Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Ejercicios para pensar

Ejercicio 1 Considerar la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3(1-x)^2}{4} - 2(1-x), & \text{si } x > 1, \\ \frac{3(1+x)^2}{4} - 2(1+x), & \text{si } x < -1, \\ x^2 - 1, & \text{si } -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Notar que f es estrictamente convexa, diferenciable y tiene un único mínimo en $x^* = 0$.

(a) Dados x_1, x_2, probar que $f(x_1) < f(x_2)$ si y solo si $|x_1| < |x_2|$.

(b) Consideremos la recurrencia

$$x_{k+1} = x_k - t\nabla f(x_k)$$

con $t = 1$. Supongamos que comenzamos con $|x_0| > 1$. Probar que la reccurrencia genera un método de descenso pero que la sucesión $\{x_k\}_k$ no converge al mínimo.

Ejercicio 2 Consideremos el método de descenso con dirección d_k y paso α_k dado por la condición de Wolfe. Supongamos que f es acotado interiormente, diferenciable en un conjunto $D \subset \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ y con ∇f Lipschitz en D con constante $L > 0$.

(a) Probar que $\sum_{k\geq 0} \cos^2 \theta_k \|\nabla f(x_k)\| < \infty$, donde

$$\cos \theta_k = \frac{-\nabla f(x_k)^t d_k}{\|\nabla f(x_k)\| \|d_k\|}$$

(b) Como debe tomarse θ_k para que el método genere una sucesión que converja a un punto estacionario.

Recuerdo: La condición de Wolfe establece que α_k debe tomarse de tal forma que

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha_k \nabla f(x_k)^t d_k \tag{1}$$

$$\nabla f(x_k + \alpha_k d_k)^t d_k \geq c_2 \nabla f(x_k)^t d_k \tag{2}$$

con $0 < c_1 < c_2 < 1$.