

# OPTIMIZACIÓN

Primer Cuatrimestre 2025

---

## Práctica N° 1: Condiciones de optimalidad

**Ejercicio 1** Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente creciente y  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Probar que minimizar  $f(\mathbf{x})$  es equivalente a minimizar  $g(f(\mathbf{x}))$ .

**Ejercicio 2** Muestre que para  $f(x) = x^3$ , el punto  $x = 0$  satisface las condiciones necesarias de optimalidad pero no es un mínimo.

**Ejercicio 3** Muestre que para  $f(x) = x^2 - x^4$ , los únicos puntos que satisfacen las condiciones necesarias de optimalidad son  $0, \frac{1}{\sqrt{2}}$  y  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  pero ninguno de ellos es un mínimo global.

**Ejercicio 4** Muestre que la función  $f(x, y) = x^2 - y^3$  verifica  $\nabla f(0, 0) = 0$  y  $Hf(0, 0) \geq 0$  pero que sin embargo el punto  $(0, 0)$  no es un mínimo local.

**Ejercicio 5** Demuestre que si  $x^*$  es un mínimo local estricto y no-singular de una función  $C^2$  entonces es un mínimo aislado, es decir, existe un entorno  $U$  de  $x^*$  tal que  $x^*$  es el único punto estacionario en  $U$ .

**Ejercicio 6** Considerar la función

$$f(x) = x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^4, \quad f(0) = 0,$$

Mostrar que  $f \in C^2$ , y que tiene un mínimo local estricto en  $x^* = 0$ . Mostrar que también existen mínimos locales estrictos en puntos  $x_j$ , de modo que  $x_j \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . ¿Por qué esto no contradice el resultado del ejercicio anterior?

**Ejercicio 7** Calcular los puntos críticos de las siguientes funciones y determinar si son extremos y de qué tipo. Graficar las funciones y sus curvas de nivel. Puede resultar útil también realizar un heatmap (ver documentación).

(a) **Rosenbrock:**  $f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (x - 1)^2$

(b) **Booth:**  $f(x, y) = (x + 2y - 7)^2 + (2x + y - 5)^2$

(c) **McCormick:**  $\sin(x + y) + (x - y)^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}y + 1$

**Ejercicio 8 (Equilibrio y minimización de potenciales)** Considerar un problema como el de la figura, en la que se tiene una superficie con  $n$  agujeros realizados en los puntos  $\mathbf{z}^i$  y  $n$  masas  $m_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), que cuelgan de piolines pasados por esos agujeros. Todos los piolines confluyen en un nudo sobre la superficie. Llamamos  $\mathbf{x}$  a la posición del nudo. Buscamos la posición  $\mathbf{x}^*$  que corresponde al equilibrio del sistema, asumiendo que no hay rozamiento.

- (a) Escribir la fuerza  $F(\mathbf{x})$  que actúa sobre el punto  $\mathbf{x}$ . **Sug.:** Aplicar la segunda ley de Newton (*fuerza = masa por aceleración*) a cada cuerda.
- (b) Hallar un potencial  $f(\mathbf{x})$ , tal que  $F(\mathbf{x}) = -\nabla f(\mathbf{x})$ . Mostrar que hallar el punto de equilibrio equivale a minimizar el potencial.
- (c) Observar que minimizar el funcional equivale a hallar un punto  $\mathbf{x}^*$  que minimice la suma ponderada de las distancias a los  $\mathbf{z}^i$ .
- (d) Dar una fórmula para  $\mathbf{x}^*$  en términos de los  $\mathbf{z}^i$ .

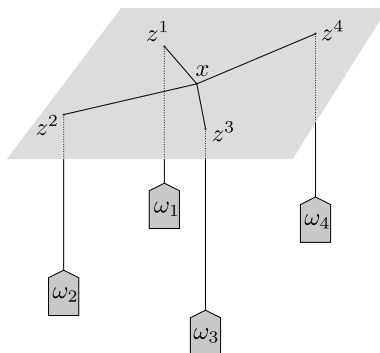


Figure 1: Ejercicio ??. Masas que cuelgan atadas a un mismo piolín.

**Ejercicio 9 (Problema de Fermat, Torricelli, Viviani)** Dado un triángulo se busca el punto  $x^*$  tal que la suma de las distancias a los vértices sea mínima. Probar que  $x^*$  es: o bien un vértice, o bien un punto tal que los segmentos que lo unen a los vértices determinan tres ángulos de  $120^\circ$ . Comparar con el ejercicio anterior.

**Ejercicio 10** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable. Suponga que un punto  $x^*$  es un mínimo local de  $f$  a lo largo de cada recta que pasa por  $x^*$ ; es decir, la función

$$g(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$$

se minimiza en  $\alpha = 0$  para todo  $d \in \mathbb{R}^n$ .

- (a) Demuestre que  $\nabla f(x^*) = 0$ .
- (b) Muestre mediante un ejemplo que  $x^*$  no necesariamente es un mínimo local de  $f$ .

*Sugerencia:* considere la función de dos variables

$$f(y, z) = (z - py^2)(z - qy^2)$$

donde  $0 < p < q$ , y observe que  $f(y, my^2) < 0$  para todo  $y \neq 0$ , mientras que  $f(0, 0) = 0$ .

**Ejercicio 11 (Estabilidad)** Un mínimo local sin restricciones  $x^*$  de una función  $f$  se dice *localmente estable* si existe  $\delta > 0$  tal que cualquier sucesión  $\{x^k\}$  con

$$f(x^k) \rightarrow f(x^*), \quad \|x^k - x^*\| < \delta, \quad \forall k \geq 0$$

converge a  $x^*$ .

- (a) Muestre que  $x^*$  es localmente estable si y solo si  $x^*$  es un mínimo local estricto, es decir, si existe un entorno  $U$  de  $x^*$  tal que para todo  $x \in U$ , con  $x \neq x^*$ , se tiene  $f(x^*) < f(x)$ .
- (b) Sea  $g$  una función continua. Muestre que si  $x^*$  es localmente estable, existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeño, la función  $f(x) + \epsilon g(x)$  tiene un mínimo local sin restricciones  $x_\epsilon$  tal que  $\|x^* - x_\epsilon\| \leq \delta$ . Además,  $x_\epsilon \rightarrow x^*$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

**Ejercicio 12 (Sensibilidad)** Sean  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  funciones dos veces continuamente diferenciables, y sea  $x^*$  un mínimo local no singular de  $f$  (es decir,  $\nabla^2 f(x^*)$  es invertible). Muestre que existen  $\hat{\epsilon} > 0$  y  $\delta > 0$  tales que para todo  $\epsilon \in [0, \hat{\epsilon}]$ , la función

$$f(x) + \epsilon g(x)$$

tiene un único mínimo local  $x \in B_\delta(x^*)$ , y se cumple que

$$x_\epsilon = x^* - \epsilon(\nabla^2 f(x^*))^{-1} \nabla g(x^*) + o(\epsilon).$$

*Sugerencia:* use el teorema de la función implícita.

### Funciones Convexas, cuadrados mínimos, y descomposiciones de matrices:

**Ejercicio 13** Probar que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es estrictamente convexa y tiene mínimo, entonces el mínimo es único. Dar un ejemplo de función estrictamente convexa sin mínimo.

**Ejercicio 14**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  estrictamente convexa con un único mínimo  $\mathbf{x}^*$ . Probar que  $f(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ .

**Ejercicio 15** Sea  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$  convexo,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$ . Probar que  $f$  es convexa si y sólo si su matriz hessiana es semidefinida positiva en  $\Omega$ .

**Ejercicio 16** Probar que la función  $F(x, y) = xy$ , que es lineal en cada variable, no es convexa como función de  $\mathbb{R}^2$

**Ejercicio 17** Dado un vector  $v$ , definimos  $\|v\|_0$ , o la “norma 0” de un vector, como la cantidad de entradas no-nulas que posee.

- (a) Muestre que  $\|v\|_0$  no es una función convexa de  $v$ .
- (b) Muestre que la norma  $\|v\|_1$  sí es una función es convexa.

**Ejercicio 18** En muchas aplicaciones se busca minimizar el rango de una matriz.

- (a) Muestre que la función  $rg(A)$  no es una función convexa de  $A$ .
- (b) Muestre que la llamada norma nuclear  $\|A\|_* = \sum \sigma_i(A)$ , donde  $\sigma_i(A)$  es el  $i$ -ésimo vector singular de la matriz  $A$ , sí es una función convexa de  $A$ .

**Ejercicio 19 (Ridge Regression)** Consideremos el problema definido por la función objetivo

$$f(\beta) = \|X\beta - y\|^2 + \lambda \|\beta\|^2,$$

donde  $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de diseño,  $y \in \mathbb{R}^n$  es el vector de observaciones,  $\beta \in \mathbb{R}^p$  es el vector de parámetros, y  $\lambda > 0$  es el parámetro de regularización.

- (a) Halle las condiciones de primer orden y verifique que son equivalentes a las ecuaciones normales modificadas:

$$(X^T X + \lambda I)\beta = X^T y.$$

- (b) Muestre que el problema es convexo y que por lo tanto la solución obtenida en el punto anterior es el único mínimo de la función objetivo.

**Ejercicio 20 (Norma de Frobenius)** Dadas matrices  $M \in \mathbb{R}^{m \times q}$  y  $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ , se desea resolver el problema de cuadrados mínimos para la norma de Frobenius:

$$\min_{X \in \mathbb{R}^{p \times q}} f(X) = \|M - BX\|_F^2,$$

Muestre que el mínimo global está dado por la solución de la siguiente ecuación matricial:

$$B^T B X = B^T M.$$

Sugerencia: recuerde que la norma de Frobenius viene dada por:

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 = \text{trace}(A^T A).$$

**Ejercicio 21 (Problema Netflix)** Se tiene una matriz de calificaciones  $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , donde cada entrada  $R_{ij}$  representa la calificación que el usuario  $i$  ha otorgado a la película  $j$ . En la práctica, la matriz  $R$  es muy rara, ya que no todos los usuarios califican todas las películas; se conoce únicamente el conjunto de índices  $\Omega \subset \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$  para los cuales se dispone de una calificación. El objetivo es aproximar  $R$  mediante una factorización en dos matrices de baja dimensión,  $U \in \mathbb{R}^{n \times k}$  y  $V \in \mathbb{R}^{m \times k}$ , de forma que

$$R_{ij} \approx U_i^T V_j \quad \text{para } (i, j) \in \Omega,$$

donde  $U_i$  y  $V_j$  son las filas de  $U$  y  $V$ , respectivamente. El problema de optimización es:

$$\min_{U \in \mathbb{R}^{n \times k}, V \in \mathbb{R}^{m \times k}} F(U, V) = \sum_{(i,j) \in \Omega} \left( R_{ij} - U_i^T V_j \right)^2.$$

- (a) Demuestre que la función objetivo  $F(U, V)$  no es convexa en  $(U, V)$  conjuntamente. Sin embargo, muestre que, al fijar  $V$  (o  $U$ ), la función se reduce a un problema de mínimos cuadrados en  $U$  (o  $V$ ) que es convexo.
- (b) Derive las ecuaciones normales correspondientes para actualizar  $U$  fijado  $V$ , y viceversa, a partir de las condiciones de optimalidad.
- (c) ¿Cómo hay que modificar las condiciones normales si se añaden términos de regularización con la norma  $\|\cdot\|_2$ ?
- (\*) Implemente el método de cuadrados mínimos alternados (ALS) con regularización y aplíquelo al dataset de Netflix.