Matemáticas para las Ciencias Aplicadas IV
Tarea-Examen 03

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

03 de mayo de 2019

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $(t-2)^2\ddot{y} + 5(t-2)\dot{y} + 4y = 0$

2. $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + 2y = 0$

3. Usar el método de reducción de orden para demostrar que $y_2(t) = t^{r_1} lnt$ cuando se tienen raíces repetidas en la ecuación de Euler.

4. $2t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} - (1-t)y = 0$

5. $2t^2\ddot{y} + (t^2 - t)\dot{y} + y = 0$

6. Invertigar las soluciones del método de Frobenius cuando $r_2 - r_1$ es entero y cuando $r_1 = r_2$.

7. $t\ddot{y} - (4+t)\dot{y} + 2y = 0$

8. $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = e^{2t}$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = -1$.

   Primero, hay que sacar la transformada de Laplace de toda la ecuación para despejar $Y(s)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\
\mathcal{L}\{\ddot{y}\} - 5\mathcal{L}\{\dot{y}\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\
s^2Y(s) - s + 1 - 5sY(s) + 5 + 4Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\
Y(s)(s^2 - 5s + 4) + s + 6 &= \frac{1}{s-2} \\
Y(s) &= \frac{1}{(s-2)(s-4)(s-1)} - \frac{(s+6)}{(s-4)(s-1)}
\end{aligned}$$

   Luego, descomponiendo en fracciones parciales.
   Primero

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s-2)(s-4)(s-1)} &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s-1} \\
&= \frac{A(s-4)(s-1) + B(s-2)(s-1) + C(s-2)(s-4)}{(s-2)(s-4)(s-1)} \\
&\iff A(s-4)(s-1) + B(s-2)(s-1) + C(s-2)(s-4) = 1
\end{aligned}$$

   Evaluando en $s = 2$, tenemos

$$-4A = 1 \iff A = -\frac{1}{4}$$

Evaluando en $s = 4$ tenemos

$$6B = 1 \iff B = \frac{1}{6}$$

Evaluando en $s = 1$ tenemos

$$3C = 1 \iff C = \frac{1}{3}$$

Segundo

$$\begin{aligned}
\frac{s+6}{(s-4)(s-1)} &= \frac{D}{s-4} + \frac{E}{s-1} \\
&= \frac{D(s-1) + E(s-4)}{(s-4)(s-1)} \\
&\iff D(s-1) + E(s-4) = s+6
\end{aligned}$$

Evaluando en $s = 4$ tenemos que

$$3D = 10 \iff D = \frac{10}{3}$$

Evaluando en $s = 1$ tenemos que

$$-3E = 7 \iff E = -\frac{7}{3}$$

Juntando estas dos cosas, tenemos que

$$\begin{aligned}
Y(s) &= -\frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-4}\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{10}{3}\frac{1}{s-4} - \frac{7}{3}\frac{1}{s-1} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{7}{2}\frac{1}{s-4} - 2\frac{1}{s-1}
\end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{7}{2}\frac{1}{s-4} - 2\frac{1}{s-1}\} \\
y(t) &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} + \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-4}\} - 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} \\
y(t) &= \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{4t} - 2e^{t}
\end{aligned}$$

Que es la solución buscada.

9. $\ddot{y} + y = t \operatorname{sen} t$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = 2$.

   Primero, hay que sacar la transformada de Laplace de toda la ecuación para despejar $Y(s)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\ddot{y} + y\} &= \mathcal{L}\{t \operatorname{sen} t\} \\
\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + Y(s) &= -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} \\
s^2Y(s) - s - 2 + Y(s) &= \frac{2s}{(s^2+1)^2} \\
Y(s)(s^2+1) - s - 2 &= \frac{2s}{(s^2+1)^2} \\
Y(s) &= \frac{2s}{(s^2+1)^3} + \frac{s+2}{s^2+1} \\
Y(s) &= 2\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

   Ahora, hay que sacar la transformada inversa.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{2\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1}\} \\
y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} + 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} \\
y(t) &= 2\cos t \sin^2 t + \cos t + 2\sin t
\end{aligned}$$

   Que es la solución buscada.

10. $\ddot{y} + \dot{y} + y = 1 + e^{-t}$ con $y(0) = 3$ y $\dot{y}(0) = -5$.

Primero hay qu sacar la transformada de Laplace de toda la ecuacioń, e intentar despejar $Y(s)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\ddot{y} + \dot{y} + y\} &= \mathcal{L}\{1 + e^{-t}\} \\
\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + \mathcal{L}\{\dot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{e^{-t}\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + sY(s) - y(0) + Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \\
s^2Y(s) - 3s + 5 + sY(s) - 3 + Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \\
Y(s)(s^2 + s + 1) - (3s - 2) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+s+1)} + \frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} + \frac{3s-2}{s^2+s+1}
\end{aligned}$$

Luego, descompongamos algunas de las expresiones en fraccciones parciales. Primero

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s(s^2+s+1)} &= \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2+s+1} \\
&= \frac{As^2 + As + A + Bs^2 + Cs}{s(s^2+s+1)} \\
&\iff 1 = As^2 + As + A + Bs^2 + Cs
\end{aligned}$$

Que nos define un sistemas de ecuaciones lineales.

Para resolverlo, primero obtenemos

$$A = 1$$

Y usando este valor de A, podemos obtener

$$A + C = 0 \implies C = -1$$

Y

$$A + B = 0 \implies B = -1$$

Luego, para la otra expresión

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} &= \frac{A}{s+1} + \frac{Bs + C}{s^2+s+1} \\
&= \frac{As^2 + As + A + Bs^2 + Bs + Cs + C}{s(s^2+s+1)} \\
&\iff 1 =
\end{aligned}$$

Que defines un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}
A + B &= 0 \\
A + B + C &= 0 \\
A + C &= 1
\end{aligned}$$

Para resolverlo, primero restamos las dos primeras ecuaciones

$$(A + B) - (A + B + C) = 0 - 0 \implies C = 0$$

Sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos

$$A + 0 = 1 \implies A = 1$$

Y sustituyendo esto en la primera tenemos que

$$1 + B = 0 \implies B = -1$$

Con esto, se puede reescribir $Y(s)$ como

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+s+1} + \frac{3s-2}{s^2+s+1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{s-3}{s^2+s+1}
\end{aligned}
$$

Luego, notemos que $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.
Por lo que en particular

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos(bt)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

Y

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(bt)\} = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

Ahora, vamos a llevar al último término a una forma similar a esta.
Primera, completamos el cuadrado del denominador

$$\frac{s-3}{s^2+s+1} = \frac{s-3}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{s-3}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Luego, forzamos a que la constante de nominador coincida con la constante del cuadrado, aunque esto divide la expresión en dos.

$$\frac{s-3}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Ahora, en esta otra parte, hay que forzar a que el nominador sea la raíz del nominador.

$$\frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}$$

Entonces, se reescribe $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}$$

Ahora, resolviendo para encontrar la inversa de esto

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}\} \\
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\} - \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}\} \\
y(t) &= 1 + e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{3}{4}t - \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{3}{4}t
\end{aligned}
$$

Que es la solución buscada.