

---

## Laboratorio 2: Modelado Avanzado

### **Profesores:**

Carlos Andrés Lozano,  
Germán Adolfo Montoya,

### **Profesor de Laboratorio:**

Juan Andrés Mendez

## 1 Objetivo

El propósito de este laboratorio es introducir a los estudiantes en la construcción y resolución de modelos matemáticos complejos, aplicados a problemas de optimización combinatoria, asignación de recursos y planificación de rutas. A través de la formulación matemática y su implementación en herramientas como **Pyomo**, los estudiantes aprenderán a transformar problemas del mundo real—que abarcan desde la distribución de recursos en misiones humanitarias y el diseño de redes de transporte, hasta la cobertura de tableros y la planificación de rutas de inspección—en modelos optimizables. En este proceso, se enfatizará la correcta identificación y definición de conjuntos, parámetros, variables de decisión, funciones objetivo y restricciones, incluyendo aspectos avanzados como la adaptación del modelo para escenarios escalables y con múltiples agentes (como en la extensión del TSP a múltiples equipos).

---

## 2 Problemas

### 2.1 Problema 1: Distribución Óptima de Recursos en una Misión Humanitaria

#### 2.1.1. Descripción del Problema

Este ejercicio es una variación del problema 3 del anterior laboratorio. El objetivo es transportar **recursos esenciales** a distintas zonas de Zambia utilizando una **flota de 3 aviones** (Ver Cuadro 1). La diferencia en este caso es que se permite que la mayoría de los recursos se dividan y transporten en fracciones, excepto los equipos médicos, que son dispositivos que solo se pueden transportar en uniades (300 kg cada uno).

Cada recurso posee un **peso y un volumen por kilogramo** como se puede observar en el Cuadro 2. Debido a ello, es necesario realizar un preprocesamiento de los datos para ajustar la escala y permitir la modelación de los recursos divisibles. Es importante mencionar que los recursos si bien son divisibles no son infinitos es decir, el peso de cada recurso funciona como una capacidad que cada recurso tiene para poder ser enviados en los aviones.

#### 2.1.2. Datos del Problema

**Recursos:** Valor, Peso (TON) y Volumen ( $m^3$ ) por unidad

Recurso	Valor	Peso (TON)	Volumen ( $m^3$ )
Alimentos Básicos	50	15	8
Medicinas	100	5	2
Equipos Médicos	120	20	10
Agua Potable	60	18	12
Mantas	40	10	6

Cuadro 1: Características de cada recurso.

**Aviones:** Capacidad de Peso (TON) y Volumen ( $m^3$ )

---

Avión	Capacidad (TON)	Capacidad (m <sup>3</sup> )
1	30	25
2	40	30
3	50	35

Cuadro 2: Capacidades de cada avión.

Además, se deben considerar las siguientes **limitaciones logísticas**:

- **Seguridad de Medicamentos:** Las medicinas no podrán transportarse en el Avión 1.
- **Compatibilidad:** Los equipos médicos y el agua potable no pueden viajar en el mismo avión para evitar contaminación cruzada.

### 2.1.3. Instrucciones

Realice las siguientes tareas sin revelar la solución completa:

1. **Preprocesamiento de Datos:** Ajuste las unidades de medida de los recursos para modelar correctamente aquellos que son divisibles.
2. **Formulación del Modelo Matemático:** Desarrolle un modelo en el que identifique y defina:
  - Los **conjuntos**.
  - Los **parámetros** relevantes.
  - Las **variables de decisión**.
  - Una **función objetivo** adecuada.
  - Las **restricciones** del problema.
  - El **tipo de problema**.
3. **Implementación en Pyomo:** Desarrolle el modelo en Pyomo siguiendo estos pasos:
  - a. Inicialice el modelo.
  - b. Defina los conjuntos y parámetros basándose en la información del problema.

- 
- c. Declare las variables de decisión, indicando el dominio correcto para cada una.
  - d. Plantee la función objetivo y las restricciones de forma general, sin revelar la formulación completa.
  - e. Configure y ejecute el solver adecuado y realice un análisis de la solución.
  - f. Genere visualizaciones (gráficos o tablas) que faciliten la interpretación de la solución.
4. **Análisis de Resultados:** Evalúe la solución obtenida y proponga posibles mejoras o recomendaciones.

---

## 2.2 Problema 2: Redes de Transporte

### 2.2.1. Descripción del Problema

Durante la temporada navideña en Colombia, la demanda de productos (juguetes, ropa, electrodomésticos y alimentos tradicionales) aumenta considerablemente en diversas regiones. Dos ciudades principales, Bogotá y Medellín, deben abastecer a destinos como Cali, Barranquilla, Pasto, Tunja, Chía y Manizales, pese a tener una oferta limitada por restricciones en la cadena de suministro (ver Cuadro 3).

El objetivo es diseñar una red de transporte que minimice los costos de envío y garantice el cumplimiento de la demanda en cada ciudad destino, los datos base están consignados en el Cuadro 4.

Ciudad Origen	Oferta [tons]
Bogotá	550
Medellín	700

Cuadro 3: Oferta disponible en las ciudades de origen.

### 2.2.2. Datos del Problema

Ciudad Destino	Bogotá [USD/ton]	Medellín [USD/ton]	Demanda [tons]
Cali	-	2.5	125
Barranquilla	2.5	-	175
Pasto	1.6	2.0	225
Tunja	1.4	1.0	250
Chía	0.8	1.0	225
Manizales	1.4	0.8	200

Cuadro 4: Costos de transporte y demanda de productos por ciudad destino.

### 2.2.3. Instrucciones

1. **Formulación del Modelo Matemático:** Defina de manera general:

- 
- Los **conjuntos**.
  - Los **parámetros** relevantes.
  - Las **variables de decisión**.
  - Una **función objetivo** adecuada.
  - Las **restricciones** del problema.
  - El **tipo de problema**.

2. **Implementación en Pyomo:** Guíese por los siguientes pasos:

- a. Defina el modelo.
- b. Establezca los conjuntos y parámetros a partir de la información suministrada.
- c. Declare las variables de decisión con el dominio adecuado.
- d. Especifique de forma general la función objetivo y las restricciones.
- e. Configure y ejecute el solver.
- f. Incorpore el cambio de mover **50 toneladas de oferta de Medellín a Bogotá** y compare los resultados.

3. **Presentación de Resultados:** Utilice gráficos o tablas para ilustrar la asignación óptima y discuta los cambios observados, proponiendo recomendaciones basadas en el análisis.

---

## 2.3 Problema 3: Cubrimiento del Tablero con Damas

### 2.3.1. Descripción del Problema

El objetivo de este ejercicio es determinar la **cantidad mínima de damas** necesarias para cubrir todas las casillas de un tablero de ajedrez de  $8 \times 8$ . Recuerde que una **dama** puede moverse en cualquier dirección (vertical, horizontal o diagonal) y la solución debe posicionar las damas necesarias de forma que, en conjunto, todas las casillas sean cubiertas.

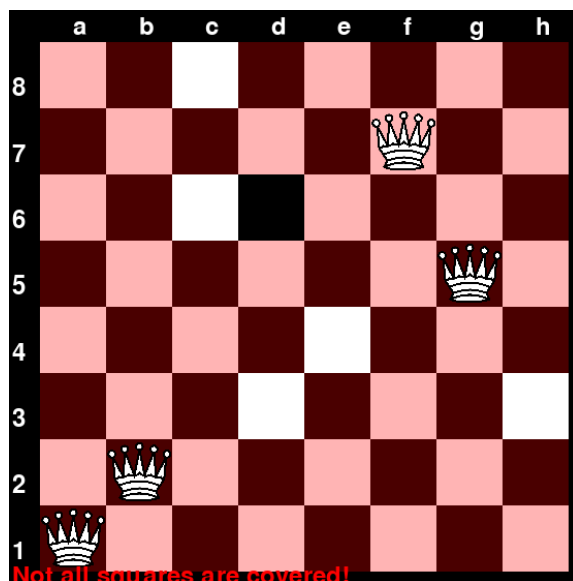


Figura 1: N-reinas problema

### 2.3.2. Instrucciones

1. **Generación de la Matriz de Cobertura:** Desarrolle una función en **Python** que, dada una posición en el tablero, determine qué casillas serían cubiertas por una dama en esa posición.

2. **Formulación del Modelo Matemático:**

Basándonos en la implementación vista en el laboratorio un problema de cobertura ajustar el modelado matemático para que se pueda aplicar para este problema.

- 
- Desarrolle el modelo matemático para determinar la la disposición de las damas en el tablero.
  - Identifique y defina:
    - Los **conjuntos**.
    - Los **parámetros** relevantes.
    - Las **variables de decisión**.
    - Una **función objetivo** adecuada.
    - Las **restricciones** del problema.
    - El **tipo de problema**.

### 3. Implementación en Pyomo:

- Implemente el preprocesamiento y la formulación del modelo en **Pyomo**.
  - Documente el código, explicando cada sección
4. **Resolución y Análisis:** Utilice Pyomo para resolver el modelo y analice la solución obtenida, incluyendo una posible visualización de la disposición óptima de damas en el tablero.

#### 2.3.3. Visualización y Código Base

Para facilitar la visualización de la solución, se proporcionará el siguiente repositorio con una implementación en **pygame**. Este repositorio incluirá un esqueleto de código que los estudiantes deberán completar para resolver el problema por medio de **Pyomo**, importante revisar el readme del repo para que entiendan cómo usar el módulo de `queen_mapper`.

A continuación, se muestra cómo instalar **pygame** tanto en Anaconda como utilizando `pip`:

Listing 1: Instalación de **pygame** con Anaconda y `pip`

```
1 # Para instalar pygame usando Anaconda:
2 conda install -c cogsci pygame
3
4 # Para instalar pygame utilizando pip:
5 pip install pygame
```

Los estudiantes deberán completar la implementación en **Pyomo** para visualizar la solución obtenida por el modelo en **Pyomo** por medio de **Pygame**.



---

## 2.4 Problema 4: Ruta de Mínimo Costo en una Red de Nodos Móviles Inalámbricos

### 2.4.1. Descripción del Problema

Una red de 7 nodos móviles inalámbricos posee la topología de conexión que se muestra en la Figura 2. Cada enlace entre dos nodos existe únicamente si la distancia Euclidiana entre ellos es menor o igual a 20 unidades, y el costo asociado a dicho enlace es igual a la distancia entre el par de nodos. Se requiere determinar la ruta de mínimo costo entre los nodos 4 y 6.

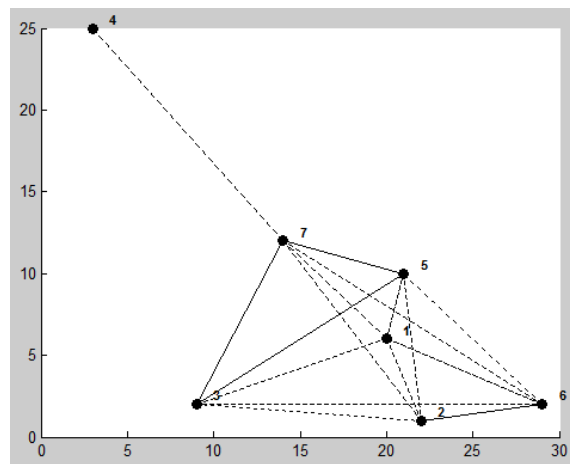


Figura 2: Gráfico de conexiones

### 2.4.2. Datos del Problema

Las coordenadas de los nodos se describen en el Cuadro 5:

### 2.4.3. Instrucciones

Realice las siguientes tareas, poniendo especial énfasis en el preprocesamiento de datos:

#### 1. Preprocesamiento y Parametrización:

- Parametrice en **Pyomo** las posiciones (coordenadas X e Y) de cada uno de los 7 nodos.

---

Nodo	Coordenada X	Coordenada Y
1	20	6
2	22	1
3	9	2
4	3	25
5	21	10
6	29	2
7	14	12

---

Cuadro 5: Posiciones de los nodos en el plano.

- Utilice estas posiciones para calcular la distancia Euclidiana entre cada par de nodos. La fórmula de la distancia entre dos nodos  $i$  y  $j$  es:

$$d_{ij} = \sqrt{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}.$$

- Determine, mediante programación en **python**, si existe enlace entre un par de nodos. Se considerará que existe enlace si  $d_{ij} \leq 20$ .
- Con base en lo anterior, defina la matriz de costos  $c_{ij}$  que utilizará en el modelo matemático.

## 2. Formulación del Modelo Matemático:

- Desarrolle el modelo matemático para determinar la ruta de mínimo costo entre el nodo 4 y el nodo 6 utilizando la matriz de costos obtenida.
- Identifique y defina:
  - Los **conjuntos**.
  - Los **parámetros** relevantes.
  - Las **variables de decisión**.
  - Una **función objetivo** adecuada.
  - Las **restricciones** del problema.
  - El **tipo de problema**.

## 3. Implementación en Pyomo:

- Implemente el preprocesamiento y la formulación del modelo en **Pyomo**.

- 
- Documente el código, explicando cada sección y, en especial, la parte que determina la matriz de costos a partir de las posiciones de los nodos.

#### 4. **Análisis de Resultados:**

- Ejecute el modelo para obtener la ruta de mínimo costo entre el nodo 4 y el nodo 6.
- Analice la solución, verificando que los enlaces utilizados cumplan con la condición de conexión.
- Discuta la importancia del preprocesamiento y cómo éste impacta en la correcta formulación del modelo matemático.

---

## 2.5 Problema 5: Rutas Óptimas para Equipos de Inspección de infraestructura en Colombia

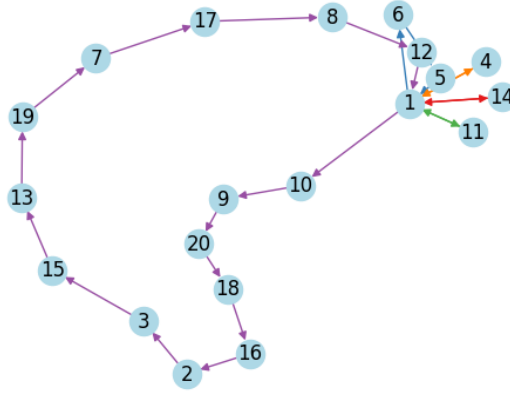


Figura 3: Multi-TSP

### 2.5.1. Descripción del Problema

La Agencia Nacional de Infraestructura (ANI) de Colombia ha lanzado un programa para inspeccionar y evaluar el estado de las carreteras y puentes del país. Para ello, se han asignado equipos de inspección compuestos por ingenieros y técnicos especializados, los cuales deben visitar una lista específica de localidades distribuidas en diversas regiones.

Con el objetivo de optimizar recursos y reducir tiempos de desplazamiento, es fundamental que cada equipo planifique su ruta de forma que se minimicen los costos asociados al viaje (distancia, tiempo y condiciones de las vías). Este problema se relaciona con la clásica **Problema del Viajante (TSP)** para un único viajero, cuya formulación matemática se proporcionará, y se debe extender para cubrir el caso de múltiples equipos. Es importante destacar que **todos los equipos parten de la misma localidad, identificada como la localidad 0, y deben regresar a este punto al finalizar la inspección.**

### 2.5.2. Datos del Problema

- **Localidades a Inspeccionar:** Cada equipo debe visitar todas las localidades asignadas sin repetir ninguna, y retornar a la **localidad 0**.

- 
- **Matriz de Costos:** Se proporcionará una colección de archivos que contienen la matriz de costos, donde cada elemento  $c_{ij}$  representa la distancia o costo de viaje entre la localidad  $i$  y la localidad  $j$ .

**Nota:** Se evaluará la implementación utilizando 6 casos de prueba con diferentes dimensiones de localidades: 5, 10, 15, 20, 50 y 100. El objetivo es iterar el modelo para lograr resolver los tamaños más grandes. Este ejercicio de escalabilidad es una actividad de pensamiento y experimentación, no parte de la calificación final.

### 2.5.3. Instrucciones

Realice las siguientes tareas, haciendo especial énfasis en el preprocesamiento de datos y en la correcta formulación del modelo:

#### 1. Lectura y Preprocesamiento de Datos:

- Revise e importe el archivo de costos que contiene la información de distancias y tiempos de viaje entre las localidades.
- Verifique y ajuste la matriz de costos, de ser necesario, para reflejar correctamente los valores relevantes en el modelo.

#### 2. Implementación de la Formulación del TSP para un Único Viajero:

- Utilice la formulación matemática del TSP proporcionada para un único viajero e impleméntela en Pyomo.
- Ejecute el modelo utilizando el archivo de costos correspondiente y analice los resultados.
- En el informe, responda a la siguiente pregunta: "*¿Qué evidencia presenta el resultado obtenido? ¿Es correcto el resultado de la implementación? En caso negativo, ¿cuál es el problema identificado y cómo lo resolvería?*"

#### 3. Extensión a Múltiples Equipos (Salesmen):

- Extienda la formulación del TSP para que soporte múltiples equipos de inspección, donde cada uno debe iniciar y finalizar en la **localidad 0**.
- Asegúrese de que en la visualización de su modelo identifique claramente qué equipo (salesman) realiza cada recorrido.

#### 4. Evaluación y Análisis:

- 
- Ejecute su modelo para los 6 casos de prueba (con 5, 10, 15, 20, 50 y 100 localidades), por limitaciones computacionales es de esperarse que no se puedan correr todos los casos, indique cual el tamaño más grande que logro resolver su modelo.
  - Para cada uno de los casos que logro correr experimente con al menos tres configuraciones diferentes respecto al número de equipos (por ejemplo, 1, 3 y 5 equipos) o tamaños de grupos de inspección.
  - Compare los resultados obtenidos, destacando el costo total de desplazamiento en cada caso, y discuta cuál es la configuración ideal de equipos para optimizar el recorrido para cada caso.

## 5. Visualización:

- Utilice la librería de visualización de su preferencia para generar gráficos o mapas que ilustren las rutas óptimas.
- Asegúrese de que se evidencie claramente la **localidad 0** y que se identifique qué equipo realizó cada recorrido.

---

### 3 Entregables y Criterios de Calificación

**Única entrega:** Se debe entregar un informe escrito que contenga la formulación matemática completa del problema, la implementación en `Pyomo` y los resultados obtenidos. El informe debe incluir, como mínimo:

- **Explicación del Preprocesamiento de Datos:** Describa detalladamente cómo se procesaron los datos iniciales para poder trabajar con ellos (cuando aplique).
- **Definición del Modelo Matemático:** Presente la formulación completa, incluyendo la definición de:
  - Conjuntos
  - Parámetros
  - Variables de Decisión
  - Función Objetivo
  - Restricciones
- **Código en Pyomo:** Incluya el código utilizado para implementar el modelo, debidamente documentado con comentarios que expliquen la función de cada sección y línea importante del código.
- **Resultados y Análisis:** Presente los resultados obtenidos (por ejemplo, mediante tablas o gráficos) y ofrezca una interpretación de los mismos. Si evaluaron cambios (como el traslado de 50 toneladas en el Problema 2), asegúrese de incluir también esos resultados y sus respectivas discusiones.

La evaluación del entregable se realizará de forma global considerando los siguientes aspectos:

- **Preprocesamiento y Formulación del Modelo (40 %):**
  - Claridad y coherencia en la identificación y definición de conjuntos, parámetros, variables de decisión, función objetivo y restricciones.
  - Justificación adecuada de las transformaciones y preprocesamiento de datos aplicados.
- **Implementación en Pyomo (30 %):**

- 
- Correcta estructuración del modelo en Pyomo, con la declaración precisa de conjuntos, parámetros y variables.
  - Implementación correcta de la función objetivo y las restricciones, y adecuada configuración y ejecución del solver.
  - **Análisis de Resultados y Visualización (20 %):**
    - Interpretación clara y precisa de la solución obtenida.
    - Inclusión de visualizaciones (gráficos, tablas, etc.) que faciliten la comprensión de la asignación óptima y el impacto de cambios relevantes en el modelo.
  - **Presentación y Documentación (10 %):**
    - Organización, claridad y calidad de la redacción del informe.
    - Uso correcto de la notación y formato en la presentación del modelo y resultados.
    - Documentación adecuada y comprensible del código en Pyomo.

**Fecha de entrega:** Miércoles 26 de febrero.

**Tener en cuenta:**

- No se reciben entregas por fuera del plazo máximo y tampoco por correo. Las entregas solo se reciben por **Bloque Neón**.
- Este laboratorio se puede entregar en parejas.
- **IMPORTANTE!!!** Junto a los archivos de la entrega adjuntar los nombres de los integrantes del equipo.