

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Nejc Zajc

Enakostranični trikotniki in Jordanove krivulje

Delo diplomskega seminarja

Mentor: izred. prof. dr. Aleš Vavpetič

Ljubljana, 2022

KAZALO

1. Uvod	4
2. Osnove	4
2.1. Terminologija	4
2.2. Začetni problem	5
3. Presečno število	7
3.1. Rotacija krivulje in presečno število	11
4. Dognanja v ravnini	13
4.1. Glavni izrek	13
4.2. Posledice	15
5. Prostori višjih dimenzij	16
6. Včrtani štirikotniki	19
6.1. Včrtani pravokotnik	20
Slovar strokovnih izrazov	21
Literatura	21

Enakostranični trikotniki in Jordanove krivulje

POVZETEK

Povzetek bo tu

Equilateral triangles and continuous curves

ABSTRACT

Abstract goes here

Math. Subj. Class. (2020):

Ključne besede:

Keywords:

1. UVOD

Že več kot stoletje se matematiki ukvarjajo z na videz preprostim vprašanjem – ali na vsaki Jordanovi krivulji obstajajo oglišča kvadrata. Ta problem je preprost v formulaciji in hitro razumljiv, a je vseeno do danes ostal nerešen. Prvi ga je leta 1911 postavil nemški matematik Otto Toeplitz [4] in v letih, ki so sledila, so matematiki prišli do različnih delnih rezultatov. Podrobno so se raziskala tudi podobna vprašanja, kot na primer iskanje trikotnikov in drugih objektov na Jordanovih krivuljah. V diplomski nalogi si bomo ogledali rezultate pri iskanju trikotnikov in kako smo do njih prišli.

2. OSNOVE

Za začetek ponovimo in vpeljimo nekatere pojme, ki jih bomo uporabljali pri raziskovanju teme.

2.1. Terminologija. Tekom naloge bomo pogosto iskali točke, ki tvorijo oglišča enakostraničnega trikotnika. To lastnost točk x , y in z bomo na krajše zapisali kot $xyz \sim \triangle$. Nadalje bomo za točko $x \in X$ rekli, da je *ogliščna točka* danega objekta X , če obstajata taki točki y in $z \in X$, da $xyz \sim \triangle$.

Ker si bomo natančneje ogledali dogajanje v ravnini, ponovimo definicijo Jordanove krivulje.

Definicija 2.1. *Jordanova krivulja* je sklenjena ravninska krivulja brez samopresečišč. Dobimo jo kot sliko vložitve $f: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$.

Glavni izrek glede Jordanovih krivulj je Jordanov izrek.

Izrek 2.2 (Jordanov izrek). *Naj bo J Jordanova krivulja v ravnini \mathbb{R}^2 . Komplement krivulje $\mathbb{R} \setminus J$ sestavlja natanko dve komponenti za povezanost. Ena je omejena in ena neomejena. Krivulja J je meja obeh komponent.*

Dokaz izreka lahko najdemo v viru [5]. Za Jordanovo krivuljo J v ravnini bomo omejeni komponenti za povezanost $\mathbb{R} \setminus J$ v nalogi rekli *notranjost Jordanove krivulje J* . Uporabljali bomo tudi pojem homotopnih preslikav, zato si oglejmo njihovo definicijo.

Definicija 2.3. Naj bosta X in Y podmnožici ravnine in $f, g: X \rightarrow Y$ zvezni funkciji. Homotopija med f in g je zvezna preslikava

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y,$$

za katero velja $H(x, 0) = f(x)$ in $H(x, 1) = g(x)$ za vse $x \in X$.

Za homotopijo rečemo, da miruje na robu, če za vsak $t \in [0, 1]$ in za vsako točko $x \in \partial X$ na robu množice X velja $H(x, t) = f(x) = g(x)$.

Definirajmo še strukturo, ki se bo izkazala za zelo pomembno pri obravnavi naše teme.

Definicija 2.4. *Trioda* je poljuben podprostor (v \mathbb{R}^2) homeomorfen črki T.

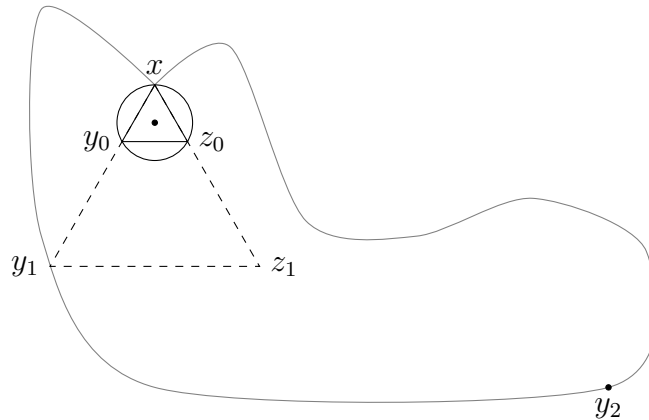
Ekvivalentno lahko triodo definiramo kot unijo treh lokov L_1 , L_2 in L_3 , ki jim pravimo kraki triode, in so paroma disjunktni z izjemo enega skupnega krajišča, v katerem se vsi trije stikajo. Temu krajišču pravimo stičišče krakov. Ostala označimo zaporedoma z e_1 , e_2 in e_3 ter jim pravimo končne točke triode. Za triodo rečemo, da je linearna, če so njeni kraki daljice.

2.2. Začetni problem. Po spoznanih pojmi si oglejmo izrek, ki nam poda odgovor na začetno vprašanje obstoja enakostraničnih trikotnikov na Jordanovi krivulji v ravnini.

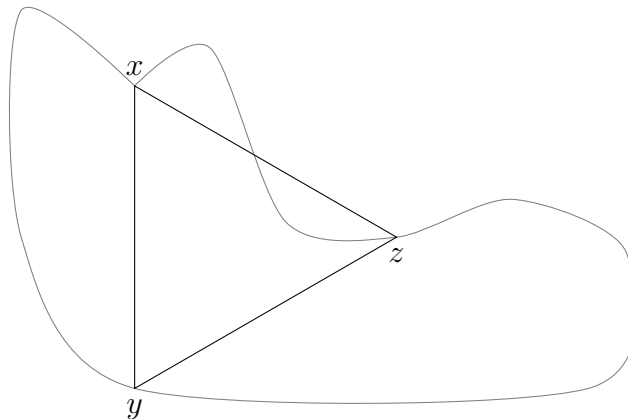
Izrek 2.5. *Vsaka Jordanova krivulja v ravnini vsebuje oglišča enakostraničnega trikotnika.*

Dokaz. Naj bo J poljubna Jordanova krivulja v ravnini in S poljubna točka v notranjosti J . Naj bo C krožnica z najmanjšim polmerom s središčem v S , ki se dotika J . Označimo z x točko v preseku $C \cap J$ ter naj bosta y_0 in z_0 taki točki na C , da $xy_0z_0 \sim \Delta$. Definiramo še spremenljivi točki y in z v ravnini, tako da za x , y in z vselej velja $xyz \sim \Delta$. Ko bomo torej premikali eno izmed y ali z , se bo premikala tudi druga, tako da se bo ohranjal enakostranični trikotnik xyz . Njuni začetni vrednosti definiramo kot y_0 in z_0 .

Sedaj pri fiksnem x začnemo povečevati polmer krožnice C s premikanjem središča vzdolž poltraka xS . Tako se y in z oddaljujeta od x . Postopek ustavimo, ko y ali z pristaneta na J in na tej točki označimo $y_1 = y$ ter $z_1 = z$. Brez škode za splošnost lahko rečemo $y \in J$. Za konec premaknemo y vzdolž J zvezno do točke y_2 , ki je točka na J , ki je od x najbolj oddaljena. Omenjene točke so označene na naslednji skici.



Ko se je y premikal od y_1 do y_2 je tudi z opisal zvezno pot od z_1 do z_2 . Velja, da je z_1 ležal na J ali v njegovi notranjosti. Ker sta y_2 ter z_2 enako oddaljeni od x , leži z_2 na J ali v neomejeni komponenti $\mathbb{R}^2 \setminus J$. Torej pot, ki jo je opisal z , v neki točki seka J . Tedaj velja $xyz \sim \Delta$.



□

Izrek nam zagotovi obstoj enakostraničnega trikotnika na ravninski Jordanovi krivulji. Koliko takšnih trikotnikov pa lahko najdemo? Naslednja posledica, katere dokaz sledi iz dokaza izreka 2.5, nam poda karakterizacijo ogliščnih točk Jordanove krivulje.

Posledica 2.6. *Naj bo J Jordanova krivulja v ravnini in $x \in J$. Točka x je ogliščna točka krivulje J natanko tedaj, ko obstajata točki y in z , ki ležita na J ali v njegovi notranjosti, tako da velja $xyz \sim \Delta$.*

Oglejmo si še posledico, ki si natančneje ogleda okolico opazovane točke na J .

Posledica 2.7. *Naj bo J Jordanova krivulja v ravnini in $x \in J$. Če obstaja tak krog K , da leži njegova notranjost \mathring{K} v notranjosti krivulje J in je $K \cap J = \{x\}$, je x ogliščna točka krivulje J .*

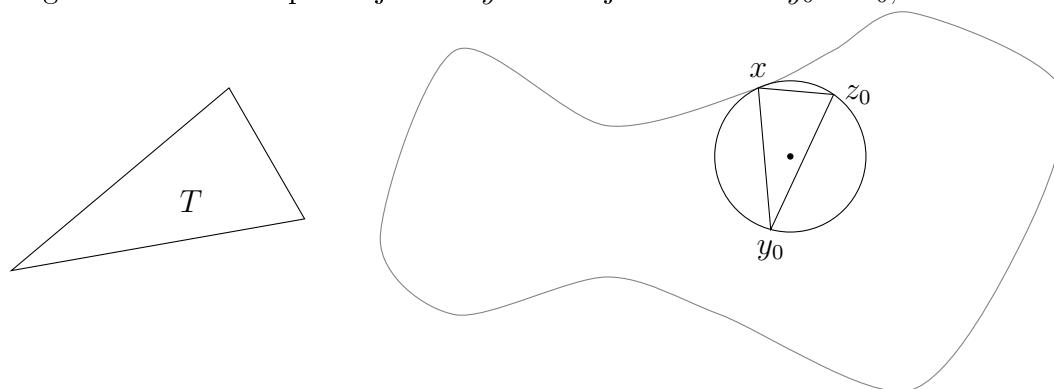
V posebnem je vsaka točka na gladki Jordanovi krivulji ogliščna.

Dokaz. Ker je \mathring{K} v notranjosti J , ležijo vse točke K v notranjosti J ali na J . Na krogu K izberemo točki y in z , da velja $xyz \sim \Delta$. Ti dve točki izpolnjujeta vse predpostavke posledice 2.6, zato je točka x ogliščna točka krivulje J . □

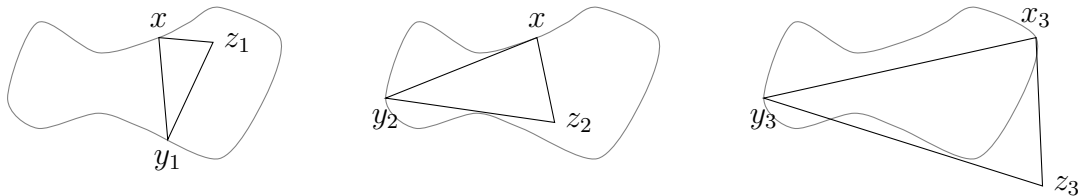
Preden se konkretnije poglobimo v iskanje enakostraničnih trikotnikov si pogledjmo še eno lastnost Jordanovih krivulj v ravnini. Velja namreč, da lahko za poljuben trikotnik v ravnini, na njih najdemo trikotnik, ki mu je podoben.

Trditev 2.8. *Naj bosta T poljuben trikotnik in J Jordanova krivulja v ravnini. Tedaj J vsebuje oglišča trikotnika, ki je podoben T .*

Dokaz. Postopek dokaza je podoben postopku dokaza izreka 2.5, zato ga še enkrat ponovimo in izpostavimo spremembe. Krožnico C in točko x definiramo kot prej, le da x skupaj s spremenljivima točkama y in z tokrat vselej tvori oglišča trikotnika podobnega T . Ta trikotnik naj bo obrnjen tako, da je njegov največji notranji kot pri oglišču x . Začetna položaja točk y in z naj bosta točki y_0 in z_0 , ki ležita na C .



Kot prej najprej povečujemo krožnico C v smeri poltraka xS dokler ne pristane eno oglišče trikotnika na J . Takrat označimo položaja y in z kot y_1 in z_1 . Definirajmo točki x_3 in y_2 kot točki na J , ki sta najbolj oddaljeni. Premaknimo vzdolž J zdaj y do y_2 in ob tej postavitvi trikotnika položaj z kot z_2 . Pri zadnjem premiku držimo položaj točke y in točko x vzdolž J premaknemo do x_3 . Končni položaj z označimo kot z_3 . Ti zaporedni premiki so prikazani na spodnji sliki.



Skupna pot točke z je tako sestavljena iz treh zveznih lokov $(z_0 - z_1 - z_2 - z_3)$. Ker je yz (ob koncu y_3z_3) najdaljša stranica trikotnika, po podobnem premisleku kot prej sledi, da mora z_3 ležati na J ali v neomejeni komponenti $\mathbb{R}^2 \setminus J$. Želeni rezultat sledi. \square

V tem razdelku smo videli konstruktivne dokaze za obstoj (enakostraničnih) trikotnikov na Jordanovih krivuljah. Da se lahko iskanja lotimo bolj sistematično, potrebujemo nekaj novih ravninskih pojmov in objektov.

3. PRESEČNO ŠTEVILO

Glavni nov pojem, ki ga potrebujemo za nadaljne delo, je pojem presečnega števila preslikav. Za dani preslikavi v ravnino, bi radi načrtno prešteli točke preseka njunih slik. S takšnim znanjem bomo kasneje lahko natančno povedali, kje bodo obstajali enakostranični trikotniki.

Naj bo $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ in naj bosta $f, g: I \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2$ taki preslikavi, da zadoščata pogoju

$$(1) \quad \{f(0), f(1)\} \cap g(I) = \emptyset \quad \text{in} \quad \{g(0), g(1)\} \cap f(I) = \emptyset.$$

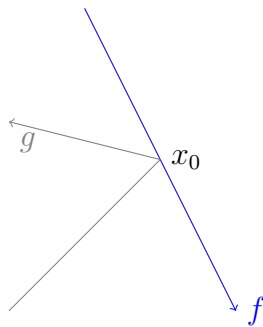
Pojem presečnega števila lahko dobro definiramo le za pare preslikav, ki ustrezajo (1), zato se omejimo na takšne.

Naj bosta za začetek f in g kosoma linearni preslikavi, ki ustrezata (1). Njuni sliki opremimo s standardno usmerjenostjo od slike vrednosti 0 do slike vrednosti 1. Ker se poljubni daljici sekata v kvečjemu eni komponenti, velja da je $f(I) \cap g(I)$ zaprta množica, ki vsebuje kvečjemu končno mnogo komponent za povezanost. Te komponente so lahko točke ali kosoma linearne krivulje. Presečno število preslikav bomo definirali kot vsoto presečnih števil komponent preseka njunih slik. V ta namen si najprej oglejmo, kako definiramo presečno število posamezne komponente.

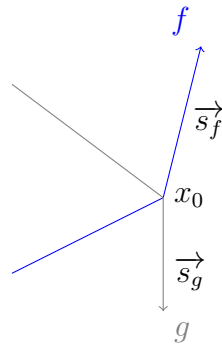
Naj bo $K \subset f(I) \cap g(I)$ komponenta za povezanost, za katero bomo definirali presečno število komponente in ga označili z $\text{ind}_K(f, g)$. Najprej denimo, da je K le točka, torej $K = \{x\}$ za nek x v ravnini. V primeru, ko je x točka nelinearnosti f ali g in se sliki preslikav v x ne prečkata, primer tega je prikazan na sliki 1, definiramo $\text{ind}_K(f, g) = 0$. Sicer označimo smerna vektorja slik preslikav f in g v točki x kot \vec{s}_f in \vec{s}_g , kar prikazuje slika 2. Kot presečno število komponente definiramo

$$\text{ind}_K(f, g) = \begin{cases} 1; & \vec{s}_f \text{ in } \vec{s}_g \text{ tvorita pozitivno orientirano bazo,} \\ -1; & \text{sicer.} \end{cases}$$

Druga možnost je, da velja $K \approx J$ za nek interval J . Tedaj velja $K = f([a, b])$, za $a, b \in (0, 1)$, $a < b$. Prav tako obstaja tak $\varepsilon > 0$, da sta preseka zaprtih krogel z unijo krivulj $K(f(a), \varepsilon) \cap (f(I) \cup g(I))$ in $K(f(b), \varepsilon) \cap (f(I) \cup g(I))$ linearni triodi s stičišči krakov v $f(a)$ oz. $f(b)$. Za določitev presečnega števila najprej preverimo, ali je prišlo do prečkanja preslikav. V ta namen zavrtimo daljico $\overline{f(a)f(a+\varepsilon)}$ v pozitivni smeri okrog $f(a)$ in daljico $\overline{f(b)f(b-\varepsilon)}$ v negativni smeri okrog $f(b)$, dokler se ne

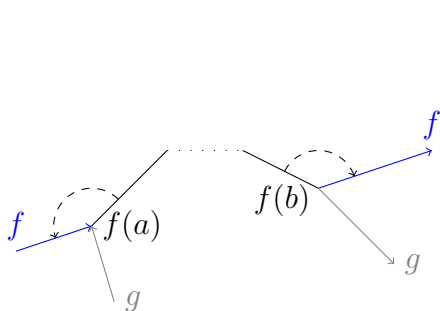


SLIKA 1. $\text{ind}_{\{x_0\}}(f, g) = 0$

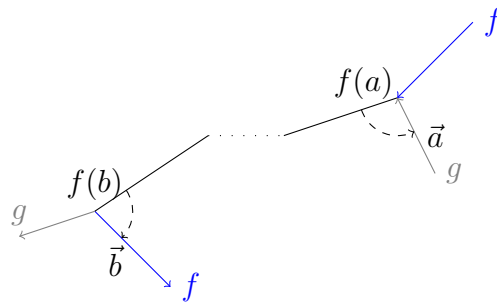


SLIKA 2. $\text{ind}_{\{x_0\}}(f, g) = -1$

prilegata sliki f ali g . Če se po koncu vrtenja obe zavrtene daljici prilegata sliki iste preslikave, kot na sliki 3, definiramo $\text{ind}_K(f, g) = 0$. Sicer nas zanima še relativna usmerjenost teh odsekov. Označimo končni legi zgornjih daljic z \bar{a} in \bar{b} . Vektorja, ki ju dobimo, ko jima dodamo smer slike f oziroma g na tem intervalu, označimo z \vec{a} in \vec{b} . To smo storili na sliki 4. Zanima nas, ali kažeta vektorja v komponento K ali iz nje. Presečno število komponente definiramo kot 1, če velja $\bar{a} \subset f(I)$ in sta usmerjenosti \vec{a} in \vec{b} glede na K različni ali pa velja $\bar{a} \subset g(I)$ in sta usmerjenosti \vec{a} in \vec{b} glede na K enaki. Sicer je presečno število komponente enako -1 .



SLIKA 3. $\text{ind}_K(f, g) = 0$



SLIKA 4. $\text{ind}_K(f, g) = -1$

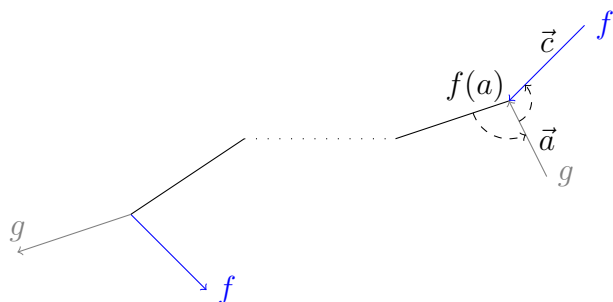
Tako smo definirali presečno število komponente. Preden nadaljujemo, opazimo še, da lahko v zadnjem primeru, ko je $K \approx J$ in $\text{ind}_K(f, g) \neq 0$ presečno število določimo kar z obravnavo usmerjenosti smernih vektorjev pri enem oglišču komponente K . Označimo kot zgoraj vektor \vec{a} , a zdaj nadaljujemo z vrtenjem v pozitivni smeri okrog $f(a)$, dokler se daljica spet ne prilega sliki f ali g . Dobljeni vektor, ki mu smer kot prej določimo glede na krivuljo, ki se ji prilega, označimo s \vec{c} . Ta primer prikazuje slika 5. Velja, da je $\text{ind}_K(f, g)$ enako 1, če je $\bar{a} \subset f(I)$ in sta usmerjenosti \vec{a} in \vec{c} glede na K enaki ali pa je $\bar{a} \subset g(I)$ in sta usmerjenosti \vec{a} in \vec{c} glede na K različni. Sicer je presečno število enako -1 .

Kot presečno število kosoma linearnih preslikav lahko zdaj definiramo

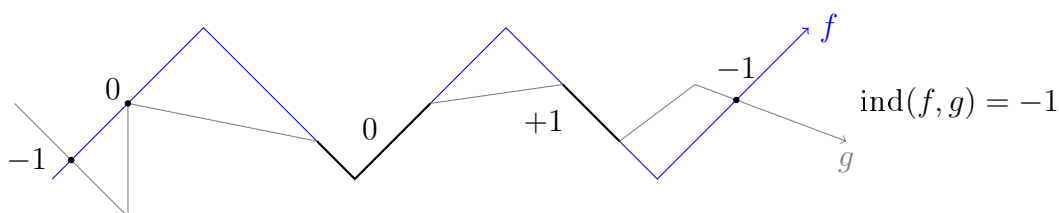
$$\text{ind}(f, g) = \sum_{K \text{ komponenta}} \text{ind}_K(f, g).$$

Primer vidimo na sliki 6.

Poglejmo si naslednjo lemo, ki bo omogočala lažjo obravnavo presečnega števila.

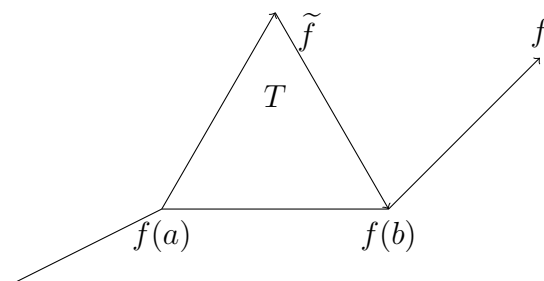


SLIKA 5. Računanje $\text{ind}_K(f, g)$ ob enem oglišču



SLIKA 6. Primer izračuna presečnega števila

Lema 3.1. Naj bosta f in \tilde{f} kosoma linearni preslikavi in naj se razlikujeta le na intervalu (a, b) , kjer sta $a, b \in (0, 1)$, $a < b$. Na tem intervalu naj bo f linearna, sliko \tilde{f} pa naj sestavljata le dve daljici. Če leži trikotnik med omenjenimi daljicami v celoti znotraj $X \setminus \{g(0), g(1)\}$, je $\text{ind}(f, g) = \text{ind}(\tilde{f}, g)$.



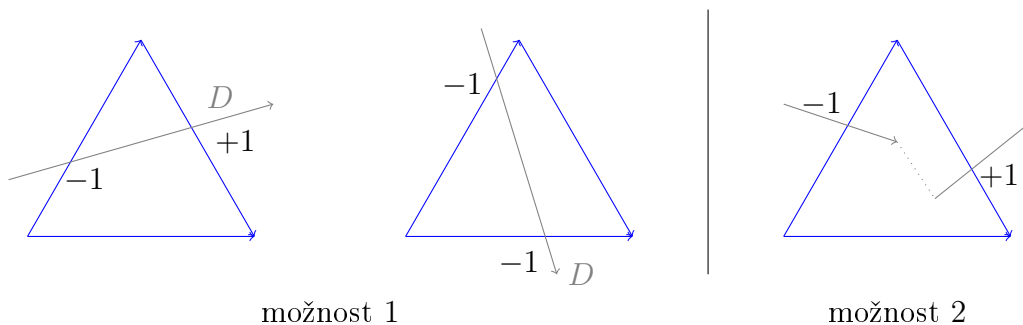
SLIKA 7. Skica leme 3.1

Dokaz. Označimo omenjeni trikotnik s T . Dovolj je gledati preseke slik f , \tilde{f} in g na območju T , saj se drugje f in \tilde{f} ujemata. Ker je tudi g kosoma linearna, si najprej pogledamo kako lahko usmerjena daljica D , ki seka T , vpliva na presečni števili. Kot prikazuje spodnja slika sta možnosti naslednji.

Lahko sta začetna in končna točka D zunaj T . Tedaj D bodisi seka dvakrat sliko \tilde{f} in nikoli slike f bodisi vsako po enkrat. A ker ima daljica D konstantno smer, prav tako pa sta sliki f in \tilde{f} enako usmerjeni, se v prvem primeru spremembi presečnega števila \tilde{f} in g izničita, v drugem pa sta spremembi obeh presečnih števil enaki (+1 ali -1).

Druga možnost je, da daljica D začne zunaj T , konča pa znotraj. Tedaj mora po predpostavki obstajati neka druga daljica, skozi katero slika g zapusti T . Če ga zapusti skozi sliki iste preslikave, kot je vanj vstopila, se spremembi izničita

zaradi nasprotnih usmerjenosti slike g . Sicer ga zapusti skozi sliko druge preslikave in spremembi sta zaradi enake usmerjenosti slik f in \tilde{f} enaki. Spremembi obeh presečnih števil sta torej zopet enaki.



Lahko se zgodi, da slika preslikave g večkrat seka trikotnik T , a presečišča si bodo, če se premikamo po sliki g , vselej pojavljala v zgoraj opisanih parih. Ker vsak tak par ohrani enakost presečnih števil, bosta števili ostali enaki tudi po obravnavi vseh presečišč.

Ostane obravnavati primer, ko se slika g ujema s katero krivuljo v kosoma linearnem odseku. Če ta odsek ne vključuje niti $f(a)$ niti $f(b)$, je njegov vpliv na presečni števili podoben že obravnavanim primerom in ima tako enaki spremembi za obe. V primeru, da sta tako $f(a)$ kot $f(b)$ del skupnega odseka, sprememb presečnih števil na območju trikotnika T ni in tako trditev leme zopet velja. Zadnja možnost, ko je le ena izmed $f(a)$ in $f(b)$ del skupnega odseka, potrebuje nadaljno ločitev primerov. Ti primeri so podobni že opisanim in vsi vodijo do želene trditve, da sta spremembi obeh presečnih števil na območju trikotnika T enaki. \square

S pomočjo leme 3.1 lahko dokažemo naslednjo ključno trditev glede dobre definiraniosti presečnega števila.

Trditev 3.2. Če obstaja kosoma linearna homotopija $H: I \times I \rightarrow X \setminus \{g(0), g(1)\}$ med kosoma linearnima preslikavama f in \tilde{f} , ki miruje na robu, je $\text{ind}(f, g) = \text{ind}(\tilde{f}, g)$.

Dokaz. Naj bo H homotopija med kosoma linearnima f in \tilde{f} , za katero veljajo predpostavke trditve. Označimo s $S \subset X$ območje v ravnini, omejeno s krivuljama $f(I)$ in $\tilde{f}(I)$, za katerega velja $\{g(0), g(1)\} \cap S = \emptyset$. Ker je H kosoma linearna, velja, da lahko S razdelimo na končno število trikotnikov – med katerimi so lahko nekateri degenerirani – v katere slika H linearno.

Definiramo lahko zaporedje preslikav, ki slikajo v S , in jih dobimo pri homotopiji med f in \tilde{f} . Začnemo s $f_0 = f$. Nadaljujemo s f_1 , ki jo dobimo tako, da si izberemo poljuben trikotnik v S , ki ima eno izmed stranic na sliki f_0 in nato del preslikave f_0 , ki slika v to stranico, zamenjamo s preslikavo, ki slika isti interval v ostali dve stranici izbranega trikotnika. Tako spremenjeno f_0 označimo s f_1 . Za izbrani trikotnik rečemo, da je že bil uporabljen. Induktivno nato definiramo f_{k+1} iz f_k s spremembo dela preslikave preko enega, še ne uporabljenega trikotnika. Po končnem številu korakov pridemo za nek $N \in \mathbb{N}$ do preslikave $f_N = \tilde{f}$, kjer postopek ustavimo.

Sedaj uporabimo lemo 3.1, ki nam pove, da sta presečni števili $\text{ind}(f_i, g)$ in $\text{ind}(f_{i-1}, g)$ enaki za poljuben $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, saj za vse trikotnike T iz S velja $\{g(0), g(1)\} \cap T = \emptyset$. To pomeni, da se presečno število pri prehodih med preslikavami v zaporedju ohranja. Zato velja $\text{ind}(f, g) = \text{ind}(\tilde{f}, g)$. \square

Zdaj lahko sklepamo naslednje. Naj bosta f in \tilde{f} taki kosoma linearni preslikavi, da med njima obstaja homotopija H , ki miruje na robu in slika v $X \setminus \{g(0), g(1)\}$. Tedaj velja $\text{ind}(f, g) = \text{ind}(\tilde{f}, g)$, saj lahko H po izreku o simplicialni aproksimaciji [1] aproksimiramo s kosoma linearno homotopijo, za katero zdaj vemo, da ohranja presečno število.

V splošnem lahko torej definiramo presečno število na naslednji način. Naj bosta $f, g: I \rightarrow X$ poljubni ravninski preslikavi, ki ustrezata pogoju (1). Tedaj obstajata

$$\begin{aligned}\tilde{f} &\simeq f: I \rightarrow X \setminus \{g(0), g(1)\} \quad \text{in} \\ \tilde{g} &\simeq g: I \rightarrow X \setminus \{f(0), f(1)\}\end{aligned}$$

kosoma linearni preslikavi, katerih homotopiji s f in g mirujeta na robu. Presečno število preslikav f in g definiramo kot $\text{ind}(f, g) := \text{ind}(\tilde{f}, \tilde{g})$. Po vsem prej pokazanem je presečno število dobro definirano, saj se pri prehajanju med homotopnimi kosoma linearnimi preslikavami ohranja.

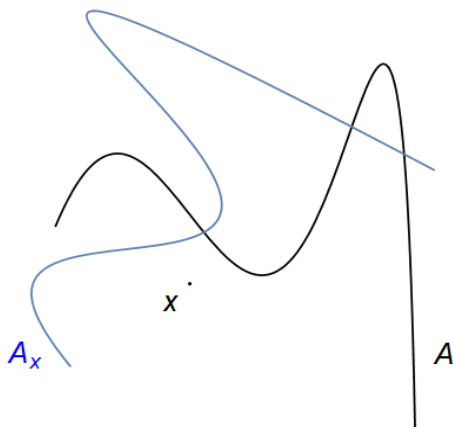
Tekom naloge bomo presečno število uporabljali tudi na parih usmerjenih krivulj. Za krivulji A in B izberemo regularni parametrizaciji $f_A: I \rightarrow A$ in $f_B: I \rightarrow B$, ki slikata vrednost 0 v začetni točki krivulj. Za presečno število krivulj definiramo $\text{ind}(A, B) := \text{ind}(f_A, f_B)$.

3.1. Rotacija krivulje in presečno število. Uporabimo sedaj presečno število v okviru tem diplomske naloge. Najprej si pogledjmo rotacijo ravninske krivulje okrog poljubne točke.

Za lažji zapis in računanje, si v tem razdelku ravnino predstavljamo kot kompleksno ravnino. Naj bosta krivulja $A \subset \mathbb{C}$ in $x \in \mathbb{C}$ poljubna. Definiramo A_x kot rotacijo krivulje A okrog x za kot $\pi/3$, natančneje

$$A_x = \{y \in \mathbb{C} \mid \exists z \in A : y = k(z - x) + x\},$$

kjer je $k = e^{i\pi/3}$. Primer rotacije prikazuje slika 8. Če je A orientiran lok, A_x orientiramo tako, da je začetna točka loka A_x slika začetne točke loka A pri rotaciji.



SLIKA 8. Primer rotacije loka v ravnini

Naj bo A orientiran lok v kompleksni ravnini $\partial A = \{a_1, a_2\}$ pa njegovi oglišči. Za $x \in \mathbb{C}$ je $\text{ind}(A, A_x)$ dobro definirano, če je $\partial A \cap A_x = \emptyset = A \cap (\partial A)_x$. Označimo območje, kjer ta pogoj velja, z $D_A \subset \mathbb{C}$. Dokažimo še naslednjo lemo, v kateri presečno število $\text{ind}(A, A_x)$ obravnavamo kot funkcijo točke $x \in D_A$ okoli katere zavrtimo A , torej $\text{ind}(A, A_x): D_A \rightarrow \mathbb{Z}$.

- Lema 3.3.** (1) *Presečno število $\text{ind}(A, A_x)$ je zvezna funkcija v x .*
(2) *Če je $x \in \mathbb{C} \setminus D_A$, obstaja tak $y \in A$, da $xya_i \sim \Delta$ za $i \in \{1, 2\}$.*
(3) *Če ne obstajata taka y in $z \in A$, da $xyz \sim \Delta$, sta A in A_x disjunktna in zato je $\text{ind}(A, A_x) = 0$.*
(4) *Naj bo $B \subset A$ lok z isto orientacijo kot A , za katerega velja $(A \setminus B) \cap A_x = \emptyset$ in $(A_x \setminus B_x) \cap A = \emptyset$. Če sta $\text{ind}(A, A_x)$ in $\text{ind}(B, B_x)$ definirana, sta enaka.*
(5) *Če je S daljica in $x \in S$, $x \notin \partial S$, velja $\text{ind}(S, S_x) \neq 0$.*

Dokaz. Vsako točko leme dokažemo posebej, pri dokazu pa bomo uporabili lastnost, da je presečno število dobro definirano preko kosoma linearnih aproksimacij krivulj. Tako lahko dokaz naredimo le za kosoma linearna A in A_x .

(1) Zveznost je lokalna lastnost, zato nas zanimajo le možne spremembe pri majhnih spremembah točke x . Pokažimo, da se pri takih dogodkih presečno število ne bo spremenilo. Edini položaj krivulj, kjer lahko pri majhnih spremembah točke x , kakšna točka preseka izgine ali nastane je, da se krivulji sekata v točki z_0 nelinearnosti ene izmed krivulj ter se v tej točki ne prečkata. V tem primeru je $\text{ind}_{\{z_0\}}(A, A_x) = 0$. Po tresljaju točke x se lahko zgodi, da v okolici z_0 ne bo več nobene točke preseka, kar pomeni, da se presečno število ni spremenilo. Lahko pa v okolici z_0 nastane med krivuljama trikotnik. Tako obstajata zdaj dve točki preseka, a ker je relativna smer krivulje, ki predstavlja dve stranici trikotnika, na drugo krivuljo v obeh presečiščih različna, imata presečni števili obeh presečišč različna predznaka. Ko ju seštejemo se torej izničita. Tako smo pokazali, da je pri dovolj majhnih tresljajih točke x presečno število konstantno. Zato je število $\text{ind}(A, A_x)$ kot funkcija x zvezna.

(2) V primeru, da je presečno število nedefinirano imamo dve možnosti. Za nek $i \in \{1, 2\}$ je lahko:

- $a_i \in \partial A \cap A_x$. Ker je rotacija $(\cdot)_x$ injektivna, obstaja enoličen $\alpha \in A$, da je $\alpha_x = a_i$. Tedaj velja $a_i x \alpha \sim \Delta$.
- $(a_i)_x \in A \cap (\partial A)_x$. Tokrat obstaja $\alpha \in A$, da $\alpha = (a_i)_x$. Zopet velja $a_i x \alpha \sim \Delta$.

(3) To točko dokažemo z dokazom obratne implikacije. Denimo, da A in A_x nista disjunktna. Označimo $\alpha \in A \cap A_x$ poljubno točko iz preseka. Tedaj je $\alpha \in A$ in obstaja $\gamma \in A$, da velja $\gamma_x = \alpha$. Pri teh oznakah velja $\alpha x \gamma \sim \Delta$.

(4) Ker je presečno število krivulj A in A_x definirano kot vsota presečnih števil komponent njunega preseka in so vse te vsebovane v B , velja $\text{ind}(A, A_x) = \text{ind}(B, B_x)$.

(5) Ker je S daljica, se S in S_x sekata le v točki x . Ker se v tej točki daljici prečkata, po definiciji presečnega števila komponente sklepamo, da velja $\text{ind}_{\{x\}}(S, S_x) \neq 0$. To je tudi edina komponenta preseka, zato je $\text{ind}(S, S_x) = \text{ind}_{\{x\}}(S, S_x) \neq 0$. \square

4. DOGNANJA V RAVNINI

V prejšnjih poglavjih smo spoznali pojme, ki nam bodo sedaj v pomoč pri natančnem odkrivanju dogajanja v ravnini. Izkaže se, da lahko v tem okolju na krivuljah najdemo mnogo trikotnikov. Poglejmo si natančnejše ugotovitve in kako pridemo do njih.

4.1. Glavni izrek. Vemo že, da lahko na poljubni Jordanovi krivulji v ravnini najdemo enakostraničen trikotnik. Prav tako smo spoznali karakterizacijo ogliščnih točk take krivulje. A ne znamo še povedati, koliko takšnih točk bo krivulja z gotovostjo imela. Pri odgovoru na to vprašanje bo pomagal naslednji izrek, ki sicer ne govori o Jordanovih krivuljah, ampak o enakostraničnih trikotnikih na ravninskih triadah.

Izrek 4.1. *Trioda T v ravnini vsebuje oglišča enakostraničnega trikotnika, ki ima za eno izmed oglišč končno točko triode e_1 , e_2 ali e_3 .*

Triodo T bomo v tem poglavju pogosto omenjali, zato z L_1 , L_2 in L_3 označimo še njene krake, s P pa stičišče teh krakov. Pri dokazu izreka si bomo pomagali z dvema lemapa. In sicer z lemo 3.3, ki smo jo že spoznali, in z naslednjo lemo.

Lema 4.2. *Predpostavimo, da za triodo T izrek 4.1 ne drži. Tedaj obstaja trioda T' z istimi končnimi točkami e_1 , e_2 in e_3 , ki vsebuje daljico S , za katero velja, da je eno izmed njenih krajišč točka e_1 . Tudi za T' trditev iz izreka 4.1 ne velja.*

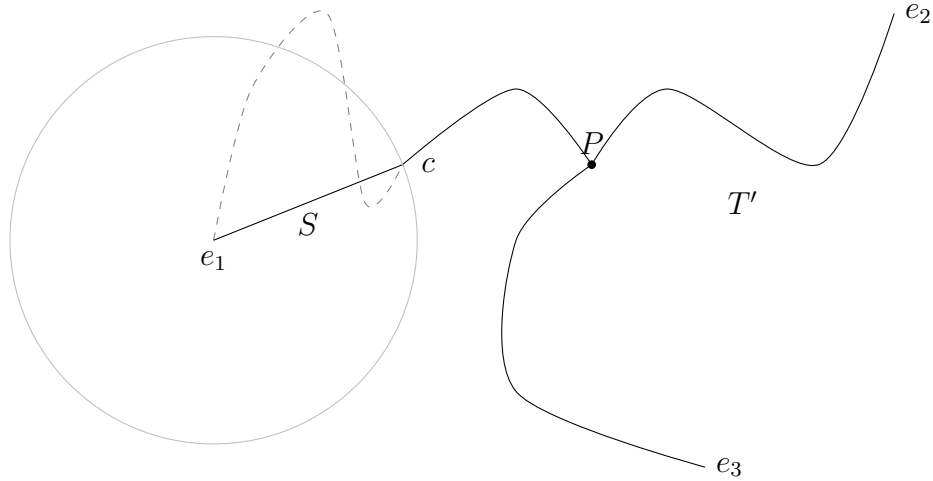
Dokaz. Zopet si ravnino, ki vsebuje T , predstavljajmo kot kompleksno ravnino \mathbb{C} . Tako velja $T \times T \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$. Za $j \in \{1, 2, 3\}$ definiramo E_j pomnožice prostora \mathbb{C}^2 kot

$$E_j = \{(w, z) \mid z = e_j + k(w - e_j) \text{ ali } z = e_j + k^{-1}(w - e_j)\},$$

kjer je $k = e^{i\pi/3}$. V množicah E_j tako ležijo pari kompleksnih točk, ki s končno točko triode e_j – znotraj iste kompleksne ravnine – tvorijo enakostranični trikotnik. Natančneje za točki a in b , za kateri $(a, b) \in (T \times T) \cap E_j$, velja $abe_j \sim \Delta$. Predpostavili pa smo, da za T izrek 4.1 ne drži. Zato v omenjenem preseku leži le par točk, ki je v njem vedno. Torej $(T \times T) \cap E_j = \{(e_j, e_j)\}$.

Množica $L_1 \times T$ je kot kartezični produkt kompaktnih množic tudi sama kompaktna množica. Prav tako je $L_1 \times T \subseteq T \times T$ in zato disjunktna z zaprto množico $E_2 \cup E_3$. Zaradi zaprtosti slednje lahko izberemo tak $\delta > 0$, da iz $d(a, L_1) \leq \delta$ in $d(b, T) \leq \delta$ sledi $(a, b) \notin E_2 \cup E_3$. Tu smo z $d(x, M)$ označili razdaljo med točko x in množico M v kompleksni ravnini, ki je za zaprte množice dobro definirana. Po potrebi δ še nadaljno zmanjšamo, da velja tudi, da iz $e \in T$ in $d(e, e_1) \leq \delta$ sledi $e \in L_1$.

Zdaj imamo definirano vse potrebno za konstrukcijo nove triode T' . Začnimo pri stičišču krakov P triode T in potujmo po L_1 . Označimo s c prvo doseženo točko, za katero je $d(c, e_1) \leq \delta$. Triodo T' definiramo kot T , kjer zamenjamo lok med e_1 in c z daljico S med omenjenima točkama. Nova trioda T' , ki jo vidimo na spodnji sliki, ima končne točke e_1 , e_2 in e_3 ter stičišče krakov P . Opazimo lahko tudi, da velja $e \in T'$ in $d(e, e_1) = \delta$ natanko tedaj, ko velja $e = c$.



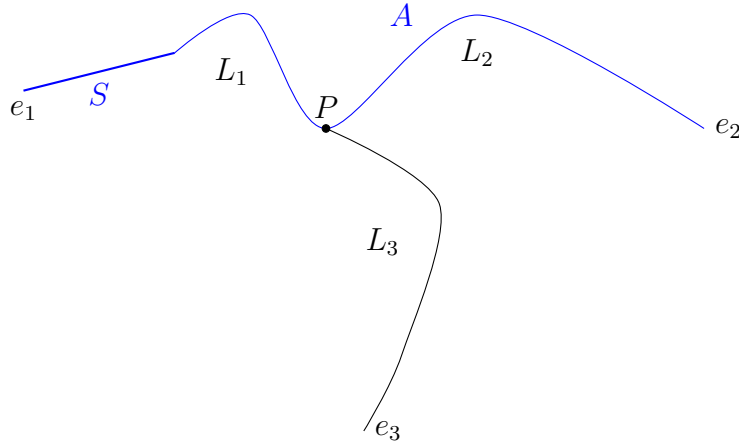
Trdimo, da T' ne vsebuje oglišč enakostraničnega trikotnika, ki ima za eno izmed oglišč končno točko T' . Dovolj je pokazati, da je $(T' \times T') \cap E_j = \{(e_j, e_j)\}$ za vse $j \in \{1, 2, 3\}$. Naj bo torej $(e, f) \in (T' \times T') \cap E_j$ za nek j . Obravnavajmo različne možnosti leg točk e in f ter pri vsaki pokažimo, da se bodisi ne more zgoditi bodisi velja $(e, f) = (e_j, e_j)$.

- (1) Naj velja $e, f \in T' \setminus S$. Tedaj je $(e, f) \in T \times T$ in zato $(e, f) = (e_j, e_j)$.
- (2) Naj velja $e \in S$ in $f \in T' \setminus S$. Ker e leži na daljici, je njegova oddaljenost od L_1 kvečjemu enaka dolžini daljice. Tako veljata $d(e, L_1) \leq \delta$ in $f \in T$, od tod pa sledi $(e, f) \notin E_2 \cup E_3$. Zato mora veljati $(e, f) \in E_1$. Iz predpisa E_1 sledi $d(e, e_1) = d(f, e_1)$. Ampak točka f ne leži na S in zato velja $d(f, e_1) > \delta$, kar je v protislovju z $d(e, e_1) \leq \delta$. Ta primer se torej ne more zgoditi.
- (3) Tokrat naj velja $f \in S$ in $e \in T' \setminus S$. Zaradi simetrije s prejšnjim primerom lahko sklepamo, da se tudi ta primer ne more zgoditi.
- (4) Preostane nam obravnavati primer, ko velja $e, f \in S$. Tokrat velja $d(e, L_1) \leq d(e, e_1) \leq \delta$ in $d(f, T) \leq d(f, e_1) \leq \delta$, torej zopet sledi da $(e, f) \notin E_2 \cup E_3$. Tako velja $(e, f) \in E_1$. Zaradi predpisa E_1 in dejstva, da točki e in f ležita na daljici s krajiščem v e_1 , mora tudi v tem primeru veljati $(e, f) = (e_1, e_1)$.

□

Z ravno dokazano lemo imamo dovolj znanja za dokaz izreka 4.1.

Dokaz izreka 4.1. Izrek bomo dokazali s protislovjem, zato predpostavimo, da na ravninski triodi T ne obstaja enakostranični trikotnik z enim ogliščem v neki izmed končnih točk e_1 , e_2 in e_3 . Definiramo še T' in S kot v dokazu leme 4.2. Tokrat z L_j označimo še krake triode T' , ki imajo končno točko e_j . Definiramo množico $A = L_1 \cup L_2$ in pokažimo protislovje.



Po točki (2) leme 3.3 velja, da je $\text{ind}(A, A_x)$ dobro definirano v vseh točkah T' razen v krajiščih A , saj tam velja $e_1 e_1 e_1 \sim \Delta$ in $e_2 e_2 e_2 \sim \Delta$. Vidimo, da je množica dobre definiranosti presečnega števila povezana, zato po točki (1) omenjene leme velja, da je $\text{ind}(A, A_x) \in \mathbb{Z}$ na njej konstantna. Po točki (3) nato velja $\text{ind}(A, A_x) = \text{ind}(A, A_{e_3}) = 0$ za vse $x \in T' \setminus \{e_1, e_2\}$.

Zdaj opazimo, da se množici A in A_{e_1} sekata samo v e_1 . To pomeni, da sta tako $A \setminus S$ in A_{e_1} kot $A_{e_1} \setminus S_{e_1}$ in A na pozitivni razdalji med sabo. Tako lahko izberemo $x \in S$ dovolj blizu e_1 , da je x edina točka v preseku $A \cap A_x$ in sta tako $A \setminus S$ in A_x kot $A_x \setminus S_x$ in A disjunktna para množic. Ker pa je S daljica, lahko po točkah (4) in (5) leme 3.3 sklepamo, da za tak x velja $\text{ind}(A, A_x) \neq 0$. S tem protislovjem je dokaz končan. \square

4.2. Posledice. V zadnjem razdelku smo pokazali, da so triode pomembne pri iskanju enakostraničnih trikotnikov na objektih v ravnini, saj bo vselej vsaj ena njihova končna točka ogliščna. Poglejmo, kako nam ta lastnost pomaga pri iskanju večjega števila ogliščnih točk na ravninskih krivuljah in triadah samih. Za začetek si oglejmo posledico, ki govori o zadnjem primeru.

Posledica 4.3. *Vsaka točka nekega kraka ravninske triode T , z izjemo stičišča krakov, je ogliščna točka triode T .*

Dokaz. Zopet označimo z L_1 , L_2 in L_3 krake triode T in s P presečišče njenih krakov. Denimo, da zelena trditev ne velja. Tedaj za vsak $j \in \{1, 2, 3\}$ obstaja $a_j \in L_j \setminus P$, tako da nobena izmed naštetih treh točk ni ogliščna točka triode T . Definirajmo s $T' \subset T$ novo triodo s končnimi točkami a_1 , a_2 in a_3 . Tedaj po izreku 4.1 velja, da je za nek $k \in \{1, 2, 3\}$ točka a_k ogliščna za T' . To pa seveda pomeni tudi, da je a_k ogliščna točka triode T . Tako smo prišli v protislovje. \square

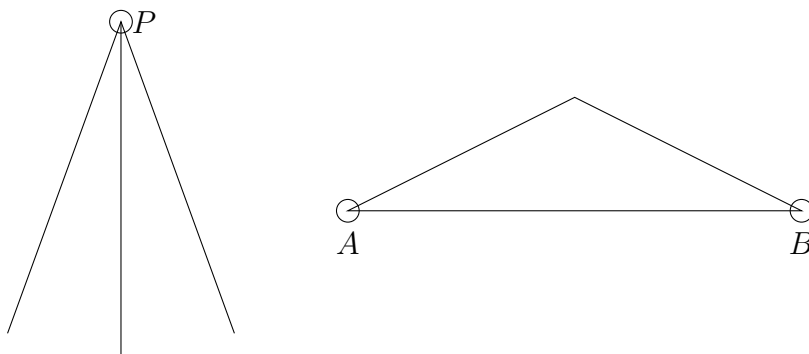
Dokažimo še posledico, ki služi kot končni odgovor na vprašanje števila enakostraničnih trikotnikov na Jordanovih krivuljah v ravnini.

Posledica 4.4. *Vse razen kvečjemu dveh točk Jordanove krivulje J v ravnini so ogliščne točke krivulje J .*

Dokaz. Denimo, da na J obstajajo točke e_1 , e_2 in e_3 , ki niso ogliščne točke krivulje J . Ker je notranjost Jordanove krivulje odprta povezana množica, obstaja trioda T s končnimi točkami e_1 , e_2 in e_3 , ki leži v uniji J in njene notranjosti. Po izreku 4.1 je za nek $k \in \{1, 2, 3\}$ točka e_k ogliščna za T . To pomeni, da obstajata točki x in y

na krivulji J ali v njeni notranjosti, da velja $xye_k \sim \triangle$. To so ravno predpostavke posledice 2.6, ki nam pove, da je točka e_k ogliščna za J . \square

Zapisani posledici povesta, da je ogliščnih točk na ravninskih objektih veliko. Hkrati pa sta njuni spodnji meji točni. Hitro lahko namreč najdemo primera, ki ju dosežeta. Sestavimo linearno triodo iz treh daljic tako, da sta kota med zaporednima krakoma pri stičišču enaka 20° . Stičišče te triode ni ogliščna točka. Primer pri Jordanovih krivuljah je še preprostejši. Vzamemo lahko kar poljuben enakokraki trikotnik, ki ima kot pri vrhu večji od 60° . V tem primeru oglišči pri osnovnici nista ogliščni točki. Opisana mejna primera prikazuje slika 9.



SLIKA 9. Mejna primera triode in krivulje

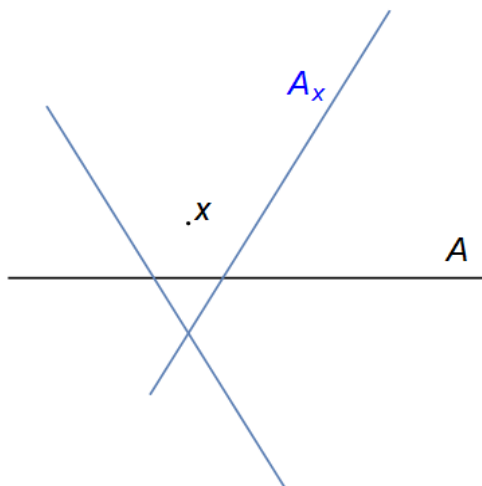
5. PROSTORI VIŠJIH DIMENZIJ

Do te točke smo se osredotočali na iskanje trikotnikov v ravnini. Poglejmo si še, katere ugotovitve lahko posplošimo na prostore \mathbb{R}^n višjih dimenzij. Pri tem prehodu lahko definicijo ogliščne točke objekta ohranimo enako. Prav tako bomo lastnost treh točk a, b in $c \in \mathbb{R}^n$, da tvorijo enakostranični trikotnik, še vedno označevali z $abc \sim \triangle$. Ravninsko triodo posplošimo povsem naravno samo s spremembo osnovnega prostora v \mathbb{R}^n . Tako je trioda še vedno poljuben podprostor homeomorfen črki T.

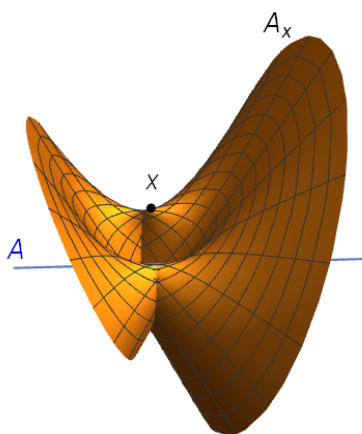
Do večjih sprememb pride pri rotaciji krivulje, ki smo jo v ravnini označevali z A_x . Ta objekt v več dimenzijah ni več smiseln, zato ga na novo definirajmo. Pri tem se osredotočimo na lastnost, za katero si želimo, da jo množica in njena rotacija imata. Kot v ravnini želimo, da lahko s točkami njenega preseka tvorimo enakostranične trikotnike. Tako je naslednja definicija povsem naravna. Naj velja $n \geq 2$ in naj bo $A \subset \mathbb{R}^n$ poljubna krivulja. Tedaj za poljuben $x \in \mathbb{R}^n$ definiramo rotacijo krivulje A kot

$$A_x = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{obstaja tak } z \in A, \text{ da velja } xyz \sim \triangle\}.$$

Hitro vidimo, da ima definirana rotacija željeno lastnost, a opazimo tudi, da se v ravninskem primeru razlikuje od prejšnje definicije. Zdaj je namreč pri $n = 2$ rotacija A_x sestavljena iz 2 krivulj, ki ustrezata rotacijama A v pozitivno in negativno smer. Nadalje v višjih dimenzijah A_x ni več krivulja. Omenjena primera sta predstavljena na slikah 10 in 11, ki prikazujeta rotacijo daljice v ravnini \mathbb{R}^2 in prostoru \mathbb{R}^3 . Pojavi se torej potreba po novi definiciji presečnega števila za krivuljo in ploskev. Poglejmo si pristop v prostoru \mathbb{R}^3 .



SLIKA 10. Rotacija daljice v ravnini



SLIKA 11. Rotacija daljice v prostoru

Naj bosta torej zdaj $f: I \rightarrow X \subset \mathbb{R}^3$ in $g: I^2 \rightarrow X$. Zopet postavimo zanj pogoja, da se ne sekata v robnih točkah poljubne slike. Natančneje mora veljati pogoj

$$(2) \quad \{f(0), f(1)\} \cap g(I^2) = \emptyset \quad \text{in} \quad \{g(x, y) \mid x \in \{0, 1\} \text{ ali } y \in \{0, 1\}\} \cap f(I) = \emptyset$$

To lastnost smo predpostavili, da je presečno število za f in g lahko dobro definirano. Kot v ravnini, ga definiramo s pomočjo kosoma linearnih aproksimacij, ki obstajajo po izreku o simplicialni aproksimaciji. Tako naj bosta

$$\begin{aligned} \tilde{f} &\simeq f: I \rightarrow X \setminus \{g(x, y) \mid x \in \{0, 1\} \text{ ali } y \in \{0, 1\}\} \quad \text{in} \\ \tilde{g} &\simeq g: I^2 \rightarrow X \setminus \{f(0), f(1)\} \end{aligned}$$

kosoma linearni preslikavi in naj njuni homotopiji s f in g mirujeta na robu. Presek njunih slik naj bo končen in tako sestavljen iz unije posameznih točk. Če to za neko komponento preseka ne drži, lahko z dovolj malo perturbacijo poljubne preslikave

dosežemo, da ostale komponente preseka ostanejo točke, opazovana komponenta pa se v točko spremeni. Naj bo $K = \{x\} \in \tilde{f}(I) \cap \tilde{g}(I^2)$ poljubna komponenta preseka. Označimo z \vec{v} smerni vektor standardno usmerjene slike \tilde{f} v točki x , z \vec{u}_1 in \vec{u}_2 pa smerna vektorja koordinatnih krivulj slike \tilde{g} v točki x . Presečno število komponente K definiramo kot

$$\text{ind}_K(\tilde{f}, \tilde{g}) = \begin{cases} 1; & \vec{u}_1, \vec{u}_2 \text{ in } \vec{v} \text{ tvorijo pozitivno orientirano bazo prostora,} \\ -1; & \text{sicer.} \end{cases}$$

S tem lahko definiramo tudi skupno presečno število

$$\text{ind}(\tilde{f}, \tilde{g}) = \sum_{K \text{ komponenta}} \text{ind}_K(\tilde{f}, \tilde{g})$$

in nato dokončno še

$$\text{ind}(f, g) := \text{ind}(\tilde{f}, \tilde{g}).$$

S tem je presečno število za preslikavi $f: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ in $g: I^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dobro definirano. V višjih dimenzijah moramo pristopati drugače, a vedno lahko dobro definiramo presečno število za krivuljo in hiperploskev v prostoru \mathbb{R}^n . Tako je definicija presečnega števila razširjena na \mathbb{R}^n . Lotimo se lahko dokazovanja naslednjega izreka, ki govori o razširjeni lastnosti, ki smo jo v ravnini že dokazali.

Izrek 5.1. *Ena izmed končnih točk triode T (v prostoru \mathbb{R}^n) je ogliščna točka.*

Dokazu pristopimo tak, o kot smo to storili pri dokazu podobnega izreka v ravnini. Z enakimi premisleki, kot v razdelku 3, lahko ugotovimo, da za množico $A \subset \mathbb{R}^3$ še vedno velja lema 3.3. Dokaz leme 4.2 prav tako v višjih dimenzijah še vedno velja. Zamenjati moramo le njegov prvi odstavek. In sicer ga zamenjamo z naslednjim:

Za $j \in \{1, 2, 3\}$ definiramo množice $E_j \subset \mathbb{R}^{2n}$ kot

$$E_j = \{(w, z) \mid w, z \in \mathbb{R}^n \text{ in } e_j w z \sim \Delta\}.$$

Za vse j so E_j zaprte množice. Predpostavka, da izrek 5.1 ne drži, je ekvivalentna pogoju, da za vse j velja $(T \times T) \cap E_j = (e_j, e_j)$.

Dokaz izreka 5.1 je sedaj enak dokazu izreka 4.1. Torej lahko tudi v prostoru na triodah najdemo enakostranične trikotnike. Teh je zopet zelo veliko, kot nam pove naslednja posledica z dokazom, ki je enak dokazu posledice 4.3.

Posledica 5.2. *Naj bo T poljubna trioda v prostoru \mathbb{R}^n . Tedaj je vsaka točka nekega njenega kraka, z izjemo stičišča krakov, ogliščna točka triode T .*

Razdelek zaključimo z naslednjo pomembno posledico.

Posledica 5.3. *Naj bo M poljubna povezana mnogoterost dimenzije vsaj 2, ki je vložena v \mathbb{R}^n . Tedaj so vse razen kvečjemu dveh točk mnogoterosti M ogliščne točke.*

Dokaz. Denimo da obstajajo tri točke e_1, e_2 in $e_3 \in M$, ki niso ogliščne točke mnogoterosti M . Ker je M povezana in dimenzije vsaj 2, v M obstaja trioda T , ki ima e_1, e_2 in e_3 za končne točke. Tedaj je za nek $k \in \{1, 2, 3\}$ po izreku 5.1 točka e_k ogliščna točka T . A ker je $T \subset M$, to pomeni da je e_k tudi ogliščna točka M . \square

6. VČRTANI ŠTIRIKOTNIKI

Oglejmo si nekaj sklepov, do katerih lahko pridemo ob iskanju štrikotnikov na Jordanovih krivuljah v ravnini. Na tem področju so nekatera vprašanja še danes odprta.

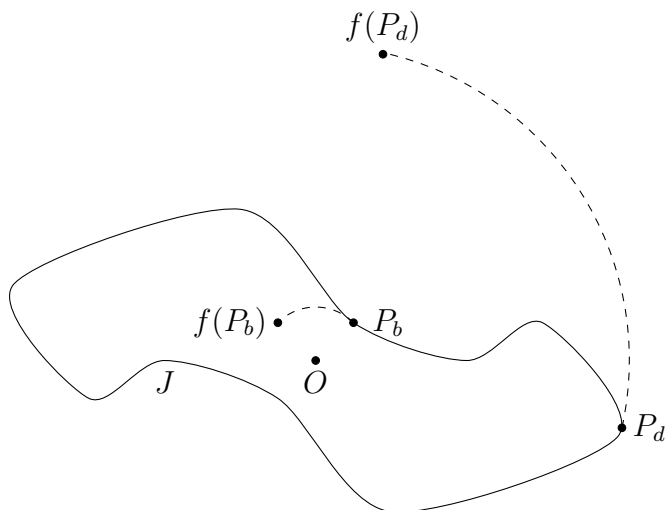
Ne ve se še, ali lahko na poljubni Jordanovi krivulji najdemo oglišča kvadrata. A obstajajo rezultati, do katerih lahko pridemo ob dodatnih omejitvah za krivuljo, na kateri iščemo kvadrat. Eden izmed najbolj znanih takšnih rezultatov je naslednji izrek.

Izrek 6.1 (Stromquistov izrek). *Če je Jordanova krivulja J "dovolj lepa", vsebuje oglišča kvadrata.*

Izraz "dovolj lepa" krivulja J pomeni, da za vsako točko P na J obstaja koordinatni sistem ravnine, v katerem lahko okolico točke P na J dobimo kot graf zvezne funkcije f . Idejno si lahko rezultat tega izreka predstavljamo kot trditev, da na vsaki Jordanovi krivulji, ki smo jo uspeli s pisalom narisati na papir, obstajajo oglišča kvadrata. Dokaza izreka si ne bomo ogledali, lahko pa ga najdemo v viru [3]. K iskanju kvadratov na Jordanovih krivuljah lahko pristopimo tudi s pomočjo simetrij, ki nam sicer omejijo možne krivulje, a hkrati zmanjšajo težavnost iskanja kvadratov samih. Oglejmo si naslednji rezultat na to temo.

Trditev 6.2. *Vsaka Jordanova krivulja J , ki je simetrična glede na izhodišče, vsebuje oglišča kvadrata.*

Dokaz. Ker je J simetrična glede na izhodišče koordinatnega sistema, za vsako točko $P \in J$ velja tudi $-P \in J$. Definirajmo si rotacijo $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ za $\frac{\pi}{4}$ okrog izhodišča. Če se J in slika $f(J)$ sekata v točki $P \in J$, potem obstaja $Q \in J$, da $f(Q) = P$. Tedaj so P , Q , $-P$ in $-Q$ oglišča kvadrata na J .



Pokazati ostane, da točka presečišča vselej obstaja. Označimo s P_b in P_d točki na J , ki sta zaporedoma najmanj in najbolj oddaljeni od izhodišča. Ker rotacija f ohranja razdaljo točk do izhodišča, leži $f(P_b)$ v notranjosti J ali na J , točka $f(P_d)$ pa v neomejeni komponenti $\mathbb{R}^2 \setminus J$ ali na J , kar je prikazano na zgornji skici. Če katera izmed omenjenih točk leži na J , smo našli točko presečišča. V nasprotnem primeru mora slika $f(J)$ povezovati točki na različnih bregovih J in jo tako, zaradi zveznosti funkcije f , nekje seka. \square

Drugačen način iskanja včrtanih štirikotnikov je s sproščanjem omejitev za iskani lik. Ko ne iščemo več včrtanih kvadratov, pridemo do rezultatov, da na Jordanovi krivulji vselej obstajajo paralelogrami, rombi in pravokotniki. Poglejmo si, kako pokažemo obstoj zadnjih.

6.1. Včrtani pravokotnik. Pravokotnik je karakteriziran z naslednjo lastnostjo:

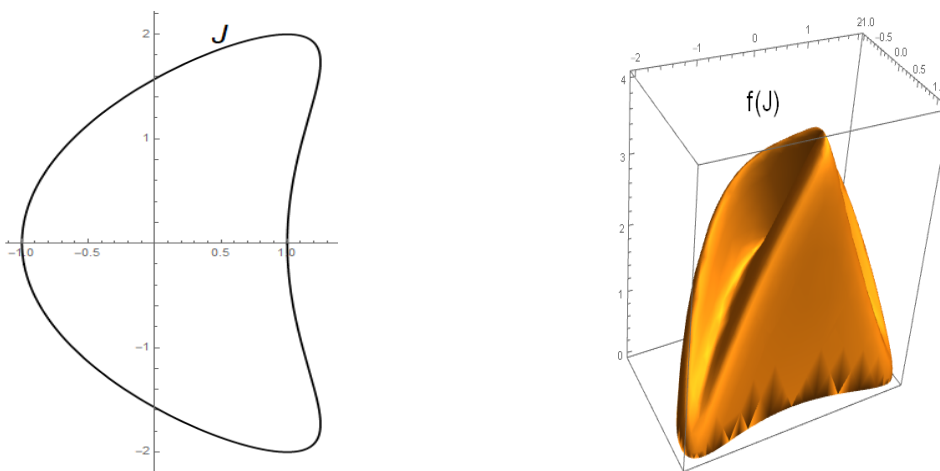
(3) štirikotnik je pravokotnik \iff diagonali se razpolavljata in sta enako dolgi.

Na ravninski Jordanovi krivulji J tako iščemo dva različna para enako oddaljenih točk, katerih daljici se razpolavljata. Označimo z X množico neurejenih parov različnih točk na J .

Postavimo ravnino \mathbb{R}^2 , ki vsebuje J , v prostor \mathbb{R}^3 kot ravnino $z = 0$. Definirajmo preslikavo

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$f(P, Q) = \left(\frac{P+Q}{2}, \|P-Q\| \right).$$



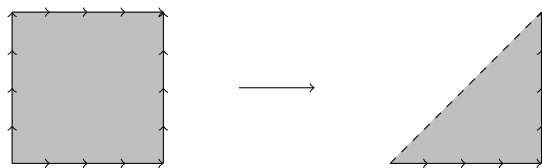
SLIKA 12. Primer Jordanove krivulje in njene slike pri preslikavi f

Slika te preslikave se dotika krivulje J v ravnini $z = 0$. Ko gresta namreč točki v paru $\{P, Q\}$ ena proti drugi, gre razdalja med njima proti nič, prav tako pa gre $(P+Q)/2$ proti isti limitni točki, kot točki sami. Tako gre njuna slika res proti točki na krivulji J . Če uspemo poiskati para $\{P, Q\} \neq \{P', Q'\}$, ki se s preslikavo f slikata v isto točko, bodo po lastnosti (3) točke teh neurejenih parov sestavljale oglišča pravokotnika na J .

Da bomo to lahko storili, si oglejmo, kako lahko predstavimo množico X . Jordanova krivulja J je vložitev enotske krožnice \mathbb{S}^1 v ravnino. Prav tako je \mathbb{S}^1 homeomorfna enotskemu intervalu I , ki mu zlepimo začetno in končno točko. Tako lahko točke na J enačimo s števili na I . Par točk na J nam tako predstavlja urejen par $(a, b) \in [0, 1] \times [0, 1]$, kjer enačimo skrajni navpični in vodoravni stranici. Ko v takšnem kvadratu združimo enačene daljice dobimo torus.

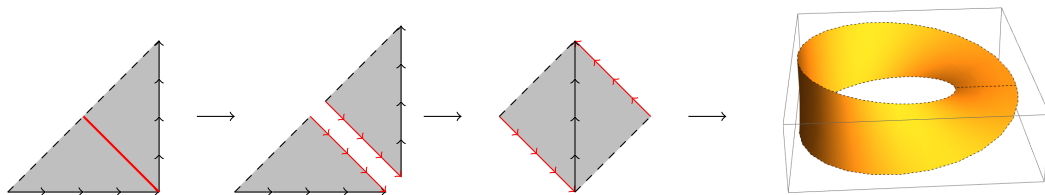
A nas zanima množica neurejenih parov točk na J , zato moramo enotski kvadrat še spremeniti. Zaradi neurejenosti, sta sedaj para (P, Q) in (Q, P) enaka za poljubna $P, Q \in J$. Zato v enotskem kvadratu enačimo vse pare oblike (a, b) in (b, a) . Enotski kvadrat smo tako prepognili vzdolž premice $y = x$ in dobili enakokrat trikotnik z

enačenima krakoma, kot prikazuje slika 13. Ker nas zanimajo pari različnih točk, točk na premici $y = x$ ne vključimo v trikotnik, saj predstavljajo posamezne točke na J .



SLIKA 13. Množica neurejenih parov točk X

Da najdemo objekt, ki je homeomorfen dobljenemu trikotniku, ga moramo najprej prerezati vzdolž premice $y = 1 - x$. Sedaj lahko zlepimo prvotna kraka trikotnika in dobimo kvadrat, z nasprotno orientiranim parom stranic. Takšen kvadrat je homeomorfen Möbiusovem traku brez robnih točk, saj tudi kvadrat ni vseboval točk drugega para stranic. Opisani postopek ponazarja zaporedje korakov na sliki 14. Z M označimo Möbiusov trak in z $g: M \rightarrow X$ inverz opisane enačitve točk X in M . Preslikava $f \circ g$ tako slika Möbiusov trak v prostor \mathbb{R}^3 . Sliko Möbiusovega traku lahko z notranjostjo krivulje J v ravnini $z = 0$ dopolnimo do objekta homeomorfnega projektivni ravnini \mathbb{RP}^2 . Injektivnost preslikave f , in s tem tudi $f \circ g$, bi tako pomenila obstoj vložitve \mathbb{RP}^2 v \mathbb{R}^3 , za kar pa vemo, da ne obstaja [6].



SLIKA 14. Preoblikovanje predstavitve množice X

Zato obstajata para $\{P, Q\} \neq \{S, T\}$ točk na J z enako sliko pri preslikavi f . Točke v teh parih so oglišča pravokotnika na J .

Opisani postopek je pokazal veljavnost naslednje trditve.

Trditev 6.3. Vsaka Jordanova krivulja J vsebuje oglišča pravokotnika.

SLOVAR STROKOVNIH IZRAZOV

LITERATURA

- [1] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [2] M. D. Meyerson, *Equilateral triangles and continuous curves*, Fund. Math. **110** (1980) 1–9.
- [3] W. Stromquist, *Inscribed squares and square-like quadrilaterals in closed curves*, Mathematika **36** (1989) 187–197.
- [4] *Figures Inscribed in Curves*, v: University of Idaho, [ogled 22. 3. 2022], dostopno na <https://www.webpages.uidaho.edu/~markn/squares/>.
- [5] *Jordan curve theorem*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 22. 3. 2022], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_curve_theorem.
- [6] *Real projective plane*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 22. 3. 2022], dostopno na https://en.wikipedia.org/wiki/Real_projective_plane.