Tarea-Examen 3

Careaga Carrillo Juan Manuel

Quiróz Castañeda Edgar

Soto Corderi Sandra del Mar

Viernes 7 de diciembre de 2018

1. Demostrar que

   a) $\nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$

   Digamos que $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$

   Primero notemos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})$$

   Y también que, como $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z})$

$$\nabla f \times \mathbf{F} \;=\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = (f_3\frac{\partial f}{\partial y} - f_2\frac{\partial f}{\partial z}, -f_3\frac{\partial f}{\partial x} + f_1\frac{\partial f}{\partial z}, f_2\frac{\partial f}{\partial x} - f_1\frac{\partial f}{\partial y})$$

   Entonces, como $f\mathbf{F} = f(f_1, f_2, f_3) = (ff_1, ff_2, ff_3)$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ff_1 & ff_2 & ff_3 \end{bmatrix} = (\frac{\partial ff_3}{\partial y} - \frac{\partial ff_2}{\partial z}, -\frac{\partial ff_3}{\partial x} + \frac{\partial ff_1}{\partial z}, \frac{\partial ff_2}{\partial x} - \frac{\partial ff_1}{\partial y})$$

   Y por la regla del producto

$$\begin{aligned}
&= (f_3\frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial f_3}{\partial y} - f_2\frac{\partial f}{\partial z} - f\frac{\partial f_2}{\partial z}, -f_3\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial f_3}{\partial x} + f_1\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial f_1}{\partial z}, f_2\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f_2}{\partial x} - f_1\frac{\partial f}{\partial y} - f\frac{\partial f_1}{\partial y}) \\
&= (f\frac{\partial f_3}{\partial y} - f\frac{\partial f_2}{\partial z}, -f\frac{\partial f_3}{\partial x} + f\frac{\partial f_1}{\partial z}, f\frac{\partial f_2}{\partial x} - f\frac{\partial f_1}{\partial y}) + (f_3\frac{\partial f}{\partial y} - f_2\frac{\partial f}{\partial z}, -f_3\frac{\partial f}{\partial x} + f_1\frac{\partial f}{\partial z}, f_2\frac{\partial f}{\partial x} - f_1\frac{\partial f}{\partial y}) \\
&= f(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}) + (f_3\frac{\partial f}{\partial y} - f_2\frac{\partial f}{\partial z}, -f_3\frac{\partial f}{\partial x} + f_1\frac{\partial f}{\partial z}, f_2\frac{\partial f}{\partial x} - f_1\frac{\partial f}{\partial y})
\end{aligned}$$

   Y por las dos igualdades notadas al inicio del ejericio, esto es

$$= f(\nabla \times \mathbf{F}) + \nabla f \times \mathbf{F}$$

b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

Por lo notado en el ejericio 1, tenemos que, con $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$

$$\nabla \times \mathbf{F} = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \times (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}) \\
&= (\frac{\partial(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})}{\partial y} - \frac{\partial(-\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z})}{\partial z}, -\frac{\partial(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z})}{\partial z}, \frac{\partial(-\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z})}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z})}{\partial y}) \\
&= (\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, -\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y}) \\
&= (\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z}, +\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z}, +\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y}) - (\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2})
\end{aligned}$$

Y sumando y restando $(\frac{\partial f_1}{\partial x^2}, \frac{\partial f_2}{\partial y^2}, \frac{\partial f_3}{\partial z^2})$

$$\begin{aligned}
&= (\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z}, +\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z}, +\frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z^2}) \\
&- (\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial f_3}{\partial z^2}) \\
&= (\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}), \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}), \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z})) - (\nabla^2 f_1, \nabla^2 f_2, \nabla^2 f_3) \\
&= \nabla(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}) - (\nabla^2 f_1, \nabla^2 f_2, \nabla^2 f_3) \\
&= \nabla(\nabla \cdot (f_1, f_2, f_3)) - \nabla^2 (f_1, f_2, f_3) \\
&= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}
\end{aligned}$$

2. Determinar el rotacional y la divergencia de los campos

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, \cos xz, \sin xy)$

Primero el rotacional

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}) \\
&= (\frac{\partial(\sin xy)}{\partial y} - \frac{\partial(\cos xz)}{\partial z}, -\frac{\partial(\sin xy)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial z}, \frac{\partial(\cos xz)}{\partial x} - \frac{\partial(0)}{\partial y}) \\
&= (x \cos xy + x \sin xz, -y \cos xy, -z \sin xz) \\
&= (x(\cos xy + \sin xz), -y \cos xy, -z \sin xz)
\end{aligned}$$

Ahora la divergencia

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \\
&= \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(\cos xz)}{\partial y} + \frac{\partial(\sin xy)}{\partial z} \\
&= 0 + 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2})$

Notemos que todas las entradas del campo son de la forma $f = \frac{u}{u^2+k^2+j^2}$, por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial j \partial k} = \frac{\partial}{\partial j}(\frac{-2uk}{(u^2+k^2+j^2)^2}) = \frac{2uk(2(u^2+k^2+j^2)2j)}{(u^2+k^2+j^2)^4} = \frac{8ukj}{(u^2+k^2+j^2)^3}$$

En particular

$$\frac{8xyz}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{\partial f_1}{\partial z \partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x \partial y}$$

Esto es, $\mathbf{F}$ es un campo gradiente, por lo que su rotacional es 0.

$$\nabla \times \mathbf{F} = (0,0,0)$$

Y la divergencia es

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \\
&= \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{-y^2+x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{-z^2+x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
&= \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\
&= \frac{1}{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}$$

3. Determinar si $\mathbf{F}$ es campo vectorial conservativo y en su caso encuentre el campo escalar f

a) $\mathbf{F}(x,y) = (2x\cos y - y\cos x, -x^2\sin y - \sin x)$

Primero, hay que verificar que las derivadas cruzadas sean iguales.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}(2x\cos y - y\cos x) &= -2x\sin y - \cos x \\
\frac{\partial}{\partial x}(-x^2\sin y - \sin x) &= -2x\sin y - \cos x
\end{aligned}$$

Por lo que $\mathbf{F}$ sí es un campo vectorial conservativo.

Ahora hay que encontrar su primitiva.

$$\begin{aligned}
\int 2x\cos y - y\cos x dx &= x^2\cos y - y\sin x + k(y) \\
\int -x^2\sin y - \sin x dy &= x^2\cos y - y\sin x + k(x)
\end{aligned}$$

Entonces, $k(y) = k(x) = 0$.

Por lo que el campo escalar es $x^2\cos y - y\sin x$.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy, x^2+2yz, y^2)$

Hay que verificar que las derivadas cruzadas sean iguales

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(x^2+2yz)}{\partial x \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(y^2)}{\partial x \partial y} = 0$$

Por lo que sí es conservativo.

Hay que encontrar la primitiva.

$$\int 2xydx = x^2y + k_1(y,z)$$
$$\int x^2 + 2yzdy = x^2y + y^2z + k_2(x,z)$$
$$\int y^2dz = y^2z + k_3(x,y)$$

Y de estas integrales podemos observar que

$$k_1(y,z) = y^2z$$
$$k_2(x,z) = 0$$
$$k_3(x,y) = x^2y$$

Y entonces el campo escalar correspondiente es $x^2y + y^2z$.

4. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (\sin x, \cos y, xz)$ y la parametrización $\sigma(t) = (t^3, -t^2, t)$ con $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^1 \left(\operatorname{sen} t^3, \cos(-t^2), t^4\right) \cdot \left(3t^2, -2t, 1\right)\, dt \\
&= \int_0^1 \left(3t^2 \operatorname{sen} t^3 - 2t\cos t^2 + t^4\right)\, dt \\
&= \left[-\cos t^3 - \operatorname{sen} t^2 + \frac{t^5}{5}\right]_0^1 \\
&= 1 - \cos(1)
\end{aligned}$$

b) $\mathbf{F}(x,y) = (x-y, xy)$ y C el arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ que se recorre en sentido antihorario de $(2,0)$ a $(0,-2)$

Primero demos una parametrización adecuada para $C = \vec{\sigma}(t)$, tomando en cuenta que se trata de una circunferencia con centro en el origen del plano y de radio $r = \sqrt{4} = 2$.

Se podría utilizar la siguiente parametrización

$$\vec{\sigma}_1(t) = (2\cos t, 2\operatorname{sen} t); \quad \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$$

pero los límites de la integral se volverían complicados, por lo que podemos ajustar la parametrización a la siguiente

$$\vec{\sigma}(t) = (2\operatorname{sen} t, -2\cos t); \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

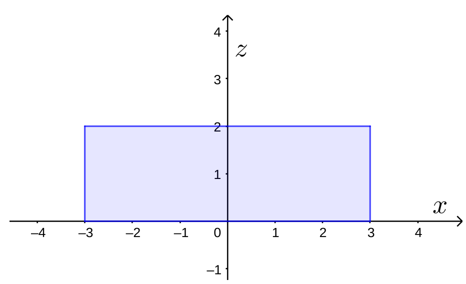
Entonces

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\operatorname{sen} t + 2\cos t, -4\operatorname{sen} t\cos t)\cdot(2\cos t, 2\operatorname{sen} t)\,dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4\operatorname{sen} t\cos t + 4\cos^2 t - 8\operatorname{sen}^2 t\cos t\right) dt \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t\cos t\,dt + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt - 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t\cos t\,dt \\
&= (4)\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)dt - (8)\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \left[2\operatorname{sen}^2 t + 2t + \operatorname{sen} 2t - \frac{8}{3}\operatorname{sen}^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 2 + \pi + 0 - \frac{8}{3} \\
&= \pi - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

5. Calcular $\displaystyle\iint_S f dS$

a) $f(x,y,z) = x^2y + z^2$ y S la parte del cilindro $x^2+y^2=9$ que está entre los planos $z=0$ y $z=2$

La proyección de S sobre el plano xz es un rectángulo con $x\in[-3,3]$ y $z\in[0,2]$ como se muestra en la figura



Escribimos la ecuación para $y = g(x,z) = \sqrt{9-x^2}$, entonces $g_x(x,z) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$ y $g_z(x,z)=0$

Aplicando el teorema para convertir la integral de superficie en una integral doble

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_D f(x,g(x,z),z)\sqrt{[g_x(x,z)]^2 + [g_z(x,z)]^2 + 1}\,dA$$

Entonces tendremos que

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x,y,z)\,dS &= \iint_D \left(x^2\sqrt{9-x^2}+z^2\right)\sqrt{\frac{x^2}{9-x^2}+1}\,dA \\
&= \int_{-3}^{3}\int_{0}^{2}\left(3x^2+\frac{3z^2}{\sqrt{9-x^2}}\right)dz\,dx \\
&= \int_{-3}^{3}\left[3x^2z+\frac{z^3}{\sqrt{9-x^2}}\right]_0^2 dx \\
&= \int_{-3}^{3}\left(6x^2+\frac{8}{\sqrt{9-x^2}}\right)dx \\
&= \left[2x^3+8\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_{-3}^{3} \\
&= 108+8\pi
\end{aligned}$$

b) $f(x,y,z)=x^2yz$ y S la parte del plano $z=1+2x+3y$ que está arriba del rectángulo $[0,3]\times[0,2]$

Se entiende que la región $D=[0,3]\times[0,2]$, es la proyección acotada del plano S sobre el plano xy, o sea que $x\in[0,3]$ e $y\in[0,2]$.

Sea $z=g(x,y)$, entonces $g_x(x,y)=2$ y $g_y(x,y)=3$. Ahora aplicamos el teorema

$$\begin{aligned}
\iint_S f(x,y,z)\,dS &= \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{[g_x(x,y)]^2+[g_y(x,y)]^2+1}\,dA \\
&= \int_0^2\int_0^3 x^2y\,(1+2x+3y)\sqrt{4+9+1}\,dx\,dy \\
&= \sqrt{14}\int_0^2\int_0^3\left(x^2y+2x^3y+3x^2y^2\right)dx\,dy \\
&= \sqrt{14}\int_0^2\left[\frac{x^3y}{3}+\frac{x^4y}{2}+x^3y^2\right]_0^3 dy \\
&= \sqrt{14}\int_0^2\left(9y+\frac{81}{2}y+27y^2\right)dy \\
&= \sqrt{14}\left[\frac{99}{4}y^2+9y^3\right]_0^2 \\
&= 71\sqrt{14}
\end{aligned}$$

6. Calcular $\displaystyle\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$

a) $\mathbf{F}(x,y,z)=(0,y,-z)$ y S consiste en el paraoloide $y=x^2+z^2$, $0\le y\le 1$, y el disco $x^2+z^2\le 1$, $y=1$

Sean S_1 la superficie del paraboloide y S_2 la superficie del disco, entonces

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}+\iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

Para S_1: $\bar{\Phi}(u,v)=\left(u,u^2+v^2,v\right)$

$$\bar{T}_u(u,v)=(1,2u,0)$$

$$\bar{T}_v(u,v) = (0, 2v, 1)$$

$$(\bar{T}_u \times \bar{T}_v)(u,v) = (2u, -1, 2v)$$

$$\mathbf{F}(\bar{\Phi}(u,v)) = \big(0, u^2+v^2, -v\big)$$

entonces

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (0, u^2+v^2, -v)\cdot(2u,-1,2v)\, dA \\ &= \iint_D (-u^2-v^2-2v^2)\, dA\end{aligned}$$

Tomamos a D como la proyección del paraboloide en el plano xz, que es un círculo de radio 1, haciendo el cambio de coordenadas a polares tendremos

$$\begin{aligned}&= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -(r^2+2r^2\operatorname{sen}^2\theta) r\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (-r^3)(1+2\operatorname{sen}^2\theta)\, dr\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1+2\operatorname{sen}^2\theta)\, d\theta \cdot \int_0^1 (-r^3)\, dr \\ &= (4\pi)\left(-\frac{1}{4}\right) \\ &= -\pi\end{aligned}$$

Para S_2: $\bar{\Psi}(r,\theta) = (r\cos\theta, 1, r\operatorname{sen}\theta)$ con $0 \le r \le 1$ y $0 \le \theta \le 2\pi$

$$\bar{T}_r = (\cos\theta, 0, \operatorname{sen}\theta)$$

$$\bar{T}_\theta = (-r\operatorname{sen}\theta, 0, r\cos\theta)$$

$$\begin{aligned}(\bar{T}_r \times \bar{T}_\theta)(u,v) &= (0, -r\cos^2\theta - r\operatorname{sen}^2\theta, 0) \\ &= (0, -r, 0)\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(\Psi(r,\theta)) = (0, 1, -r\operatorname{sen}\theta)$$

entonces

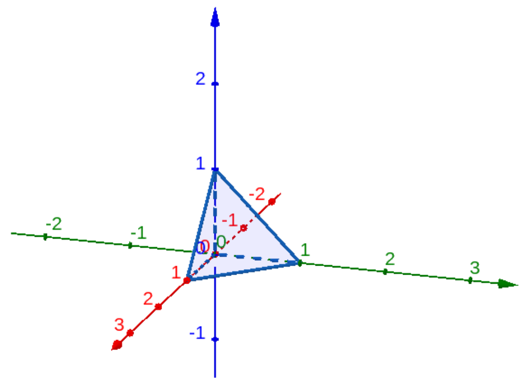
$$\begin{aligned}\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (0,1,-r\operatorname{sen}\theta)\cdot(0,-r,0)\, dA \\ &= \iint_D -r\, dA \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\, dr\, d\theta \\ &= (-2\pi)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\pi\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = (-\pi) + (-\pi) = -2\pi$$

b) $\mathbf{F}(x,y) = (xze^y, -xze^y, z)$ y S la parte del plano $x+y+z=1$ en el primer octante con orientación hacia arriba

La superficie S se muestra a continuación



Tenemos que $z = 1-x-y$, entonces $\bar{\Phi}(u,v) = (u, v, 1-u-v)$ con $u, v \in [0,1]$

$$\bar{T}_u = (1, 0, -1)$$

$$\bar{T}_v = (0, 1, -1)$$

$$(\bar{T}_u \times \bar{T}_v)(u,v) = (1,1,1)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\bar{\Phi}(u,v)) &= (u(1-u-v)e^v, -u(1-u-v)e^v, 1-u-v) \\ &= \big(-(u^2-u+uv)e^v, (u^2-u+uv)e^v, 1-u-v\big)\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= \iint_D \big(-(u^2-u+uv)e^v, (u^2-u+uv)e^v, 1-u-v\big)\cdot(1,1,1)\,dA \\ &= \iint_D (1-u-v)\,dA \\ &= \int_0^1\int_0^1 (1-u-v)\,du\,dv \\ &= \int_0^1 \left[u - \frac{1}{2}u^2 - uv\right]_0^1 dv \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v\right) dv \\ &= \left[\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v^2\right]_0^1 \\ &= 0\end{aligned}$$

7. Usar el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y^3z, \sin(xyz), xyz)$ y S es la parte del cono $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre los planos $y = 0$ y $y = 3$ orientada en dirección positiva del eje Y.

Sabemos que la frontera de S es una curva orientable y cerrada por como está definida. También podemos ver que las primeras derivadas de F son continuas y que D(la parametrización de la superficie en $\mathbb{R}^2$) es una región elemental, por lo tanto podemos aplicar el teorema de Stokes.

El teorema dice que:

$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$

La curva $\mathcal{C}$ será la frontera de la superficie S y la parametrizaremos del siguiente modo: $\sigma(t) = (\cos(t), 3, \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$

Ahora obtenemos $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz) = (-\sin(t), 0, \cos(t))$

Componemos F con $\sigma(t)$ y tenemos que:

$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (-27\cos^2(t)\sin^2(t) + 0 + 3\cos^2(t)\sin(t))dt$

Resolvemos la integral dividendola en dos:

$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} -27\cos^2(t)\sin^2(t)dt + \int_0^{2\pi} 3\cos^2(t)\sin(t)dt$

Usamos la identidad trigonométrica $\cos^2(t)\sin^2(t) = \frac{1-\cos(4t)}{8}$ y tenemos que:

$$\int_0^{2\pi} -27\cos^2(t)\sin^2(t)dt = -\frac{27}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos(4t))dt = -\frac{27}{8}\Big(\int_0^{2\pi}(1)dt - \int_0^{2\pi}\cos(4t)dt\Big)$$

$$= -\frac{27}{8}\Big((t - \frac{1}{4}\sin(4t))\Big|_0^{2\pi}\Big) = -\frac{27}{8}(2\pi - 0) = -\frac{27}{4}\pi$$

Resolvemos la otra integral:

$$\int_0^{2\pi} 3\cos^2(t)\sin(t)dt = -3\Big(\frac{\cos^3(t)}{3}\Big|_0^{2\pi}\Big) = -3\Big(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\Big) = -3(0) = 0$$

De ahí, tenemos que: $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{27}{4}\pi + 0 = -\frac{27}{4}\pi$

Por lo tanto:

$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{27}{4}\pi$

8. Usar el teorema de Gauss para evaluar $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, con $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^3y, -x^2y^2, -x^2yz)$ y S la superficie cerrada definida por el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y los planos $z = -2$ y $z = 2$

Sabemos que el hiperboloide es una región elemental por como está definido. Podemos ver que S (la frontera de la hiperboloide), es cerrada y orientable. También podemos ver que las primeras derivadas de F son continuas, por lo tanto podemos aplicar el teorema de Gauss.

El teorema dice que:

$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F} d\mathbf{V}$

Obtenemos $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2y - 2x^2y - x^2y = 0$

Entonces tenemos que:

$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \ 0 \ d\mathbf{V}$

No necesitamos parametrizar W para ver que el resultado de esa integral será cero.

Por lo tanto:

$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$

9. Usar propiedades del rotacional para mostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Esta afirmación es falsa. Veamos un contraejemplo.

Sea $g(x,y,z) = f(x,y,z) = x$ y $c(t) = (t,0,0)t \in [0,1]$ la curva parametrizada. Entonces la integral es

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} x(1,0,0) + x(1,0,0)dl = \int_{\mathcal{C}} (2x,0,0)dl &= \int_0^1 (2t,0,0)\cdot(1,0,0)dt \\
&= \int_0^1 2tdt = t^2\Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 \\
&= 1 \neq 0
\end{aligned}$$

Pero supongamos que $\mathcal{C}$ es una curva orientable y cerrada, que fg tiene sus primeras derivadas continuas y que la superficie englobada por $\mathcal{C}$ es orientable y su dominio es una región elemental con frontera cerrada.

Tomando las condiciones válidas, vemos que cumple el teorema de Stokes.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} (f\nabla g + g\nabla f)\ \cdot d\mathbf{l} &= \int_{\mathcal{C}} \left(f\left(\frac{\partial}{\partial x}g,\ \ \frac{\partial}{\partial y}g,\ \ \frac{\partial}{\partial z}g\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x}f,\ \ \frac{\partial}{\partial y}f,\ \ \frac{\partial}{\partial z}f\right)\right)\cdot d\mathbf{l} && \text{(Definicion nabla)} \\
&= \int_{\mathcal{C}} \left(f\frac{\partial}{\partial x}g + g\frac{\partial}{\partial x}f,\ \ f\frac{\partial}{\partial y}g + g\frac{\partial}{\partial y}f,\ \ f\frac{\partial}{\partial z}g + g\frac{\partial}{\partial z}f\right)\cdot d\mathbf{l} && \text{(Agrupando)} \\
&= \int_{\mathcal{C}} \left(\frac{\partial}{\partial x}fg,\ \ \frac{\partial}{\partial y}fg,\ \ \frac{\partial}{\partial z}fg\right)\cdot d\mathbf{l} && \text{(Regla del Producto)} \\
&= \int_{\mathcal{C}} (\nabla(fg))\cdot d\mathbf{l} && \text{(Definicion nabla)} \\
&= \iint_S (\nabla\times\nabla(fg))\cdot dS && \text{(Teorema de Stokes)} \\
&= \iint_S 0\cdot dS && \text{(Propiedades del Rotacional)} \\
&= 0 && \text{(Definicion Integral)}
\end{aligned}$$