Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2026

Práctica N° 2: Álgebra Lineal Numérica

Descomposiciones matriciales

Ejercicio 1 (Propiedades de matrices triangulares superiores) *Sea $\mathcal{T}_n$ el conjunto de matrices triangulares superiores de tamaño $n \times n$.*

(a) Demuestre que si $A, B \in \mathcal{T}_n$, entonces $AB \in \mathcal{T}_n$.

(b) Demuestre que si $A \in \mathcal{T}_n$ tiene todos sus elementos diagonales no nulos, entonces A es inversible.

(c) Demuestre que si $A \in \mathcal{T}_n$ es inversible, entonces $A^{-1} \in \mathcal{T}_n$.

Sugerencia para (c)*: Considere la ecuación $AA^{-1} = I$ y determine las entradas de A^{-1} por sustitución hacia atrás.*

Ejercicio 2 (Descomposición LDL^T para matrices simétricas) *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica que admite una descomposición LU sin pivoteo, donde L es triangular inferior con diagonal unitaria y U es triangular superior.*

(a) Demuestre que $U = DL^T$, donde D es una matriz diagonal.

(b) Concluya que A admite la descomposición $A = LDL^T$.

(c) Verifique explícitamente esta descomposición para la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) Compare el costo de almacenamiento de LDL^T vs LU para matrices simétricas.

Sugerencia*: Use que $A = A^T$ y $(LU)^T = U^T L^T = A$.*

Ejercicio 3 (Eficiencia de LU para matrices tridiagonales) *Una matriz tridiagonal $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene la forma:*

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

(a) *Demuestre que si A admite descomposición LU sin pivoteo, entonces L y U son bidiagonales:*

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ell_n & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 & c_1 & 0 & \cdots \\ 0 & u_2 & c_2 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & u_n \end{pmatrix}.$$

(b) *Derive fórmulas explícitas para ℓ_i y u_i en términos de a_i, b_i, c_i.*

(c) *Demuestre que el costo de factorizar A es $O(n)$ operaciones (en lugar de $O(n^3)$ para matrices densas).*

(d) *Demuestre que el costo de resolver $Ax = b$ dado $A = LU$ es $O(n)$ operaciones.*

(e) *Aplique el algoritmo a la matriz tridiagonal 5×5 con $a_i = -1$, $b_i = 2$, $c_i = -1$.*

Ejercicio 4 (Proyección ortogonal mediante factorización QR) *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$ y rango columna completo, y sea $A = QR$ su descomposición QR.*

(a) *Demuestre que $P = QQ^T$ es una matriz de proyección, es decir, que $P^2 = P$ y $P^T = P$.*

(b) *Demuestre que P proyecta sobre el espacio columna de A: para todo $y \in \mathbb{R}^m$, se tiene $Py \in Col(A)$.*

(c) *Demuestre que P es la proyección ortogonal: $(I - P)y \perp Col(A)$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$.*

(d) *Calcule explícitamente la matriz de proyección P para:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5 (Espacios fundamentales y factorización QR) *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$ y sea $A = QR$ su descomposición QR, donde $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene columnas ortonormales y $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es triangular superior.*

(a) ***Espacio columna**: Demuestre que $Col(A) = Col(Q)$.*

(b) ***Espacio nulo**: Demuestre que $Nul(A) = Nul(R)$.*

(c) *Use (a) y (b) para explicar por qué A y Q tienen el mismo rango.*

(d) *Si $r = rank(A) < n$, explique cómo la estructura de R revela esta deficiencia de rango.*

Ejercicio 6 (Mínimos cuadrados vía QR vs ecuaciones normales) *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$ y rango columna completo, y sea $b \in \mathbb{R}^m$. El problema de mínimos cuadrados es:*

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2.$$

(a) ***Solución vía ecuaciones normales**: Demuestre que la solución satisface $A^T Ax = A^T b$.*

(b) ***Solución vía QR***: *Si $A = QR$, demuestre que la solución es $x = R^{-1}Q^T b$.*

(c) Demuestre que ambos métodos producen la misma solución en aritmética exacta.

(d) ***Análisis de condicionamiento***: *Usando la SVD de A, demuestre que:*

$$\kappa(A^T A) = \kappa(A)^2 = \kappa(R)^2,$$

donde $\kappa(\cdot)$ denota el número de condición en norma 2. Concluya que QR es numéricamente más estable que las ecuaciones normales cuando A está mal condicionada.

Ejercicio 7 (Factorización de Cholesky para matrices definidas positivas) *Sea $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica definida positiva.*

(a) Demuestre que existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $B = AA^T$. ***Sugerencia***: *Use que toda matriz definida positiva tiene raíz cuadrada: $B = B^{1/2}B^{1/2}$.*

(b) Aplique la descomposición QR a A^T: $A^T = QR$. Demuestre que:

$$B = AA^T = (A^T)^T A^T = R^T Q^T QR = R^T R.$$

(c) Concluya que B admite la descomposición de Cholesky $B = LL^T$ donde $L = R^T$ es triangular inferior.

(d) Verifique la factorización para:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

(e) Compare el costo de Cholesky ($\sim \frac{n^3}{6}$ operaciones) con LU ($\sim \frac{n^3}{3}$ operaciones).

Ejercicio 8 (Norma 2 de matrices normales) *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es* ***normal*** *si $A^*A = AA^*$, donde A^* denota la conjugada transpuesta.*

(a) Demuestre que:

$$\|A\|_2 = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i|,$$

donde λ_i son los autovalores de A. (Sugerencia: Use la descomposición espectral para matrices normales: $A = U\Lambda U^*$, donde $\Lambda = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ y U es unitaria.)

(b) Verifique que matrices hermitianas, unitarias y normales satisfacen $\|A\|_2 = \rho(A)$ (radio espectral).

(c) Muestre con un ejemplo que esto no es cierto para matrices no normales.

Ejercicio 9 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no singular. Demuestre que la distancia de A al conjunto de matrices singulares (en norma 2) es exactamente su menor valor singular σ_n. Es decir:*

$$\min_{B\ singular} \|A - B\|_2 = \sigma_n.$$

Ejercicio 10 (Descomposición polar desde SVD) *Toda matriz* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *admite una* ***descomposición polar*** $A = Q_{polar}S$*, donde:*

- $Q_{polar} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *tiene columnas ortonormales* ($Q_{polar}^T Q_{polar} = I_n$)*.*
- $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *es simétrica semidefinida positiva.*

Sea $A = U\Sigma V^T$ *la descomposición SVD de* A*. Demuestre que:*

$$Q_{polar} = UV^T, \quad S = V\Sigma V^T.$$

Ejercicio 11 (Problema de Procrustes ortogonal) *Dadas dos matrices* $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *representando conjuntos de datos (nubes de puntos), queremos encontrar la matriz ortogonal* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *óptima (geométricamente, la rotación óptima) que transforma* A *en* B *minimizando:*

$$\min_{Q^TQ=I} \|AQ - B\|_F,$$

donde $\|\cdot\|_F$ *es la norma de Frobenius.*

(a) Demuestre que minimizar $\|AQ - B\|_F^2$ *es equivalente a maximizar* $tr(Q^T A^T B)$*.*

(b) Sea $A^TB = U\Sigma V^T$ *la descomposición SVD de* A^TB*. Demuestre que la solución óptima es:*

$$Q = UV^T.$$

Ejercicio 12 (Pseudoinversa y solución de norma mínima) *Sea* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *con SVD* $A = U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T$*. Se define la* ***pseudoinversa de Moore-Penrose*** *como:*

$$A^+ = V\Sigma^+ U^T = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i} v_i u_i^T,$$

donde Σ^+ *es diagonal con entradas* $1/\sigma_i$ *en las primeras* r *posiciones.*

(a) Demuestre que $x = A^+b$ *resuelve el problema de cuadrados mínimos* $\min_x \|Ax - b\|_2$*.*

(b) Demuestre que entre todas las soluciones de cuadrados mínimos, $x = A^+b$ *tiene norma mínima:*

$$\|A^+b\|_2 = \min\{\|x\|_2 : \|Ax - b\|_2 = \min\}.$$

Ejercicio 13 (Condicionamiento y propagación del error vía SVD) *Sea* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *una matriz inversible y considere el sistema lineal* $Ax = b$*. Suponga que el lado derecho* b *está contaminado por un error* Δb*, de modo que la solución calculada* $x + \Delta x$ *satisface* $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$*.*

(a) Usando la descomposición SVD de $A = U\Sigma V^T$*, demuestre que:*

$$\|\Delta x\|_2 \leq \frac{1}{\sigma_n}\|\Delta b\|_2 \quad y \quad \|b\|_2 \leq \sigma_1 \|x\|_2.$$

(b) *Deduzca que el error relativo satisface la cota:*

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \kappa_2(A)\frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2},$$

donde $\kappa_2(A) = \sigma_1/\sigma_n$ es el número de condición.

(c) *Construya un ejemplo de 2×2 donde la igualdad se alcance.* ***Sugerencia****: Elija b alineado con el primer vector singular izquierdo u_1 (máxima amplificación) y Δb alineado con el último u_n (mínima atenuación en la inversa), o viceversa según convenga.*

(d) *Concluya que si $\kappa_2(A)$ es grande, pequeños errores en b pueden resultar en errores catastróficos en la solución x, independientemente del método de resolución del sistema lineal.*

Ejercicio 14 (Matrices de Householder) *Una matriz de Householder tiene la forma $H = I - 2vv^T$ donde $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\|_2 = 1$.*

(a) *Demuestre que H es ortogonal: $H^T H = I$.*

(b) *Demuestre que H es autoinversa: $H^2 = I$ (es decir, $H = H^{-1}$).*

(c) *Demuestre que H es simétrica: $H^T = H$.*

(d) *Interprete geométricamente H como una reflexión respecto al hiperplano ortogonal a v.*

(e) *Para un vector $x \in \mathbb{R}^n$ dado, construya v tal que $Hx = \alpha e_1$ donde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ y $\alpha = \pm\|x\|_2$.*

Sugerencia para (e)*: Tome $v = \frac{x-\alpha e_1}{\|x-\alpha e_1\|}$ con $\alpha = -sign(x_1)\|x\|_2$ para evitar cancelación.*

Ejercicio 15 (Factorización QR mediante reflexiones de Householder) *El algoritmo de Householder construye la factorización QR aplicando reflexiones sucesivas.*

(a) *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ con $m \geq n$. En el paso k, queremos anular las entradas debajo de la diagonal en la columna k.*

(b) *Construya la matriz de Householder H_k que anula las componentes $k+1, \ldots, m$ del vector formado por la columna k de la submatriz restante.*

(c) *Demuestre que después de n pasos:*

$$H_n \cdots H_2 H_1 A = R,$$

donde R es triangular superior.

(d) *Concluya que $A = QR$ con $Q = H_1 H_2 \cdots H_n$.*

(e) *Demuestre que el costo total es $O(2mn^2 - \frac{2n^3}{3})$ operaciones.*

Ejercicio 16 (Reducción bidiagonal para SVD) *El cálculo de la SVD de $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ se facilita si primero reducimos A a forma bidiagonal.*

(a) *Demuestre que mediante reflexiones de Householder aplicadas alternadamente por izquierda y derecha, se puede reducir A a la forma:*

$$A = UBV^T,$$

donde $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son ortogonales, y $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es bidiagonal superior:

$$B = \begin{pmatrix} d_1 & f_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & f_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & f_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

(b) *Explique cómo la SVD de A se obtiene de la SVD de B: si $B = \tilde{U}\Sigma\tilde{V}^T$, entonces $A = (U\tilde{U})\Sigma(\tilde{V}^T V^T)$.*

(c) *Demuestre que el costo de bidiagonalización es $O(2mn^2 - \frac{2n^3}{3})$ operaciones.*

Ejercicio 17 (Forma de de Hessenberg) *Una matriz $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ está en **forma de Hessenberg superior** si $h_{ij} = 0$ para $i > j+1$.*

(a) *Demuestre que el costo de calcular la descomposición QR de una matriz $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ en forma de Hessenberg es $O(n^2)$ operaciones. ¿Cuál es el costo para matrices densas generales? **Sugerencia**: Observe que en cada columna k solo es necesario anular una entrada (la subdiagonal). Una reflexión de Householder diseñada para esto modificará únicamente dos filas de la matriz, costando $O(n)$ operaciones.*

(b) *Demuestre que si A es simétrica y se reduce a forma de Hessenberg mediante transformaciones de semejanza ortogonal $H = Q^T AQ$, entonces H es tridiagonal. **Sugerencia**: Use que H es simétrica ($H = H^T$) y que la forma de Hessenberg superior implica $h_{ij} = 0$ para $i > j+1$.*

Métodos iterativos

Ejercicio 18 (Método de la potencia: análisis de convergencia) *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz diagonalizable con autovalores $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ y autovectores linealmente independientes $\{v_1, \ldots, v_n\}$. El método de la potencia construye la sucesión $x^{(k+1)} = \frac{Ax^{(k)}}{\|Ax^{(k)}\|}$.*

(a) *Si escribimos el vector inicial como $x^{(0)} = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$ con $c_1 \neq 0$, demuestre que:*

$$A^k x^{(0)} = \lambda_1^k \left(c_1v_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k v_j \right).$$

(b) *Deduzca que la dirección de $x^{(k)}$ converge a la dirección de v_1 (autovector dominante) cuando $k \to \infty$.*

(c) *Identifique el término que controla la velocidad de convergencia y exprese la tasa de convergencia en función de los autovalores.*

(d) *Demuestre que el cociente de Rayleigh* $\rho(x^{(k)}) = \frac{(x^{(k)})^T A x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2^2}$ *converge a* λ_1 *(asuma convergencia de* $x^{(k)}$ *a* v_1 *normalizado).*

Ejercicio 19 (Método de la potencia inversa) *El método de la potencia inversa con shift* σ *aplica el método de la potencia a la matriz* $M = (A - \sigma I)^{-1}$.

(a) *Demuestre que si* (λ, v) *es un par autovalor-autovector de* A, *con* $\lambda \neq \sigma$, *entonces* (μ, v) *con* $\mu = (\lambda - \sigma)^{-1}$ *es par autovalor-autovector de* M.

(b) *Suponga que* λ_k *es el autovalor de* A *más cercano a* σ, *tal que* $|\lambda_k - \sigma| < |\lambda_j - \sigma|$ *para todo* $j \neq k$. *Demuestre que el método converge al autovector* v_k.

(c) *Demuestre que la tasa de convergencia asintótica es lineal e igual a* $|\lambda_k - \sigma|/|\lambda_j - \sigma|$, *donde* λ_j *es el segundo autovalor más cercano a* σ.

(d) *Analice cómo elegir* σ *para maximizar la velocidad de convergencia y discuta las implicaciones numéricas de elegir* σ *muy cercano a* λ_k *(condicionamiento del sistema lineal vs velocidad de convergencia).*

Ejercicio 20 (Iteración de cociente de Rayleigh) *Este algoritmo es una variante de la potencia inversa donde el shift se actualiza en cada paso usando el cociente de Rayleigh:* $\sigma_k = \frac{(x^{(k)})^T A x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|_2^2}$.

(a) *Escriba los 3 pasos de una iteración genérica* $k \to k+1$:

   i. *Cálculo del shift:* $\sigma_k = \rho(x^{(k)})$.

   ii. *Resolución del sistema lineal:* $(A - \sigma_k I) y^{(k+1)} = x^{(k)}$.

   iii. *Normalización:* $x^{(k+1)} = y^{(k+1)}/\|y^{(k+1)}\|$.

(b) *Explique intuitivamente por qué la convergencia es superlineal.*

Ejercicio 21 (Método QR e Iteración Ortogonal) *El* ***método QR*** *utiliza la descomposición QR para calcular autovalores. Consiste en, dada una matriz* $A_1 = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *generar una sucesión de matrices* A_k *definida por:*

$$A_k = Q_k R_k \quad (QR), \qquad A_{k+1} = R_k Q_k.$$

(a) *Probar que todas las matrices* A_k *tienen los mismos autovalores.* ***Sugerencia****: Demuestre que* A_{k+1} *es semejante a* A_k.

(b) *Considere las matrices acumuladas* $\bar{Q}_k = Q_1 Q_2 \cdots Q_k$ *y* $\bar{R}_k = R_k R_{k-1} \cdots R_1$. *Demuestre por inducción que* $A^k = \bar{Q}_k \bar{R}_k$. *Es decir,* $\bar{Q}_k$ *proviene de la factorización QR de la potencia* A^k. ***Sugerencia****: Observe que* $A_{k+1} = Q_k^T A_k Q_k$ *y use la hipótesis inductiva.*

(c) *Demuestre que* $A^k e_1$ *es proporcional a la primera columna de* $\bar{Q}_k$ *(use que* $\bar{R}_k$ *es triangular superior). Concluya que la primera columna de la matriz ortogonal acumulada converge al autovector dominante de* A *(simulando el* ***método de la potencia*** *sobre* e_1*).*

Ejercicio 22 (Iteración QR y forma de Hessenberg) *Sea $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz en forma de Hessenberg superior, y sea $H = QR$ su descomposición QR.*

(a) Demuestre que Q es una matriz de Hessenberg superior. ***Sugerencia:*** *Escriba $Q = HR^{-1}$ y utilice que el producto de una matriz de Hessenberg superior por una triangular superior es de Hessenberg superior.*

(b) Demuestre que $H' = RQ$ también está en forma de Hessenberg superior.

(c) Concluya que si comenzamos con A en forma de Hessenberg, todas las iteraciones del algoritmo QR permanecen en forma de Hessenberg.

Ejercicio 23 (Algoritmo QR para raíces de polinomios) *Dado un polinomio mónico $p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, su* ***matriz compañera*** *es:*

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(a) Demuestre que el polinomio característico de C es:

$$\det(C - \lambda I) = (-1)^n p(\lambda).$$

Por lo tanto, los autovalores de C son precisamente las raíces de p.

(b) Demuestre que C está en forma de Hessenberg superior.

(c) Concluya que el algoritmo QR aplicado a C tiene costo $O(kn^2)$ donde k es el número de iteraciones requerido.

Ejercicio 24 (Convergencia de métodos iterativos estacionarios) *Un método iterativo estacionario para resolver $Ax = b$ tiene la forma $x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + c$, donde G es la matriz de iteración.*

(a) Demuestre que para cualquier matriz $G \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$G^k \to 0 \quad \text{si y solo si} \quad \rho(G) < 1,$$

donde $\rho(G) = \max_i |\lambda_i(G)|$ es el radio espectral. ***Sugerencia:*** *Use la forma de Jordan de G y que todas las normas matriciales son equivalentes.*

(b) Demuestre que para cualquier norma matricial:

$$\rho(G) \leq \|G\|.$$

(c) Concluya que si $\|G\| < 1$ para alguna norma, entonces el método converge.

Ejercicio 25 (Método de Jacobi) *El método de Jacobi para* $Ax = b$ *es* $x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L+U)x^{(k)})$, *donde* $A = D+L+U$ *(diagonal, triangular inferior estricta, triangular superior estricta).*

(a) Suponga que A *es* ***estrictamente diagonal dominante por filas****:*

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Demuestre que el método de Jacobi converge analizando los autovalores de la matriz de iteración G_J. ***Sugerencia****: Utilice el Teorema de los Círculos de Gershgorin aplicado a la matriz* $G_J = -D^{-1}(L+U)$. *Observe que los elementos diagonales de* G_J *son nulos y relacione los radios de los discos con la condición de diagonal dominancia.*

(b) Exhiba un ejemplo de matriz simétrica definida positiva para la cual Jacobi diverge.

Ejercicio 26 (Método de Gauss-Seidel) *El método de Gauss-Seidel para* $Ax = b$ *es* $(D+L)x^{(k+1)} = b - Ux^{(k)}$, *con matriz de iteración* $G_{GS} = -(D+L)^{-1}U$.

(a) Suponga que A *es estrictamente diagonal dominante por filas. Demuestre que el método de Gauss-Seidel converge analizando los autovalores de* G_{GS}. ***Sugerencia:*** *Use un argumento similar al de la demostración del Teorema de los Círculos de Gershgorin aplicado a* G_{GS}.