Tarea 1

Careaga Carrillo Juan Manuel

Quiróz Castañeda Edgar

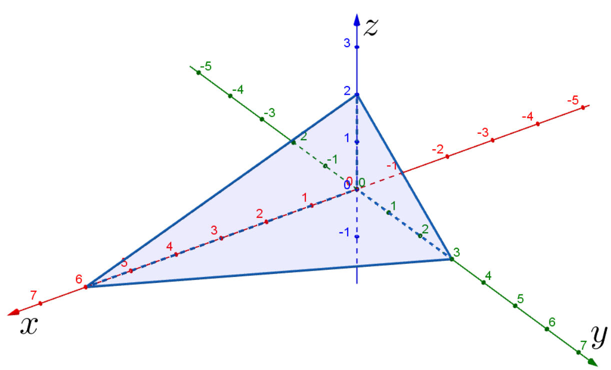
Soto Corderi Sandra del Mar

Lunes 17 de Septiembre de 2018

1. Dibujar la región W definida por las superficies $x + 2y + 3z = 6$, $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Expresar la integral triple $\iiint_W f(x, y, z)dV$ de las seis formas posibles como integrales iteradas.

Dado que las ecuaciones $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$ representan los planos yz, xz y xy respectivamente, sólo hay que fijarse dónde el plano dado por $x + 2y + 3z = 6$ intersecta a dichos planos, en particular, dónde corta a los ejes cartesianos.

Para el plano xy hacemos $z = 0$, y tenemos la recta $x + 2y = 6$ que intersecta a los ejes en $(6, 0, 0)$ y en $(0, 3, 0)$. Para el plano xz hacemos $y = 0$ y tenemos la recta $x + 3z = 6$ que intersecta a los ejes en $(6, 0, 0)$ y $(0, 0, 2)$. Finalmente para el plano yz hacemos $x = 0$ y tenemos la recta $2y + 3z = 6$ que intersecta a los ejes en $(0, 3, 0)$ y $(0, 0, 2)$. Entonces la región buscada se ve así



Tomemos por ejemplo la triple integral en la que primero se integra sobre la variable x, luego sobre y y al final sobre z.

En general, tenemos que los límites que se obtienen despejando la variable de $x + 2y + 3z = 6$ son positivos y como el otro límite es 0, entonces podemos saber cuál es el límite superior y cual es el inferior.

Para la primera integral, hay definir los límites despejando x de las superficies que limitan la región.

Es decir $x = 0$ y $x + 2y + 3z = 6 \implies x = 6 - 2y - 3z$.

$$\int_0^{6-2y-3z} dx$$

Después, hay que hacer lo mismo con la variable y, suponiendo a x como nula, pues ya se ha integrado, es decir $y = 0$ y $6 = 0 + 2y + 3z \implies y = 3 - \frac{3}{2}dz$.

$$\int_0^{3-\frac{3}{2}z} dy$$

Finalmente, hay que hacer lo mismo para z, esto es $z = 0$ y $6 = 0 + 0 + 3z \implies z = 2$.

$$\int_0^2 dz$$

Entonces, la primera triple integral sería

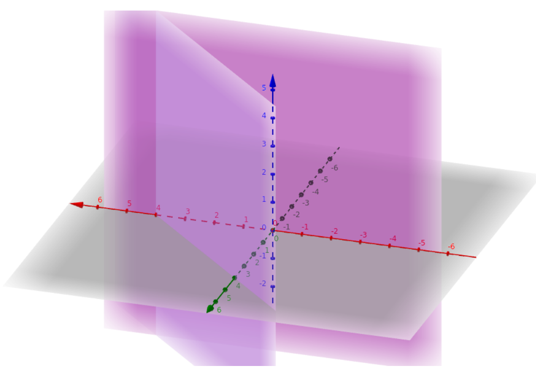
$$\int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}z} \int_0^{6-2y-3z} dx\,dy\,dz$$

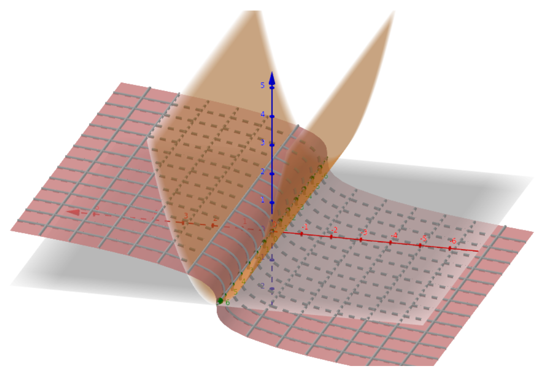
Análogamente, cambiando el orden de integración de las variables, se obtienen las demás posibles integrales triples. Estas son

$$\int_0^3 \int_0^{2-\frac{2}{3}y} \int_0^{6-2y-3z} dx\,dz\,dy$$
$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} \int_0^{3-\frac{x+3z}{2}} dy\,dx\,dz$$
$$\int_0^6 \int_0^{2-\frac{x}{3}} \int_0^{3-\frac{x+3z}{2}} dy\,dz\,dx$$
$$\int_0^6 \int_0^{3-\frac{x}{2}} \int_0^{2-\frac{x+2y}{3}} dz\,dy\,dx$$
$$\int_0^3 \int_0^{6-2y} \int_0^{2-\frac{x+2y}{3}} dz\,dx\,dy$$

2. Dibujar la región W descrita por la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dy\,dx\,dz$. Calcular su volumen.

El dibujo de la región sería la superposición de las regiones en el intervalo en z de 0 a 1.





$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} \int_0^{4-x} dydxdz &= \int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} y\Big|_0^{4-x} dxdz = \int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} ((4-x)-0)dxdz = \int_0^1 \int_{z^3}^{\sqrt{z}} (4-x)dxdz \\
&= \int_0^1 (4x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_{z^3}^{\sqrt{z}} dz = \int_0^1 (4(z^{\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2}(z^{\frac{1}{2}})^2) - (4(z^3) - \frac{1}{2}(z^3)^2)dz \\
&= \int_0^1 (4z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}z - 4z^3 + \frac{1}{2}z^6)dz = (\frac{8}{3}z^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}z^2 - z^4 + \frac{1}{14}z^7)\Big|_0^1 \\
&= (\frac{8}{3}(1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(1)^2 - (1)^4 + \frac{1}{14}(1)^7) - (\frac{8}{3}(0)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}(0)^2 - (0)^4 + \frac{1}{14}(0)^7) \\
&= \frac{8}{3} - \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{14} = \frac{32-3}{12} - 1 + \frac{1}{14} = \frac{203+6}{84} - 1 = \frac{209-84}{84} = \frac{125}{84}
\end{aligned}$$

3. Integrar la función $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + 2$ sobre la región D acotada por la gráfica de $y = -x^2 + x$, el eje x, y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Primero hay que determinar qué límite es el superior y cual es el inferior.

Los límites en x son sencillos, pues ambas cotas son constantes, por lo que $x = 0$ es la cota inferior y $x = 2$ es la superior. Los límites de y son la función constante $y = 0$ y la función $y = -x^2 + x$. Hay que determinar si $-x^2 + x < 0$ o $-x^2 + x > 0$ en el intervalo $[0, 2]$ dado por las cotas de x.

$$-x^2 + x = 0 \implies x = x^2 \implies x = 1, 0$$

Entonces la función $y = -x^2 + x$ cambia de signo en 1 y en 0. Veamos qué signo tiene en qué intervalo.

$$-(0{,}5)^2 + 0{,}5 = -0{,}25 + 0{,}5 = 0{,}25 > 0$$
$$-(1{,}5)^2 + 1{,}5 = -2{,}25 + 1{,}5 = -0{,}75 < 0$$

Entones la función es positiva en $(0, 1)$ y negativa en $(1, 2]$.

Por lo tanto hay que considerar dos integrales para calcular el volumen deseado.

$$\int_0^1 \int_0^{-x^2+x} (x^2 + 2xy^2 + 2)dy\, dx + \int_1^2 \int_{-x^2+x}^0 (x^2 + 2xy^2 + 2)dy\, dx$$

Las integrales internas serían

$$\int_0^{-x^2+x} (x^2 + 2xy^2 + 2)dy = (x^2y + \frac{2}{3}xy^3 + 2y)\Big|_0^{-x^2+x} = y(x^2 + \frac{2}{3}xy^2 + 2)\Big|_0^{-x^2+x}$$
$$= (-x^2 + x)(x^2 + \frac{2}{3}x(-x^2 + x)^2 + 2) = x(x^2 + \frac{2}{3}(x^5 - 2x^4 + x^3) + 2) - x^2(x^2 + \frac{2}{3}(x^5 - 2x^4 + x^3) + 2)$$
$$= (x^3 + \frac{2}{3}(x^6 - 2x^5 + x^4) + 2x) - (x^4 + \frac{2}{3}(x^7 - 2x^6 + x^5) + 2x^2) = -\frac{2}{3}x^7 + \frac{6}{3}x^6 - \frac{6}{3}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x$$

$$\int_{-x^2+x}^0 (x^2 + 2xy^2 + 2)dy = y(x^2 + \frac{2}{3}xy^2 + 2)\Big|_{-x^2+x}^0 = -(-x^2 + x)\left(x^2 + \frac{2}{3}x(-x^2 + x)^2 + 2\right)$$
$$= -\left(-\frac{2}{3}x^7 + \frac{6}{3}x^6 - \frac{6}{3}x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x\right) = \frac{2}{3}x^7 - 2x^6 + 2x^5 + \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x$$

Y de esto las integrales externas serían

$$\int_0^1 (-\frac{2}{3}x^7 + 2x^6 - 2x^5 - \frac{1}{3}x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x)dx = (-\frac{1}{12}x^8 + \frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2)\Big|_0^1$$
$$= -\frac{1}{12} + \frac{2}{7} - \frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + 1 = \frac{27}{70}$$

$$\int_1^2 -(\frac{2}{3}x^7 - 2x^6 + 2x^5 + \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x)dx = -\int_1^2 (\frac{2}{3}x^7 - 2x^6 + 2x^5 + \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 2x^2 - 2x)dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{12}x^8 + \frac{2}{7}x^7 - \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{15}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2\right)\Big|_1^2$$
$$= -\left(-\frac{1}{12}(2)^8 + \frac{2}{7}(2)^7 - \frac{1}{3}(2)^6 - \frac{1}{15}(2)^5 + \frac{1}{4}(2)^4 - \frac{2}{3}(2)^3 + (2)^2 - \frac{27}{70}\right)$$
$$= -\left(-\frac{64}{3} + \frac{256}{7} - \frac{64}{3} - \frac{32}{15} + 4 - \frac{16}{3} + 4 - \frac{27}{70}\right) = \frac{584}{105} + \frac{27}{70} = \frac{1249}{210}$$

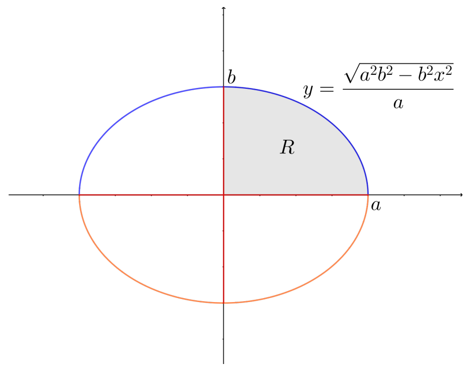
Entonces el volumen total sería $\frac{27}{70} + \frac{1249}{210} = \frac{19}{3}$

4. Usar integrales dobles para calcular el área de una elipse con semiejes a y b.

Supongamos, sin perder la generalidad, que $a \geq b$. La ecuación canónica de la elipse horizontal cuyo centro está en el origen del plano y tiene semiejes a y b es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Equivalentemente, podemos afirmar entonces que $y = \dfrac{\pm\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2}}{a}$ describe nuestro lugar geométrico. Por simpleza, y aprovechando su simetría con los ejes X e Y, dividimos la elipse en 4 regiones iguales delimitadas por los ejes coordenados y únicamente calcularemos el área de una de ellas, llámese R, al final, el área total se obtendrá de multiplicar el área de dicha región por 4.



R es una región $y-$simple, por lo que $R = \left\{(x,y) \,\middle|\, 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq \dfrac{\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2}}{a}\right\}$, entonces el área de R está dada por

$$\iint_R dA = \int_0^a \int_0^{\frac{\sqrt{a^2b^2-b^2x^2}}{a}} dy\,dx = \int_0^a \frac{1}{a}\sqrt{a^2b^2 - b^2x^2}\,dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

Haciendo la sustitución $x = a\operatorname{sen}\theta$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, tenemos que $dx = a\cos\theta\,d\theta$; para los límites de la integral, si $x = 0 = a\operatorname{sen}\theta$ entonces $\theta = 0$ y si $x = a = a\operatorname{sen}\theta$, entonces $\theta = \frac{\pi}{2}$. La integral queda como

$$\frac{b}{\cancel{a}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\cancel{a}\cos\theta\,d\theta = b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)}\cos\theta\,d\theta = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

Usando la fórmula del ángulo doble para el coseno tenemos

$$= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))\,d\theta = \frac{ab}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0\right] = \frac{\pi ab}{4}$$

Por lo tanto, el área de la elipse es 4 veces lo anterior, es decir $A = \pi ab$

5. Mostrar que al evaluar $\iint_D dA$, donde D es una región y-simple, se reproduce la fórmula del cálculo de una variable para el área entre dos curvas.

Sea D una región $y-$simple, entonces de define como $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, a \leq x \leq b;\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\right\}$ para algunos $a, b \in \mathbb{R}$ y $\varphi_1(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi_2(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces

$$\iint_D dA = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\,dx$$

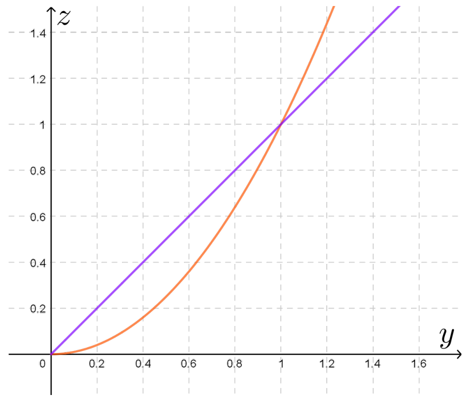
por el Teorema de Fubini

$$= \int_a^b [y]_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\,dx = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\,dx = \int_a^b \varphi_2(x)\,dx - \int_a^b \varphi_1(x)\,dx$$

que es como se calcula el área comprendida entre las curvas $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$ en el intervalo $[a, b]$.

6. Describir la región que se encuentra entre el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ como una región elemental.

Se puede cracterizar como una región de tipo III. Proyectando las gráficas al plano yz tenemos



Como estamos en el plano yz, entonces $x = 0$ y las ecuaciones se convertirían en

$$z = y$$

$$z = y^2$$

Al igualar ambas ecuaciones encontraremos sus intersecciones

$$y = y^2$$

$$\therefore \{y = 0, y = 1\}$$

Y si de las ecuaciones originales despejamos la x nos quedaría

$$x = \sqrt{z^2 - y^2}$$

$$x = \sqrt{x - y^2}$$

Por lo que la descripción de la región, por lo menos en el primer octante, queda como

$$R_1 = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \sqrt{z - y^2} \leq x \leq \sqrt{z^2 - y^2};\ 0 \leq y \leq 1;\ y^2 \leq z \leq y\right\}$$

Debido a las simetrías que presentan ambas gráficas con los planos xz e yz, encontrar la descripción en los octantes restanes debe ser sencillo.

Para el segundo octante el comportamento en y y en z es idéntico, sólo reflejamos en x

$$R_2 = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, -\sqrt{z^2 - y^2} \leq x \leq -\sqrt{z - y^2};\ 0 \leq y \leq 1;\ y^2 \leq z \leq y\right\}$$

Para el tercer octante reflejamos x y reflejamos y (con respecto a R_1)

$$R_3 = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, -\sqrt{z^2 - y^2} \leq x \leq -\sqrt{z - y^2};\ -1 \leq y \leq 0;\ y^2 \leq z \leq y\right\}$$

Y para el cuarto octante sólo reflejamos y (de nuevo, es con respecto a R_1)

$$R_4 = \left\{(x, y, z) \,\middle|\, \sqrt{z - y^2} \leq x \leq \sqrt{z^2 - y^2};\ -1 \leq y \leq 0;\ y^2 \leq z \leq y\right\}$$

Al final, la región comprendida entre ambas superficies es la unión de estas 4 regiones (pues no existe la gráfica en los octantes 5, 6, 7, u 8).

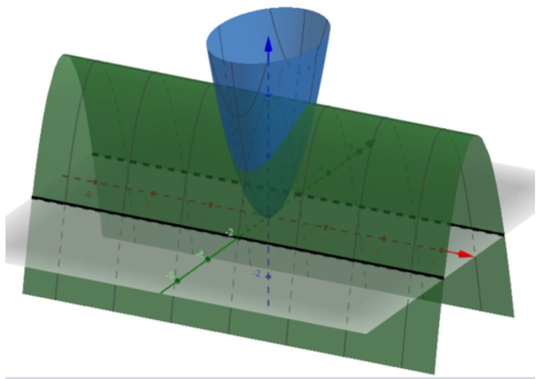
$$R = \bigcup_{i=1}^{4} R_i$$

7. Hallar el volumen acotado por el paraboloide $z = 2x^2 + y^2$ y el cilindro $z = 4 - y^2$

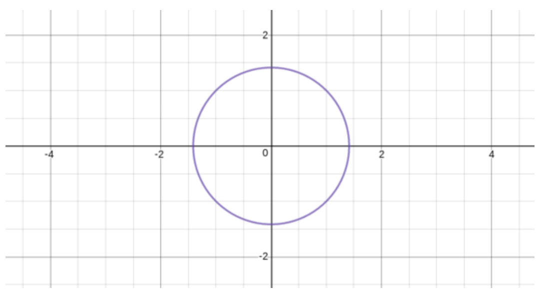
Para calcular el volumen tendríamos $\iiint_W dV$.

Primero veamos la intersección de las dos superficies como: $4 - y^2 = 2x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$

La intersección del paraboloide y el cilindro se ve :



La proyección del volumen en el plano xy se ve como:



De ahí, caracterizamos el volumen como: $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz\, dy\, dx$

Resolviendo la integral triple tenemos:

$$\int_{2x^2+y^2}^{4-y^2} dz = z \Big|_{2x^2+y^2}^{4-y^2} = 4 - y^2 - 2x^2 - y^2 = -2y^2 - 2x^2 + 4$$

$$\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (-2y^2 - 2x^2 + 4) dy = \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (-2y^2) dy + \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (-2x^2) dy + \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (4) dy$$

$$\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (-2y^2 - 2x^2 + 4) dy = (-\frac{2}{3}y^3) \Big|_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} + (-2x^2 y) \Big|_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} + (4y) \Big|_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}$$

$$\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (-2y^2 - 2x^2 + 4) dy = -\frac{4(\sqrt{2-x^2})^3}{3} - 4x^2\sqrt{2-x^2} + 8\sqrt{2-x^2}$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-\frac{4(\sqrt{2-x^2})^3}{3} - 4x^2\sqrt{2-x^2} + 8\sqrt{2-x^2}) dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-\frac{4(\sqrt{2-x^2})^3}{3}) dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-4x^2\sqrt{2-x^2}) dx + \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (8\sqrt{2-x^2}) dx$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-\frac{4(\sqrt{2-x^2})^3}{3}) dx = \frac{4}{3} \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$$

Usando integración por sustitución $z = \frac{u}{2}$: $= \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{16} \int (8 - u^2)^{-\frac{3}{2}} du$

Usando integración por partes: $u = (8 - u^2)^{-\frac{3}{2}}, dv = 1$: $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{16}(u)(8 - u^2)^{-\frac{3}{2}} + \int 3u^2\sqrt{8 - u^2} du$

Usando integración por sustitución $u = 2\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(m)$ $\int 3u^2\sqrt{8 - u^2} du = 3 \cdot 16\sqrt{2} \int \mathrm{sen}^2(m)\cos(m)\sqrt{8 - 8\,\mathrm{sen}^2(m)}$

Simplificando y regresando la u:$\int 3u^2\sqrt{8-u^2}du = -24(\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{2\sqrt{2}}u) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{2\sqrt{2}}u)))$

De ahí, $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{16}\int(8-u^2)^{-\frac{3}{2}}du = \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{16}(u)(8-u^2)^{-\frac{3}{2}} - 24(\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{2\sqrt{2}}u) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{2\sqrt{2}}u)))$

Regresando la u, $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(-\frac{4(\sqrt{2-x^2})^3}{3})dx = (-\frac{2}{3}(2x(-x^2+2)^{\frac{3}{2}}) + 3(\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{\sqrt{2}}x) - \frac{\operatorname{sen}(4\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{\sqrt{2}}x))}{4}))\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = -2\pi$

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(-4x^2\sqrt{2-x^2})dx = -4\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(x^2\sqrt{2-x^2})dx$

Usando integración trigonométrica: $x = \sqrt{2}\operatorname{sen}(u)$

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(-4x^2\sqrt{2-x^2})dx = -2(\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{\sqrt{2}}x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(4\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{\sqrt{2}}x)))\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = -2\pi$

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(8\sqrt{2-x^2})dx = -8\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(\sqrt{2-x^2})dx$

Usando integración trigonométrica: $x = \sqrt{2}\operatorname{sen}(u)$

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(8\sqrt{2-x^2})dx = 8(\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{\sqrt{2}}x) + -\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\operatorname{arc\,sen}(\frac{1}{\sqrt{2}}x)))\Big|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = 8\pi$

$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(-\frac{4(\sqrt{2-x^2})^3}{3} - 4x^2\sqrt{2-x^2} + 8\sqrt{2-x^2})dx = -2\pi - 2\pi + 8\pi = 4\pi$

El volúmen es de 4π

8. *a*) Investigar qué es el centro de masa de un cuerpo y cómo se puede calcular usando integrales múltiples.

   El centro de masa es una posición definida en relación a un objeto o a un sistema de objetos. Es el promedio de la posición de todas las partes del sistema, ponderadas de acuerdo a sus masas.

   Denotamos por $d : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ (continua) la densidad del sólido S.

   La masa viene dada por: $m = \iiint_S d(x,y,z)dx\,dy\,dz$

   Los momentums respecto de los planos coordenados se definen como:

   $M_{xy} = \iiint_S zd(x,y,z)dxdydz$
   $M_{xz} = \iiint_S yd(x,y,z)dxdydz$
   $M_{yz} = \iiint_S xd(x,y,z)dxdydz$

   El centro de masa es : $\left(\frac{M_{yz}}{m}, \frac{M_{xz}}{m}, \frac{M_{xy}}{m}\right)$

   De ahí, que podamos obtener el centro de masa utilizando integrales múltiples.

   b) La densidad en un punto P de un cubo sólido de lado a es directamente proporcional al cuadrado de la distancia del punto P a una esquina fija del cubo. Encontrar el centro de masa.

   Sea $P = (x,y,z)$ y la esquina fija sea el origen. Podemos usar esta función de densidad para encontrar la masa del cubo:
   $\rho(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2)$

   Debido a la simetria de la región, cualquier orden de integración producirá una integral de la misma dificultad.

$$
\begin{aligned}
m &= \int_0^a \int_0^a \int_0^a k(x^2+y^2+z^2)dzdydx \\
&= k\int_0^a \int_0^a \Big[(x^2+y^2)z+\frac{z^3}{3}\Big]\Big|_0^a dydz \\
&= k\int_0^a \int_0^a \Big(ax^2+ay^2+\frac{a^3}{3}\Big)dydx \\
&= k\int_0^a \Big[\Big(ax^2+\frac{a^3}{3}\Big)y+\frac{a^3}{3}y\Big]\Big|_0^a dx \\
&= k\int_0^a \Big(a^2x^2+\frac{2a^4}{3}\Big)dx \\
&= k\Big[\frac{a^2x^3}{3}+\frac{2a^4x}{3}\Big]\Big|_0^a \\
&= k\Big[\frac{a^5}{3}+\frac{2a^5}{3}\Big] \\
&= ka^5
\end{aligned}
$$

El primer momentum sobre el plano yz es:

$$
\begin{aligned}
M_{yz} &= k\int_0^a \int_0^a \int_0^a x(x^2+y^2+z^2)dzdydx \\
&= k\int_0^a x\Big[\int_0^a \int_0^a (x^2+y^2+z^2)dzdy\Big]dx
\end{aligned}
$$

Notemos que la x puede ser sacada como constante fuera de las dos integrales internas, debido a que es constante con respecto a y y z. Después de factorizar, las dos integrales internas son la misma para la masa m.

De ahí tenemos:

$$
\begin{aligned}
M_{yz} &= k\int_0^a x\Big(a^2x^2+\frac{2a^4}{3}\Big)dx \\
&= k\Big[\frac{a^2x^4}{4}+\frac{a^4x^2}{3}\Big]\Big|_0^a \\
&= \frac{7}{12}a^6k
\end{aligned}
$$

Así, $\vec{x}=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{7a^6k/12}{a^5k}$

Finalmente, de la naturaleza de ρ y la simetría de x, y, z en este cubo sólido, se tiene $\vec{x}=\vec{y}=\vec{z}$, y el centro de masa es de $(\frac{7}{12}a, \frac{7}{12}a, \frac{7}{12}a)$