Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

# Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

## Repaso para parcial

**Ejercicio 1** Sea $f \in C^1$ convexa tal que existe $G > 0$ tal que $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq G$ para todo $\mathbf{x} \in S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)\}$. Supongamos que $f$ tiene un mínimo $\mathbf{x}^*$ en $S$ y consideremos la recurrencia $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k \nabla f(\mathbf{x}_k)$, con $\alpha_k > 0$, y no necesariamente $f(\mathbf{x}_{k+1}) \leq f(\mathbf{x}_k)$.

1. Probar que

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2 - 2\alpha_k(f(\mathbf{x}_k) - f(\mathbf{x}^*)) + \alpha_k^2 \|\nabla f(\mathbf{x}_k)\|^2.$$

   *Sugerencia: Recordar que $\|v\|^2 = v^t \cdot v$ y tener en cuenta la convexidad de $f$.*

2. Teniendo en cuenta lo probado en el ítem previo probar que

$$\sum_{i=0}^{k} 2\alpha_i(f(\mathbf{x}_i) - f(\mathbf{x}^*)) \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|^2 + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^2 \|\nabla f(\mathbf{x}_i)\|^2.$$

3. Si consideramos $f^k = \text{mín}\{f(\mathbf{x}_0), ..., f(\mathbf{x}_k)\}$, probar que

$$f^k - f(\mathbf{x}^*) \leq \frac{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k} \alpha_i}$$

   Concluir que si se toma $\alpha_k$ tal que $\sum_k \alpha_k^2 < \infty$ y $\sum_k \alpha_k = \infty$ el método converge. (Por ejemplo, $\alpha_k = 1/k$)

**Ejercicio 2** Sea $f$ una función cuadrática definida como

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^t \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{b}^t \mathbf{x}$$

con $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica y definida positiva. Sean $\{\mathbf{d}_0, ..., \mathbf{d}_k\}$ direcciones $\mathbf{Q}$-conjugadas, y sean $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$. Si para todo $j = 0, ..., k$, se construyen los puntos $\mathbf{x}_{j+1}$ e $\mathbf{y}_{j+1}$ de la siguiente forma

$$\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j + \alpha_j \mathbf{d}_j$$
$$\mathbf{y}_{j+1} = \mathbf{y}_j + \beta_j \mathbf{d}_j$$

donde $\alpha_j$ y $\beta_j$ son las soluciones de los problemas:

$$\min_{\alpha\in\mathbb{R}} f(\mathbf{x}_j + \alpha\mathbf{d}_j), \quad \min_{\beta\in\mathbb{R}} f(\mathbf{y}_j + \beta\mathbf{d}_j)$$

Entonces $\mathbf{d}_{k+1} = (\mathbf{y}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1})$ es $\mathbf{Q}$-ortogonal con $\{\mathbf{d}_1, ..., \mathbf{d}_k\}$.

**Ejercicio 3** Consideremos el problema

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ &s.a\ \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq 1 \end{aligned}$$

1. Escribir las condiciones de KKT para este problema.
2. Mostrar que si existe $\mathbf{y}$ tal que

   $$\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{A}\mathbf{y} \neq 0$$

   entonces el mínimo está dado por $\mathbf{x}^* = -\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|}$.