Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Ejercicios para pensar

Ejercicio 1 Sea $f(x) = \frac{1}{2}x^tQx - b^tx$ con Q simétrica definida positiva. Sea x_1 un minimizante de f en un subespacio S_1 que contiene al vector d y sea x_2 un minimizante de f en un subespacio S_2 que contiene a d. Mostrar que si $f(x_1) < f(x_2)$ entonces $\overline{x} = x_1 - x_2$ es $Q-$ortogonal a d.

Esta propiedad sugiere un método de direcciones conjugadas que no evalúa gradientes y solo utiliza minimizaciones lineales.

Proposición 1: (Teorema del Multiplicador de Lagrange – Condiciones Necesarias)
Sea x^* un mínimo local de f sujeto a $h(x) = 0$, y suponga que los gradientes de las restricciones $\nabla h_1(x^*), \ldots, \nabla h_m(x^*)$ son linealmente independientes. Entonces existe un vector único $\lambda^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$, llamado *vector de multiplicadores de Lagrange*, tal que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0.$$

Si además f y h son dos veces continuamente diferenciables, se cumple

$$y' \left(\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla^2 h_i(x^*) \right) y \geq 0, \quad \text{para todo } y \in V(x^*),$$

donde $V(x^*)$ es el subespacio de variaciones factibles de primer orden:

$$V(x^*) = \{y \mid \nabla h_i(x^*)'y = 0, \, i = 1, \ldots, m\}.$$

Proposición 2: (Condiciones Suficientes de Segundo Orden)
Suponga que f y h son dos veces continuamente diferenciables, y sean $x^* \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ vectores que satisfacen:

$$\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0, \quad \nabla_\lambda L(x^*, \lambda^*) = 0,$$

$$y' \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) y > 0, \quad \text{para todo } y \neq 0 \text{ con } \nabla h(x^*)'y = 0.$$

Entonces, x^* es un **mínimo local estricto** de f sujeto a $h(x) = 0$. De hecho, existen escalares $\gamma > 0$ y $\epsilon > 0$ tales que:

$$f(x) \geq f(x^*) + \frac{\gamma}{2}\|x - x^*\|^2, \quad \forall\, x \text{ con } h(x) = 0 \text{ y } \|x - x^*\| < \epsilon.$$

Ejercicio 2 Sea x^* un punto factible que es regular y que, junto con algún λ^*, satisface las condiciones necesarias de primer y segundo orden de la Proposición 1. Demuestrar que x^* y λ^* satisfacen las condiciones suficientes de segundo orden de la Proposición 2 si y solo si la matriz

$$\begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(x^*, \lambda^*) & \nabla h(x^*) \\ \nabla h(x^*)' & 0 \end{pmatrix}$$

es no singular.