Matemáticas para las Ciencias Aplicadas IV
Tarea 02 - E.D.O. de segundo orden

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

03 de mayo de 2019

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} + \dot{y} + 4y = 2\operatorname{senh}(t)$
2. $2\ddot{y} + 3\dot{y} + y = t^2 + 3\operatorname{sen}(t)$
3. $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = \left(3t^7 - 5t^4\right)e^{3t}$
4. $\ddot{y} + y = (\cos t)(\cos 2t)(\cos 3t)$

   Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y} + y = 0$, que tiene como ecuación característica $r^2 + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} r^2 + 1 &= 0 \\ r^2 &= -1 \\ r &= \pm\sqrt{-1} \\ r_{1,2} &= \pm i \end{aligned}$$

   Como tiene raíces complejas, tomamos de una raíz su parte real como $\lambda = 0$ y el coeficiente de su parte imaginaria como $\mu = 1$ y obtenemos la solución general de la homogénea asociada

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{0t}(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t) \\ &= C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

   Ahora encontremos una solución particular de la ecuación diferencial.
   Comencemos simplificando el lado derecho, utilizamos la identidad $\cos u \cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$

$$\begin{aligned} (\cos t)(\cos 2t)(\cos 3t) &= (\cos t)\frac{1}{2}\left[\cos(5t) + \cos(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(5t)\cos t + \cos t \cos t\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos 6t + \cos 4t) + \frac{1}{2}(\cos 2t + \cos 0)\right] \\ &= \frac{1}{4}\cos 6t + \frac{1}{4}\cos 4t + \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   La solución particular buscada será la suma de las soluciones particulares para cada término de la suma, es decir, $\Psi(t) = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$ donde

   - Ψ_1 es la solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 6t$
   - Ψ_2 es la solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 4t$
   - Ψ_3 es la solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 2t$
   - Ψ_4 es la solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}$

Para $\ddot{y}+y=\frac{1}{4}$ proponemos como solución a un polinomio de grado cero, es decir, una constante, o sea que $\Psi_4(t)=A_0$, entonces $\dot{\Psi}_4(t)=0=\ddot{\Psi}_4(t)$, por lo que $A_0=\frac{1}{4}$ y por lo tanto $\Psi_4(t)=\frac{1}{4}$.

Para poder proponer una solución particular de $\ddot{y}+y=\frac{1}{4}\cos 2t$, primero resolvamos la ecuación aplicando la identidad de Euler: $\ddot{y}+y=\frac{1}{4}e^{2it}$. Notemos que $2i$ no es solución para la ecuación homogénea asociada, por lo que la propuesta de solución para ésta última ecuación es $\gamma(t)=A_0e^{2it}$, entonces:

- $\dot{\gamma}(t)=2iA_0e^{2it}$
- $\ddot{\gamma}(t)=-4A_0e^{2it}$

Sustituyendo tenemos que

$$-4A_0e^{2it}+A_0e^{2it}=\frac{1}{4}e^{2it}$$
$$-4A_0+A_0=\frac{1}{4}$$
$$-3A_0=\frac{1}{4}$$
$$A_0=-\frac{1}{12}$$

Por lo que $\gamma(t)=-\frac{1}{12}e^{2it}=-\frac{1}{12}[\cos 2t+i\operatorname{sen} 2t]=-\frac{1}{12}\cos 2t-\frac{i}{12}\operatorname{sen} 2t$. Dado que nuestra ecuación originalmente sólo contaba con el coseno, tomaremos únicamente la parte real de γ, por lo que $\Psi_3(t)=-\frac{1}{12}\cos 2t$

Para encontrar la solución particular de $\ddot{y}+y=\frac{1}{4}\cos 4t$ podemos alternativamente sugerir como una propuesta sesnsata a $\Psi_2(t)=A\operatorname{sen}(4t)+B\cos(4t)$, de éste modo $\dot{\Psi}_2(t)=4A\cos(4t)-4B\operatorname{sen}(4t)$ y $\ddot{\Psi}_2(t)=-16A\operatorname{sen}(4t)-16B\cos(4t)$. Sustituyendo en $\ddot{y}+y=\frac{1}{4}\cos 4t$ tenemos:

$$-16A\operatorname{sen}(4t)-16B\cos(4t)+A\operatorname{sen}(4t)+B\cos(4t)=\frac{1}{4}\cos(4t)$$
$$(-16A+A)\operatorname{sen}(4t)+(-16B+B)\cos(4t)=0\operatorname{sen}(4t)+\frac{1}{4}\cos(4t)$$

por lo que tenemos que

$$\begin{cases}-15A=0\Rightarrow A=0\\ -15B=\frac{1}{4}\Rightarrow B=-\frac{1}{60}\end{cases}$$

Por lo tanto $\Psi_2(t)=-\frac{1}{60}\cos(4t)$

Finalmente, de manera análoga encontramos la solución particular para $\ddot{y}+y=\frac{1}{4}\cos 6t$. Proponemos $\Psi_1(t)=A\operatorname{sen} 6t+B\cos 6t$

- $\dot{\Psi}_1(t)=6A\cos 6t-6B\operatorname{sen} 6t$
- $\ddot{\Psi}_1(t)=-36A\operatorname{sen} 6t-36B\cos 6t$

Entonces

$$-36A\operatorname{sen} 6t-36B\cos 6t+A\operatorname{sen} 6t+B\cos 6t=\frac{1}{4}\cos 6t$$
$$-35A\operatorname{sen} 6t-35B\cos 6t=0\operatorname{sen} 6t+\frac{1}{4}\cos 6t$$

entonces

$$\begin{cases}-35A=0\\ -35B=\frac{1}{4}\end{cases}$$

y por lo tanto $\Psi_1(t)=-\frac{1}{140}\cos 6t$

Por lo tanto, la solución particular es

$$\Psi(t)=-\frac{1}{140}\cos 6t-\frac{1}{60}\cos 4t-\frac{1}{12}\cos 2t+\frac{1}{4}$$

Y por lo tanto, la solución general se obtiene de sumar $\Phi(t) + \Psi(t)$

$$y(t) = \Phi(t) + \Psi(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{140}\cos 6t - \frac{1}{60}\cos 4t - \frac{1}{12}\cos 2t + \frac{1}{4}$$

5. $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = t^2 e^{7t}$
Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y} + 5\dot{y} + 4y = 0$, que tiene como ecuación característica $r^2 + 5r + 4 = 0$.

$$\begin{aligned} r^2 + 5r + 4 &= 0 \\ (r+4)(r+1) &= 0 \\ r_1 + 4 = 0 &\to r_1 = -4 \\ r_2 + 1 = 0 &\to r_2 = -1 \end{aligned}$$

Cómo tiene dos raíces reales diferentes, entonces la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$\Phi(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{-t}$$

Ahora encontremos una solución particular de la ecuación diferencial. Como del lado derecho de la ecuación tenemos un polinomio de segundo grado multiplicado por una expresión esxponencial, sería sensato suponer que una solución particular sea $\Psi(t) = v(t)e^{7t}$, siempre y cuando e^{7t} no sea una solución particular de la homogénea, pero, como puede verse, no lo es.

6. $\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 3te^{2t}$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = 0$
Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0$, que tiene como ecuación característica $r^2 - 2r - 3 = 0$.

7. $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 4e^{-t}\cos(2t)$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = 0$
Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y = 0$, que tiene como ecuación característica $r^2 + 2r + 5 = 0$.

$$\begin{aligned} r^2 + 2r + 5 &= 0 \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{-2 \pm 4i}{2} \\ &= -1 \pm 2i \end{aligned}$$

Como tiene raíces complejas, tomamos de una raíz su parte real como $\lambda = -1$ y el coeficiente de su parte imaginaria como $\mu = 2$ y obtenemos la solución general de la homogénea asociada

$$\Phi(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 sen 2t)$$

Ahora encontremos una solución particular de la ecuación diferencial.
Usamos el método de la conjetura sensata, donde $\gamma(t) = t(A_0 e^{-t} sen(2t) + A_1 e^{-t} cos(2t))$:

- $\dot{\gamma}(t) = A_0(e^{-t}sen(2t) + t(-e^{-t}sen(2t) + 2e^{-t}cos(2t))) + A_1(e^{-t}cos(2t) + t(-e^{-t}cos(2t) - 2e^{-t}sen(2t)))$
- $\ddot{\gamma}(t) = A_0(-3e^{-t}tsen(2t) - 4e^{-t}tcos(2t) - 2e^{-t}sin(2t) + 4e^{-t}cos(2t)) + A_1(-3e^{-t}tcos(2t) + 4e^{-t}tsen(2t) - 2e^{-t}cos(2t) - 4e^{-t}sen(2t))$

Sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned} &(A_0(-3e^{-t}tsen(2t) - 4e^{-t}tcos(2t) - 2e^{-t}sen(2t) + 4e^{-t}cos(2t)) \\ &+A_1(-3e^{-t}tcos(2t) + 4e^{-t}tsen(2t) - 2e^{-t}cos(2t) - 4e^{-t}sen(2t))) \\ &+2(A_0(e^{-t}sen(2t) + t(-e^{-t}sen(2t) + 2e^{-t}cos(2t))) + A_1(e^{-t}cos(2t) + t(-e^{-t}cos(2t) - 2e^{-t}sen(2t)))) \\ &+5(A_0e^{-t}tsen(2t) + A_1e^{-t}tcos(2t)) = 4e^{-t}cos(2t) \end{aligned}$$

$$4A_0e^{-t}cos(2t) - 4A_1e^{-t}sen(2t) = 4e^{-t}\cos(2t)$$

entonces

$$\begin{cases} 4A_0 = 4 \\ -4A_1 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $A_0 = 1,\ A_1 = 0$ y tenemos que la solución particular es $\gamma(t) = e^{-t}tsen(2t)$

De ahí tenemos que la solución es: $y(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 sen2t) + e^{-t}tsen(2t)$

Aplicamos las condiciones iniciales:
$y(0) = e^{-0}(C_1 \cos 2 \cdot 0 + C_2 sen2 \cdot 0) + e^{-0} \cdot 0sen(2 \cdot 0) = 1$
$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 sen0 = 1$
$y(0) = C_1 = 1$

$y'(0) = -e^{-0} \cdot 0sen(2 \cdot 0) + 2e^{-0} \cdot 0cos(2 \cdot 0) - C_2e^{-0}sen(2 \cdot 0) + 2C_2e^{-0}cos(2 \cdot 0) - e^{-0}cos(2 \cdot 0) - e^{-0}sen(2 \cdot 0) = 0$
$y'(0) = -C_2sen(0) + 2C_2cos(0) - cos(0) - sen(0) = 0$
$y'(0) = 2C_2 - 1 = 0$

Despejamos C_1, C_2 y tenemos que $C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{2}$

Sustituimos C_1, C_2 en y(t) y tenemos de resultado final:
$y(t) = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2}sen2t) + e^{-t}tsen(2t)$

8. Determinar la solución general de

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m sen(m\pi t)$$

con $\lambda > 0$ y $\lambda \neq m\pi$ para $m = 1, 2, \ldots, N$.

Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y} + \lambda^2 y = 0$, que tiene como ecuación característica $r^2 + \lambda^2 = 0$.

$$\begin{aligned} r^2 + \lambda^2 &= 0 \\ r^2 &= -\lambda^2 \\ r &= \pm\sqrt{-1(\lambda^2)} \\ Como\ \lambda > 0 : r_{1,2} &= i\lambda \end{aligned}$$

Como tiene raíces complejas, tomamos de una raíz su parte real como $\alpha = 0$ y el coeficiente de su parte imaginaria como $\beta = \lambda$ y obtenemos la solución general de la homogénea asociada

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{0t}(C_1 \cos \lambda t + C_2 \operatorname{sen} \lambda t) \\ &= C_1 \cos \lambda t + C_2 \operatorname{sen} \lambda t \end{aligned}$$

Ahora encontremos una solución particular de la ecuación diferencial.

La solución particular buscada será la suma de las soluciones particulares para cada término de la suma, buscamos la solución particular para un k $1 < k < N$ y sería la conjetura sensata: $\gamma_k = A_0 e^{k\pi i t}$

- $\ddot{\gamma}_k(t) = A_0(k\pi i)^2 e^{k\pi i t}$

Sustituyendo tenemos que

$$\lambda^2(A_0 e^{k\pi i t}) + (A_0(k\pi i)^2 e^{k\pi i t}) = a_k e^{k\pi i t}$$

Entonces $A_0(\lambda^2 + (k\pi i)^2) = a_k$

De ahí, $A_0 = \frac{a_k}{\lambda^2 + (k\pi i)^2}$

Sustituimos A_0 y tenemos que la solución particular de un k es $\gamma_k = \frac{a_k}{\lambda^2+(k\pi i)^2}e^{k\pi i t}$

De ahí, la solución particular de toda la suma es $\gamma(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\lambda^2+(k\pi i)^2}e^{k\pi i t}$

Y tenemos que la solución final es: $y(t) = C_1 \cos \lambda t + C_2 \operatorname{sen} \lambda t + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\lambda^2+(k\pi i)^2}e^{k\pi i t}$