Möbiusove transformacije in periodični verižni ulomki

Nejc Zajc

Seminar, 14. 4. 2020

Verižni ulomki

Verižni ulomki so oblike

$$b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \ddots}}.$$

Verižni ulomki

Za celo število b_0 in naravna števila $b_1, b_2, \ldots$ je enostavni verižni ulomek

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots}} = \lim_{n\to\infty} [b_0, b_1, \ldots, b_n].$$

Njegove približke označujemo

$$c_n = [b_0, b_1, \ldots, b_n] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{b_n}}}.$$

Verižni ulomki

Za celo število b_0 in naravna števila $b_1, b_2, \ldots$ je enostavni verižni ulomek

$$[b_0, b_1, b_2, \ldots] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{b_2 + \ddots}} = \lim_{n\to\infty}[b_0, b_1, \ldots, b_n].$$

Njegove približke označujemo

$$c_n = [b_0, b_1, \ldots, b_n] = b_0 + \cfrac{1}{b_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{b_n}}}.$$

Periodični verižni ulomek označimo $\overline{[b_0, \ldots, b_{k-1}]}$.

Kvadratna iracionalna števila

Definicija

Realno število x je ***kvadratno iracionalno število*** *(kvadratni iracional), če je iracionalno število in ničla kvadratnega polinoma P s celoštevilskimi koeficienti.*

Kvadratna iracionalna števila

Definicija

*Realno število x je **kvadratno iracionalno število** (kvadratni iracional), če je iracionalno število in ničla kvadratnega polinoma P s celoštevilskimi koeficienti.*

Trditev

Verižni ulomek $x = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$ je sčasoma periodičen natanko tedaj, ko je x kvadratni iracional.

Kvadratna iracionalna števila

Definicija

Realno število x je ***kvadratno iracionalno število*** *(kvadratni iracional), če je iracionalno število in ničla kvadratnega polinoma P s celoštevilskimi koeficienti.*

Trditev

Verižni ulomek $x = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$ je sčasoma periodičen natanko tedaj, ko je x kvadratni iracional.

Trditev

Verižni ulomek $x = [b_0, b_1, b_2, \ldots]$ je periodičen natanko tedaj, ko je x kvadratni iracional, katerega algebraična konjugirana vrednost x^* leži na intervalu $(-1, 0)$.

Galois-ev izrek

Izrek (Galois-ev izrek)

Za $x = \overline{[b_0, \ldots, b_{k-1}]}$ *velja* $\overline{[b_{k-1}, \ldots, b_0]} = -\frac{1}{x^*}$.

Möbiusova transformacija

Definicija

*Funkcija g z domeno $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ je **Möbiusova transformacija**, če jo lahko zapišemo v obliki*

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

kjer so a, b, c in d kompleksna števila za katera velja $ad - bc \neq 0$. Če je $c \neq 0$, potem velja $g(\infty) = \frac{a}{c}$ in $g(-\frac{d}{c}) = \infty$, sicer je $g(\infty) = \infty$.

Modularna grupa

Definicija

Modularna grupa Γ *je grupa vseh Möbiusovih transformacij s celoštevilskimi koeficienti* a, b, c *in* d, *za katere velja* $ad - bc = 1$.

Modularna grupa

Definicija

Modularna grupa Γ *je grupa vseh Möbiusovih transformacij s celoštevilskimi koeficienti* a, b, c *in* d, *za katere velja* $ad - bc = 1$.

Definicija

Loksodromične izometrije $\mathbb{H}$ *so Möbiusove transformacije, ki ohranjajo* $\mathbb{H}$ *in imajo dve različni negibni točki.*

Modularna grupa

Definicija

Modularna grupa Γ *je grupa vseh Möbiusovih transformacij s celoštevilskimi koeficienti* a, b, c *in* d*, za katere velja* $ad - bc = 1$.

Definicija

Loksodromične izometrije $\mathbb{H}$ *so Möbiusove transformacije, ki ohranjajo* $\mathbb{H}$ *in imajo dve različni negibni točki.*

Trditev

Realno število x *je kvadratno iracionalno število natanko tedaj ko je negibna točka nekega loksodromičnega elementa* g *modularne grupe* Γ*. Tedaj je algebraična konjugirana vrednost* x^* *druga negibna točka* g*.*

Dokaz izreka

Lema

Za funkcije s_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$ oblike $s : z \mapsto b + 1/z$, kjer je $b \geq 1$, ima končni kompozitum $S = s_1 \cdots s_k$ privlačno negibno točko $\zeta \in (1, \infty)$ in odbojno negibno točko $\tilde{\zeta} \in (-1, 0)$.

Dokaz izreka

Izrek (Galois-ev izrek)

Za $x = \overline{[b_0, \ldots, b_{k-1}]}$ *velja* $\overline{[b_{k-1}, \ldots, b_0]} = -\frac{1}{x^*}$.