Elementos de Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2026

Práctica N° 3: Interpolación

Problema de Interpolación: Dados $n+1$ puntos distintos $x_0, \dots, x_n$ (llamados nodos) y $n+1$ valores $y_0, \dots, y_n$, buscamos un polinomio $p(x)$ de grado menor o igual a n tal que $p(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, \dots, n$.

Ejercicio 1 (Interpolación como problema lineal) *El problema de interpolación se puede ver como una transformación lineal entre espacios vectoriales.*

(a) Sea $\mathcal{P}_n$ el espacio de polinomios de grado a lo sumo n. Verifique que $\mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial y que $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es una base.

(b) Defina el operador de evaluación $\Phi : \mathcal{P}_n \to \mathbb{R}^{n+1}$ dado por:

$$\Phi(p) = (p(x_0), p(x_1), \dots, p(x_n)).$$

Demuestre que Φ es una transformación lineal.

(c) Interprete el problema de interpolación como la búsqueda de la transformación inversa Φ^{-1}: ¿qué representan la entrada y la salida de Φ^{-1}?

*(d) Demuestre que si los nodos $x_0, \dots, x_n$ son distintos, el problema de interpolación tiene solución única. **Sugerencia**: Pruebe que Φ es inyectiva analizando su núcleo. ¿Cuántas raíces puede tener un polinomio de grado n si no es idénticamente nulo? Use que $\dim(\mathcal{P}_n) = n+1$.*

Ejercicio 2 (Matriz de Vandermonde) *Dados nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$ distintos y valores $y_0, y_1, \dots, y_n$, queremos encontrar el polinomio $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ que satisface $p(x_i) = y_i$.*

(a) Escriba el sistema lineal correspondiente en forma matricial $Va = y$. La matriz V se conoce como matriz de Vandermonde.

(b) Analice el condicionamiento en norma 2 utilizando la caracterización variacional del valor singular mínimo: $\sigma_{\min}(V) = \min_{a \neq 0} \frac{\|Va\|_2}{\|a\|_2}$.

i. Observe que $\|Va\|_2^2 = \sum_{i=0}^{n} (p(x_i))^2$, donde $p(x)$ es el polinomio con coeficientes a. Si los nodos x_i cubren densamente el intervalo $[-1, 1]$, interprete esta suma como una aproximación de Riemann escalada para justificar la relación aproximada (donde $C_n = O(n)$):

$$\|Va\|_2^2 \approx C_n \int_{-1}^{1} (p(x))^2 dx.$$

ii. *Considere el polinomio de prueba* $p(x) = (1-x^2)^n$. *Identifique sus coeficientes no nulos y demuestre usando la identidad* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ *que la norma de los coeficientes satisface* $\|a\|_2^2 \geq 4^n/(2n+1)$.

iii. *Justifique que la integral* $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{2n}dx$ *es pequeña (tiende a 0 con* n*) mientras que* $\|a\|_2^2$ *crece exponencialmente.*

iv. *Concluya que* $\sigma_{\min}(V)$ *decae exponencialmente con* n*, lo que implica que* $\kappa_2(V)$ *crece exponencialmente.*

Ejercicio 3 (Polinomios base de Lagrange) *(a) Para los nodos* $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$*, calcule explícitamente los tres polinomios base de Lagrange:*

$$\ell_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{2} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}, \quad k = 0, 1, 2.$$

(b) Verifique que $\ell_k(x_j) = \delta_{kj}$ *(propiedad de Kronecker).*

(c) Verifique que $\ell_0(x) + \ell_1(x) + \ell_2(x) = 1$ *para todo* x *(propiedad de partición de la unidad).*

(d) Use la fórmula de Lagrange para encontrar el polinomio que interpola los puntos $(-1, 2), (0, -1), (1, 4)$.

(e) Evalúe $p(0.5)$ *y compare con evaluación directa en los polinomios base.*

Ejercicio 4 (Forma baricéntrica de Lagrange) *La forma baricéntrica es una reformulación numéricamente estable de la interpolación de Lagrange.*

(a) Defina los pesos baricéntricos:

$$w_k = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

(b) Para los nodos $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$*, calcule los pesos* w_0, w_1, w_2.

(c) Demuestre que el polinomio interpolante se puede escribir como:

$$p(x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - x_k} y_k}{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_k}{x - x_k}}.$$

(d) Compare el costo computacional de evaluar:

- *La fórmula de Lagrange estándar:* $O(n^2)$ *por evaluación.*
- *La forma baricéntrica:* $O(n^2)$ *preproceso +* $O(n)$ *por evaluación.*

Ejercicio 5 (Error de interpolación) *Sea* $f \in C^{n+1}([a, b])$ *y* p_n *el polinomio que interpola* f *en* $n + 1$ *nodos* $x_0, \ldots, x_n \in [a, b]$.

(a) Para $f(x) = e^x$ *en* $[0, 1]$ *con nodos* $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$:

- *Encuentre el polinomio interpolante $p_2(x)$.*
- *Estime el error máximo en $[0,1]$ usando la fórmula del error.*
- *Compare con el error real $|f(0.25) - p_2(0.25)|$.*

(b) *¿En qué puntos x el error es exactamente cero?*

Ejercicio 6 (Interpolación a trozos) *Dados nodos $x_0 < \cdots < x_n$ y valores y_i, la interpolación lineal a trozos $s(x)$ conecta los puntos (x_i, y_i) con segmentos de recta.*

(a) *Escriba la expresión de $s(x)$ en $[x_i, x_{i+1}]$ y verifique su continuidad en los nodos. Verifique que no es diferenciable en general.*

(b) *Demuestre la cota de error $\|f - s\|_\infty \leq \frac{h^2}{8}\|f''\|_\infty$, donde $h = \max_i \Delta x_i$.*

(c) *Compare con la interpolación polinomial global: ¿evita $s(x)$ el fenómeno de Runge? ¿Cuál converge más rápido para funciones suaves analíticas?*

Ejercicio 7 (Splines cúbicos) *Un **spline cúbico** $s(x)$ es una función C^2 que coincide con un polinomio cúbico en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ e interpola los datos.*

(a) *Cuente los grados de libertad (4n coeficientes) y restricciones (2n de interpolación/continuidad en extremos de intervalos, $2(n-1)$ de suavidad C^1, C^2). Concluya que faltan 2 condiciones de frontera (ej. "natural" $s'' = 0$, o "sujeto" $s' = f'$ en extremos).*

(b) *Demuestre la **propiedad variacional**: El spline cúbico natural minimiza la energía de curvatura $\int_a^b [u''(x)]^2 dx$ entre todas las funciones C^2 que interpolan los datos.*

Ejercicio 8 (Cuadratura interpolatoria) *Un método muy común y general de integración numérica es interpolar el integrando, e integrar el polinomio interpolante.*

(a) ***Regla del trapecio**: Interpole $f(x)$ en $[a,b]$ con una línea recta pasando por $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Demuestre que:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

(b) ***Regla de Simpson**: Interpole $f(x)$ en $[a,b]$ con una parábola pasando por $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$, $x_2 = b$. Demuestre que:*

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

(c) *Use el teorema del error de interpolación para estimar el error de cada fórmula.*

Ejercicio 9 (Límite de precisión de las reglas de cuadratura) *Sea $Q_n(f) = \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$ una regla de cuadratura interpolatoria basada en $n+1$ nodos distintos $x_0, \ldots, x_n$. Demuestre que es imposible construir una regla de cuadratura con $n+1$ nodos que sea exacta para todos los polinomios de grado $2n+2$. **Sugerencia**: Considere el polinomio $P(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)^2$.*

Ejercicio 10 (Diferenciación numérica) *Muchas fórmulas de diferenciación numérica se pueden obtener derivando polinomios que interpolan los datos.*

(a) *Interpole $f(x)$ en $x_0, x_0 + h$ con el polinomio $p_1(x)$ de Lagrange.*

(b) *Derive $p_1(x)$ para obtener la aproximación de diferencias finitas:*

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

(c) *Interpole $f(x)$ en $x_0 - h, x_0, x_0 + h$ con el polinomio $p_2(x)$.*

(d) *Derive $p_2(x)$ y evalúe en x_0 para obtener la fórmula centrada:*

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}.$$

(e) *Use el teorema del error de interpolación para estimar el error de truncamiento de cada fórmula.*

Transformada Discreta de Fourier

Ejercicio 11 (La DFT como cambio de base unitario) *Consideremos el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^N$ con el producto interno canónico $\langle u, v\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} u_j \overline{v}_j$. La matriz de Fourier $F \in \mathbb{C}^{N\times N}$ tiene entradas $F_{jk} = \frac{1}{\sqrt{N}}\omega_N^{jk}$ para $j, k = 0, \ldots, N-1$, donde $\omega_N = e^{2\pi i/N}$.*

(a) *Verifique la identidad de ortogonalidad discreta:*

$$\sum_{p=0}^{N-1} \omega_N^{jp}\overline{\omega_N^{kp}} = N\delta_{jk}.$$

(b) *Demuestre que la matriz de Fourier es unitaria, es decir, $FF^* = I$.*

(c) *Deduzca que la transformación inversa (IDFT) viene dada por la matriz conjugada: $F^{-1} = F^*$.*

(d) *Escriba explícitamente la fórmula para recuperar un vector x a partir de su transformada $\hat{x} = Fx$:*

$$x_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \omega_N^{-jk}.$$

Ejercicio 12 (Equivalencia con la evaluación polinomial) *En contextos algebraicos, la DFT se define a menudo directamente como la evaluación de un polinomio en las raíces de la unidad, sin referencia a cambios de base. Sea $a \in \mathbb{C}^N$ un vector. Asociamos a a el polinomio $P_a(z) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j z^j$. Definimos la transformada $\mathcal{T}(a) \in \mathbb{C}^N$ como el vector de evaluaciones:*

$$\mathcal{T}(a)_k = P_a(\omega_N^k), \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

(a) *Escriba la suma que define $\mathcal{T}(a)_k$ y demuestre que esta definición es equivalente a la definición matricial $\hat{a} = Fa$ vista anteriormente (posiblemente salvo un factor de escala $\sqrt{N}$), estableciendo así la equivalencia entre ambas visiones.*

(b) *Observe que el problema de interpolación dado $y = \mathcal{T}(a)$ consiste en hallar la transformación inversa $a = \mathcal{T}^{-1}(y)$. Demuestre que esta inversa $\mathcal{T}^{-1}$ corresponde a aplicar la matriz adjunta F^* (la DFT Inversa), cerrando el círculo: evaluar es aplicar F, interpolar es aplicar $F^{-1} = F^*$.*

Ejercicio 13 (Convolución Discreta) *Una de las propiedades más importantes de la DFT es su relación con la convolución.*

(a) *Dadas dos secuencias $u, v \in \mathbb{C}^N$, definimos su* ***convolución circular*** *$w = u * v$ como:*

$$w_k = \sum_{j=0}^{N-1} u_j v_{(k-j) \pmod N}, \quad k = 0, \dots, N-1.$$

(b) *Demuestre el Teorema de la Convolución: La DFT de la convolución es el producto punto a punto de las DFTs (salvo por un factor de escala dependiente de la normalización):*

$$\widehat{(u * v)}_k = \sqrt{N} \hat{u}_k \hat{v}_k.$$

(c) *Explique cómo esto permite calcular la convolución de dos vectores muy largos de manera eficiente ($O(N \log N)$) usando la Transformada Rápida de Fourier (FFT), en contraste con el costo $O(N^2)$ de la definición directa.*

Ejercicio 14 (Multiplicación rápida de polinomios) *Sean $P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j$ y $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ dos polinomios de grado menor que n. Queremos calcular su producto $R(x) = P(x)Q(x)$.*

(a) *Muestre que el coeficiente c_k del término x^k en $R(x)$ está dado por la convolución de los coeficientes de P y Q:*

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

(b) *Observe que el grado de $R(x)$ puede ser hasta $2n-2$. Para usar el Teorema de la Convolución Cíclica (que opera en vectores de longitud fija N), necesitamos "rellenar con ceros" (zero-padding). Defina vectores extendidos $A, B \in \mathbb{C}^N$ con $N \geq 2n-1$ completando con ceros.*

(c) *Describa el algoritmo completo para multiplicar polinomios usando FFT:*

   i. *Extender coeficientes a tamaño N.*
   ii. *Calcular FFT(A) y FFT(B).*
   iii. *Multiplicar punto a punto.*
   iv. *Calcular IFFT del resultado.*

(d) *Compare la complejidad asintótica de este método con la multiplicación clásica "todos con todos" ($O(n^2)$). ¿A partir de qué grado n aproximado cree que vale la pena usar FFT?*

Interpolación en cuerpos finitos

Ejercicio 15 (Interpolación en cuerpos finitos: definiciones básicas) *La interpolación polinomial también funciona sobre cuerpos finitos $\mathbb{Z}_p$ donde p es primo.*

(a) Verifique que el espacio de polinomios $\mathcal{P}_n(\mathbb{Z}_p) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{Z}_p\}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{Z}_p$. ¿Cuál es la su dimensión?

(b) Dados $n+1$ puntos distintos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ con $x_i \in \mathbb{Z}_p$ distintos e $y_i \in \mathbb{Z}_p$, demuestre que existe un único polinomio $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{Z}_p)$ tal que $p(x_i) \equiv y_i \pmod{p}.\mathbb{Z}_p$.

Ejercicio 16 (Interpolación en $\mathbb{Z}_7$) *Trabajaremos en $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ con aritmética módulo 7.*

(a) Calcule la tabla de multiplicación módulo 7 para verificar que todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo.

(b) Queremos interpolar los puntos $(1, 3), (2, 5), (4, 2)$ en $\mathbb{Z}_7$.

(c) Construya la matriz de Vandermonde:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1^2 \\ 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \pmod{7}.$$

(d) Calcule $\det(V) \pmod{7}$ y verifique que es V invertible.

(e) Resuelva el sistema $Va = y$ donde $y = (3, 5, 2)^T$ para encontrar los coeficientes (a_0, a_1, a_2) del polinomio interpolante $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \pmod{7}$.

(f) Verifique que $p(1) \equiv 3$, $p(2) \equiv 5$, $p(4) \equiv 2 \pmod{7}$.

Ejercicio 17 (Fórmula de Lagrange en $\mathbb{Z}_p$) *La fórmula de Lagrange también funciona en cuerpos finitos.*

(a) Para $p = 5$, construya los polinomios base de Lagrange para los nodos $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$ en $\mathbb{Z}_5$.

(b) Recuerde que necesita calcular inversos multiplicativos en $\mathbb{Z}_5$:

- $1^{-1} \equiv 1 \pmod{5}$
- $2^{-1} \equiv 3 \pmod{5}$ *(ya que $2 \cdot 3 = 6 \equiv 1$)*
- $3^{-1} \equiv 2 \pmod{5}$
- $4^{-1} \equiv 4 \pmod{5}$ *(ya que $4 \cdot 4 = 16 \equiv 1$)*

(c) Calcule explícitamente:

$$\ell_0(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} \pmod{5}.$$

(d) *Simplifique y verifique que* $\ell_0(1) \equiv 1$, $\ell_0(2) \equiv 0$, $\ell_0(4) \equiv 0 \pmod 5$.

(e) *Use la fórmula de Lagrange para interpolar los puntos* $(1,2), (2,4), (4,1)$ *en* $\mathbb{Z}_5$.

Ejercicio 18 (Esquema de Shamir) *Un esquema de compartición de secretos* (k,n) *permite dividir un secreto entre* n *personas de modo que cualquier* k *de ellas puedan reconstruirlo, pero* $k-1$ *no pueden obtener información alguna.*

El secreto es un número $s \in \mathbb{Z}_p$ *(con* p *primo grande). Se elige un polinomio aleatorio* $f(x) = s + a_1x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1} \pmod p$ *de grado* $k-1$ *con* $f(0) = s$*. Los coeficientes* a_i *se eligen al azar en* $\mathbb{Z}_p$ *siguiendo una distribución uniforme. Luego, se distribuyen las* n *"porciones" (shares):* $(1, f(1)), (2, f(2)), \ldots, (n, f(n))$.

(a) *Explique por qué cualquier* k *porciones permiten reconstruir* $f(x)$ *mediante interpolación de Lagrange en* $\mathbb{Z}_p$*, y por tanto recuperar* $s = f(0)$.

(b) *Explique por qué con solo* $k-1$ *porciones, el secreto* s *puede ser cualquier valor en* $\mathbb{Z}_p$ *con igual probabilidad.* ***Sugerencia****: Muestre que existe un único polinomio de grado* $\leq k-1$ *compatible con la información parcial y un candidato a secreto* $\tilde{s} \in \mathbb{Z}_p$ *dado. Concluya el resultado a partir del hecho de que los coeficientes se eligieron uniformemente al azar.*