

Matemáticas para las ciencias aplicadas IV

Tarea 1

Careaga Carrillo Juan Manuel

Quiróz Castañeda Edgar

Soto Corderi Sandra del Mar

13 de marzo de 2019

1. Resolver las ecuaciones diferenciales

- a) $\frac{dy}{dt} + \sqrt{1+t^2}e^{-t}y = 0$ con $y(0) = 1$
- b) $\frac{dy}{dt} + \frac{t}{1-t^2}y = 1 - \frac{t^3}{1+t^4}y$. Graficar algunas soluciones.
- c) $\cos y \frac{dy}{dt} = \frac{-t \operatorname{sen} y}{1+t^2}$ con $y(1) = \frac{\pi}{2}$
- d) $\frac{dy}{dt} = 1 - t + y^2 - ty^2$. Graficar algunas soluciones.
- e) $ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x + (xe^{xy} \cos 2x - 3)\frac{dy}{dx} = 0$

Consideremos $M = ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x$ y $N = xe^{xy} \cos 2x - 3$.
Entonces

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dy} &= \frac{d(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \operatorname{sen} 2x + 2x)}{dy} = \frac{dye^{xy}}{dy} \cos 2x - 2 \frac{de^{xy}}{dy} \operatorname{sen} 2x + 0 \\ &= (e^{xy} + xye^{xy}) \cos 2x - 2xye^{xy} \operatorname{sen} 2x \\ &= e^{xy} \cos 2x + xye^{xy} \cos 2x - 2xye^{xy} \operatorname{sen} 2x\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dx} &= \frac{d(xe^{xy} \cos 2x - 3)}{dx} = \frac{dxe^{xy} \cos 2x}{dx} - \frac{d3}{dx} \\ &= e^{xy} \cos 2x + x(ye^{xy} \cos 2x + e^{xy}(-\operatorname{sen} 2x)2) + 0 \\ &= e^{xy} \cos 2x + x(ye^{xy} \cos 2x - 2ye^{xy} \operatorname{sen} 2x) \\ &= e^{xy} \cos 2x + xye^{xy} \cos 2x - 2xye^{xy} \operatorname{sen} 2x \\ &= \frac{dM}{dy}\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación es exacta. Esto es, que existe una $\phi(x, y)$ tal que $\frac{d\phi}{dx} = M$ y $\frac{d\phi}{dy} = N$

Para encontrar la primitiva, es más sencillo integrar N respecto a y .

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \int N dy = \int (xe^{xy} \cos 2x - 3) dy \\ &= \cos 2x \int xe^{xy} dy - \int 3 dy = e^{xy} \cos 2x - 3y + g(x)\end{aligned}$$

Y queda como incógnita $g(x)$, pero se puede obtener usando el hecho de que

M es la derivada respecto a x de la primitiva

$$M = \frac{d\phi(x, y)}{dx} = \frac{d(e^{xy} \cos 2x - 3y + g(x))}{dx}$$

$$ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x = ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + g'(x)$$

$$\implies g'(x) = 2x \implies g(x) = \int 2x dx = x^2$$

Por lo que la primitiva sin incógnitas es

$$\phi(x, y) = e^{xy} \cos 2x - 3y + 2x$$

Luego, despejando y .

$$\implies e^{xy} \cos 2x = 3y - 2x$$

$$\implies e^{xy} = \frac{3y - 2x}{\cos 2x}$$

$$\implies xy = \ln\left(\frac{3y - 2x}{\cos 2x}\right)$$

$$\implies y = \frac{1}{x} \ln\left(\frac{3y - 2x}{\cos 2x}\right)$$

$$\implies y = \ln\left(\left(\frac{3y - 2x}{\cos 2x}\right)^{x^{-1}}\right)$$

Vemos que no se puede despejar, pero se pueden aproximar las soluciones.

$$f) (t + 2) \sin y + t \cos y \frac{dy}{dt} = 0$$

Modificando la ecuación, tenemos que

$$\implies t \cos y \frac{dy}{dt} = -(t + 2) \sin y$$

$$\implies \frac{dy}{dt} = -\frac{(t + 2) \sin y}{t \cos y}$$

$$\implies \frac{dy}{dt} = -\frac{\frac{t+2}{t}}{\cot y}$$

Que es de la forma de una ecuación separable. Por lo que, para resolverla, hay

que resolver

$$\begin{aligned}\implies \cot y dy &= -\left(1 + \frac{2}{t}\right)dt \\ \implies \int \cot y dy &= -\int \left(1 + \frac{2}{t}\right)dt \\ \implies \ln|\sin y| &= -(t + 2\ln|t|) + C \\ \implies |\sin y| &= Ce^{-(t+2\ln|t|)} \\ \implies \sin y &= \pm(Ce^{-(t+2\ln|t|)}) \\ \implies y &= \arcsin\left(\pm(Ce^{-(t+2\ln|t|)})\right)\end{aligned}$$

$$g) \left(3t + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{t^2}{y} + 3\frac{y}{t}\right) \frac{dy}{dt} = 0$$

Primero, hay que multiplicar todo por ty .

$$(3t^2y + 6t) + (t^3 + 3y^2) \frac{dy}{dt} = 0$$

Entonces, con $M = 3t^2y + 6t$ y $N = t^3 + 3y^2$ se tiene que

$$\frac{dM}{dy} = 3t^2 = \frac{dN}{dt}$$

Por lo que la ecuación es exacta, esto es que existe una ϕ primitiva de M y N . Luego, integrando M respecto a t .

$$\int M dt = \int (3t^2y + 6t) dt = t^3y + 3t^2 + g(y)$$

Integrando N respecto a y .

$$\int N dy = \int (t^3 + 3y^2) dy = t^3y + y^3 + h(t)$$

Por lo que la forma de la expresión sin incógnitas es

$$\phi(y, t) = t^3y + y^3 + 3t^2$$

Luego, despejando y

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= -\frac{y^3 + 3t^2}{t^3} \\ \Rightarrow y + \frac{y^3}{t^3} &= \frac{3}{t} \\ \Rightarrow y + \frac{y^3}{t^3} - \frac{3}{t} &= 0 \\ \Rightarrow y^3 + yt^3 - 3t^2 &= 0 \end{aligned}$$

Que está en la forma de una ecuación cúbica deprimida que, por la fórmula de Cardano, tiene solución real

$$\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{-\frac{3t^2}{2} + \sqrt{\frac{(-3t^2)^2}{4} + \frac{(t^3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{3t^2}{2} - \sqrt{\frac{(-3t^2)^2}{4} + \frac{(t^3)^3}{27}}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} + \sqrt{\frac{9t^4}{4} + \frac{t^9}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{3t^2}{2} - \sqrt{\frac{9t^4}{4} + \frac{t^9}{27}}} \end{aligned}$$

2. Hallar todas las funciones $g(t)$ que hacen que la ecuación diferencial

$$y^2 \sin t + yg(t) \frac{dy}{dt} = 0$$

sea exacta.

3. Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y/t)$$

se pueden resolver si se hace el cambio de variable $v = y/t$. Mostrar que la ecuación toma la forma

$$t \frac{dv}{dt} + v = f(v).$$

Usar este método para resolver

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t + y}{t - y}.$$

4. Una población crece de acuerdo a la ley logística, y tiene un límite de 5×10^8 individuos. Cuando la población es baja se suplica cada 40 minutos. ¿Qué valor tendrá la población después de dos horas si inicialmente era de a) 10^8 individuos y b) 10^9 individuos?