Matemáticas para las Ciencias Aplicadas IV
Tarea-Examen 03

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

03 de mayo de 2019

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $(t-2)^2\ddot{y} + 5(t-2)\dot{y} + 4y = 0$
2. $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + 2y = 0$
3. Usar el método de reducción de orden para demostrar que $y_2(t) = t^{r_1} lnt$ cuando se tienen raíces repetidas en la ecuación de Euler.
4. $2t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} - (1-t)y = 0$
5. $2t^2\ddot{y} + (t^2-t)\dot{y} + y = 0$

La ecuación se puede escribir en su forma estándar dividiendo por $2t^2$

$$\ddot{y} + \frac{t^2-t}{2t^2}\dot{y} + \frac{1}{2t^2}y = 0$$

Tanto $P(t) = \frac{t^2-t}{2t^2}$ como $Q(t) = \frac{1}{2t^2}$ se indeterminan cuando $t=0$, por lo que $t_0 = 0$ es un punto singular, veamos que t_0 es regular pues tanto $t \cdot P(t)$ como $t^2 \cdot Q(t)$ son analíticas.

$$\lim_{t_0 \to 0} t \cdot \frac{t^2-t}{2t^2} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{t-1}{2} = -\frac{1}{2} = p_0$$

$$\lim_{t_0 \to 0} t^2 \cdot \frac{1}{2t^2} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = q_0$$

La ecuación indicial asociada al a ecuación diferencial es $r^2 + (-\frac{1}{2}-1)r + \frac{1}{2} = 0$, que simplificada es $2r^2 - 3r + 1 = 0$ y cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$

Como $r_1 = r_2 + \lambda$, siendo λ un entero fraccionario, se propone que ambas soluciones sean de la forma

$$y(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$$

por lo que

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r-1}$$

$$\ddot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación original, tenemos

$$2t^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r-2} + (t^2-t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]c_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}=0$$

Calculamos el primer término de la primera suma para tener el mismo exponente en la t después de ajustar los índices

$$(2r(r-1)-r+1)\,c_0t^r+\sum_{n=1}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]c_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}=0$$

$$\left(2r^2-2r-r+1\right)c_0t^r+\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r+1)(n+r)-(n+r+1)+1]c_{n+1} t^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}=0$$

$$\left(2r^2-3r+1\right)c_0t^r+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{[2(n+r+1)(n+r)-n-r]\,c_{n+1}+(n+r)c_n\right\}t^{n+r+1}=0$$

Igualamos todos los coeficientes a cero. Notemos que el primer término se reduce a la ecuación indicial: $2r^2-3r+1=0$ cuyas raíces recordemos son $r_1=1$ y $r_2=\frac{1}{2}$. Con los demás coeficientes obtenemos la relación de recurrencia

$$[2(n+r+1)-1](n+r)c_{n+1}+(n+r)c_n=0$$

$$(2n+2r+1)(n+r)c_{n+1}=-(n+r)c_n$$

$$c_{n+1}=-\frac{\cancel{(n+r)}c_n}{(2n+2r+1)\cancel{(n+r)}}=-\frac{c_n}{2n+2r+1}$$

Para $r=r_1=1$ tenemos que $c_{n+1}=-\frac{c_n}{2n+3}$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & c_1=-\frac{c_0}{3}\\
\text{si } n=1 & c_2=-\frac{c_1}{5}=\frac{c_0}{15}\\
\text{si } n=2 & c_3=-\frac{c_2}{7}=-\frac{c_0}{105}\\
\text{si } n=3 & c_4=-\frac{c_3}{9}=\frac{c_0}{945}\\
\text{si } n=4 & c_5=-\frac{c_4}{11}=-\frac{c_0}{10395}\\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

por lo que

$$y_1(t)=c_0t\left[1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{15}-\frac{t^3}{105}+\frac{t^4}{945}-\dots\right]$$

Para $r=r_2=\frac{1}{2}$ tenemos que $c_{n+1}=-\frac{c_n}{2(n+1)}$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & c_1=-\frac{c_0}{2}\\
\text{si } n=1 & c_2=-\frac{c_1}{4}=\frac{c_0}{8}\\
\text{si } n=2 & c_3=-\frac{c_2}{6}=-\frac{c_0}{48}\\
\text{si } n=3 & c_4=-\frac{c_3}{8}=\frac{c_0}{384}\\
\text{si } n=4 & c_5=-\frac{c_4}{10}=-\frac{c_0}{3840}\\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

por lo que

$$y_2(t)=c_0t^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{48}+\frac{t^4}{384}-\dots\right]$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t)=c_0\left[t\left(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{15}-\frac{t^3}{105}+\frac{t^4}{945}-\dots\right)+t^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{48}+\frac{t^4}{384}-\dots\right)\right]$$

6. Invertigar las soluciones del método de Frobenius cuando r_2-r_1 es entero y cuando $r_1=r_2$.

Teorema 1. [1] *Sea el punto $x = 0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial:*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

y sea ρ el menor radio de convergencia de dos funciones $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$. Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación indicial:

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

donde

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xP(x) \quad y \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2Q(x)$$

y $r_1 > r_2$ cuando las raíces son reales y desiguales, entonces existen dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de esta ecuación diferencial, con un radio de convergencia de ρ. Para $x > 0$, son de las siguientes formas:

Caso 1: $r_1 = r_2 + \lambda$ *(λ es positiva no entera)*

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$
$$y_2 = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (b_0 \neq 0)$$

Caso 2: $r_1 = r_2 = r$

$$y_1 = x^{r}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$
$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

Caso 3: $r_1 = r_2 + N$ *(N es un entero positivo)*

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$
$$y_2 = Cy_1 \ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (b_0 \neq 0)$$

donde la constante C puede ser cero. Entonces, la solución general de la ecuación diferencial para los tres casos se expresa como

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

donde las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se determinan por las condiciones iniciales y en la frontera.

7. $t\ddot{y} - (4 + t)\dot{y} + 2y = 0$

Obtenemos la forma estándar al dividir por t

$$\ddot{y} - \frac{t+4}{t}\dot{y} + \frac{2}{t}y = 0$$

$t_0 = 0$ es un punto singular regular, pues

$$\lim_{t_0\to 0} -\frac{t+4}{t}t = \lim_{t_0\to 0} -t - 4 = -4 = p_0 \quad \lim_{t_0\to 0} \tfrac{2}{t}t^2 = \lim_{t_0\to 0} 2t = 0 = q_0$$

De ahí, la ecuación indicial queda $r^2 - 5r = 0$ y sus raíces son $r_1 = 5$ y $r_2 = 0$.

Por el teorema anterior, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes: la segunda puede contener un término logarítmico.

[1] Çengel, Y.&Palm W.. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. México: McGraw Hill.

Proponemos como la primera solución

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1}$$

Entonces

$$\dot{y}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1}$$

$$\ddot{y}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-1) t^{n+r_1-2}$$

Sustituyendo

$$t\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-1) t^{n+r_1-2} - (4+t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-1) t^{n+r_1-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1}[n+r_1-1-4] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1}[2-n-r_1] = 0$$

$$a_0 r_1 t^{r_1-1}(r_1-5) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-5) t^{n+r_1-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2-n-r_1) t^{n+r_1} = 0$$

$$a_0 r_1 (r_1-5) t^{r_1-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+r_1+1)(n+r_1-4) t^{n+r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2-n-r_1) t^{n+r_1} = 0$$

$$a_0 r_1 (r_1-5) t^{r_1-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+1} (n+r_1+1)(n+r_1-4) + a_n (2-n-r_1)] t^{n+r_1} = 0$$

Igualamos los términos a cero, del primer término obtenemos la ecuación indicial, y del resto tendremos

$$a_{n+1}(n+r_1+1)(n+r_1-4) + a_n(2-n-r_1) = 0$$

$$a_{n+1}(n+r_1+1)(n+r_1-4) = a_n(n+r_1-2)$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n(n+r_1-2)}{(n+r_1+1)(n+r_1-4)} \tag{1}$$

Como $r_1 = 5$

$$a_{n+1} = \frac{a_n(n+3)}{(n+6)(n+1)}$$

$$\begin{array}{ll} \text{si } n=0 & a_1 = \frac{3a_0}{6} = \frac{a_0}{2} \\ \text{si } n=1 & a_2 = \frac{4a_1}{(7)(2)} = \frac{a_0}{7} \\ \text{si } n=2 & a_3 = \frac{5a_2}{(8)(3)} = \frac{5a_0}{168} \\ \text{si } n=3 & a_4 = \frac{6a_3}{(9)(4)} = \frac{5a_0}{1008} \\ \text{si } n=4 & a_5 = \frac{7a_4}{(10)(5)} = \frac{a_0}{1440} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Por lo que

$$y_1(t) = a_0 t^5 \left[1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{7} + \frac{5t^3}{168} + \frac{5t^4}{1008} + \dots\right]$$

Para la segunda solución linealmente independiente proponemos

$$y_2(t) = Cy_1 \ln t + t^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Es decir

$$y_2(t) = Cy_1 \ln t + t^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

$$y_2(t) = Cy_1 \ln t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Supongamos que ésta solución carece de término logaritmico, es decir, $C = 0$, por lo que la propuesta se simplificará a

$$y_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Como es parecida a $y_1(t)$, el procedimiento para encontrar los coeficientes es idéntico hasta la ecuación (1), por lo que

$$b_{n+1} = \frac{b_n(n-2)}{(n+1)(n-4)}$$

$$\begin{array}{ll} \text{si } n=0 & b_1 = \frac{-2b_0}{-4} = \frac{b_0}{2} \\ \text{si } n=1 & b_2 = \frac{-b_1}{(2)(-3)} = \frac{b_0}{12} \\ \text{si } n=2 & b_3 = \frac{0b_2}{(3)(-2)} = 0 \end{array}$$

En este punto nos detenemos, pues al haber un cero el resto de coeficientes serán cero.

Por lo tanto

$$y_2(t) = b_0 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12}\right)$$

Que se puede comprobar fácilmente que corresponde a una solución de la ecuación diferencial y además es linealmente independiente a $y_1(t)$.

Por lo tanto la solución buscada es

$$y(t) = a_0 t^5 \left[1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{7} + \frac{5t^3}{168} + \frac{5t^4}{1008} + \dots\right] + b_0 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12}\right)$$

8. $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = e^{2t}$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = -1$.
9. $\ddot{y} + y = t \operatorname{sen} t$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = 2$.
10. $\ddot{y} + \dot{y} + y = 1 + e^{-t}$ con $y(0) = 3$ y $\dot{y}(0) = -5$.