Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2026

Práctica N° 1: Fundamentos de la Computación Numérica

Máquinas de Turing y computabilidad

Ejercicio 1 *Diseñe una máquina de Turing que multiplique por 2 un número natural representado en unario (como cadena 1^n).*

Ejercicio 2 (Codificación y cardinalidad) *Utilizando el concepto de **codificación** de una máquina de Turing como una cadena $\langle M \rangle$ (y el de máquina de Turing Universal), demuestre que el conjunto de todas las máquinas de Turing es **enumerable** (existe una biyección con $\mathbb{N}$).*

Ejercicio 3 (Números computables y cardinalidad) *Un número real r es **computable** si existe una máquina de Turing que, dado $n \in \mathbb{N}$, produce los primeros n dígitos de la expansión decimal de r. Asumiendo la tesis de Church-Turing, esto es equivalente a decir que existe un algoritmo para calcular r con precisión arbitraria:*

(a) Demuestre que π y e son computables.

(b) Demuestre que el conjunto de números computables es enumerable.

Ejercicio 4 (Problema del halting) *El **problema del halting** pregunta: ¿existe un algoritmo que determine si una máquina de Turing M se detiene con entrada w?*

*Demuestre que **no existe tal algoritmo** usando un **argumento diagonal**:*

(a) Suponga que existe una máquina H que resuelve el problema: $H(\langle M \rangle, w)$ se detiene y responde "sí" si M se detiene con entrada w, y responde "no" en caso contrario.

(b) Construya una máquina D que recibe como entrada la codificación $\langle M \rangle$ de una máquina y hace lo siguiente:

- *Ejecuta $H(\langle M \rangle, \langle M \rangle)$ para determinar si M se detiene con entrada $\langle M \rangle$.*
- *Si H responde "sí", entonces D entra en un bucle infinito.*
- *Si H responde "no", entonces D se detiene.*

(c) Obtenga una contradicción analizando qué sucede cuando ejecutamos D con entrada $\langle D \rangle$: ¿se detiene $D(\langle D \rangle)$ o no?

Complejidad computacional

Ejercicio 5 (Notación asintótica: definiciones) *Utilizando las definiciones formales de O, Ω y Θ, determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.*

(a) Demuestre o refute: $3n^2 + 5n + 7 = \Theta(n^2)$.

(b) Demuestre o refute: $n^2 = O(n^2 \log n)$.

(c) Demuestre o refute: $2^n = \Omega(3^n)$.

Ejercicio 6 (Propiedades de la notación O) .

(a) Si $f(n) = O(g(n))$ *y* $g(n) = O(h(n))$, *¿es cierto que* $f(n) = O(h(n))$?

(b) Si $f_1(n) = O(g_1(n))$ *y* $f_2(n) = O(g_2(n))$, *demuestre que:* $f_1(n)+f_2(n) = O(\max\{g_1(n), g_2(n)\})$

(c) Si $f_1(n) = O(g_1(n))$ *y* $f_2(n) = O(g_2(n))$, *demuestre que:* $f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$

(d) Simplifique: $O(n^2) + O(n^3)$

(e) Simplifique: $O(n) \cdot O(\log n)$

Ejercicio 7 (Análisis de complejidad: bucles simples) *Para cada fragmento de código, determine su complejidad temporal en el peor caso:*

(a)
```
for i = 1 to n:
    print(i)
```

(b)
```
for i = 1 to n:
    for j = 1 to n:
        print(i, j)
```

(c)
```
for i = 1 to n:
    for j = 1 to i:
        print(i, j)
```

(d)
```
for i = 1 to n:
    for j = 1 to n:
        for k = 1 to n:
            print(i, j, k)
```

(e)
```
i = n
while i >= 1:
    print(i)
    i = i / 2
```

Ejercicio 8 (Análisis de complejidad: bucles anidados complejos) *Calcule la complejidad temporal:*

1.
```
for i = 1 to n:
    for j = i to n:
        for k = j to n:
            print(i, j, k)
```

2.
```
for i = 1 to n:
    j = 1
    while j < n:
        print(i, j)
        j = j * 2
```

3.
```
for i = n to 1 (decrementando):
    for j = 1 to i*i:
        print(i, j)
```

4.
```
for i = 1 to log(n):
    for j = 1 to 2^i:
        print(i, j)
```

Ejercicio 9 (Teorema maestro) *El teorema maestro resuelve recurrencias de la forma:*

$$T(n) = aT(n/b) + f(n).$$

(a) Enuncie los tres casos del teorema maestro.

(b) Aplique el teorema maestro para resolver:

- $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$
- $T(n) = 2T(n/2) + O(1)$
- $T(n) = 3T(n/4) + O(n \log n)$
- $T(n) = T(n/2) + O(n)$

(c) Para $T(n) = 2T(n/2) + O(n \log n)$, explique por qué no se puede aplicar directamente el teorema maestro y resuelva usando el método de sustitución.

Ejercicio 10 (Análisis de algoritmos recursivos) *Para cada algoritmo recursivo, calcule su complejidad usando relaciones de recurrencia:*

(a) ***Factorial****:*

```
def factorial(n):
    if n <= 1: return 1
    return n * factorial(n-1)
```

Plantee $T(n) = T(n-1) + O(1)$ y resuelva.

(b) ***Fibonacci ingenuo****:*

```
def fib(n):
    if n <= 1: return n
    return fib(n-1) + fib(n-2)
```

Plantee $T(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(1)$ *y demuestre que* $T(n) = \Omega(2^{n/2})$.

(c) ***Búsqueda binaria****:*

```
def binary_search(arr, x, low, high):
    if low > high: return -1
    mid = (low + high) / 2
    if arr[mid] == x: return mid
    if arr[mid] > x: return binary_search(arr, x, low, mid-1)
    return binary_search(arr, x, mid+1, high)
```

Plantee $T(n) = T(n/2) + O(1)$ *y resuelva.*

(d) ***Mergesort****:*

```
def mergesort(arr):
    if len(arr) <= 1: return arr
    mid = len(arr) / 2
    left = mergesort(arr[0:mid])
    right = mergesort(arr[mid:len(arr)])
    return merge(left, right)  # O(n) para merge
```

Plantee $T(n) = 2T(n/2) + O(n)$ *y resuelva usando el teorema maestro.*

Ejercicio 11 (Algoritmo de Karatsuba) *Las bibliotecas de enteros de precisión arbitraria (como Python's* `int`*, Java's* `BigInteger`*, o GMP) deben multiplicar eficientemente números de miles de dígitos. La multiplicación estándar requiere* $O(n^2)$ *operaciones para números de* n *dígitos.El* ***algoritmo de Karatsuba*** *(1960) usa divide-y-vencerás: divide cada número* x, y *de* n *dígitos en mitades de* $n/2$ *dígitos:*

$$x = x_1 \cdot B^{n/2} + x_0, \quad y = y_1 \cdot B^{n/2} + y_0$$

donde B *es la base (típicamente* $B = 2^{32}$ *o* 2^{64}*). En lugar de las 4 multiplicaciones recursivas del método ingenuo, calcula solo 3:*

$$p_1 = x_1 y_1, \quad p_2 = x_0 y_0, \quad p_3 = (x_1 + x_0)(y_1 + y_0)$$

y obtiene el producto como:

$$xy = p_1 \cdot B^n + (p_3 - p_1 - p_2) \cdot B^{n/2} + p_2.$$

Demuestre que la complejidad del algoritmo de Karatsuba es $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$.

Sugerencia: Plantee la recurrencia $T(n) = 3T(n/2) + O(n)$ *(justificando cada término) y aplique el teorema maestro.*

Aritmética de punto flotante

En los siguientes ejercicios trabajamos con un sistema de punto flotante **decimal** con $t = 3$ dígitos de mantisa y redondeo al más cercano. Los números se representan como $\pm d_1.d_2d_3 \times 10^e$ con $d_1 \neq 0$. Denotamos $\text{fl}(x)$ al representante de punto flotante de x.

Propiedad fundamental: Si x está en el rango representable, entonces

$$|\text{fl}(x) - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{e-t+1}$$

donde e es el exponente de x. Esto implica que el **error relativo** satisface:

$$\left|\frac{x - \text{fl}(x)}{x}\right| \leq \varepsilon_{\text{mach}} = \frac{1}{2} \times 10^{1-t}.$$

Ejercicio 12 (Operaciones básicas) *Con $t = 3$ dígitos:*

1. *Calcule $fl(1.23 + 4.56)$ y su error relativo.*
2. *Calcule $fl(1.23 \times 4.56)$ y su error relativo.*
3. *Calcule $fl(9.87/3.21)$ y su error relativo.*

Ejercicio 13 (Propagación del error) *Sea $fl(x) = x(1 + \delta_x)$ y $fl(y) = y(1 + \delta_y)$ con $|\delta_x|, |\delta_y| \leq \varepsilon_{mach}$.*

1. *Demuestre que $fl(fl(x) + fl(y)) \approx (x + y)(1 + \delta)$ con $|\delta| \leq \varepsilon_{mach}$ si no hay cancelación.*
2. *Demuestre que $fl(fl(x) \times fl(y)) \approx xy(1 + \delta)$ con $|\delta| \leq 2\varepsilon_{mach}$.*
3. *¿Por qué el error relativo puede ser arbitrariamente grande en la suma si $x + y \approx 0$?*

Ejercicio 14 (Cancelación catastrófica) *Con $t = 3$ dígitos:*

1. *Calcule $fl(1.23 - 1.22)$ y observe la pérdida de dígitos significativos.*
2. *Suponga $x = 1.234$ e $y = 1.224$ (no representables exactamente). Calcule $fl(x)$, $fl(y)$ y luego $fl(x) - fl(y)$. Compare con $x - y = 0.01$ exacto.*
3. *Explique por qué la cancelación amplifica los errores de redondeo previos.*

Ejercicio 15 (Raíces de la ecuación cuadrática) *Considere $x^2 - 200x + 1 = 0$ con $t = 3$ dígitos. Las raíces son $x = 100 \pm \sqrt{9999}$.*

1. *Calcule ambas raíces usando $x = \frac{200 \pm fl(\sqrt{9999})}{2}$. Use $fl(\sqrt{9999}) = 100$. Observe la cancelación en $x_2 = \frac{200-100}{2}$.*
2. *Calcule x_2 usando la fórmula alternativa $x_2 = \frac{1}{x_1}$ (aprovechando que $x_1 x_2 = 1$). Compare.*
3. *Alternativamente, use $x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2-4ac}}$ para calcular la raíz pequeña. Compare.*

Ejercicio 16 (Reformulación algebraica I: conjugado) *Con* $t = 3$ *dígitos, calcule* $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ *para* $x = 100$*.*

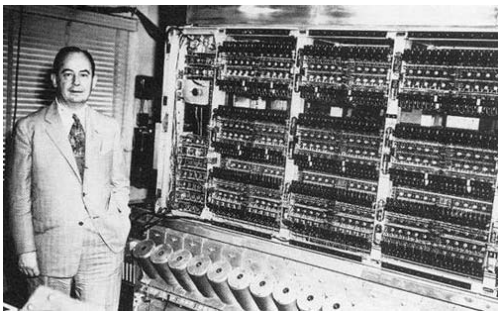
1. *Método directo: calcule* $fl(\sqrt{101}) - fl(\sqrt{100})$*. Use* $fl(\sqrt{101}) = 10.0$*.*
2. *Reformule usando el conjugado:* $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$*. Calcule con esta fórmula.*
3. *Compare los errores relativos (valor exacto:* ≈ 0.04988*).*

Ejercicio 17 (Reformulación algebraica II: Taylor) *Con* $t = 3$ *dígitos, calcule* $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ *para* $x = 0.1$*.*

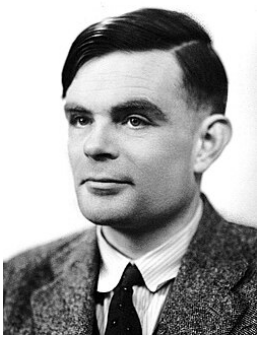
1. *Método directo: use* $fl(\cos(0.1)) = 0.995$ *y calcule* $fl\left(\frac{1-0.995}{0.01}\right)$*.*
2. *Reformule usando Taylor:* $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + O(x^4)$*. Calcule para* $x = 0.1$*.*
3. *Compare con el valor exacto* ≈ 0.4996*.*

Ejercicio 18 (Orden de operaciones) *Con* $t = 3$ *dígitos, considere sumar* 0.001 *al número* 1.00 *repetidamente 1000 veces.*

1. *Calcule* $fl(1.00 + 0.001)$*. ¿Qué observa?*
2. *¿Qué resultado se obtiene después de 1000 iteraciones?*
3. *Proponga una forma más precisa de calcular* $1.00 + 1000 \times 0.001$*.*



John von Neumann
Budapest 1903 - Washington 1957



Alan Turing
Londres 1912 - Cheshire 1954