

# Matemáticas para las ciencias aplicadas IV

## Tarea 1

Careaga Carrillo Juan Manuel

Quiróz Castañeda Edgar

Soto Corderi Sandra del Mar

13 de marzo de 2019

1. Resolver las ecuaciones diferenciales

- a)  $\frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}e^{-t}y = 0$  con  $y(0) = 1$   
 b)  $\frac{dy}{dt} + \frac{t}{1-t^2}y = 1 - \frac{t^3}{1+t^4}y$ . Graficar algunas soluciones.  
 c)  $\cos y \frac{dy}{dt} = \frac{-t \operatorname{sen} y}{1+t^2}$  con  $y(1) = \frac{\pi}{2}$   
 d)  $\frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2$ . Graficar algunas soluciones.  
 e)  $ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x + (xe^{xy} \cos 2x - 3)\frac{dy}{dx} = 0$

Consideremos  $M = ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x$  y  $N = xe^{xy} \cos 2x - 3$ .  
 Entoces

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dy} &= \frac{d(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)}{dy} = \frac{dye^{xy}}{dy} \cos 2x - 2 \frac{de^{xy}}{dy} \operatorname{sen} 2x + 0 \\ &= (e^{xy} + xye^{xy}) \cos 2x - 2xye^{xy} \operatorname{sen} 2x \\ &= e^{xy} \cos 2x + xye^{xy} \cos 2x - 2xye^{xy} \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= \frac{d(xe^{xy} \cos 2x - 3)}{dx} = \frac{dxe^{xy} \cos 2x}{dx} - \frac{d3}{dx} \\ &= e^{xy} \cos 2x + x(ye^{xy} \cos 2x + e^{xy}(-\operatorname{sen} 2x)2) + 0 \\ &= e^{xy} \cos 2x + x(ye^{xy} \cos 2x - 2ye^{xy} \operatorname{sen} 2x) \\ &= e^{xy} \cos 2x + xye^{xy} \cos 2x - 2xye^{xy} \operatorname{sen} 2x \\ &= \frac{dM}{dy} \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación es exacta. Esto es, que existe una  $\phi(x, y)$  tal que  $\frac{d\phi}{dx} = M$  y  $\frac{d\phi}{dy} = N$

Para encontrar la primitiva, es más sencillo integrar  $N$  respecto a  $y$ .

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= \int N dy = \int (xe^{xy} \cos 2x - 3) dy \\ &= \cos 2x \int xe^{xy} dy - \int 3 dy = e^{xy} \cos 2x - 3y + g(x) \end{aligned}$$

Y queda como incógnita  $g(x)$ , pero se puede obtener usando el hecho de que

$M$  es la derivada respecto a  $x$  de la primitiva

$$\begin{aligned} M &= \frac{d\phi(x, y)}{dx} = \frac{d(e^{xy} \cos 2x - 3y + g(x))}{dx} \\ ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x &= ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + g'(x) \\ \implies g'(x) &= 2x \implies g(x) = \int 2x dx = x^2 \end{aligned}$$

Por lo que la primitiva sin incógnitas es

$$\phi(x, y) = e^{xy} \cos 2x - 3y + 2x$$

Luego, despejando  $y$ .

$$\begin{aligned} \implies e^{xy} \cos 2x &= 3y - 2x \\ \implies e^{xy} &= \frac{3y - 2x}{\cos 2x} \\ \implies xy &= \ln\left(\frac{3y - 2x}{\cos 2x}\right) \\ \implies y &= \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3y - 2x}{\cos 2x}\right) \\ \implies y &= \ln\left(\left(\frac{3y - 2x}{\cos 2x}\right)^{x^{-1}}\right) \end{aligned}$$

Vemos que no se puede despejar, pero se pueden aproximar las soluciones.

$$f) (t + 2) \sin y + t \cos y \frac{dy}{dt} = 0$$

Modificando la ecuación, tenemos que

$$\begin{aligned} \implies t \cos y \frac{dy}{dt} &= -(t + 2) \sin y \\ \implies \frac{dy}{dt} &= -\frac{(t + 2) \sin y}{t \cos y} \\ \implies \frac{dy}{dt} &= -\frac{\frac{t+2}{t}}{\cot y} \end{aligned}$$

Que es de la forma de una ecuación separable. Por lo que, para resolverla, hay

que resolver

$$\begin{aligned}\implies \cot y dy &= -\left(1 + \frac{2}{t}\right)dt \\ \implies \int \cot y dy &= -\int \left(1 + \frac{2}{t}\right)dt \\ \implies \ln|\sin y| &= -(t + 2\ln|t|) + C \\ \implies |\sin y| &= Ce^{-(t+2\ln|t|)} \\ \implies \sin y &= \pm(Ce^{-(t+2\ln|t|)}) \\ \implies y &= \arcsin\left(\pm(Ce^{-(t+2\ln|t|)})\right)\end{aligned}$$

$$g) \left(3t + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{t^2}{y} + 3\frac{y}{t}\right) \frac{dy}{dt} = 0$$

2. Hallar todas las funciones  $g(t)$  que hacen que la ecuación diferencial

$$y^2 \sin t + yg(t) \frac{dy}{dt} = 0$$

sea exacta.

3. Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y/t)$$

se pueden resolver si se hace el cambio de variable  $v = y/t$ . Mostrar que la ecuación toma la forma

$$t \frac{dv}{dt} + v = f(v).$$

Usar este método para resolver

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t+y}{t-y}.$$

4. Una población crece de acuerdo a la ley logística, y tiene un límite de  $5 \times 10^8$  individuos. Cuando la población es baja se suplica cada 40 minutos. ¿Qué valor tendrá la población después de dos horas si inicialmente era de a)  $10^8$  individuos y b)  $10^9$  individuos?