Möbiusove transformacije in periodični verižni ulomki

Seminar

Nejc Zajc
Fakulteta za matematiko in fiziko
Oddelek za matematiko

17. marec 2020

1 Uvod

Verižne ulomke pogosto spoznavamo pri teoriji števil, kjer so členi naravna števila. Ob ukvarjanju s števili oblike

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}},$$

kjer so a_i in b_i kompleksna števila, hitro opazimo potrebo po novih pristopih.

Definicija 1 *Möbiusova transformacija je kompleksna funkcija oblike*

$$g(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

kjer so a, b, c in d kompleksna števila, za katera velja $ad - bc \neq 0$.

Pomen teh funkcij opazimo, če si definiramo $s_1(z) = (az+1)/z = a+1/z$ in $s_2(z) = (bz+1)/z = b+1/z$; tedaj je namreč

$$s(z) = s_1(s_2(z)) = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{z}}$$

končen verižni ulomek in hkrati Möbiusova transformacija. Transformacije bomo uporabili za dokaz glavnega izreka, za začetek pa si natančneje oglejmo verižne ulomke.

2 Verižni ulomki

V članku se bomo ukvarjali z enostavnimi verižni ulomki. Enostaven verižni ulomek ima vse $a_i = 1$, zanj vpeljemo tudi krajši zapis, ki je v končni obliki enak

$$[b_0, b_1, \ldots, b_n] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{b_n}}},$$

kjer je b_0 celo število, $b_1, b_2, \ldots$ pa naravna števila; enostaven verižni ulomek pa je nato enak

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots}} = \lim_{n\to\infty} [b_0, b_1, \ldots, b_n]. \tag{2}$$

Limita v (2) vedno obstaja, saj njegovi približki $[b_0, b_1, \ldots, c_n]$ strogo naraščajo za sode n in so navzgor omejeni s $[b_0, b_1]$ ter posledično konvergirajo. Z lih n ti približki strogo padajo in so omejeni z $[b_0]$ ter tako tudi konvergirajo. Ker je razlika med zaporednima približkoma obratno sorazmerna z n, sta limiti enaki, posledično pa limita (2) obstaja.

Za verižni ulomek $[b_0, b_1, b_2, \ldots]$ rečemo, da je *periodičen* s periodo k, če je $b_n = b_{n+k}$ za vsa naravna števila n, in da je *ščasoma periodičen*, če je $b_n = b_{n+k}$ za vse dovolj velike n.

3 Eulerjeva funkcija

Definicija 2 *aaabbbbbb*

Zgled 1 *bbb*

n	$\{1, 2, \ldots, n\}$	$\varphi(n)$
1	$\{\mathbf{1}\}$	1
2	$\{\mathbf{1}, 2\}$	1
3	$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3\}$	2
4	$\{\mathbf{1}, 2, \mathbf{3}, 4\}$	2
5	$\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, 5\}$	4
6	$\{\mathbf{1}, 2, 3, 4, \mathbf{5}, 6\}$	2

Tabela 1: Vrednosti funkcije $\varphi(n)$ za $n = 1, 2, \ldots, 6$

Trditev 1 *fipp*

Dokaz: ccc $\square$

Zgled 2 *aaa*

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \prod_{i=1}^{r} \varphi\left(p_i^{k_i}\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(p_i^{k_i} - p_i^{k_i-1}\right)\\ &= \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i}\right) \times \prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right) = n \times \prod_{p\,|\,n}\left(1-\frac{1}{p}\right). \qquad \square\end{aligned}$$

Izrek 1 (Eulerjev izrek) *Euler*

Dokaz: ddd $\square$

$$\begin{aligned}(f*(g+h))(n) &= \sum_{de=n} f(d)(g+h)(e) = \sum_{de=n} f(d)(g(e)+h(e))\\ &= \sum_{de=n} f(d)g(e) + \sum_{de=n} f(d)h(e)\\ &= (f*g+f*h)(n). \qquad \square\end{aligned}$$

Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

arithmetic function aritmetična funkcija
coprime tuj
Dirichlet convolution Dirichletova konvolucija
Dirichlet ring Dirichletov kolobar, kolobar aritmetičnih funkcij
divisor delitelj
Euler's phi function, Euler's totient function Eulerjeva funkcija φ
Euler's theorem Eulerjev izrek
Fermat's little theorem mali Fermatov izrek
fundamental theorem of arithmetic osnovni izrek aritmetike
greatest common divisor največji skupni delitelj, največja skupna mera
least common multiple najmanjši skupni večkratnik
Möbius function Möbiusova funkcija μ
Möbius inversion Möbiusov obrat, Möbiusova inverzija

multiple večkratnik
prime praštevilo; praštevilski
prime factor prafaktor
prime number praštevilo
relatively prime tuj

Literatura

[1] M. Aigner in G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 2. izdaja, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 2001.

[2] N. Calkin in H. S. Wilf, Recounting the rationals, *Amer. Math. Monthly* **107** (2000), 360–363.

[3] J. Grasselli, *Elementarna teorija števil*, DMFA – založništvo, Ljubljana, 2009.