Matemáticas para las Ciencias Aplicadas IV
Tarea 02 - E.D.O. de segundo orden

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

03 de mayo de 2019

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} + \dot{y} + 4y = 2\,\mathrm{senh}\,(t)$

   Primero, hay que resolver ecuación homogénea asociada $\ddot{y} + \dot{y} + 4y = 0$ con polinomio característico $r^2 + r + 4$. Usando lo fórmula general para encontrar las raíces del polinomio

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{2}i$$

   Como son dos raíces imaginarias, entonces dos soluciones independientes de la ecuación homogénea son $e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{15}t}{2}$ y $e^{-\frac{t}{2}} \,\mathrm{sen}\, \frac{\sqrt{15}t}{2}$, por lo que la solución general de la ecuación homogénea es

$$y = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{15}t}{2} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \,\mathrm{sen}\, \frac{\sqrt{15}t}{2}, \;\; \textit{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

   Ahora, hay que encontrar una solución particular de ecuación original. Notemos que

$$\ddot{y} + \dot{y} + 4y = 2\,\mathrm{senh}\,(t) = 2(\frac{e^t - e^{-t}}{2}) = e^t + (-e^{-t})$$

   Por lo que usando una conjetura sensata, digamos que la solución particular es algo de la forma $y = Ae^t + Be^{-t}$. Luego, hay que calcular las derivadas.

$$\dot{y} = Ae^t - Be^{-t}$$
$$\ddot{y} = Ae^t + Be^{-t}$$

   Y sustituyendo estos valores en la ecuación original,

$$\begin{aligned} Ae^t + Be^{-t} + Ae^t - Be^{-t} + 4Ae^t + 4Be^{-t} &= e^t - e^{-t} \\ 6Ae^x + 4Be^{-t} &= e^t - e^{-t} \\ \implies A = \frac{1}{6} \wedge B = -\frac{1}{4} & \end{aligned}$$

   Por lo que una solución particular a la ecuación original es $y = \frac{e^t}{6} - \frac{e^{-t}}{4}$.
   Por lo tanto, la forma general de las soluciones de la ecuación son

$$y = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos \frac{\sqrt{15}t}{2} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \,\mathrm{sen}\, \frac{\sqrt{15}t}{2} + \frac{e^t}{6} - \frac{e^{-t}}{4}, \;\; \textit{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. $2\ddot{y} + 3\dot{y} + y = t^2 + 3\,\mathrm{sen}\,(t)$

   Primero, hay que resolver la ecuación homogénea asociada a este ecuación, que es $2\ddot{y} + 3\dot{y} + y = 0$, que tiene como polinomio característico a $2r^2 + 3r + 1 = 2(r + 1)(r + \frac{1}{2})$.
   Por lo que las raíces del polinomio son $r = -1, -\frac{1}{2}$.

Como son dos raíces reales, entonces dos soluciones independientes a la ecuación homogénea son e^{-t} y $e^{-\frac{t}{2}}$, por lo que la forma general de las soluciones es

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-\frac{t}{2}}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ahora, hay que encontrar una solución particular de la ecuación original. Como conjetura sensata, digamos que una solución es de la forma $y = At^2 + Bt + C + D \operatorname{sen} t + E \cos t$. Obteniendo las derivadas

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= 2At + B + D \cos t - E \operatorname{sen} t \\
\ddot{y} &= 2A - D \operatorname{sen} t - E \cos t
\end{aligned}$$

Y sustituyendo en la ecuación original

$$\begin{aligned}
2(2A - D \operatorname{sen} t - E \cos t) + 3(2At + B + D \cos t - E \operatorname{sen} t) + At^2 + Bt + C + D \operatorname{sen} t + E \cos t = t^2 + 3 \operatorname{sen}(t) \\
4A - 2D \operatorname{sen} t - 2E \cos t + 6At + 3B + 3D \cos - 3E \operatorname{sen} t + At^2 + Bt + C + D \operatorname{sen} t + E \cos t = t^2 + 3 \operatorname{sen}(t) \\
At^2 + (6A + B)t + (4A + 3B + C) + (-2D - 3E + D) \operatorname{sen} t + (-2E + 3D + E) \cos t = t^2 + 3 \operatorname{sen}(t) \\
At^2 + (6A + B)t + (4A + 3B + C) + (-D - 3E) \operatorname{sen} t + (-E + 3D) \cos t = t^2 + 3 \operatorname{sen}(t)
\end{aligned}$$

De aquí se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
A &= 1 \\
6A + B &= 0 \\
4A + 3B + C &= 0 \\
-D - 3E &= 3 \\
-E + 3D &= 0
\end{aligned}$$

A ya está resuelto.
Sustituyendo su valor en la segunda ecuación tenemos $6 + B = 0 \implies B = -6$.
Sustituyendo esto en la tercera ecuación tenemos $4 + 18 + C = 0 \implies C = -24$.
Luego, sumando el triple de la cuarta ecuación a la quinta, tenemos que $-10E = 9 \implies E = -\frac{9}{10}$.
Y sustituyendo esto en la cuarta ecuación, tenemos que $-D + \frac{27}{10} = 3 \implies D = -\frac{3}{10}$.
Por lo que una solución particular a la ecuación original es

$$y = t^2 - 6t - 24 - \frac{3}{10} \cos t - \frac{9}{10} \operatorname{sen} t$$

Por lo que forma general de las soluciones de la ecuación es

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-\frac{t}{2}} + t^2 - 6t - 24 - \frac{3}{10} \cos t - \frac{9}{10} \operatorname{sen} t, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = \left(3t^7 - 5t^4\right) e^{3t}$

Primero, hay que encontrar la solución de la ecuación homogénea asociada $\ddot{y} - 6\dot{y} + 9y = 0$.
Esta tiene polinomio característico $r^2 - 6r + 9 = (r-3)(r-3)$, por lo que tiene una única raíz $r = 3$.
Entonces, dos soluciones independientes son $e^3 t$ y te^{3t}, y todas las soluciones de la ecuación homogénea son de la forma

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ahora hay que encontrar una solución particular de la ecuación original.
Como conjetura sensata, digamos que una solución tendría la forma de $y = pe^{3t}$, con p un polinomio.
Derivando, tenemos que

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= (\dot{p} + 3p)e^{3t} \\
\ddot{y} &= (\ddot{p} + 6\dot{p} + 9p)e^{3t}
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$\begin{aligned}
(\ddot{p} + 6\dot{p} + 9p - 6(\dot{p} + 3p) + 9p)e^{3t} &= (3t^7 - 5t^4)e^{3t} \\
\ddot{p}e^{3t} &= (3t^7 - 5t^4)e^{3t}
\end{aligned}$$

Y esta igualdad se da únicamente cuando $\ddot{p} = 3t^7 - 5t^4$. Entonces, resolviendo para p.

$$p = \int\int \ddot{p}dt = \int\int 3t^7 - 5t^4 dt = \int (\frac{3t^8}{8} - t^5 + k_1)dt = \frac{3t^9}{72} - \frac{t^6}{6} + \frac{k_1^2}{2} + k_2$$

Cada elección de k_1 y k_2 define un posible polinomio. Como sólo se requiere uno, se tomará el más sencillo, con $k_1 = k_2 = 0$.

Entonces una solución particular de la ecuación original es $y = (\frac{3t^9}{72} - \frac{t^6}{6})e^{3t}$. Entonces, la forma general de todas las soluciones de la ecuación original es

$$y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t} + (\frac{3t^9}{72} - \frac{t^6}{6})e^{3t}, \text{ con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4. $\ddot{y} + y = (\cos t)(\cos 2t)(\cos 3t)$

Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y} + y = 0$, que tiene como ecuación característica $r^2 + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} r^2 + 1 &= 0 \\ r^2 &= -1 \\ r &= \pm\sqrt{-1} \\ r_{1,2} &= \pm i \end{aligned}$$

Como tiene raíces complejas, tomamos de una raíz su parte real como $\lambda = 0$ y el coeficiente de su parte imaginaria como $\mu = 1$ y obtenemos la solución general de la homogénea asociada

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{0t}(C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t) \\ &= C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t \end{aligned}$$

Ahora encontremos una solución particular de la ecuación diferencial.

Comencemos simplificando el lado derecho, utilizamos la identidad $\cos u \cos v = \frac{1}{2}\left[\cos(u+v) + \cos(u-v)\right]$

$$\begin{aligned} (\cos t)(\cos 2t)(\cos 3t) &= (\cos t)\frac{1}{2}\left[\cos(5t) + \cos(t)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\cos(5t)\cos t + \cos t \cos t\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\cos 6t + \cos 4t) + \frac{1}{2}(\cos 2t + \cos 0)\right] \\ &= \frac{1}{4}\cos 6t + \frac{1}{4}\cos 4t + \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

La solución particular buscada será la suma de las soluciones particulares para cada término de la suma, es decir, $\Psi(t) = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4$ donde

- Ψ_1 es la solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 6t$
- Ψ_2 es la solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 4t$
- Ψ_3 es la solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 2t$
- Ψ_4 es la solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}$

Para $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}$ proponemos como solución a un polinomio de grado cero, es decir, una constante, o sea que $\Psi_4(t) = A_0$, entonces $\dot{\Psi}_4(t) = 0 = \ddot{\Psi}_4(t)$, por lo que $A_0 = \frac{1}{4}$ y por lo tanto $\Psi_4(t) = \frac{1}{4}$.

Para poder proponer una solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 2t$, primero resolvamos la ecuación aplicando la identidad de Euler: $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}e^{2it}$. Notemos que $2i$ no es solución para la ecuación homogénea asociada, por lo que la propuesta de solución para ésta última ecuación es $\gamma(t) = A_0 e^{2it}$, entonces:

- $\dot{\gamma}(t) = 2iA_0 e^{2it}$
- $\ddot{\gamma}(t) = -4A_0 e^{2it}$

Sustituyendo tenemos que

$$-4A_0e^{2it} + A_0e^{2it} = \frac{1}{4}e^{2it}$$
$$-4A_0 + A_0 = \frac{1}{4}$$
$$-3A_0 = \frac{1}{4}$$
$$A_0 = -\frac{1}{12}$$

Por lo que $\gamma(t) = -\frac{1}{12}e^{2it} = -\frac{1}{12}[\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t] = -\frac{1}{12}\cos 2t - \frac{i}{12}\operatorname{sen} 2t$. Dado que nuestra ecuación originalmente sólo contaba con el coseno, tomaremos únicamente la parte real de γ, por lo que $\Psi_3(t) = -\frac{1}{12}\cos 2t$

Para encontrar la solución particular de $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 4t$ podemos alternativamente sugerir como una propuesta sesnsata a $\Psi_2(t) = A\operatorname{sen}(4t) + B\cos(4t)$, de éste modo $\dot{\Psi}_2(t) = 4A\cos(4t) - 4B\operatorname{sen}(4t)$ y $\ddot{\Psi}_2(t) = -16A\operatorname{sen}(4t) - 16B\cos(4t)$. Sustituyendo en $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 4t$ tenemos:

$$-16A\operatorname{sen}(4t) - 16B\cos(4t) + A\operatorname{sen}(4t) + B\cos(4t) = \frac{1}{4}\cos(4t)$$
$$(-16A + A)\operatorname{sen}(4t) + (-16B + B)\cos(4t) = 0\operatorname{sen}(4t) + \frac{1}{4}\cos(4t)$$

por lo que tenemos que

$$\begin{cases} -15A = 0 \Rightarrow A = 0 \\ -15B = \frac{1}{4} \Rightarrow B = -\frac{1}{60} \end{cases}$$

Por lo tanto $\Psi_2(t) = -\frac{1}{60}\cos(4t)$

Finalmente, de manera análoga encontramos la solución particular para $\ddot{y} + y = \frac{1}{4}\cos 6t$. Proponemos $\Psi_1(t) = A\operatorname{sen} 6t + B\cos 6t$

- $\dot{\Psi}_1(t) = 6A\cos 6t - 6B\operatorname{sen} 6t$
- $\ddot{\Psi}_1(t) = -36A\operatorname{sen} 6t - 36B\cos 6t$

Entonces

$$-36A\operatorname{sen} 6t - 36B\cos 6t + A\operatorname{sen} 6t + B\cos 6t = \frac{1}{4}\cos 6t$$
$$-35A\operatorname{sen} 6t - 35B\cos 6t = 0\operatorname{sen} 6t + \frac{1}{4}\cos 6t$$

entonces

$$\begin{cases} -35A = 0 \\ -35B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

y por lo tanto $\Psi_1(t) = -\frac{1}{140}\cos 6t$

Por lo tanto, la solución particular es

$$\Psi(t) = -\frac{1}{140}\cos 6t - \frac{1}{60}\cos 4t - \frac{1}{12}\cos 2t + \frac{1}{4}$$

Y por lo tanto, la solución general se obtiene de sumar $\Phi(t) + \Psi(t)$

$$y(t) = \Phi(t) + \Psi(t) = C_1\cos t + C_2\operatorname{sen} t - \frac{1}{140}\cos 6t - \frac{1}{60}\cos 4t - \frac{1}{12}\cos 2t + \frac{1}{4}$$

5. $\ddot{y}+5\dot{y}+4y=t^2e^{7t}$

   Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y}+5\dot{y}+4y=0$, que tiene como ecuación característica $r^2+5r+4=0$.

$$\begin{aligned} r^2+5r+4&=0\\ (r+4)(r+1)&=0\\ r_1+4=0 &\rightarrow r_1=-4\\ r_2+1=0 &\rightarrow r_2=-1 \end{aligned}$$

   Cómo tiene dos raíces reales diferentes, entonces la solución general de la ecuación homogénea asociada es

$$\Phi(t)=C_1e^{-4t}+C_2e^{-t}$$

   Ahora encontremos una solución particular de la ecuación diferencial. Como del lado derecho de la ecuación tenemos un polinomio de segundo grado multiplicado por una expresión esxponencial, sería sensato suponer que una solución particular sea $\Psi(t)=v(t)e^{7t}$, siempre y cuando e^{7t} no sea una solución particular de la homogénea, pero, como puede verse, no lo es.

6. $\ddot{y}-2\dot{y}-3y=3te^{2t}$ con $y(0)=1$ y $\dot{y}(0)=0$

   Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y}-2\dot{y}-3y=0$, que tiene como ecuación característica $r^2-2r-3=0$.

7. $\ddot{y}+2\dot{y}+5y=4e^{-t}\cos(2t)$ con $y(0)=1$ y $\dot{y}(0)=0$

   Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y}+2\dot{y}+5y=0$, que tiene como ecuación característica $r^2+2r+5=0$.

$$\begin{aligned} r^2+2r+5&=0\\ &=\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot5}}{2\cdot1}\\ &=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}\\ &=\frac{-2\pm4i}{2}\\ &=-1\pm2i \end{aligned}$$

   Como tiene raíces complejas, tomamos de una raíz su parte real como $\lambda=-1$ y el coeficiente de su parte imaginaria como $\mu=2$ y obtenemos la solución general de la homogénea asociada

$$\Phi(t)=e^{-t}(C_1\cos2t+C_2sen2t)$$

   Ahora encontremos una solución particular de la ecuación diferencial.
   Usamos el método de la conjetura sensata, donde $\gamma(t)=t(A_0e^{-t}sen(2t)+A_1e^{-t}cos(2t))$:

   - $\dot{\gamma}(t)=A_0(e^{-t}sen(2t)+t(-e^{-t}sen(2t)+2e^{-t}cos(2t)))+A_1(e^{-t}cos(2t)+t(-e^{-t}cos(2t)-2e^{-t}sen(2t)))$
   - $\ddot{\gamma}(t)=A_0(-3e^{-t}tsen(2t)-4e^{-t}tcos(2t)-2e^{-t}sin(2t)+4e^{-t}cos(2t))+A_1(-3e^{-t}tcos(2t)+4e^{-t}tsen(2t)-2e^{-t}cos(2t)-4e^{-t}sen(2t))$

   Sustituyendo tenemos que

$$\begin{aligned} (A_0(-3e^{-t}tsen(2t)-4e^{-t}tcos(2t)-2e^{-t}sen(2t)+4e^{-t}cos(2t))\\ +A_1(-3e^{-t}tcos(2t)+4e^{-t}tsen(2t)-2e^{-t}cos(2t)-4e^{-t}sen(2t)))\\ +2(A_0(e^{-t}sen(2t)+t(-e^{-t}sen(2t)+2e^{-t}cos(2t)))+A_1(e^{-t}cos(2t)+t(-e^{-t}cos(2t)-2e^{-t}sen(2t))))\\ +5(A_0e^{-t}tsen(2t)+A_1e^{-t}tcos(2t))=4e^{-t}cos(2t) \end{aligned}$$

$$4A_0e^{-t}cos(2t)-4A_1e^{-t}sen(2t)=4e^{-t}\cos(2t)$$

entonces

$$\begin{cases} 4A_0 = 4 \\ -4A_1 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto $A_0 = 1,\ A_1 = 0$ y tenemos que la solución particular es $\gamma(t) = e^{-t}tsen(2t)$

De ahí tenemos que la solución es: $y(t) = e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 sen2t) + e^{-t}tsen(2t)$

Aplicamos las condiciones iniciales:
$y(0) = e^{-0}(C_1 \cos 2 \cdot 0 + C_2 sen2 \cdot 0) + e^{-0} \cdot 0sen(2 \cdot 0) = 1$
$y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 sen0 = 1$
$y(0) = C_1 = 1$

$y'(0) = -e^{-0} \cdot 0sen(2 \cdot 0) + 2e^{-0} \cdot 0cos(2 \cdot 0) - C_2 e^{-0} sen(2 \cdot 0) + 2C_2 e^{-0} cos(2 \cdot 0) - e^{-0} cos(2 \cdot 0) - e^{-0} sen(2 \cdot 0) = 0$
$y'(0) = -C_2 sen(0) + 2C_2 cos(0) - cos(0) - sen(0) = 0$
$y'(0) = 2C_2 - 1 = 0$

Despejamos C_1, C_2 y tenemos que $C_1 = 1, C_2 = \frac{1}{2}$

Sustituimos C_1, C_2 en y(t) y tenemos de resultado final:
$y(t) = e^{-t}(\cos 2t + \frac{1}{2} sen2t) + e^{-t}tsen(2t)$

8. Determinar la solución general de

$$\ddot{y} + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^{N} a_m sen(m\pi t)$$

con $\lambda > 0$ y $\lambda \neq m\pi$ para $m = 1, 2, \ldots, N$.

Primero encontremos la solución general de la ec. homogénea asociada, es decir, $\ddot{y} + \lambda^2 y = 0$, que tiene como ecuación característica $r^2 + \lambda^2 = 0$.

$$\begin{aligned} r^2 + \lambda^2 &= 0 \\ r^2 &= -\lambda^2 \\ r &= \pm\sqrt{-1(\lambda^2)} \\ Como\ \lambda > 0 : r_{1,2} &= i\lambda \end{aligned}$$

Como tiene raíces complejas, tomamos de una raíz su parte real como $\alpha = 0$ y el coeficiente de su parte imaginaria como $\beta = \lambda$ y obtenemos la solución general de la homogénea asociada

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{0t}(C_1 \cos \lambda t + C_2 \operatorname{sen} \lambda t) \\ &= C_1 \cos \lambda t + C_2 \operatorname{sen} \lambda t \end{aligned}$$

Ahora encontremos una solución particular de la ecuación diferencial.

La solución particular buscada será la suma de las soluciones particulares para cada término de la suma, buscamos la solución particular para un k $1 < k < N$ y sería la conjetura sensata: $\gamma_k = A_0 e^{k\pi i t}$

- $\ddot{\gamma}_k(t) = A_0 (k\pi i)^2 e^{k\pi i t}$

Sustituyendo tenemos que

$$\lambda^2 (A_0 e^{k\pi i t}) + (A_0 (k\pi i)^2 e^{k\pi i t}) = a_k e^{k\pi i t}$$

Entonces $A_0(\lambda^2 + (k\pi i)^2) = a_k$

De ahí, $A_0 = \frac{a_k}{\lambda^2 + (k\pi i)^2}$

Sustituimos A_0 y tenemos que la solución particular de un k es $\gamma_k = \frac{a_k}{\lambda^2+(k\pi i)^2}e^{k\pi it}$

De ahí, la solución particular de toda la suma es $\gamma(t) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\lambda^2+(k\pi i)^2}e^{k\pi it}$

Y tenemos que la solución final es: $y(t) = C_1 \cos \lambda t + C_2 \operatorname{sen} \lambda t + \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\lambda^2+(k\pi i)^2}e^{k\pi it}$