# Matemáticas para las Ciencias Aplicadas IV
# Tarea-Examen 03

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

03 de mayo de 2019

**Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales**

1. $(t-2)^2\ddot{y} + 5(t-2)\dot{y} + 4y = 0$ con $t > 0$

   Utilizamos el método de la Ecuación de Euler para encontrar la solución general de la ecuación, podemos utilizar este método ya que la ecuación es de la forma $(t-t_0)^2\ddot{y} + \alpha(t-t_0)\dot{y} + \beta y = 0$ con $\alpha$ y $\beta$ constantes. Esta ecuación es también una ecuación de Euler, con una singularidad en $t = t_0$ en lugar de $t = 0$. En este caso buscamos por soluciones de la forma $(t-t_0)^r$

   Queremos ver en que caso cae de acuerdo a las raíces de su ecuación característica, así que substituimos $y = (t-2)^r$ en la ecuación y obtenemos las raíces de la siguiente forma:

   $r(r-1)(t-2)^r + 5r(t-2)^r + 4(t-2)^r$
   $[r(r-1) + 5r + 4](t-2)^r$
   $[r^2 + 4r + 4](t-2)^r$
   $(r+2)^2(t-2)^r$

   La ecuación $(r+2)^2 = 0$ tiene $r = -2$ como raíz repetida, así que caemos en el Caso 2.
   De ahí, $y_1(t-2) = (t-2)^{-2}$, $\;y_2(t-2) = (t-2)^{-2}ln(t-2)$

   Por lo tanto, tenemos que la solución general de la ecuación es:

   $y(t) = (c_1 + c_2 ln(t-2))(t-2)^{-2}$

   $y(t) = \frac{c_1 + c_2 ln(t-2)}{(t-2)^2}$

2. $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + 2y = 0$ con $t > 0$

   Utilizamos el método de la Ecuación de Euler para encontrar la solución general de la ecuación, podemos utilizar este método ya que la ecuación es de la forma $t^2\ddot{y} + \alpha t\dot{y} + \beta y = 0$ con $\alpha$ y $\beta$ constantes.

   Queremos ver en que caso cae de acuerdo a las raíces de su ecuación característica, así que substituimos $y = t^r$ en la ecuación y obtenemos las raíces de la siguiente forma:

   $r(r-1)t^r + 3rt^r + 2t^r$
   $[r(r-1) + 3r + 2]t^r$
   $[r^2 + 2r + 2]t^r$
   Las raíces de la ecuación $r^2 + 2r + 2 = 0$ son:
   $\frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$

   Tenemos la siguiente solución compleja:

$$\begin{aligned}\phi(t) &= t^{-1+i} = t^{-1}t^{i}\\ &= t^{-1}e^{(lnt)i} = t^{-1}e^{i(lnt)}\\ &= t^{-1}[cos(lnt) + isen(lnt)]\end{aligned}$$

Consecuentemente vemos que al tener soluciones complejas, caemos en el Caso 3 y tenemos:
$y_1(t) = Re\{\phi(t)\} = t^{-1}cos(lnt)$ y $y_2(t) = Im\{\phi(t)\} = t^{-1}sen(lnt)$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación es:

$y(t) = (c_1cos(ln(t)) + c_2sen(ln(t)))(t)^{-1}$

$y(t) = \frac{c_1cos(ln(t))+c_2sen(ln(t))}{t}$

3. Usar el método de reducción de orden para demostrar que $y_2(t) = t^{r_1}lnt$ cuando se tienen raíces repetidas en la ecuación de Euler.

El método de reducción de orden nos permite usar una solución conocida $Y_1$ de una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea para encontrar una solución lineal independiente de $Y_2$

Así que consideramos la ecuación de Euler $t^2\ddot{y} + \alpha t\dot{y} + \beta y = 0$ y suponemos que $y_1$, donde $y_1 = t^{r_1}$ es una solución a la ecuación. Y $r_1 = \frac{1-\alpha}{2}$

Dividimos la ecuación de Euler entre $t^2$ $\ddot{y} + \frac{\alpha}{t}\dot{y} + \frac{\beta}{t^2}y = 0$

Sabemos que para resolver una ecuación diferencial de segundo orden, debemos tener dos soluciones linealmente independientes. Así que, debemos determinar una segunda solución linealmente independiente y lo obtenemos al intentar encontrar una solución de la forma: $y_2 = v(t)y_1 = v(t)t^{r_1}$ donde $v(t)$ no es una función constante, ya que si fuera constante, $y_1$ y $y_2$ serían linealmente dependientes.

Calculamos $\dot{y_2}(t) = \dot{y_1}v(t) + \dot{v}(t)y_1$
Calculamos $\ddot{y_2}(t) = \ddot{y_1}v(t) + \dot{v}(t)\dot{y_1} + \dot{y_1}\dot{v}(t) + \ddot{v}(t)y_1$

Sustituimos en la ecuación dividida de Euler:
$[\ddot{y_1}v(t) + 2\dot{v}(t)\dot{y_1} + \ddot{v}(t)y_1] + \frac{\alpha}{t}[\dot{y_1}v(t) + \dot{v}(t)y_1] + \frac{\beta}{t^2}[v(t)y_1] = 0$

Multiplicamos por $t^2$ y factorizamos:
$[t^2y_1]\ddot{v}(t) + [t^2(2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1)]\dot{v}(t) + [t^2\ddot{y_1} + \alpha t\dot{y_1} + \beta y_1]v(t) = 0$

Sabemos que la ecuación de Euler es igual a cero, así que eliminamos el factor multiplicado por $v(t)$ y volvemos a dividir entre $t^2$
$[y_1]\ddot{v}(t) + [2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1]\dot{v}(t) = 0$

Hacemos un cambio de variable donde $w = \dot{v}(t)$ $y$ $\dot{w} = \ddot{v}(t)$
$[y_1]\dot{w} + [2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1]w = 0$

Ahora, queremos obtener w, así que derivamos $\dot{w}$
$\frac{dw}{dt}[y_1] + w[2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1] = 0$
$\frac{dw}{dt}[y_1] = -w[2\dot{y_1} + \frac{\alpha}{t}y_1]$
$\frac{dw}{dt} = -w[2\frac{\dot{y_1}}{y_1} + \frac{\alpha}{t}]$
$\frac{dw}{w} = -[2\frac{\dot{y_1}}{y_1}dt + \frac{\alpha}{t}dt]$

Integramos e ignoramos las constantes que se acumulen por el momento:
$\int \frac{dw}{w}dt + 2\int \frac{\dot{y_1}}{y_1}dt + \int \frac{\alpha}{t}dt = 0$

Recordemos que $y_1$ es una función de t
$ln(w) + 2ln(y_1) + \alpha ln(t) = 0$

Usamos leyes de los logaritmos
$ln(w) + ln(y_1^2) + \alpha ln(t) = 0$
$ln(wy_1^2) = -\alpha ln(t)$

Aplicamos epsilon de los dos lados
$wy_1^2 = e^{-\alpha ln(t)}$
$w = \frac{e^{-\alpha ln(t)}}{y_1^2}$

Regresamos a las variables originales y tenemos:
$\dot{v} = w = \frac{e^{-\alpha ln(t)}}{y_1^2}$

Integramos de nuevo para obtener v e ignoramos las constantes por el momento
$\int \dot{v}(t)dt = \int \frac{e^{-\alpha ln(t)}}{y_1^2}dt$
$v(t) = \int \frac{t^{-\alpha}}{y_1^2}dt$
$v(t) = \int \frac{t^{-\alpha}}{y_1^2}dt$

Sustituimos el valor de $y_1$ en la integral
$v(t) = \int \frac{t^{-\alpha}}{(t^{r_1})^2}dt$
$v(t) = \int \frac{1}{t^{2r_1+\alpha}}dt$

Sustituimos el valor de $r_1$ en la integral
$v(t) = \int \frac{1}{t^{2(\frac{1-\alpha}{2})+\alpha}}dt$
$v(t) = \int \frac{1}{t^{1-\alpha+\alpha}}dt$
$v(t) = \int \frac{1}{t^1}dt$

Finalmente obtenemos el resultado de la integral
$v(t) = ln(t)$

Por lo tanto $y_2 = t^{r_1}ln(t)$ ■

4. $2t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} - (1+t)y = 0$

Queremos utilizar el método de Frobenius, así que verificamos que $x = 0$ sea un punto singular para $t^2\ddot{y} + \frac{3}{2}t\dot{y} - \frac{(1+t)}{2}y$

Veamos si los límites existen:
$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{3}{2}t}{t^2}(t-0) = \frac{\frac{3}{2}t^2}{t^2} = \frac{3}{2}$
$\lim_{t\to 0} \frac{-(1+t)}{2t^2}(t-0)^2 = \frac{-(1+t)t^2}{t^2} = \frac{-(1+t)}{2} = -\frac{1}{2}$

Como $x = 0$ es un punto singular, podemos aplicar el método de Frobenius.
Proponemos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}, \ a_0 \neq 0$
Calculamos $\dot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r-1}$
Y $\ddot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r-2}$

Y sustituimos en la ecuación:
$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)a_n t^{n+r} + \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n t^{n+r} - \frac{(1+t)}{2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}$

$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)+\frac{3}{2}(n+r)-\frac{1}{2}]a_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{1}{2}a_n t^{n+r+1}$

Proponer la suma de coeficientes como potencias de t igual a cero da:
$(r)(r-1)+\frac{3}{2}(r)-\frac{1}{2}$
$r^2+\frac{1}{2}r-\frac{1}{2}$
$(r+1)(r-\frac{1}{2})$

Entonces tenemos nuestras raíces $r_1=-1, r_2=\frac{1}{2}$, como estas raíces no difieren por un entero, podemos encontrar dos soluciones independientes de la forma $\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^{n+r}$ con $a_n$ determinada por
$[(n+r)(n+r-1)+\frac{3}{2}(n+r)-\frac{1}{2}]a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}$
Por lo tanto la solución general de la ecuación es:

$\frac{c_1}{t}(1-\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3\cdot 3!}-\frac{t^4}{3\cdot 5\cdot 4!}-\dots)+c_2\sqrt{t}(1+\frac{t}{5}+\frac{t^2}{5\cdot 7\cdot 2!}+\frac{t^3}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 3!}+\dots)$

5. $2t^2\ddot{y}+(t^2-t)\dot{y}+y=0$

La ecuación se puede escribir en su forma estándar dividiendo por $2t^2$

$$\ddot{y}+\frac{t^2-t}{2t^2}\dot{y}+\frac{1}{2t^2}y=0$$

Tanto $P(t)=\frac{t^2-t}{2t^2}$ como $Q(t)=\frac{1}{2t^2}$ se indeterminan cuando $t=0$, por lo que $t_0=0$ es un punto singular, veamos que $t_0$ es regular pues tanto $t\cdot P(t)$ como $t^2\cdot Q(t)$ son analíticas.

$$\lim_{t_0\to 0} t\cdot\frac{t^2-t}{2t^2}=\lim_{t_0\to 0}\frac{t-1}{2}=-\frac{1}{2}=p_0$$

$$\lim_{t_0\to 0} t^2\cdot\frac{1}{2t^2}=\lim_{t_0\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=q_0$$

La ecuación indicial asociada al a ecuación diferencial es $r^2+(-\frac{1}{2}-1)r+\frac{1}{2}=0$, que simplificada es $2r^2-3r+1=0$ y cuyas raíces son $r_1=1$ y $r_2=\frac{1}{2}$

Como $r_1=r_2+\lambda$, siendo $\lambda$ un entero fraccionario, se propone que ambas soluciones sean de la forma

$$y(t)=t^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^{n+r}$$

por lo que

$$\dot{y}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r-1}$$

$$\ddot{y}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(n+r-1)t^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación original, tenemos

$$2t^2\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)(n+r-1)t^{n+r-2}+(t^2-t)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}2c_n(n+r)(n+r-1)t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}-\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n t^{n+r}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]c_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}=0$$

Calculamos el primer término de la primera suma para tener el mismo exponente en la $t$ después de ajustar los índices

$$(2r(r-1)-r+1)\,c_0t^r+\sum_{n=1}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]c_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}=0$$

$$\left(2r^2-2r-r+1\right)c_0t^r+\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r+1)(n+r)-(n+r+1)+1]c_{n+1}t^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}=0$$

$$\left(2r^2-3r+1\right)c_0t^r+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{[2(n+r+1)(n+r)-n-r]\,c_{n+1}+(n+r)c_n\right\}t^{n+r+1}=0$$

Igualamos todos los coeficientes a cero. Notemos que el primer término se reduce a la ecuación indicial: $2r^2-3r+1=0$ cuyas raíces recordemos son $r_1=1$ y $r_2=\frac{1}{2}$. Con los demás coeficientes obtenemos la relación de recurrencia

$$[2(n+r+1)-1](n+r)c_{n+1}+(n+r)c_n=0$$

$$(2n+2r+1)(n+r)c_{n+1}=-(n+r)c_n$$

$$c_{n+1}=-\frac{\cancel{(n+r)}c_n}{(2n+2r+1)\cancel{(n+r)}}=-\frac{c_n}{2n+2r+1}$$

Para $r=r_1=1$ tenemos que $c_{n+1}=-\frac{c_n}{2n+3}$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & c_1=-\frac{c_0}{3} \\
\text{si } n=1 & c_2=-\frac{c_1}{5}=\frac{c_0}{15} \\
\text{si } n=2 & c_3=-\frac{c_2}{7}=-\frac{c_0}{105} \\
\text{si } n=3 & c_4=-\frac{c_3}{9}=\frac{c_0}{945} \\
\text{si } n=4 & c_5=-\frac{c_4}{11}=-\frac{c_0}{10395} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

por lo que

$$y_1(t)=c_0t\left[1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{15}-\frac{t^3}{105}+\frac{t^4}{945}-\dots\right]$$

Para $r=r_2=\frac{1}{2}$ tenemos que $c_{n+1}=-\frac{c_n}{2(n+1)}$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & c_1=-\frac{c_0}{2} \\
\text{si } n=1 & c_2=-\frac{c_1}{4}=\frac{c_0}{8} \\
\text{si } n=2 & c_3=-\frac{c_2}{6}=-\frac{c_0}{48} \\
\text{si } n=3 & c_4=-\frac{c_3}{8}=\frac{c_0}{384} \\
\text{si } n=4 & c_5=-\frac{c_4}{10}=-\frac{c_0}{3840} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

por lo que

$$y_2(t)=c_0t^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{48}+\frac{t^4}{384}-\dots\right]$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t)=c_0\left[t\left(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{15}-\frac{t^3}{105}+\frac{t^4}{945}-\dots\right)+t^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{48}+\frac{t^4}{384}-\dots\right)\right]$$

6. Investigar las soluciones del método de Frobenius cuando $r_2-r_1$ es entero y cuando $r_1=r_2$.

**Teorema 1.** [1] *Sea el punto $x=0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial:*

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0$$

*y sea $\rho$ el menor radio de convergencia de dos funciones $p(x)=xP(x)$ y $q(x)=x^2Q(x)$. Si $r_1$ y $r_2$ son las raíces de la ecuación indicial:*

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0$$

*donde*

$$p_0=\lim_{x\to 0}xP(x)\qquad y\qquad q_0=\lim_{x\to 0}x^2Q(x)$$

[1] Çengel, Y.&Palm W.. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. México: McGraw Hill.

*y $r_1 > r_2$ cuando las raíces son reales y desiguales, entonces existen dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de esta ecuación diferencial, con un radio de convergencia de $\rho$. Para $x > 0$, son de las siguientes formas:*

**Caso 1:** $r_1 = r_2 + \lambda$ *($\lambda$ es positiva no entera)*

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$
$$y_2 = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (b_0 \neq 0)$$

**Caso 2:** $r_1 = r_2 = r$

$$y_1 = x^{r} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$
$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

**Caso 3:** $r_1 = r_2 + N$ *($N$ es un entero positivo)*

$$y_1 = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$
$$y_2 = C y_1 \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (b_0 \neq 0)$$

*donde la constante $C$ puede ser cero. Entonces, la solución general de la ecuación diferencial para los tres casos se expresa como*

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

*donde las constantes arbitrarias $C_1$ y $C_2$ se determinan por las condiciones iniciales y en la frontera.*

7. $t\ddot{y} - (4+t)\dot{y} + 2y = 0$

Obtenemos la forma estándar al dividir por $t$

$$\ddot{y} - \frac{t+4}{t}\dot{y} + \frac{2}{t}y = 0$$

$t_0 = 0$ es un punto singular regular, pues

$$\lim_{t_0\to 0} -\frac{t+4}{t}t = \lim_{t_0\to 0} -t-4 = -4 = p_0 \quad \lim_{t_0\to 0} \tfrac{2}{t}t^2 = \lim_{t_0\to 0} 2t = 0 = q_0$$

De ahí, la ecuación indicial queda $r^2 - 5r = 0$ y sus raíces son $r_1 = 5$ y $r_2 = 0$.

Por el teorema anterior, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes: la segunda puede contener un término logarítmico.

Proponemos como la primera solución

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1}$$

Entonces

$$\dot{y}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1}$$

$$\ddot{y}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-1) t^{n+r_1-2}$$

Sustituyendo

$$t\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-1) t^{n+r_1-2} - (4+t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r_1)(n+r_1-1)t^{n+r_1-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n(n+r_1)t^{n+r_1-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r_1)t^{n+r_1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+r_1)t^{n+r_1-1}[n+r_1-1-4] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1}[2-n-r_1] = 0$$

$$a_0 r_1 t^{r_1-1}(r_1-5) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(n+r_1)(n+r_1-5)t^{n+r_1-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(2-n-r_1)t^{n+r_1} = 0$$

$$a_0 r_1(r_1-5)t^{r_1-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+r_1+1)(n+r_1-4)t^{n+r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(2-n-r_1)t^{n+r_1} = 0$$

$$a_0 r_1(r_1-5)t^{r_1-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+1}(n+r_1+1)(n+r_1-4) + a_n(2-n-r_1)]t^{n+r_1} = 0$$

Igualamos los términos a cero, del primer término obtenemos la ecuación indicial, y del resto tendremos

$$a_{n+1}(n+r_1+1)(n+r_1-4) + a_n(2-n-r_1) = 0$$

$$a_{n+1}(n+r_1+1)(n+r_1-4) = a_n(n+r_1-2)$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n(n+r_1-2)}{(n+r_1+1)(n+r_1-4)} \tag{1}$$

Como $r_1 = 5$

$$a_{n+1} = \frac{a_n(n+3)}{(n+6)(n+1)}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & a_1 = \frac{3a_0}{6} = \frac{a_0}{2} \\
\text{si } n=1 & a_2 = \frac{4a_1}{(7)(2)} = \frac{a_0}{7} \\
\text{si } n=2 & a_3 = \frac{5a_2}{(8)(3)} = \frac{5a_0}{168} \\
\text{si } n=3 & a_4 = \frac{6a_3}{(9)(4)} = \frac{5a_0}{1008} \\
\text{si } n=4 & a_5 = \frac{7a_4}{(10)(5)} = \frac{a_0}{1440} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Por lo que

$$y_1(t) = a_0 t^5 \left[1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{7} + \frac{5t^3}{168} + \frac{5t^4}{1008} + \dots\right]$$

Para la segunda solución linealmente independiente proponemos

$$y_2(t) = Cy_1 \ln t + t^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Es decir

$$y_2(t) = Cy_1 \ln t + t^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

$$y_2(t) = Cy_1 \ln t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Supongamos que ésta solución carece de término logaritmico, es decir, $C = 0$, por lo que la propuesta se simplificará a

$$y_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Como es parecida a $y_1(t)$, el procedimiento para encontrar los coeficientes es idéntico hasta la ecuación (1), por lo que

$$b_{n+1} = \frac{b_n(n-2)}{(n+1)(n-4)}$$

$$\begin{array}{ll} \text{si } n=0 & b_1 = \frac{-2b_0}{-4} = \frac{b_0}{2} \\ \text{si } n=1 & b_2 = \frac{-b_1}{(2)(-3)} = \frac{b_0}{12} \\ \text{si } n=2 & b_3 = \frac{0b_2}{(3)(-2)} = 0 \end{array}$$

En este punto nos detenemos, pues al haber un cero el resto de coeficientes serán cero.

Por lo tanto

$$y_2(t) = b_0\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12}\right)$$

Que se puede comprobar fácilmente que corresponde a una solución de la ecuación diferencial y además es linealmente independiente a $y_1(t)$.

Por lo tanto la solución buscada es

$$y(t) = a_0 t^5\left[1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{7} + \frac{5t^3}{168} + \frac{5t^4}{1008} + \dots\right] + b_0\left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12}\right)$$

8. $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = e^{2t}$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = -1$.

Primero, hay que sacar la transformada de Laplace de toda la ecuación para despejar $Y(s)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}\} - 5\mathcal{L}\{\dot{y}\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\ s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ s^2Y(s) - s + 1 - 5sY(s) + 5 + 4Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ Y(s)(s^2 - 5s + 4) - s + 6 &= \frac{1}{s-2} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-2)(s-4)(s-1)} + \frac{(s-6)}{(s-4)(s-1)} \end{aligned}$$

Luego, descomponiendo en fracciones parciales.
Primero

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-2)(s-4)(s-1)} &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s-1} \\ &= \frac{A(s-4)(s-1) + B(s-2)(s-1) + C(s-2)(s-4)}{(s-2)(s-4)(s-1)} \\ &\iff A(s-4)(s-1) + B(s-2)(s-1) + C(s-2)(s-4) = 1 \end{aligned}$$

Evaluando en $s = 2$, tenemos

$$-2A = 1 \iff A = -\frac{1}{2}$$

Evaluando en $s = 4$ tenemos

$$6B = 1 \iff B = \frac{1}{6}$$

Evaluando en $s = 1$ tenemos

$$3C = 1 \iff C = \frac{1}{3}$$

Segundo

$$\begin{aligned} \frac{s-6}{(s-4)(s-1)} &= \frac{D}{s-4} + \frac{E}{s-1} \\ &= \frac{D(s-1) + E(s-4)}{(s-4)(s-1)} \\ &\iff D(s-1) + E(s-4) = s - 6 \end{aligned}$$

Evaluando en $s = 4$ tenemos que

$$3D = -2 \iff D = -\frac{2}{3}$$

Evaluando en $s = 1$ tenemos que

$$-3E = -5 \iff E = \frac{5}{3}$$

Juntando estas dos cosas, tenemos que

$$\begin{aligned} Y(s) &= -\frac{1}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-4} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-1} - \frac{2}{3}\frac{1}{s-4} + \frac{5}{3}\frac{1}{s-1} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-4} + 2\frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{-\frac{1}{2}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{s-4} + 2\frac{1}{s-1}\} \\ y(t) &= -\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-4}\} + 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} \\ y(t) &= -\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} + 2e^{t} \end{aligned}$$

Que es la solución buscada.

9. $\ddot{y} + y = t \operatorname{sen} t$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = 2$.

Primero, hay que sacar la transformada de Laplace de toda la ecuación para despejar $Y(s)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{y} + y\} &= \mathcal{L}\{t \operatorname{sen} t\} \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} \\ s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + Y(s) &= -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} \\ s^2Y(s) - s - 2 + Y(s) &= \frac{2s}{(s^2+1)^2} \\ Y(s)(s^2+1) - s - 2 &= \frac{2s}{(s^2+1)^2} \\ Y(s) &= \frac{2s}{(s^2+1)^3} + \frac{s+2}{s^2+1} \\ Y(s) &= 2\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1} \end{aligned}$$

Ahora, hay que sacar la transformada inversa.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{2\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1}\} \\ y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\} + 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\} \\ y(t) &= 2\cos t \sin^2 t + \cos t + 2\sin t \end{aligned}$$

Que es la solución buscada.

10. $\ddot{y} + \dot{y} + y = 1 + e^{-t}$ con $y(0) = 3$ y $\dot{y}(0) = -5$.

Primero hay qu sacar la transformada de Laplace de toda la ecuacioń, e intentar despejar $Y(s)$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\ddot{y}+\dot{y}+y\} &= \mathcal{L}\{1+e^{-t}\} \\
\mathcal{L}\{\ddot{y}\}+\mathcal{L}\{\dot{y}\}+\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{1\}+\mathcal{L}\{e^{-t}\} \\
s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)+sY(s)-y(0)+Y(s) &= \frac{1}{s}+\frac{1}{s+1} \\
s^2Y(s)-3s+5+sY(s)-3+Y(s) &= \frac{1}{s}+\frac{1}{s+1} \\
Y(s)(s^2+s+1)-(3s-2) &= \frac{1}{s}+\frac{1}{s+1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+s+1)}+\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}+\frac{3s-2}{s^2+s+1}
\end{aligned}
$$

Luego, descompongamos algunas de las expresiones en fraccciones parciales. Primero

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{s(s^2+s+1)} &= \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1} \\
&= \frac{As^2+As+A+Bs^2+Cs}{s(s^2+s+1)} \\
&\iff 1 = As^2+As+A+Bs^2+Cs
\end{aligned}
$$

Que nos define un sistemas de ecuaciones lineales.

Para resolverlo, primero obtenemos

$$A = 1$$

Y usando este valor de $A$, podemos obtener

$$A+C=0 \implies C=-1$$

Y

$$A+B=0 \implies B=-1$$

Luego, para la otra expresión

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} &= \frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1} \\
&= \frac{As^2+As+A+Bs^2+Bs+Cs+C}{s(s^2+s+1)} \\
&\iff 1 =
\end{aligned}
$$

Que defines un sistema de ecuaciones.

$$
\begin{aligned}
A+B &= 0 \\
A+B+C &= 0 \\
A+C &= 1
\end{aligned}
$$

Para resolverlo, primero restamos las dos primeras ecuaciones

$$(A+B)-(A+B+C)=0-0 \implies C=0$$

Sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos

$$A+0=1 \implies A=1$$

Y sustituyendo esto en la primera tenemos que

$$1+B=0 \implies B=-1$$

Con esto, se puede reescribir $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+s+1} + \frac{3s-2}{s^2+s+1}$$
$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{s-3}{s^2+s+1}$$

Luego, notemos que $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.
Por lo que en particular

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos(bt)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

Y

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(bt)\} = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

Ahora, vamos a llevar al último término a una forma similar a esta.
Primera, completamos el cuadrado del denominador

$$\frac{s-3}{s^2+s+1} = \frac{s-3}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{s-3}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Luego, forzamos a que la constante de nominador coincida con la constante del cuadrado, aunque esto divide la expresión en dos.

$$\frac{s-3}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Ahora, en esta otra parte, hay que forzar a que el nominador sea la raíz del nominador.

$$\frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}$$

Entonces, se reescribe $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}$$

Ahora, resolviendo para encontrar la inversa de esto

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}\}$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\} - \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}\}$$
$$y(t) = 1 + e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t$$

Que es la solución buscada.