Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

# Elementos de Cálculo Numérico

`Primer Cuatrimestre 2026`

## Laboratorio N° 2: Raíces de Polinomios via Autovalores

**Ejercicio 1 (Raíces de un polinomio como autovalores de la matriz compañera.)**
Dado un polinomio mónico de grado $n$,

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

su *matriz compañera* es la matriz $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida por:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

1. Verifique (a mano, para $n = 3$) que el polinomio característico de $C$ es $\det(xI - C) = p(x)$. Concluya que las raíces de $p$ son los autovalores de $C$.

2. Considere el polinomio de grado 100 con raíces conocidas $r_k = k$ ($k = 1, \dots, 100$):

   $$p(x) = \prod_{k=1}^{100}(x - k).$$

   Expanda el producto para obtener los coeficientes $a_0, \dots, a_{99}$ (use `numpy.polynomial.polynomial.po` o `numpy.poly`).

3. Construya la matriz compañera $C$ de $100\times 100$ y calcule sus autovalores usando `numpy.linalg.eig` (o `eigvals`).

4. Compare los autovalores obtenidos con las raíces exactas $1, 2, \dots, 100$. Grafique el error $|r_k - \tilde{r}_k|$ en función de $k$, donde $\tilde{r}_k$ es el autovalor más cercano a $r_k$. ¿El error es uniforme o crece para ciertas raíces?

5. Repita el experimento usando aritmética de punto flotante de mayor precisión (por ejemplo, `mpmath` con 50 dígitos) para expandir los coeficientes. ¿Mejoran los resultados? ¿Dónde se introduce el error: al expandir el producto o al calcular los autovalores?

6. Repita para el polinomio de Wilkinson $W(x) = \prod_{k=1}^{20}(x - k)$ y perturbe el coeficiente de $x^{19}$ sumándole $2^{-23}$. ¿Cuánto cambian las raíces? Relacione con el condicionamiento del problema.