
OPTIMIZACIÓN

Primer Cuatrimestre 2025

Ejercicios para pensar

Condiciones de KKT

Ejercicio 1 Consideremos el siguiente problema de minimización

$$\begin{aligned} \text{mín } f(x) &= c^t x \\ \text{s.a } Ax &= 0 \\ \|x\| &\leq 1 \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (con $m < n$) y $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea.

- (a) Buscar las condiciones de KKT.
- (b) Probar que $Ac + AA^t\lambda = 0$, donde λ es el multiplicador de Lagrange.
- (c) Probar que si $c + A^t\lambda \neq 0$ donde λ satisface

$$AA^t\lambda + Ac = 0,$$

entonces el mínimo está dado por

$$x^* = -\frac{c + A^t\lambda}{\|c + A^t\lambda\|}.$$

Ejercicio 2 Consideremos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{mín } f(x) &= \frac{1}{2}x^t Hx + x^t p \\ \text{s.a } Ax &= b \end{aligned}$$

con H definida positiva y $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, donde $\text{rg}(A) = k$.

- (a) Resolver el problema usando condiciones de KKT.
- (b) Supongamos que \mathbf{x}^* es el mínimo hallado en el ítem a). ¿Es un mínimo global?

Sugerencia: Si A_1 es una matriz definida positiva en $\mathbb{R}^{n \times n}$ y A_2 es una matriz con $\text{rg}(A_2) = k$ entonces la matriz $\begin{bmatrix} A_1 & A_2^t \\ A_2 & 0 \end{bmatrix}$ es no singular.

Ejercicio 3 Resolver utilizando las condiciones KKT el siguiente problema de maximización con restricciones:

$$\text{máx } f(x, y) = -(x - 2)^2 - 2(y - 1)^2$$

sujeito a:

$$x + 4y \leq 0,$$

$$x \geq y.$$