
ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Primer Cuatrimestre 2026

Práctica N° 5: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Discretización de derivadas mediante diferencias finitas

Ejercicio 1 (Análisis de error en aproximaciones de derivadas) Para las siguientes discretizaciones de la derivada primera, halle una expresión para el error local y señale las hipótesis de suavidad necesarias sobre la función u para que el orden de precisión sea el indicado en cada caso.

$$u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \quad (\text{diferencia forward}) \quad O(h)$$

$$u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h} \quad (\text{diferencia backward}) \quad O(h)$$

$$u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} \quad (\text{diferencia centrada}) \quad O(h^2)$$

Repita el análisis para la discretización con diferencias centradas de la derivada segunda:

$$u''(x) \sim \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}, \quad \text{de orden } O(h^2).$$

¿Qué hipótesis de suavidad es necesaria en este último caso?

Ejercicio 2 (Diferencias finitas de orden alto) Las siguientes son versiones de orden 2 de las diferencias forward o backward, que utilizan nodos a un solo lado de x .

1. Verifique que la siguiente fórmula para la derivada primera tiene orden $O(h^2)$:

$$u'(x) \sim -\frac{1}{h} \left(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h) \right).$$

2. Halle una fórmula de aproximación para la derivada segunda $u''(x)$ que utilice los valores de u en x , $x+h$ y $x+2h$. ¿Cuál es el orden que resulta en este caso?

Problemas de valores iniciales

Ejercicio 3 Dada una constante $a > 0$, considere el problema de valores iniciales para $t > 0$:

$$y'(t) = -ay(t), \quad y(0) = 1.$$

Para cada paso temporal Δt fijo se consideran las discretizaciones:

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} = -ay^n \quad \text{Euler explícito}$$

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} = -ay^{n+1} \quad \text{Euler implícito}$$

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} = -a \left(\frac{1}{2}y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n \right) \quad \text{Adams-Moulton de 1 paso}$$

Demuestre que:

- (a) La solución exacta verifica $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.
- (b) Para Euler explícito se tiene $|y_n| \rightarrow 0$ si $\Delta t < 2/a$, e $|y^n| \rightarrow \infty$ si $\Delta t > 2/a$.
- (c) Para Euler implícito y el método de Adams-Moulton de 1 paso, $y_n \rightarrow 0$ para todo h .
- (d) Probar que todos los métodos son consistentes y por lo tanto convergentes.

Ejercicio 4 Dada la ecuación $y' = f(t, y)$:

- (a) Deduzca el método de Taylor de orden 2.
- (b) Considere ahora la familia de métodos de Runge-Kutta de 2 etapas (RK2):

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{aligned}$$

Determine los coeficientes α, β, b_1, b_2 para que el método coincida con el desarrollo de Taylor de orden 2.

- (c) Demuestre que el método resultante es consistente de orden 2.

Ejercicio 5 (Problema stiff) Considere el PVI $y' = \lambda(y - \cos(t)) - \sin(t)$ con $y(0) = 1$ y $\lambda > 0$.

- (a) Compruebe que la solución exacta es $y(t) = \cos(t)$.
- (b) Identifique la constante de Lipschitz de la función $f(t, y) = \lambda(y - \cos(t)) - \sin(t)$.
- (c) Utilizando la cota de error para el método de Euler explícito:

$$|e_n| \leq \frac{Mh}{2L} (e^{L(t_n-t_0)} - 1),$$

discuta qué sucede con la fiabilidad de la cota cuando $L \rightarrow \infty$.

- (d) ¿Significa una L grande que el método no converge? Justifique.

Nota: Aquí se nota que aunque el método sea convergente ($h \rightarrow 0$), para un h práctico, el error puede ser enorme si L es grande.

Ejercicio 6 Demuestre que al aplicar el método de Euler explícito a la ecuación $y' = \sqrt{y}$ con $y(0) = 0$ el método resultante es consistente pero no es estable.

Ejercicio 7 (Condición de la raíz para estabilidad) Dada la ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$ con b y c en \mathbb{R} , demuestre que las raíces están en el círculo unitario si y solo si $|c| \leq 1$ y $|b| \leq 1 + c$. **Nota:** Este resultado facilita el análisis de estabilidad de esquemas multipaso de 2 pasos.

Ejercicio 8 (Método de Adams-Bashforth) Analizar la convergencia y calcular el orden del siguiente método de Adams-Bashforth:

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

Ejercicio 9 (Método BDF de orden 2) Los métodos BDF (Backward Differentiation Formulas) se construyen aproximando la derivada $y'(t_{n+1})$ mediante un polinomio interpolador que pasa por y_{n+1} y pasos anteriores.

1. Usando el resultado del Ejercicio 2 (adaptando la fórmula de diferencias finitas hacia atrás), deduzca la fórmula del método BDF de 2 pasos:

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

2. Muestre que el método es implícito y tiene orden de consistencia 2.
3. Analice la 0-estabilidad del método hallando las raíces del polinomio característico asociado.
4. (Opcional) Determine la región de estabilidad absoluta del método.

Ejercicio 10 (Oscilador armónico discreto) Considere el problema:

$$y''(t) = -ay(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad 0 < t < T_f,$$

y la discretización explícita de 2 pasos:

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{(\Delta t)^2} = -ay^n.$$

Muestre que $|y^n| \rightarrow \infty$ si $\Delta t > 2/\sqrt{a}$, y que en caso contrario $|y^n|$ permanece acotado. **Sugerencia:** Reemplace $y_n = \lambda^n$ y resuelva una ecuación de recurrencia para λ .

Problemas de valores de contorno

Ejercicio 11 Dado $\sigma > 0$, se desea resolver numéricamente la ecuación de Reacción-Difusión (lineal) en una dimensión con condiciones de borde de tipo Dirichlet:

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) + \sigma u(x) = f(x), & \text{para } x \in (0, 1) \\ u(0) = \alpha \\ u(1) = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

Para ello se considera la malla uniforme $\{x_j = hj, j = 0, 1, 2, \dots, m+1\}$ con $h = 1/(m+1)$. Para los puntos de la malla $x_j \in (0, 1)$, el esquema de diferencias centradas para la derivada segunda (Ejercicio 1) conduce al sistema de ecuaciones:

$$-\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + \sigma u_j = f(x_j) \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Utilizando las condiciones de borde $u_0 = \alpha$, $u_{m+1} = \beta$ se obtiene el sistema lineal $A^h u^h = F^h$, donde $u^h = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ es el vector de incógnitas.

- (a) Escriba explícitamente la matriz A^h y el vector F^h . Verifique que A^h es simétrica y tridiagonal.
- (b) Se define el error de truncamiento local $\tau^h \in \mathbb{R}^m$ como el residuo al insertar la solución exacta $u(x)$ en el esquema numérico:

$$\tau_j^h = \left(-\frac{u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1}))}{h^2} + \sigma u(x_j) \right) - f(x_j).$$

Demuestre que si $u \in C^4[0, 1]$, entonces existe $C > 0$ tal que $\|\tau^h\|_\infty \leq Ch^2$.

- (c) Demuestre que la matriz A^h es estrictamente diagonal dominante (por filas) si $\sigma > 0$.
- (d) Utilice el teorema de los círculos de Gershgorin para mostrar que los autovalores de A^h son positivos y están acotados inferiormente por σ . Concluya que $\|(A^h)^{-1}\|_\infty \leq 1/\sigma$.
- (e) Combinando los resultados anteriores, demuestre la convergencia del método, es decir, que el error global $E_j^h = u(x_j) - u_j^h$ satisface $\|E^h\|_\infty \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

Ejercicio 12 (Condiciones de Neumann) Se desea resolver numéricamente la ecuación de Poisson en una dimensión con condiciones de Neumann en $x = 0$ y de Dirichlet en $x = 1$:

$$\begin{cases} u_{xx}(x) = f(x), & \text{para } x \in (0, 1) \\ u_x(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Obtenga matrices para el problema discreto, si para la condición de Neumann $u_x(0) = 0$ se realizan las siguientes aproximaciones:

1. $u_1 - u_0 = 0$ (diferencias forward)
2. $\frac{3}{2}u_0 - 2u_1 + \frac{1}{2}u_2 = 0$ (diferencias forward de orden 2 del Ejercicio 2)

¿Cuál es el orden del error de truncamiento en el interior y en el punto $x = 0$ en cada caso?

Ejercicio 13 (Estabilidad por análisis de Fourier) Dado $\sigma > 0$, considere la ecuación de reacción-difusión con condiciones periódicas:

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u(x) = f(x), & \text{para } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1), & u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

Se toma la malla uniforme $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, con $h = 1/N$.

(a) Aplicando diferencias centradas para $u''(x_j)$, muestre que el esquema numérico equivale a

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} + \sigma u_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1,$$

con índices tomados módulo N (es decir, $u_{-1} = u_{N-1}$ y $u_N = u_0$).

(b) Para hallar los autovalores de la matriz A_N del sistema resultante $A_N u^h = F^h$, proponga el modo de Fourier discreto $w_j^{(k)} = e^{2\pi i k j / N}$ como autovector. Sustituyendo en la ecuación homogénea y usando la identidad $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$, demuestre que $w^{(k)}$ es autovector con autovalor

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) + \sigma, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

(c) Dado que A_N es simétrica real, $\|A_N^{-1}\|_2 = 1/\lambda_{\min}$. Muestre que $\lambda_{\min} = \sigma$ y concluya que existe $C > 0$ independiente de h tal que $\|A_N^{-1}\|_2 \leq C$, lo que prueba la estabilidad.

Ejercicio 14 (Ecuación de advección-reacción-difusión periódica) Dados $b \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, considere la ecuación de advección-reacción-difusión con condiciones periódicas:

$$\begin{cases} -u''(x) + b u'(x) + \sigma u(x) = f(x), & \text{para } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

Se toma la malla uniforme $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, con $h = 1/N$.

(a) Utilizando diferencias centradas para $u''(x_j)$ y $u'(x_j)$ (Ejercicio 1), muestre que el esquema numérico se escribe como $A_N u^h = F^h$, donde la ecuación para el nodo j -ésimo es

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} + b \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + \sigma u_j = f(x_j), \quad j = 0, \dots, N-1,$$

con índices módulo N .

(b) Aplique el método de Fourier del Ejercicio 13. Usando además la identidad $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin \theta$, demuestre que $w^{(k)}$ es autovector de A_N con autovalor

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) + \frac{ib}{h} \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + \sigma, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Observe que si $b \neq 0$, los autovalores son complejos (la matriz A_N no es simétrica).

(c) Muestre que $|\lambda_k| \geq \operatorname{Re}(\lambda_k) \geq \sigma > 0$ para todo k . Muestre que la matriz A_N es normal y que por lo tanto de modo que $\|A_N^{-1}\|_2 = 1/\min_k |\lambda_k|$. Concluya que existe $C > 0$ independiente de h tal que $\|A_N^{-1}\|_2 \leq C$.

Ejercicio 15 (Ecuación de Helmholtz periódica) Dado $\omega > 0$, considere la ecuación de Helmholtz con condiciones periódicas:

$$\begin{cases} -u''(x) - \omega^2 u(x) = f(x), & \text{para } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

Aplique el método de Fourier del Ejercicio 13 a la discretización por diferencias centradas para demostrar que los autovalores son

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) - \omega^2, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

- (a) Muestre que la matriz no es definida positiva.
- (b) Muestre que la matriz es singular si y solo si ω^2 coincide con algún autovalor del laplaciano discreto periódico $\frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right)$.
- (c) Demuestre que si $\omega \neq 2n\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (es decir, ω no es autovalor de $-u''$ con condiciones periódicas en $[0, 1]$), entonces existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que $\|A_N^{-1}\|_2 \leq C$.

Ejercicio 16 (Estabilidad en norma 2: caso Dirichlet) Considere la discretización por diferencias centradas de $-u''(x) = f(x)$ en $(0, 1)$ con condiciones de Dirichlet $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$, sobre la malla $x_j = jh$, $h = 1/(m+1)$. El sistema resultante es $A^h u^h = F^h$ con $A^h \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

El problema de autovalores $A^h v = \lambda v$ conduce, para $j = 1, \dots, m$, a la ecuación

$$-v_{j-1} + 2v_j - v_{j+1} = \lambda h^2 v_j,$$

con condiciones de borde $v_0 = 0$ y $v_{m+1} = 0$.

- (a) Proponga el ansatz $v_j = r^j$ y obtenga la ecuación característica $r^2 - \mu r + 1 = 0$ con $\mu = 2 - \lambda h^2$. Deduzca que la solución general es $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$ con $\cos \theta = \mu/2$.
- (b) Usando $v_0 = 0$, muestre que $v_j = C \sin(j\theta)$. Imponga $v_{m+1} = 0$ para obtener $\theta_k = \frac{k\pi}{m+1}$, $k = 1, \dots, m$, y concluya que los autovalores son

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi h}{2}\right), \quad k = 1, \dots, m.$$

- (c) Muestre que $\lambda_{\min} = \lambda_1 \rightarrow \pi^2$ cuando $h \rightarrow 0$. Concluya que existe $C > 0$ independiente de h tal que $\|(A^h)^{-1}\|_2 \leq C$, lo que prueba la estabilidad en norma 2.

Ejercicio 17 (Partícula cuántica en un anillo: autovalores discretos vs. continuos)

La ecuación de Schrödinger estacionaria para una partícula libre en un anillo de longitud $L = 1$ (con $\hbar = 2m = 1$) es el problema de autovalores con condiciones periódicas:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), & \text{para } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1), \end{cases}$$

donde los autovalores λ representan los niveles de energía del sistema.

- (a) Resuelva el problema continuo y muestre que los autovalores son $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, con autofunciones $u(x) = e^{\pm 2\pi i k x}$ (multiplicidad 2 para $k \geq 1$).
- (b) Usando los resultados del Ejercicio 13 y la expansión en Taylor de $\sin(\xi)$, demuestre que para cada k fijo,

$$\lambda_k^h = (2\pi k)^2 - \frac{(2\pi k)^4}{12} h^2 + O(h^4) \quad \text{cuando } h \rightarrow 0.$$

Es decir, la aproximación de cada autovalor individual es de orden 2.

- (c) ¿Qué sucede con la calidad de la aproximación para k grande (modos de alta frecuencia)? Muestre que $\lambda_k^h \leq 4/h^2$ para todo k , mientras que λ_k crece sin cota. Concluya que la discretización solo puede aproximar bien los primeros $O(N)$ autovalores.