Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Entrega N°2

El objetivo de esta entrega es resolver el problema de optimizar una cartera de inversión, implementando primero un método de penalidad y luego utilizando la librería `JuMP.jl` de Julia.

Problema

Consideremos a un inversionista que desea asignar una unidad de capital entre n activos que ofrecen tasas de retorno aleatorias $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$, respectivamente. Definimos $\bar{\epsilon}_i = E[\epsilon_i]$ para $i = 1, \dots, n$, y la matriz de covarianza

$$Q = \begin{pmatrix} E((\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1)^2) & \dots & E((\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1)(\epsilon_n - \bar{\epsilon}_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E((\epsilon_n - \bar{\epsilon}_n)(\epsilon_1 - \bar{\epsilon}_1)) & \dots & E((\epsilon_n - \bar{\epsilon}_n)^2) \end{pmatrix}$$

Q se asume conocida, y además inversible. Si x_i es el monto invertido en el activo i, la media y la varianza del retorno de la inversión $y = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i$ son

$$\bar{y} = E[y] = \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i x_i,$$

$$\sigma^2 = E\{(y-\bar{y})^2\} = E\left\{ \left(\sum_{i=1}^n (\epsilon_i - \bar{\epsilon}_i) x_i \right)^2 \right\} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E\{(\epsilon_i - \bar{\epsilon}_i)(\epsilon_j - \bar{\epsilon}_j)\} x_i x_j = x^t Q x.$$

El objetivo del inversionista es encontrar el portafolio $x = (x_1, \dots, x_n)$ que minimice la varianza $E\{(y - \bar{y})^2\}$ para alcanzar un retorno medio deseado $E[y] = m$. El problema es entonces:

$$\begin{array}{ll} \min & x^t Q x \\ \text{sujeto a} & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i x_i = m. \end{array}$$

Ejercicio 1 Supongamos que disponemos de 4 activos financieros con los siguientes rendimientos esperados y matriz de covarianzas:

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}10 \\ 0{,}07 \\ 0{,}03 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0{,}0100 & 0{,}0018 & 0{,}0011 & 0{,}0022 \\ 0{,}0018 & 0{,}0109 & 0{,}0013 & 0{,}0018 \\ 0{,}0011 & 0{,}0013 & 0{,}0084 & 0{,}0011 \\ 0{,}0022 & 0{,}0018 & 0{,}0011 & 0{,}0054 \end{bmatrix}$$

El problema de optimización es:

$$\begin{aligned} \min_{w} \quad & x^T \Sigma x \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{i=1}^{4} x_i = 1 \\ & \sum_{i=1}^{4} x_i \bar{\epsilon}_i = 0{,}08 \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Implementar una función `penalidad` que utilice el método de penalidad (ver explicación en guía de labo 4). La función debe imprimir el resultado de las cantidades a invertir en cada activo.

Ejercicio 2 Resolver el mismo problema utilizando la librería `JuMP.jl` y comparar los resultados con el ejercicio anterior. Pueden ver la documentación y tutorial `https://jump.dev/JuMP.jl/stable/`.

Ejercicio 3 (Opcional) Utilizar `JuMP.jl` para resolver este mismo problema utilizando el dataset `stocks.csv` (que se encuentra en la carpeta `material_practicas`). Tener en cuenta que deberá calcular los retornos esperados de cada activo y la matriz de covarianza. *Sugerencias:* Utilizar los paquetes `CSV`, `DataFrame` y `Statistics`.