Matemáticas para las Ciencias Aplicadas IV
Tarea-Examen 03

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

03 de mayo de 2019

Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $(t-2)^2\ddot{y} + 5(t-2)\dot{y} + 4y = 0$
2. $t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} + 2y = 0$
3. Usar el método de reducción de orden para demostrar que $y_2(t) = t^{r_1}lnt$ cuando se tienen raíces repetidas en la ecuación de Euler.
4. $2t^2\ddot{y} + 3t\dot{y} - (1-t)y = 0$
5. $2t^2\ddot{y} + (t^2-t)\dot{y} + y = 0$

La ecuación se puede escribir en su forma estándar dividiendo por $2t^2$

$$\ddot{y} + \frac{t^2-t}{2t^2}\dot{y} + \frac{1}{2t^2}y = 0$$

Tanto $P(t) = \frac{t^2-t}{2t^2}$ como $Q(t) = \frac{1}{2t^2}$ se indeterminan cuando $t = 0$, por lo que $t_0 = 0$ es un punto singular, veamos que t_0 es regular pues tanto $t \cdot P(t)$ como $t^2 \cdot Q(t)$ son analíticas.

$$\lim_{t_0 \to 0} t \cdot \frac{t^2-t}{2t^2} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{t-1}{2} = -\frac{1}{2} = p_0$$

$$\lim_{t_0 \to 0} t^2 \cdot \frac{1}{2t^2} = \lim_{t_0 \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = q_0$$

La ecuación indicial asociada al a ecuación diferencial es $r^2 + (-\frac{1}{2} - 1)r + \frac{1}{2} = 0$, que simplificada es $2r^2 - 3r + 1 = 0$ y cuyas raíces son $r_1 = 1$ y $r_2 = \frac{1}{2}$

Como $r_1 = r_2 + \lambda$, siendo λ un entero fraccionario, se propone que ambas soluciones sean de la forma

$$y(t) = t^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r}$$

por lo que

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r-1}$$

$$\ddot{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r-2}$$

Sustituyendo en la ecuación original, tenemos

$$2t^2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r-2} + (t^2-t) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2c_n (n+r)(n+r-1) t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) t^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n+r} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]c_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}=0$$

Calculamos el primer término de la primera suma para tener el mismo exponente en la t después de ajustar los índices

$$(2r(r-1)-r+1)\,c_0t^r+\sum_{n=1}^{\infty}[2(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]c_n t^{n+r}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}=0$$

$$\left(2r^2-2r-r+1\right)c_0t^r+\sum_{n=0}^{\infty}[2(n+r+1)(n+r)-(n+r+1)+1]c_{n+1}t^{n+r+1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+r)t^{n+r+1}=0$$

$$\left(2r^2-3r+1\right)c_0t^r+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{[2(n+r+1)(n+r)-n-r]\,c_{n+1}+(n+r)c_n\right\}t^{n+r+1}=0$$

Igualamos todos los coeficientes a cero. Notemos que el primer término se reduce a la ecuación indicial: $2r^2-3r+1=0$ cuyas raíces recordemos son $r_1=1$ y $r_2=\frac{1}{2}$. Con los demás coeficientes obtenemos la relación de recurrencia

$$[2(n+r+1)-1](n+r)c_{n+1}+(n+r)c_n=0$$

$$(2n+2r+1)(n+r)c_{n+1}=-(n+r)c_n$$

$$c_{n+1}=-\frac{\cancel{(n+r)}c_n}{(2n+2r+1)\cancel{(n+r)}}=-\frac{c_n}{2n+2r+1}$$

Para $r=r_1=1$ tenemos que $c_{n+1}=-\frac{c_n}{2n+3}$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & c_1=-\frac{c_0}{3}\\
\text{si } n=1 & c_2=-\frac{c_1}{5}=\frac{c_0}{15}\\
\text{si } n=2 & c_3=-\frac{c_2}{7}=-\frac{c_0}{105}\\
\text{si } n=3 & c_4=-\frac{c_3}{9}=\frac{c_0}{945}\\
\text{si } n=4 & c_5=-\frac{c_4}{11}=-\frac{c_0}{10395}\\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

por lo que

$$y_1(t)=c_0t\left[1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{15}-\frac{t^3}{105}+\frac{t^4}{945}-\dots\right]$$

Para $r=r_2=\frac{1}{2}$ tenemos que $c_{n+1}=-\frac{c_n}{2(n+1)}$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & c_1=-\frac{c_0}{2}\\
\text{si } n=1 & c_2=-\frac{c_1}{4}=\frac{c_0}{8}\\
\text{si } n=2 & c_3=-\frac{c_2}{6}=-\frac{c_0}{48}\\
\text{si } n=3 & c_4=-\frac{c_3}{8}=\frac{c_0}{384}\\
\text{si } n=4 & c_5=-\frac{c_4}{10}=-\frac{c_0}{3840}\\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

por lo que

$$y_2(t)=c_0t^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{48}+\frac{t^4}{384}-\dots\right]$$

Entonces, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y(t)=c_0\left[t\left(1-\frac{t}{3}+\frac{t^2}{15}-\frac{t^3}{105}+\frac{t^4}{945}-\dots\right)+t^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{t}{2}+\frac{t^2}{8}-\frac{t^3}{48}+\frac{t^4}{384}-\dots\right)\right]$$

6. Invertigar las soluciones del método de Frobenius cuando r_2-r_1 es entero y cuando $r_1=r_2$.

Teorema 1. [1] *Sea el punto $x = 0$ un punto singular regular de la ecuación diferencial:*

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

y sea ρ el menor radio de convergencia de dos funciones $p(x) = xP(x)$ y $q(x) = x^2Q(x)$. Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación indicial:

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$$

donde

$$p_0 = \lim_{x\to 0} xP(x) \quad y \quad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2Q(x)$$

y $r_1 > r_2$ cuando las raíces son reales y desiguales, entonces existen dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$ de esta ecuación diferencial, con un radio de convergencia de ρ. Para $x > 0$, son de las siguientes formas:

Caso 1: $r_1 = r_2 + \lambda$ *(λ es positiva no entera)*

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$
$$y_2 = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (b_0 \neq 0)$$

Caso 2: $r_1 = r_2 = r$

$$y_1 = x^{r}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$
$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r}\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$$

Caso 3: $r_1 = r_2 + N$ *(N es un entero positivo)*

$$y_1 = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (a_0 \neq 0)$$
$$y_2 = Cy_1 \ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \quad (b_0 \neq 0)$$

donde la constante C puede ser cero. Entonces, la solución general de la ecuación diferencial para los tres casos se expresa como

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

donde las constantes arbitrarias C_1 y C_2 se determinan por las condiciones iniciales y en la frontera.

7. $t\ddot{y} - (4+t)\dot{y} + 2y = 0$

   Obtenemos la forma estándar al dividir por t

$$\ddot{y} - \frac{t+4}{t}\dot{y} + \frac{2}{t}y = 0$$

   $t_0 = 0$ es un punto singular regular, pues

$$\lim_{t_0\to 0} -\frac{t+4}{t}t = \lim_{t_0\to 0} -t - 4 = -4 = p_0 \quad \lim_{t_0\to 0} \tfrac{2}{t}t^2 = \lim_{t_0\to 0} 2t = 0 = q_0$$

   De ahí, la ecuación indicial queda $r^2 - 5r = 0$ y sus raíces son $r_1 = 5$ y $r_2 = 0$.

   Por el teorema anterior, la ecuación diferencial dada tiene dos soluciones linealmente independientes: la segunda puede contener un término logarítmico.

[1] Çengel, Y.&Palm W.. (2014). Ecuaciones diferenciales para ingeniería y ciencias. México: McGraw Hill.

Proponemos como la primera solución

$$y_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1}$$

Entonces

$$\dot{y}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1}$$

$$\ddot{y}_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-1) t^{n+r_1-2}$$

Sustituyendo

$$t\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-1) t^{n+r_1-2} - (4+t)\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-1) t^{n+r_1-1} - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+r_1) t^{n+r_1-1}[n+r_1-1-4] + \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r_1}[2-n-r_1] = 0$$

$$a_0 r_1 t^{r_1-1}(r_1-5) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (n+r_1)(n+r_1-5) t^{n+r_1-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2-n-r_1) t^{n+r_1} = 0$$

$$a_0 r_1 (r_1-5) t^{r_1-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+r_1+1)(n+r_1-4) t^{n+r_1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (2-n-r_1) t^{n+r_1} = 0$$

$$a_0 r_1 (r_1-5) t^{r_1-1} + \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+1} (n+r_1+1)(n+r_1-4) + a_n (2-n-r_1)] t^{n+r_1} = 0$$

Igualamos los términos a cero, del primer término obtenemos la ecuación indicial, y del resto tendremos

$$a_{n+1}(n+r_1+1)(n+r_1-4) + a_n(2-n-r_1) = 0$$

$$a_{n+1}(n+r_1+1)(n+r_1-4) = a_n(n+r_1-2)$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n(n+r_1-2)}{(n+r_1+1)(n+r_1-4)} \tag{1}$$

Como $r_1 = 5$

$$a_{n+1} = \frac{a_n(n+3)}{(n+6)(n+1)}$$

$$\begin{array}{ll}
\text{si } n=0 & a_1 = \frac{3a_0}{6} = \frac{a_0}{2} \\
\text{si } n=1 & a_2 = \frac{4a_1}{(7)(2)} = \frac{a_0}{7} \\
\text{si } n=2 & a_3 = \frac{5a_2}{(8)(3)} = \frac{5a_0}{168} \\
\text{si } n=3 & a_4 = \frac{6a_3}{(9)(4)} = \frac{5a_0}{1008} \\
\text{si } n=4 & a_5 = \frac{7a_4}{(10)(5)} = \frac{a_0}{1440} \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Por lo que

$$y_1(t) = a_0 t^5 \left[1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{7} + \frac{5t^3}{168} + \frac{5t^4}{1008} + \dots\right]$$

Para la segunda solución linealmente independiente proponemos

$$y_2(t) = C y_1 \ln t + t^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Es decir

$$y_2(t) = Cy_1 \ln t + t^0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

$$y_2(t) = Cy_1 \ln t + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Supongamos que ésta solución carece de término logaritmico, es decir, $C = 0$, por lo que la propuesta se simplificará a

$$y_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$$

Como es parecida a $y_1(t)$, el procedimiento para encontrar los coeficientes es idéntico hasta la ecuación (1), por lo que

$$b_{n+1} = \frac{b_n(n-2)}{(n+1)(n-4)}$$

$$\begin{array}{ll} \text{si } n = 0 & b_1 = \frac{-2b_0}{-4} = \frac{b_0}{2} \\ \text{si } n = 1 & b_2 = \frac{-b_1}{(2)(-3)} = \frac{b_0}{12} \\ \text{si } n = 2 & b_3 = \frac{0b_2}{(3)(-2)} = 0 \end{array}$$

En este punto nos detenemos, pues al haber un cero el resto de coeficientes serán cero.

Por lo tanto

$$y_2(t) = b_0 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12}\right)$$

Que se puede comprobar fácilmente que corresponde a una solución de la ecuación diferencial y además es linealmente independiente a $y_1(t)$.

Por lo tanto la solución buscada es

$$y(t) = a_0 t^5 \left[1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{7} + \frac{5t^3}{168} + \frac{5t^4}{1008} + \dots\right] + b_0 \left(1 + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12}\right)$$

8. $\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y = e^{2t}$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = -1$.

Primero, hay que sacar la transformada de Laplace de toda la ecuación para despejar $Y(s)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\ddot{y} - 5\dot{y} + 4y\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\ \mathcal{L}\{\ddot{y}\} - 5\mathcal{L}\{\dot{y}\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{e^{2t}\} \\ s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 4Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ s^2Y(s) - s + 1 - 5sY(s) + 5 + 4Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ Y(s)(s^2 - 5s + 4) + s + 6 &= \frac{1}{s-2} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s-2)(s-4)(s-1)} - \frac{(s+6)}{(s-4)(s-1)} \end{aligned}$$

Luego, descomponiendo en fracciones parciales.
Primero

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-2)(s-4)(s-1)} &= \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{s-1} \\ &= \frac{A(s-4)(s-1) + B(s-2)(s-1) + C(s-2)(s-4)}{(s-2)(s-4)(s-1)} \\ &\iff A(s-4)(s-1) + B(s-2)(s-1) + C(s-2)(s-4) = 1 \end{aligned}$$

Evaluando en $s = 2$, tenemos

$$-4A = 1 \iff A = -\frac{1}{4}$$

Evaluando en $s = 4$ tenemos

$$6B = 1 \iff B = \frac{1}{6}$$

Evaluando en $s = 1$ tenemos

$$3C = 1 \iff C = \frac{1}{3}$$

Segundo

$$\begin{aligned}
\frac{s+6}{(s-4)(s-1)} &= \frac{D}{s-4} + \frac{E}{s-1} \\
&= \frac{D(s-1) + E(s-4)}{(s-4)(s-1)} \\
&\iff D(s-1) + E(s-4) = s+6
\end{aligned}$$

Evaluando en $s = 4$ tenemos que

$$3D = 10 \iff D = \frac{10}{3}$$

Evaluando en $s = 1$ tenemos que

$$-3E = 7 \iff E = -\frac{7}{3}$$

Juntando estas dos cosas, tenemos que

$$\begin{aligned}
Y(s) &= -\frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{6}\frac{1}{s-4}\frac{1}{3}\frac{1}{s-1} + \frac{10}{3}\frac{1}{s-4} - \frac{7}{3}\frac{1}{s-1} \\
&= -\frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{7}{2}\frac{1}{s-4} - 2\frac{1}{s-1}
\end{aligned}$$

De aquí tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{4}\frac{1}{s-2} + \frac{7}{2}\frac{1}{s-4} - 2\frac{1}{s-1}\} \\
y(t) &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-2}\} + \frac{7}{2}\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-4}\} - 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s-1}\} \\
y(t) &= \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{7}{2}e^{4t} - 2e^{t}
\end{aligned}$$

Que es la solución buscada.

9. $\ddot{y} + y = t \operatorname{sen} t$ con $y(0) = 1$ y $\dot{y}(0) = 2$.

Primero, hay que sacar la transformada de Laplace de toda la ecuación para despejar $Y(s)$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\ddot{y} + y\} &= \mathcal{L}\{t \operatorname{sen} t\} \\
\mathcal{L}\{\ddot{y}\} + \mathcal{L}\{y\} &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} \\
s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) + Y(s) &= -\frac{d}{ds}\frac{1}{s^2+1} \\
s^2Y(s) - s - 2 + Y(s) &= \frac{2s}{(s^2+1)^2} \\
Y(s)(s^2+1) - s - 2 &= \frac{2s}{(s^2+1)^2} \\
Y(s) &= \frac{2s}{(s^2+1)^3} + \frac{s+2}{s^2+1} \\
Y(s) &= 2\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Ahora, hay que sacar la transformada inversa.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\{2\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}+\frac{s}{s^2+1}+2\frac{1}{s^2+1}\}\\ y(t) &= 2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\frac{1}{s^2+1}\}+\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s}{s^2+1}\}+2\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2+1}\}\\ y(t) &= 2\cos t\sin^2 t+\cos t+2\sin t\end{aligned}$$

Que es la solución buscada.

10. $\ddot{y}+\dot{y}+y=1+e^{-t}$ con $y(0)=3$ y $\dot{y}(0)=-5$.

Primero hay qu sacar la transformada de Laplace de toda la ecuación, e intentar despejar $Y(s)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\ddot{y}+\dot{y}+y\} &= \mathcal{L}\{1+e^{-t}\}\\ \mathcal{L}\{\ddot{y}\}+\mathcal{L}\{\dot{y}\}+\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{1\}+\mathcal{L}\{e^{-t}\}\\ s^2Y(s)-sy(0)-\dot{y}(0)+sY(s)-y(0)+Y(s) &= \frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\\ s^2Y(s)-3s+5+sY(s)-3+Y(s) &= \frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\\ Y(s)(s^2+s+1)-(3s-2) &= \frac{1}{s}+\frac{1}{s+1}\\ Y(s) &= \frac{1}{s(s^2+s+1)}+\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)}+\frac{3s-2}{s^2+s+1}\end{aligned}$$

Luego, descompongamos algunas de las expresiones en fraccciones parciales. Primero

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s^2+s+1)} &= \frac{A}{s}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}\\ &= \frac{As^2+As+A+Bs^2+Cs}{s(s^2+s+1)}\\ &\iff 1=As^2+As+A+Bs^2+Cs\end{aligned}$$

Que nos define un sistemas de ecuaciones lineales.

Para resolverlo, primero obtenemos

$$A=1$$

Y usando este valor de A, podemos obtener

$$A+C=0 \implies C=-1$$

Y

$$A+B=0 \implies B=-1$$

Luego, para la otra expresión

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s+1)(s^2+s+1)} &= \frac{A}{s+1}+\frac{Bs+C}{s^2+s+1}\\ &= \frac{As^2+As+A+Bs^2+Bs+Cs+C}{s(s^2+s+1)}\\ &\iff 1=\end{aligned}$$

Que defines un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}A+B &= 0\\ A+B+C &= 0\\ A+C &= 1\end{aligned}$$

Para resolverlo, primero restamos las dos primeras ecuaciones

$$(A+B)-(A+B+C)=0-0 \implies C=0$$

Sustituyendo en la tercera ecuación, obtenemos

$$A + 0 = 1 \implies A = 1$$

Y sustituyendo esto en la primera tenemos que

$$1 + B = 0 \implies B = -1$$

Con esto, se puede reescribir $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2+s+1} + \frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+s+1} + \frac{3s-2}{s^2+s+1}$$
$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{s-3}{s^2+s+1}$$

Luego, notemos que $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$, donde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.
Por lo que en particular

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\cos(bt)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$$

Y

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\sin(bt)\} = \frac{b}{(s+a)^2+b^2}$$

Ahora, vamos a llevar al último término a una forma similar a esta.
Primera, completamos el cuadrado del denominador

$$\frac{s-3}{s^2+s+1} = \frac{s-3}{s^2+s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{s-3}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Luego, forzamos a que la constante de nominador coincida con la constante del cuadrado, aunque esto divide la expresión en dos.

$$\frac{s-3}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Ahora, en esta otra parte, hay que forzar a que el nominador sea la raíz del nominador.

$$\frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{7}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}$$

Entonces, se reescribe $Y(s)$ como

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}$$

Ahora, resolviendo para encontrar la inversa de esto

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} + \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} - \frac{7}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}\}$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s+1}\} + \mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\} - \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot \mathcal{L}^{-1}\{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})+\frac{3}{4}}\}$$
$$y(t) = 1 + e^{-t} + e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{3}{4}t - \frac{7}{\sqrt{3}} \cdot e^{-\frac{1}{2}t}\cos\frac{3}{4}t$$

Que es la solución buscada.