Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica N° 2: Métodos de descenso.

Notación:

$$\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{x}_k)$$
$$\mathbf{H}_k = Hf(\mathbf{x}_k)$$

Ejercicio 1 Consideramos el problema de minimizar la función

$$f(x, y) = 3x^2 + y^4.$$

(a) Aplica una iteración del método del descenso más rápido partiendo de $(1, -2)$ y con el tamaño de paso elegido según la regla de Armijo, con $s = 1$, $\sigma = 0{,}1$ y $\beta = 0{,}5$.

(b) Repite el procedimiento usando $s = 1$, $\sigma = 0{,}1$ y $\beta = 0{,}1$ en su lugar. ¿Cómo se compara el costo del nuevo iterado con el obtenido en (a)? Comenta sobre los compromisos implicados en la elección de β.

(c) Aplique una iteración del método de Newton con el mismo punto de partida y utilizando una regla para el tamaño de paso. ¿Cómo se compara el costo del nuevo iterado con el obtenido en (a)? ¿Y qué se puede decir sobre la cantidad de trabajo implicada en encontrar el nuevo valor?

Ejercicio 2 Consideremos la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \|x\|^{\frac{3}{2}},$$

y el método del descenso más rápido con un tamaño de paso constante.

(a) Demuestra que para esta función la condición de Lipschitz no se satisface para ningún L.

(b) Demuestra que, para cualquier valor del tamaño de paso constante, el método o bien converge en un número *finito* de iteraciones al punto minimizante $x^* = 0$ o bien no converge a x^*.

Ejercicio 3 Sea f una función cuadrática de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}x'Qx - b'x,$$

donde Q es una matriz simétrica definida positiva.

(a) Demuestra que la condición de Lipschitz se satisface con L igual al autovalor máximo de Q.

(b) Considera el método del gradiente

$$x^{k+1} = x^k - sD\nabla f(x^k),$$

donde D es una matriz simétrica definida positiva. Demuestra que el método converge a $x^* = Q^{-1}b$ para cualquier punto inicial x^0 si y solo si $s \in \left(0, \frac{2}{\tilde{L}}\right)$, donde $\tilde{L}$ es el autovalor máximo de $D^{\frac{1}{2}}QD^{\frac{1}{2}}$.

Ejercicio 4 Considerar el método de tipo gradiente $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ con α_k elegido usando la regla de minimización y $d_k = -(0, ..., 0, \partial_i f(x_k), 0, ..., 0)^t$ siendo $|\partial_i f(x_k)| = \max\{|\partial_j f(x_k)| : j = 0, ..., n\}$. Demostrar que todo punto límite de una sucesión generada por este método es un punto estacionario.

Ejercicio 5 Sea f una función cuadrática de la forma

$$f(x) = \frac{1}{2}x'Qx - b'x,$$

donde Q es una matriz simétrica definida positiva.

(a) Demuestra que la condición de Lipschitz

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|$$

se satisface con L igual al autovalor máximo de Q.

(b) Considera el método del gradiente

$$x^{k+1} = x^k - sD\nabla f(x^k),$$

donde D es una matriz simétrica definida positiva. Demuestra que el método converge a $x^* = Q^{-1}b$ para todo punto inicial x^0 si y solo si

$$s \in \left(0, \frac{2}{\hat{L}}\right),$$

donde $\hat{L}$ es el autovalor máximo de $D^{\frac{1}{2}}QD^{\frac{1}{2}}$.

Ejercicio 6 Sea

$$f(x) = \frac{1}{2}x'Qx,$$

donde Q es una matriz simétrica, invertible, y posee al menos un autovalor negativo. Considera el método del descenso más rápido con tamaño de paso constante y demuestra que, a menos que el punto inicial x^0 pertenezca al subespacio generado por los vectores propios de Q correspondientes a los valores propios no negativos, la sucesión generada $\{x^k\}$ diverge.

Ejercicio 7 Considera el método del descenso más rápido

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k\nabla f(x^k),$$

y supongamos que f es convexa, tiene al menos un punto minimizante, y que para todo x, y y para algún $L > 0$ se satisface

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Demuestra que la sucesión $\{x^k\}$ converge a un punto minimizante de f bajo cada una de las siguientes condiciones para la regla del tamaño de paso:

(a) Existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\varepsilon \alpha^k \leq \frac{2-\varepsilon}{L} \quad \forall k.$$

(b) Se cumple que $\alpha^k \to 0$ y $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \infty$.

Ejercicio 8 Considera la función unidimensional

$$f(x) = \frac{2}{3}\,|x|^s + \frac{1}{2}\,x^2,$$

y el método del descenso más rápido con tamaño de paso

$$\alpha^k = \frac{\gamma}{k+1},$$

donde γ es un escalar positivo.

(a) Demuestra que para $\gamma = 1$ y $|x^0| \geq 1$ el método diverge. En particular, muestra que $|x^k| \geq k+1$ para todo k.

(b) Caracteriza lo mejor posible el conjunto de pares (γ, x^0) para los cuales el método converge a $x^* = 0$.

(c) ¿Cómo se reconcilian los resultados de (a) y (b) con el teorema de convergencia para tamaño de paso decreciente?

Ejercicio 9 Considera el método del descenso más rápido

$$x^{k+1} = x^k - \alpha\Big(\nabla f(x^k) + e^k\Big),$$

donde e^k es un error que satisface $\|e^k\| \leq \delta$ para todo k. Supongamos que ∇f es Lipschitz continua. Demuestra que para cualquier $\delta' > \delta$ existe un intervalo de tamaños de paso positivos $[\alpha_1, \alpha_2]$ tal que, si $\alpha^k \in [\alpha_1, \alpha_2]$ para todo k suficientemente grande, entonces o bien $f(x^k) \to \infty$ o $\|\nabla f(x^k)\| < \delta'$ para infinitos valores de k. *Sugerencia:* Usar el razonamiento del teorema de convergencia para tamaño de paso constante.

Ejercicio 10 Estime la tasa de convergencia del método del descenso más rápido con la regla de minimización cuando se aplica a la función de dos variables

$$f(x, y) = x^2 + 1{,}999\,xy + y^2.$$

Encuentra un punto inicial para el cual esta estimación sea ajustada.

Ejercicio 11 Considere el método del descenso más rápido

$$x^{k+1} = x^k - \alpha\Big(\nabla f(x^k) + e^k\Big),$$

donde α es un tamaño de paso constante, e^k es un error que satisface $\|e^k\| \leq \delta$ para todo k, y f es la función cuadrática definida positiva

$$f(x) = \frac{1}{2}\,(x - x^*)'Q\,(x - x^*).$$

Sea

$$q = \text{máx}\{\,|1 - \alpha m|,\ |1 - \alpha M|\},$$

donde m es el valor propio mínimo de Q y M es el valor propio máximo. Supongamos que $q < 1$.

Demuestre que para todo k se tiene

$$\|x^k - x^*\| \leq \frac{\alpha\delta}{1-q} + q^k\|x^0 - x^*\|.$$

Ejercicio 12 El propósito de este ejercicio es demostrar que el método de Newton no se ve afectado por el escalado de las variables. Considere una transformación lineal invertible de las variables

$$x = Sy.$$

Escriba la forma pura del método de Newton en el espacio de las variables y y demuestre que genera la sucesión

$$y^k = S^{-1}x^k,$$

donde $\{x^k\}$ es la sucesión generada por el método de Newton en el espacio de las variables x.

Ejercicio 13 Consideremos un método de Newton truncado con el tamaño de paso elegido mediante la regla de Armijo, con tamaño de paso inicial $s = 1$ y $\sigma < \frac{1}{2}$, y supongamos que la sucesión $\{x^k\}$ converge a un mínimo local no singular x^*. Supongamos que las matrices H^k y las direcciones d^k satisfacen

$$\lim_{k\to\infty} \|H^k - \nabla^2 f(x^k)\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\|H^k d^k + \nabla f(x^k)\|}{\|\nabla f(x^k)\|} = 0.$$

Demuestre que la sucesión $\{\|x^k - x^*\|\}$ tiene convergencia superlineal.

Ejercicio 14 Aplique el método de Newton con paso constante para minimizar la función

$$f(x) = \|x\|^3.$$

Identifique el intervalo de tamaños de paso para el cual se obtiene la convergencia, y demuestre que dicho intervalo incluye el tamaño de paso unidad. Demuestre que, para cualquier tamaño de paso en ese intervalo, el método converge linealmente a $x^* = 0$. Explique este hecho a la luz de la teoría de la tasa de convergencia del método de Newton.

Ejercicio 15

(a) Considere la forma pura del método de Newton para el caso de la función costo

$$f(x) = \|x\|^\beta,$$

donde $\beta > 1$. ¿Para qué puntos iniciales y valores de β converge el método a la solución óptima? ¿Qué ocurre cuando $\beta < 1$?

(b) Repite el análisis para el caso en que se utiliza el método de Newton con la regla de Armijo.