Ayudantía 4
Árboles Binomiales
Instrumentos Derivados

Profesor: Francisco Rantul

Ayudante: Mateo Canales

Universidad Diego Portales

04 De Junio, 2025

Pregunta 1

El precio de una acción es de $ 100 . En 6 meses más se espera que suba o baje un 10%. La tasa libre de riesgo es del 8% anual continua.

a) ¿Cuál es el valor de una opción call europea de 1 año con strike Price $K = \$\,100$?

b) ¿Cuál es el valor de una opción put europea de 1 año con strike Price $K = \$\,100$?

c) Verifique que se cumple la paridad Put-Call

Pregunta 1 Parte a)

El precio de una acción es de $\$\,100$. En 6 meses más se espera que suba o baje un 10%. La tasa libre de riesgo es del 8% anual continua.

a) ¿Cuál es el valor de una opción call europea de 1 año con strike Price $K = \$\,100$?

Desarrollo Parte a)

Valor de la acción

$S_0 = \$\,100$

$S_0 d = 100 \cdot 0.9 = \$\,90$

$S_0 u = 100 \cdot 1.1 = \$\,110$

$S_0 d^2 = 100 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = \$\,81$

$S_0 du = 100 \cdot 0.9 \cdot 1.1 = \$\,99$

$S_0 u^2 = 100 \cdot 1.1 \cdot 1.1 = \$\,121$

Valor de la opción:

$f_{dd} = \max[81 - 100, 0] = \max[-19, 0]$

$f_{dd} = 0$

$f_{du} = \max[99 - 100, 0] = \max[-1, 0]$

$f_{du} = 0$

$f_{uu} = \max[121 - 100, 0] = \max[21, 0]$

$f_{uu} = 21$

Desarrollo Parte a)

Datos: $u = 1.1,\ d = 0.9,\ \Delta_t = 0.5,\ r = 0.08.$

Fórmula : $p = \frac{e^{r\cdot\Delta t} - d}{u - d}$

Desarrollando la fórmula:

$p = \frac{e^{0.08\cdot 0.5} - 0.9}{1.1 - 0.9}$

$p = \frac{0.141}{0.2}$

$p = 0.704$

Usamos la fórmula neutral al riesgo

Fórmula : $f = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot(p\cdot f_u + (1-p)\cdot f_d)$

$f_u = e^{-0.08\cdot 0.5}(0.704\cdot 21 + (1-0.704)\cdot 0) = 14.208$

$f_d = e^{-0.08\cdot 0.5}(0.704\cdot 0 + (1-0.704)\cdot 0) = 0$

$f = e^{-0.08\cdot 0.5}(0.704\cdot 14.208 + (1-0.704)\cdot 0) = 9.612$

$\boxed{f = 9.612}$

Pregunta 1 Parte b)

El precio de una acción es de $\$ 100$. En 6 meses más se espera que suba o baje un 10%. La tasa libre de riesgo es del 8% anual continua.

a) ¿Cuál es el valor de una opción put europea de 1 año con strike Price $K = \$ 100$?

Desarrollo Parte b)

Valor de la opción:

$f_{dd} = \max[100 - 81, 0] = \max[19, 0]$

$f_{dd} = 19$

$f_{du} = \max[100 - 99, 0] = \max[1, 0]$

$f_{du} = 1$

$f_{uu} = \max[100 - 121, 0] = \max[-21, 0]$

$f_{uu} = 0$

Usamos la fórmula neutral al riesgo

Fórmula : $f = e^{-r \cdot \Delta t} \cdot (p \cdot f_u + (1 - p) \cdot f_d)$

$f_u = e^{-0.08 \cdot 0.5}(0.704 \cdot 0 + (1 - 0.704) \cdot 1) = 0.285$

$f_d = e^{-0.08 \cdot 0.5}(0.704 \cdot 1 + (1 - 0.704) \cdot 19) = 6.083$

$f = e^{-0.08 \cdot 0.5}(0.704 \cdot 0.285 + (1 - 0.704) \cdot 6.083) = 1.923$

$\boxed{f = 1.923}$

Pregunta 1 Parte c)

El precio de una acción es de $\$ 100$. En 6 meses más se espera que suba o baje un 10%. La tasa libre de riesgo es del 8% anual continua.

a) Verifique que se cumple la paridad Put-Call

Desarrollo Parte c)

La paridad Put-call se define como:
$S_0 + p = K \cdot e^{-r \cdot T} + c$
El valor de la acción más el precio de la put es:
$100 + 1.923 = 101.923$
El valor presente del strike Price más el precio de la call es:
$100 \cdot e^{-0.08 \cdot 1} + 9.612 = 101.943$

—

En este caso se puede ver que existe diferencia entre ambos cálculos, sin embargo, esto se debe al los decimales utilizados, pero, si lo ingresamos directamente en la calculadora, se cumple la paridad.

Pregunta 2

El precio de una acción es de $\$ 50$. En 2 meses más podría valer $\$ 53$ o $\$ 48$. La tasa libre de riesgo es del 10% anual continua. Calcule el valor de una opción call europea de 2 meses con strike Price K=$\$ 49$. Considere un árbol de un solo paso.

a) Valorice la opción call europea usando argumentos de no arbitraje.

b) Valorice la opción call europea usando probabilidades neutrales al riesgo.

Pregunta 2 Parte a)

El precio de una acción es de \$ 50 . En 2 meses más podría valer \$ 53 o \$ 48 . La tasa libre de riesgo es del 10% anual continua. Calcule el valor de una opción call europea de 2 meses con strike Price K=\$ 49 . Considere un árbol de un solo paso.

a) Valorice la opción call europea usando argumentos de no arbitraje.

Desarrollo Parte a)

Los posibles valores de la acción son $S_{0u} = 53$, $S_{0f} = 48$. Por ende los posibles valores de la opción son:

$f_d = \max[48 - 49, 0] = \max[-1, 0]$

$f_d = 0$

$f_u = \max[53 - 49, 0] = \max[4, 0]$

$f_d = 4$

Asumamos un portafolio de $+\Delta$ acciones y una posición corta en una opción $-f$

Usaremos la fórmula:

$S_0 d \cdot \Delta - f_d = S_0 u \cdot \Delta - f_u$

$48 \cdot \Delta - 0 = 53 \cdot \Delta - 4$

$(48 - 53) \cdot \Delta = -4$

$5 \cdot \Delta = 4$

$\Delta = \frac{4}{5}$

$\boxed{\Delta = 0.8}$

Desarrollo Parte a)

En $T = \frac{2}{12}$ el valor de los portafolios pesimistas y optimistas son:
$f_d = 48 \cdot \Delta - 0 = 48 \cdot 0.8 = 38.4$
$f_u = 53 \cdot \Delta - 4 = 53 \cdot 0.8 - 4 = 38.4$
Se comprueba que el portafolio tendrá un comportamiento idéntico en ambos casos.
Teniendo en cuenta todo lo anterior, ahora podemos valorizar la opción con la fórmula en que el valor presente de la accion es igual al costo de construirla.
$S_0 \cdot \Delta - f = (S_0 u \cdot \Delta - f_u) \cdot e^{-rT}$
Con los datos: $S_0 = 50$, $\Delta = 0.8$, $S_0 u = 53$, $f_u = 4$,
$r = 0.1, T = \frac{2}{12} = 0.167$

Desarrollo Parte a)

$S_0 \cdot \Delta - f = (S_0 u \cdot \Delta - f_u) \cdot e^{-rT}$

Con los datos: $S_0 = 50$, $\Delta = 0.8$, $S_0 u = 53$, $f_u = 4$,
$r = 0.1, T = \frac{2}{12} = 0.167$

Reemplazamos:

$50 \cdot 0.8 - f = (53 \cdot 0.8 - 4) \cdot e^{0.1 \cdot 0.167}$

$40 - f = (42.4 - 4) \cdot 0.98$

$-f = (38.4) \cdot 0.98 - 40$

$-f = 37.77 - 40$

$-f = -2.229$

$\boxed{f = 2.229}$

Pregunta 2 Parte b)

El precio de una acción es de $\$ 50$. En 2 meses más podría valer $\$ 53$ o $\$ 48$. La tasa libre de riesgo es del 10% anual continua. Calcule el valor de una opción call europea de 2 meses con strike Price $K=\$ 49$. Considere un árbol de un solo paso.

b) Valorice la opción call europea usando probabilidades neutrales al riesgo.

Desarrollo Parte b)

Calculamos u y d, según la fórmula

$u|d = \frac{S_0 u|d}{S_0}$

$u = \frac{53}{50} = 1.06$

$d = \frac{48}{50} = 0.96$

Ahora usamos la fórmula de probabilidad: $p = \frac{e^{r \cdot \Delta t} - d}{u - d}$

Datos $r = 0.1$, $T = \frac{2}{12} = 0.167$, $u = 1.06$, $d = 0.96$

$p = \frac{e^{0.1 \cdot 0.167} - 0.96}{1.06 - 0.96}$

$p = \frac{1.017 - 0.96}{0.1}$

$p = \frac{0.057}{0.1}$

$\boxed{p = 0.568}$

Desarrollo Parte b)

Teniendo estos datos, podemos reemplazar enla fórmula neutral al riesgo.

$f = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot(p\cdot f_u + (1-p)\cdot f_d)$

$f = e^{-0.1\cdot 0.167}\cdot(0.568\cdot 4 + (1-0.568)\cdot 0)$

$f = 0.984\cdot(2.272 + (0.432)\cdot 0)$

$f = 0.984\cdot(2.272 + 0)$

$f = 0.984\cdot(2.272)$

$\boxed{f = 2.235}$

Pregunta 3

El precio de una acción es de \$ 40 . Cada 3 meses se espera que suba o baje un 10%. La tasa libre de riesgo es de 12% anual continua.

a) Calcule el valor de una opción put europea a 6 meses con strike Price $K = 42$.

b) Calcule una opción put americana a 6 meses con strike Price $K = 42$.

c) Explique la razón en la diferencia del valor respecto a la opción europea.

Pregunta 3 Parte a)

El precio de una acción es de \$ 40 . Cada 3 meses se espera que suba o baje un 10%. La tasa libre de riesgo es de 12% anual continua.

a) Calcule el valor de una opción put europea a 6 meses con strike Price $K = 42$.

Desarrollo Parte a)

Sabemos que en un periodo, la acción puede bajar o subir 10%.
Valor de la acción
$S_0 = \$\,40$
$S_0 d = 40 \cdot 0.9 = \$\,36$
$S_0 u = 40 \cdot 1.1 = \$\,44$
$S_0 d^2 = 40 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = \$\,32.4$
$S_0 du = 40 \cdot 0.9 \cdot 1.1 = \$\,39.6$
$S_0 u^2 = 40 \cdot 1.1 \cdot 1.1 = \$\,48.4$
Valor de la opción:
$f_{dd} = \max[42 - 32.4, 0] = \max[9.6, 0]$
$f_{dd} = 9.6$
$f_{du} = \max[42 - 39.6, 0] = \max[2.4, 0]$
$f_{du} = 2.4$
$f_{uu} = \max[42 - 48.4, 0] = \max[-6.4, 0]$
$f_{uu} = 0$

Desarrollo Parte a)

Datos: $u = 1.1,\ d = 0.9,\ \Delta_t = 0.25,\ r = 0.12.$

Fórmula : $p = \frac{e^{r\cdot\Delta t} - d}{u-d}$

Desarrollando la fórmula:

$p = \frac{e^{0.12\cdot 0.25} - 0.9}{1.1-0.9}$

$p = \frac{0.13}{0.2}$

$p = 0.652$

Usamos la fórmula neutral al riesgo

Fórmula : $f = e^{-r\cdot\Delta t}\cdot(p\cdot f_u + (1-p)\cdot f_d)$

$f_u = e^{-0.12\cdot 0.25}(0.652\cdot 0 + (1-0.652)\cdot 2.4) = 0.81$

$f_d = e^{-0.12\cdot 0.25}(0.652\cdot 2.4 + (1-0.652)\cdot 9.6) = 4.76$

$f = e^{-0.12\cdot 0.25}(0.652\cdot 0.81 + (1-0.652)\cdot 4.76) = 2.12$

$\boxed{f = 2.12}$

Pregunta 3 Parte b)

El precio de una acción es de $\$40$. Cada 3 meses se espera que suba o baje un 10%. La tasa libre de riesgo es de 12% anual continua.

b) Calcule una opción put americana a 6 meses con strike Price $K = 42$.

Desarrollo Parte b)

Sabemos que la opción put americana permite ejercicio anticipado en cada nodo, por ello, debemos calcular tambíen el valor esperado de la opción en los nodos intermedios.

Nodos terminales:

$f_{dd} = \max[42 - 32.4, 0] = 9.6$
$f_{du} = \max[42 - 39.6, 0] = 2.4$
$f_{uu} = \max[42 - 48.4, 0] = 0$

Desarrollo Parte b)

Nodos intermedio:

¿Qué pasaría si ejerzo la opción en el nodo intermedio?

$E_d = \max[42 - 36, 0] = \max[6, 0] = 6$

$E_u = \max[42 - 44, 0] = \max[-2, 0] = 0$

Y, ¿es mejor ejercer o quedarme?, ya calculamos el valor de la opción de manera neutral al riesgo con la fórmula:

$f = e^{-r \cdot \Delta t} \cdot (p \cdot f_u + (1 - p) \cdot f_d)$

$f_{d,seguir} = 4.76,\ f_{u,seguir} = 0.81$

$f_d = \max[6, 4.76] = 6$

$f_u = \max[0, 0.81] = 0.81$

Desarrollo Parte b)

Nodo inicial:

¿Qué pasaría si ejerzo la opción en el nodo inicial?

$E_0 = \max[42 - 40, 0] = \max[2, 0] = 2$

Dado que ya sé que la acción puedo ejercerla en el nodo intermedio, nodo final, o no ejercerla, debo calcular nuevamente la opción neutral al riesgo, con los nuevos valores.

$f_{seguir} = e^{-0.12 \cdot 0.25}(0.652 \cdot 0.81 + (1 - 0.652) \cdot 6 = 2.538$

Entonces, ¿ejerzo o espero?

$f = \max[2, 2.538] = 2.538$

$\boxed{f = 2.538}$

Pregunta 3 Parte c)

El precio de una acción es de $\$ 40$. Cada 3 meses se espera que suba o baje un 10%. La tasa libre de riesgo es de 12% anual continua.

c) Explique la razón en la diferencia del valor respecto a la opción europea.

Desarrollo Parte c)

La diferencia de los valores entre la opción americana y europea se debe a la posibilidad de ser ejercida en cualquier momento o nodo, viendose en algunos casos favorecidos respecto a la opción europea. En el caso anterior, el inversionista debería ejercer en el nodo C, dónde el valor de la acción es $S_o d = \$\,36$ obteniendo una ganancia de $\$\,6$ por cada acción vendida.

Pregunta 4

Los saltos temporales de una opción son de 1 mes ($\Delta_t = \frac{1}{12}$), la tasa de interés libre de riesgo local es del 5% continua anual y la tasa libre de riesgo extranjera es del 8% continua anual. La volatilidad es del 12% anual.

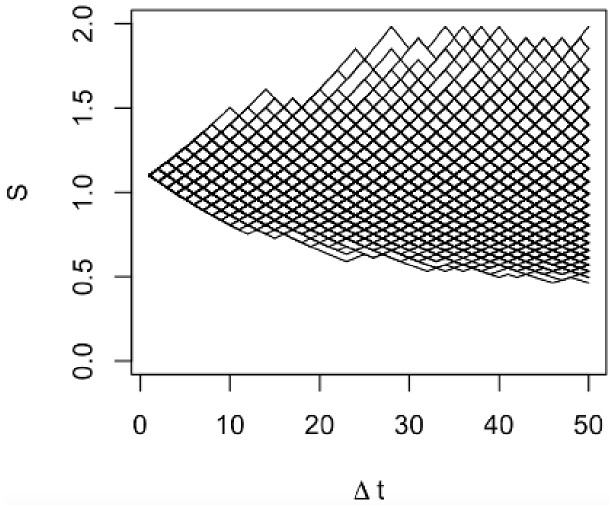
a) Calcule u, d y p cuando se construye un árbol binomial para divisas.

b) Replique el *Gráfico 1*. Dónde incluya 1000 posibles trayectorias de la divisa en R o pythom, usando $S_0 = 1.1$ y 50 saltos de $\Delta_t = 1$. (**Nota:** Use set.seed(123) o similar)

c) A que distribución tienden los precios si aumentamos la cantidad de saltos a 500.

Pregunta 4

Gráfico 1: Simulación de trayectorias de la divisa



Pregunta 5

Considere una opción call Americana de una divisa. El valor de la divisa hoy es de $700, el strike Price es de $710, la tasa libre de riesgo local es del 12% continua anual (la tasa libre de riesgo extranjera es del 4% continua anual), la volatilidad es del 40% anual y la madurez del derivado es de 6 meses.

a) Calcule u, d y p para un árbol binomial de dos pasos.

b) Calcule el valor de la opción.

c) Verifique que se obtiene el mismo resultado usando R.

d) Calcule el valor de la opción para 5, 50, 100 y 500 pasos (usando R).