Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2026

Práctica N° 6: Sistemas No-Lineales y Optimización Numérica

Método de bisección

Ejercicio 1 El método de bisección busca una raíz de f en un intervalo $[a, b]$ donde $f(a)f(b) < 0$.

(a) Describa el algoritmo de bisección y explique por qué genera una sucesión de intervalos encajados $[a_k, b_k]$ tales que $f(a_k)f(b_k) < 0$.

(b) Demuestre que después de k iteraciones el error satisface

$$|x_k - x^*| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}},$$

donde $x^* \in [a, b]$ es una raíz de f y x_k es el punto medio de $[a_k, b_k]$.

(c) ¿Cuántas iteraciones se necesitan para garantizar un error menor que $\varepsilon > 0$?

(d) Aplique bisección a $f(x) = x^3 - 2$ en $[1, 2]$ para aproximar $\sqrt[3]{2}$. Calcule las primeras 5 iteraciones.

Ejercicio 2 (Limitaciones de bisección)

(a) Dé un ejemplo de función continua con una raíz donde bisección no pueda aplicarse directamente. ¿Qué condición falla?

(b) ¿Es posible que bisección converja a un punto que no sea raíz de f? Justifique.

(c) Compare la tasa de convergencia de bisección (lineal con factor $1/2$) con la de un método de convergencia cuadrática. Si ambos parten con un error inicial de 1, ¿cuántas iteraciones necesita cada uno para alcanzar un error de 10^{-12}?

Método de Newton en $\mathbb{R}$

Ejercicio 3 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. El método de Newton genera la sucesión:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

(a) Deduzca la fórmula del método a partir de la aproximación lineal (Taylor de orden 1) de f alrededor de x_k.

(b) Suponga que $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$ y $f \in C^2$ en un entorno de x^*. Defina el error $e_k = x_k - x^*$ y demuestre que

$$e_{k+1} = -\frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)}\, e_k^2,$$

para cierto ξ_k entre x_k y x^*. Concluya que la convergencia es localmente cuadrática.

(c) Aplique el método de Newton a $f(x) = x^2 - a$ ($a > 0$) para obtener la iteración:

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right).$$

Partiendo de $x_0 = 1$, calcule las primeras 4 iteraciones para $a = 2$ y compare con $\sqrt{2}$.

Ejercicio 4 (Raíces múltiples y pérdida de orden) Considere $f(x) = (x-1)^2$.

(a) Aplique Newton a esta función y muestre que la iteración resultante es:

$$x_{k+1} = \frac{x_k + 1}{2}.$$

(b) Demuestre que $|e_{k+1}| = \frac{1}{2}|e_k|$, es decir, la convergencia es solo lineal (no cuadrática). ¿Por qué se pierde el orden?

(c) Proponga la modificación $x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ con $m = 2$ (multiplicidad conocida) y demuestre que se recupera la convergencia cuadrática.

Ejercicio 5 (Método de la secante) El método de la secante reemplaza $f'(x_k)$ por la diferencia dividida $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

(a) ¿Qué ventaja tiene este método respecto de Newton?

(b) Aplique el método de la secante a $f(x) = x^3 - 2$ con $x_0 = 1$, $x_1 = 2$. Calcule x_2, x_3 y x_4.

(c) Puede demostrarse que el orden de convergencia del método de la secante es $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (el número áureo). Compare la eficiencia del método de la secante contra Newton, teniendo en cuenta que la secante no requiere evaluar f'.

Ejercicio 6 Considere la ecuación $e^{-x} = x$.

(a) Muestre que existe una única solución $x^* \in (0,1)$.

(b) Halle la solución aplicando bisección en $[0,1]$ hasta obtener un error menor que 10^{-2}.

(c) Aplique Newton a $f(x) = e^{-x} - x$ con $x_0 = 0$. Calcule x_1, x_2 y x_3.

(d) Compare la velocidad de convergencia de ambos métodos.

Método de Newton para sistemas no lineales en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 7 (Newton para sistemas 2×2) *Considere el sistema no lineal:*

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 4 \\ xy - 1 \end{pmatrix} = 0.$$

(a) *Calcule la matriz Jacobiana $J_F(x, y)$.*

(b) *Escriba la iteración de Newton: dado (x_k, y_k), resolver $J_F(x_k, y_k)\,\delta = -F(x_k, y_k)$ y actualizar $(x_{k+1}, y_{k+1}) = (x_k, y_k) + \delta$.*

(c) *Partiendo de $(x_0, y_0) = (2, 1)$, realice una iteración de Newton. Resuelva el sistema lineal 2×2 explícitamente.*

(d) *¿Cuántas soluciones tiene el sistema? Discuta qué punto inicial llevaría a cada una de ellas.*

Ejercicio 8 (Convergencia cuadrática local) *Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continuamente diferenciable, con $F(x^*) = 0$ y $J_F(x^*)$ invertible.*

(a) *Usando el desarrollo de Taylor vectorial*

$$F(x^*) = F(x_k) + J_F(x_k)(x^* - x_k) + R_k,$$

y la definición de la iteración de Newton, demuestre que el error $e_{k+1} = x_{k+1} - x^*$ satisface

$$e_{k+1} = -[J_F(x_k)]^{-1}\, R_k.$$

(b) *Si J_F es Lipschitz con constante L, es decir $\|J_F(x) - J_F(y)\| \leq L\|x - y\|$, acote $\|R_k\|$ y concluya que*

$$\|e_{k+1}\| \leq C\,\|e_k\|^2,$$

para cierta constante $C > 0$, siempre que x_0 esté suficientemente cerca de x^*.

Ejercicio 9 (Intersección de curvas) *El sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x^3 \end{cases}$$

describe la intersección de una circunferencia con una cúbica.

(a) *Plantee el sistema como $F(x, y) = 0$ y calcule la Jacobiana.*

(b) *Realice dos iteraciones de Newton partiendo de $(x_0, y_0) = (0.8, 0.5)$.*

(c) *¿Qué ocurre si se parte de $(x_0, y_0) = (0, 0)$? ¿Y de $(0, 1)$? Discuta.*

Ejercicio 10 (Costo computacional del método de Newton) *Considere la aplicación del método de Newton a un sistema $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

(a) *¿Cuál es el costo de cada iteración de Newton si la Jacobiana se resuelve mediante factorización LU? Expréselo en términos de n.*

(b) *Si n es grande y la Jacobiana es esparsa (por ejemplo, tridiagonal), ¿cómo puede explotarse esta estructura?*

(c) *En el método de Newton modificado, se fija la Jacobiana $J_F(x_0)$ y se resuelve $J_F(x_0)\,\delta = -F(x_k)$ en cada iteración. ¿Cuál es la ventaja computacional? ¿Qué se pierde en términos de convergencia?*

Newton para optimización

Ejercicio 11 (Newton vs gradiente en 1D) *Considere la función $f(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 + 1$.*

(a) *Aplique una iteración del método de Newton para optimización ($x_{k+1} = x_k - f''(x_k)^{-1} f'(x_k)$) partiendo de $x_0 = 0$. ¿Qué observa?*

(b) *Aplique descenso por gradiente con paso $\alpha = 0.5$ partiendo de $x_0 = 0$. Calcule x_1, x_2 y x_3.*

(c) *Repita con $f(x) = (x-3)^4$. ¿Qué le pasa a Newton? ¿Y al gradiente?*

Ejercicio 12 (Newton para optimización en $\mathbb{R}^n$) *Para minimizar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ suave, el método de Newton busca raíces de $\nabla f(x) = 0$:*

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1}\,\nabla f(x_k).$$

(a) *Deduzca esta fórmula a partir de la aproximación cuadrática (Taylor de orden 2) de f alrededor de x_k.*

(b) *Considere $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 10\,x_2^2$. Calcule ∇f y $\nabla^2 f$.*

(c) *Realice una iteración de Newton partiendo de $x_0 = (5, 1)^T$. ¿Qué observa?*

(d) *¿Cuál es el número de condición $\kappa = L/\mu$ de esta función? ¿Cómo afecta este valor al descenso por gradiente?*

Descenso por gradiente

Ejercicio 13 (Descenso por gradiente con paso constante) *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función μ-fuertemente convexa y L-suave. El método de descenso por gradiente con paso constante α genera la secuencia $x_{k+1} = x_k - \alpha\,\nabla f(x_k)$.*

(a) *¿Qué significa geométricamente que $-\nabla f(x)$ sea la dirección de máximo decrecimiento?*

(b) *Partiendo de la desigualdad de descenso para funciones L-suaves:*

$$f(y) \le f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|^2,$$

demuestre que con $\alpha = 1/L$:

$$f(x_{k+1}) \le f(x_k) - \frac{1}{2L}\|\nabla f(x_k)\|^2.$$

(c) *Usando además la convexidad fuerte, concluya que:*

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)(f(x_k) - f(x^*)).$$

(d) *¿Cuántas iteraciones se necesitan para reducir el error $f(x_k) - f(x^*)$ por un factor de ε?*

Ejercicio 14 (Efecto del número de condición) *Considere la función cuadrática $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(a\, x_1^2 + b\, x_2^2)$ con $0 < a \leq b$.*

(a) *Identifique las constantes μ y L para esta función. ¿Cuál es el número de condición κ?*

(b) *Demuestre que descenso por gradiente con $\alpha = 1/b$ produce la iteración:*

$$x_1^{(k+1)} = \left(1 - \frac{a}{b}\right) x_1^{(k)}, \quad x_2^{(k+1)} = 0.$$

Concluya que la convergencia es lenta en la dirección x_1 cuando $a \ll b$.

(c) *Calcule las primeras 5 iteraciones para $a = 1$, $b = 100$, partiendo de $x_0 = (1, 1)^T$.*

(d) *Repita con $a = 1$, $b = 1$. ¿Cuántas iteraciones se necesitan ahora?*

(e) *Explique la analogía entre el número de condición en optimización y el número de condición de una matriz en sistemas lineales.*

Ejercicio 15 (Elección del paso) *(a) Considere $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ y descenso por gradiente con paso α. Muestre que la iteración es $x_{k+1} = (1 - \alpha)x_k$ y determine para qué valores de α el método converge, diverge, u oscila.*

(b) *Para la misma función, ¿cuál es el paso óptimo?*

(c) *Para una función general L-suave, ¿por qué el paso $\alpha = 1/L$ es una elección natural?*

(d) *(Búsqueda lineal) En la práctica, a menudo se elige α_k resolviendo (aproximadamente)*

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha > 0} f(x_k - \alpha\, \nabla f(x_k)).$$

¿Por qué es esto razonable? ¿Cuál es su desventaja?

Ejercicio 16 (Función de Rosenbrock) *La función de Rosenbrock es un clásico test de optimización:*

$$f(x_1, x_2) = (1 - x_1)^2 + 100(x_2 - x_1^2)^2.$$

(a) *Encuentre el único minimizador x^* de f.*

(b) *Calcule $\nabla f(x_1, x_2)$ y $\nabla^2 f(x_1, x_2)$.*

(c) *Evalúe la Hessiana en el mínimo. ¿Cuáles son los autovalores? ¿Cuál es el número de condición?*

(d) *Explique por qué esta función es difícil para descenso por gradiente. ¿Qué forma tienen las curvas de nivel?*

(e) *Realice dos iteraciones de Newton partiendo de $(x_0, y_0) = (0, 0)$.*

Cuadrados mínimos no lineales

Ejercicio 17 (Método de Gauss-Newton) *Considere el problema de ajustar el modelo* $y = ae^{bx}$ *a los datos:*

x_i	0	1	2	3
y_i	2.0	2.7	3.7	5.0

Definimos los residuos $r_i(a, b) = ae^{bx_i} - y_i$, $i = 1, \ldots, 4$.

(a) *Escriba la función objetivo* $f(a, b) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} r_i^2$.

(b) *Calcule la Jacobiana* $J_r(a, b) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ *del vector de residuos.*

(c) *Verifique que el gradiente de* f *es* $\nabla f = J_r^T r$ *y que la aproximación de Gauss-Newton a la Hessiana es* $J_r^T J_r$.

(d) *Escriba la iteración de Gauss-Newton. ¿Por qué equivale a resolver un problema de cuadrados mínimos lineales en cada paso?*

(e) *Partiendo de* $(a_0, b_0) = (2, 0.3)$, *realice una iteración de Gauss-Newton.*

Ejercicio 18 (Levenberg-Marquardt) *El método de Levenberg-Marquardt modifica Gauss-Newton resolviendo en cada paso:*

$$(J_r^T J_r + \lambda_k I)\,\delta = -J_r^T r,$$

donde $\lambda_k > 0$ *es un parámetro de amortiguamiento.*

(a) *Muestre que si* $\lambda_k \to 0$ *se recupera el paso de Gauss-Newton, y si* $\lambda_k \to \infty$ *se obtiene un paso en la dirección del gradiente con norma pequeña.*

(b) *¿Por qué la regularización* $\lambda_k I$ *mejora la robustez del método cuando* $J_r^T J_r$ *está mal condicionada o es singular?*

(c) *Describa una estrategia adaptativa para* λ_k*: si la iteración reduce* f*, ¿qué se hace con* λ_k*? ¿Y si la aumenta?*

Ejercicio 19 (Ajuste de modelo logístico) *Se desea ajustar un modelo de crecimiento logístico* $P(t) = \frac{K}{1+Ae^{-rt}}$ *a datos de población* (t_i, P_i)*. Los parámetros a estimar son* $\theta = (K, A, r)$.

(a) *Escriba los residuos* $r_i(\theta) = P(t_i) - P_i$ *y calcule las derivadas parciales* $\frac{\partial r_i}{\partial K}$, $\frac{\partial r_i}{\partial A}$, $\frac{\partial r_i}{\partial r}$.

(b) *¿Cuáles son las dimensiones de la Jacobiana* $J_r(\theta)$ *si se tienen* m *datos?*

(c) *Explique por qué Gauss-Newton converge cuadráticamente cuando los residuos en el óptimo son pequeños* ($\|r(\theta^*)\| \approx 0$)*, pero solo linealmente si los residuos son grandes.*

Problemas integradores

Ejercicio 20 (Punto fijo y convergencia) *Considere la iteración de punto fijo* $x_{k+1} = g(x_k)$ *para encontrar una raíz de* $f(x) = 0$, *donde* $g(x) = x - \varphi(x)f(x)$ *para cierta función* φ.

(a) Muestre que si x^* *es punto fijo de* g *con* $f(x^*) \neq 0$ *solo si* $\varphi(x^*) = 0$. *¿Qué se necesita para que* x^* *sea raíz de* f*?*

(b) Demuestre que eligiendo $\varphi(x) = 1/f'(x)$ *se obtiene el método de Newton.*

(c) ¿Qué elección de φ *constante garantiza convergencia local (por el teorema de punto fijo de Banach)?*

(d) Demuestre que Newton es la única elección de φ *(dependiente de* x*) que da convergencia cuadrática (suponiendo* $f'(x^*) \neq 0$*).*

Ejercicio 21 (Cuadrados mínimos lineales como caso particular) *Considere el problema lineal de cuadrados mínimos* $\min_x \|Ax - b\|^2$ *con* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$.

(a) Defina los residuos $r(x) = Ax - b$ *y su Jacobiana* J_r. *Verifique que* $J_r = A$ *(constante).*

(b) Muestre que el paso de Gauss-Newton produce la solución exacta $x^* = (A^T A)^{-1}A^T b$ *en una sola iteración, independientemente del punto inicial.*

(c) ¿Por qué ocurre esto? ¿Qué propiedad especial tiene la Hessiana $\nabla^2 f$ *cuando los residuos son lineales?*