Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - Depto. de Matemática

Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica N° 4: Optimización con restricciones (Parte II)

Ejercicio 1 Encontrar los máximos de $f(x,y) = x_1x_2$ sobre el disco unitario definido por la restricción de desigualdad $1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$.

Ejercicio 2 Consideremos el problema

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{c}^t\mathbf{x} \\ &s.a\ \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leq 1 \end{aligned}$$

1. Escribir las condiciones de KKT para este problema.
2. Mostrar que si existe $\mathbf{y}$ tal que
$$\mathbf{A}^t\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{c}, \quad \mathbf{A}\mathbf{y} \neq 0$$
entonces el mínimo está dado por $\mathbf{x}^* = -\frac{\mathbf{y}}{\|\mathbf{A}\mathbf{y}\|}$.

Ejercicio 3 Se desea construir un tanque de base cuadrada, con capacidad para almacenar exactamente 4000 mts^3 de agua. El costo de construcción de las paredes es de 1000$ por metro cuadrado, mientras que el costo del techo es de 9000$ por metro cuadrado. Se dispone de un terreno de 20mts $\times$20mts. Finalmente, debe tenerse en cuenta que por cuestiones de estabilidad de la construcción la altura del tanque no puede exceder el cuádruple del lado de la base. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del tanque para que el costo de construcción sea mínimo?

(a) Plantear el problema como un problema de minimización con restricciones.

(b) Plantear las condiciones de KKT.

(c) Resolver el problema.

Ejercicio 4 Considere el semiespacio definido por $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^tx + b \geq 0\}$ donde $a \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ son dados. Formular y resolver el problema de optimización para encontrar el punto $x \in H$ que tenga la menor norma euclídea.

Ejercicio 5 Considerar el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min f(x_1,x_2,x_3) &= -x_1^3 + x_2^2 - 2x_1x_3^2 \\ sa: 2x_1 + x_2^2 + x_3 - 5 &= 0 \\ 5x_1^2 - x_2^2 - x_3 &\geq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Escribir las condiciones necesarias de primer orden de KKT para el problema

2. Se sabe que el punto $\mathbf{x}^* = (1, 0, 3)$ es un mínimo local. Para $\mathbf{x}^*$, encontrar λ^* y μ_i^* para $1 \leq i \leq 4$, y verificar que $\mu_i^* \geq 0$ para todo i.

Distribuciones de probabilidades discretas

En los siguientes ejercicios consideraremos el simplex de probabilidades discretas:

$$\Delta_n = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

donde dada una distribución de probabilidad discreta $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Delta_n$, definimos su entropía como

$$H(p) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i.$$

Ejercicio 6 (Máxima entropía) Muestre que la solución del problema

$$\max_{p \in \Delta_n} \quad H(p)$$

es la distribución uniforme:

$$p_i^* = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ejercicio 7 (Máxima entropía con una restricción de media) Muestre que la solución del siguiente problema:

$$\begin{aligned} \max_{p \in \Delta_n} \quad & H(p) \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{i=1}^{n} i\, p_i = \mu \end{aligned}$$

donde μ es un valor dado que representa la media deseada, es de la forma

$$p_i^* \propto e^{\lambda\, i},$$

para algún parámetro λ que se determinará a partir de la restricción de la media.

Ejercicio 8 (Prior no informativo con peso lineal). Dado $x \in \mathbb{R}^n$, considere el problema de optimización

$$\max_{p \in \Delta_n} \left\{ p^T x + H(p) \right\},$$

Esta formulación se interpreta en el contexto bayesiano como la búsqueda de un prior no informativo, que maximiza la entropía mientras incorpora la información lineal $p^T x$.

Muestre que la solución óptima es la función softmax aplicada al vector x, es decir:

$$p_i^* = \frac{e^{x_i}}{\sum_{j=1}^{n} e^{x_j}},$$

Ejercicio 9 (Optimización de portfolio) Plantear las condiciones de KKT: Maximizar el retorno esperado sujeto a un riesgo máximo permitido.

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad r^T x \quad \text{sujeto a} \quad \begin{cases} x^T \Sigma x \leq \sigma^2, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \end{cases}$$

donde $r \in \mathbb{R}^n$ es el vector de retornos esperados y Σ es la matriz de covarianzas.

Ejercicio 10 (Asignación de Recursos) Plantear las condiciones de KKT del siguiente problema:

$$\max_{x \in \mathbb{R}_+^n} \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \quad \text{sujeto a} \quad \sum_i x_i \leq B.$$