# Matemáticas para las Ciencias Aplicadas IV
# Tarea-Examen 03

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

03 de mayo de 2019

**Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales**

1. $(t-2)^2\ddot{y} + 5(t-2)\dot{y} + 4y = 0$

2. $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + 2y = 0$

3. Usar el método de reducción de orden para demostrar que $y_2(t) = t^{r_1} lnt$ cuando se tienen raíces repetidas en la ecuación de Euler.

4. $2t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} - (1-t)y = 0$

5. $2t^2\ddot{y} + (t^2 - t)\dot{y} + y = 0$

   La ecuación se puede escribir en su forma estándar dividiendo por $2t^2$

$$\ddot{y} + \frac{t^2 - t}{2t^2}\dot{y} + \frac{1}{2t^2}y = 0$$

Tanto $P(t) = \frac{t^2-t}{2t^2}$ como $Q(t) = \frac{1}{2t^2}$ se indeterminan cuando $t = 0$, por lo que $t_0 = 0$ es un punto singular, veamos que $t_0$ es regular pues tanto $t \cdot P(t)$ como $t^2 \cdot Q(t)$ son analíticas.

$$\lim_{t_0 \to 0} t \cdot \frac{t^2 - t}{2t^2} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{t-1}{2} = -\frac{1}{2} = p_0$$

$$\lim_{t_0 \to 0} t^2 \cdot \frac{1}{2t^2} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = q_0$$

La ecuación indicial asociada al a ecuación diferencial es $r^2 + (-\frac{1}{2} - 1)r + \frac{1}{2} = 0$, que simplificada es $2r^2 - 3r + 1 = 0$ y cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$

Como $r_1 = r_2 + \lambda$, siendo $\lambda$ un entero fraccionario, se propone que ambas soluciones sean de la forma

$$y(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$$

por lo que

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r-1}$$

$$\ddot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación original, tenemos

$$2t^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r-2} + (t^2 - t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n(n+r)(n+r-1)t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)t^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]c_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)t^{n+r+1} = 0$$

Calculamos el primer término de la primera suma para tener el mismo exponente en la $t$ despues de ajustar los índices

$$(2r(r-1) - r + 1)\, c_0 t^r + \sum_{n=1}^{\infty} [2(n+r)(n+r-1) - (n+r) + 1]c_n t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)t^{n+r+1} = 0$$

$$\left(2r^2 - 2r - r + 1\right) c_0 t^r + \sum_{n=0}^{\infty} [2(n+r+1)(n+r) - (n+r+1) + 1]c_{n+1} t^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)t^{n+r+1} = 0$$

$$\left(2r^2 - 3r + 1\right) c_0 t^r + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{[2(n+r+1)(n+r) - n - r]\, c_{n+1} + (n+r)c_n\right\} t^{n+r+1} = 0$$

Igualamos todos los coeficientes a cero. Notemos que el primer término se reduce a la ecuación indicial: $2r^2 - 3r + 1 = 0$ cuyas raíces recordemos son $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$. Con los demás coeficientes obtenemos la relación de recurrencia

$$[2(n+r+1) - 1](n+r)c_{n+1} + (n+r)c_n = 0$$

$$(2n+2r+1)(n+r)c_{n+1} = -(n+r)c_n$$

$$c_{n+1} = -\frac{\cancel{(n+r)}c_n}{(2n+2r+1)\cancel{(n+r)}} = -\frac{c_n}{2n+2r+1}$$

Para $r = r_1 = 1$ tenemos que $c_{n+1} = -\frac{c_n}{2n+3}$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & c_1 = -\frac{c_0}{3} \\
\text{si } n=1 & c_2 = -\frac{c_1}{5} = \frac{c_0}{15} \\
\text{si } n=2 & c_3 = -\frac{c_2}{7} = -\frac{c_0}{105} \\
\text{si } n=3 & c_4 = -\frac{c_3}{9} = \frac{c_0}{945} \\
\text{si } n=4 & c_5 = -\frac{c_4}{11} = -\frac{c_0}{10395} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

por lo que

$$y_1(t) = c_0 t \left[1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{15} - \frac{t^3}{105} + \frac{t^4}{945} - \dots\right]$$

Para $r = r_2 = \frac{1}{2}$ tenemos que $c_{n+1} = -\frac{c_n}{2(n+1)}$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & c_1 = -\frac{c_0}{2} \\
\text{si } n=1 & c_2 = -\frac{c_1}{4} = \frac{c_0}{8} \\
\text{si } n=2 & c_3 = -\frac{c_2}{6} = -\frac{c_0}{48} \\
\text{si } n=3 & c_4 = -\frac{c_3}{8} = \frac{c_0}{384} \\
\text{si } n=4 & c_5 = -\frac{c_4}{10} = -\frac{c_0}{3840} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

por lo que

$$y_2(t) = c_0 t^{\frac{1}{2}} \left[1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{48} + \frac{t^4}{384} - \dots\right]$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t) = c_0 \left[t\left(1 - \frac{t}{3} + \frac{t^2}{15} - \frac{t^3}{105} + \frac{t^4}{945} - \dots\right) + t^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{8} - \frac{t^3}{48} + \frac{t^4}{384} - \dots\right)\right]$$

6. Invertigar las soluciones del método de Frobenius cuando $r_2 - r_1$ es entero y cuando $r_1 = r_2$.

7. $t\ddot{y} - (4+t)\dot{y} + 2y = 0$
8. $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = e^{2t}$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = -1$.
9. $\ddot{y} + y = t \operatorname{sen} t$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = 2$.
10. $\ddot{y} + \dot{y} + y = 1 + e^{-t}$ con $y(0) = 3$ y $\dot{y}(0) = -5$.