Tarea 2

Careaga Carrillo Juan Manuel

Quiróz Castañeda Edgar

Soto Corderi Sandra del Mar

Miércoles 10 de octubre de 2018

1. Encontrar la imagen de un triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ bajo la transformación $x = u^2$ y $y = v$.

   Despejando u de $x = u^2$, tenemos que $u = \sqrt{x}$ y que $v = y$

   De ahí, tendríamos que la transformación es:

   $T(x,y) = (\sqrt{x}, y)$

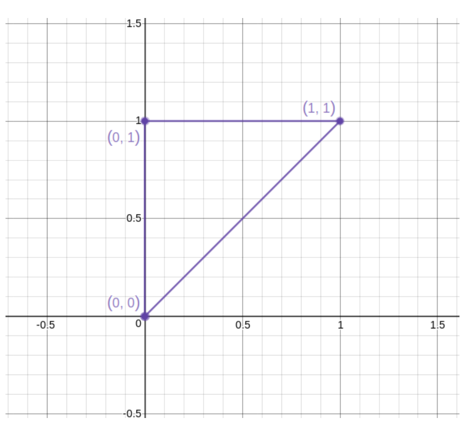
   Aplicamos la transformación a sus vértices

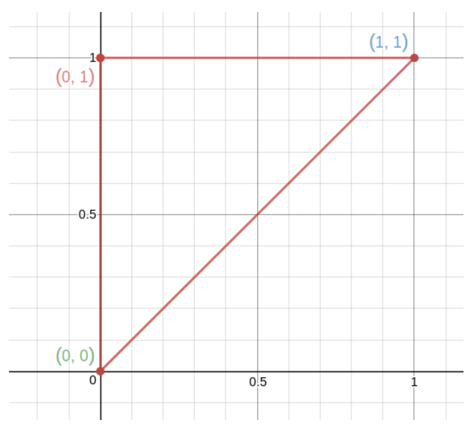
   $T(0,0) = (\sqrt{0}, 0) = (0,0)$

   $T(1,1) = (\sqrt{1}, 1) = (1,1)$

   $T(0,1) = (\sqrt{0}, 1) = (0,1)$

   Por lo tanto, la imagen del triángulo es el mismo triángulo antes de ser transformado





   En la imagen izquierda vemos el triángulo original, y en la derecha vemos la imagen del triángulo bajo la transformación.

2. Calcular

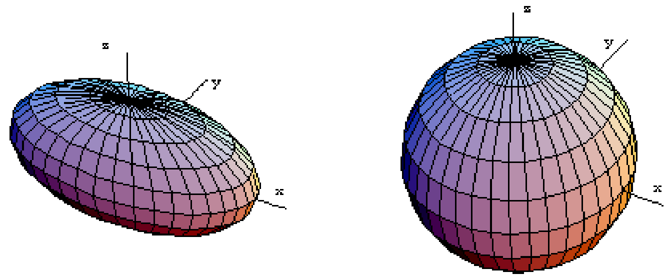
$$\iint_D e^{\frac{x-2y}{3x-y}}\, dA$$

   con D el paralelogramo acotado por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y =$, $3x - y = 1$ y $3x - y = 8$

3. Hallar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Hallar el volumen de forma típica nos daría una integral triple bastante compleja, así que para auxiliarnos, transformamos la elipsoide a coordenas esféricas y realizamos un cambio de variables.



Elipsoide Esfera

Tomamos las coordenadas esféricas:

$$x = ar \operatorname{sen}\gamma \cos\theta$$

$$y = br \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\theta$$

$$x = cr \cos\gamma$$

El jacobiano sería la multiplicación de abc con el jacobiano de coordenadas esféricas que vimos en clase es $r^2 \operatorname{sen}\gamma$. De ahí, el jacobiano es $abcr^2 \operatorname{sen}\gamma$

El elipsoide es simétrico respecto al origen, los ejes y los planos de coordenadas. Además las secciones con planos paralelos a los coordenados son elipses (caso particular: circunferencia). De esta forma si vemos al elipsoide en coordenas esféricas podemos representar su volumen de esta manera:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} abcr^2 \operatorname{sen}\gamma \, d\gamma \, d\theta \, dr$$

Debido a que las variables son independientes una de otra podemos resolver la integral así:

$$(abc)\left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\gamma d\gamma\right) = (abc)\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\gamma\Big|_0^{\pi}\right) = (abc)\left(\frac{1}{3}\right)(2\pi)(2) = \frac{4}{3}\pi abc$$

Por lo tanto, el volumen del elipsoide es $\frac{4}{3}\pi abc$.

4. Hallar el área acotada por la lemniscata $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$.

5. Evaluar la integral iterada

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx$$

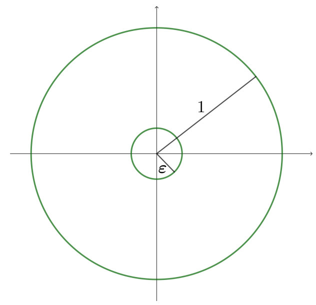
y bosquejar la región de integración W.

6. Calcular la masa del sólido que se encuentra fuera de la esfera $x^2 + y^2 +^z 2 = 1$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de P al centro de la esfera.

7. Determinar los números reales λ para los que

$$\iint_D \frac{dA}{\left(x^2+y^2\right)^{\lambda}}$$

es convergente, con D el disco unitario con centro en el origen.



La función $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\lambda}$ no está definida cuando $x^2+y^2=0$, así que definimos una nueva región de integración $D_\varepsilon = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \varepsilon \le x^2+y^2 \le 1\}$ y hacemos $\varepsilon \to 0$

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2+y^2)^\lambda} = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{D_\varepsilon} \frac{dA}{(x^2+y^2)^\lambda}$$

para resolver la integral, conviene hacer una transformación a coordenadas polares

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2+y^2)^\lambda} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r}{r^{2\lambda}}\,dr\,d\theta = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 r^{1-2\lambda}\,dr\,d\theta$$

resolviendo la integral iterada (considerando $\lambda \neq 1$)

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^1 r^{1-2\lambda}\,dr\,d\theta &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^{2-2\lambda}}{2-2\lambda}\right]_\varepsilon^1 d\theta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{1-\varepsilon^{2(1-\lambda)}}{2(1-\lambda)}\,d\theta \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2\pi[1-\varepsilon^{2(1-\lambda)}]}{2(1-\lambda)} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi[1-\varepsilon^{2(1-\lambda)}]}{1-\lambda}
\end{aligned}$$

Haciendo un análisis de ésta última expresión, concluimos que:

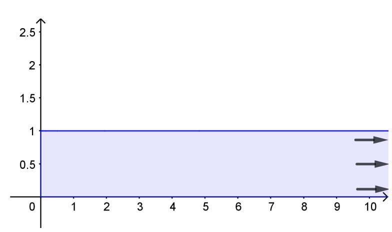
- si $\lambda > 1$, entonces $1-\lambda > 0$ y $\varepsilon^{2(1-\lambda)} \to \infty$ (diverge)
- es cuando $\lambda < 1$, entonces la integral converge.

8. Calcular

$$\iint_D xye^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dA$$

con $x \ge 0$ y $0 \le y \le 1$.

Notemos que la región de integración es infinita, como se ve en la siguiente figura



Así que la integral iterada a resolver es

$$\int_0^\infty\int_0^1 xye^{-\left(x^2+y^2\right)}\,dy\,dx$$

Sustituimos ese infinito con una nueva variable t y hacemos que ésta tienda hacia infinito

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty}\int_0^t\int_0^1 xye^{-(x^2+y^2)}\,dy\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t x\left[-\frac{1}{2}e^{-(x^2-y^2)}\right]_0^1 dx \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t x\left[e^{-(x^2+1)}-e^{-x^2}\right] dx \\
&= -\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}\int_0^t xe^{-x^2}\left[e^{-1}-1\right] dx \\
&= -\frac{e^{-1}-1}{2}\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^t \\
&= \frac{e^{-1}-1}{4}\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t^2}-1\right)
\end{aligned}$$

Simplificamos la expresión $\frac{e^{-1}-1}{4}=\frac{1-e}{4e}$ y al calcular el límite $e^{-t^2}\to 0$ por lo que el límite es -1 y el resultado de la integral es $\dfrac{e-1}{4e}$