

---

# ELEMENTOS DE CÁLCULO NUMÉRICO

Primer Cuatrimestre 2026

---

## Práctica N° 6: Sistemas No-Lineales y Optimización Numérica

### Método de bisección

**Ejercicio 1** El método de bisección busca una raíz de  $f$  en un intervalo  $[a, b]$  donde  $f(a)f(b) < 0$ .

- Describa el algoritmo de bisección y explique por qué genera una sucesión de intervalos encajados  $[a_k, b_k]$  tales que  $f(a_k)f(b_k) < 0$ .
- Demuestre que después de  $k$  iteraciones el error satisface

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}},$$

donde  $x^* \in [a, b]$  es una raíz de  $f$  y  $x_k$  es el punto medio de  $[a_k, b_k]$ .

- ¿Cuántas iteraciones se necesitan para garantizar un error menor que  $\varepsilon > 0$ ?
- Aplique bisección a  $f(x) = x^3 - 2$  en  $[1, 2]$  para aproximar  $\sqrt[3]{2}$ . Calcule las primeras 5 iteraciones.

### Ejercicio 2 (Limitaciones de bisección)

- Dé un ejemplo de función continua con una raíz donde bisección no pueda aplicarse directamente. ¿Qué condición falla?
- ¿Es posible que bisección converja a un punto que no sea raíz de  $f$ ? Justifique.
- Compare la tasa de convergencia de bisección (lineal con factor  $1/2$ ) con la de un método de convergencia cuadrática. Si ambos parten con un error inicial de 1, ¿cuántas iteraciones necesita cada uno para alcanzar un error de  $10^{-12}$ ?

### Método de Newton en $\mathbb{R}$

**Ejercicio 3** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función dos veces diferenciable. El método de Newton genera la sucesión:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

- (a) Deduzca la fórmula del método a partir de la aproximación lineal (Taylor de orden 1) de  $f$  alrededor de  $x_k$ .
- (b) Suponga que  $f(x^*) = 0$ ,  $f'(x^*) \neq 0$  y  $f \in C^2$  en un entorno de  $x^*$ . Defina el error  $e_k = x_k - x^*$  y demuestre que

$$e_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} e_k^2,$$

para cierto  $\xi_k$  entre  $x_k$  y  $x^*$ . Concluya que la convergencia es localmente cuadrática.

- (c) Aplique el método de Newton a  $f(x) = x^2 - a$  ( $a > 0$ ) para obtener la iteración:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left( x_k + \frac{a}{x_k} \right).$$

Partiendo de  $x_0 = 1$ , calcule las primeras 4 iteraciones para  $a = 2$  y compare con  $\sqrt{2}$ .

**Ejercicio 4** (Raíces múltiples y pérdida de orden) Considere  $f(x) = (x - 1)^2$ .

- (a) Aplique Newton a esta función y muestre que la iteración resultante es:

$$x_{k+1} = \frac{x_k + 1}{2}.$$

- (b) Demuestre que  $|e_{k+1}| = \frac{1}{2}|e_k|$ , es decir, la convergencia es solo lineal (no cuadrática). ¿Por qué se pierde el orden?
- (c) Proponga la modificación  $x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$  con  $m = 2$  (multiplicidad conocida) y demuestre que se recupera la convergencia cuadrática.

**Ejercicio 5** (Método de la secante) El método de la secante reemplaza  $f'(x_k)$  por la diferencia dividida  $\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ :

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

- (a) ¿Qué ventaja tiene este método respecto de Newton?
- (b) Aplique el método de la secante a  $f(x) = x^3 - 2$  con  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ . Calcule  $x_2$ ,  $x_3$  y  $x_4$ .
- (c) Puede demostrarse que el orden de convergencia del método de la secante es  $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$  (el número áureo). Compare la eficiencia del método de la secante contra Newton, teniendo en cuenta que la secante no requiere evaluar  $f'$ .

**Ejercicio 6** Considere la ecuación  $e^{-x} = x$ .

- (a) Muestre que existe una única solución  $x^* \in (0, 1)$ .
- (b) Halle la solución aplicando bisección en  $[0, 1]$  hasta obtener un error menor que  $10^{-2}$ .
- (c) Aplique Newton a  $f(x) = e^{-x} - x$  con  $x_0 = 0$ . Calcule  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .
- (d) Compare la velocidad de convergencia de ambos métodos.

## Método de Newton para sistemas no lineales en $\mathbb{R}^n$

**Ejercicio 7 (Newton para sistemas  $2 \times 2$ )** Considere el sistema no lineal:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ xy - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

- (a) Calcule la matriz Jacobiana  $J_F(x, y)$ .
- (b) Escriba la iteración de Newton: dado  $(x_k, y_k)$ , resolver  $J_F(x_k, y_k) \delta = -F(x_k, y_k)$  y actualizar  $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + \delta$ .
- (c) Partiendo de  $(x_0, y_0) = (2, 1)$ , realice una iteración de Newton. Resuelva el sistema lineal  $2 \times 2$  explícitamente.
- (d) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Discuta qué punto inicial llevaría a cada una de ellas.

**Ejercicio 8 (Convergencia cuadrática local)** Sea  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciable, con  $F(x^*) = 0$  y  $J_F(x^*)$  invertible.

- (a) Usando el desarrollo de Taylor vectorial

$$F(x^*) = F(x_k) + J_F(x_k)(x^* - x_k) + R_k,$$

y la definición de la iteración de Newton, demuestre que el error  $e_{k+1} = x_{k+1} - x^*$  satisface

$$e_{k+1} = -[J_F(x_k)]^{-1} R_k.$$

- (b) Si  $J_F$  es Lipschitz con constante  $L$ , es decir  $\|J_F(x) - J_F(y)\| \leq L\|x - y\|$ , acote  $\|R_k\|$  y concluya que

$$\|e_{k+1}\| \leq C \|e_k\|^2,$$

para cierta constante  $C > 0$ , siempre que  $x_0$  esté suficientemente cerca de  $x^*$ .

**Ejercicio 9 (Intersección de curvas)** El sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^3 \end{cases}$$

describe la intersección de una circunferencia con una cúbica.

- (a) Plantee el sistema como  $F(x, y) = 0$  y calcule la Jacobiana.
- (b) Realice dos iteraciones de Newton partiendo de  $(x_0, y_0) = (0.8, 0.5)$ .
- (c) ¿Qué ocurre si se parte de  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ? ¿Y de  $(0, 1)$ ? Discuta.

**Ejercicio 10 (Costo computacional del método de Newton)** Considere la aplicación del método de Newton a un sistema  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

- (a) ¿Cuál es el costo de cada iteración de Newton si la Jacobiana se resuelve mediante factorización LU? Expréselo en términos de  $n$ .
- (b) Si  $n$  es grande y la Jacobiana es esparsa (por ejemplo, tridiagonal), ¿cómo puede explotarse esta estructura?
- (c) En el método de Newton modificado, se fija la Jacobiana  $J_F(x_0)$  y se resuelve  $J_F(x_0)\delta = -F(x_k)$  en cada iteración. ¿Cuál es la ventaja computacional? ¿Qué se pierde en términos de convergencia?

## Newton para optimización

**Ejercicio 11 (Newton vs gradiente en 1D)** Considere la función  $f(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 1$ .

- (a) Aplique una iteración del método de Newton para optimización ( $x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1}f'(x_k)$ ) partiendo de  $x_0 = 0$ . ¿Qué observa?
- (b) Aplique descenso por gradiente con paso  $\alpha = 0.5$  partiendo de  $x_0 = 0$ . Calcule  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .
- (c) Repita con  $f(x) = (x - 3)^4$ . ¿Qué le pasa a Newton? ¿Y al gradiente?

**Ejercicio 12 (Newton para optimización en  $\mathbb{R}^n$ )** Para minimizar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  suave, el método de Newton busca raíces de  $\nabla f(x) = 0$ :

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k).$$

- (a) Deduzca esta fórmula a partir de la aproximación cuadrática (Taylor de orden 2) de  $f$  alrededor de  $x_k$ .
- (b) Considere  $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 10x_2^2$ . Calcule  $\nabla f$  y  $\nabla^2 f$ .
- (c) Realice una iteración de Newton partiendo de  $x_0 = (5, 1)^T$ . ¿Qué observa?
- (d) ¿Cuál es el número de condición  $\kappa = L/\mu$  de esta función? ¿Cómo afecta este valor al descenso por gradiente?

## Descenso por gradiente

**Ejercicio 13 (Descenso por gradiente con paso constante)** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $\mu$ -fuertemente convexa y  $L$ -suave. El método de descenso por gradiente con paso constante  $\alpha$  genera la secuencia  $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$ .

- (a) ¿Qué significa geométricamente que  $-\nabla f(x)$  sea la dirección de máximo decrecimiento?
- (b) Partiendo de la desigualdad de descenso para funciones  $L$ -suaves:

$$f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|^2,$$

demuestre que con  $\alpha = 1/L$ :

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x_k)\|^2.$$

(c) Usando además la convexidad fuerte, concluya que:

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right) (f(x_k) - f(x^*)).$$

(d) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para reducir el error  $f(x_k) - f(x^*)$  por un factor de  $\varepsilon$ ?

**Ejercicio 14 (Efecto del número de condición)** Considere la función cuadrática  $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(a x_1^2 + b x_2^2)$  con  $0 < a \leq b$ .

(a) Identifique las constantes  $\mu$  y  $L$  para esta función. ¿Cuál es el número de condición  $\kappa$ ?

(b) Demuestre que descenso por gradiente con  $\alpha = 1/b$  produce la iteración:

$$x_1^{(k+1)} = \left(1 - \frac{a}{b}\right) x_1^{(k)}, \quad x_2^{(k+1)} = 0.$$

Concluya que la convergencia es lenta en la dirección  $x_1$  cuando  $a \ll b$ .

(c) Calcule las primeras 5 iteraciones para  $a = 1$ ,  $b = 100$ , partiendo de  $x_0 = (1, 1)^T$ .

(d) Repita con  $a = 1$ ,  $b = 1$ . ¿Cuántas iteraciones se necesitan ahora?

(e) Explique la analogía entre el número de condición en optimización y el número de condición de una matriz en sistemas lineales.

**Ejercicio 15 (Elección del paso)** (a) Considere  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  y descenso por gradiente con paso  $\alpha$ . Muestre que la iteración es  $x_{k+1} = (1 - \alpha)x_k$  y determine para qué valores de  $\alpha$  el método converge, diverge, u oscila.

(b) Para la misma función, ¿cuál es el paso óptimo?

(c) Para una función general  $L$ -suave, ¿por qué el paso  $\alpha = 1/L$  es una elección natural?

(d) (Búsqueda lineal) En la práctica, a menudo se elige  $\alpha_k$  resolviendo (aproximadamente)

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha > 0} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k)).$$

¿Por qué es esto razonable? ¿Cuál es su desventaja?

**Ejercicio 16 (Función de Rosenbrock)** La función de Rosenbrock es un clásico test de optimización:

$$f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2.$$

(a) Encuentre el único minimizador  $x^*$  de  $f$ .

(b) Calcule  $\nabla f(x_1, x_2)$  y  $\nabla^2 f(x_1, x_2)$ .

(c) Evalúe la Hessiana en el mínimo. ¿Cuáles son los autovalores? ¿Cuál es el número de condición?

(d) Explique por qué esta función es difícil para descenso por gradiente. ¿Qué forma tienen las curvas de nivel?

(e) Realice dos iteraciones de Newton partiendo de  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ .