Formulario opciones

Curso: Instrumentos Derivados
Profesor: Francisco Rantul
Ayudante: Mateo Canales

Pregunta 4 Hull 15.35

El precio de una acción es actualmente $\$\,50$. Suponga que el rendimiento esperado de la acción es de 18% y su volatilidad es de 30%.

a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad para el precio de la acción en 2 años?

b) Calcule la media de la distribución

c) Calcule desviación estándar de la distribución

d) Determine el intervalo de confianza del 95%.

Parte a)

Datos: $S_0 = \$\,50$, $\mu = 0.18$, $T = 2$, $\sigma = 30\%$

Aplicamos la fórmula de movimiento browniano geométrico:

$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}\left(\ln(S_0) + (\mu - \sigma^2/2) \cdot T,\ \sigma^2 \cdot T\right)$

$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}\left(\ln(50) + (0.18 - 0.30^2/2) \cdot 2,\ 0.30^2 \cdot 2\right)$

$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}\left(3.912 + 0.135 \cdot 2, 0.09\right)$

$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}\left(3.912 + 0.27, 0.09\right)$

$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}\left(4.182, 0.09\right)$

La distibución de Probabilidad del Precio de la acción dado los datos es log normal, ya que los precios no pueden tomar valores negativos, quedando establecido como propiedad. Con los parámetros de ésta $\mathcal{N}\left(4.182, 0.09\right)$

Parte b)

Según la ecuación del libro (15.4) la media de la distribución se define por:

$\mathbb{E}(S_T) = S_0 \cdot e^{\mu \cdot T}$

$\mathbb{E}(S_T) = 50 \cdot e^{0.18 \cdot 2}$

$\mathbb{E}(S_T) = 50 \cdot e^{0.36}$

$\mathbb{E}(S_T) = 50 \cdot e^{0.36}$

$\mathbb{E}(S_T) = 50 \cdot 1.433$

$\mathbb{E}(S_T) = 71.664$

Por lo tanto, la media de la distribución es \$ 71.66 .

Parte c)

Según la ecuación del libro (15.5) la varianza de la distribución se define por:

$\mathrm{var}(S_T) = S_0^2 \cdot e^{2 \cdot \mu \cdot T} \cdot \left(e^{\sigma^2 \cdot T} - 1\right)$

$\mathrm{var}(S_T) = 50^2 \cdot e^{2 \cdot 0.18 \cdot 2} \cdot \left(e^{0.30^2 \cdot 2} - 1\right)$

$\mathrm{var}(S_T) = 2{,}500 \cdot e^{0.72} \cdot (e^{0.18} - 1)$

$\mathrm{var}(S_T) = 2{,}500 \cdot 2.054 \cdot (1.197 - 1)$

$\mathrm{var}(S_T) = 5{,}135.69 \cdot (0.197)$

$\mathrm{var}(S_T) = 1{,}012.62$

$\mathrm{sd}(S_T)^2 = \mathrm{var}(S_T)$

$\mathrm{sd}(S_T) = \sqrt{\mathrm{var}(S_T)}$

$\mathrm{sd}(S_T) = \sqrt{1{,}012.62}$

$\mathrm{sd}(S_T) = 31.82$

Por lo tanto, la desviación estandard de la distribución es 31.82.

Parte d)

Para determinar el intervalo de confianza del 95% utilizamos la fórmula:

$IC = \left[\mathbb{E}(S_T) - Z_{\alpha/2} \cdot \mathrm{sd} S_T,\ \mathbb{E}(S_T) + Z_{\alpha/2} \cdot \mathrm{sd}(S_T)\right]$

$IC = \mathbb{E}(S_T) \pm Z_{\alpha/2} \mathrm{sd}(S_T))$

$IC = 71.66 \pm 1.96 \cdot 31.82$

$IC = 71.66 \pm 62.37$

$IC = [9.29, 134.03]$

Se puede decir con un 95% de confianza que el precio de la acción estará entre \$ 9.29 y \$ 134.03 como precio final a los 2 años

Pregunta 5 Hull 14.20

Suponga que x es el rendimiento al vencimiento (yield to maturity) con capitalización continua de un bono cupón cero que paga \$1 en el tiempo T. Se asume que x sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dx = a \cdot (x_0 - x^2)\, dt + sx\, dz \tag{1}$$

Dónde a, x_0 y s son constantes positivas, y dz es un proceso de Wiener. ¿Cuál es el proceso seguido por el precio del bono?

Respuesta

El precio del bono cupón cero que paga 1 en T está dado por:

$$B(t) = e^{-x(T-t)}$$

El Lema de Itô dice que, si una variable x sigue un proceso estocástico $dx = \mu dt + \sigma dz$, y $f(x,t)$ es una función suficientemente suave, entonces:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial x} dz$$

Aplicamos el Lema de Itô al proceso $B(t)$, que depende de x. Como:

$$dx = a(x_0 - x)\, dt + sx\, dz$$

Calculamos derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B}{\partial t} &= xe^{-x(T-t)} = xB(t) \\
\frac{\partial B}{\partial x} &= -(T-t)B(t) \\
\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} &= (T-t)^2 B(t)
\end{aligned}$$

Aplicamos Itô:

$$\begin{aligned}
dB &= \left[\frac{\partial B}{\partial x} \cdot a(x_0 - x) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} \cdot (sx)^2 \right] dt + \frac{\partial B}{\partial x} \cdot sx\, dz \\
&= B(t) \left[-(T-t)a(x_0 - x) + \frac{1}{2}(T-t)^2 s^2 x^2 \right] dt - (T-t)sxB(t)\, dz
\end{aligned}$$

El precio del bono sigue el siguiente proceso estocástico:

$$dB = B(t) \left[-(T-t)a(x_0 - x) + \frac{1}{2}(T-t)^2 s^2 x^2 \right] dt - (T-t)sxB(t)\, dz$$

Pregunta 6 Hull 15.26

Demuestre que las fórmulas de Black-Scholes-Merton para opciones call y put satisfacen la paridad put-call.

Respuesta

La fórmula de paridad put-call establece:
$S_0 + p = K \cdot e^{-r \cdot T} + c$

Utilizamos las fórmulas de Black-Scholes-Merton para call y put:

$c = S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot (T)} \cdot \mathcal{N}(d_2)$

$p = K \cdot e^{-r \cdot (T)} \cdot \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \cdot \mathcal{N}(-d_1)$

Reemplazamos la call:

$S_0 + p = Ke^{-rT} + S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) - K \cdot e^{-r \cdot (T)} \cdot \mathcal{N}(d_2)$

$S_0 + p = S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) + Ke^{-rT} - K \cdot e^{-r \cdot (T)} \cdot \mathcal{N}(d_2)$

$S_0 + p = S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) + Ke^{-rT} \cdot (1 - \mathcal{N}(d_2))$

Sabemos que $\mathcal{N}(-d) = 1 - \mathcal{N}(d)$, por lo tanto, podemos reemplazar:

$S_0 + p = S_0 \cdot \mathcal{N}(d_1) + Ke^{-rT} \cdot (1 - \mathcal{N}(d_2))$

$S_0 + p = S_0 \cdot (1 - \mathcal{N}(-d_1)) + Ke^{-rT} \cdot (\mathcal{N}(-d_2))$

$S_0 + p = S_0 - S_0 \cdot \mathcal{N}(-d_1) + Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}(-d_2)$

$S_0 + p = S_0 + Ke^{-rT} \cdot \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \cdot \mathcal{N}(-d_1)$

$S_0 + p = S_0 + p$

Se verifica que $c + Ke^{-rT} = p + S_0$, por lo tanto, se cumple la paridad put-call para las fórmulas de Black-Scholes-Merton.