Matemáticas para las ciencias aplicadas IV
Tarea 1

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

13 de marzo de 2019

1. Resolver las ecuaciones diferenciales

   a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \sqrt{1+t^2}e^{-t}y = 0$ con $y(0) = 1$

   b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{t}{1-t^2}y = 1 - \frac{t^3}{1+t^4}y$. Graficar algunas soluciones.

   c) $\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{-t \operatorname{sen} y}{1+t^2}$ con $y(1) = \frac{\pi}{2}$

   d) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 - t + y^2 - ty^2$. Graficar algunas soluciones.

   e) $ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x + (xe^{xy}\cos 2x - 3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

   Consideremos $M = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x$ y $N = xe^{xy}\cos 2x - 3$.
   Entoces

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} &= \frac{\mathrm{d}(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}ye^{xy}}{\mathrm{d}y}\cos 2x - 2\frac{\mathrm{d}e^{xy}}{\mathrm{d}y}\operatorname{sen} 2x + 0\\ &= (e^{xy} + xye^{xy})\cos 2x - 2xye^{xy}\operatorname{sen} 2x\\ &= e^{xy}\cos 2x + xye^{xy}\cos 2x - 2xye^{xy}\operatorname{sen} 2x\end{aligned}$$

   Y

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}(xe^{xy}\cos 2x - 3)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}xe^{xy}\cos 2x}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}3}{\mathrm{d}x}\\ &= e^{xy}\cos 2x + x(ye^{xy}\cos 2x + e^{xy}(-\operatorname{sen} 2x)2) + 0\\ &= e^{xy}\cos 2x + x(ye^{xy}\cos 2x - 2ye^{xy}\operatorname{sen} 2x)\\ &= e^{xy}\cos 2x + xye^{xy}\cos 2x - 2xye^{xy}\operatorname{sen} 2x\\ &= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\end{aligned}$$

   Por lo que la ecuación es exacta. Esto es, que existe una $\phi(x,y)$ tal que $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = M$ y $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y} = N$
   Para encontrar la primitiva, es más sencillo integrar N respecto a y.

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \int N dy = \int (xe^{xy}\cos 2x - 3)dy\\ &= \cos 2x \int xe^{xy}dy - \int 3dy = e^{xy}\cos 2x - 3y + g(x)\end{aligned}$$

   Y queda como incógnita $g(x)$, pero se puede obtener usando el hecho de que

M es la derivada respecto a x de la primitva

$$M = \frac{\mathrm{d}\phi(x,y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(e^{xy}\cos 2x - 3y + g(x))}{\mathrm{d}x}$$

$$ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + g'(x)$$

$$\implies g'(x) = 2x \implies g(x) = \int 2xdx = x^2$$

Por lo que la primitiva sin incógnitas es

$$\phi(x,y) = e^{xy}\cos 2x - 3y + 2x$$

Luego, despejando y.

$$\implies e^{xy}\cos 2x = 3y - 2x$$

$$\implies e^{xy} = \frac{3y-2x}{\cos 2x}$$

$$\implies xy = ln(\frac{3y-2x}{\cos 2x})$$

$$\implies y = \frac{1}{x}ln(\frac{3y-2x}{\cos 2x})$$

$$\implies y = ln((\frac{3y-2x}{\cos 2x})^{x^{-1}})$$

Vemos que no se puede despejar, pero se pueden aproximar las soluciones.

f) $(t+2)\operatorname{sen} y + t\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$

Modificando la ecuación, tenemos que

$$\implies t\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -(t+2)\operatorname{sen} y$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{(t+2)\operatorname{sen} y}{t\cos y}$$

$$\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{\frac{t+2}{t}}{\cot y}$$

Que es de la forma de una ecuación separable. Por lo que, para resolverla, hay que resolver

$$
\begin{aligned}
&\implies \cot y dy = -(1+\frac{2}{t})dt \\
&\implies \int \cot y dy = -\int (1+\frac{2}{t})dt \\
&\implies ln|\sin y| = -(t+2ln|t|)+C \\
&\implies |\sin y| = Ce^{-(t+2ln|t|)} \\
&\implies \sin y = \pm(Ce^{-(t+2ln|t|)}) \\
&\implies y = \arcsin\Big(\pm(Ce^{-(t+2ln|t|)})\Big)
\end{aligned}
$$

$g)$ $\left(3t+\frac{6}{y}\right)+\left(\frac{t^2}{y}+3\frac{y}{t}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$

Primero, hay que multiplicar todo por ty.

$$(3t^2y+6t)+(t^3+3y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$$

Entonces, con $M=3t^2y+6t$ y $N=t^3+3y^2$ se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}=3t^2=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

Por lo que la ecuación es exacta, esto es que existe una ϕ primitiva de M y N
Luego, integrando M respecto a t.

$$\int M dt = \int (3t^2y+6t)dt = t^3y+3t^2+g(y)$$

Integrando N respecto a y.

$$\int N dy = \int (t^3+3y^2)dt = t^3y+y^3+h(t)$$

Por lo que la forma de la expresión sin incógnitas es

$$\phi(y,t)=t^3y+y^3+3t^2$$

Luego, despejando y

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \; y = \frac{y^3 + 3t^2}{t^3} \\
&\Longrightarrow \; y - \frac{y^3}{t^3} = \frac{3}{t} \\
&\Longrightarrow \; y - \frac{y^3}{t^3} - \frac{3}{t} = 0 \\
&\Longrightarrow \; y^3 \frac{-1}{t^3} + y - \frac{3}{t} = 0
\end{aligned}
$$

Que está en la forma de una ecuación cúbica deprimida que, por la fórmula de Cardano, tiene solución real

$$y = \sqrt[3]{-\frac{-3t^{-1}}{2} + \sqrt{\frac{(-3t^{-1})^2}{4} + \frac{1^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-3t^{-1}}{2} - \sqrt{\frac{(-3t^{-1})^2}{4} - \frac{1^3}{27}}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{3}{2t} + \sqrt{\frac{9}{4t^2} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{3}{2t} - \sqrt{\frac{9}{4t^2} + \frac{1}{27}}}$$

2. Hallar todas las funciones $g(t)$ que hacen que la ecuación diferencial

$$y^2 \operatorname{sen} t + y g(t) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

sea exacta.

3. Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y/t)$$

se pueden resolver si se hace el cambio de variable $v = y/t$. Mostrar que la ecuación toma la forma

$$t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = f(v).$$

Usar este método para resolver

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{t+y}{t-y}.$$

4. Una población crece de acuerdo a la ley logística, y tiene un límite de 5×10^8 individuos. Cuando la población es baja se suplica cada 40 minutos. ¿Qué valor tendrá la población después de dos horas si inicialmente era de a) 10^8 individuos y b) 10^9 individuos?