

# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Primer Cuatrimestre 2026

## Práctica N° 4: Teoría de Aproximación

**Ejercicio 1** Muestre que el conjunto de funciones

$$B_N = \{1, \sin(x), \cos(x), \dots, \sin(Nx), \cos(Nx)\}$$

es ortogonal con respecto al producto interno definido por:

$$(f, g)_2 = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \quad (1)$$

y calcule la norma de cada función en  $B_N$  asociada a  $(\cdot, \cdot)_2$  que se denotará por  $\|\cdot\|_2$ .

**Ejercicio 2** Sea  $f$  una función de cuadrado integrable en  $[0, 2\pi]$ . Definimos los coeficientes de Fourier de  $f$  como

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k \geq 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k \geq 1$$

y la suma parcial de Fourier como:

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Demuestre la propiedad de mejor aproximación en media cuadrática: de todos los elementos del subespacio generado por  $B_N$ ,  $S_N(f)$  es el que minimiza el error en norma  $\|\cdot\|_2$ . Es decir:

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - p\|_2 \quad \text{para todo } p \in \langle B_N \rangle.$$

**Ejercicio 3** (Forma Compleja de la Serie de Fourier) Considere la serie de Fourier en su forma compleja:

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx}$$

donde los coeficientes están dados por  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ . Muestre que esta representación es equivalente a la forma trigonométrica real obtenida en el Ejercicio 2, estableciendo las siguientes relaciones entre los coeficientes para  $k \geq 1$ :

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

**Ejercicio 4** Se define, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , el espacio de funciones suaves y periódicas como:

$$C_{per}^n([0, 2\pi]) = \{f \in C^n([0, 2\pi]) : f^{(p)}(0) = f^{(p)}(2\pi) \text{ para todo } 0 \leq p \leq n-1\}$$

Muestre que, dada  $f \in C_{per}^n([0, 2\pi])$ , sus coeficientes de Fourier decaen con orden  $n$ : es decir, muestre que  $|c_k| \leq Ck^{-n}$  para una cierta constante  $C$  independiente de  $k$ . Sugerencia: Integre por partes.

**Ejercicio 5** (Cálculo de Coeficientes y Decaimiento)

- Calcule los coeficientes de Fourier (en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ ) de la función signo:  $f(x) = \text{sgn}(x)$  (onda cuadrada).
- Calcule los coeficientes de Fourier de la onda triangular:  $g(x) = |x|$  en  $[-\pi, \pi]$ .
- Analice la tasa de decaimiento de los coeficientes obtenidos cuando  $k \rightarrow \infty$ . Relacione este resultado con la suavidad de las funciones y con el resultado del ejercicio anterior.

**Ejercicio 6** (Convergencia Uniforme) Demuestre que si  $f \in C_{per}^1([0, 2\pi])$ , la serie de Fourier de  $f$  converge uniformemente a  $f$  en todo el intervalo.

*Sugerencia:* Utilice el criterio M de Weierstrass, mostrando que  $\sum |c_k| < \infty$ . Para ello, relacione los coeficientes de  $f$  con los de la derivada  $f'$  (que es de cuadrado integrable) integrando por partes, y luego aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz combinada con la desigualdad de Bessel.

**Ejercicio 7** (Exactitud de Trapecios para Trigonómicas) Demuestre que la regla de los trapecios compuesta con  $N$  nodos en  $[0, 2\pi]$ , dada por:

$$Q_N(g) = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j), \quad \text{donde } x_j = \frac{2\pi j}{N},$$

integra exactamente a las funciones base  $g(x) = e^{imx}$  para todo entero  $m$  que no sea un múltiplo no nulo de  $N$ . ¿Qué ocurre si  $m$  es un múltiplo de  $N$ ?

**Ejercicio 8** (De Fourier a la DFT) Considere los coeficientes de Fourier en forma compleja  $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx$ .

- Aproxime la integral utilizando la regla de los trapecios compuesta con  $N$  puntos  $Q_N$ . Llame  $\tilde{c}_k$  al resultado.
- Muestre que se obtiene la expresión:

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-i \frac{2\pi k j}{N}}$$

Esta es la definición de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de la secuencia de valores muestreados  $f(x_j)$ , salvo factores de normalización.

**Ejercicio 9** Los polinomios de Chebyshev de primera especie se definen en el intervalo  $[-1, 1]$  mediante la relación  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ . Demuestre que son ortogonales con el producto escalar

$$(f, g)_w = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Sugerencia: utilice el cambio de variables  $x = \cos(t)$  y la ortogonalidad de las funciones trigonométricas (Ejercicio 1).

**Ejercicio 10** Muestre que el coeficiente  $k$ -ésimo de una serie de Chebyshev de una función  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  coincide con el coeficiente de Fourier  $b_k$  de la función  $f(\cos(\theta))$  para  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

**Ejercicio 11** (Mejor aproximación en  $L^2$ ) Consideremos el espacio de funciones de cuadrado integrable en  $[-1, 1]$  con el producto interno estándar ( $w(x) = 1$ ). Queremos encontrar el polinomio  $p(x)$  de grado a lo sumo 1 que mejor aproxima a la función  $f(x) = e^x$  en el sentido de los cuadrados mínimos (norma  $L^2$ ).

- Recuerde que los primeros polinomios de Legendre son  $P_0(x) = 1$  y  $P_1(x) = x$ . Verifique que son ortogonales en  $[-1, 1]$ .
- Calcule las normas  $\|P_0\|^2$  y  $\|P_1\|^2$ .
- La proyección ortogonal de  $f$  sobre el subespacio generado por  $\{P_0, P_1\}$  está dada por:

$$p(x) = \frac{\langle f, P_0 \rangle}{\|P_0\|^2} P_0(x) + \frac{\langle f, P_1 \rangle}{\|P_1\|^2} P_1(x).$$

Calcule explícitamente este polinomio para  $f(x) = e^x$ .

- Compare cualitativamente este polinomio con:

- El polinomio de Taylor de grado 1 centrado en  $x = 0$ .
- El polinomio interpolador de Lagrange en los nodos  $-1$  y  $1$ .

**Ejercicio 12** (Construcción de Polinomios Ortogonales) Se desea construir una familia de polinomios  $\{q_0, q_1, q_2\}$  ortogonales en el intervalo  $[0, 1]$  respecto al peso  $w(x) = 1$ .

- Utilice el proceso de Gram-Schmidt comenzando con la base canónica  $\{1, x, x^2\}$  para obtener  $q_0, q_1, q_2$ .
- Verifique que las raíces de  $q_2(x)$  son reales, distintas y están dentro del intervalo  $(0, 1)$ .

**Ejercicio 13** (Cuadratura Gaussiana) Queremos aproximar la integral  $I(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx$  mediante una regla de cuadratura de 2 puntos:

$$Q(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

- Sabemos que la cuadratura de Gauss con  $n$  nodos es exacta para polinomios de grado  $2n - 1$ . Para  $n = 2$ , esto significa que debe ser exacta para polinomios hasta grado 3.

2. Utilice las raíces del polinomio de Legendre  $P_2(x)$  (hallado/deducido en ejercicios anteriores) como nodos  $x_1, x_2$ .
3. Determine los pesos  $w_1, w_2$  imponiendo que la regla sea exacta para  $f(x) = 1$  y  $f(x) = x$  (o usando la fórmula de interpolación de Lagrange para los pesos).
4. Verifique que la regla obtenida integra exactamente a  $x^2$  y  $x^3$ .
5. Use esta regla para aproximar  $\int_{-1}^1 e^x dx$  y compare con el valor exacto.

**Ejercicio 14** (Interpolación vs Proyección) Los coeficientes de la serie de Chebyshev de  $f$  están dados por las integrales  $c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 f(x) T_k(x) (1-x^2)^{-1/2} dx$  (con  $c_0$  dividido por 2). Considere la fórmula de cuadratura de Gauss-Chebyshev con  $M$  puntos, que es exacta para polinomios de grado  $2M-1$ :

$$\int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \frac{\pi}{M} \sum_{j=1}^M g(x_j),$$

donde  $x_j$  son las raíces de  $T_M(x)$ .

- (a) Aproxime la integral de los coeficientes  $c_k$  usando esta regla de cuadratura con  $M = N+1$  puntos.
- (b) Muestre que los coeficientes aproximados  $\tilde{c}_k$  coinciden con los coeficientes del polinomio interpolador de  $f$  en los nodos de Chebyshev  $x_0, \dots, x_N$ , expresado en la base  $\{T_0, \dots, T_N\}$ .
- (c) Concluya que calcular la interpolación en nodos de Chebyshev es equivalente a discretizar la proyección ortogonal mediante cuadratura Gaussiana.

**Ejercicio 15 (Constante de Lebesgue)** La constante de Lebesgue  $\Lambda_n$  mide qué tan bien condicionado está el problema de interpolación.

- (a) Defina la constante de Lebesgue:

$$\Lambda_n = \max_{x \in [a,b]} \sum_{k=0}^n |\ell_k(x)|.$$

- (b) Demuestre que el error de interpolación satisface:

$$\|f - p_n\|_{\infty} \leq (1 + \Lambda_n) \|f - p_n^*\|_{\infty},$$

donde  $p_n^*$  es el mejor polinomio de aproximación uniforme de grado  $n$ .

- (c) Investigue y enuncie los valores de  $\Lambda_n$  para:

- Nodos equiespaciados:  $\Lambda_n = O(2^n/n)$  (crece exponencialmente).
- Nodos de Chebyshev:  $\Lambda_n = O(\log n)$  (crece logarítmicamente).

- (d) Explique por qué una constante de Lebesgue grande indica que la interpolación puede amplificar errores en los datos.

**Ejercicio 16 (Fenómeno de Runge)** *El fenómeno de Runge muestra que aumentar el grado de interpolación con nodos equiespaciados puede hacer diverger el polinomio interpolante.*

- (a) Considere la función de Runge  $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$  en  $[-1, 1]$ .
- (b) Explique por qué esta función, siendo analítica en  $\mathbb{R}$ , presenta problemas de convergencia en interpolación polinomial. **Sugerencia:** Considere los polos complejos  $x = \pm i/5$  y su proximidad al intervalo real.
- (c) Para nodos equiespaciados  $x_k = -1 + 2k/n$  en  $[-1, 1]$ , el producto:

$$\prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

crece exponencialmente cuando  $x$  se acerca a los extremos  $\pm 1$ . Estime el orden de magnitud de este producto cerca de  $x = 1$ .

- (d) Usando el teorema del error de interpolación, explique por qué aunque  $f$  sea suave, el error de interpolación puede crecer con  $n$  para nodos equiespaciados.
- (e) ¿Por qué el fenómeno de Runge no ocurre con nodos de Chebyshev?

**Ejercicio 17 (Nodos de Chebyshev)** *Los nodos de Chebyshev resuelven el fenómeno de Runge al minimizar el error de interpolación.*

- (a) Los nodos de Chebyshev en  $[-1, 1]$  se definen como:

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0, \dots, n.$$

Calcule los nodos de Chebyshev para  $n = 4$  (5 nodos).

- (b) Verifique que estos nodos son las raíces del polinomio de Chebyshev  $T_{n+1}(x)$ .
- (c) Observe que los nodos se acumulan cerca de los extremos  $x = \pm 1$  y están más espaciados en el centro. ¿Por qué esta distribución es óptima?
- (d) Demuestre que con nodos de Chebyshev:

$$\left| \prod_{k=0}^n (x - x_k) \right| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

**Sugerencia:** Use que  $\prod_{k=0}^n (x - x_k) = \frac{1}{2^n} T_{n+1}(x)$  y que  $|T_{n+1}(x)| \leq 1$  en  $[-1, 1]$ .

- (e) Explique por qué esta cota garantiza convergencia para funciones suficientemente suaves, a diferencia de nodos equiespaciados.

**Ejercicio 18 (Error de interpolación con nodos de Chebyshev)** (a) Enuncie el teorema: Si  $f \in C^{n+1}[-1, 1]$  y  $p_n$  interpola  $f$  en los nodos de Chebyshev, entonces:

$$\|f - p_n\|_{\infty} \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{2^n (n+1)!}.$$

- (b) Compare esta cota con la de nodos equiespaciados donde  $\prod_{k=0}^n (x - x_k)$  puede crecer exponencialmente.
- (c) Para  $f(x) = \sin(x)$  en  $[-1, 1]$ , estime el error máximo de interpolación con  $n = 10$  nodos de Chebyshev.
- (d) ¿Para qué valor de  $n$  el error es menor que  $10^{-10}$ ?
- (e) Investigue sobre convergencia para funciones analíticas: la interpolación de Chebyshev converge geoméricamente (exponencialmente) para funciones analíticas.