Tarea-Examen 3

Careaga Carrillo Juan Manuel

Quiróz Castañeda Edgar

Soto Corderi Sandra del Mar

Viernes 7 de diciembre de 2018

1. Demostrar que

   a) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$

   b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2\mathbf{F}$

2. Determinar el rotacional y la divergencia de los campos

   a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, \cos xz, \sin xy)$

   b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$

3. Determinar si $\mathbf{F}$ es campo vectorial conservativo y en su caso encuentre el campo escalar f

   a) $\mathbf{F}(x, y) = (2x\cos y - y\cos x, -x^2 \sin y - \sin x)$

   b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$

4. Calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$

   a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz)$ y la parametrización $\sigma(t) = (t^3, -t^2, t)$ con $0 \le t \le 1$

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^1 \left(\operatorname{sen} t^3, \cos(-t^2), t^4\right) \cdot \left(3t^2, -2t, 1\right)\, dt \\
&= \int_0^1 \left(3t^2 \operatorname{sen} t^3 - 2t\cos t^2 + t^4\right)\, dt \\
&= \left[-\cos t^3 - \operatorname{sen} t^2 + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 \\
&= 1 - \cos(1)
\end{aligned}$$

   b) $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, xy)$ y C el arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ que se recorre en sentido antihorario de $(2, 0)$ a $(0, -2)$

   Primero demos una parametrización adecuada para $C = \vec{\sigma}(t)$, tomando en cuenta que se trata de una circunferencia con centro en el origen del plano y de radio $r = \sqrt{4} = 2$.

Se podría utilizar la siguiente parametrización

$$\vec{\sigma}_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t); \quad \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$$

pero los límites de la integral se volverían complicados, por lo que podemos ajustar la parametrización a la siguiente

$$\vec{\sigma}(t) = (2\operatorname{sen} t, -2\cos t); \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

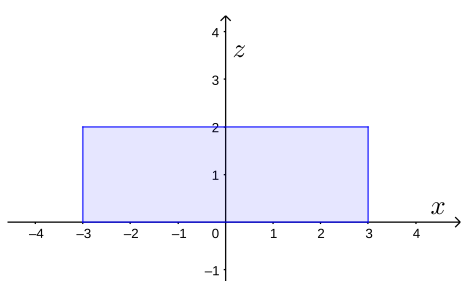
Entonces

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\operatorname{sen} t + 2\cos t, -4\operatorname{sen} t\cos t)\cdot(2\cos t, 2\operatorname{sen} t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\operatorname{sen} t\cos t + 4\cos^2 t - 8\operatorname{sen}^2 t\cos t\right) dt \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t\cos t\,dt + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt - 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt \\
&= (4)\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt - (8)\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[2\operatorname{sen}^2 t + 2t + \operatorname{sen} 2t - \frac{8}{3}\operatorname{sen}^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 + \pi + 0 - \frac{8}{3} \\
&= \pi - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

5. Calcular $\displaystyle\iint_S f\,dS$

a) $f(x,y,z) = x^2y + z^2$ y S la parte del cilindro $x^2+y^2=9$ que está entre los planos $z=0$ y $z=2$

La proyección de S sobre el plano xz es un rectángulo con $x \in [-3,3]$ y $z \in [0,2]$ como se muestra en la figura



Escribimos la ecuación para $y = g(x,z) = \sqrt{9-x^2}$, entonces $g_x(x,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ y $g_z(x,z) = 0$

Aplicando el teorema para convertir la integral de superficie en una integral doble

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,g(x,z),z)\sqrt{[g_x(x,z)]^2 + [g_z(x,z)]^2 + 1}\,dA$$

Entonces tendremos que

$$
\begin{aligned}
\iint_S f(x,y,z)\,dS &= \iint_D \left(x^2\sqrt{9-x^2}+z^2\right)\sqrt{\frac{x^2}{9-x^2}+1}\,dA \\
&= \int_{-3}^{3}\int_0^2 \left(3x^2+\frac{3z^2}{\sqrt{9-x^2}}\right)dz\,dx \\
&= \int_{-3}^{3}\left[3x^2z+\frac{z^3}{\sqrt{9-x^2}}\right]_0^2 dx \\
&= \int_{-3}^{3}\left(6x^2+\frac{8}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx \\
&= \left[2x^3+8\,\mathrm{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3} \\
&= 108+8\pi
\end{aligned}
$$

b) $f(x,y,z)=x^2yz$ y S la parte del plano $z=1+2x+3y$ que está arriba del rectángulo $[0,3]\times[0,2]$

Se entiende que la región $D=[0,3]\times[0,2]$, es la proyección acotada del plano S sobre el plano xy, o sea que $x\in[0,3]$ e $y\in[0,2]$.

Sea $z=g(x,y)$, entonces $g_x(x,y)=2$ y $g_y(x,y)=3$. Ahora aplicamos el teorema

$$
\begin{aligned}
\iint_S f(x,y,z)\,dS &= \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{[g_x(x,y)]^2+[g_y(x,y)]^2+1}\,dA \\
&= \int_0^2\int_0^3 x^2y\,(1+2x+3y)\,\sqrt{4+9+1}\,dx\,dy \\
&= \sqrt{14}\int_0^2\int_0^3 \left(x^2y+2x^3y+3x^2y^2\right)dx\,dy \\
&= \sqrt{14}\int_0^2\left[\frac{x^3y}{3}+\frac{x^4y}{2}+x^3y^2\right]_0^3 dy \\
&= \sqrt{14}\int_0^2\left(9y+\frac{81}{2}y+27y^2\right)dy \\
&= \sqrt{14}\left[\frac{99}{4}y^2+9y^3\right]_0^2 \\
&= 71\sqrt{14}
\end{aligned}
$$

6. Calcular $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$

   a) $\mathbf{F}(x,y,z)=(0,y,-z)$ y S consiste en el paraoloide $y=x^2+z^2$, $0\le y\le 1$, y el disco $x^2+z^2\le 1$, $y=1$

   b) $\mathbf{F}(x,y)=(xze^y,-xze^y,z)$ y S la parte del plano $x+y+z=1$ en el primer octante con orientación hacia arriba

7. Usar el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x,y,z)=(x^2y^3z,\sin(xyz),xyz)$ y S es la parte del cono $y^2=x^2+z^2$ que está entre los planos $y=0$ y $y=3$ orientada en dirección positiva del eje Y.

8. Usar el teorema de Gauss para evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, con $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3y, -x^2y^2, -x^2yz)$ y S la superficie cerrada definida por el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y los planos $z = -2$ y $z = 2$

9. Usar propiedades del rotacional para mostrar que

$$\int_C (f\nabla g + g\nabla f)\, d\mathbf{l} = 0$$