Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2026

Práctica N° 5: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Discretización de derivadas mediante diferencias finitas

Ejercicio 1 (Análisis de error en aproximaciones de derivadas) *Para las siguientes discretizaciones de la derivada primera, halle una expresión para el error local y señale las hipótesis de suavidad necesarias sobre la función u para que el orden de precisión sea el indicado en cada caso.*

$$u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \qquad \text{(diferencia forward)} \quad O(h)$$

$$u'(x) \sim \frac{u(x)-u(x-h)}{h} \qquad \text{(diferencia backward)} \quad O(h)$$

$$u'(x) \sim \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} \qquad \text{(diferencia centrada)} \quad O(h^2)$$

Repita el análisis para la discretización con diferencias centradas de la derivada segunda:

$$u''(x) \sim \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}, \qquad \text{de orden } O(h^2).$$

¿Qué hipótesis de suavidad es necesaria en este último caso?

Ejercicio 2 (Diferencias finitas de orden alto) *Las siguientes son versiones de orden 2 de las diferencias forward o backward, que utilizan nodos a un solo lado de x.*

1. *Verifique que la siguiente fórmula para la derivada primera tiene orden $O(h^2)$:*

$$u'(x) \sim -\frac{1}{h}\left(\frac{3}{2}u(x) - 2u(x+h) + \frac{1}{2}u(x+2h)\right).$$

2. *Halle una fórmula de aproximación para la derivada segunda $u''(x)$ que utilice los valores de u en x, $x+h$ y $x+2h$. ¿Cuál es el orden que resulta en este caso?*

Problemas de valores iniciales

Ejercicio 3 *Dada una constante $a > 0$, considere el problema de valores iniciales para $t > 0$:*

$$y'(t) = -ay(t), \qquad y(0) = 1.$$

Para cada paso temporal Δt fijo se consideran las discretizaciones:

$$\begin{aligned} \tfrac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} &= -ay^n && \textit{Euler explícito} \\ \tfrac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} &= -ay^{n+1} && \textit{Euler implícito} \\ \tfrac{y^{n+1}-y^n}{\Delta t} &= -a\left(\tfrac{1}{2}y^{n+1}+\tfrac{1}{2}y^n\right) && \textit{Adams-Moulton de 1 paso} \end{aligned}$$

Demuestre que:

(a) *La solución exacta verifica $y(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$.*

(b) *Para Euler explícito se tiene $|y_n| \to 0$ si $\Delta t < 2/a$, e $|y^n| \to \infty$ si $\Delta t > 2/a$.*

(c) *Para Euler implícito y el método de Adams-Moulton de 1 paso, $y_n \to 0$ para todo h.*

(d) *Probar que todos los métodos son consistentes y por lo tanto convergentes.*

Ejercicio 4 *Dada la ecuación $y' = f(t, y)$:*

(a) *Deduzca el método de Taylor de orden 2.*

(b) *Considere ahora la familia de métodos de Runge-Kutta de 2 etapas (RK2):*

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1) \\ y_{n+1} &= y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2) \end{aligned}$$

Determine los coeficientes α, β, b_1, b_2 para que el método coincida con el desarrollo de Taylor de orden 2.

(c) *Demuestre que el método resultante es consistente de orden 2.*

Ejercicio 5 (Problema stiff) *Considere el PVI $y' = \lambda(y - \cos(t)) - \sin(t)$ con $y(0) = 1$ y $\lambda > 0$.*

(a) *Compruebe que la solución exacta es $y(t) = \cos(t)$.*

(b) *Identifique la constante de Lipschitz de la función $f(t, y) = \lambda(y - \cos(t)) - \sin(t)$.*

(c) *Utilizando la cota de error para el método de Euler explícito:*

$$|e_n| \leq \frac{Mh}{2L}(e^{L(t_n - t_0)} - 1),$$

discuta qué sucede con la fiabilidad de la cota cuando $L \to \infty$.

(d) *¿Significa una L grande que el método no converge? Justifique.*

***Nota**: Aquí se nota que aunque el método sea convergente ($h \to 0$), para un h práctico, el error puede ser enorme si L es grande.*

Ejercicio 6 Demuestre que al aplicar el método de Euler explícito a la ecuación $y' = \sqrt{y}$ con $y(0) = 0$ el método resultante es consistente pero no es estable.

Ejercicio 7 (Condición de la raíz para estabilidad) *Dada la ecuación cuadrática $z^2 + bz + c = 0$ con b y c en $\mathbb{R}$, demuestre que las raíces están en el círculo unitario si y solo si $|c| \leq 1$ y $|b| \leq 1 + c$.* ***Nota:*** *Este resultado facilita el análisis de estabilidad de esquemas multipaso de 2 pasos.*

Ejercicio 8 (Método de Adams-Bashforth) *Analizar la convergencia y calcular el órden del siguiente método de Adams-Bashforth:*

$$y_{n+3} - y_{n+2} = \frac{h}{12}(23f_{n+2} - 16f_{n+1} + 5f_n)$$

Ejercicio 9 (Método BDF de orden 2) *Los métodos BDF (Backward Differentiation Formulas) se construyen aproximando la derivada $y'(t_{n+1})$ mediante un polinomio interpolador que pasa por y_{n+1} y pasos anteriores.*

1. *Usando el resultado del Ejercicio 2 (adaptando la fórmula de diferencias finitas hacia atrás), deduzca la fórmula del método BDF de 2 pasos:*

$$\frac{3}{2}y_{n+1} - 2y_n + \frac{1}{2}y_{n-1} = hf(t_{n+1}, y_{n+1}).$$

2. *Muestre que el método es implícito y tiene orden de consistencia 2.*

3. *Analice la 0-estabilidad del método hallando las raíces del polinomio característico asociado.*

4. *(Opcional) Determine la región de estabilidad absoluta del método.*

Ejercicio 10 (Oscilador armónico discreto) *Considere el problema:*

$$y''(t) = -ay(t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \qquad 0 < t < T_f,$$

y la discretización explícita de 2 pasos:

$$\frac{y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}}{(\Delta t)^2} = -ay^n.$$

Muestre que $|y^n| \to \infty$ si $\Delta t > 2/\sqrt{a}$, y que en caso contrario $|y^n|$ permanece acotado. ***Sugerencia:*** *Reemplace $y_n = \lambda^n$ y resuelva una ecuación de recurrencia para λ.*

Problemas de valores de contorno

Ejercicio 11 *Dado $\sigma > 0$, se desea resolver numéricamente la ecuación de Reacción-Difusión (lineal) en una dimensión con condiciones de borde de tipo Dirichlet:*

$$\begin{cases} -u_{xx}(x) + \sigma u(x) = & f(x), \quad \text{para } x \in (0,1) \\ u(0) = & \alpha \\ u(1) = & \beta. \end{cases} \tag{1}$$

Para ello se considera la malla uniforme $\{x_j = hj,\ j = 0, 1, 2, \ldots, m+1\}$ *con* $h = 1/(m+1)$. *Para los puntos de la malla* $x_j \in (0, 1)$, *el esquema de diferencias centradas para la derivada segunda (Ejercicio 1) conduce al sistema de ecuaciones:*

$$-\frac{u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}}{h^2} + \sigma u_j = f(x_j) \quad \textit{para } j = 1, 2, 3, \ldots, m.$$

Utilizando las condiciones de borde $u_0 = \alpha$, $u_{m+1} = \beta$ *se obtiene el sistema lineal* $A^h u^h = F^h$, *donde* $u^h = [u_1, u_2, \ldots, u_m]^T$ *es el vector de incógnitas.*

(a) *Escriba explícitamente la matriz* A^h *y el vector* F^h. *Verifique que* A^h *es simétrica y tridiagonal.*

(b) *Se define el error de truncamiento local* $\tau^h \in \mathbb{R}^m$ *como el residuo al insertar la solución exacta* $u(x)$ *en el esquema numérico:*

$$\tau_j^h = \left(-\frac{u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1})}{h^2} + \sigma u(x_j) \right) - f(x_j).$$

Demuestre que si $u \in C^4[0, 1]$, *entonces existe* $C > 0$ *tal que* $\|\tau^h\|_\infty \leq Ch^2$.

(c) *Demuestre que la matriz* A^h *es estrictamente diagonal dominante (por filas) si* $\sigma > 0$.

(d) *Utilice el teorema de los círculos de Gershgorin para mostrar que los autovalores de* A^h *son positivos y están acotados inferiormente por* σ. *Concluya que* $\|(A^h)^{-1}\|_\infty \leq 1/\sigma$.

(e) *Combinando los resultados anteriores, demuestre la convergencia del método, es decir, que el error global* $E_j^h = u(x_j) - u_j^h$ *satisface* $\|E^h\|_\infty \to 0$ *cuando* $h \to 0$.

Ejercicio 12 (Condiciones de Neumann) *Se desea resolver numéricamente la ecuación de Poisson en una dimensión con condiciones de Neumann en* $x = 0$ *y de Dirichlet en* $x = 1$*:*

$$\begin{cases} u_{xx}(x) = & f(x), \quad \textit{para } x \in (0,1) \\ u_x(0) = & 0 \\ u(1) = & 0. \end{cases} \tag{2}$$

Obtenga matrices para el problema discreto, si para la condición de Neumann $u_x(0) = 0$ *se realizan las siguientes aproximaciones:*

1. $u_1 - u_0 = 0$ *(diferencias forward)*
2. $\frac{3}{2}u_0 - 2u_1 + \frac{1}{2}u_2 = 0$ *(diferencias forward de orden 2 del Ejercicio 2)*

¿Cuál es el orden del error de truncamiento en el interior y en el punto $x = 0$ *en cada caso?*

Ejercicio 13 (Estabilidad por análisis de Fourier) *Dado* $\sigma > 0$, *considere la ecuación de reacción-difusión con condiciones periódicas:*

$$\begin{cases} -u''(x) + \sigma u(x) = & f(x), \qquad\qquad \textit{para } x \in (0,1), \\ \qquad u(0) = u(1), & \quad u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

Se toma la malla uniforme $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, *con* $h = 1/N$.

(a) Aplicando diferencias centradas para $u''(x_j)$, muestre que el esquema numérico equivale a

$$\frac{-u_{j-1} + 2\,u_j - u_{j+1}}{h^2} + \sigma\,u_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, N-1,$$

con índices tomados módulo N (es decir, $u_{-1} = u_{N-1}$ y $u_N = u_0$).

(b) Para hallar los autovalores de la matriz A_N del sistema resultante $A_N u^h = F^h$, proponga el modo de Fourier discreto $w_j^{(k)} = e^{2\pi i k j/N}$ como autovector. Sustituyendo en la ecuación homogénea y usando la identidad $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$, demuestre que $w^{(k)}$ es autovector con autovalor

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) + \sigma, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

(c) Dado que A_N es simétrica real, $\|A_N^{-1}\|_2 = 1/\lambda_{\min}$. Muestre que $\lambda_{\min} = \sigma$ y concluya que existe $C > 0$ independiente de h tal que $\|A_N^{-1}\|_2 \le C$, lo que prueba la estabilidad.

Ejercicio 14 (Ecuación de advección-reacción-difusión periódica) *Dados $b \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$, considere la ecuación de advección-reacción-difusión con condiciones periódicas:*

$$\begin{cases} -u''(x) + b\,u'(x) + \sigma\,u(x) = f(x), & \text{para } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

Se toma la malla uniforme $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, con $h = 1/N$.

(a) Utilizando diferencias centradas para $u''(x_j)$ y $u'(x_j)$ (Ejercicio 1), muestre que el esquema numérico se escribe como $A_N u^h = F^h$, donde la ecuación para el nodo j-ésimo es

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} + b\,\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} + \sigma\,u_j = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, N-1,$$

con índices módulo N.

(b) Aplique el método de Fourier del Ejercicio 13. Usando además la identidad $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$, demuestre que $w^{(k)}$ es autovector de A_N con autovalor

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) + \frac{ib}{h}\sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + \sigma, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Observe que si $b \neq 0$, los autovalores son complejos (la matriz A_N no es simétrica).

(c) Muestre que $|\lambda_k| \ge \mathrm{Re}(\lambda_k) \ge \sigma > 0$ para todo k. Muestre que la matriz A_N es normal y que por lo tanto de modo que $\|A_N^{-1}\|_2 = 1/\min_k |\lambda_k|$. Concluya que existe $C > 0$ independiente de h tal que $\|A_N^{-1}\|_2 \le C$.

Ejercicio 15 (Ecuación de Helmholtz periódica) *Dado $\omega > 0$, considere la ecuación de Helmholtz con condiciones periódicas:*

$$\begin{cases} -u''(x) - \omega^2 u(x) = f(x), & \text{para } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \end{cases}$$

Aplique el método de Fourier del Ejercicio 13 a la discretización por diferencias centradas para demostrar que los autovalores son

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) - \omega^2, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

(a) *Muestre que la matriz no es definida positiva.*

(b) *Muestre que la matriz es singular si y solo si* ω^2 *coincide con algún autovalor del laplaciano discreto periódico* $\frac{4}{h^2}\sin^2\!\left(\frac{\pi k}{N}\right)$.

(c) *Demuestre que si* $\omega \neq 2n\pi$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *(es decir,* ω *no es autovalor de* $-u''$ *con condiciones periódicas en* $[0,1]$*), entonces existe una constante* $C > 0$ *independiente de* h *tal que* $\|A_N^{-1}\|_2 \leq C$.

Ejercicio 16 (Estabilidad en norma 2: caso Dirichlet) *Considere la discretización por diferencias centradas de* $-u''(x) = f(x)$ *en* $(0,1)$ *con condiciones de Dirichlet* $u(0) = \alpha$, $u(1) = \beta$, *sobre la malla* $x_j = jh$, $h = 1/(m+1)$. *El sistema resultante es* $A^h u^h = F^h$ *con* $A^h \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

El problema de autovalores $A^h v = \lambda v$ *conduce, para* $j = 1, \ldots, m$, *a la ecuación*

$$-v_{j-1} + 2\,v_j - v_{j+1} = \lambda h^2\, v_j,$$

con condiciones de borde $v_0 = 0$ *y* $v_{m+1} = 0$.

(a) *Proponga el ansatz* $v_j = r^j$ *y obtenga la ecuación característica* $r^2 - \mu\, r + 1 = 0$ *con* $\mu = 2 - \lambda h^2$. *Deduzca que la solución general es* $v_j = c_1 e^{ij\theta} + c_2 e^{-ij\theta}$ *con* $\cos\theta = \mu/2$.

(b) *Usando* $v_0 = 0$, *muestre que* $v_j = C\sin(j\theta)$. *Imponga* $v_{m+1} = 0$ *para obtener* $\theta_k = \dfrac{k\pi}{m+1}$, $k = 1, \ldots, m$, *y concluya que los autovalores son*

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\!\left(\frac{k\pi h}{2}\right), \quad k = 1, \ldots, m.$$

(c) *Muestre que* $\lambda_{\min} = \lambda_1 \to \pi^2$ *cuando* $h \to 0$. *Concluya que existe* $C > 0$ *independiente de* h *tal que* $\|(A^h)^{-1}\|_2 \leq C$, *lo que prueba la estabilidad en norma 2.*

Ejercicio 17 (Partícula cuántica en un anillo: autovalores discretos vs. continuos) *La ecuación de Schrödinger estacionaria para una partícula libre en un anillo de longitud* $L = 1$ *(con* $\hbar = 2m = 1$*) es el problema de autovalores con condiciones periódicas:*

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda\, u(x), & \text{para } x \in (0,1), \\ u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1), & \end{cases}$$

donde los autovalores λ *representan los niveles de energía del sistema.*

(a) *Resuelva el problema continuo y muestre que los autovalores son* $\lambda_k = (2\pi k)^2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *con autofunciones* $u(x) = e^{\pm 2\pi i k x}$ *(multiplicidad 2 para* $k \geq 1$*).*

(b) *Usando los resultados del Ejercicio 13 y la expansión en Taylor de* $\sin(\xi)$, *demuestre que para cada* k *fijo,*

$$\lambda_k^h = (2\pi k)^2 - \frac{(2\pi k)^4}{12}\, h^2 + O(h^4) \quad \text{cuando } h \to 0.$$

Es decir, la aproximación de cada autovalor individual es de orden 2.

(c) *¿Qué sucede con la calidad de la aproximación para* k *grande (modos de alta frecuencia)? Muestre que* $\lambda_k^h \leq 4/h^2$ *para todo* k, *mientras que* λ_k *crece sin cota. Concluya que la discretización solo puede aproximar bien los primeros* $O(N)$ *autovalores.*