Reporte de Prerrequisitos por Práctica

Elementos de Cálculo Numérico — 1er Cuatrimestre 2026

Generado a partir de las guías de ejercicios

Para cada práctica se listan los resultados y conceptos que los alumnos necesitan **conocer de antemano** para poder resolver los ejercicios. No se incluyen los resultados que los propios ejercicios piden demostrar o derivar: esos son *contenido* de la guía, no prerrequisitos.

El criterio es: si un resultado aparece en una *sugerencia*, se *usa sin demostración*, o se necesita como *herramienta* para una demostración pedida, entonces es un prerrequisito que debe enseñarse en clase (o asumirse de materias previas).

Índice

1. Práctica 1: Fundamentos de la Computación Numérica **2**

2. Práctica 2: Álgebra Lineal Numérica **2**

3. Práctica 3: Interpolación **3**

4. Práctica 4: Teoría de Aproximación **4**

5. Práctica 5: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias **5**

6. Práctica 6: Sistemas No-Lineales y Optimización **6**

1. Práctica 1: Fundamentos de la Computación Numérica

Resultados y conceptos que deben enseñarse

1. **Definición de máquina de Turing** y de máquina de Turing universal. Los ejercicios 1–4 piden diseñar y razonar sobre máquinas de Turing, pero la definición formal no se da en la guía.

2. **Concepto de codificación $\langle M \rangle$** y de conjunto enumerable. El Ej. 2 pide demostrar que el conjunto de MTs es enumerable; necesitan saber qué significa "enumerable" y cómo codificar.

3. **Argumento diagonal de Cantor.** El Ej. 4 pide demostrar la indecidibilidad del halting problem usando diagonalización; la técnica debe ser conocida (o al menos la idea de Cantor para los reales).

4. **Definiciones formales de O, Ω, Θ.** Se usan desde el Ej. 5 en adelante sin definirlas en el texto de la guía.

5. **Fórmulas de sumatorias**: $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, series geométricas $\sum_{i=0}^{n-1} r^i = (1-r^n)/(1-r)$. Son herramientas necesarias para los Ejs. 7–8 (análisis de bucles).

6. **Teorema maestro.** El Ej. 9(a) pide *enunciarlo*, así que debe haberse visto en clase. Luego se aplica en Ejs. 9(b), 10 y 11.

7. **Desarrollo de Taylor con resto.** Los Ejs. 16–17 (reformulación algebraica) usan $\cos x \approx 1 - x^2/2$ y similares para evitar cancelación catastrófica. Taylor debe ser herramienta conocida de Análisis.

Lo que NO es prerrequisito (es contenido de los ejercicios)

La representación de punto flotante y $\varepsilon_{\text{mach}}$ están *definidas en el texto* de la guía. Las propiedades de propagación del error, la cancelación catastrófica y las técnicas de reformulación son lo que los ejercicios piden demostrar o aplicar.

2. Práctica 2: Álgebra Lineal Numérica

Resultados y conceptos que deben enseñarse

1. **Álgebra lineal básica** (de materias previas): multiplicación de matrices, inversa, determinante, autovalores y autovectores, espacios vectoriales, rango, núcleo, ortogonalidad, producto interno. Toda la práctica se apoya en esto.

2. **Existencia de la descomposición SVD**: $A = U\Sigma V^T$. Se *usa como herramienta* en al menos 8 ejercicios (Ejs. 6, 9, 10, 11, 12, 13, 16, y en el análisis de condicionamiento), pero nunca se pide demostrar su existencia.

3. **Existencia de la descomposición QR.** Se usa como hipótesis en los Ejs. 4–7 ("sea $A = QR$ su descomposición QR…"). Los Ejs. 14–15 dan un algoritmo constructivo (Householder), pero los ejercicios anteriores ya la asumen existente.
4. **Concepto de factorización LU.** El Ej. 2 dice "A admite una descomposición LU sin pivoteo"; el concepto y criterios de existencia deben enseñarse.
5. **Teorema espectral para matrices normales**: $A = U\Lambda U^*$ con U unitaria. Citado explícitamente en la *sugerencia* del Ej. 8: "Use la descomposición espectral para matrices normales".
6. **Forma de Jordan.** Citada en la *sugerencia* del Ej. 24: "Use la forma de Jordan de G" para probar que $G^k \to 0 \Leftrightarrow \rho(G) < 1$.
7. **Teorema de los Círculos de Gershgorin.** Citado en las *sugerencias* de los Ejs. 25 y 26: "Utilice el Teorema de los Círculos de Gershgorin aplicado a G_J" / "Use un argumento similar al de Gershgorin".
8. **Norma de Frobenius y propiedades de la traza**: $\|A\|_F^2 = \mathrm{tr}(A^TA)$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Usadas en el Ej. 11 (Procrustes) sin demostración.
9. **Radio espectral**: definición $\rho(A) = \max|\lambda_i|$ y relación $\rho(A) \leq \|A\|$. Usado en la sección de métodos iterativos (Ejs. 24–26).
10. **Raíz cuadrada de matrices definidas positivas.** Citada en la *sugerencia* del Ej. 7: "Use que toda matriz definida positiva tiene raíz cuadrada: $B = B^{1/2}B^{1/2}$".
11. **Diagonal dominancia estricta**: definición. Usada como hipótesis en Ejs. 25–26 pero no definida formalmente en la guía.

Lo que NO es prerrequisito

Las propiedades de matrices triangulares (Ej. 1), la LDL^T (Ej. 2), las propiedades de Householder (Ej. 14), la convergencia de la potencia (Ej. 18), la iteración QR (Ej. 21), la distancia a singulares (Ej. 9), la cota de condicionamiento (Ej. 13), etc., son todas cosas que los ejercicios piden *demostrar*.

3. Práctica 3: Interpolación

Resultados y conceptos que deben enseñarse

1. **Un polinomio no nulo de grado $\leq n$ sobre $\mathbb{R}$ tiene a lo sumo n raíces.** Citado en la *sugerencia* del Ej. 1(d): "Use que un polinomio no nulo de grado $\leq n$ tiene a lo sumo n raíces". Es la herramienta clave para probar la unicidad de la interpolación.
2. **Teorema del error de interpolación**:

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

   Usado *sin demostración* en los Ejs. 5, 8(c) y 10(e): "Estime el error usando la fórmula del error", "Use el teorema del error de interpolación". Nunca se pide demostrarlo.

3. **Fórmula de la serie geométrica**: $\sum_{j=0}^{N-1} z^j = \frac{1-z^N}{1-z}$ para $z \neq 1$. Citada en la *sugerencia* del Ej. 15(a): "La suma es una serie geométrica". Es la herramienta para probar la ortogonalidad de la DFT.

4. **FFT**: existencia de un algoritmo que calcula la DFT en $O(N \log N)$. Usada como caja negra en Ejs. 17(c), 18(c), 19: "usando la FFT". El algoritmo no se desarrolla.

5. $\mathbb{Z}_p$ **es un cuerpo** para p primo. Asumido en toda la sección de cuerpos finitos (Ejs. 20–23). En particular, la existencia de inverso multiplicativo.

6. **Algoritmo de división de polinomios.** Citado en la *sugerencia* del Ej. 20(b): "divida $q(x)$ por $(x - \beta)$ usando el algoritmo de división". Es la herramienta para la demostración inductiva.

7. **Identidad combinatoria** $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Usada en el Ej. 2(b)(ii) para acotar $\|a\|_2^2$; no se pide demostrarla.

8. **SVD y valor singular mínimo.** Usados en el Ej. 2(b) para analizar el condicionamiento de Vandermonde: "la caracterización variacional del valor singular mínimo". Presupone la Práctica 2.

9. **Integración por partes.** Necesaria en el Ej. 7(b) para demostrar la propiedad variacional de los splines cúbicos.

Lo que NO es prerrequisito

La existencia y unicidad del interpolante (Ej. 1), la fórmula de Lagrange (definida en el Ej. 3), la forma baricéntrica (derivada en Ej. 4), las propiedades de la DFT (ortogonalidad, inversión, Parseval, convolución — todo demostrado en Ejs. 15–17), la cota de raíces en $\mathbb{Z}_p$ (demostrada en Ej. 20), Shamir y Reed–Solomon (contenido de Ejs. 22–23).

4. Práctica 4: Teoría de Aproximación

Resultados y conceptos que deben enseñarse

1. **Integración por partes.** Citada en la *sugerencia* del Ej. 4: "Integre por partes" para demostrar el decaimiento $|c_k| \leq Ck^{-n}$.

2. **Desigualdad de Bessel**: $\sum |c_k|^2 \leq \|f\|_2^2$. Citada en la *sugerencia* del Ej. 6: "aplique... la desigualdad de Bessel".

3. **Desigualdad de Cauchy–Schwarz**: $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$. Citada en la *sugerencia* del Ej. 6: "aplique la desigualdad de Cauchy–Schwarz combinada con...".

4. **Criterio M de Weierstrass** para convergencia uniforme de series. Citado en la *sugerencia* del Ej. 6: "Utilice el criterio M de Weierstrass, mostrando que $\sum |c_k| < \infty$".

5. **Proceso de Gram–Schmidt.** Citado explícitamente en el Ej. 12: "Utilice el proceso de Gram–Schmidt comenzando con $\{1, x, x^2\}$".

6. **Cambio de variables en integrales.** Citado en la *sugerencia* del Ej. 9: “utilice el cambio de variables $x = \cos(t)$”.

7. **Fórmula de Euler**: $e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$. Usada implícitamente en los Ejs. 3 y 7 para pasar entre forma real y compleja.

8. **Existencia de mejor aproximación uniforme (polinomial).** Usada en el Ej. 15(b): el resultado sobre la constante de Lebesgue compara con “p_n^*, el mejor polinomio de aproximación uniforme de grado n”, cuya existencia se asume.

9. **Cuadratura de Gauss con n nodos es exacta para polinomios de grado $\leq 2n-1$.** Enunciado como hecho conocido en el Ej. 13. También afirmado sin demostración en el Ej. 14 para Gauss–Chebyshev.

10. **Polos complejos y convergencia de interpolación.** En la *sugerencia* del Ej. 16(b): “Considere los polos complejos $x = \pm i/5$ y su proximidad al intervalo real”. Requiere noción de singularidad en el plano complejo.

Lo que NO es prerrequisito

La ortogonalidad de B_N (Ej. 1), la propiedad de mejor aproximación de S_N (Ej. 2), el decaimiento de coeficientes (Ej. 4), la convergencia uniforme (Ej. 6), la exactitud de trapecios para trigonométricas (Ej. 7), la equivalencia interpolación/proyección discretizada (Ej. 14), la cota de la constante de Lebesgue (Ej. 15) — todo esto es contenido de los ejercicios.

5. Práctica 5: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Resultados y conceptos que deben enseñarse

1. **Desarrollo de Taylor con resto** (orden arbitrario). Herramienta fundamental para derivar las fórmulas de diferencias finitas (Ejs. 1–2), los métodos de Euler (Ej. 3), Runge–Kutta (Ej. 4) y para el análisis de error de truncamiento (Ej. 11b).

2. **Cota de error para Euler explícito**: $|e_n| \leq \frac{Mh}{2L}(e^{L(t_n-t_0)} - 1)$. Citada en el Ej. 5(c) como fórmula conocida: “Utilizando la cota de error para el método de Euler explícito…”. Debe enseñarse (o al menos enunciarse) en clase.

3. **Condición de Lipschitz** y su rol en existencia/unicidad de soluciones de EDOs. Usada en el Ej. 5: “Identifique la constante de Lipschitz de la función $f(t, y)$”.

4. **Definiciones de consistencia, estabilidad (0-estabilidad) y convergencia** para métodos numéricos de EDOs. Se usan sin definir formalmente en los Ejs. 3(d), 6, 8, 9.

5. **Teorema de Gershgorin.** Citado en la *sugerencia* del Ej. 11(d): “Utilice el teorema de los círculos de Gershgorin para mostrar que los autovalores de A^h son positivos”.

6. **$\|A^{-1}\|_2 = 1/\min_k |\lambda_k|$ para matrices normales (en particular simétricas).** Usado explícitamente en Ejs. 12(c), 13(c) y 15(c). Es un resultado de la Práctica 2 (Ej. 8).

7. **Identidades** $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ y $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin\theta$. Indicadas en los Ejs. 12 y 13 para el análisis de Fourier.

8. **Matrices normales**: definición $A^*A = AA^*$. Usada en Ej. 13(c): "Muestre que la matriz A_N es normal y que por lo tanto $\|A_N^{-1}\|_2 = 1/\min_k |\lambda_k|$".

Lo que NO es prerrequisito

Las fórmulas de diferencias finitas (Ejs. 1–2), la estabilidad/convergencia de los métodos de Euler (Ej. 3), la derivación de RK2 (Ej. 4), la condición de la raíz (Ej. 7), el análisis de Adams-Bashforth y BDF (Ejs. 8–9), los autovalores del laplaciano discreto (Ejs. 12, 15, 16) — todo es contenido de los ejercicios.

6. Práctica 6: Sistemas No-Lineales y Optimización

Resultados y conceptos que deben enseñarse

1. **Teorema del valor intermedio (Bolzano).** Fundamento del método de bisección (Ej. 1): la existencia de raíz en $[a, b]$ cuando $f(a)f(b) < 0$ se asume como resultado conocido de Análisis.

2. **Desarrollo de Taylor en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$** (con resto).

   - En 1D: usado para derivar Newton (Ej. 3a) y para demostrar convergencia cuadrática (Ej. 3b).
   - En $\mathbb{R}^n$: usado explícitamente en el Ej. 8 ("Usando el desarrollo de Taylor vectorial…") y en el Ej. 12 ("Deduzca esta fórmula a partir de la aproximación cuadrática").

3. **Definición de Jacobiana**, gradiente y Hessiana. La Jacobiana se usa desde el Ej. 7 ("Calcule la matriz Jacobiana $J_F(x, y)$"). El gradiente y la Hessiana se usan en Ejs. 11–16 ("Calcule ∇f y $\nabla^2 f$"). Las definiciones no se dan en la guía.

4. **Continuidad Lipschitz de la Jacobiana.** Asumida como hipótesis en el Ej. 8(b): "Si J_F es Lipschitz con constante L, es decir $\|J_F(x) - J_F(y)\| \leq L\|x - y\|$". El concepto debe ser conocido.

5. **Desigualdad de descenso para funciones L-suaves.** Dada como punto de partida en el Ej. 13(b): "Partiendo de la desigualdad de descenso para funciones L-suaves: $f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|^2$". Debe demostrarse o al menos enunciarse en clase.

6. **Convexidad fuerte**: definición. Usada como hipótesis en el Ej. 13 ("f es μ-fuertemente convexa") para deducir la tasa de convergencia lineal. La definición no se da en la guía.

7. **Costo de la factorización LU**: $O(n^3/3)$. Usado en el Ej. 10(a): "¿Cuál es el costo de cada iteración de Newton si la Jacobiana se resuelve mediante factorización LU?". Presupone la Práctica 2.

Lo que NO es prerrequisito

La cota de error de bisección (Ej. 1b), la fórmula de Newton y su convergencia cuadrática (Ej. 3), la pérdida de orden en raíces múltiples (Ej. 4), el orden de la secante (enunciado en Ej. 5 sin demostración), la convergencia cuadrática en $\mathbb{R}^n$ (Ej. 8), la cota de descenso del gradiente (Ej. 13b) — todo es contenido de los ejercicios.

Resumen transversal

Resultados "estrella" que se reutilizan en varias prácticas

Resultado	**Usado en**
Desarrollo de Taylor con resto	P1, P3, P4, P5, P6
SVD (existencia y propiedades)	P2, P3
Teorema de Gershgorin	P2, P5
$\|A^{-1}\|_2 = 1/\min \|\lambda_k\|$ (matrices normales)	P2, P5
Serie geométrica	P1, P3, P4
Integración por partes	P3, P4
Desigualdad de Cauchy–Schwarz	P4
Costo de LU: $O(n^3/3)$	P2, P6

Dependencias entre prácticas

Práctica	**Tema principal**	**Usa resultados de**
1	Turing, complejidad, punto flotante	Análisis (Taylor)
2	LU, QR, SVD, autovalores, iterativos	Álgebra lineal (prerreq.)
3	Interpolación, DFT, cuerpos finitos	P2 (SVD, $\sigma_{\text{mín}}$)
4	Fourier, Chebyshev, cuadratura	Análisis (Bessel, Weierstrass)
5	Diferencias finitas, PVI, PVC	P2 (Gershgorin, normales)
6	Newton, bisección, gradiente	P2 (costo LU), Análisis (Taylor $\mathbb{R}^n$)