MAT1600 De Vincent Laberge

EN BREF, résoudre un système d'équations linéaire

Soit un système d'équations linéaire $A\vec{x} = b$ ← vecteur des constantes

matrice des coefficients ↑ └ vecteur des variables

① Échelonner la matrice augmentée $[A|b]$

② Une fois la matrice échelonnée, j'ai visuellement toutes les informations nécessaires pour savoir si le système possède 0, 1 ou ∞ slns

2A ○ théorème A (séance 1 ou livre p. 23) :
$[A|b]$ est compatible ⟺ sa forme <u>échelonnée</u> n'a pas de ligne $[0 \ldots 0 | k]$ où $k \neq 0$

<u>Ex</u>: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ est incompatible

<u>Ex</u>: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ et $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$ sont tous compatibles

Si le système est incompatible, je peux m'arrêter là. Sinon, je continue.

2B ○ théorème B :
Un système d'équations linéaires <u>compatible</u> a
- 1 sln si elle n'a aucune variable libre
- ∞ slns si elle a <u>au moins</u> une variable libre

<u>Ex</u>: $\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ x_3 est <u>libre</u> car associée à une colonne ne possédant pas de pivot
⇒ le système a ∞ slns

<u>Ex</u>: $\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right]$ toutes les colonnes sont 'pivots' (car possèdent une position pivot)
⇒ toutes les variables sont <u>liées</u> (donc non libres)
⇒ le système a 1 sln

Nous avons alors 2 cas à traiter

cas 1 : Le système a 1 sln

(*) Notons que si échelonner la matrice augmentée nous permet d'appliquer les théorèmes A et B, rendre la matrice "échelonnée réduite" nous permet d'exprimer la solution de manière explicite.

(3) Donc, rendons la matrice augmentée "échelonnée réduite"

Une fois fait, comme le système a 1 sln, on aura TOUJOURS la forme suivante (dans ce cas là à 3 variables) :

$$\begin{array}{cccc} z_1 & z_2 & z_3 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

et on pourra facilement exprimer la solution

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

et on a fini !

cas 2 : Le système a ∞ slns

→ Je vais expliquer ce cas là à l'aide d'un exemple

(*) (Remarque analogue à celle plus haut)

(3) On rend la matrice augmentée "échelonnée réduite" (la matrice ci-dessous l'est)

$$\begin{array}{ccccc} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

À l'étape 2B, z_3 et z_4 ont été identifiées comme les variables libres de ce système d'équations

Exprimons-les avec des paramètres $\begin{cases} z_3 = t \\ z_4 = u \end{cases}$

↳ Aussi, de cette matrice échelonnée réduite, je peux la réexprimer en la forme suivante ⟶ $\sim \begin{cases} z_1 + z_3 + 3z_4 = 5 \\ z_2 + 2z_3 + 4z_4 = 6 \end{cases}$

À partir de là on combine les 2 ensemble :

$$\sim \begin{cases} z_1 + z_3 + 3z_4 = 5 \\ z_2 + 2z_3 + 4z_4 = 6 \\ z_3 = t \\ z_4 = u \end{cases}$$

(Puis on réexprime les variables libres z_3, z_4 selon leur paramètre)

$$\sim \begin{cases} z_1 + t + 3u = 5 \\ z_2 + 2t + 4u = 6 \\ z_3 = t \\ z_4 = u \end{cases}$$

Puis on isole les variables $\rightsquigarrow \begin{cases} z_1 = 5 - t - 3u \\ z_2 = 6 - 2t - 4u \\ z_3 = t \\ z_4 = u \end{cases}$ et voilà!

Notons aussi qu'il sera utile pour la suite du cours de pouvoir exprimer cette solution paramétrée sous la forme vectorielle suivante:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ Cette matière est essentielle à maîtriser. Une grande partie du cours va consister à appliquer ce processus à divers autres problèmes.