

## Tarea 2

Careaga Carrillo Juan Manuel

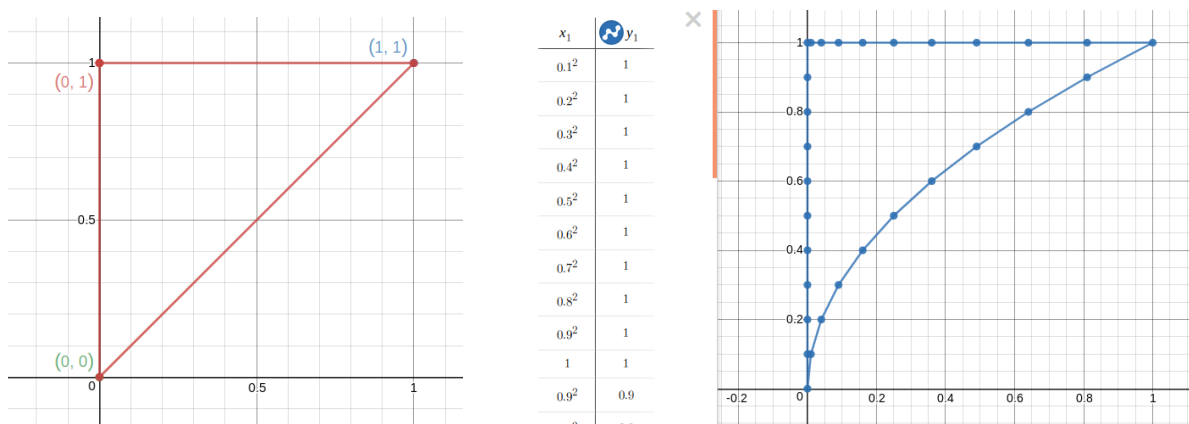
Quiróz Castañeda Edgar

Soto Corderi Sandra del Mar

Miércoles 10 de octubre de 2018

1. Encontrar la imagen de un triángulo con vértices  $(0,0)$ ,  $(1,1)$  y  $(0,1)$  bajo la transformación  $x = u^2$  y  $y = v$ .

Aplicamos la transformación a varios puntos del triángulo y obtenemos lo siguiente:



En la imagen izquierda vemos el triángulo original, y en la derecha vemos la imagen del triángulo bajo la transformación.

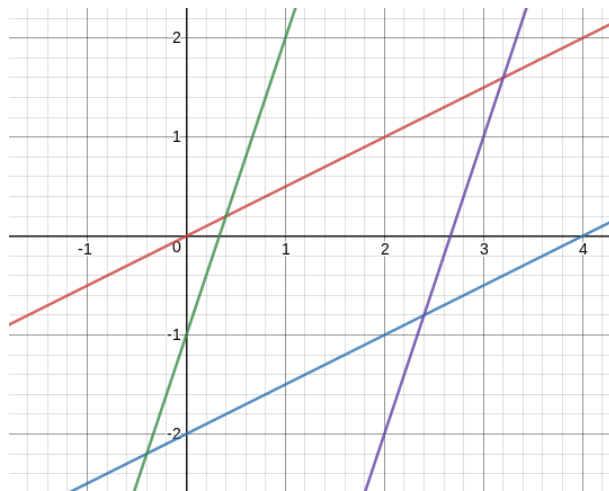
Podemos observar que la transformación convirtió el lado del triángulo que iba de  $(0,0)$  a  $(1,1)$  en una curva, ya que  $x = u^2$ , el resto de los lados parecen verse no afectados, pero los puntos tomados si cambiaron en posición, recorriéndose, ya que al tomar números decimales al cuadrado obtenemos coordenadas menores a las originales.

2. Calcular

$$\iint_D e^{\frac{x-2y}{3x-y}} dA$$

con  $D$  el paralelogramo acotado por las rectas  $x - 2y = 0$ ,  $x - 2y = 1$ ,  $3x - y = 1$  y  $3x - y = 8$

El paralelogramo  $D$  lo podemos ver como la siguiente imagen:



Para facilitar la integral, realizaremos un cambio de variable y una transformación lineal con D.

Obtenemos el Jacobiano de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}$$

Para la transformación, tomamos  $u = x - 2y$  y  $v = 3x - y$ .

Despejando con un sistema de ecuaciones de  $u$  y  $v$ , tenemos que  $x = -(\frac{u-2v}{5})$  y  $y = -(\frac{3u-v}{5})$

De ahí, si aplicamos la transformación en los lados del paralelogramo tenemos:

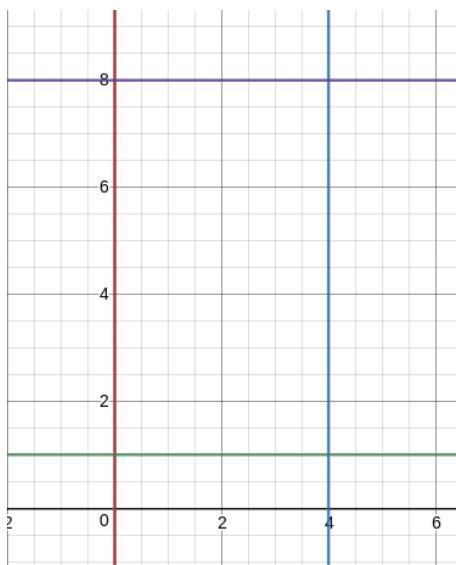
$$T(x - 2y = 0) \Rightarrow \left(\frac{-u + 2v}{5}\right) + 2\left(\frac{3u - v}{5}\right) = \frac{-u + 2v + 6u - 2v}{5} = \frac{5u}{5} \Rightarrow u = 0$$

$$T(x - 2y = 4) \Rightarrow \left(\frac{-u + 2v}{5}\right) + 2\left(\frac{3u - v}{5}\right) = \frac{-u + 2v + 6u - 2v}{5} = \frac{5u}{5} \Rightarrow u = 4$$

$$T(3x - y = 1) \Rightarrow -3\left(\frac{u - 2v}{5}\right) + \left(\frac{3u - v}{5}\right) = \frac{-3u + 6v + 3u - v}{5} = \frac{5v}{5} \Rightarrow v = 1$$

$$T(3x - y = 8) \Rightarrow -3\left(\frac{u - 2v}{5}\right) + \left(\frac{3u - v}{5}\right) = \frac{-3u + 6v + 3u - v}{5} = \frac{5v}{5} \Rightarrow v = 8$$

La imagen del paralelogramo bajo la transformación es como la siguiente imagen, vemos que es un cuadrado, así que los límites de  $u$  y  $v$  son sencillos.



De ahí, podemos resolver a nuestra integral doble como:

$$\int_1^8 \int_0^4 \frac{1}{5} e^{\frac{u}{v}} du dv$$

(Usando integración por sustitución tomando  $s = \frac{u}{v}$ , resolvemos directamente  $du$ ) Tenemos:

$$= \frac{1}{5} \int_1^8 v(e^{\frac{4}{v}} - 1) dv$$

$$\int_1^8 v(e^{\frac{4}{v}} - 1) dv = \int_1^8 v e^{\frac{4}{v}} dv - \int_1^8 v dv$$

$$\int_1^8 v dv = \frac{v^2}{2} \Big|_1^8 = \frac{63}{2}$$

(Usando integración por sustitución tomando  $t = \frac{4}{v}$ ,  $dt = -\frac{v^2}{4} dv$  y  $v = \frac{4}{t}$ ) Tenemos:

$$\int_1^8 v e^{\frac{4}{v}} dv = -16 \int_1^8 \frac{e^t}{t^3} dt$$

(Usando integración por partes donde  $u = e^t$  y  $dv = \frac{1}{t^3}$ )  $\int_1^8 \frac{e^t}{t^3} dt = -\frac{e^t}{2t^2} + \int -\frac{e^t}{2t^2} dt$

(Usando integración por partes donde  $u = e^t$  y  $dv = \frac{1}{2t^2}$ )

$$\int -\frac{e^t}{2t^2} dt = -\frac{1}{2} \left( -\frac{e^t}{t} + \int \frac{e^t}{t} dt \right)$$

(Usando la definición  $Ei(t) = \int \frac{e^t}{t} dt$ , resolvemos el resto de integral. También regresamos a los valores originales)

$$\int_1^8 v e^{\frac{4}{v}} dv = \left[ -16 \left( -\frac{1}{32} e^{\frac{4}{v}} v^2 + \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{4} \right) e^{\frac{4}{v}} v + Ei\left(\frac{4}{v}\right) \right) \right]_1^8$$

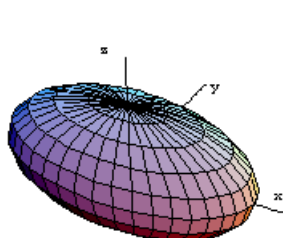
De todo lo anterior, el resultado sería:

$$\int_1^8 \int_0^4 -\frac{7}{25} e^{\frac{u}{v}} du dv = \left( \frac{1}{5} \right) (48\sqrt{e} - 8Ei\left(\frac{1}{2}\right) - 32 - \frac{5e^4 - 16Ei(4)}{2})$$

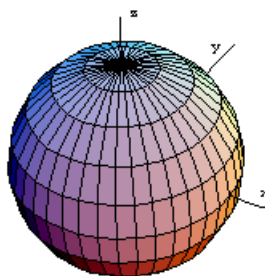
### 3. Hallar el volumen del elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

Hallar el volumen de forma típica nos daría una integral triple bastante compleja, así que para auxiliarnos, transformamos la elipsoide a coordenadas esféricas y realizamos un cambio de variables.



Elipsoide



Esfera

Tomamos la siguiente transformación, basada en coordenadas esféricas:

$$x = ar \sin \gamma \cos \theta$$

$$y = br \sin \gamma \sin \theta$$

$$z = cr \cos \gamma$$

El jacobiano sería la multiplicación de  $abc$  con el jacobiano de coordenadas esféricas que vimos en clase es  $r^2 \sin \gamma$ . De ahí, el jacobiano es  $abcr^2 \sin \gamma$

El elipsoide es simétrico respecto al origen, los ejes y los planos de coordenadas. Además las secciones con planos paralelos a los coordenados son elipses (caso particular: circunferencia). De esta forma si vemos al elipsoide en coordenadas esféricas podemos representar su volumen de esta manera:

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi abcr^2 \sin \gamma d\gamma d\theta dr$$

Debido a que las variables son independientes una de otra podemos resolver la integral así:

$$(abc) \left( \int_0^1 r^2 dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \left( \int_0^\pi \sin \gamma d\gamma \right) = (abc) \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \right) \left( \theta \Big|_0^{2\pi} \right) \left( -\cos \gamma \Big|_0^\pi \right) = (abc) \left( \frac{1}{3} \right) (2\pi) (2) = \frac{4}{3} \pi abc$$

Por lo tanto, el volumen del elipsoide es  $\frac{4}{3} \pi abc$ .

4. Hallar el área acotada por la lemniscata  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ .

Para pasar de coordenadas rectangulares a polares, se tiene que  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ . Entonces, la ecuación de la lemniscata se puede reescribir como

$$(r^2)^2 = 2a^2(r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta)$$

$$(r^2)^2 = 2a^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$(r^2)^2 = 2a^2 r^2 \cos 2\theta$$

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta$$

$$r = a\sqrt{2 \cos 2\theta}$$

Para calcular el área bajo una curva polar en un rango  $\theta \in [\alpha, \beta]$ , se tiene que definir una suma de Riemann. En lugar de utilizar rectángulos de altura  $f(x_*)$ , base  $\Delta x$  y área  $f(x_*)\Delta x$  en un rango  $x \in [a, b]$ , se tienen que usar fragmentos de círculo de radio  $r(\theta_*)$  y de ángulo  $\Delta\theta$ .

El área de un fragmento de círculo de radio  $r$  y ángulo  $\theta$  es el área total del círculo  $\pi r^2$  por la fracción del círculo que representa el ángulo  $\frac{\theta}{2\pi}$ . Por lo que el área sería  $\frac{\pi r^2 \theta}{2\pi} = \frac{r^2 \theta}{2}$ .

Entonces la suma de Riemann sería

$$\sum_{i=1}^n \frac{r(\theta_i^*)^2}{2} \Delta\theta$$

Y el área bajo la curva polar sería

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{r(\theta_i^*)^2}{2} \Delta\theta = \frac{1}{2} \int_\beta^\alpha r(\theta)^2 d\theta$$

Volviendo a la lemniscata, notemos que es simétrica respecto al eje  $x$  y al eje  $y$ , por lo que se puede considerar sólo el primer cuadrante y multiplicar lo obtenido por 4 para tener el área total.

Además, la función que se tiene del radio  $r = a\sqrt{2\cos 2\theta}$  no está definida para valores negativos de  $\cos 2\theta$ .

$$\cos 2\theta \geq 0 \implies 0 \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

Entonces los límites de integración son 0 y  $\frac{\pi}{4}$ .

El área de un cuarto de la lemniscata es

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r(\theta)^2 d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a\sqrt{2\cos 2\theta})^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 2 \cos 2\theta d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta \\ &= a^2 \left( \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{a^2}{2} (\sin(2 \cdot \frac{\pi}{4}) - \sin(2 \cdot 0)) = \frac{a^2}{2} (1 - 0) = \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

Por lo que el área total de la lemniscata es  $4 \cdot \frac{a^2}{2} = 2a^2$

5. Evaluar la integral iterada

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$$

y bosquejar la región de integración  $W$ .

Pasando a coordenadas cilíndricas.

Se tiene que  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$  y  $z = z$ .

La función  $\sqrt{x^2 + y^2}$  se vuelve  $r \cdot r = r^2$ , por el jacobiano.

Los límites de  $z$  se vuelven 0 y  $r^2$ .

Para los límites de  $r$  y de  $\theta$  notemos que

$$\begin{aligned} -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} &\implies y^2 \leq 2x-x^2 \implies y^2 + x^2 - 2x \leq 0 \\ \implies y^2 + x^2 - 2x + 1 &\leq 1 \implies (y-0)^2 + (x-1)^2 \leq 1^2 \end{aligned}$$

Por lo que los límites de  $y$  son un círculo de radio 1 centrado en  $(1, 0)$ .

Y como los límites en  $x$  son precisamente 0 y 2, entonces el área de integración definida por los límites de  $x$  y  $y$  son todos los puntos dentro de ese círculo.

Hay que reescribir ese círculo como función polar.

$$\begin{aligned} (y-0)^2 + (x-1)^2 &= 1^2 \implies y^2 + x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \implies y^2 + x^2 &= 2x \\ \implies r^2 &= 2r \cos(\theta) \\ \implies r &= 2 \cos(\theta) \end{aligned}$$

Entonces los límites del radio son 0 y  $2 \cos(\theta)$ .

Faltan los rangos de  $\theta$ . Como el radio es una distancia, siempre es positivo. Entonces

$$\cos(\theta) \geq 0 \implies 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$$

O más simplemente  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Entonces, la integral cilíndrica es

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos(\theta)} \int_0^{r^2} r^2 dz dr d\theta$$

Primero

$$\int_0^{r^2} r^2 dz = (r^2 \cdot z) \Big|_0^{r^2} = r^2(r^2 - 0) = r^4$$

Luego

$$\int_0^{2\cos(\theta)} r^4 dr = \frac{r^5}{5} \Big|_0^{2\cos(\theta)} = \frac{1}{5}((2\cos(\theta))^5 - 0^5) = \frac{32\cos^5(\theta)}{5}$$

Finalmente

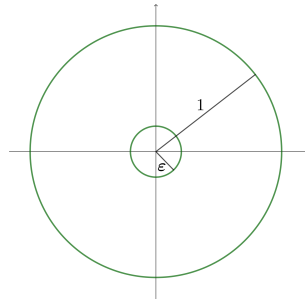
$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{32\cos^5(\theta)}{5} d\theta &= \frac{32}{5} \int \cos^5(\theta) d\theta = \frac{32}{5} \int (\cos^2(\theta))^2 \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{32}{5} \int (1 - \sin^2(\theta))^2 \cos(\theta) d\theta = \frac{32}{5} \int (1 - u^2)^2 du = \frac{32}{5} \int (1 - 2u^2 + u^4) du \\ &= \frac{32}{5} \left( u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} \right) = \frac{32}{5} \left( \sin(\theta) - \frac{2\sin^3(\theta)}{3} + \frac{\sin^5(\theta)}{5} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{32}{5} \left( \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right) \right) = \frac{32}{5} \cdot 2 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{32}{5} \cdot \frac{8}{15} = \frac{256}{75} \end{aligned}$$

6. Calcular la masa del sólido que se encuentra fuera de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  y dentro de la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  suponiendo que la densidad en un punto  $P$  es directamente proporcional al cuadrado de la distancia de  $P$  al centro de la esfera.

7. Determinar los números reales  $\lambda$  para los que

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda}$$

es convergente, con  $D$  el disco unitario con centro en el origen.



La función  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^\lambda}$  no está definida cuando  $x^2 + y^2 = 0$ , así que definimos una nueva región de integración  $D_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \varepsilon \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$  y hacemos  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda}$$

para resolver la integral, conviene hacer una transformación a coordenadas polares

$$\iint_D \frac{dA}{(x^2 + y^2)^\lambda} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r}{r^{2\lambda}} dr d\theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^1 r^{1-2\lambda} dr d\theta$$

resolviendo la integral iterada (considerando  $\lambda \neq 1$ )

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^1 r^{1-2\lambda} dr d\theta &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{r^{2-2\lambda}}{2-2\lambda} \right]_{\varepsilon}^1 d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \varepsilon^{2(1-\lambda)}}{2(1-\lambda)} d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\pi[1 - \varepsilon^{2(1-\lambda)}]}{2(1-\lambda)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi[1 - \varepsilon^{2(1-\lambda)}]}{1-\lambda}\end{aligned}$$

Haciendo un análisis de ésta última expresión, concluimos que:

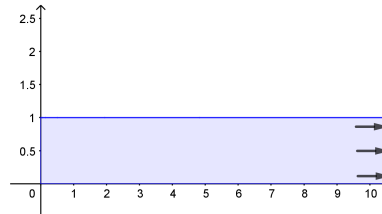
- si  $\lambda > 1$ , entonces  $1 - \lambda < 0$  y  $\varepsilon^{2(1-\lambda)} \rightarrow \infty$  (diverge)
- es cuando  $\lambda < 1$ , entonces la integral converge.

8. Calcular

$$\iint_D xye^{-(x^2+y^2)} dA$$

con  $x \geq 0$  y  $0 \leq y \leq 1$ .

Notemos que la región de integración es infinita, como se ve en la siguiente figura



Así que la integral iterada a resolver es

$$\int_0^{\infty} \int_0^1 xye^{-(x^2+y^2)} dy dx$$

Sustituimos ese infinito con una nueva variable  $t$  y hacemos que ésta tienda hacia infinito

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_0^1 xye^{-(x^2+y^2)} dy dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x \left[ -\frac{1}{2} e^{-(x^2+y^2)} \right]_0^1 dx \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t x \left[ e^{-(x^2+1)} - e^{-x^2} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t xe^{-x^2} [e^{-1} - 1] dx \\ &= -\frac{e^{-1} - 1}{2} \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} \left[ -\frac{1}{2} e^{-x^2} \right]_0^t \\ &= \frac{e^{-1} - 1}{4} \lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t^2} - 1)\end{aligned}$$

Simplificamos la expresión  $\frac{e^{-1}-1}{4} = \frac{1-e}{4e}$  y al calcular el límite  $e^{-t^2} \rightarrow 0$  por lo que el límite es  $-1$  y el resultado de la integral es  $\frac{e-1}{4e}$