A teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática - Soluções

January 7, 2025

Contents

Chapter 1

História e Motivação

Exercício 1. *Exiba uma bijeção entre o conjunto dos números inteiros e os naturais.*

Solução: Defina a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ por $f(n) = -\frac{n}{2}$ se n é par e por $f(n) = \frac{n+1}{2}$ se n é ímpar. f é uma bijeção. $\square$

Exercício 2. *Prove que qualquer subconjunto infinito dos números naturais é enumerável.*

Solução: Lembre: dizemos que um conjunto X é *enumerável* se é finito ou é equipotente a $\mathbb{N}$, isto é, se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Todo conjunto finito é enumerável. Estão vamos olhar apenas o caso X ser infinito. Defina $f : \mathbb{N} \to X$ da seguinte maneira: $f(0)$ é o menor elemento de X; $f(1)$ é o segundo menor elemento de X; $f(2)$ é o terceiro menor elemento de X, e assim por diante. De maneira mais rigorosa, f é definida indutivamente por: $f(0) = \min X$; uma vez escolhidos, $f(0), f(1), \ldots, f(n)$, definimos $f(n+1) = \min(X \backslash \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\})$. Observe que f é crescente, logo injetiva. Também é sobrejetiva, pois do contrário, se existe um $x \in X \backslash f(\mathbb{N})$, então $x \in X \backslash \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Da maneira como construímos f concluímos que $x > f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e assim $f(\mathbb{N})$ é um conjunto limitado, logo finito. Como $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ é uma bijeção, $\mathbb{N}$ seria finito, um absurdo. Portanto $f : \mathbb{N} \to X$ é uma bijeção, logo X é enumerável. $\square$

Exercício 3. *Na bijeção que construímos entre os números naturais e os polinômios, encontre o polinômio associado ao número 30.*

Solução:

0	$\mapsto$	$-x-1$	11	$\mapsto$	$-x-2$	21	$\mapsto$	$-2x^2-2x-1$
1	$\mapsto$	$-x$	12	$\mapsto$	$-x+2$	22	$\mapsto$	$-2x^2-2x$
2	$\mapsto$	$-x+1$	13	$\mapsto$	$x-2$	23	$\mapsto$	$-2x^2-2x+1$
3	$\mapsto$	$x-1$	14	$\mapsto$	$x+2$	24	$\mapsto$	$-2x^2-2x+2$
4	$\mapsto$	x	15	$\mapsto$	$2x-2$	25	$\mapsto$	$-2x^2-x-2$
5	$\mapsto$	$x+1$	16	$\mapsto$	$2x-1$	26	$\mapsto$	$-2x^2-x-1$
6	$\mapsto$	$-2x-2$	17	$\mapsto$	$2x$	27	$\mapsto$	$-2x^2-x$
7	$\mapsto$	$-2x-1$	18	$\mapsto$	$2x+1$	28	$\mapsto$	$-2x^2-x+1$
8	$\mapsto$	$-2x$	19	$\mapsto$	$2x+2$	29	$\mapsto$	$-2x^2-x+2$
9	$\mapsto$	$-2x+1$	20	$\mapsto$	$-2x^2-2x-2$	30	$\mapsto$	$-2x^2-2$
10	$\mapsto$	$-2x+2$						

Portanto o polinômio associado ao número 30 é $-2x^2-2$. □

Exercício 4. *Na bijeção que construímos entre os números naturais e os números algébricos, encontre o número natural associado ao número* $\sqrt{3}$

Solução: content □

Exercício 5. *Suponha que, em um conjunto infinito, existe uma forma de representar cada elemento do conjunto com uma sequência finita de símbolos, dentre um conjunto finito de símbolos. Mostre que esse conjunto é enumerável e use esse resultado diretamente para mostrar que os conjuntos dos números racionais e dos números algébricos são enumeráveis.*

Solução: Seja $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ o conjunto de símbolos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n = \{(\tau_1, \ldots, \tau_n) : \tau_1, \ldots, \tau_n \in \Sigma\}$ e ponha $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. S é enumerável por ser uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis (finitos).[1] Seja X o conjunto infinito do exercício. A suposição de que cada elemento de X possa ser representado como uma sequência finita de símbolos significa que existe uma função $f : X \to S$. Esta função deve ser injetiva, pois não podemos usar a mesma sequência de símbolos para representar dois ou mais elementos distintos em X. Então $f : X \to f(X) \subset S$ é bijetiva e como $f(X)$ é enumerável, por ser um subconjunto de um conjunto enumerável conforme o Exercício 2, X é enumerável.

Todo número racional pode ser escrito como a/b, com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Ambos a e b são escritos como uma sequência finita de símbolos (os algarismos de 0 a 9 e o sinal + ou −). Pelo resultado demonstrado acima, $\mathbb{Q}$ é enumerável.

[1] [Lim16, p. 51]

Cada polinômio com coeficientes inteiros pode ser escrito como uma sequência finita de símbolos, logo o conjunto formado por esses polinômios é enumerável. O conjunto dos números algébricos é a união dos conjuntos das raízes de cada um desses polinômios. Como essa é uma união enumerável (o conjunto desses polinômios é enumerável) de conjuntos finitos (cada polinômio possui um número finito de raízes), o conjunto dos números algébricos é enumerável. $\square$

Exercício 6. *Imagine que o hotel de Hilbert, com uma quantidade infinita enumerável de quartos, todos ocupados, receba infinitos trens com infinitos vagões e cada vagão com infinitos passageiros (todas essas quantidades enumeráveis). Como o gerente pode alocar todos os atuais hóspedes em quartos separados?*

Solução: Cada passageiro tem uma identificação (p, q, r): $p =$ número do trem; $q =$ número do vagão; $r =$ número do assento. Cada hóspede no quarto n será realocado para o quarto $2n-1$, e cada passageiro com ID (p, q, r) será hospedado no quarto $2^p 3^q (2r-1)$.

Isto pode ser generalizado: hóspede $n \mapsto$ quarto $2n-1$; passageiro $(a_1, \ldots, a_m) \mapsto$ quarto $2^{a_1} 3^{a_2} \cdots p_{m-1}^{a_{m-1}} (2a_m - 1)$, em que $2, 3, \ldots, p_{m-1}$ são números primos. $\square$

Exercício 7. *Imagine, agora, um hotem maior ainda, com um quarto para cada número real, totalmente ocupado. Um ônibus igualmente gigantesco, com um passageiro para cada número real, chega ao hotel. Como o gerente pode fazer para rearranjar os hóspedes para acolher os novos visitantes, sempre em quartos separados?*

Solução:

- Hóspede $x \mapsto$ quarto $\arctan x$.
- Passageiro $y \mapsto$ quarto $y + \pi/2$ se $y \geq 0$ ou $y - \pi/2$ se $y < 0$.

Note que o hotel ficará com um quarto vago (o de número $-\pi/2$). $\square$

Chapter 2

A linguagem da Teoria dos Conjuntos

Exercício 1. *Usando a linguagem de primeira ordem da teoria de conjuntos, escreva fórmulas para representar as seguintes frases.*

Solução:

a) Não existe o conjunto de todos os conjuntos.

   $\neg\exists x\forall y(y \in x) \equiv \forall x\exists y(y \notin x)$

b) Existe um único conjunto vazio.

   $\exists! x\forall y(y \notin x)$

c) x é um conjunto unitário

   $\exists! y(y \in x)$

d) Existe um conjunto que tem como elemento apenas o conjunto vazio

   $\exists x\forall y((y \in x) \leftrightarrow y = \phi)$

e) y é o conjunto dos subconjuntos de x

   $\forall z(z \in y \leftrightarrow \forall w(w \in z \rightarrow w \in x))$.

□

Exercício 2. *Marque as ocorrências de variáveis livres nas fórmulas abaixo*

a) $(\forall x(x = y)) \rightarrow (x \in y)$

x e y

b) $\forall x((x = y) \rightarrow (x \in y))$

y

c) $\forall x(x = x) \rightarrow (\forall y \exists Z((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow \neg(x \in y))$

x

d) $\forall x \exists y(\neg(x = y) \wedge \forall z((x \in y) \leftrightarrow \forall w((w \in z) \rightarrow (w \in x))))$

Não há variáveis livres.

e) $(x = y) \rightarrow \exists(x = y)$

x e y

Exercício 3. *Escreva as subfórmulas de cada fórmula do exercício 2.*

Solução:

1. (a) $(\forall x(x = y)) \rightarrow (x \in y)$
   (b) $(\forall x(x = y))$
   (c) $(x = y)$
   (d) $(x \in y)$
2. (a) $\forall x((x = y) \rightarrow (x \in y))$
   (b) $(x = y) \rightarrow (x \in y)$
   (c) $(x = y)$
   (d) $(x \in y)$
3. (a) $\forall x(x = x) \rightarrow (\forall y \exists z(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow \neg(x \in y)))$
   (b) $\forall x(x = x)$
   (c) $(x = y)$
   (d) $\forall z \exists y(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow \neg(x \in y))$
   (e) $((x = y) \wedge (y = z))$
   (f) $(x = y)$
   (g) $(y = z)$
   (h) $\neg(x \in y)$

(i) $(x \in y)$

4. (a) $(x = y) \to \exists y(x = y)$
   (b) $(x = y)$
   (c) $\exists y(x = y)$
   (d) $(x = y)$

$\square$

Chapter 3

Primeiros Axiomas

Exercício 1. *Usando o axioma da extensão, prove que* $\{\emptyset\}$ *e* $\{\{\emptyset\}\}$ *são conjuntos diferentes.*

Solução: O conjunto $\{\emptyset\}$ tem como único elemento $\emptyset$, enquanto $\{\{\emptyset\}\}$ tem como único elemento $\{\emptyset\}$. Como $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, segue do axioma da extensão que $\{\emptyset\}$ e $\{\{\emptyset\}\}$ são conjuntos distintos. $\square$

Exercício 2. *Para cada par de conjuntos abaixo, decida qual(is) dos símbolos* $\in$ *e* $\subset$ *torna(m) a fórmula verdadeira (assumindo que esses conjuntos existem). Lembre-se de que a resposta também pode ser ambos os símbolos ou nenhum deles. Justifique cada resposta.*

(a) $\{\emptyset\} \ldots \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(b) $\{\emptyset\} \ldots \{\{\emptyset\}\}$

(c) $\{1, 2, 3\} \ldots \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

(d) $\{1, 2, 3\} \ldots \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

(e) $\{1, 2\} \ldots \{1, \{1\}, 2, \{2\}, \{3\}\}$

(f) $\{\{1\}, \{2\}\} \ldots \{\{1, 2\}\}$

(a) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(b) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$.

(c) Não vale $\in$ nem $\subset$.

(d) $\{1, 2, 3\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.

(e) $\{1, 2\} \subset \{1, \{1\}, 2, \{2\}, \{3\}\}$.

(f) Não vale $\in$ nem $\subset$.

Exercício 3. *Seja x o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.*

(a) Quantos elementos tem o conjunto x?

(b) Descreva todos os subconjuntos de x.

(c) Descreva, usando chaves e vírgula, o conjunto de todos os subconjuntos de x.

(d) Quantos elementos o conjunto dos subconjuntos de x possui?

(e) Prove que o conjunto x existe.

(a) 3 elementos.

(b) $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

(c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$.

(d) 8 elementos.

(e) **Solução por Allan Kenedy:** Pelo axioma do vazio, existe $\emptyset$. Pelo axioma das partes, existe $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, e então $x = \mathcal{P}(\emptyset) \cup \{\mathcal{P}(\emptyset)\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ pelo Teorema 3.7. $\square$

Solução por Cloves Paiva: Peguemos do conjunto ω, da definição 3.19, o elemento que é representante do número três, ou seja, $y = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \in \omega$. Pelo Axioma da Extensão, $x = y$. $\square$

Exercício 4. *Prove que para todos conjuntos x e y*

(a) $x \subset x$;

(b) $x \in y$ se, e somente se, $\{x\} \subset y$;

(c) $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$;

(d) se $x \subset y$, então $\bigcup x \subset \bigcup y$.

(a) **Solução:** Se x não é vazio, todo elemento de x é elemento de x, logo $x \subset x$. Se x é vazio, como $\emptyset$ está contido em qualquer conjunto pelo Teorema 3.4, temos que $\emptyset \subset \emptyset$. Em qualquer caso, $x \subset x$. $\square$

(b) **Solução:** Se $x \in y$, como x é o único elemento do conjunto $\{x\}$, temos que $\{x\} \subset y$. Reciprocamente, se $\{x\} \subset y$, então $x \in y$. $\square$

(c) **Solução:** Dado $u \in \bigcup \mathcal{P}(x)$, existe $v \in \mathcal{P}(x)$ tal que $u \in v$. Como $\mathcal{P}(x)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de x, $v \subset x$, logo $u \in x$. Portanto $\bigcup \mathcal{P}(x) \subset x$.

Reciprocamente, como $x \subset x$ pelo item (a), então $x \in \mathcal{P}(x)$, logo qualquer elemento $y \in x$ será elemento de $\bigcup \mathcal{P}(x)$, e assim $x \subset \bigcup \mathcal{P}(x)$.

Pelo axioma da extensão, $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$. $\square$

(d) **Solução:** Dado $u \in \bigcup x$, existe $v \in x$ tal que $u \in v$. Como $x \subset y$, $v \in y$, logo $u \in \bigcup y$ e, portanto, $\bigcup x \subset \bigcup y$. $\square$

Exercício 5. *Escreva uma fórmula de primeira ordem, na linguagem da teoria dos conjuntos, com quatro variáveis livres, que represente o conjunto* $\{x, y, z\}$.

Solução: $\forall w((w \in u) \implies ((w = x) \vee (w = y) \vee (w = z)))$ $\square$

Exercício 6. *Escreva os seguintes conjuntos, listando seus elementos entre chaves:*

(a) $\bigcup\{\{0,1\},\{\{1\}\},\{1,2\},\{\{1,2\}\}\}$;

(b) $\mathcal{P}(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})$.

(a) $\{0, 1, \{1\}, 2, \{1, 2\}\}$.

(b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Exercício 7. *Prove que não existe o conjunto de todos os conjuntos unitários.*

Dica: *Assuma, por absurdo, a existência do conjunto de todos os conjuntos unitários e prove a existência do conjunto de todos os conjuntos.*

Solução por Allan Kenedy: Suponha que existe x tal que $\forall y(\{y\} \in x)$. Então $\{x\} \in x$. Como $x \in \{x\}$, temos uma contradição com o Teorema 3.14. Portanto $\nexists x \forall y(\{y\} \in x)$. $\square$

Solução por Cloves Paiva: Suponha, por absurdo, que u seja o conjunto de todos os conjuntos unitários. Seja x um conjunto arbitrário, então $\{x\} \in u$ por hipótese e, pelo Axioma da União, teremos $x \in \bigcup x$. Isso faz de $\bigcup x$ o cojunto de todos os conjuntos, o que é um absurdo pelo Teorema 3.10. $\square$

Exercício 8. *Prove que para todo conjunto X existe o conjunto*

$$\{\{x\} : x \in X\}$$

Solução: Pelo axioma das partes, existe o conjunto $\mathcal{P}(X)$. Para cada $x \in X$, temos que $\{x\} \subset X$, logo $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Pelo axioma da separação, existe o conjunto $\{y \in \mathcal{P}(X) : \exists x((x \in X) \wedge (\{x\} = y))\}$, que, via axioma da extensão, é o conjunto procurado. $\square$

Exercício 9. *Sendo x um conjunto não vazio, prove que*

(a) $\forall y(y \in x \to (\bigcap x \subset y))$;

(b) $x \subset y \to \bigcap y \subset \bigcap x$.

Solução:

(a) Dados $y \in x$ e $z \in \bigcap x$, temos que $\forall w((w \in x) \to (z \in w))$. Em particular, $z \in y$, logo $\bigcap x \subset y$.

(b) Dado $z \in \bigcap y$, temos que z é elemento de qualquer $w \in y$. Como $x \subset y$, os elementos de x são também elementos de y, logo z é elemento de qualquer $w \in x$ em particular, portanto $z \in \bigcap x$. Desta forma $\bigcap y \subset \bigcap x$.

$\square$

Exercício 10. *Escreva na linguagem da lógica de primeira ordem, sem abreviaturas, a seguinte fórmula:*

$$x \in \bigcup \bigcap (y \cup (w \backslash z)).$$

Solução: content $\square$

Exercício 11. *Usando o axioma da regularidade, prove que:*

(a) não existem x, y, z tais que $x \in y, y \in z$ e $z \in x$;

(b) não existem w, x, y, z tais que $w \in x, x \in y, y \in z$ e $z \in w$.

Solução:

(a) Pelo axioma do par, existem $\{x, y\}$ e $\{y, z\}$. Tome $w = \{x, y\} \bigcup \{y, z\} = \{x, y, z\}$. Pelo axioma da regularidade, existe $u \in w$ tal que $u \cap w = \emptyset$. Se for $u = x$, então $y \notin x$ e $z \notin x$. Se for $u = y$, então $x \notin y$ e $z \notin y$. Se for $u = z$, então $x \notin z$ e $y \notin z$. Em qualquer caso, não podemos ter $x \in y$, $y \in z$ e $z \in x$ simultaneamente.

(b) Basta repetir o argumento acima para o conjunto $\{w, x, y, z\}$.

□

Exercício 12. *Prove que não existe x tal que $\mathcal{P}(x) = x$.*

Solução: Se $\mathcal{P}(x) = x$, como $x \subset x$, então $x \in \mathcal{P}(x)$, contradizendo o Corolário 3.15. □

Exercício 13. *Escreva o conjunto $\mathcal{P}(3\backslash 1)$, utilizando apenas os seguintes símbolos: as chaves, a vírgula e o símbolo de conjunto vazio.*

Solução: $\mathcal{P}(3\backslash 1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$. □

Exercício 14. *Prove, a partir dos axiomas de Peano, os seguintes teoremas:*

(a) Todo número natural é diferente do seu sucessor.

(b) Zero é o único número natural que não é sucessor de nenhum número natural.

Solução:

(a) Tese: $\forall n((n \in \omega) \wedge (n \neq n^+))$.

Para $n = 0$, $n^+ \neq 0$, pois 0 não é sucessor de nenhum número natural, logo a tese é verdadeira para $n = 0$.

Suponha que a tese é verdadeira para algum $n \in \omega$. Pelo axioma 3, n e n^+ devem ter sucessores distintos, isto é, $n^+ \neq (n^+)^+$. Isto mostra que a tese é verdadeira para n^+. Pelo axioma 5, a tese é verdadeira para todo n natural.

(b) Tese: $\forall n((n \in \omega) \wedge \nexists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n)) \rightarrow (n = 0))$.

Contrapositiva: $\forall n((n \neq 0) \rightarrow ((n \notin \omega) \vee \exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))))$.

Demonstraremos a contrapositiva, por ser equivalente à tese. Para isto precisaremos da seguinte proposição.

Proposição: Seja σ um subconjunto não vazio de ω. Se $0 \in \sigma$ e, para cada $n \in \sigma$, valer $n^+ \in \sigma$, então $\sigma = \omega$.

Prova: Aplicando o axioma 5 à fórmula $P(\sigma) = (x \in \sigma)$, obtemos $\omega \subset \sigma$. Como $\sigma \subset \omega$, então $\sigma = \omega$. ■

Seja $\sigma = \{0\} \cup \{n \in \omega : \exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))\}$. Temos que $0 \in \sigma$ e, para cada $n \in \sigma$, $n^+ \in \sigma$. Pela proposição acima, $\sigma = \omega$. Pelo axioma 4, $\{0\} \cap \{n \in \omega : \exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))\} = \emptyset$. Portanto, para qualquer $n \in \omega$ com $n \neq 0$, $\exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))$. Isto demonstra, por contraposição, a tese.

□

Exercício 15. *Prove que:*

(a) para todo $n \in \omega$, $\emptyset \in n$ ou $\emptyset = n$;

(b) para todos $n, m \in \omega$, se $m \in n$, então $m \subset n$.

Solução:

(a) Para $n = 0$, $n = \emptyset$, logo a tese é verdadeira.

Suponha ser verdade para n. Se $\emptyset = n$, então $\emptyset \in n^+ = n \cup \{n\}$. Se $\emptyset \in n$, então $\emptyset \in n^+$, e a tese é verdadeira para n^+

Pelo axioma 5, $\emptyset \in n$ ou $\emptyset = n$ para qualquer $n \in \omega$.

(b) Já feito na prova do Teorema 3.21, item (c).

□

Exercício 16. *A união de dois conjuntos indutivos é necessariamente um conjunto indutivo? Justifique sua resposta.*

Solução:

Resposta: Sim.

Justificativa: Sejam A e B dois conjuntos indutivos. Como $\emptyset \in A$ e $\emptyset \in B$, então $\emptyset \in A \cup B$. Se $x \in A \cup B$, então $x \in A$ ou $x \in B$, logo $x^+ \in A$ ou $x^+ \in B$, o que implica $x^+ \in A \cup B$. Isto mostra que $A \cup B$ é indutivo. □

Chapter 4

Produto Cartesiano, Relas e Funs

Chapter 5

Axioma da Escolha e suas Aplicas

Chapter 6

Conjuntos Equipotentes

Chapter 7

Ordinais

Chapter 8

Cardinais

Chapter 9

Ordens Parciais

Chapter 10

Nos de Teoria dos Modelos

Chapter 11

Modelos para ZFC

Chapter 12

Forcing

Bibliography

[Lim16] Elon Lages Lima. *Curso de análise*. 14th ed. Vol. 1. Rio de Janeiro: Impa, 2016.