Matemáticas para las ciencias aplicadas IV
Tarea 1

Careaga Carrillo Juan Manuel
Quiróz Castañeda Edgar
Soto Corderi Sandra del Mar

13 de marzo de 2019

1. Resolver las ecuaciones diferenciales

   a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \sqrt{1+t^2}e^{-t}y = 0$ con $y(0) = 1$

   b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{t}{1-t^2}y = 1 - \frac{t^3}{1+t^4}y$. Graficar algunas soluciones.

   c) $\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{-t \operatorname{sen} y}{1+t^2}$ con $y(1) = \frac{\pi}{2}$

   d) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 - t + y^2 - ty^2$. Graficar algunas soluciones.

   e) $ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x + (xe^{xy}\cos 2x - 3)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

   Consideremos $M = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x$ y $N = xe^{xy}\cos 2x - 3$. Entoces

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y} &= \frac{\mathrm{d}(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x)}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}ye^{xy}}{\mathrm{d}y}\cos 2x - 2\frac{\mathrm{d}e^{xy}}{\mathrm{d}y}\operatorname{sen} 2x + 0\\ &= (e^{xy} + xye^{xy})\cos 2x - 2xye^{xy}\operatorname{sen} 2x\\ &= e^{xy}\cos 2x + xye^{xy}\cos 2x - 2xye^{xy}\operatorname{sen} 2x\end{aligned}$$

   Y

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}(xe^{xy}\cos 2x - 3)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}xe^{xy}\cos 2x}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}3}{\mathrm{d}x}\\ &= e^{xy}\cos 2x + x(ye^{xy}\cos 2x + e^{xy}(-\operatorname{sen} 2x)2) + 0\\ &= e^{xy}\cos 2x + x(ye^{xy}\cos 2x - 2ye^{xy}\operatorname{sen} 2x)\\ &= e^{xy}\cos 2x + xye^{xy}\cos 2x - 2xye^{xy}\operatorname{sen} 2x\\ &= \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}\end{aligned}$$

   Por lo que la ecuación es exacta. Esto es, que existe una $\phi(x, y)$ tal que $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = M$ y $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}y} = N$

   Para encontrar la primitiva, es más sencillo integrar N respecto a y.

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \int N dy = \int (xe^{xy}\cos 2x - 3)dy\\ &= \cos 2x \int xe^{xy}dy - \int 3dy = e^{xy}\cos 2x - 3y + g(x)\end{aligned}$$

   Y queda como incógnita $g(x)$, pero se puede obtener usando el hecho de que

M es la derivada respecto a x de la primitva

$$M = \frac{\mathrm{d}\phi(x,y)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(e^{xy}\cos 2x - 3y + g(x))}{\mathrm{d}x}$$
$$ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + g'(x)$$
$$\implies g'(x) = 2x \implies g(x) = \int 2xdx = x^2$$

Por lo que la primitiva sin incógnitas es

$$\phi(x,y) = e^{xy}\cos 2x - 3y + 2x$$

Luego, despejando y.

$$\implies e^{xy}\cos 2x = 3y - 2x$$
$$\implies e^{xy} = \frac{3y-2x}{\cos 2x}$$
$$\implies xy = ln(\frac{3y-2x}{\cos 2x})$$
$$\implies y = \frac{1}{x}ln(\frac{3y-2x}{\cos 2x})$$
$$\implies y = ln((\frac{3y-2x}{\cos 2x})^{x^{-1}})$$

Vemos que no se puede despejar, pero se pueden aproximar las soluciones.

f) $(t+2)\operatorname{sen} y + t\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$

Modificando la ecuación, tenemos que

$$\implies t\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -(t+2)\operatorname{sen} y$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{(t+2)\operatorname{sen} y}{t\cos y}$$
$$\implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{\frac{t+2}{t}}{\cot y}$$

Que es de la forma de una ecuación separable. Por lo que, para resolverla, hay que resolver

$$\implies \cot y dy = -(1+\frac{2}{t})dt$$
$$\implies \int \cot y dy = -\int (1+\frac{2}{t})dt$$
$$\implies ln|\sin y| = -(t+2ln|t|)+C$$
$$\implies |\sin y| = Ce^{-(t+2ln|t|)}$$
$$\implies \sin y = \pm(Ce^{-(t+2ln|t|)})$$
$$\implies y = \arcsin\Big(\pm(Ce^{-(t+2ln|t|)})\Big)$$

$g)$ $\left(3t+\frac{6}{y}\right)+\left(\frac{t^2}{y}+3\frac{y}{t}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$

Primero, hay que multiplicar todo por ty.

$$(3t^2y+6t)+(t^3+3y^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$$

Entonces, con $M=3t^2y+6t$ y $N=t^3+3y^2$ se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}y}=3t^2=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$$

Por lo que la ecuación es exacta, esto es que existe una ϕ primitiva de M y N
Luego, integrando M respecto a t.

$$\int M dt = \int (3t^2y+6t)dt = t^3y+3t^2+g(y)$$

Integrando N respecto a y.

$$\int N dy = \int (t^3+3y^2)dt = t^3y+y^3+h(t)$$

Por lo que la forma de la expresión sin incógnitas es

$$\phi(y,t)=t^3y+y^3+3t^2$$

Luego, despejando y

$$\begin{aligned}
&\implies y = -\frac{y^3 + 3t^2}{t^3} \\
&\implies y + \frac{y^3}{t^3} = \frac{3}{t} \\
&\implies y + \frac{y^3}{t^3} - \frac{3}{t} = 0 \\
&\implies y^3 + yt^3 - 3t^2 = 0
\end{aligned}$$

Que está en la forma de una ecuación cúbica deprimida que, por la fórmula de Cardano, tiene solución real

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt[3]{-\frac{-3t^2}{2} + \sqrt{\frac{(-3t^2)^2}{4} + \frac{(t^3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{-3t^2}{2} - \sqrt{\frac{(-3t^2)^2}{4} + \frac{(t^3)^3}{27}}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} + \sqrt{\frac{9t^4}{4} + \frac{t^9}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} - \sqrt{\frac{9t^4}{4} + \frac{t^9}{27}}}
\end{aligned}$$

2. Hallar todas las funciones $g(t)$ que hacen que la ecuación diferencial

$$y^2 \operatorname{sen} t + y g(t) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$

sea exacta.

Supongamos que la ecuación dada es exacta.

Sea $M(t, y) = y^2 \operatorname{sen} t$ y sea $N(t, y) = y g(t)$. Como la ecuación diferencial es exacta, entonces se cumple que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$, es decir

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} t = y g'(t) = \frac{\partial N}{\partial t}$$

Entonces

$$g'(t) = 2 \operatorname{sen} t$$

$$g(t) = \int 2 \operatorname{sen} t \mathrm{d}t = -2 \cos t + h(y)$$

Para que la ecuación diferencial pueda resolverse es necesario que la función g sólo dependa de una variable, ya estaba establecida la dependencia con la variable t, por lo que $h(y) = C$.

Por lo que la familia de funciones $g(t) = -2 \cos t + C$ hacen que la ecuación diferencial sea exacta.

3. Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y/t)$$

se pueden resolver si se hace el cambio de variable $v = y/t$. Mostrar que la ecuación toma la forma

$$t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = f(v).$$

Usar este método para resolver

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{t+y}{t-y}.$$

Sea $v = y/t$, entonces $y = vt$ y podemos hacer un cambio de variable

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= f(y/t) \\
\frac{\mathrm{d}(vt)}{\mathrm{d}t} &= f(v) \\
v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= f(v) \\
t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v &= f(v)
\end{aligned}$$

Ahora, para resolver la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{t+y}{t-y}$ hacemos el cambio de variable $v = y/t$, o bien, $y = vt$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(vt)}{\mathrm{d}t} &= \frac{1+vt}{1-vt} \\
v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} + t\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{t(1+v)}{t(1-v)} \\
v + tv' &= \frac{1+v}{1-v} \\
tv' &= \frac{1+v}{1-v} - v \\
tv' &= \frac{1+v^2}{1-v} \\
\frac{1-v}{1+v^2}v' &= \frac{1}{t}
\end{aligned}$$

Sea $F(v)$ tal que $F'(v) = \frac{1-v}{1+v^2}$ entonces $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}F(v(t))}t = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1-v}{1+v^2}v'$, integramos respecto de t de ambos lados

$$\int \frac{\mathrm{d}F(v)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$\int \frac{1-v}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \ln|t| + C$$

$$\int \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v - \int \frac{v}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \ln|t| + C$$

$$\tan^{-1} v - \frac{1}{2}\ln\left|1+v^2\right| = \ln|t| + C$$

No es posible despejar a la v, por lo que sólo resta revertir el cambio de variable

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{t}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y}{t}\right)^2\right| = \ln|t| + C$$

4. Una población crece de acuerdo a la ley logística, y tiene un límite de 5×10^8 individuos. Cuando la población es baja se duplica cada 40 minutos. ¿Qué valor tendrá la población después de dos horas si inicialmente era de *a*) 10^8 individuos y *b*) 10^9 individuos?

La ley logística nos dice que

$$P(t) = \frac{P_0 a}{P_0 b + (a - P_0 b)e^{-a(t-t_0)}}$$

donde $\frac{a}{b} = 5 \times 10^8$ marca el límite o estabilidad poblacional, P_0 es la población inicial, t_0 es el tiempo inicial (que en este caso lo consideraremos $t_0 = 0$).

Cuando la población es baja utilizamos la ecuación logística $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = KP_0$ cuya solución es $P(t) = (P_0)e^{at}$. Utilizaremos esta información para encontrar el valor de a y eventualmente el de b.

a) Si $P_0 = 10^8$ y sabemos que $P(40) = 2 \times 10^8 = 10^8 e^{a(40)}$. Despejando a la a

$$\begin{aligned} 2 &= e^{40a} \\ \ln 2 &= 40a \\ a &= \frac{\ln 2}{40} \\ a &\approx 0.01733 \end{aligned}$$

Por el límite de población, tenemos que $\frac{a}{b} = 5 \times 10^8$, ahora que tenemos a podemos encontrar b

$$\begin{aligned} b &= \frac{a}{5 \times 10^8} \\ b &= \frac{\frac{\ln 2}{40}}{5 \times 10^8} \\ b &= \frac{\ln 2}{200 \times 10^8} \\ b &\approx 34.65 \times 10^{-12} \end{aligned}$$

Ya que tenemos todo lo que necesitamos, podemos aplicar la ecuación logística inicial, con el tiempo en minutos (para simplificar la notación se han dejado los valores de a y de b expresado con sus literales):

$$\begin{aligned}
P(120) &= \frac{a \times 10^8}{b \times 10^8 + (a - b \times 10^8)e^{-a(120-0)}} \\
&\approx \frac{1732867.95}{0.003465 + (0.01386)e^{-0.01733(120)}} \\
&\approx 333'333'333.33 \\
&\approx 3.3333 \times 10^8 \text{ individuos.}
\end{aligned}$$

b) Ahora si $P_0 = 10^9$ individuos procedemos de manera análoga.

$$\begin{aligned}
P(40) = 2 \times \cancel{10^9} &= \cancel{10^9} e^{a(40)} \\
2 &= e^{40a}
\end{aligned}$$

Por lo que los valores de a y de b no dependen de la población inicial y son los mismos que en inciso anterior.
Aplicando la ecuación logística

$$\begin{aligned}
P(120) &= \frac{a \times 10^9}{b \times 10^9 + (a - b \times 10^9)e^{-a(120-0)}} \\
&\approx \frac{17328679.514}{0.03465 + (-0.01732)e^{-0.01733(120)}} \\
&\approx 533'333'333.33 \\
&\approx 5.3333 \times 10^8 \text{ individuos.}
\end{aligned}$$

Notemos que en este caso la población supera el límite poblacional que era de 5×10^8, esto puede deberse a que consideramos la población inicial de 10^9 como "baja" cuando en realidad no hay un criterio adecuado para determinar cuando la población es considerada como "baja". Sin embargo al aplicar la ecuación logística para tiempos más grandes podemos notar que la población se estabiliza hacia su límite, por ejemplo $P(240) \approx 5.04 \times 10^8$ individuos.