{ПОВ}} = 2,5$ с.



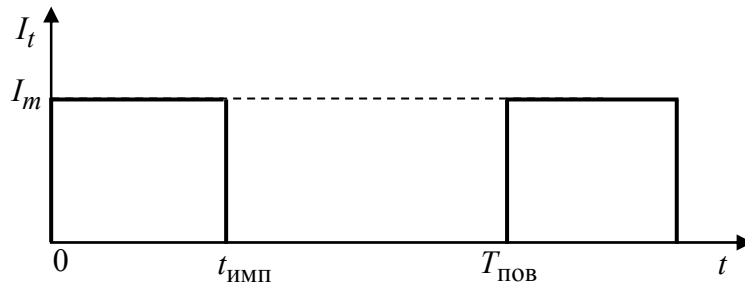
25. Что такое амплитудный и фазовый спектры периодического сигнала? Чему равно значение амплитудного спектра периодического сигнала при нулевой частоте? Какова его размерность?

26. Как связана ширина спектра сигнала с его длительностью?

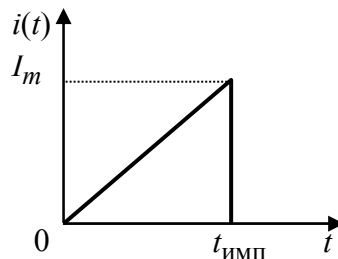
27. Как связана ширина спектра сигнала с его крутизной фронтов?

28. Изобразите график амплитудного спектра функции $\delta(t)$.

29. Найдите среднее значение периодического сигнала $i(t)$. Дано: $I_m = 5$ А; $t_{\text{ИМП}} = 1$ с; $T_{\text{ПОВ}} = 2,5$ с.



30. Изобразите график амплитудного спектра функции e^{-2t} .
31. Изобразите график амплитудного спектра функции $\delta_1(t)$.
32. Запишите изображение одиночного сигнала $i(t)$. Дано: $I_m = 4$ А; $t_{\text{имп}} = 1$ с.



33. Как найти спектр реакции цепи?
34. Что такое ряд Фурье? Как его найти? Какой смысл нулевой гармоники ряда Фурье?
35. Какими свойствами характеризуется ряд Фурье симметричных сигналов?
36. Что такое дискретный спектр периодического сигнала? Какой частотный интервал наблюдается между гармониками дискретного спектра?
37. Чем принципиально отличаются графики первой и третьей гармоник ряда Фурье? Поясните это на примере курсовой работы.
38. Как найти ряд Фурье и дискретный спектр реакции цепи?
39. Постройте приближенно график сигнала $i(t) = 3 + 2\sin(3,14t) + \sin(9,42t)$.
40. Может ли импульсная функция цепи содержать дельта-функцию $\delta(t)$? Заключение сделайте на основании рассмотрения передаточной функции и схемы цепи курсовой работы.
41. Определите начальное и конечное значения переходной характеристики цепи в вашей курсовой работе.
42. Когда полюсы передаточной функции на комплексной s -плоскости расположены в левой полуплоскости?
43. Как определяется полоса пропускания цепи? По какому критерию ее определяют?

44. Каковы условия неискаженного прохождения сигнала через электрическую цепь? Как искажаются сигналы вашей цепью? Как влияют частотные характеристики цепи на искажение выходного сигнала?

45. Какова связь изображений одиночного импульса и периодической последовательности импульсов той же формы?

46. Изобразите графики АЧХ и ФЧХ идеальной дифференцирующей цепи.

47. Изобразите графики АЧХ и ФЧХ идеальной интегрирующей цепи.

48. Изобразите графики АЧХ и ФЧХ дифференцирующей RC -цепи.

49. Изобразите графики АЧХ и ФЧХ интегрирующей RC -цепи.

50. Найдите реакцию интегрирующей RC -цепи ($R = 2 \text{ Ом}$; $C = 0,5 \text{ Ф}$) на линейно возрастающее напряжение $u(t) = 2t$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы теоретической электротехники: учеб. пособие / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Е. Б. Соловьева и др. 2-е изд., стер. СПб.: Лань, 2021.
2. Курсовое проектирование по теоретической электротехнике: учеб. пособие в 2 ч. Ч. 1 / А. П. Барков, Ю. А. Бычков, С. А. Дегтярев и др.; под ред. Ю. А. Бычкова, Е. Б. Соловьевой, Э. П. Чернышева. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2017.
3. Введение в теоретическую электротехнику. Курс подготовки бакалавров: учеб. пособие / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Е. Б. Соловьева, Э. П. Чернышев. СПб.: Лань, 2021.
4. Справочник по основам теоретической электротехники: учеб. пособие / под ред. Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого, Э. П. Чернышева и др. СПб.: Лань, 2021.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ОБЩИЕ ТРЕБОВАНИЯ	3
1. ЗАДАНИЕ К КУРСОВОЙ РАБОТЕ	4
1.1. Порядок выполнения курсовой работы	8
2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КУРСОВОЙ РАБОТЫ.....	9
2.1. Вычисление реакции активной RC -цепи при воздействии одионого импульса	9
2.2. Примеры изображений импульсов различной формы	10
2.2.1. Изображение импульса прямоугольной формы	10
2.2.2. Изображение импульса синусоидальной формы	11
2.2.3. Изображение импульса косинусной формы	11
2.2.4. Изображение импульса треугольной формы	12
2.2.5. Изображение импульса типа меандр	13
2.2.6. Изображение импульса с формой синусоидальной волны	14
2.3. Переходная и импульсная характеристики активной RC -цепи.....	14
2.3.1. Переходная характеристика активной RC -цепи	14
2.3.2. Импульсная характеристика активной RC -цепи	15
2.4. Частотные характеристики активной RC -цепи	16
2.4.1. Оценка времени задержки выходного сигнала активной RC -цепи по фазочастотной характеристике	17
2.5. Расчет чувствительности передаточной функции активной RC -цепи к отклонению параметров элементов.....	18
2.6. Типовой пример курсовой работы	20
2.6.1. Построение схемы активной цепи по заданным параметрам	20
2.6.2. Нормирование параметров и переменных цепи	21
2.6.3. Расчет нулей и полюсов передаточной функции активной RC -цепи.....	22
2.6.4. Вычисление операторным методом реакции активной RC -цепи....	22
2.6.5. Вычисление времени задержки реакции активной RC -цепи	25
2.6.6. Вычисление времени переходного процесса в активной RC -цепи.....	25
2.6.7. Вычисление операторным методом переходной характеристики активной RC -цепи.....	26

2.6.8. Вычисление операторным методом импульсной характеристики активной RC -цепи.....	27
2.6.9. Вычисление амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик активной RC -цепи.....	29
2.6.10. Спектральные характеристики одиночного импульса в форме синусоидальной полуволны.....	31
2.6.11. Спектральные характеристики периодических импульсов в форме синусоидальной полуволны.....	33
2.6.12. Синтез активной RC -цепи	36
2.6.13. Полосная добротность активной RC -цепи	39
2.6.14. Вычисление относительной чувствительности полюсной добротности к изменению коэффициента усиления усилителя активной RC -цепи	39
2.7. Контрольные вопросы по курсовому расчету	41
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	45

Иншаков Юрий Михайлович
Портной Марк Саулович

**Исследование прохождения сигналов через линейную
активную электрическую цепь**

Учебно-методическое пособие

Редактор Е. А. Ушакова

Компьютерная верстка Е. Н. Стекачевой

Подписано в печать 10.01.24. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Печ. л. 3,0.
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 92 экз. Заказ .

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
197022, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5Ф