

# Möbiusove transformacije in periodični verižni ulomki Seminar

Nejc Zajc  
Fakulteta za matematiko in fiziko  
Oddelek za matematiko

9. april 2020

## 1 Uvod

Z verižnimi ulomki oblike

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \ddots}},$$

se večinoma prvič srečamo pri teoriji števil, kjer so njihovi členi naravna števila. A ko to ne velja več in so členi poljubna kompleksna števila, hitro opazimo potrebo po novih pristopih. V članku si bomo ogledali pristop z Möbiusovimi transformacijami. To so funkcije oblike

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (1)$$

kjer so  $a, b, c$  in  $d$  kompleksna števila, za katera velja  $ad - bc \neq 0$ .

Njihov pomen pri obravnavi verižnih ulomkov opazimo, če si definiramo  $s_1(z) = \frac{az+1}{z} = a + \frac{1}{z}$  in  $s_2(z) = \frac{bz+1}{z} = b + \frac{1}{z}$ ; tedaj je namreč

$$s(z) = s_1(s_2(z)) = a + \frac{1}{b + \frac{1}{z}}$$

končen verižni ulomek in hkrati Möbiusova transformacija. Transformacije bomo natančno definirali v poglavju 3 in jih uporabili v dokazu glavnega izreka tega članka, za začetek pa si natančneje oglejmo verižne ulomke.

## 2 Verižni ulomki

Osredotočimo se na enostavne verižne ulomke. Enostaven verižni ulomek ima vse  $a_i = 1$ . Vpeljimo tudi krajši zapis, ki je v končni obliki enak

$$c_n = [b_0, b_1, \dots, b_n] = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_n}}},$$

kjer je  $b_0$  celo število,  $b_1, b_2, \dots$  pa naravna števila; enostaven verižni ulomek je nato enak

$$[b_0, b_1, b_2, \dots] = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \ddots}} = \lim_{n \rightarrow \infty} [b_0, b_1, \dots, b_n]. \quad (2)$$

Za obravnavo te limite si oglejmo (*Wallis - Eulerjevi*) zaporedji

$$p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2} \quad \text{in} \quad q_n = b_n q_{n-1} + q_{n-2},$$

z začetnimi členi  $p_{-1} = 1$ ,  $p_0 = b_0$ ,  $q_{-1} = 0$  in  $q_0 = 1$ . Z indukcijo lahko hitro vidimo, da za poljubno naravno število  $n$  velja  $[b_0, b_1, \dots, b_n] = c_n = p_n/q_n$  in  $q_n \geq n$ . Za razlike približkov  $c_n$  pa veljata naslednji enačbi

$$c_n - c_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \quad \text{in} \quad c_n - c_{n-2} = \frac{(-1)^n b_n}{q_n q_{n-2}}. \quad (3)$$

Tako vidimo, da zaporedje  $\{c_{2n}\}_n$  strogo narašča, je navzgor omejeno s  $c_1$  in posledično konvergira. Za lihe  $n$  pa je druga vrednost v (3) negativna, zato zaporedje  $\{c_{2n-1}\}_n$  monotono pada, je navzdol omejeno s  $c_0$  in zato tudi konvergentno. Limita (2) bo tako obstajala, če sta limiti obeh podzaporedji enaki. To se zgodi natanko tedaj, ko je limita  $n \rightarrow \infty$  prvega izraza v (3) enaka 0, kar pa velja, saj je  $q_n \geq n$ .

Za verižni ulomek  $[b_0, b_1, b_2, \dots]$  rečemo, da je *periodičen* s periodo  $k$ , če je  $b_n = b_{n+k}$  za vsa naravna števila  $n$ . To zapišemo  $\overline{[b_0, \dots, b_{k-1}]}$ . Za ulomek rečemo, da je *sčasoma periodičen*, če je  $b_n = b_{n+k}$  za vse dovolj velike  $n$ . Opazimo, da v primeru, ko je  $[b_0, b_1, b_2, \dots]$  periodičen s periodo  $k$ , velja  $b_0 = b_k \geq 1$ . Člen  $b_0$  je torej naravno število, vrednost periodičnega verižnega ulomka pa tako vedno večja od 1.

## 2.1 Kvadratna iracionalna števila

**Definicija 1.** Realno število  $x$  je **kvadratno iracionalno število** (kvadratni iracional), če je iracionalno število in ničla kvadratnega polinoma  $P$  s celoštevilskimi koeficienti.

Naj bo  $x$  kvadratni iracional. Tedaj je ničla celoštevilskega kvadratnega polinoma in je zato oblike  $x = \frac{a+b\sqrt{c}}{d}$ , kjer so  $a, b, c$  in  $d$  cela števila, izmed katerih  $b, c$  in  $d$  ne smejo biti enaki nič,  $c > 0$  pa ni popolni kvadrat. Ko vstavimo  $x$  v kvadratni celoštevilski polinom  $P$ , katerega ničla je, vidimo da je polinom do množenja s skalarjem enolično določen. Druga ničla polinoma  $P$  je *algebraična konjugirana vrednost*  $x$ , ki jo označimo z  $x^* = \frac{a-b\sqrt{c}}{d}$ .

Za zapis realnih števil z enostavnimi verižnimi ulomki velja, da lahko vsako racionalno število zapišemo kot končen verižni ulomek, vsakemu iracionalnemu številu pa pripada enolično določen verižni ulomek oblike (2). O verižnih ulomkih kvadratnih iracionalov lahko povemo še več, za iracionalno število  $x = [b_0, b_1, b_2, \dots]$  namreč veljata naslednji lastnosti.

**Trditev 1.** Verižni ulomek  $[b_0, b_1, b_2, \dots]$  je sčasoma periodičen natanko tedaj, ko je  $x$  kvadratni iracional.

**Trditev 2.** Verižni ulomek  $[b_0, b_1, b_2, \dots]$  je periodičen natanko tedaj, ko je  $x$  kvadratni iracional, katerega algebraična konjugirana vrednost  $x^*$  leži na intervalu  $(-1, 0)$ .

Prvo ekvivalenco sta dokazala Euler, ki je pokazal, da sčasoma periodičen ulomek predstavlja kvadratni iracional, in Lagrange, ki je dokazal obrat. Primera dokazov lahko najdemo v [5] kot dokaza trditev 176 in 177. Drugo trditev je dokazal Galois.

Osrednji namen tega članka je pokazati, kako lahko s pomočjo Möbiusovih transformacij na verižnih ulomkih dokažemo naslednji Galois-ev izrek.

**Izrek** (Galois-ev izrek). Za  $x = [b_0, \dots, b_{k-1}]$  velja  $[b_{k-1}, \dots, b_0] = -\frac{1}{x^*}$ .

Za konec poglavja si oglejmo zgled, ki pokaže veljavnost Galois-evega izreka na ulomku s periodo dolžine 2.

**Zgled 1.** Naj  $a, b \in \mathbb{N}$  in  $\alpha = [a, b]$ . S substitucijo dobimo  $\alpha = a + 1/(b + 1/\alpha)$ . Torej je  $\alpha$  negibna točka  $s(z) = a + 1/(b + 1/z)$ . Za negibni točki funkcije  $s$  velja, da sta rešitvi enačbe

$$bz^2 - abz - a = 0. \quad (4)$$

To sta torej  $\alpha$  in  $\alpha^*$ . Ker iz Vietovih formul sledi  $\alpha\alpha^* = -\frac{a}{b} < 0$ , velja  $\alpha > 0 > \alpha^*$ .

Definirajmo še  $\beta = \overline{[b, a]}$ . Enak premislek nas pripelje do ugotovitve, da sta  $\beta$  in  $\beta^*$  rešitvi  $az^2 - abz - b = 0$  ter da velja  $\beta > 0 > \beta^*$ . Če na zadnji enačbi uporabimo transformacijo  $w = -1/z$ , dobimo enačbo (4). Torej za rešitve enačbe (4) velja  $\{\alpha, \alpha^*\} = \{-1/\beta, -1/\beta^*\}$  in zato  $\beta = -1/\alpha^*$ , kar bi nam povedal tudi Galois-ev izrek.

### 3 Kompleksna ravnina

Pred dokazom izreka, si bomo v tem poglavju ogledali definicijo in lastnosti Möbiusovih transformacij in kompleksne ravnine.

#### 3.1 Möbiusove transformacije

Ko kompleksni ravnini  $\mathbb{C}$  dodamo novo točko  $\infty$ , s tem tvorimo *razširjeno kompleksno ravnino* oz. *Riemmanovo sfero*, ki jo označimo  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

**Definicija 2.** Funkcija  $g$  z domeno  $\mathbb{C}_\infty$  je **Möbiusova transformacija**, če jo lahko zapišemo v obliki (1), kjer so  $a, b, c$  in  $d$  kompleksna števila za katera velja  $ad - bc \neq 0$ .

Če je  $c \neq 0$ , potem v (1) velja  $g(\infty) = \frac{a}{c}$  in  $g(-\frac{d}{c}) = \infty$ , sicer je  $g(\infty) = \infty$ .

Vsaka Möbiusova transformacija  $g$  je bijekcija  $\mathbb{C}_\infty$ , saj ima inverz funkcije oblike (1) enak  $g^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$ . Velja tudi, da so takšne funkcije odvedljive in zato holomorfne. Ko združimo lastnosti vidimo, da so Möbiusove transformacije biholomorfizmi. Opazimo, da je  $g^{-1}$  Möbiusova transformacija, kratek račun pa nam utemelji, da to velja tudi za kompozitum dveh transformacij. Množica vseh Möbiusovih transformacij je torej grupa. Pri njihovem komponiranju si lahko pomagamo z množenjem matrik, ki kot člene vsebujejo koeficiente funkcije. Da dobimo na ustreznih mestih enake koeficiente, nam utemeljita naslednji enakosti

$$\frac{a_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + b_1}{c_1 \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} + d_1} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)},$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{bmatrix}.$$

Ob predstavitvi Möbiusove transformacije z matriko pripada preslikavi  $g$  matrika  $M$  s koeficienti iz  $g$ . Za  $M$  velja, da ima neničelno determinanto, torej pripada *splošni linearni grupi*  $GL(2, \mathbb{C})$ . Isti preslikavi  $g$  pa pripadajo

tudi vse matrike  $N = \lambda M$ , za neničelna kompleksna števila  $\lambda$ . To pomeni, da je grupa Möbiusovih transformacij izomorfna kvocientu obrnljivih matrik, po neničelnih večkratnikih identitete  $GL(2, \mathbb{C})/((\mathbb{C} \setminus \{0\})I)$ . Zadnji kvocient se imenuje *projektivna linearna grupa*, označimo pa ga z  $PGL(2, \mathbb{C})$ . Za Möbiusovo transformacijo  $g$  velja, da je natanko določena, ko poznamo njene slike treh različnih kompleksnih točk. Za poljubni trojici različnih točk lahko namreč postopoma konstruiramo transformacijo, ki slika elemente prve trojice zaporedoma v elemente druge. Ker velja tudi, da iz lastnosti, da  $g$  slika trojico  $(0, 1, \infty)$  zaporedoma v  $(0, 1, \infty)$ , sledi, da je ta  $g$  enaka identiteti, lahko nato pokažemo tudi, da je naš izbor transformacije enoličen. Natančnejši dokaz te lastnosti, si lahko preberemo v članku [6].

Označimo *razširjeno realno os* kot  $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . V primeru, ko so vsi koeficienti Möbiusove transformacije  $g$  realna števila,  $g$  ohranja  $\mathbb{R}_\infty$ . Tedaj velja

$$\operatorname{Im}[g(z)] = \frac{(ad - bc)\operatorname{Im}[z]}{|cz + d|^2},$$

kar pomeni, da  $g$  ohranja zgornjo kompleksno polravnino  $\mathbb{H} = \{x + iy; x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$  natanko tedaj, ko velja  $ad - bc > 0$ . Primer za to je funkcija  $h(z) = -\frac{1}{z}$ . Nasprotno pa se v primeru, ko  $ad - bc = -1$ , kompleksni polravnini ravno zamenjata, kot je to pri  $k(z) = \frac{1}{z}$ .

Pomembna je tudi sama geometrija delovanja Möbiusovih transformacij. Ohranjanje premic namreč ni značilno le za  $R_\infty$ . Na Riemmanovi sferi se vse premice podaljšajo do  $\infty$  in iz njih nastanejo krožnice. Möbiusove transformacije tako na  $\mathbb{C}_\infty$  slikajo krožnice v krožnice.

Omenimo še, kako  $\mathbb{C}_\infty$  opremimo z metriko. Stereografska projekcija je znan homeomorfizem med  $\mathbb{C}$  in enotsko sfero  $\mathbb{S}$  brez ene točke v  $\mathbb{R}^3$ . To projekcijo lahko razširimo do homeomorfizma med  $\mathbb{C}_\infty$  in celotno sfero  $\mathbb{S}$  ter nato prenesemo Evklidsko metriko iz  $\mathbb{S}$  v metriko  $\chi$  na  $\mathbb{C}_\infty$ . Za metrični prostor  $(\mathbb{C}_\infty, \chi)$  je nato vsaka Möbiusova transformacija  $g$  homeomorfizem prostora  $\mathbb{C}_\infty$  samega vase.

V primeru zgornje polravnine  $\mathbb{H}$  pa ob vpeljavi norme  $\|z\| = |z|/y$ , kjer je  $|z|$  absolutna vrednost kompleksnega števila  $z$  in  $y = \operatorname{Im}[z]$ , dobimo Poincaréjev model polravnine, ki je eden izmed standardnih modelov hiperbolične ravnine. Tu so Möbiusove transformacije, ki ohranjajo  $\mathbb{H}$  ( $ad - bc > 0$ ), ravno vse izometrije  $\mathbb{H}$ . Meja prostora ustreza  $\mathbb{R}_\infty$ .

## 3.2 Modularna grupa

**Definicija 3. Modularna grupa**  $\Gamma$  je grupa vseh Möbiusovih transformacij oblike (1) s celoštevilskimi koeficienti  $a, b, c$  in  $d$ , za katere velja  $ad - bc = 1$ .

Kot smo že omenili, elementi  $\Gamma$  na  $\mathbb{H}$  delujejo kot izometrije hiperbolične metrike, njihovo delovanje na  $\mathbb{R}_\infty$  pa je tesno povezano s teorijo verižnih ulomkov. V grupi namreč med drugim leži tudi funkcija  $s(z) = a+1/(b+1/z)$ .

Posebno zanimive so *loksodromične izometrije*  $\mathbb{H}$ . Loksodrome so krivulje na sferi, ki sekajo poldnevnik pod istim kotom, njihovo ime pa izhaja iz besed za nagib (*loxos*) in smer (*drome*). Njihove izometrije so Möbiusove transformacije, ki ohranjajo  $\mathbb{H}$  in imajo dve različni negibni točki. Primer takšne funkcije je  $z \mapsto 2z$ , katere negibni točki sta 0 in  $\infty$ . Ob njihovi obravnavi pridemo do pomembne ugotovitve glede kvadratnih iracionalov.

**Trditev 3.** *Realno število  $x$  je kvadratno iracionalno število natanko tedaj ko je negibna točka nekega loksodromičnega elementa  $g$  modularne grupe  $\Gamma$ . Tedaj je algebraična konjugirana vrednost  $x^*$  druga negibna točka  $g$ .*

Tudi te trditve ne bomo dokazovali, uporabili pa jo bomo pri dokazovanju izreka. V ta namen si oglejmo še eno pomembno lastnost. Če je  $g$  loksodromična funkcija z negibnima točkama  $u$  in  $v$ , potem je ena izmed njih, recimo  $u$ , *privlačna negibna točka*, druga (v tem primeru  $v$ ) pa je *odbojna negibna točka*. To pomeni da ob večkratni aplikaciji funkcije  $g$  na elementu  $z \neq v$ ,  $n$ -ti iterat  $g^n(z)$  v limiti  $n \rightarrow \infty$  konvergira proti  $u$ . V že omenjenem primeru  $z \mapsto 2z$  je  $\infty$  privlačna negibna točka, 0 pa je odbojna. Ker imamo opravka z gladkimi funkcijami, lahko po Lagrangevem izreku sklepamo, da so oddaljenosti funkcijskih slik preko velikosti odvoda povezane z oddaljenostjo začetnih točk. V primeru, ko za negibno točko  $w$  velja  $|f'(w)| < 1$ , se ji funkcijske slike ostalih točk ob ponovnih iteracijah vedno bolj približujejo. Vidimo torej, da je taka negibna točka privlačna. V primeru, ko za negibno točko  $w$  velja  $|f'(w)| > 1$ , pa lahko sklepamo, da je  $w$  odbojna negibna točka.

## 4 Dokaz izreka

S pridobljenim znanjem bomo v tem poglavju dokazali Galois-ev izrek. Dokaz temelji na naslednji lemi, ki posploši pomen algebraične konjugirane vrednosti števila, saj  $b_i$  v lemi niso nujno cela števila. Za lažji zapis bomo v lemi namesto komponiranja uporabljali množenje, kot na primer  $s_1 s_2(z) = s_1(s_2(z))$ .

**Lema 1.** *Za funkcije  $s_i$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  oblike  $s : z \mapsto b + 1/z$ , kjer je  $b \geq 1$ , ima končni kompozitum  $S = s_1 \cdots s_k$  privlačno negibno točko  $\zeta \in (1, \infty)$  in odbojno negibno točko  $\tilde{\zeta} \in (-1, 0)$ .*

*Dokaz.* Posebej obravnavamo primera  $k = 1$  in  $k = 2$ .

Pri  $k = 1$  sta negibni točki  $S(z) = b_1 + 1/z$  ravno rešitvi kvadratne enačbe

$z^2 - b_1 z - 1 = 0$ . To sta števili

$$z_{1,2} = \frac{b_1 \pm \sqrt{b_1^2 + 4}}{2},$$

kjer v prvem primeru velja  $z_1 > b_1 \geq 1$  in v drugem  $z_2 \in (-1, 0)$ . Ker velja  $|S'(z_1)| = |-1/z_1^2| < 1/z_1 < 1$ , je  $z_1$  privlačna negibna točka. Zapišimo še, da  $S$  v tem primeru slika v interval  $(b_1, b_1 + 1]$ .

Za  $k = 2$  je obravnavana funkcija

$$S(z) = b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{z}}.$$

Tudi tu podobno izračunamo rešitvi pripadajoče kvadratne enačbe  $S(z) = z$  in vidimo, da je prva večja od 1, druga pa leži na  $(-1, 0)$ . Odvod je enak  $S'(z) = 1/(b_2 z + 1)^2$ , zato za večjo izmed negibnih točk  $z_1$  velja  $|S'(z_1)| < 1/2^2 < 1$ . Večja negibna točka je torej res privlačna. Funkcija  $S$  v tem primeru slika na interval  $[b_1 + 1/(b_2 + 1), b_1 + 1/b_2)$ , zato so vse funkcijske vrednosti  $S(z) \geq b_1 + 1/(b_2 + 1) = a_1 > 1$ .

Naj bo zdaj  $S = s_1 \cdots s_k$ , za  $s_i(z) = b_i + 1/z$ ,  $b_i \geq 1$  in  $k > 2$ . Poglejmo si, kaj velja za velikosti odvodov. Zaradi  $|s'_i(z)| = |-1/z^2| \leq 1$  za vse  $i$ , lahko po verižnem pravilu za odvajanje kompozituma sklepamo  $|S'(z)| = |s'_k(w_{k-1}) \cdot s'_{k-1}(w_{k-2}) \cdots s'_1(z)| \leq |s'_k(w_{k-1})| \cdot 1$ , kjer so  $w_i = s_i \cdots s_1(z)$  in zadnji neenačaj velja, ker so odvodi v splošnem po velikosti največ 1. Ker je  $k > 2$  velja, da je  $w_{k-1} > w_2 \geq a_1$ . Dobili smo torej, da je  $S'(z) \leq 1/a_1^2 < 1$ . Ker je  $S$  gladka funkcija, po Lagrangevem izreku velja  $|S(z_1) - S(z_2)| = |S'(\xi)(z_1 - z_2)| \leq |z_1 - z_2|/a_1^2$ , kjer je  $\xi$  neka točka med  $z_1$  in  $z_2$ . To pomeni, da je  $S$  skrčitev (na polnem metričnem prostoru  $\mathbb{R}$ ) in ima zato negibno točko  $\zeta$  znotraj svoje kodomene  $(1, \infty)$ . Ker je odvod po velikosti manjši od 1, je ta negibna točka privlačna.

Definirajmo še  $\tilde{S} = s_k \cdots s_1$ . Analogni postopek nas pripelje do ugotovitve, da ima  $\tilde{S}$  privlačno negibno točko  $\tilde{\zeta} \in (1, \infty)$ . Naj bo  $\delta(z) = -1/z$ . Tedaj velja

$$\delta s_i(z) = -\frac{1}{b_i + \frac{1}{z}} = \frac{1}{-\frac{1}{z} - b_i} = s_i^{-1} \delta(z),$$

za vse  $z$  in  $i$ . Posledično velja tudi  $\delta S = \tilde{S}^{-1} \delta$ . Ko v zadnjo enačbo vstavimo  $\delta(\tilde{\zeta})$  vidimo, da je to negibna točka kompozituma  $S$ . Ker velja  $\delta(\tilde{\zeta}) \in (-1, 0)$ , je to od  $\zeta$  različna točka in je zato odbojna.  $\square$

Združimo zdaj vse v dokazu Galois-evega izreka, ki ga zaradi preglednosti še enkrat zapišimo.

**Izrek** (Galois-ev izrek). Za  $x = \overline{[b_0, \dots, b_{k-1}]}$  velja  $\overline{[b_{k-1}, \dots, b_0]} = -\frac{1}{x^*}$ .

*Dokaz.* Naj bodo  $s_i = b_i + 1/z$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  funkcije z  $b_i \geq 1$  za vse  $i$ . Po definiciji velja

$$[b_0, b_1, b_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} s_0 \cdots s_n(\infty),$$

kjer bi lahko namesto  $\infty$  vstavili poljubno točko, ki je različna od odbojne negibne točke iz leme. Predpostavimo da je zaporedje  $b_0, b_1, b_2, \dots$  periodično s periodo  $k$  in označimo  $S = s_0 \cdots s_{k-1}$ . Privlačno negibno točko  $S$  označimo z  $\zeta > 1$ . Naj bo

$$K = \{\infty, s_0(\infty), s_0 s_1(\infty), \dots, s_0 \cdots s_{k-2}(\infty)\}.$$

S pomočjo leme sklepamo, da je  $K \subset [1, \infty)$  in ker leži odbojna negibna točka  $S$  na intervalu  $(-1, 0)$  velja  $S^n(z) \rightarrow \zeta$  za vse  $z \in K$ . To bi lahko ekvivalentno povedali kot  $s_0 \cdots s_n(\infty) \rightarrow \zeta$  ko  $n \rightarrow \infty$ . Torej je

$$\overline{[b_0, \dots, b_{k-1}]} = [b_0, b_1, \dots] = \zeta.$$

Ker je  $\zeta$  enak periodičnemu verižnemu ulomku, je kvadratni iracional in po trditvi 3 velja, da je  $S \in \Gamma$ . Iz te trditve sledi tudi, da je druga (odbojna) negibna točka  $S$  enaka  $\zeta^*$ .

Kot v lemi zdaj obrnimo periodo zaporedja na  $b_{k-1}, \dots, b_0$  in označimo privlačno negibno točko kompozituma  $\tilde{S} = s_{k-1} \cdots s_0$  z  $\tilde{\zeta}$ . Po enakem premisleku kot zgoraj velja

$$\overline{[b_{k-1}, \dots, b_0]} = \tilde{\zeta}.$$

Zdaj še enkrat uporabimo lemo pri sklepu, da je tudi  $-1/\tilde{\zeta}$  odbojna negibna točka  $S$ . Ker ima  $S$  natanko eno odbojno odbojno negibno točko, torej velja  $-1/\tilde{\zeta} = \zeta^*$ . To nas pripelje do željenega rezultata

$$\overline{[b_{k-1}, \dots, b_0]} = -\frac{1}{\zeta^*}.$$

□



## Angleško-slovenski slovar strokovnih izrazov

<b>algebraic conjugate</b>	algebraična konjugirana vrednost
<b>Banach fixed-point theorem</b>	Banachovo skrčitveno načelo
<b>continued fraction</b>	verižni ulomek
<b>eventually periodic</b>	sčasoma periodičen
<b>extended complex plane</b>	razširjena kompleksna ravnina
<b>extended real axis</b>	razširjena realna os
<b>fixed point</b>	negibna točka
<b>general linear group</b>	splošna linearna grupa
<b>loxodromic isometries</b>	loksodromične izometrije
<b>modular group</b>	modularna grupa
<b>Möbius map</b>	Möbiusova transformacija
<b>periodic</b>	periodičen
<b>projective linear group</b>	projektivna linearna grupa
<b>quadratic irrational</b>	kvadratno iracionalno število
<b>Riemman sphere</b>	Riemmanova sfera

## Literatura

- [1] A. F. Beardon, *Möbius Maps and Periodic Continued Fractions*, Mathematics Magazine **88** (2015) 272–277.
- [2] Zapiski predavanj predmeta proseminar B, profesorja dr. Igorja Klepa (Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko, študijsko leto 2018/2019).
- [3] *Hyperbolic geometry*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 27. 2. 2020], dostopno na [https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic\\_geometry](https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_geometry).
- [4] *Poincaré half-plane model*, v: Wikipedia, The Free Encyclopedia, [ogled 27. 2. 2020], dostopno na [https://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9\\_half-plane\\_model](https://en.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9_half-plane_model).
- [5] G. H. Hardy in E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth edition*, Oxford Science Pub, Slarendon Press, Oxford, 1979.
- [6] R. Schwartz, *Möbius Transformations and Circles*, October 8, 2007, dostopno na <https://www.math.brown.edu/~res/MFS/handout5.pdf>.