Optimización

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica de Laboratorio N° 4

Métodos de Penalización y de Barrera

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_j(x) = 0 \quad j \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

Con $f, g, h \in C^1(\Omega)$. Consideraremos Ω al conjunto de puntos factibles, es decir:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0 \ \forall i \in \mathcal{I},\ h_j(x) = 0 \ \forall j \in \mathcal{E}\}$$

Método de Penalización

Motivación: minimizar f sobre $\mathbb{R}^n$, aplicándole una penalización a los puntos que no están en Ω. Si podemos conseguir una función $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:

- P es continua
- $P(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $P(x) = 0 \iff x \in \Omega$

Entonces podemos minimizar $f(x) + cP(x)$ con $c \in \mathbb{R}$ utilizando técnicas de optimización irrestricta.

Función de penalización cuadrática

Si tenemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad i \in \mathcal{I} \\ & h_j(x) = 0 \quad j \in \mathcal{E} \end{aligned}$$

Definimos la función de penalización cuadrática como:

$$Q(x, c) = f(x) + c \sum_{j \in \mathcal{E}} h_j(x)^2 + c \sum_{i \in \mathcal{I}} (g_i^+(x))^2$$

donde c es el *parámetro de penalización* y $g_i^+ = \max\{0, g_i(x)\}$. Si hacemos $c \to \infty$, la violación de las restricciones será castigada con mayor severidad.

Idea: considerar una secuencia $\{c_k\}$ tal que $c_k \to \infty$ y utilizar métodos de optimización irrestricta para encontrar el minimizador x_k de $Q(x, c_k)$ para cada k.

*Ejemplo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (x-4)^2 + 4 \\ \text{s.a.} \quad & x \leq 5 \quad (g_1(x) = x - 5) \\ & x \geq 3 \quad (g_2(x) = 3 - x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow Q(x, c) = f(x) + c g_1^+(x)^2 + c g_2^+(x)^2$$

Implementación

Dadas $f, h_j, g_i, x_0 \in \mathbb{R}^n, c_0 \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_{>1}, \varepsilon, k_{\text{MAX}}$,

- REPEAT mientras $\|x^k - x^{k+1}\| > \varepsilon$ y $k < k_{\text{MAX}}$:
  - Definir $Q(x, c_k)$
  - x^{k+1} = mínimo de $Q(x, c_k)$ utilizando optimización irrestricta (punto inicial: x_k)
  - Si $x^{k+1} \in \Omega$:
    - PARAR
  - Si no:
    - $c_{k+1} = \alpha c_k$
    - $k = k + 1$

Valores iniciales estándar podrían ser: $c = 1.5$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\alpha = 2$. Una buena idea es tomar $x_0 \in \Omega^c$.

Método de Barrera

Motivación: acercarnos a los puntos de la frontera de Ω desde su interior.

Aplicable a problemas con restricciones dadas por desigualdades, ya que, en particular, es necesario que $\Omega^\circ \neq \emptyset$. En general, es necesario poder aproximarse a cualquier punto de $\partial\Omega$ desde Ω°.

Si conseguimos una función B tal que:

- B es continua
- $B(x) \geq 0$
- $B(x) \to \infty$ cuando x se acerca a $\partial\Omega$

Entonces podemos resolver el problema

$$\min_{x \in \Omega^\circ} f(x) + \mu B(x)$$

con herramientas de optimización irrestricta, tomando como punto inicial $x_0 \in \Omega^\circ$. A medida que $\mu \to 0$, permitiremos que se consideren puntos más cercanos a $\partial\Omega$.

Las funciones de Barrera más comunes son

$$B(x) = \sum_i \left(-\frac{1}{g_i(x)} \right) \quad \text{y} \quad B(x) = \sum_i \log(-g_i(x)).$$

De esta manera, el problema se convierte en minimizar la siguiente función:

$$R(x,\mu) = f(x) + \mu B(x)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = (x-4)^2 + 4 \\ \text{s.a.} \quad & x \leq 5 \quad (\Rightarrow g_1(x) = x-5) \\ & x \geq 3 \quad (\Rightarrow g_2(x) = 3-x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R(x,\mu) = f(x) - \mu\left(\frac{1}{g_1(x)} + \frac{1}{g_2(x)}\right)$$

Implementación
Análoga a la del Método de Penalidad
Dadas $f, g_i, x_0 \in \Omega^\circ, \mu_0 \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}_{<1}, \varepsilon, k_{\text{MAX}}$,

- REPEAT mientras $\|x^k - x^{k+1}\| > \varepsilon$ y $k < k_{\text{MAX}}$:
  - Definir $R(x, \mu_k)$
  - $x^{k+1} =$ mínimo de $R(x, \mu_k)$ utilizando optimización irrestricta (punto inicial: x_k)
  - $\mu_{k+1} = \alpha\mu_k$
  - $k = k+1$

Valores iniciales estándar podrían ser: $\mu = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, $\alpha = 0.5$. Se debe tomar $x_0 \in \Omega^\circ$.

Ejercicio 1

Implementar las funciones `metodo_penalidad` y `metodo_barrera`. Como input deben tomar:

- f la función a minimizar,
- x_0 el punto inicial,
- G una tupla con funciones que definen las restricciones por desigualdad,
- una tupla con las restricciones de igualdad (sólo para Método de Penalidad),
- `alpha` el factor de cambio de los parámetros de penalidad/barrera,
- `epsilon` la tolerancia y
- `k_max` el número máximo de iteraciones.

Ejercicio 2 El siguiente problema busca hallar el punto de una esfera más cercana a un plano:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = \frac{1}{10}(x_2 + x_3 - 3)^2 \\ \text{s.a.} \quad & x_2^2 + x_3^2 \leq 1 \end{aligned}$$

Utilizar el Método de Barrera y el Método de Penalidad que resuelvan este problema. Solución: $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Ejercicio 3 Resolver el siguiente problema utilizando el Método de Penalidad:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) = x_1 + x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1^2 + x_2^2 = 2 \\ & x_1 \geq 0 \end{aligned}$$

Solución: $(0, -\sqrt{2})$