Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Ejercicios para pensar

Método de Newton truncado

Resolver para d cualquier sistema de la forma

$$H^k d = -\nabla f(x^k),$$

donde H^k es una matriz simétrica definida positiva de tamaño $n \times n$, puede hacerse resolviendo el problema de optimización cuadrática:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2} d' H^k d + \nabla f(x^k)' d \\ \text{sujeto a} & d \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

cuya derivada es cero en d si y solo si

$$H^k d = -\nabla f(x^k).$$

Supongamos que se utiliza un método iterativo de descenso para resolver, y el punto inicial es $d^0 = 0$. Dado que el costo cuadrático se reduce en cada iteración y su valor en el punto inicial es cero, se obtiene después de cada iteración un vector d^k que satisface

$$\frac{1}{2} {d^k}' H^k d^k + \nabla f(x^k)' d^k < 0,$$

de donde, usando la positividad definida de H^k, se deduce que:

$$\nabla f(x^k)' d^k < 0.$$

Proposición (Convergencia superlineal de métodos tipo Newton): Sea f dos veces continuamente diferenciable. Considera la sucesión $\{x^k\}$ generada por el método del gradiente

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$$

y supongamos que

$$x^k \to x^*, \quad \nabla f(x^*) = 0, \quad Hf(x^*) \text{ es definida positiva.}$$

Supongamos además que $\nabla f(x^k) \neq 0$ para todo k, y que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\left\| d^k + \left(Hf(x^*)\right)^{-1} \nabla f(x^k) \right\|}{\|\nabla f(x^k)\|} = 0.$$

Entonces, si α^k se elige mediante la regla de Armijo con paso inicial $s = 1$ y $\sigma < \frac{1}{2}$, se tiene que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} = 0.$$

Además, existe un entero $\bar{k} \geq 0$ tal que $\alpha^k = 1$ para todo $k \geq \bar{k}$ (es decir, eventualmente no se reducirá el tamaño de paso inicial).

Ejercicio 1 Consideremos un método de Newton truncado con el tamaño de paso elegido mediante la regla de Armijo, con tamaño de paso inicial $s = 1$ y $\sigma < \frac{1}{2}$, y supongamos que la sucesión $\{x^k\}$ converge a un mínimo local no singular x^*. Supongamos que las matrices H^k y las direcciones d^k satisfacen

$$\lim_{k\to\infty} \|H^k - \nabla^2 f(x^k)\| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{\|H^k d^k + \nabla f(x^k)\|}{\|\nabla f(x^k)\|} = 0.$$

Demostrar que la sucesión $\{\|x^k - x^*\|\}$ tiene convergencia superlineal.

Ejercicio 2 Escribir la iteración del método de descenso más rápido con paso constante s para la función $f(x) = \|x\|^{2+\beta}$ con $\beta \geq 0$. Dar condiciones sobre s y x_0 que garanticen la convergencia del método.