A teoria dos conjuntos e os fundamentos da matemática - Soluções

January 7, 2025

Contents

Chapter 1

História e Motivação

Exercício 1. *Exiba uma bijeção entre o conjunto dos números inteiros e os naturais.*

Solução: Defina a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ por $f(n) = -\frac{n}{2}$ se n é par e por $f(n) = \frac{n+1}{2}$ se n é ímpar. f é uma bijeção. $\square$

Exercício 2. *Prove que qualquer subconjunto infinito dos números naturais é enumerável.*

Solução: Lembre: dizemos que um conjunto X é *enumerável* se é finito ou é equipotente a $\mathbb{N}$, isto é, se existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$.

Todo conjunto finito é enumerável. Estão vamos olhar apenas o caso X ser infinito. Defina $f : \mathbb{N} \to X$ da seguinte maneira: $f(0)$ é o menor elemento de X; $f(1)$ é o segundo menor elemento de X; $f(2)$ é o terceiro menor elemento de X, e assim por diante. De maneira mais rigorosa, f é definida indutivamente por: $f(0) = \min X$; uma vez escolhidos, $f(0), f(1), \ldots, f(n)$, definimos $f(n+1) = \min(X \backslash \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\})$. Observe que f é crescente, logo injetiva. Também é sobrejetiva, pois do contrário, se existe um $x \in X \backslash f(\mathbb{N})$, então $x \in X \backslash \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Da maneira como construímos f concluímos que $x > f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e assim $f(\mathbb{N})$ é um conjunto limitado, logo finito. Como $f : \mathbb{N} \to f(\mathbb{N})$ é uma bijeção, $\mathbb{N}$ seria finito, um absurdo. Portanto $f : \mathbb{N} \to X$ é uma bijeção, logo X é enumerável. $\square$

Exercício 3. *Na bijeção que construímos entre os números naturais e os polinômios, encontre o polinômio associado ao número 30.*

Solução:

0	$\mapsto$	$-x-1$	11	$\mapsto$	$-x-2$	21	$\mapsto$	$-2x^2-2x-1$
1	$\mapsto$	$-x$	12	$\mapsto$	$-x+2$	22	$\mapsto$	$-2x^2-2x$
2	$\mapsto$	$-x+1$	13	$\mapsto$	$x-2$	23	$\mapsto$	$-2x^2-2x+1$
3	$\mapsto$	$x-1$	14	$\mapsto$	$x+2$	24	$\mapsto$	$-2x^2-2x+2$
4	$\mapsto$	x	15	$\mapsto$	$2x-2$	25	$\mapsto$	$-2x^2-x-2$
5	$\mapsto$	$x+1$	16	$\mapsto$	$2x-1$	26	$\mapsto$	$-2x^2-x-1$
6	$\mapsto$	$-2x-2$	17	$\mapsto$	$2x$	27	$\mapsto$	$-2x^2-x$
7	$\mapsto$	$-2x-1$	18	$\mapsto$	$2x+1$	28	$\mapsto$	$-2x^2-x+1$
8	$\mapsto$	$-2x$	19	$\mapsto$	$2x+2$	29	$\mapsto$	$-2x^2-x+2$
9	$\mapsto$	$-2x+1$	20	$\mapsto$	$-2x^2-2x-2$	30	$\mapsto$	$-2x^2-2$
10	$\mapsto$	$-2x+2$						

Portanto o polinômio associado ao número 30 é $-2x^2-2$. $\square$

Exercício 4. *Na bijeção que construímos entre os números naturais e os números algébricos, encontre o número natural associado ao número* $\sqrt{3}$

Solução: content $\square$

Exercício 5. *Suponha que, em um conjunto infinito, existe uma forma de representar cada elemento do conjunto com uma sequência finita de símbolos, dentre um conjunto finito de símbolos. Mostre que esse conjunto é enumerável e use esse resultado diretamente para mostrar que os conjuntos dos números racionais e dos números algébricos são enumeráveis.*

Solução: Seja $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ o conjunto de símbolos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $S_n = \{(\tau_1, \ldots, \tau_n) : \tau_1, \ldots, \tau_n \in \Sigma\}$ e ponha $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. S é enumerável por ser uma reunião enumerável de conjuntos enumeráveis (finitos).[1] Seja X o conjunto infinito do exercício. A suposição de que cada elemento de X possa ser representado como uma sequência finita de símbolos significa que existe uma função $f : X \to S$. Esta função deve ser injetiva, pois não podemos usar a mesma sequência de símbolos para representar dois ou mais elementos distintos em X. Então $f : X \to f(X) \subset S$ é bijetiva e como $f(X)$ é enumerável, por ser um subconjunto de um conjunto enumerável conforme o Exercício 2, X é enumerável.

Todo número racional pode ser escrito como a/b, com $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$. Ambos a e b são escritos como uma sequência finita de símbolos (os algarismos de 0 a 9 e o sinal $+$ ou $-$). Pelo resultado demonstrado acima, $\mathbb{Q}$ é enumerável.

[1] [Lim16, p. 51]

Cada polinômio com coeficientes inteiros pode ser escrito como uma sequência finita de símbolos, logo o conjunto formado por esses polinômios é enumerável. O conjunto dos números algébricos é a união dos conjuntos das raízes de cada um desses polinômios. Como essa é uma união enumerável (o conjunto desses polinômios é enumerável) de conjuntos finitos (cada polinômio possui um número finito de raízes), o conjunto dos números algébricos é enumerável. $\square$

Exercício 6. *Imagine que o hotel de Hilbert, com uma quantidade infinita enumerável de quartos, todos ocupados, receba infinitos trens com infinitos vagões e cada vagão com infinitos passageiros (todas essas quantidades enumeráveis). Como o gerente pode alocar todos os atuais hóspedes em quartos separados?*

Solução: Cada passageiro tem uma identificação (p, q, r): $p =$ número do trem; $q =$ número do vagão; $r =$ número do assento. Cada hóspede no quarto n será realocado para o quarto $2n-1$, e cada passageiro com ID (p, q, r) será hospedado no quarto $2^p 3^q (2r - 1)$.

Isto pode ser generalizado: hóspede $n \mapsto$ quarto $2n - 1$; passageiro $(a_1, \ldots, a_m) \mapsto$ quarto $2^{a_1} 3^{a_2} \cdots p_{m-1}^{a_{m-1}} (2a_m - 1)$, em que $2, 3, \ldots, p_{m-1}$ são números primos. $\square$

Exercício 7. *Imagine, agora, um hotem maior ainda, com um quarto para cada número real, totalmente ocupado. Um ônibus igualmente gigantesco, com um passageiro para cada número real, chega ao hotel. Como o gerente pode fazer para rearranjar os hóspedes para acolher os novos visitantes, sempre em quartos separados?*

Solução:

- Hóspede $x \mapsto$ quarto $\arctan x$.
- Passageiro $y \mapsto$ quarto $y + \pi/2$ se $y \geq 0$ ou $y - \pi/2$ se $y < 0$.

Note que o hotel ficará com um quarto vago (o de número $-\pi/2$). $\square$

Chapter 2

A linguagem da Teoria dos Conjuntos

Exercício 1. *Usando a linguagem de primeira ordem da teoria de conjuntos, escreva fórmulas para representar as seguintes frases.*

Solução:

a) Não existe o conjunto de todos os conjuntos.

$\neg\exists x\forall y(y \in x) \equiv \forall x\exists y(y \notin x)$

b) Existe um único conjunto vazio.

$\exists! x\forall y(y \notin x)$

c) x é um conjunto unitário

$\exists! y(y \in x)$

d) Existe um conjunto que tem como elemento apenas o conjunto vazio

$\exists x\forall y((y \in x) \leftrightarrow y = \phi)$

e) y é o conjunto dos subconjuntos de x

$\forall z(z \in y \leftrightarrow \forall w(w \in z \to w \in x))$.

$\square$

Exercício 2. *Marque as ocorrências de variáveis livres nas fórmulas abaixo*

a) $(\forall x(x = y)) \to (x \in y)$

x e y

b) $\forall x((x = y) \to (x \in y))$

y

c) $\forall x(x = x) \to (\forall y \exists Z((x = y) \wedge (y = z)) \to \neg(x \in y))$

x

d) $\forall x \exists y(\neg(x = y) \wedge \forall z((x \in y) \leftrightarrow \forall w((w \in z) \to (w \in x))))$

Não há variáveis livres.

e) $(x = y) \to \exists(x = y)$

x e y

Exercício 3. *Escreva as subfórmulas de cada fórmula do exercício 2.*

Solução:

1. (a) $(\forall x(x = y)) \to (x \in y)$
   (b) $(\forall x(x = y))$
   (c) $(x = y)$
   (d) $(x \in y)$
2. (a) $\forall x((x = y) \to (x \in y))$
   (b) $(x = y) \to (x \in y)$
   (c) $(x = y)$
   (d) $(x \in y)$
3. (a) $\forall x(x = x) \to (\forall y \exists z(((x = y) \wedge (y = z)) \to \neg(x \in y)))$
   (b) $\forall x(x = x)$
   (c) $(x = y)$
   (d) $\forall z \exists y(((x = y) \wedge (y = z)) \to \neg(x \in y))$
   (e) $((x = y) \wedge (y = z))$
   (f) $(x = y)$
   (g) $(y = z)$
   (h) $\neg(x \in y)$

(i) $(x \in y)$

4. (a) $(x = y) \to \exists y(x = y)$
   (b) $(x = y)$
   (c) $\exists y(x = y)$
   (d) $(x = y)$

$\square$

Chapter 3

Primeiros Axiomas

Exercício 1. *Usando o axioma da extenso, prove que* $\{\emptyset\}$ *e* $\{\{\emptyset\}\}$ *so conjuntos diferentes.*

Solução: O conjunto $\{\emptyset\}$ tem como nico elemento $\emptyset$, enquanto $\{\{\emptyset\}\}$ tem como nico elemento $\{\emptyset\}$. Como $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, segue do axioma da extenso que $\{\emptyset\}$ e $\{\{\emptyset\}\}$ so conjuntos distintos. □

Exercício 2. *Para cada par de conjuntos abaixo, decida qual(is) dos smbolos* $\in$ *e* $\subset$ *torna(m) a frmula verdadeira (assumindo que esses conjuntos existem). Lembre-se de que a resposta tambm pode ser ambos os smbolos ou nenhum deles. Justifique cada resposta.*

(a) $\{\emptyset\} \ldots \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

(b) $\{\emptyset\} \ldots \{\{\emptyset\}\}$

(c) $\{1, 2, 3\} \ldots \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

(d) $\{1, 2, 3\} \ldots \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$

(e) $\{1, 2\} \ldots \{1, \{1\}, 2, \{2\}, \{3\}\}$

(f) $\{\{1\}, \{2\}\} \ldots \{\{1, 2\}\}$

Solução:

(a) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ e $\{\emptyset\} \subset \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(b) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$.

(c) No vale $\in$ nem $\subset$.

(d) $\{1, 2, 3\} \in \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$.

(e) $\{1,2\} \subset \{1,\{1\},2,\{2\},\{3\}\}$.

(f) No vale $\in$ nem $\subset$.

$\square$

Exercício 3. *Seja x o conjunto $\{\emptyset,\{\emptyset\},\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.*

(a) Quantos elementos tem o conjunto x?

(b) Descreva todos os subconjuntos de x.

(c) Descreva, usando chaves e vrgula, o conjunto de todos os subconjuntos de x.

(d) Quantos elementos o conjunto dos subconjuntos de x possui?

(e) Prove que o conjunto x existe.

Solução:

(a) 3 elementos.

(b) $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$.

(c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}\}$.

(d) 8 elementos.

(e) Pelo axioma do vazio, existe $\emptyset$. Pelo axioma das partes, existe $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$, e ento $x = \mathcal{P}(\emptyset) \cup \{\mathcal{P}(\emptyset)\} = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\}$ pelo Teorema 3.7.

$\square$

Exercício 4. *Prove que para todos conjuntos x e y*

(a) $x \subset x$;

(b) $x \in y$ se, e somente se, $\{x\} \subset y$;

(c) $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$;

(d) se $x \subset y$, ento $\bigcup x \subset \bigcup y$.

Solução:

(a) Se x no vazio, todo elemento de x elemento de x, logo $x \subset x$. Se x vazio, como $\emptyset$ est contido em qualquer conjunto pelo Teorema 3.4, temos que $\emptyset \subset \emptyset$. Em qualquer caso, $x \subset x$.

(b) Se $x \in y$, como x o nico elemento do conjunto $\{x\}$, temos que $\{x\} \subset y$. Reciprocamente, se $\{x\} \subset y$, ento $x \in y$.

(c) Dado $u \in \bigcup \mathcal{P}(x)$, existe $x \in \mathcal{P}(x)$ tal que $u \in v$. Como $\mathcal{P}(x)$ o conjunto de todos os subconjuntos de x, $v \subset x$, logo $u \in x$. Portanto $\bigcup \mathcal{P}(x) \subset x$.

Reciprocamente, como $x \subset x$ pelo item (a), ento $x \in \mathcal{P}(x)$, logo qualquer elemento $y \in x$ ser elemento de $\bigcup \mathcal{P}(x)$, e assim $x \subset \bigcup \mathcal{P}(x)$.

Pelo axioma da extenso, $\bigcup \mathcal{P}(x) = x$.

(d) Dado $u \in \bigcup x$, existe $v \in x$ tal que $u \in v$. Como $x \subset y$, $v \in y$, logo $u \in \bigcup y$ e, portanto, $\bigcup x \subset \bigcup y$.

$\square$

Exercício 5. *Escreva uma frmula de primeira ordem, na linguagem da teoria dos conjuntos, com quatro variveis livres, que represente o conjunto* $\{x, y, z\}$.

Solução: content $\square$

Exercício 6. *Escreva os seguintes conjuntos, listando seus elementos entre chaves:*

(a) $\bigcup \{\{0,1\}, \{\{1\}\}, \{1,2\}, \{\{1,2\}\}\}$*;*

(b) $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$.

Solução:

(a) $\{0, 1, \{1\}, 2, \{1,2\}\}$.

(b) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

$\square$

Exercício 7. *Prove que no existe o conjunto de todos os conjuntos unitrios.*
Dica: *Assuma, por absurdo, a existncia do conjunto de todos os conjuntos unitrios e prove a existncia do conjunto de todos os conjuntos.*

Solução: Suponha que existe x tal que $\forall y(\{y\} \in x)$. Ento $\{x\} \in x$. Como $x \in \{x\}$, temos uma contradio com o Teorema 3.14. Portanto $\nexists x \forall y(\{y\} \in x)$. $\square$

Exercício 8. *Prove que para todo conjunto X existe o conjunto*

$$\{\{x\} : x \in X\}$$

Solução: Pelo axioma das partes, existe o conjunto $\mathcal{P}(X)$. Para cada $x \in X$, temos que $\{x\} \subset X$, logo $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$. Pelo axioma da separao, existe o conjunto $\{y \in \mathcal{P}(X) : \exists x((x \in X) \wedge (\{x\} = y))\}$, que, via axioma da extenso, o conjunto procurado. □

Exercício 9. *Sendo x um conjunto no vazio, prove que*

(a) $\forall y(y \in x \rightarrow (\bigcap x \subset y))$*;*

(b) $x \subset y \rightarrow \bigcap y \subset \bigcap x$*.*

Solução:

(a) Dados $y \in x$ e $z \in \bigcap x$, temos que $\forall w((w \in x) \rightarrow (z \in w))$. Em particular, $z \in y$, logo $\bigcap x \subset y$.

(b) Dado $z \in \bigcap y$, temos que z elemento de qualquer $w \in y$. Como $x \subset y$, os elementos de x so tambm elementos de y, logo z elemento de qualquer $w \in x$ em particular, portanto $z \in \bigcap x$. Desta forma $\bigcap y \subset \bigcap x$.

□

Exercício 10. *Escreva na linguagem da lgica de primeira ordem, sem abreviaturas, a seguinte frmula:*

$$x \in \bigcup \bigcap (y \cup (w \backslash z)).$$

Solução: content □

Exercício 11. *Usando o axioma da regularidade, prove que:*

(a) no existem x, y, z tais que $x \in y, y \in z$ e $z \in x$;

(b) no existem w, x, y, z tais que $w \in x, x \in y, y \in z$ e $z \in w$.

Solução:

(a) Pelo axioma do par, existem $\{x, y\}$ e $\{y, z\}$. Tome $w = \{x, y\} \bigcup \{y, z\} = \{x, y, z\}$. Pelo axioma da regularidade, existe $u \in w$ tal que $u \cap w = \emptyset$. Se for $u = x$, ento $y \notin x$ e $z \notin x$. Se for $u = y$, ento $x \notin y$ e $z \notin y$. Se for $u = z$, ento $x \notin z$ e $y \notin z$. Em qualquer caso, no podemos ter $x \in y$, $y \in z$ e $z \in x$ simultaneamente.

(b) Basta repetir o argumento acima para o conjunto $\{w, x, y, z\}$.

$\square$

Exercício 12. *Prove que no existe x tal que $\mathcal{P}(x) = x$.*

Solução: Se $\mathcal{P}(x) = x$, como $x \subset x$, ento $x \in \mathcal{P}(x)$, contradizendo o Corolrio 3.15. $\square$

Exercício 13. *Escreva o conjunto $\mathcal{P}(3\backslash 1)$, utilizando apenas os seguintes smbolos: as chaves, a vrgula e o smbolo de conjunto vazio.*

Solução: $\mathcal{P}(3\backslash 1) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\}$. $\square$

Exercício 14. *Prove, a partir dos axiomas de Peano, os seguintes teoremas:*

(a) Todo nmero natural diferente do seu sucessor.

(b) Zero o nico nmero natural que no sucessor de nenhum nmero natural.

Solução:

(a) Tese: $\forall n((n \in \omega) \wedge (n \neq n^+))$.

Para $n = 0$, $n^+ \neq 0$, pois 0 no sucessor de nenhum nmero natural, logo a tese verdadeira para $n = 0$.

Suponha que a tese verdadeira para algum $n \in \omega$. Pelo axioma 3, n e n^+ devem ter sucessores distintos, isto , $n^+ \neq (n^+)^+$. Isto mostra que a tese verdadeira para n^+. Pelo axioma 5, a tese verdadeira para todo n natural.

(b) Tese: $\forall n((n \in \omega) \wedge \nexists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n)) \rightarrow (n = 0))$.

Contrapositiva: $\forall n((n \neq 0) \rightarrow ((n \notin \omega) \vee \exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))))$.

Demonstraremos a contrapositiva, por ser equivalente tese. Para isto precisaremos da seguinte proposio.

Proposio: Seja σ um subconjunto no vazio de ω. Se $0 \in \sigma$ e, para cada $n \in \sigma$, valer $n^+ \in \sigma$, ento $\sigma = \omega$.

Prova: Aplicando o axioma 5 frmula $P(\sigma) = (x \in \sigma)$, obtemos $\omega \subset \sigma$. Como $\sigma \subset \omega$, ento $\sigma = \omega$. $\blacksquare$

Seja $\sigma = \{0\} \cup \{n \in \omega : \exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))\}$. Temos que $0 \in \sigma$ e, para cada $n \in \sigma$, $n^+ \in \sigma$. Pela proposio acima, $\sigma = \omega$. Pelo axioma 4, $\{0\} \cap \{n \in \omega : \exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))\} = \emptyset$. Portanto, para qualquer $n \in \omega$ com $n \neq 0$, $\exists m((m \in \omega) \wedge (m^+ = n))$. Isto demonstra, por contraposio, a tese.

□

Exercício 15. *Prove que:*

(a) para todo $n \in \omega$, $\emptyset \in n$ *ou* $\emptyset = n$;

(b) para todos $n, m \in \omega$, *se* $m \in n$, *ento* $m \subset n$.

Solução:

(a) Para $n = 0$, $n = \emptyset$, logo a tese verdadeira.

Suponha ser verdade para n. Se $\emptyset = n$, ento $\emptyset \in n^+ = n \cup \{n\}$. Se $\emptyset \in n$, ento $\emptyset \in n^+$, e a tese verdadeira para n^+

Pelo axioma 5, $\emptyset \in n$ ou $\emptyset = n$ para qualquer $n \in \omega$.

(b) J feito na prova do Teorema 3.21, item (c).

□

Exercício 16. *A unio de dois conjuntos indutivos necessariamente um conjunto indutivo? Justifique sua resposta.*

Solução:

Resposta: Sim.

Justificativa: Sejam A e B dois conjuntos indutivos. Como $\emptyset \in A$ e $\emptyset \in B$, ento $\emptyset \in A \cup B$. Se $x \in A \cup B$, ento $x \in A$ ou $x \in B$, logo $x^+ \in A$ ou $x^+ \in B$, o que implica $x^+ \in A \cup B$. Isto mostra que $A \cup B$ indutivo. □

Chapter 4

Produto Cartesiano, Relas e Funs

Chapter 5

Axioma da Escolha e suas Aplicas

Chapter 6

Conjuntos Equipotentes

Chapter 7

Ordinais

Chapter 8

Cardinais

Chapter 9

Ordens Parciais

Chapter 10

Nos de Teoria dos Modelos

Chapter 11

Modelos para ZFC

Chapter 12

Forcing

Bibliography

[Lim16] Elon Lages Lima. *Curso de análise*. 14th ed. Vol. 1. Rio de Janeiro: Impa, 2016.