Tarea 2

Careaga Carrillo Juan Manuel

Quiróz Castañeda Edgar

Soto Corderi Sandra del Mar

Miércoles 10 de octubre de 2018

1. Encontrar la imagen de un triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ bajo la transformación $x = u^2$ y $y = v$.

   Despejando u de $x = u^2$, tenemos que $u = \sqrt{x}$ y que $v = y$

   De ahí, tendríamos que la transformación es:

   $T(x,y) = (\sqrt{x}, y)$

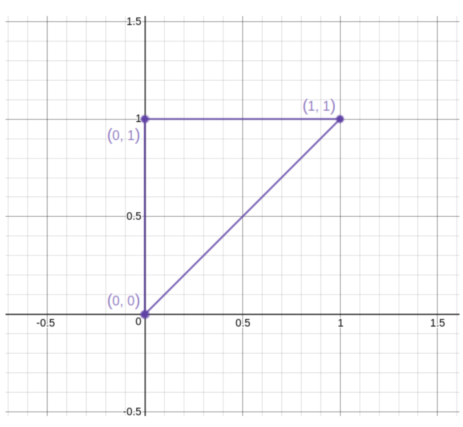
   Aplicamos la transformación a sus vértices

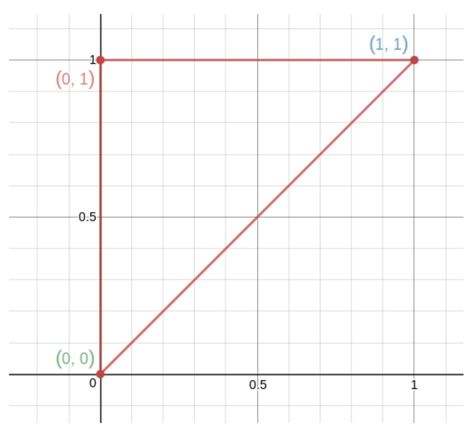
   $T(0,0) = (\sqrt{0}, 0) = (0,0)$

   $T(1,1) = (\sqrt{1}, 1) = (1,1)$

   $T(0,1) = (\sqrt{0}, 1) = (0,1)$

   Por lo tanto, la imagen del triángulo es el mismo triángulo antes de ser transformado



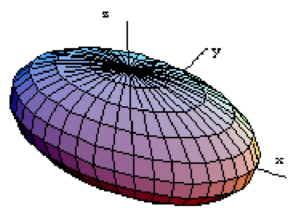


   En la imagen izquierda vemos el triángulo original, y en la derecha vemos la imagen del triángulo bajo la transformación.

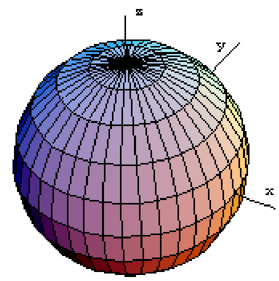
2. Calcular
$$\iint_D e^{\frac{x-2y}{3x-y}}\, dA$$
   con D el paralelogramo acotado por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y =$, $3x - y = 1$ y $3x - y = 8$-

3. Hallar el volumen del elipsoide
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Hallar el volumen de forma típica nos daría una integral triple bastante compleja, así que para auxiliarnos, transformamos la elipsoide a coordenas esféricas y realizamos un cambio de variables.



Elipsoide



Esfera

Tomamos las coordenadas esféricas:

$$x = ar \operatorname{sen} \gamma \cos \theta$$

$$y = br \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} \theta$$

$$x = cr \cos \gamma$$

El jacobiano sería la multiplicación de abc con el jacobiano de coordenadas esféricas que vimos en clase es $r^2 \sin \gamma$. De ahí, el jacobiano es $abcr^2 \sin \gamma$

El elipsoide es simétrico respecto al origen, los ejes y los planos de coordenadas. Además las secciones con planos paralelos a los coordenados son elipses (caso particular: circunferencia). De esta forma si vemos al elipsoide en coordenas esféricas podemos representar su volumen de esta manera:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} abcr^2 \operatorname{sen} \gamma \, d\gamma \, d\theta \, dr$$

Debido a que las variables son independientes una de otra podemos resolver la integral así:

$$(abc) \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi} \sin \gamma d\gamma \right) = (abc) \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \right) \left(\theta \Big|_0^{2\pi} \right) \left(- \cos \gamma \Big|_0^{\pi} \right) = (abc) \left(\frac{1}{3} \right) (2\pi) (2) = \frac{4}{3} \pi abc$$

Por lo tanto, el volumen del elipsoide es $\dfrac{4}{3} \pi abc$.

4. Hallar el área acotada por la lemniscata $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$.

5. Evaluar la integral iterada
$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx$$
y bosquejar la región de integración W.

6. Calcular la masa del sólido que se encuentra fuera de la esfera $x^2 + y^2 +^z 2 = 1$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de P al centro de la esfera.

7. Determinar los números reales λ para los que
$$\iint_D \frac{dA}{\left(x^2+y^2\right)^{\lambda}}$$
es convergente, con D el disco unitario con centro en el origen.

8. Calcular

$$\iint_D xye^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dA$$

con $x \geq 0$ y $0 \leq y \leq 1$.