Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2026

Práctica N° 4: Teoría de Aproximación

Ejercicio 1 Muestre que el conjunto de funciones

$$B_N = \{1, \sin(x), \cos(x), ..., \sin(Nx), \cos(Nx)\}$$

es ortogonal con respecto al producto interno definido por:

$$(f, g)_2 = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \tag{1}$$

y calcule la norma de cada función en B_N asociada a $(\cdot, \cdot)_2$ que se denotará por $\| \cdot \|_2$.

Ejercicio 2 Sea f una función de cuadrado integrable en $[0, 2\pi]$. Definimos los coeficientes de Fourier de f como

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\, dx, \quad k \geq 0$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\, dx, \quad k \geq 1$$

y la suma parcial de Fourier como:

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\right).$$

Demuestre la propiedad de mejor aproximación en media cuadrática: de todos los elementos del subespacio generado por B_N, $S_N(f)$ es el que minimiza el error en norma $\| \cdot \|_2$. Es decir:

$$\|f - S_N(f)\|_2 \leq \|f - p\|_2 \quad \text{para todo } p \in \langle B_N \rangle.$$

Ejercicio 3 (Forma Compleja de la Serie de Fourier) Considere la serie de Fourier en su forma compleja:

$$S_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$$

donde los coeficientes están dados por $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx$. Muestre que esta representación es equivalente a la forma trigonométrica real obtenida en el Ejercicio 2, estableciendo las siguientes relaciones entre los coeficientes para $k \geq 1$:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Ejercicio 4 Se define, para cada $n \in \mathbb{N}$, el espacio de funciones suaves y periódicas como:

$$C^n_{per}([0,2\pi]) = \left\{ f \in C^n([0,2\pi]) : f^{(p)}(0) = f^{(p)}(2\pi) \text{ para todo } 0 \leq p \leq n-1 \right\}$$

Muestre que, dada $f \in C^n_{per}([0,2\pi])$, sus coeficientes de Fourier decaen con orden n: es decir, muestre que $|c_k| \leq Ck^{-n}$ para una cierta constante C independiente de k. Sugerencia: Integre por partes.

Ejercicio 5 (Cálculo de Coeficientes y Decaimiento)

(a) Calcule los coeficientes de Fourier (en el intervalo $[-\pi,\pi]$) de la función signo: $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ (onda cuadrada).

(b) Calcule los coeficientes de Fourier de la onda triangular: $g(x) = |x|$ en $[-\pi,\pi]$.

(c) Analice la tasa de decaimiento de los coeficientes obtenidos cuando $k \to \infty$. Relacione este resultado con la suavidad de las funciones y con el resultado del ejercicio anterior.

Ejercicio 6 (Convergencia Uniforme) Demuestre que si $f \in C^1_{per}([0,2\pi])$, la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en todo el intervalo.
Sugerencia: Utilice el criterio M de Weierstrass, mostrando que $\sum |c_k| < \infty$. Para ello, relacione los coeficientes de f con los de la derivada f' (que es de cuadrado integrable) integrando por partes, y luego aplique la desigualdad de Cauchy-Schwarz combinada con la desigualdad de Bessel.

Ejercicio 7 (Exactitud de Trapecios para Trigonométricas) Demuestre que la regla de los trapecios compuesta con N nodos en $[0,2\pi]$, dada por:

$$Q_N(g) = \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} g(x_j), \quad \text{donde } x_j = \frac{2\pi j}{N},$$

integra exactamente a las funciones base $g(x) = e^{imx}$ para todo entero m que no sea un múltiplo no nulo de N. ¿Qué ocurre si m es un múltiplo de N?

Ejercicio 8 (De Fourier a la DFT) Considere los coeficientes de Fourier en forma compleja $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx$.

(a) Aproxime la integral utilizando la regla de los trapecios compuesta con N puntos Q_N. Llame $\tilde{c}_k$ al resultado.

(b) Muestre que se obtiene la expresión:

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j) e^{-i\frac{2\pi kj}{N}}$$

Esta es la definición de la Transformada Discreta de Fourier (DFT) de la secuencia de valores muestreados $f(x_j)$, salvo factores de normalización.

Ejercicio 9 Los polinomios de Chebyshev de primera especie se definen en el intervalo $[-1, 1]$ mediante la relación $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Demuestre que son ortogonales con el producto escalar

$$(f, g)_w = \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Sugerencia: utilice el cambio de variables $x = \cos(t)$ y la ortogonalidad de las funciones trigonométricas (Ejercicio 1).

Ejercicio 10 Muestre que el coeficiente k-ésimo de una serie de Chebyshev de una función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ coincide con el coeficiente de Fourier b_k de la función $f(\cos(\theta))$ para $\theta \in [0, 2\pi]$.

Ejercicio 11 (Mejor aproximación en L^2) Consideremos el espacio de funciones de cuadrado integrable en $[-1, 1]$ con el producto interno estándar ($w(x) = 1$). Queremos encontrar el polinomio $p(x)$ de grado a lo sumo 1 que mejor aproxima a la función $f(x) = e^x$ en el sentido de los cuadrados mínimos (norma L^2).

(a) Recuerde que los primeros polinomios de Legendre son $P_0(x) = 1$ y $P_1(x) = x$. Verifique que son ortogonales en $[-1, 1]$.

(b) Calcule las normas $\|P_0\|^2$ y $\|P_1\|^2$.

(c) La proyección ortogonal de f sobre el subespacio generado por $\{P_0, P_1\}$ está dada por:

$$p(x) = \frac{\langle f, P_0 \rangle}{\|P_0\|^2} P_0(x) + \frac{\langle f, P_1 \rangle}{\|P_1\|^2} P_1(x).$$

Calcule explícitamente este polinomio para $f(x) = e^x$.

(d) Compare cualitativamente este polinomio con:

- El polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $x = 0$.
- El polinomio interpolador de Lagrange en los nodos -1 y 1.

Ejercicio 12 (Construcción de Polinomios Ortogonales) Se desea construir una familia de polinomios $\{q_0, q_1, q_2\}$ ortogonales en el intervalo $[0, 1]$ respecto al peso $w(x) = 1$.

1. Utilice el proceso de Gram-Schmidt comenzando con la base canónica $\{1, x, x^2\}$ para obtener q_0, q_1, q_2.
2. Verifique que las raíces de $q_2(x)$ son reales, distintas y están dentro del intervalo $(0, 1)$.

Ejercicio 13 (Cuadratura Gaussiana) Queremos aproximar la integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ mediante una regla de cuadratura de 2 puntos:

$$Q(f) = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2).$$

1. Sabemos que la cuadratura de Gauss con n nodos es exacta para polinomios de grado $2n - 1$. Para $n = 2$, esto significa que debe ser exacta para polinomios hasta grado 3.

2. Utilice las raíces del polinomio de Legendre $P_2(x)$ (hallado/deducido en ejercicios anteriores) como nodos x_1, x_2.

3. Determine los pesos w_1, w_2 imponiendo que la regla sea exacta para $f(x) = 1$ y $f(x) = x$ (o usando la fórmula de interpolación de Lagrange para los pesos).

4. Verifique que la regla obtenida integra exactamente a x^2 y x^3.

5. Use esta regla para aproximar $\int_{-1}^{1} e^x dx$ y compare con el valor exacto.

Ejercicio 14 (Interpolación vs Proyección) Los coeficientes de la serie de Chebyshev de f están dados por las integrales $c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_k(x)(1-x^2)^{-1/2}dx$ (con c_0 dividido por 2). Considere la fórmula de cuadratura de Gauss-Chebyshev con M puntos, que es exacta para polinomios de grado $2M-1$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \approx \frac{\pi}{M}\sum_{j=1}^{M} g(x_j),$$

donde x_j son las raíces de $T_M(x)$.

(a) Aproxime la integral de los coeficientes c_k usando esta regla de cuadratura con $M = N+1$ puntos.

(b) Muestre que los coeficientes aproximados $\tilde{c}_k$ coinciden con los coeficientes del polinomio interpolador de f en los nodos de Chebyshev $x_0, \ldots, x_N$, expresado en la base $\{T_0, \ldots, T_N\}$.

(c) Concluya que calcular la interpolación en nodos de Chebyshev es equivalente a discretizar la proyección ortogonal mediante cuadratura Gaussiana.

Ejercicio 15 (Constante de Lebesgue) *La constante de Lebesgue Λ_n mide qué tan bien condicionado está el problema de interpolación.*

(a) Defina la constante de Lebesgue:

$$\Lambda_n = \max_{x\in[a,b]} \sum_{k=0}^{n} |\ell_k(x)|.$$

(b) Demuestre que el error de interpolación satisface:

$$\|f - p_n\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n)\|f - p_n^*\|_\infty,$$

donde p_n^* es el mejor polinomio de aproximación uniforme de grado n.

(c) Investigue y enuncie los valores de Λ_n para:

- *Nodos equiespaciados: $\Lambda_n = O(2^n/n)$ (crece exponencialmente).*
- *Nodos de Chebyshev: $\Lambda_n = O(\log n)$ (crece logarítmicamente).*

(d) Explique por qué una constante de Lebesgue grande indica que la interpolación puede amplificar errores en los datos.

Ejercicio 16 (Fenómeno de Runge) *El fenómeno de Runge muestra que aumentar el grado de interpolación con nodos equiespaciados puede hacer diverger el polinomio interpolante.*

(a) Considere la función de Runge $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ *en* $[-1, 1]$.

(b) Explique por qué esta función, siendo analítica en $\mathbb{R}$*, presenta problemas de convergencia en interpolación polinomial.* ***Sugerencia****: Considere los polos complejos* $x = \pm i/5$ *y su proximidad al intervalo real.*

(c) Para nodos equiespaciados $x_k = -1 + 2k/n$ *en* $[-1, 1]$*, el producto:*

$$\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$$

crece exponencialmente cuando x *se acerca a los extremos* ± 1*. Estime el orden de magnitud de este producto cerca de* $x = 1$.

(d) Usando el teorema del error de interpolación, explique por qué aunque f *sea suave, el error de interpolación puede crecer con* n *para nodos equiespaciados.*

(e) ¿Por qué el fenómeno de Runge no ocurre con nodos de Chebyshev?

Ejercicio 17 (Nodos de Chebyshev) *Los nodos de Chebyshev resuelven el fenómeno de Runge al minimizar el error de interpolación.*

(a) Los nodos de Chebyshev en $[-1, 1]$ *se definen como:*

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}\right), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Calcule los nodos de Chebyshev para $n = 4$ *(5 nodos).*

(b) Verifique que estos nodos son las raíces del polinomio de Chebyshev $T_{n+1}(x)$.

(c) Observe que los nodos se acumulan cerca de los extremos $x = \pm 1$ *y están más espaciados en el centro. ¿Por qué esta distribución es óptima?*

(d) Demuestre que con nodos de Chebyshev:

$$\left|\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\right| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Sugerencia*: Use que* $\prod_{k=0}^{n}(x - x_k) = \frac{1}{2^n}T_{n+1}(x)$ *y que* $|T_{n+1}(x)| \leq 1$ *en* $[-1, 1]$.

(e) Explique por qué esta cota garantiza convergencia para funciones suficientemente suaves, a diferencia de nodos equiespaciados.

Ejercicio 18 (Error de interpolación con nodos de Chebyshev) *(a) Enuncie el teorema: Si* $f \in C^{n+1}[-1, 1]$ *y* p_n *interpola* f *en los nodos de Chebyshev, entonces:*

$$\|f - p_n\|_\infty \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{2^n(n+1)!}.$$

(b) *Compare esta cota con la de nodos equiespaciados donde* $\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$ *puede crecer exponencialmente.*

(c) *Para* $f(x) = \sin(x)$ *en* $[-1, 1]$*, estime el error máximo de interpolación con* $n = 10$ *nodos de Chebyshev.*

(d) *¿Para qué valor de* n *el error es menor que* 10^{-10}*?*

(e) *Investigue sobre convergencia para funciones analíticas: la interpolación de Chebyshev converge geométricamente (exponencialmente) para funciones analíticas.*