Matemáticas para las Ciencias Aplicadas IV
Tarea-Examen 03

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

03 de mayo de 2019

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $(t-2)^2\ddot{y} + 5(t-2)\dot{y} + 4y = 0$ con $t > 0$

   Utilizamos el método de la Ecuación de Euler para encontrar la solución general de la ecuación, podemos utilizar este método ya que la ecuación es de la forma $(t-t_0)^2\ddot{y} + \alpha(t-t_0)\dot{y} + \beta y = 0$ con α y β constantes. Esta ecuación es también una ecuación de Euler, con una singularidad en $t = t_0$ en lugar de $t = 0$. En este caso buscamos por soluciones de la forma $(t-t_0)^r$

   Queremos ver en que caso cae de acuerdo a las raíces de su ecuación característica, así que substituimos $y = (t-2)^r$ en la ecuación y obtenemos las raíces de la siguiente forma:
   $r(r-1)(t-2)^r + 5r(t-2)^r + 4(t-2)^r$
   $[r(r-1) + 5r + 4](t-2)^r$
   $[r^2 + 4r + 4](t-2)^r$
   $(r+2)^2(t-2)^r$

   La ecuación $(r+2)^2 = 0$ tiene $r = -2$ como raíz repetida, así que caemos en el Caso 2.
   De ahí, $y_1(t-2) = (t-2)^{-2}$, $\;y_2(t-2) = (t-2)^{-2}ln(t-2)$

   Por lo tanto, tenemos que la solución general de la ecuación es:

   $y(t) = (c_1 + c_2 ln(t-2))(t-2)^{-2}$

   $y(t) = \frac{c_1 + c_2 ln(t-2)}{(t-2)^2}$

2. $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + 2y = 0$ con $t > 0$

   Utilizamos el método de la Ecuación de Euler para encontrar la solución general de la ecuación, podemos utilizar este método ya que la ecuación es de la forma $t^2\ddot{y} + \alpha t\dot{y} + \beta y = 0$ con α y β constantes.

   Queremos ver en que caso cae de acuerdo a las raíces de su ecuación característica, así que substituimos $y = t^r$ en la ecuación y obtenemos las raíces de la siguiente forma:
   $r(r-1)t^r + 3rt^r + 2t^r$
   $[r(r-1) + 3r + 2]t^r$
   $[r^2 + 2r + 2]t^r$
   Las raíces de la ecuación $r^2 + 2r + 2 = 0$ son:
   $\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$

   Tenemos la siguiente solución compleja:

$$\phi(t) = t^{-1+i} = t^{-1}t^{i}$$
$$= t^{-1}e^{(lnt)i} = t^{-1}e^{i(lnt)}$$
$$= t^{-1}[cos(lnt) + isen(lnt)]$$

Consecuentemente vemos que al tener soluciones complejas, caemos en el Caso 3 y tenemos:
$y_1(t) = Re\{\phi(t)\} = t^{-1}cos(lnt)$ y $y_2(t) = Im\{\phi(t)\} = t^{-1}sen(lnt)$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es:

$y(t) = (c_1cos(ln(t)) + c_2sen(ln(t)))(t)^{-1}$

$y(t) = \frac{c_1cos(ln(t))+c_2sen(ln(t))}{t}$

3. Usar el método de reducción de orden para demostrar que $y_2(t) = t^{r_1}lnt$ cuando se tienen raíces repetidas en la ecuación de Euler.

   El método de reducción de orden nos permite usar una solución conocida Y_1 de una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea para encontrar una solución lineal independiente de Y_2

   Así que consideramos la ecuación de Euler $t^2\ddot{y} + \alpha t\dot{y} + \beta y = 0$ y suponemos que y_1, donde $y_1 = t^{r_1}$ es una solución a la ecuación. Y $r_1 = \frac{1-\alpha}{2}$

   Dividimos la ecuación de Euler entre t^2 $\ddot{y} + \frac{\alpha}{t}\dot{y} + \frac{\beta}{t^2}y = 0$

   Sabemos que para resolver una ecuación diferencial de segundo orden, debemos tener dos soluciones linealmente independientes. Así que, debemos determinar una segunda solución linealmente independiente y lo obtenemos al intentar encontrar una solución de la forma: $y_2 = v(t)y_1 = v(t)t^{r_1}$ donde $v(t)$ no es una función constante, ya que si fuera constante, y_1 y y_2 serían linealmente dependientes.

   Calculamos $\dot{y_2}(t) = \dot{y_1}v(t) + \dot{v}(t)y_1$
   Calculamos $\ddot{y_2}(t) = \ddot{y_1}v(t) + \dot{v}(t)\dot{y_1} + \dot{y_1}\dot{v}(t) + \ddot{v}(t)y_1$

   Sustituimos en la ecuación dividida de Euler:
   $[\ddot{y_1}v(t) + 2\dot{v}(t)\dot{y_1} + \ddot{v}(t)y_1] + \frac{\alpha}{t}[\dot{y_1}v(t) + \dot{v}(t)y_1] + \frac{\beta}{t^2}[v(t)y_1] = 0$

   Multiplicamos por t^2 y factorizamos:
   $[t^2y_1]\ddot{v}(t) + [t^2(2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1)]\dot{v}(t) + [t^2\ddot{y_1} + \alpha t\dot{y_1} + \beta y_1]v(t) = 0$

   Sabemos que la ecuación de Euler es igual a cero, así que eliminamos el factor multiplicado por $v(t)$ y volvemos a dividir entre t^2
   $[y_1]\ddot{v}(t) + [2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1]\dot{v}(t) = 0$

   Hacemos un cambio de variable donde $w = \dot{v}(t)$ y $\dot{w} = \ddot{v}(t)$
   $[y_1]\dot{w} + [2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1]w = 0$

   Ahora, queremos obtener w, así que derivamos $\dot{w}$
   $\frac{dw}{dt}[y_1] + w[2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1] = 0$
   $\frac{dw}{dt}[y_1] = -w[2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1]$
   $\frac{dw}{dt} = -w[2\frac{\dot{y_1}}{y_1} + \frac{\alpha}{t}]$
   $\frac{dw}{w} = -[2\frac{\dot{y_1}}{y_1}dt + \frac{\alpha}{t}dt]$

Integramos e ignoramos las constantes que se acumulen por el momento:
$\int \frac{dw}{w}dt + 2\int \frac{\dot{y_1}}{y_1}dt + \int \frac{\alpha}{t}dt = 0$

Recordemos que y_1 es una función de t
$ln(w) + 2ln(y_1) + \alpha ln(t) = 0$

Usamos leyes de los logaritmos
$ln(w) + ln(y_1^2) + \alpha ln(t) = 0$
$ln(wy_1^2) = -\alpha ln(t)$

Aplicamos epsilon de los dos lados
$wy_1^2 = e^{-\alpha ln(t)}$
$w = \frac{e^{-\alpha ln(t)}}{y_1^2}$

Regresamos a las variables originales y tenemos:
$\dot{v} = w = \frac{e^{-\alpha ln(t)}}{y_1^2}$

Integramos de nuevo para obtener v e ignoramos las constantes por el momento
$\int \dot{v}(t)dt = \int \frac{e^{-\alpha ln(t)}}{y_1^2}dt$
$v(t) = \int \frac{t^{-\alpha}}{y_1^2}dt$
$v(t) = \int \frac{t^{-\alpha}}{y_1^2}dt$

Sustituimos el valor de y_1 en la integral
$v(t) = \int \frac{t^{-\alpha}}{(t^{r_1})^2}dt$
$v(t) = \int \frac{1}{t^{2r_1+\alpha}}dt$

Sustituimos el valor de r_1 en la integral
$v(t) = \int \frac{1}{t^{2(\frac{1-\alpha}{2})+\alpha}}dt$
$v(t) = \int \frac{1}{t^{1-\alpha+\alpha}}dt$
$v(t) = \int \frac{1}{t^1}dt$

Finalmente obtenemos el resultado de la integral
$v(t) = ln(t)$

Por lo tanto $y_2 = t^{r_1}ln(t)$ ■

4. $2t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} - (1+t)y = 0$

   Queremos utilizar el método de Frobenius, así que verificamos que $x = 0$ sea un punto singular para $t^2\ddot{y} + \frac{3}{2}t\dot{y} - \frac{(1+t)}{2}y$

   Veamos si los límites existen:
   $\lim_{t\to 0} \frac{\frac{3}{2}t}{t^2}(t-0) = \frac{\frac{3}{2}t^2}{t^2} = \frac{3}{2}$
   $\lim_{t\to 0} \frac{-(1+t)}{2t^2}(t-0)^2 = \frac{-(1+t)t^2}{t^2} = \frac{-(1+t)}{2} = -\frac{1}{2}$

   Como $x = 0$ es un punto singular, podemos aplicar el método de Frobenius.
   Proponemos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r},\ a_0 \neq 0$
   Calculamos $\dot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r-1}$
   Y $\ddot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r-2}$

   Y sustituimos en la ecuación:
   $\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r} - \frac{(1+t)}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$

$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)+\frac{3}{2}(n+r)-\frac{1}{2}]a_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2}a_n t^{n+r+1}$

Proponer la suma de coeficientes como potencias de t igual a cero da:
$(r)(r-1)+\frac{3}{2}(r)-\frac{1}{2}$
$r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}$
$(r+1)(r-\frac{1}{2})$

Entonces tenemos nuestras raíces $r_1=-1, r_2=\frac{1}{2}$, como estas raíces no difieren por un entero, podemos encontrar dos soluciones independientes de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+r}$ con a_n determinada por
$[(n+r)(n+r-1)+\frac{3}{2}(n+r)-\frac{1}{2}]a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$
Por lo tanto la solución general de la ecuación es:

$\frac{c_1}{t}(1-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3\cdot 3!}-\frac{t^4}{3\cdot 5\cdot 4!}-\dots)+c_2\sqrt{t}(1+\frac{t}{5}+\frac{t^2}{5\cdot 7\cdot 2!}+\frac{t^3}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 3!}+\dots)$

5. $2t^2\ddot{y}+(t^2-t)\dot{y}+y=0$
6. Invertigar las soluciones del método de Frobenius cuando r_2-r_1 es entero y cuando $r_1=r_2$.
7. $t\ddot{y}-(4+t)\dot{y}+2y=0$
8. $\ddot{y}-5\dot{y}+4y=e^{2t}$ con $y(0)=1$ y $\dot{y}(0)=-1$.
9. $\ddot{y}+y=t\operatorname{sen}t$ con $y(0)=1$ y $\dot{y}(0)=2$.
10. $\ddot{y}+\dot{y}+y=1+e^{-t}$ con $y(0)=3$ y $\dot{y}(0)=-5$.