

## Tarea 2

Careaga Carrillo Juan Manuel

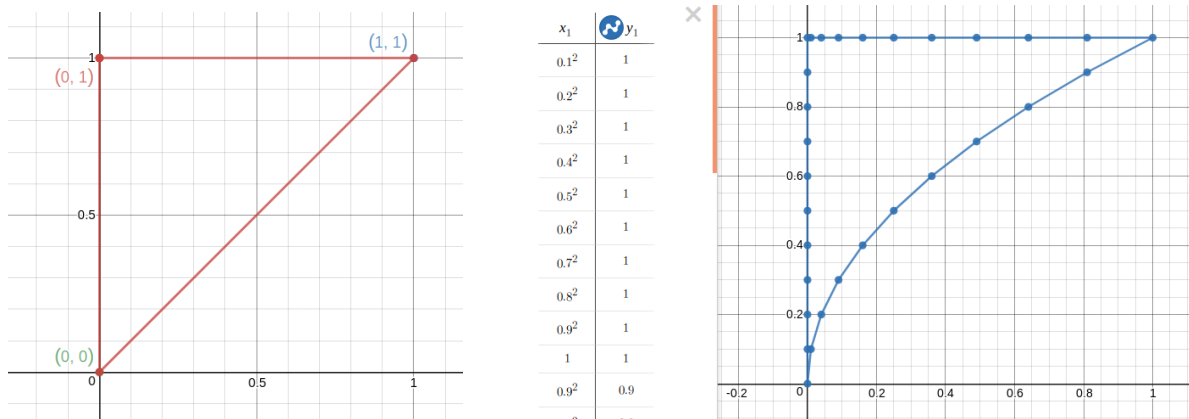
Quiróz Castañeda Edgar

Soto Corderi Sandra del Mar

Viernes 12 de octubre de 2018

1. Encontrar la imagen de un triángulo con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  y  $(0,1)$  bajo la transformación  $x = u^2$  y  $y = v$ .

Aplicamos la transformación a varios puntos del triángulo y obtenemos lo siguiente:



En la imagen izquierda vemos el triángulo original, y en la derecha vemos la imagen del triángulo bajo la transformación.

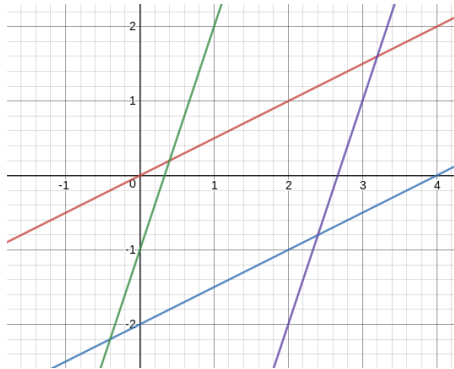
Podemos observar que la transformación convirtió el lado del triángulo que iba de  $(0,0)$  a  $(1,1)$  en una curva, ya que  $x = u^2$ , el resto de los lados parecen verse no afectados, pero los puntos tomados si cambiaron en posición, recorriéndose, ya que al tomar número decimales al cuadrado obtenemos coordenadas menores a las originales.

2. Calcular

$$\iint_D e^{\frac{x-2y}{3x-y}} dA$$

con  $D$  el paralelogramo acotado por las rectas  $x - 2y = 0$ ,  $x - 2y = 4$ ,  $3x - y = 1$  y  $3x - y = 8$

El paralelogramo  $D$  lo podemos ver como la siguiente imagen:



Para facilitar la integral, realizaremos un cambio de variable y una transformación lineal con  $D$ .

Obtenemos el Jacobiano de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

Para la transformación, tomamos  $u = x - 2y$  y  $v = 3x - y$ .

Despejando con un sistema de ecuaciones de  $u$  y  $v$ , tenemos que  $x = -(\frac{u-2v}{5})$  y  $y = -(\frac{3u-v}{5})$

De ahí, si aplicamos la transformación en los lados del paralelogramo tenemos:

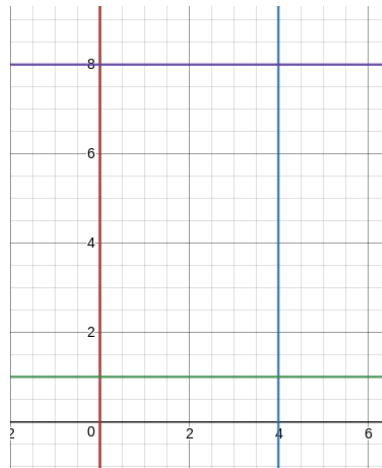
$$T(x - 2y = 0) \Rightarrow \left(-\frac{u+2v}{5}\right) + 2\left(\frac{3u-v}{5}\right) = \frac{-u+2v+6u-2v}{5} = \frac{5u}{5} \Rightarrow u = 0$$

$$T(x - 2y = 4) \Rightarrow \left(-\frac{u+2v}{5}\right) + 2\left(\frac{3u-v}{5}\right) = \frac{-u+2v+6u-2v}{5} = \frac{5u}{5} \Rightarrow u = 4$$

$$T(3x - y = 1) \Rightarrow -3\left(\frac{u-2v}{5}\right) + \left(\frac{3u-v}{5}\right) = \frac{-3u+6v+3u-v}{5} = \frac{5v}{5} \Rightarrow v = 1$$

$$T(3x - y = 8) \Rightarrow -3\left(\frac{u-2v}{5}\right) + \left(\frac{3u-v}{5}\right) = \frac{-3u+6v+3u-v}{5} = \frac{5v}{5} \Rightarrow v = 8$$

La imagen del paralelogramo bajo la transformación es como la siguiente imagen, vemos que es un cuadrado, así que los límites de  $u$  y  $v$  son sencillos.



De ahí, podemos resolver a nuestra integral doble como:

$$\int_1^8 \int_0^4 \frac{1}{5} e^{\frac{u}{v}} du dv$$

Usando integración por sustitución tomando  $s = \frac{u}{v}$ , resolvemos directamente  $du$

$$= \frac{1}{5} \int_1^8 v \left( e^{\frac{4}{v}} - 1 \right) dv$$

$$\int_1^8 v \left( e^{\frac{4}{v}} - 1 \right) dv = \int_1^8 v e^{\frac{4}{v}} dv - \int_1^8 v dv$$

$$\int_1^8 v dv = \frac{v^2}{2} \Big|_1^8 = \frac{63}{2}$$

Usando integración por sustitución tomando  $t = \frac{4}{v}$ ,  $dt = -\frac{v^2}{4} dv$  y  $v = \frac{4}{t}$

$$\int_1^8 v e^{\frac{4}{v}} dv = -16 \int_1^8 \frac{e^t}{t^3} dt$$

Usando integración por partes donde  $u = e^t$  y  $dv = \frac{1}{t^3}$

$$\int_1^8 \frac{e^t}{t^3} dt = -\frac{e^t}{2t^2} + \int -\frac{e^t}{2t^2} dt$$

Nuevamente por integración por partes donde  $u = e^t$  y  $dv = \frac{1}{2t^2}$

$$\int -\frac{e^t}{2t^2} dt = -\frac{1}{2} \left( -\frac{e^t}{t} + \int \frac{e^t}{t} dt \right)$$

Finalmente, con la definición  $Ei(t) = \int \frac{e^t}{t} dt$ , resolvemos el resto de integral. También regresamos a los valores originales

$$\int_1^8 v e^{\frac{4}{v}} dv = \left[ -16 \left( -\frac{1}{32} e^{\frac{4}{v}} v^2 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} \right) e^{\frac{4}{v}} v + Ei \left( \frac{4}{v} \right) \right) \right]_1^8$$

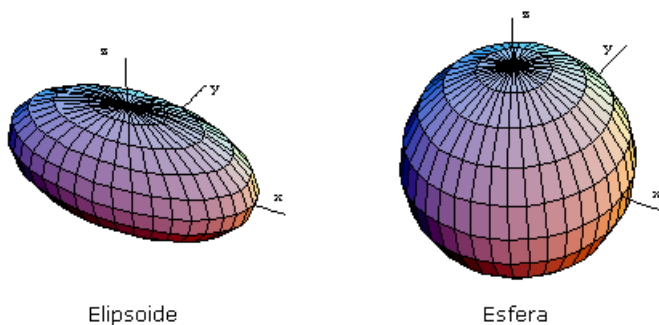
De todo lo anterior, el resultado sería:

$$\int_1^8 \int_0^4 -\frac{7}{25} e^{\frac{u}{v}} du dv = \left( \frac{1}{5} \right) \left( 48\sqrt{e} - 8Ei \left( \frac{1}{2} \right) - 32 - \frac{5e^4 - 16Ei(4)}{2} \right)$$

### 3. Hallar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Hallar el volumen de forma típica nos daría una integral triple bastante compleja, así que para auxiliarnos, transformamos la elipsoide a coordenadas esféricas y realizamos un cambio de variables.



Tomamos la siguiente transformación, basada en coordenadas esféricas:

$$x = ar \operatorname{sen} \gamma \cos \theta$$

$$y = br \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta$$

$$z = cr \cos \gamma$$

El jacobiano sería la multiplicación de  $abc$  con el jacobiano de coordenadas esféricas que vimos en clase es  $r^2 \operatorname{sen} \gamma$ . De ahí, el jacobiano es  $abcr^2 \operatorname{sen} \gamma$

El elipsoide es simétrico respecto al origen, los ejes y los planos de coordenadas. Además las secciones con planos paralelos a los coordenados son elipses (caso particular: circunferencia). De esta forma si vemos al elipsoide en coordenadas esféricas podemos representar su volumen de esta manera:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi abcr^2 \operatorname{sen} \gamma d\gamma d\theta dr$$

Debido a que las variables son independientes una de otra podemos resolver la integral así:

$$(abc) \left( \int_0^1 r^2 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^\pi \operatorname{sen} \gamma d\gamma \right) = (abc) \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \right) \left( \theta \Big|_0^{2\pi} \right) \left( -\cos \gamma \Big|_0^\pi \right) = (abc) \left( \frac{1}{3} \right) (2\pi) (2) = \frac{4}{3} \pi abc$$

Por lo tanto, el volumen del elipsoide es  $\frac{4}{3} \pi abc$ .

4. Hallar el área acotada por la lemniscata  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ .

Para pasar de coordenadas rectangulares a polares, se tiene que  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \operatorname{sen} \theta$ . Entonces, la ecuación de la lemniscata se puede reescribir como

$$(r^2)^2 = 2a^2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \operatorname{sen}^2 \theta)$$

$$(r^2)^2 = 2a^2 r^2 (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)$$

$$(r^2)^2 = 2a^2 r^2 \cos 2\theta$$

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

$$r = a\sqrt{2 \cos 2\theta}$$

Para calcular el área bajo una curva polar en un rango  $\theta \in [\alpha, \beta]$ , se tiene que definir una suma de Riemann. En lugar de utilizar rectángulos de altura  $f(x^*)$ , base  $\Delta x$  y área  $f(x^*)\Delta x$  en un rango  $x \in [a, b]$ , se tienen que usar fragmentos de círculo de radio  $r(\theta^*)$  y de ángulo  $\Delta\theta$ .

El área de un fragmento de círculo de radio  $r$  y ángulo  $\theta$  es el área total del círculo  $\pi r^2$  por la fracción del círculo que representa el ángulo  $\frac{\theta}{2\pi}$ . Por lo que el área sería  $\frac{\pi r^2 \theta}{2\pi} = \frac{r^2 \theta}{2}$ .

Entonces la suma de Riemann sería

$$\sum_{i=1}^n \frac{r(\theta_i^*)^2}{2} \Delta\theta$$

Y el área bajo la curva polar sería

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{r(\theta_i^*)^2}{2} \Delta\theta = \frac{1}{2} \int_\beta^\alpha r(\theta)^2 d\theta$$

Volviendo a la lemniscata, notemos que es simétrica respecto al eje  $x$  y al eje  $y$ , por lo que se puede considerar sólo el primer cuadrante y multiplicar lo obtenido por 4 para tener el área total.

Además, la función que se tiene del radio  $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$  no está definida para valores negativos de  $\cos 2\theta$ .

$$\cos 2\theta \geq 0 \implies 0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Entonces los límites de integración son 0 y  $\frac{\pi}{4}$ .

El área de un cuarto de la lemniscata es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r(\theta)^2 d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{2\cos 2\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 2 \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \\ &= a^2 \left( \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{a^2}{2} (\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) - \sin(2 \cdot 0)) = \frac{a^2}{2} (1 - 0) = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Por lo que el área total de la lemniscata es  $4 \cdot \frac{a^2}{2} = 2a^2$

5. Evaluar la integral iterada

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$$

y bosquejar la región de integración  $W$ .

Pasando a coordenadas cilíndricas.

Se tiene que  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  y  $z = z$ .

La función  $\sqrt{x^2 + y^2}$  se vuelve  $r \cdot r = r^2$ , por el jacobiano.

Los límites de  $z$  se vuelven 0 y  $r^2$ .

Para los límites de  $r$  y de  $\theta$  notemos que

$$\begin{aligned} -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} &\implies y^2 \leq 2x-x^2 \implies y^2 + x^2 - 2x \leq 0 \\ \implies y^2 + x^2 - 2x + 1 &\leq 1 \implies (y-0)^2 + (x-1)^2 \leq 1^2 \end{aligned}$$

Por lo que los límites de  $y$  son un círculo de radio 1 centrado en  $(1, 0)$ .

Y como los límites en  $x$  son precisamente 0 y 2, entonces el área de integración definida por los límites de  $x$  y  $y$  son todos los puntos dentro de ese círculo.

Hay que reescribir ese círculo como función polar.

$$\begin{aligned} (y-0)^2 + (x-1)^2 &= 1^2 \implies y^2 + x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \implies y^2 + x^2 &= 2x \\ \implies r^2 &= 2r \cos(\theta) \\ \implies r &= 2 \cos(\theta) \end{aligned}$$

Entonces los límites del radio son 0 y  $2 \cos(\theta)$ .

Faltan los rangos de  $\theta$ . Como el radio es una distancia, siempre es positivo. Entonces

$$\cos(\theta) \geq 0 \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$$

O más simplemente  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Entonces, la integral cilíndrica es

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos(\theta)} \int_0^{r^2} r^2 dz dr d\theta$$

Primero

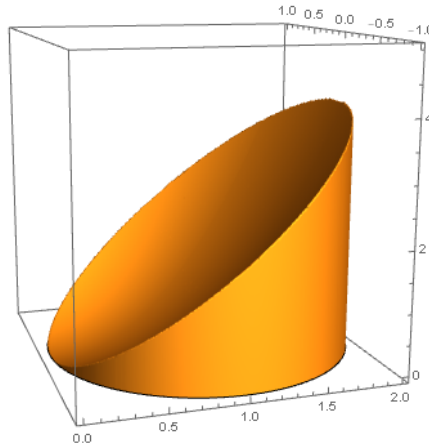
$$\int_0^{r^2} r^2 dz = (r^2 \cdot z) \Big|_0^{r^2} = r^2(r^2 - 0) = r^4$$

Luego

$$\int_0^{2 \cos(\theta)} r^4 dr = \frac{r^5}{5} \Big|_0^{2 \cos(\theta)} = \frac{1}{5}((2 \cos(\theta))^5 - 0^5) = \frac{32 \cos^5(\theta)}{5}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{32 \cos^5(\theta)}{5} d\theta &= \frac{32}{5} \int \cos^5(\theta) d\theta = \frac{32}{5} \int (\cos^2(\theta))^2 \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{32}{5} \int (1 - \sin^2(\theta))^2 \cos(\theta) d\theta = \frac{32}{5} \int (1 - u^2)^2 du = \frac{32}{5} \int (1 - 2u^2 + u^4) du \\ &= \frac{32}{5} \left( u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right) = \frac{32}{5} \left( \sin(\theta) - \frac{2 \sin^3(\theta)}{3} + \frac{\sin^5(\theta)}{5} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{32}{5} \left( \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) \right) = \frac{32}{5} \cdot 2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{32}{5} \cdot \frac{8}{15} \cdot 2 = \frac{512}{75} \end{aligned}$$



6. Calcular la masa del sólido que se encuentra fuera de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  suponiendo que la densidad en un punto  $P$  es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de  $P$  al centro de la esfera.

Sabemos de la tarea anterior, que la masa de un sólido se calcula obteniendo la integral triple de la densidad del mismo. Sabemos que el centro de la esfera está en el origen, así tenemos que la densidad es la distancia  $d(0, P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  por una constante  $k$ , ya que es directamente proporcional.

De ahí, para obtener la masa tendríamos que obtener:  $\iiint_W k(x^2 + y^2 + z^2) dW$

Transformamos a coordenadas esféricas, el jacobiano es  $r^2 \sin \theta$  y tenemos que  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  Estamos considerando el sólido entre dos esferas completas, así que podemos expresar la integral de la siguiente forma:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (kr^4 \sin \gamma) d\theta d\gamma dr$$

Ya que las funciones son independientes unas de otras podemos resolver la integral como el producto de tres integrales independientes por una constante  $k$ :

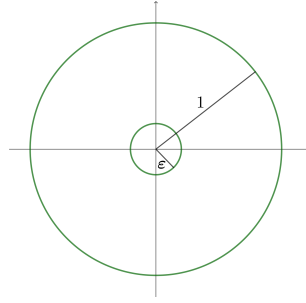
$$(k) \left( \int_0^{\sqrt{2}} r^4 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^{\pi} \sin \gamma d\gamma \right) = (k) \left( \frac{r^5}{5} \Big|_0^{\sqrt{2}} \right) \left( \theta \Big|_0^{2\pi} \right) \left( -\cos \gamma \Big|_0^{\pi} \right) = (k) \left( \frac{2^{\frac{5}{2}} - 1}{5} \right) (2\pi) (2) = (4\pi k) \left( \frac{2^{\frac{5}{2}} - 1}{5} \right)$$

Por lo tanto, la masa del sólido es  $(4\pi k) \left( \frac{2^{\frac{5}{2}} - 1}{5} \right)$

7. Determinar los números reales  $\lambda$  para los que

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda}$$

es convergente, con  $D$  el disco unitario con centro en el origen.



La función  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\lambda}$  no está definida cuando  $x^2 + y^2 = 0$ , así que definimos una nueva región de integración  $D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$  y hacemos  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda}$$

para resolver la integral, conviene hacer una transformación a coordenadas polares

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{r^{2\lambda}} dr d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{1-2\lambda} dr d\theta$$

resolviendo la integral iterada (considerando  $\lambda \neq 1$ )

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{1-2\lambda} dr d\theta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^{2-2\lambda}}{2-2\lambda} \right]_\varepsilon^1 d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varepsilon^{2(1-\lambda)}}{2(1-\lambda)} d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi[1 - \varepsilon^{2(1-\lambda)}]}{2(1-\lambda)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi[1 - \varepsilon^{2(1-\lambda)}]}{1-\lambda} \end{aligned}$$

Haciendo un análisis de ésta última expresión, concluimos que:

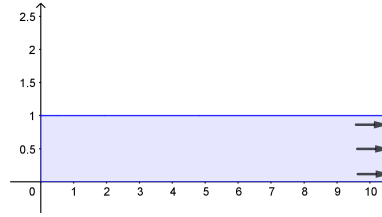
- si  $\lambda > 1$ , entonces  $1 - \lambda < 0$  y  $\varepsilon^{2(1-\lambda)} \rightarrow \infty$  (diverge)
- es cuando  $\lambda < 1$ , entonces la integral converge.

8. Calcular

$$\iint_D xy e^{-(x^2+y^2)} dA$$

con  $x \geq 0$  y  $0 \leq y \leq 1$ .

Notemos que la región de integración es infinita, como se ve en la siguiente figura



Así que la integral iterada a resolver es

$$\int_0^\infty \int_0^1 xy e^{-(x^2+y^2)} dy dx$$

Sustituimos ese infinito con una nueva variable  $t$  y hacemos que ésta tienda hacia infinito

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^1 xy e^{-(x^2+y^2)} dy dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x \left[ -\frac{1}{2} e^{-(x^2+y^2)} \right]_0^1 dx \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x \left[ e^{-(x^2+1)} - e^{-x^2} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x e^{-x^2} [e^{-1} - 1] dx \\ &= -\frac{e^{-1} - 1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^t \\ &= \frac{e^{-1} - 1}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t^2} - 1) \end{aligned}$$

Simplificamos la expresión  $\frac{e^{-1}-1}{4} = \frac{1-e}{4e}$  y al calcular el límite  $e^{-t^2} \rightarrow 0$  por lo que el límite es  $-1$  y el resultado de la integral es  $\frac{e-1}{4e}$