Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2026

Laboratorio N° 2: Cuadrados Mínimos

Ejercicio 1 (Ajuste polinomial por cuadrados mínimos.)

Dados N datos (x_i, y_i), queremos encontrar el polinomio $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ de grado $n < N$ que minimiza el error cuadrático:

$$\min_{c \in \mathbb{R}^{n+1}} \|Ac - y\|_2^2,$$

donde $A \in \mathbb{R}^{N\times(n+1)}$ es la matriz de Vandermonde con $A_{ij} = x_i^j$ e $y = (y_1, \ldots, y_N)^T$.

1. Genere $N = 50$ datos con x_i equiespaciados en $[0, 1]$ e $y_i = \sin(2\pi x_i) + \varepsilon_i$, donde $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 0.2^2)$ es ruido gaussiano. Grafique los datos.

2. Para un grado n dado, arme la matriz A y resuelva el problema de cuadrados mínimos de tres maneras distintas:

   i. **Ecuaciones normales**: resuelva $A^T A\, c = A^T y$ usando `numpy.linalg.solve`.

   ii. **Factorización QR**: calcule $A = QR$ con `numpy.linalg.qr` y resuelva $Rc = Q^T y$.

   iii. **SVD**: use `numpy.linalg.lstsq` (que internamente usa la SVD).

   Verifique que los tres métodos dan (aproximadamente) el mismo resultado para $n = 5$.

3. Repita para $n = 5, 10, 15, 20$. Grafique el polinomio ajustado junto con los datos en cada caso. ¿A partir de qué grado se observa sobreajuste (overfitting)?

4. Para cada n, calcule el número de condición $\kappa_2(A)$ y el número de condición $\kappa_2(A^T A)$. ¿Qué relación hay entre ambos? ¿Para qué valores de n las ecuaciones normales dejan de dar resultados confiables? Compare con los resultados de QR y SVD.

5. Grafique el error $\|c_{\text{normales}} - c_{\text{SVD}}\|_\infty$ en función de n. ¿A partir de qué grado los métodos dan resultados significativamente distintos?