Tarea 2

Careaga Carrillo Juan Manuel

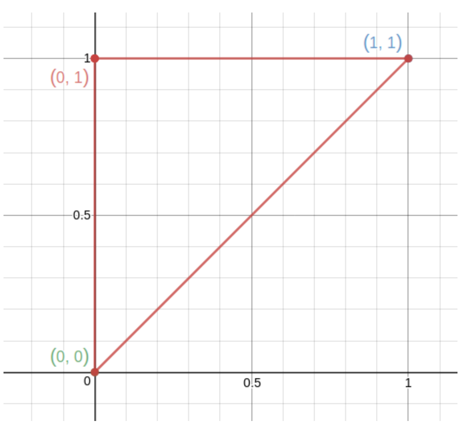
Quiróz Castañeda Edgar

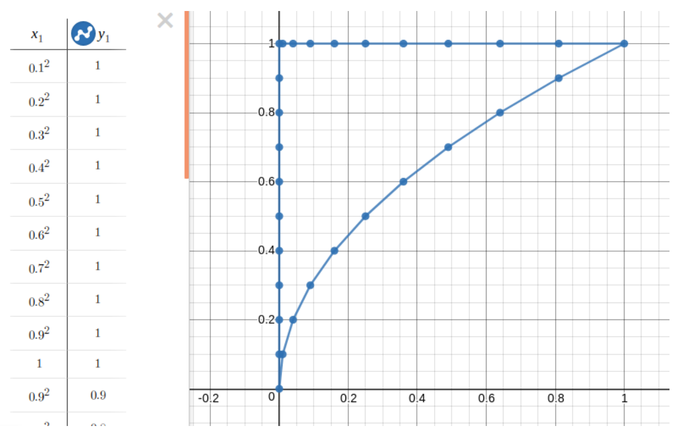
Soto Corderi Sandra del Mar

Miércoles 10 de octubre de 2018

1. Encontrar la imagen de un triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ bajo la transformación $x = u^2$ y $y = v$.

   Aplicamos la transformación a varios puntos del triángulo y obtenemos lo siguiente:





   En la imagen izquierda vemos el triángulo original, y en la derecha vemos la imagen del triángulo bajo la transformación.

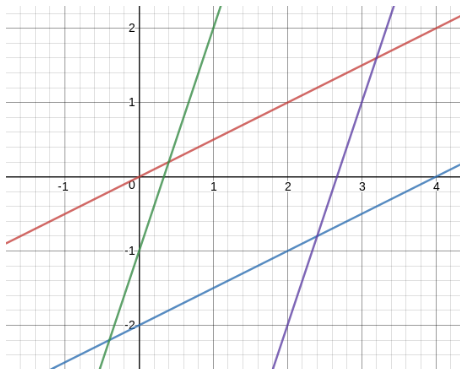
   Podemos observar que la transformación convirtió el lado del triángulo que iba de $(0,0)$ a $(1,1)$ en una curva, ya que $x = u^2$, el resto de los lados parecen verse no afectados, pero los puntos tomados si cambiaron en posición, recorriéndose, ya que al tomar número decimales al cuadrado obtenemos coordenadas menores a las originales.

2. Calcular

$$\iint_D e^{\frac{x-2y}{3x-y}}\, dA$$

con D el paralelogramo acotado por las rectas $x - 2y = 0$, $x - 2y =$, $3x - y = 1$ y $3x - y = 8$

El paralelogramo D lo podemos ver como la siguiente imagen:



Para facilitar la integral, realizaremos un cambio de variable y una transformación lineal con D.

Obtenemos el Jacobiano de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

Para la transformación, tomamos $u = x - 2y$ y $v = 3x - y$.

Despejando con un sistema de ecuaciones de u y v, tenemos que $x = -(\frac{u-2v}{5})$ y $y = -(\frac{3u-v}{5})$

De ahí, si aplicamos la transformación en los lados del paralelogramo tenemos:

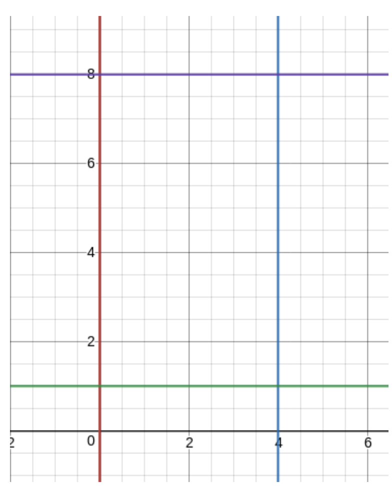
$$T(x - 2y = 0) \Rightarrow (\frac{-u + 2v}{5}) + 2(\frac{3u - v}{5}) = \frac{-u + 2v + 6u - 2v}{5} = \frac{5u}{5} \Rightarrow u = 0$$

$$T(x - 2y = 4) \Rightarrow (\frac{-u + 2v}{5}) + 2(\frac{3u - v}{5}) = \frac{-u + 2v + 6u - 2v}{5} = \frac{5u}{5} \Rightarrow u = 4$$

$$T(3x - y = 1) \Rightarrow -3(\frac{u - 2v}{5}) + (\frac{3u - v}{5}) = \frac{-3u + 6v + 3u - v}{5} = \frac{5v}{5} \Rightarrow v = 1$$

$$T(3x - y = 8) \Rightarrow -3(\frac{u - 2v}{5}) + (\frac{3u - v}{5}) = \frac{-3u + 6v + 3u - v}{5} = \frac{5v}{5} \Rightarrow v = 8$$

La imagen del paralelogramo bajo la transformación es como la siguiente imagen, vemos que es un cuadrado, así que los límites de u y v son sencillos.



De ahí, podemos resolver a nuestra integral doble como:

$$\int_1^8 \int_0^4 \frac{1}{5} e^{\frac{u}{v}} \, du \, dv$$

Usando integración por sustitución tomando $s = \frac{u}{v}$, resolvemos directamente du

$$= \frac{1}{5} \int_1^8 v \left(e^{\frac{4}{v}} - 1 \right) \, dv$$

$$\int_1^8 v \left(e^{\frac{4}{v}} - 1 \right) \, dv = \int_1^8 v e^{\frac{4}{v}} \, dv - \int_1^8 v \, dv$$

$$\int_1^8 v \, dv = \left. \frac{v^2}{2} \right|_1^8 = \frac{63}{2}$$

Usando integración por sustitución tomando $t = \frac{4}{v}$, $dt = -\frac{v^2}{4} dv$ y $v = \frac{4}{t}$

$$\int_1^8 v e^{\frac{4}{v}} \, dv = -16 \int_1^8 \frac{e^t}{t^3} \, dt$$

Usando integración por partes donde $u = e^t$ y $dv = \frac{1}{t^3}$

$$\int_1^8 \frac{e^t}{t^3} \, dt = -\frac{e^t}{2t^2} + \int -\frac{e^t}{2t^2} \, dt$$

Nuevamente por integración por partes donde $u = e^t$ y $dv = \frac{1}{2t^2}$

$$\int -\frac{e^t}{2t^2} \, dt = -\frac{1}{2} \left(-\frac{e^t}{t} + \int \frac{e^t}{t} \, dt \right)$$

Finalmente, con la definición $Ei(t) = \int \frac{e^t}{t} dt$, resolvemos el resto de integral. También regresamos a los valores originales

$$\int_1^8 v e^{\frac{4}{v}} \, dv = \left[-16 \left(-\frac{1}{32} e^{\frac{4}{v}} v^2 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right) e^{\frac{4}{v}} v + Ei \left(\frac{4}{v} \right) \right) \right]_1^8$$

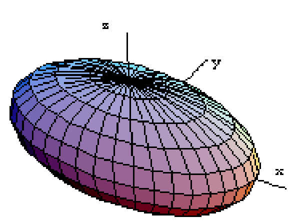
De todo lo anterior, el resultado sería:

$$\int_1^8 \int_0^4 -\frac{7}{25} e^{\frac{u}{v}} \, du \, dv = \left(\frac{1}{5} \right) \left(48\sqrt{e} - 8Ei \left(\frac{1}{2} \right) - 32 - \frac{5e^4 - 16Ei(4)}{2} \right)$$

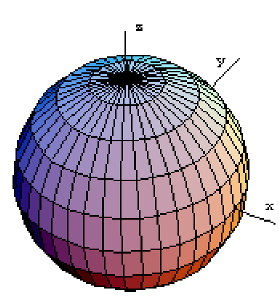
3. Hallar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Hallar el volumen de forma típica nos daría una integral triple bastante compleja, así que para auxiliarnos, transformamos la elipsoide a coordenas esféricas y realizamos un cambio de variables.



Elipsoide



Esfera

Tomamos la siguiente transformación, basada en coordenadas esféricas:

$$x = ar \operatorname{sen}\gamma \cos\theta$$
$$y = br \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\theta$$
$$z = cr \cos\gamma$$

El jacobiano sería la multiplicación de abc con el jacobiano de coordenadas esféricas que vimos en clase es $r^2 \operatorname{sen}\gamma$. De ahí, el jacobiano es $abcr^2 \operatorname{sen}\gamma$

El elipsoide es simétrico respecto al origen, los ejes y los planos de coordenadas. Además las secciones con planos paralelos a los coordenados son elipses (caso particular: circunferencia). De esta forma si vemos al elipsoide en coordenas esféricas podemos representar su volumen de esta manera:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} abcr^2 \operatorname{sen}\gamma \, d\gamma \, d\theta \, dr$$

Debido a que las variables son independientes una de otra podemos resolver la integral así:

$$(abc)\left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\gamma d\gamma\right) = (abc)\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(\theta\Big|_0^{2\pi}\right)\left(-\cos\gamma\Big|_0^{\pi}\right) = (abc)\left(\frac{1}{3}\right)(2\pi)(2) = \frac{4}{3}\pi abc$$

Por lo tanto, el volumen del elipsoide es $\frac{4}{3}\pi abc$.

4. Hallar el área acotada por la lemniscata $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2-y^2\right)$.

Para pasar de coordenadas rectangulares a polares, se tiene que $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos\theta$ y $y = r\operatorname{sen}\theta$. Entonces, la ecuación de la lemniscata se puede reescribir como

$$(r^2)^2 = 2a^2(r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta)$$
$$(r^2)^2 = 2a^2r^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)$$
$$(r^2)^2 = 2a^2r^2\cos 2\theta$$
$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$
$$r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$$

Para calcular el área baja un curva polar en un rango $\theta \in [\alpha, \beta]$, se tiene que definir una suma de Riemann. En lugar de utilizar rectángulos de altura $f(x*)$,base Δx y área $f(x*)\Delta x$ en un rango $x \in [a, b]$, se tienen que usar fragmentos de círculo de radio $r(\theta*)$ y de ángulo $\Delta\theta$.

El área de un fragmento de círculo de radio r y ángulo θ es el área total del círculo πr^2 por la fracción del círculo que representa el ángulo $\frac{\theta}{2\pi}$. Por lo que es área sería $\frac{\pi r^2\theta}{2\pi} = \frac{r^2\theta}{2}$.

Entonce la suma de Riemann sería

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{r(\theta*)^2}{2}\Delta\theta$$

Y el área bajo la curva polar sería

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{r(\theta*)}{2}\Delta\theta = \frac{1}{2}\int_{\beta}^{\alpha} r(\theta)^2 d\theta$$

Volviendo a la lemniscata, notemos que es simétrica respecto al eje x y al eje y, por lo que se puede considerar sólo el primer cuandrante y multiplicar lo obtenido por 4 para tener el área total.

Además, la función que se tiene del radio $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$ no está definida para valores negativos de $\cos 2\theta$.

$$\cos 2\theta \geq 0 \implies 0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Entonces los límites de integración son 0 y $\frac{\pi}{4}$.

El área de un cuarto de la lemniscata es

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} r(\theta)^2 d\theta &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{2\cos 2\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 2\cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2}\cdot 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \\ &= a^2\Big(\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\Big) = \frac{a^2}{2}(\operatorname{sen}(2\cdot\frac{\pi}{4}) - \operatorname{sen}(2\cdot 0)) = \frac{a^2}{2}(1-0) = \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

Por lo que el área total de la lemniscata es $4\cdot\frac{a^2}{2} = 2a^2$

5. Evaluar la integral iterada

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$$

y bosquejar la región de integración W.

Pasando a coordenadas cilíndricas.

Se tiene que $r^2 = x^2 + y^2$, $x = r\cos(\theta)$, $y = r\operatorname{sen}(\theta)$ y $z = z$.

La función $\sqrt{x^2+y^2}$ se vuelve $r \cdot r = r^2$, por el jacobiano.

Los límites de z se vuelven 0 y r^2.

Para los límites de r y de θ notemos que

$$\begin{aligned}&-\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \implies y^2 \leq 2x - x^2 \implies y^2 + x^2 - 2x \leq 0 \\ &\implies y^2 + x^2 - 2x + 1 \leq 1 \implies (y-0)^2 + (x-1)^2 \leq 1^2\end{aligned}$$

Por lo que los límites de y son un círculo de radio 1 centrado en $(1, 0)$.

Y como los límites en x son precisamente 0 y 2, entonces el área de integración definida por lo límites de x y y son todos los puntos dentro de ese círculo.

Hay que reescribir ese círculo como función polar.

$$\begin{aligned}(y-0)^2 + (x-1)^2 = 1^2 &\implies y^2 + x^2 - 2x + 1 = 1 \\ &\implies y^2 + x^2 = 2x \\ &\implies r^2 = 2r\cos(\theta) \\ &\implies r = 2\cos(\theta)\end{aligned}$$

Entonces los límites del radio son 0 y $2\cos(\theta)$.

Faltan los rangos de θ. Como el radio es una distancia, siempre es positivo. Entonces

$$\cos(\theta) \geq 0 \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$$

O más simplemente $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Entonces, la integral cilíndrica es

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\cos(\theta)} \int_{0}^{r^2} r^2 \, dz \, dr \, d\theta$$

Primero

$$\int_0^{r^2} r^2 dz = (r^2 \cdot z)\Big|_0^{r^2} = r^2(r^2 - 0) = r^4$$

Luego

$$\int_0^{2\cos(\theta)} r^4 dr = \frac{r^5}{5}\Big|_0^{2\cos(\theta)} = \frac{1}{5}((2\cos(\theta))^5 - 0^5) = \frac{32\cos^5(\theta)}{5}$$

Finalmente

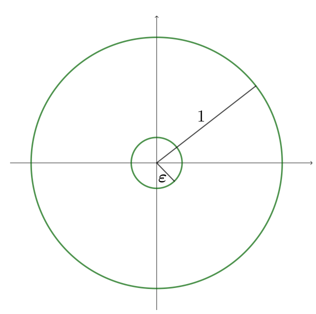
$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{32\cos^5(\theta)}{5} d\theta = \frac{32}{5}\int \cos^5(\theta) d\theta = \frac{32}{5}\int (\cos^2(\theta))^2 \cos(\theta) d\theta \\
&= \frac{32}{5}\int (1 - \operatorname{sen}^2(\theta))^2 \cos(\theta) d\theta = \frac{32}{5}\int (1 - u^2)^2 du = \frac{32}{5}\int (1 - 2u^2 + u^4) du \\
&= \frac{32}{5}(u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5}) = \frac{32}{5}(\operatorname{sen}(\theta) - \frac{2\operatorname{sen}(\theta)^3}{3} + \frac{\operatorname{sen}(\theta)^5}{5})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{32}{5}((1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) - (-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5})) = \frac{32}{5} \cdot 2(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) \\
&= \frac{32}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{256}{75}
\end{aligned}$$

6. Calcular la masa del sólido que se encuentra fuera de la esfera $x^2 + y^2 +^z 2 = 1$ y dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ suponiendo que la densidad en un punto P es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de P al centro de la esfera.

7. Determinar los números reales λ para los que

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda}$$

es convergente, con D el disco unitario con centro en el origen.



La función $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+y^2)^\lambda}$ no está definida cuando $x^2 + y^2 = 0$, así que definimos una nueva región de integración $D_\varepsilon = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ y hacemos $\varepsilon \to 0$

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda} = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda}$$

para resolver la integral, conviene hacer una transformación a coordenadas polares

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{r^{2\lambda}} \, dr \, d\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{1-2\lambda} \, dr \, d\theta$$

resolviendo la integral iterada (considerando $\lambda \neq 1$)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{1-2\lambda}\, dr\, d\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^{2-2\lambda}}{2-2\lambda} \right]_\varepsilon^1 d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{2\pi} \frac{1-\varepsilon^{2(1-\lambda)}}{2(1-\lambda)}\, d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2\pi[1-\varepsilon^{2(1-\lambda)}]}{2(1-\lambda)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi[1-\varepsilon^{2(1-\lambda)}]}{1-\lambda}$$

Haciendo un análisis de ésta última expresión, concluimos que:

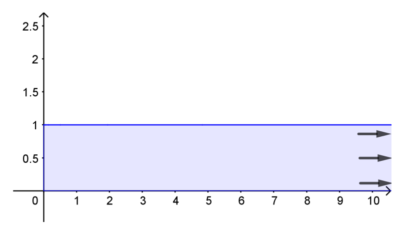
- si $\lambda > 1$, entonces $1-\lambda > 0$ y $\varepsilon^{2(1-\lambda)} \to \infty$ (diverge)
- es cuando $\lambda < 1$, entonces la integral converge.

8. Calcular

$$\iint_D xye^{-\left(x^2+y^2\right)}\, dA$$

con $x \geq 0$ y $0 \leq y \leq 1$.

Notemos que la región de integración es infinita, como se ve en la siguiente figura



Así que la integral iterada a resolver es

$$\int_0^\infty \int_0^1 xye^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx$$

Sustituimos ese infinito con una nueva variable t y hacemos que ésta tienda hacia infinito

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \int_0^1 xye^{-(x^2+y^2)}\, dy\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t x \left[-\frac{1}{2} e^{-(x^2-y^2)} \right]_0^1 dx$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \int_0^t x \left[e^{-(x^2+1)} - e^{-x^2} \right] dx$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{t\to\infty} \int_0^t xe^{-x^2} \left[e^{-1} - 1 \right] dx$$

$$= -\frac{e^{-1}-1}{2} \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^t$$

$$= \frac{e^{-1}-1}{4} \lim_{t\to\infty} \left(e^{-t^2} - 1 \right)$$

Simplificamos la expresión $\frac{e^{-1}-1}{4} = \frac{1-e}{4e}$ y al calcular el límite $e^{-t^2} \to 0$ por lo que el límite es -1 y el resultado de la integral es $\dfrac{e-1}{4e}$