

Tarea-Examen 3

Careaga Carrillo Juan Manuel

Quiróz Castañeda Edgar

Soto Corderi Sandra del Mar

Viernes 7 de diciembre de 2018

1. Demostrar que

$$a) \nabla \times (f\mathbf{F}) = f\nabla \times \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F}$$

Digamos que $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$

Primero notemos que

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Y también que, como $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$

$$\nabla f \times \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} = \left(f_3 \frac{\partial f}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f}{\partial z}, -f_3 \frac{\partial f}{\partial x} + f_1 \frac{\partial f}{\partial z}, f_2 \frac{\partial f}{\partial x} - f_1 \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Entonces, como $f\mathbf{F} = f(f_1, f_2, f_3) = (ff_1, ff_2, ff_3)$

$$\nabla \times (f\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ff_1 & ff_2 & ff_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial ff_3}{\partial y} - \frac{\partial ff_2}{\partial z}, -\frac{\partial ff_3}{\partial x} + \frac{\partial ff_1}{\partial z}, \frac{\partial ff_2}{\partial x} - \frac{\partial ff_1}{\partial y} \right)$$

Y por la regla del producto

$$\begin{aligned} &= \left(f_3 \frac{\partial f}{\partial y} + f \frac{\partial f_3}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f}{\partial z} - f \frac{\partial f_2}{\partial z}, -f_3 \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial f_3}{\partial x} + f_1 \frac{\partial f}{\partial z} + f \frac{\partial f_1}{\partial z}, f_2 \frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f_2}{\partial x} - f_1 \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(f \frac{\partial f_3}{\partial y} - f \frac{\partial f_2}{\partial z}, -f \frac{\partial f_3}{\partial x} + f \frac{\partial f_1}{\partial z}, f \frac{\partial f_2}{\partial x} - f \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) + \left(f_3 \frac{\partial f}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f}{\partial z}, -f_3 \frac{\partial f}{\partial x} + f_1 \frac{\partial f}{\partial z}, f_2 \frac{\partial f}{\partial x} - f_1 \frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ &= f \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) + \left(f_3 \frac{\partial f}{\partial y} - f_2 \frac{\partial f}{\partial z}, -f_3 \frac{\partial f}{\partial x} + f_1 \frac{\partial f}{\partial z}, f_2 \frac{\partial f}{\partial x} - f_1 \frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Y por las dos igualdades notadas al inicio del ejercicio, esto es

$$= f(\nabla \times \mathbf{F}) + \nabla f \times \mathbf{F}$$

b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

Por lo notado en el ejercicio 1, tenemos que, con $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3)$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) &= \nabla \times \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})}{\partial y} - \frac{\partial(-\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z})}{\partial z}, -\frac{\partial(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z})}{\partial z}, \frac{\partial(-\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z})}{\partial x} - \frac{\partial(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z})}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, -\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, -\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y} \right) - \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} \right) \end{aligned}$$

Y sumando y restando $(\frac{\partial f_1}{\partial x^2}, \frac{\partial f_2}{\partial y^2}, \frac{\partial f_3}{\partial z^2})$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial f_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2} + \frac{\partial f_3}{\partial z^2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) \right) - (\nabla^2 f_1, \nabla^2 f_2, \nabla^2 f_3) \\ &= \nabla \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right) - (\nabla^2 f_1, \nabla^2 f_2, \nabla^2 f_3) \\ &= \nabla(\nabla \cdot (f_1, f_2, f_3)) - \nabla^2(f_1, f_2, f_3) \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \end{aligned}$$

2. Determinar el rotacional y la divergencia de los campos

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, \cos xz, \sin xy)$

Primero el rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, -\frac{\partial f_3}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \\ &= \left(\frac{\partial(\sin xy)}{\partial y} - \frac{\partial(\cos xz)}{\partial z}, -\frac{\partial(\sin xy)}{\partial x} + \frac{\partial(0)}{\partial z}, \frac{\partial(\cos xz)}{\partial x} - \frac{\partial(0)}{\partial y} \right) \\ &= (x \cos xy + x \sin xz, -y \cos xy, -z \sin xz) \\ &= (x(\cos xy + \sin xz), -y \cos xy, -z \sin xz) \end{aligned}$$

Ahora la divergencia

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ &= \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(\cos xz)}{\partial y} + \frac{\partial(\sin xy)}{\partial z} \\ &= 0 + 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$

Notemos que todas las entradas del campo son de la forma $f = \frac{u}{u^2 + k^2 + j^2}$, por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial j \partial k} = \frac{\partial}{\partial j} \left(\frac{-2uk}{(u^2 + k^2 + j^2)^2} \right) = \frac{2uk(2(u^2 + k^2 + j^2)2j)}{(u^2 + k^2 + j^2)^4} = \frac{8ukj}{(u^2 + k^2 + j^2)^3}$$

En particular

$$\frac{8xyz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{\partial f_1}{\partial z \partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x \partial y}$$

Esto es, \mathbf{F} es un campo gradiente, por lo que su rotacional es 0.

$$\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, 0)$$

Y la divergencia es

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F} &= \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \\ &= \frac{-x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{-y^2 + x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{-z^2 + x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

3. Determinar si \mathbf{F} es campo vectorial conservativo y en su caso encuentre el campo escalar f

a) $\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x)$

Primero, hay que verificar que las derivadas cruzadas sean iguales.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (2x \cos y - y \cos x) &= -2x \sin y - \cos x \\ \frac{\partial}{\partial x} (-x^2 \sin y - \sin x) &= -2x \sin y - \cos x \end{aligned}$$

Por lo que \mathbf{F} sí es un campo vectorial conservativo.

Ahora hay que encontrar su primitiva.

$$\begin{aligned} \int 2x \cos y - y \cos x dx &= x^2 \cos y - y \sin x + k(y) \\ \int -x^2 \sin y - \sin x dy &= x^2 \cos y - y \sin x + k(x) \end{aligned}$$

Entonces, $k(y) = k(x) = 0$.

Por lo que el campo escalar es $x^2 \cos y - y \sin x$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$

Hay que verificar que las derivadas cruzadas sean iguales

$$\begin{aligned} \frac{\partial(2xy)}{\partial y \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(x^2 + 2yz)}{\partial x \partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(y^2)}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Por lo que sí es conservativo.

Hay que encontrar la primitiva.

$$\begin{aligned}\int 2xy dx &= x^2 y + k_1(y, z) \\ \int x^2 + 2yz dy &= x^2 y + y^2 z + k_2(x, z) \\ \int y^2 dz &= y^2 z + k_3(x, y)\end{aligned}$$

Y de estas integrales podemos observar que

$$k_1(y, z) = y^2 z$$

$$k_2(x, z) = 0$$

$$k_3(x, y) = x^2 y$$

Y entonces el campo escalar correspondiente es $x^2 y + y^2 z$.

4. Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz)$ y la parametrización $\sigma(t) = (t^3, -t^2, t)$ con $0 \leq t \leq 1$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^1 (\sin t^3, \cos(-t^2), t^4) \cdot (3t^2, -2t, 1) dt \\ &= \int_0^1 (3t^2 \sin t^3 - 2t \cos t^2 + t^4) dt \\ &= \left[-\cos t^3 - \sin t^2 + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{6}{5} - \cos(1) - \sin(1)\end{aligned}$$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (x - y, xy)$ y C el arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ que se recorre en sentido antihorario de $(2, 0)$ a $(0, -2)$

Primero demos una parametrización adecuada para $C = \vec{\sigma}(t)$, tomando en cuenta que se trata de una circunferencia con centro en el origen del plano y de radio $r = \sqrt{4} = 2$.

Se podría utilizar la siguiente parametrización

$$\vec{\sigma}_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t); \quad \frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$$

pero los límites de la integral se volverían complicados, por lo que podemos ajustar la parametrización a la siguiente

$$\vec{\sigma}(t) = (2 \sin t, -2 \cos t); \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

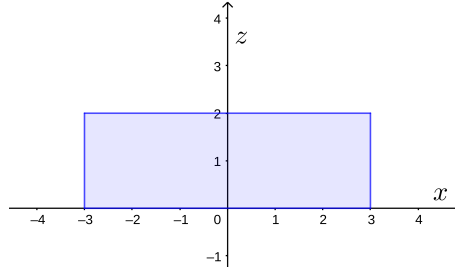
Entonces

$$\begin{aligned}
 \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \operatorname{sen} t + 2 \cos t, -4 \operatorname{sen} t \cos t) \cdot (2 \cos t, 2 \operatorname{sen} t) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \operatorname{sen} t \cos t + 4 \cos^2 t - 8 \operatorname{sen}^2 t \cos t) dt \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} t \cos t dt + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 t \cos t dt \\
 &= (4) \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t \right) dt - (8) \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \left[2 \operatorname{sen}^2 t + 2t + \operatorname{sen} 2t - \frac{8}{3} \operatorname{sen}^3 t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2 + \pi + 0 - \frac{8}{3} \\
 &= \pi - \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

5. Calcular $\iint_S f dS$

a) $f(x, y, z) = x^2 y + z^2$ y S la parte del cilindro $x^2 + y^2 = 9$ que está entre los planos $z = 0$ y $z = 2$

La proyección de S sobre el plano xz es un rectángulo con $x \in [-3, 3]$ y $z \in [0, 2]$ como se muestra en la figura



Escribimos la ecuación para $y = g(x, z) = \sqrt{9 - x^2}$, entonces $g_x(x, z) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$ y $g_z(x, z) = 0$

Aplicando el teorema para convertir la integral de superficie en una integral doble

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, g(x, z), z) \sqrt{[g_x(x, z)]^2 + [g_z(x, z)]^2 + 1} dA$$

Entonces tendremos que

$$\begin{aligned}
 \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_D \left(x^2 \sqrt{9 - x^2} + z^2 \right) \sqrt{\frac{x^2}{9 - x^2} + 1} dA \\
 &= \int_{-3}^3 \int_0^2 \left(3x^2 + \frac{3z^2}{\sqrt{9 - x^2}} \right) dz dx \\
 &= \int_{-3}^3 \left[3x^2 z + \frac{z^3}{\sqrt{9 - x^2}} \right]_0^2 dx \\
 &= \int_{-3}^3 \left(6x^2 + \frac{8}{\sqrt{9 - x^2}} \right) dx \\
 &= \left[2x^3 + 8 \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{x}{3} \right) \right]_{-3}^3 \\
 &= 108 + 8\pi
 \end{aligned}$$

b) $f(x, y, z) = x^2 y z$ y S la parte del plano $z = 1 + 2x + 3y$ que está arriba del rectángulo $[0, 3] \times [0, 2]$

Se entiende que la región $D = [0, 3] \times [0, 2]$, es la proyección acotada del plano S sobre el plano xy , o sea que $x \in [0, 3]$ e $y \in [0, 2]$.

Sea $z = g(x, y)$, entonces $g_x(x, y) = 2$ y $g_y(x, y) = 3$. Ahora aplicamos el teorema

$$\begin{aligned}
 \iint_S f(x, y, z) dS &= \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{[g_x(x, y)]^2 + [g_y(x, y)]^2 + 1} dA \\
 &= \int_0^2 \int_0^3 x^2 y (1 + 2x + 3y) \sqrt{4 + 9 + 1} dx dy \\
 &= \sqrt{14} \int_0^2 \int_0^3 (x^2 y + 2x^3 y + 3x^2 y^2) dx dy \\
 &= \sqrt{14} \int_0^2 \left[\frac{x^3 y}{3} + \frac{x^4 y}{2} + x^3 y^2 \right]_0^3 dy \\
 &= \sqrt{14} \int_0^2 \left(9y + \frac{81}{2} y + 27y^2 \right) dy \\
 &= \sqrt{14} \left[\frac{99}{4} y^2 + 9y^3 \right]_0^2 \\
 &= 171\sqrt{14}
 \end{aligned}$$

6. Calcular $\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$

a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, y, -z)$ y S consiste en el paraboloide $y = x^2 + z^2$, $0 \leq y \leq 1$, y el disco $x^2 + z^2 \leq 1$, $y = 1$

Sean S_1 la superficie del paraboloide y S_2 la superficie del disco, entonces

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

Para S_1 : $\bar{\Phi}(u, v) = (u, u^2 + v^2, v)$

$$\bar{T}_u(u, v) = (1, 2u, 0)$$

$$\bar{T}_v(u, v) = (0, 2v, 1)$$

$$(\bar{T}_u \times \bar{T}_v)(u, v) = (2u, -1, 2v)$$

$$\mathbf{F}(\bar{\Phi}(u, v)) = (0, u^2 + v^2, -v)$$

entonces

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (0, u^2 + v^2, -v) \cdot (2u, -1, 2v) dA \\ &= \iint_D (-u^2 - v^2 - 2v^2) dA \end{aligned}$$

Tomamos a D como la proyección del paraboloide en el plano xz , que es un círculo de radio 1, haciendo el cambio de coordenadas a polares tendremos

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 -(r^2 + 2r^2 \sen^2 \theta) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^3)(1 + 2 \sen^2 \theta) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (1 + 2 \sen^2 \theta) d\theta \cdot \int_0^1 (-r^3) dr \\ &= (4\pi) \left(-\frac{1}{4} \right) \\ &= -\pi \end{aligned}$$

Para S_2 : $\bar{\Psi}(r, \theta) = (r \cos \theta, 1, r \sen \theta)$ con $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\bar{T}_r = (\cos \theta, 0, \sen \theta)$$

$$\bar{T}_\theta = (-r \sen \theta, 0, r \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} (\bar{T}_r \times \bar{T}_\theta)(u, v) &= (0, -r \cos^2 \theta - r \sen^2 \theta, 0) \\ &= (0, -r, 0) \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}(\Psi(r, \theta)) = (0, 1, -r \sen \theta)$$

entonces

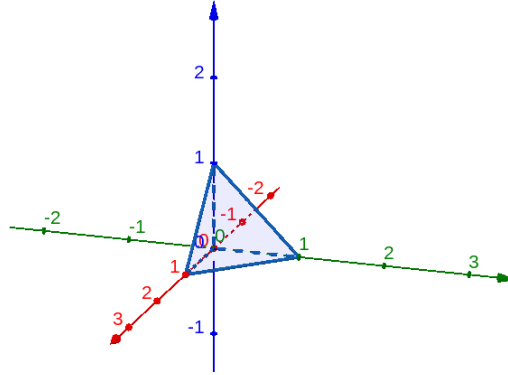
$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (0, 1, -r \sen \theta) \cdot (0, -r, 0) dA \\ &= \iint_D -r dA \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 r dr d\theta \\ &= (-2\pi) \left(\frac{1}{2} \right) \\ &= -\pi \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = (-\pi) + (-\pi) = -2\pi$$

b) $\mathbf{F}(x, y) = (xze^y, -xze^y, z)$ y S la parte del plano $x + y + z = 1$ en el primer octante con orientación hacia arriba

La superficie S se muestra a continuación



Tenemos que $z = 1 - x - y$, entonces $\bar{\Phi}(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ con $u, v \in [0, 1]$

$$\bar{T}_u = (1, 0, -1)$$

$$\bar{T}_v = (0, 1, -1)$$

$$(\bar{T}_u \times \bar{T}_v)(u, v) = (1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\bar{\Phi}(u, v)) &= (u(1 - u - v)e^v, -u(1 - u - v)e^v, 1 - u - v) \\ &= (-(u^2 - u + uv)e^v, (u^2 - u + uv)e^v, 1 - u - v) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (-(u^2 - u + uv)e^v, (u^2 - u + uv)e^v, 1 - u - v) \cdot (1, 1, 1) dA \\ &= \iint_D (1 - u - v) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (1 - u - v) du dv \\ &= \int_0^1 \left[u - \frac{1}{2}u^2 - uv \right]_0^1 dv \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - v \right) dv \\ &= \left[\frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v^2 \right]_0^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

7. Usar el teorema de Stokes para evaluar $\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, donde $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2y^3z, \sin(xyz), xyz)$ y S es la parte del cono $y^2 = x^2 + z^2$ que está entre los planos $y = 0$ y $y = 3$ orientada en dirección positiva del eje Y .

Sabemos que la frontera de S es una curva orientable y cerrada por como está definida. También podemos ver que las primeras derivadas de F son continuas y que D (la parametrización de la superficie en \mathbb{R}^2) es una región elemental, por lo tanto podemos aplicar el teorema de Stokes.

El teorema dice que:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

La curva C será la frontera de la superficie S y la parametrizaremos del siguiente modo: $\sigma(t) = (\cos(t), 3, \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$

Ahora obtenemos $d\mathbf{l} = (dx, dy, dz) = (-\sin(t), 0, \cos(t))$

Componemos F con $\sigma(t)$ y tenemos que:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} (-27 \cos^2(t) \sin^2(t) + 0 + 3 \cos^2(t) \sin(t)) dt$$

Resolvemos la integral dividiendola en dos:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_0^{2\pi} -27 \cos^2(t) \sin^2(t) dt + \int_0^{2\pi} 3 \cos^2(t) \sin(t) dt$$

Usamos la identidad trigonométrica $\cos^2(t) \sin^2(t) = \frac{1 - \cos(4t)}{8}$ y tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} -27 \cos^2(t) \sin^2(t) dt &= -\frac{27}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(4t)) dt = -\frac{27}{8} \left(\int_0^{2\pi} (1) dt - \int_0^{2\pi} \cos(4t) dt \right) \\ &= -\frac{27}{8} \left(\left(t - \frac{1}{4} \sin(4t) \right) \Big|_0^{2\pi} \right) = -\frac{27}{8} (2\pi - 0) = -\frac{27}{4} \pi \end{aligned}$$

Resolvemos la otra integral:

$$\int_0^{2\pi} 3 \cos^2(t) \sin(t) dt = -3 \left(\frac{\cos^3(t)}{3} \Big|_0^{2\pi} \right) = -3 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = -3(0) = 0$$

De ahí, tenemos que: $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{27}{4} \pi + 0 = -\frac{27}{4} \pi$

Por lo tanto:

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{27}{4} \pi$$

8. Usar el teorema de Gauss para evaluar $\iiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$, con $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3y, -x^2y^2, -x^2yz)$ y S la superficie cerrada definida por el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ y los planos $z = -2$ y $z = 2$

Sabemos que el hiperboloide es una región elemental por como está definido. Podemos ver que S (la frontera de la hiperboloide), es cerrada y orientable. También podemos ver que las primeras derivadas de F son continuas, por lo tanto podemos aplicar el teorema de Gauss.

El teorema dice que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F} dV$$

Obtenemos $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2y - 2x^2y - x^2y = 0$

Entonces tenemos que:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_W 0 dV$$

No necesitamos parametrizar W para ver que el resultado de esa integral será cero.

Por lo tanto:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

9. Usar propiedades del rotacional para mostrar que

$$\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Esta afirmación es falsa. Veamos un contraejemplo.

Sea $g(x, y, z) = f(x, y, z) = x$ y $c(t) = (t, 0, 0)$ $t \in [0, 1]$ la curva parametrizada. Entonces la integral es

$$\begin{aligned} \int_C x(1, 0, 0) + x(1, 0, 0)dl &= \int_C (2x, 0, 0)dl = \int_0^1 (2t, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)dt \\ &= \int_0^1 2tdt = t^2 \Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 \\ &= 1 \neq 0 \end{aligned}$$

Pero supongamos que C es una curva orientable y cerrada, que fg tiene sus primeras derivadas continuas y que la superficie englobada por C es orientable y su dominio es una región elemental con frontera cerrada.

Tomando las condiciones válidas, vemos que cumple el teorema de Stokes.

$$\begin{aligned} \int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot d\mathbf{l} &= \int_C \left(f \left(\frac{\partial}{\partial x}g, \frac{\partial}{\partial y}g, \frac{\partial}{\partial z}g \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f, \frac{\partial}{\partial z}f \right) \right) \cdot d\mathbf{l} && \text{(Definición nabla)} \\ &= \int_C \left(f \frac{\partial}{\partial x}g + g \frac{\partial}{\partial x}f, f \frac{\partial}{\partial y}g + g \frac{\partial}{\partial y}f, f \frac{\partial}{\partial z}g + g \frac{\partial}{\partial z}f \right) \cdot d\mathbf{l} && \text{(Agrupando)} \\ &= \int_C \left(\frac{\partial}{\partial x}fg, \frac{\partial}{\partial y}fg, \frac{\partial}{\partial z}fg \right) \cdot d\mathbf{l} && \text{(Regla del Producto)} \\ &= \int_C (\nabla(fg)) \cdot d\mathbf{l} && \text{(Definición nabla)} \\ &= \iint_S (\nabla \times \nabla(fg)) \cdot d\mathbf{S} && \text{(Teorema de Stokes)} \\ &= \iint_S 0 \cdot d\mathbf{S} && \text{(Propiedades del Rotacional)} \\ &= 0 && \text{(Definición Integral)} \end{aligned}$$