
ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Primer Cuatrimestre 2026

Práctica N° 2: Álgebra Lineal Numérica

Descomposiciones matriciales

Ejercicio 1 (Propiedades de matrices triangulares superiores) Sea \mathcal{T}_n el conjunto de matrices triangulares superiores de tamaño $n \times n$.

- (a) Demuestre que si $A, B \in \mathcal{T}_n$, entonces $AB \in \mathcal{T}_n$.
- (b) Demuestre que si $A \in \mathcal{T}_n$ tiene todos sus elementos diagonales no nulos, entonces A es inversible.
- (c) Demuestre que si $A \in \mathcal{T}_n$ es inversible, entonces $A^{-1} \in \mathcal{T}_n$.

Sugerencia para (c): Considere la ecuación $AA^{-1} = I$ y determine las entradas de A^{-1} por sustitución hacia atrás.

Ejercicio 2 (Descomposición LDL^T para matrices simétricas) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica que admite una descomposición LU sin pivoteo, donde L es triangular inferior con diagonal unitaria y U es triangular superior.

- (a) Demuestre que $U = DL^T$, donde D es una matriz diagonal.
- (b) Concluya que A admite la descomposición $A = LDL^T$.
- (c) Verifique explícitamente esta descomposición para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (d) Compare el costo de almacenamiento de LDL^T vs LU para matrices simétricas.

Sugerencia: Use que $A = A^T$ y $(LU)^T = U^T L^T = A$.

Ejercicio 3 (Eficiencia de LU para matrices tridiagonales) Una matriz tridiagonal $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene la forma:

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

- (a) Demuestre que si A admite descomposición LU sin pivoteo, entonces L y U son bidiagonales:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ell_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & \cdots \\ 0 & u_2 & c_2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

- (b) Derive fórmulas explícitas para ℓ_i y u_i en términos de a_i, b_i, c_i .
- (c) Demuestre que el costo de factorizar A es $O(n)$ operaciones (en lugar de $O(n^3)$ para matrices densas).
- (d) Demuestre que el costo de resolver $Ax = b$ dado $A = LU$ es $O(n)$ operaciones.
- (e) Aplique el algoritmo a la matriz tridiagonal 5×5 con $a_i = -1$, $b_i = 2$, $c_i = -1$.

Ejercicio 4 (Proyección ortogonal mediante factorización QR) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y rango columna completo, y sea $A = QR$ su descomposición QR.

- (a) Demuestre que $P = QQ^T$ es una matriz de proyección, es decir, que $P^2 = P$ y $P^T = P$.
- (b) Demuestre que P proyecta sobre el espacio columna de A : para todo $y \in \mathbb{R}^m$, se tiene $Py \in \text{Col}(A)$.
- (c) Demuestre que P es la proyección ortogonal: $(I - P)y \perp \text{Col}(A)$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$.
- (d) Calcule explícitamente la matriz de proyección P para:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5 (Espacios fundamentales y factorización QR) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y sea $A = QR$ su descomposición QR, donde $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortonormales y $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es triangular superior.

- (a) **Espacio columna:** Demuestre que $\text{Col}(A) = \text{Col}(Q)$.
- (b) **Espacio nulo:** Demuestre que $\text{Nul}(A) = \text{Nul}(R)$.
- (c) Use (a) y (b) para explicar por qué A y Q tienen el mismo rango.
- (d) Si $r = \text{rank}(A) < n$, explique cómo la estructura de R revela esta deficiencia de rango.

Ejercicio 6 (Mínimos cuadrados vía QR vs ecuaciones normales) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$ y rango columna completo, y sea $b \in \mathbb{R}^m$. El problema de mínimos cuadrados es:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2.$$

- (a) **Solución vía ecuaciones normales:** Demuestre que la solución satisface $A^T Ax = A^T b$.

- (b) **Solución vía QR:** Si $A = QR$, demuestre que la solución es $x = R^{-1}Q^T b$.
- (c) Demuestre que ambos métodos producen la misma solución en aritmética exacta.
- (d) **Análisis de condicionamiento:** Usando la SVD de A , demuestre que:

$$\kappa(A^T A) = \kappa(A)^2 = \kappa(R)^2,$$

donde $\kappa(\cdot)$ denota el número de condición en norma 2. Concluya que QR es numéricamente más estable que las ecuaciones normales cuando A está mal condicionada.

Ejercicio 7 (Factorización de Cholesky para matrices definidas positivas) Sea $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica definida positiva.

- (a) Demuestre que existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $B = AA^T$. **Sugerencia:** Use que toda matriz definida positiva tiene raíz cuadrada: $B = B^{1/2} B^{1/2}$.
- (b) Aplique la descomposición QR a A^T : $A^T = QR$. Demuestre que:

$$B = AA^T = (A^T)^T A^T = R^T Q^T QR = R^T R.$$

- (c) Concluya que B admite la descomposición de Cholesky $B = LL^T$ donde $L = R^T$ es triangular inferior.
- (d) Verifique la factorización para:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- (e) Compare el costo de Cholesky ($\sim \frac{n^3}{6}$ operaciones) con LU ($\sim \frac{n^3}{3}$ operaciones).

Ejercicio 8 (Norma 2 de matrices normales) Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es **normal** si $A^* A = AA^*$, donde A^* denota la conjugada transpuesta.

- (a) Demuestre que:

$$\|A\|_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|,$$

donde λ_i son los autovalores de A . (Sugerencia: Use la descomposición espectral para matrices normales: $A = U\Lambda U^*$, donde $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ y U es unitaria.)

- (b) Verifique que matrices hermitianas, unitarias y normales satisfacen $\|A\|_2 = \rho(A)$ (radio espectral).
- (c) Muestre con un ejemplo que esto no es cierto para matrices no normales.

Ejercicio 9 Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ una matriz no singular. Demuestre que la distancia de A al conjunto de matrices singulares (en norma 2) es exactamente su menor valor singular σ_n . Es decir:

$$\min_{B \text{ singular}} \|A - B\|_2 = \sigma_n.$$

Ejercicio 10 (Descomposición polar desde SVD) Toda matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ admite una *descomposición polar* $A = Q_{\text{polar}} S$, donde:

- $Q_{\text{polar}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tiene columnas ortonormales ($Q_{\text{polar}}^T Q_{\text{polar}} = I_n$).
- $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica semidefinida positiva.

Sea $A = U \Sigma V^T$ la descomposición SVD de A . Demuestre que:

$$Q_{\text{polar}} = UV^T, \quad S = V \Sigma V^T.$$

Ejercicio 11 (Problema de Procrustes ortogonal) Dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ representando conjuntos de datos (nubes de puntos), queremos encontrar la matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ óptima (geoméricamente, la rotación óptima) que transforma A en B minimizando:

$$\min_{Q^T Q = I} \|AQ - B\|_F,$$

donde $\|\cdot\|_F$ es la norma de Frobenius.

- (a) Demuestre que minimizar $\|AQ - B\|_F^2$ es equivalente a maximizar $\text{tr}(Q^T A^T B)$.
- (b) Sea $A^T B = U \Sigma V^T$ la descomposición SVD de $A^T B$. Demuestre que la solución óptima es:

$$Q = UV^T.$$

Ejercicio 12 (Pseudoinversa y solución de norma mínima) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con SVD $A = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$. Se define la *pseudoinversa de Moore-Penrose* como:

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T,$$

donde Σ^+ es diagonal con entradas $1/\sigma_i$ en las primeras r posiciones.

- (a) Demuestre que $x = A^+ b$ resuelve el problema de cuadrados mínimos $\min_x \|Ax - b\|_2$.
- (b) Demuestre que entre todas las soluciones de cuadrados mínimos, $x = A^+ b$ tiene norma mínima:

$$\|A^+ b\|_2 = \min\{\|x\|_2 : \|Ax - b\|_2 = \min\}.$$

Ejercicio 13 (Condicionamiento y propagación del error vía SVD) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz inversible y considere el sistema lineal $Ax = b$. Suponga que el lado derecho b está contaminado por un error Δb , de modo que la solución calculada $x + \Delta x$ satisface $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$.

- (a) Usando la descomposición SVD de $A = U \Sigma V^T$, demuestre que:

$$\|\Delta x\|_2 \leq \frac{1}{\sigma_n} \|\Delta b\|_2 \quad y \quad \|b\|_2 \leq \sigma_1 \|x\|_2.$$

(b) Deduzca que el error relativo satisface la cota:

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2},$$

donde $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$ es el número de condición.

- (c) Construya un ejemplo de 2×2 donde la igualdad se alcance. **Sugerencia:** Elija b alineado con el primer vector singular izquierdo u_1 (máxima amplificación) y Δb alineado con el último u_n (mínima atenuación en la inversa), o viceversa según convenga.
- (d) Concluya que si $\kappa_2(A)$ es grande, pequeños errores en b pueden resultar en errores catastróficos en la solución x , independientemente del método de resolución del sistema lineal.

Ejercicio 14 (Matrices de Householder) Una matriz de Householder tiene la forma $H = I - 2vv^T$ donde $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\|_2 = 1$.

- (a) Demuestre que H es ortogonal: $H^T H = I$.
- (b) Demuestre que H es autoinversa: $H^2 = I$ (es decir, $H = H^{-1}$).
- (c) Demuestre que H es simétrica: $H^T = H$.
- (d) Interprete geométricamente H como una reflexión respecto al hiperplano ortogonal a v .
- (e) Para un vector $x \in \mathbb{R}^n$ dado, construya v tal que $Hx = \alpha e_1$ donde $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$ y $\alpha = \pm \|x\|_2$.

Sugerencia para (e): Tome $v = \frac{x - \alpha e_1}{\|x - \alpha e_1\|}$ con $\alpha = -\text{sign}(x_1)\|x\|_2$ para evitar cancelación.

Ejercicio 15 (Factorización QR mediante reflexiones de Householder) El algoritmo de Householder construye la factorización QR aplicando reflexiones sucesivas.

- (a) Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ con $m \geq n$. En el paso k , queremos anular las entradas debajo de la diagonal en la columna k .
- (b) Construya la matriz de Householder H_k que anula las componentes $k+1, \dots, m$ del vector formado por la columna k de la submatriz restante.
- (c) Demuestre que después de n pasos:

$$H_n \cdots H_2 H_1 A = R,$$

donde R es triangular superior.

- (d) Concluya que $A = QR$ con $Q = H_1 H_2 \cdots H_n$.
- (e) Demuestre que el costo total es $O(2mn^2 - \frac{2n^3}{3})$ operaciones.

Ejercicio 16 (Reducción bidiagonal para SVD) El cálculo de la SVD de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se facilita si primero reducimos A a forma bidiagonal.

- (a) Demuestre que mediante reflexiones de Householder aplicadas alternadamente por izquierda y derecha, se puede reducir A a la forma:

$$A = UBV^T,$$

donde $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son ortogonales, y $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es bidiagonal superior:

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

- (b) Explique cómo la SVD de A se obtiene de la SVD de B : si $B = \tilde{U}\Sigma\tilde{V}^T$, entonces $A = (U\tilde{U})\Sigma(\tilde{V}^TV^T)$.
- (c) Demuestre que el costo de bidiagonalización es $O(2mn^2 - \frac{2n^3}{3})$ operaciones.

Ejercicio 17 (Forma de de Hessenberg) Una matriz $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está en **forma de Hessenberg superior** si $h_{ij} = 0$ para $i > j + 1$.

- (a) Demuestre que el costo de calcular la descomposición QR de una matriz $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en forma de Hessenberg es $O(n^2)$ operaciones. ¿Cuál es el costo para matrices densas generales? **Sugerencia:** Observe que en cada columna k solo es necesario anular una entrada (la subdiagonal). Una reflexión de Householder diseñada para esto modificará únicamente dos filas de la matriz, costando $O(n)$ operaciones.
- (b) Demuestre que si A es simétrica y se reduce a forma de Hessenberg mediante transformaciones de semejanza ortogonal $H = Q^T A Q$, entonces H es tridiagonal. **Sugerencia:** Use que H es simétrica ($H = H^T$) y que la forma de Hessenberg superior implica $h_{ij} = 0$ para $i > j + 1$.

Métodos iterativos

Ejercicio 18 (Método de la potencia: análisis de convergencia) Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz diagonalizable con autovalores $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ y autovectores linealmente independientes $\{v_1, \dots, v_n\}$. El método de la potencia construye la sucesión $x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{\|Ax^{(k)}\|}$.

- (a) Si escribimos el vector inicial como $x^{(0)} = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$ con $c_1 \neq 0$, demuestre que:

$$A^k x^{(0)} = \lambda_1^k \left(c_1 v_1 + \sum_{j=2}^n c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k v_j \right).$$

- (b) Deduzca que la dirección de $x^{(k)}$ converge a la dirección de v_1 (autovector dominante) cuando $k \rightarrow \infty$.

- (c) Identifique el término que controla la velocidad de convergencia y exprese la tasa de convergencia en función de los autovalores.
- (d) Demuestre que el cociente de Rayleigh $\rho(x^{(k)}) = \frac{(x^{(k)})^T A x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2^2}$ converge a λ_1 (asuma convergencia de $x^{(k)}$ a v_1 normalizado).

Ejercicio 19 (Método de la potencia inversa) El método de la potencia inversa con shift σ aplica el método de la potencia a la matriz $M = (A - \sigma I)^{-1}$.

- (a) Demuestre que si (λ, v) es un par autovalor-autovector de A , con $\lambda \neq \sigma$, entonces (μ, v) con $\mu = (\lambda - \sigma)^{-1}$ es par autovalor-autovector de M .
- (b) Suponga que λ_k es el autovalor de A más cercano a σ , tal que $|\lambda_k - \sigma| < |\lambda_j - \sigma|$ para todo $j \neq k$. Demuestre que el método converge al autovector v_k .
- (c) Demuestre que la tasa de convergencia asintótica es lineal e igual a $|\lambda_k - \sigma|/|\lambda_j - \sigma|$, donde λ_j es el segundo autovalor más cercano a σ .
- (d) Analice cómo elegir σ para maximizar la velocidad de convergencia y discuta las implicaciones numéricas de elegir σ muy cercano a λ_k (condicionamiento del sistema lineal vs velocidad de convergencia).

Ejercicio 20 (Iteración de cociente de Rayleigh) Este algoritmo es una variante de la potencia inversa donde el shift se actualiza en cada paso usando el cociente de Rayleigh: $\sigma_k = \frac{(x^{(k)})^T A x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2^2}$.

- (a) Escriba los 3 pasos de una iteración genérica $k \rightarrow k+1$:

- i. Cálculo del shift: $\sigma_k = \rho(x^{(k)})$.
- ii. Resolución del sistema lineal: $(A - \sigma_k I)y^{(k+1)} = x^{(k)}$.
- iii. Normalización: $x^{(k+1)} = y^{(k+1)} / \|y^{(k+1)}\|$.

- (b) Explique intuitivamente por qué la convergencia es superlineal.

Ejercicio 21 (Método QR e Iteración Ortogonal) El método QR utiliza la descomposición QR para calcular autovalores. Consiste en, dada una matriz $A_1 = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, generar una sucesión de matrices A_k definida por:

$$A_k = Q_k R_k \quad (QR), \quad A_{k+1} = R_k Q_k.$$

- (a) Probar que todas las matrices A_k tienen los mismos autovalores. **Sugerencia:** Demuestre que A_{k+1} es semejante a A_k .
- (b) Considere las matrices acumuladas $\bar{Q}_k = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ y $\bar{R}_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1$. Demuestre por inducción que $A^k = \bar{Q}_k \bar{R}_k$. Es decir, \bar{Q}_k proviene de la factorización QR de la potencia A^k . **Sugerencia:** Observe que $A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$ y use la hipótesis inductiva.
- (c) Demuestre que $A^k e_1$ es proporcional a la primera columna de \bar{Q}_k (use que \bar{R}_k es triangular superior). Concluya que la primera columna de la matriz ortogonal acumulada converge al autovector dominante de A (simulando el **método de la potencia** sobre e_1).

Ejercicio 22 (Iteración QR y forma de Hessenberg) Sea $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz en forma de Hessenberg superior, y sea $H = QR$ su descomposición QR.

- (a) Demuestre que Q es una matriz de Hessenberg superior. **Sugerencia:** Escriba $Q = HR^{-1}$ y utilice que el producto de una matriz de Hessenberg superior por una triangular superior es de Hessenberg superior.
- (b) Demuestre que $H' = RQ$ también está en forma de Hessenberg superior.
- (c) Concluya que si comenzamos con A en forma de Hessenberg, todas las iteraciones del algoritmo QR permanecen en forma de Hessenberg.

Ejercicio 23 (Algoritmo QR para raíces de polinomios) Dado un polinomio mónico $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, su **matriz compañera** es:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- (a) Demuestre que el polinomio característico de C es:

$$\det(C - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda).$$

Por lo tanto, los autovalores de C son precisamente las raíces de p .

- (b) Demuestre que C está en forma de Hessenberg superior.
- (c) Concluya que el algoritmo QR aplicado a C tiene costo $O(kn^2)$ donde k es el número de iteraciones requerido.

Ejercicio 24 (Convergencia de métodos iterativos estacionarios) Un método iterativo estacionario para resolver $Ax = b$ tiene la forma $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$, donde G es la matriz de iteración.

- (a) Demuestre que para cualquier matriz $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$G^k \rightarrow 0 \quad \text{si y solo si} \quad \rho(G) < 1,$$

donde $\rho(G) = \max_i |\lambda_i(G)|$ es el radio espectral. **Sugerencia:** Use la forma de Jordan de G y que todas las normas matriciales son equivalentes.

- (b) Demuestre que para cualquier norma matricial:

$$\rho(G) \leq \|G\|.$$

- (c) Concluya que si $\|G\| < 1$ para alguna norma, entonces el método converge.

Ejercicio 25 (Método de Jacobi) El método de Jacobi para $Ax = b$ es $x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)})$, donde $A = D + L + U$ (diagonal, triangular inferior estricta, triangular superior estricta).

(a) Suponga que A es *estrictamente diagonal dominante por filas*:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n.$$

Demuestre que el método de Jacobi converge analizando los autovalores de la matriz de iteración G_J . **Sugerencia:** Utilice el Teorema de los Círculos de Gershgorin aplicado a la matriz $G_J = -D^{-1}(L+U)$. Observe que los elementos diagonales de G_J son nulos y relacione los radios de los discos con la condición de diagonal dominancia.

(b) Exhiba un ejemplo de matriz simétrica definida positiva para la cual Jacobi diverge.

Ejercicio 26 (Método de Gauss-Seidel) El método de Gauss-Seidel para $Ax = b$ es $(D+L)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)}$, con matriz de iteración $G_{GS} = -(D+L)^{-1}U$.

(a) Suponga que A es *estrictamente diagonal dominante por filas*. Demuestre que el método de Gauss-Seidel converge analizando los autovalores de G_{GS} . **Sugerencia:** Use un argumento similar al de la demostración del Teorema de los Círculos de Gershgorin aplicado a G_{GS} .