Instrumentos Derivados (FEEFI003)

Nº2: Estructura de tasas de interés

Francisco Rantul

2025

Referencias

- Hull (2021) c4 (*)
- Benigna (2021) c22 (*)
- Nelson, C. R., & Siegel, A. F. (1987). Parsimonious modeling of yield curves. Journal of business, 473-489.

Tasas de Interés

- La tasa de interés de un momento en particular define la cantidad de dinero que un deudor le promete pagar a un acreedor.
- El **riesgo de crédito** es uno de los factores más importantes:

$$\text{yield} = r_f + \text{credit spread}$$

el credit spread se define en puntos base $(0,01\%)$.

Tipos de tasas

- **Tasas del Tesoro**: En EE.UU son emitidos por la FED: Treasury bills y Treasury bonds. En Chile por el Banco Central (depósitos a plazo, bonos).
- **Tasas Overnight**: Se dan por la oferta y demanda de reservas de los bancos (por regulación), son a muy corto plazo (un día). En EE.UU. es la federal funds rate; en Chile es la TPM.
- **Tasas Repo** (acuerdo de recompra): Una empresa acuerda vender titulos y comprarlos después a un precio ligeramente superior. Tienen riesgo de credito muy bajo.
- **LIBOR** (London Interbank Offered Rate): remplazada por tasas overnight, Secured Overnight Financing Rate (SOFR).
- **Tasa libre de riesgo (r_f)**: Creada desde las tasas overnight entre instituciones libres de riesgo (bancos), es la que se utiliza para valorizar derivados.

Medición de Tasas de Interés

- Un monto A se invierte durante n años a una tasa anual R, el VF será:

$$VF = A(1+R)^n$$

Si la tasa se compone m veces al año, el VF será

$$VF = A\left(1 + \frac{R}{m}\right)^{nm} \tag{1}$$

- **Ejemplo 1**: Estimar el VF de invertir $\$100$ a una tasa $R = 10\%$ anual con $m \in (1, 2, 4, 12, 52, 365)$:

Medición de Tasas de Interés

- Respuesta:

Frecuencia de composición	*Valor de \$100 al término del año (\$)*
Anualmente ($m = 1$)	110.00
Semestralmente ($m = 2$)	110.25
Trimestralmente ($m = 4$)	110.38
Mensualmente ($m = 12$)	110.47
Semanalmente ($m = 52$)	110.51
Diariamente ($m = 365$)	110.52

A mayor m mayor es el interés acumulado de la inversión.

Composición Continua

- Cuando la frecuencia de composición m tiende al infinito, se conoce como **composición continua**. En este caso (1) sería:

$$VF = Ae^{Rn} \tag{2}$$

- La composición continua $\approx$ composición diaria.
- La composición continua es muy utilizada en valoración de derivados, principalmente en opciones.

Composición Continua

- De (1) y (2) tenemos

$$Ae^{R_c n} = A\left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{mn}$$

$$e^{R_c} = \left(1+\frac{R_m}{m}\right)^{m}$$

$$R_c = m\ln\left(1+\frac{R_m}{m}\right) \tag{3}$$

$$R_m = m\left(e^{\frac{R_c}{m}}-1\right) \tag{4}$$

Estas ecuaciones convierte una tasa con composición m a composición continua.

- **Ejemplo 2**: Calcular la tasa de interés con composición continua equivalente a una tasa del 8% anual con composición mensual.

Composición Continua

- Respuesta:

$$e^{R} = \left(1 + \frac{0,08}{12}\right)^{12}$$

usando (3)

$$R = 12 \ln\left(1 + \frac{0,08}{12}\right)$$

$$R = 0,0797$$

la tasa de interés es de un 7,97% anual.

Valoración de Bonos

- El valor teórico de un bono es el valor presente de sus flujos de caja.
- Con composición continua el valor presente es

$$\text{Valor Bono} = c_1 e^{-r1} + c_2 e^{-r2} + \ldots + (c_T + p) e^{-rT} \tag{5}$$

donde c es el cupón de cada periodo[1] y p el principal (que se paga al final).

- La **tasa cero** es el interés ganado cuando el bono no paga cupones y el principal se recibe al final del período (al vencimiento del bono), es decir, $c = 0$.
- La tasa cero **no tiene riesgo de reinversión**.
- (problema) Generalmente, los bonos de gobierno pagan cupones. (solucion) Bootstrapping.

[1] Se asume cupones anuales. Los periodos se indican en terminos anuales: un semestre = 0,5 ; un trimestre = 0,25 ; un año y medio = 1,5

Valoración de Bonos

- **Ejemplo 3**: Calculo de precio de bono libre de riesgo: Calcular valor de bono del Banco Central a 2 años con principal $\$100$ que paga cupones semestrales a tasa del 6% anual. Las tasas cero (tasas de descuento) son:

Maturity (years)	*Zero rate (% continuously compounded)*
0.5	5.0
1.0	5.8
1.5	6.4
2.0	6.8

Valoración de Bonos

- Respuesta:

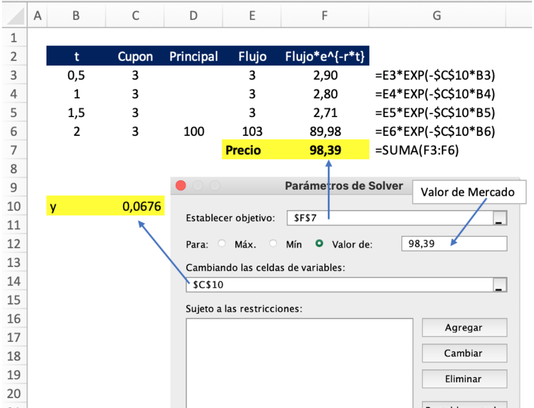
t	Cupon	Principal	Flujo	r	exp(-r*t)	Flujo*exp(-r*t)
0,5	3		3	0,05	0,9753	2,93
1	3		3	0,058	0,9436	2,83
1,5	3		3	0,064	0,9085	2,73
2	3	100	103	0,068	0,8728	89,90
			Precio			**98,39**

Rendimiento del Bono (Yield o TIR)

- Es la tasa de descuento (la misma para todos los flujos) que iguala el precio del bono a su valor de mercado.

$$3e^{-y\times 0{,}5} + 3e^{-y\times 1} + 3e^{-y\times 1{,}5} + 103e^{-y\times 2} = 98,39$$

La yield (y) se calcula de forma iterativa (solver):



t	Cupon	Principal	Flujo	Flujo*e^{-r*t}	
0,5	3		3	2,90	=E3*EXP(-C10*B3)
1	3		3	2,80	=E4*EXP(-C10*B4)
1,5	3		3	2,71	=E5*EXP(-C10*B5)
2	3	100	103	89,98	=E6*EXP(-C10*B6)
			Precio	98,39	=SUMA(F3:F6)

y	0,0676

Determinación de las Tasas Cero

- Para determinar las tasas cero se utiliza el **método bootstrap**.
- Si tenemos los siguientes bonos:

Bond principal ($)	*Time to maturity (years)*	*Annual coupon* ($)*	*Bond price ($)*	*Bond yield** (%)*
100	0.25	0	99.6	1.6064 (Q)
100	0.50	0	99.0	2.0202 (SA)
100	1.00	0	97.8	2.2495 (A)
100	1.50	4	102.5	2.2949 (SA)
100	2.00	5	105.0	2.4238 (SA)

*Half the stated coupon is assumed to be paid every 6 months. **Compounding frequency corresponds to payment frequency: Q = quarterly, SA = semiannual, A = annual.

- Para los bonos sin cupones (3m, 6m, 1a):
  $100e^{-r\times 0,25} = 99,6 \rightarrow r = 1,603\%$
  $100e^{-r\times 0,5} = 99 \rightarrow r = 2,010\%$
  $100e^{-r\times 1} = 97,8 \rightarrow r = 2,225\%$
  donde r se obtiene aplicando logaritmo natural y despejando r.

Determinación de las Tasas Cero

- El cuarto bono paga cupones semestrales, su flujo es $\{2; 2; 102\}$. Descontamos los cupones con las tasas cero de 6 meses y un año:
  $2e^{-0{,}02010\times 0.5} + 2e^{-0{,}02225\times 1} + 102e^{-r\times 1.5} = 102.5 \rightarrow r = 2{,}284\%$
- Lo mismo para el bono a 2 años con flujos semestrales $\{2.5; 2.5; 102.5\}$:
  $2{,}5e^{-0{,}02010\times 0{,}5} + 2{,}5e^{-0{,}02225\times 1} + 2{,}5e^{-0{,}02284\times 1{,}5} + 102{,}5e^{-r\times 2} = 105 \rightarrow r = 2{,}416\%$

Maturity (years)	*Zero rate (% continuously compounded)*
0.25	1.603
0.50	2.010
1.00	2.225
1.50	2.284
2.00	2.416

Determinación de las Tasas Cero

- Alternativamente podemos usar MCO (mínimos cuadrados ordinarios):
$$\boldsymbol{P}_t = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{B}_t$$
$$\boldsymbol{B}_t = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{P}_t \tag{6}$$
donde $\boldsymbol{P}_t$ es el vector de precios, $\boldsymbol{F}$ es la matriz de flujos de los bonos y $\boldsymbol{B}_t$ es el precio cero cupón.
- Para que la matriz $\boldsymbol{F}$ sea invertible, debe ser una matriz cuadrada $(n \times n)$. A cada nivel de madurez debe haber un solo bono.
- Cuando existe más de un instrumento con la misma duración, la matriz $\boldsymbol{F}$ no es invertible y debemos modificar (7) de forma tal que
$$\boldsymbol{B}_t = (\boldsymbol{F}'\boldsymbol{F})^{-1} \cdot \boldsymbol{F}'\boldsymbol{P}_t \tag{7}$$

Determinación de las Tasas Cero

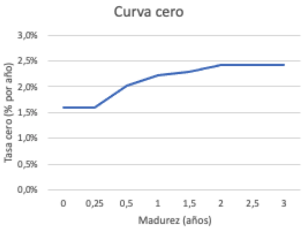
- Del precio $B = e^{-rT}$ aplicamos logaritmo natural $(\ln(B) = -rT)$ para derivar la tasa de la curva cero: $r = \ln(B)/T$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Flujos:						
2		3m	6m	1a	1,5a	2a		Precio
3	Bono 1	100	0	0	0	0		99,6
4	Bono 2	0	100	0	0	0		99
5	Bono 3	0	0	100	0	0		97,8
6	Bono 4	0	2	2	102	0		102,5
7	Bono 5	0	2,5	2,5	2,5	102,5		105
8								
9		{=MINVERSA(B3:F7)}						
10		0,01	0	0	0	0		
11		0	0,01	0	0	0		
12		0	0	0,01	0	0		
13		0	-0,0001961	-0,0001961	0,00980392	0		
14		0	-0,0002391	-0,0002391	-0,0002391	0,0097561		
15								
16		{=MMULT(B10:F14;H3:H7)}			t	Curva cero		
17		0,9960			0,25	0,01603	=-(1/E17)*LN(B17)	
18		0,9900			0,5	0,02010	=-(1/E18)*LN(B18)	
19		0,9780			1	0,02225	=-(1/E19)*LN(B19)	
20		0,9663			1,5	0,02284	=-(1/E20)*LN(B20)	
21		0,9528			2	0,02416	=-(1/E21)*LN(B21)	

Determinación de las Tasas Cero

- Se asume que la curva cero es lineal entre los puntos estimados por el método bootstrap. Ej: tasa en año 1.25: $(0.02225 + 0.02284)/2 = 0.02255$.
- Se asume que la curva cero es horizontal antes del primer punto y después del ultimo punto.

	Curva cero
0	0,01603209
0,25	0,01603209
0,5	0,02010067
1	0,02224561
1,5	0,02284449
2	0,02416379
2,5	0,02416379
3	0,02416379



- En la practica, no tenemos bonos con madurez exacta de 1.5 años, 2 años, 2,5 años, etc. Se interpola los precios (función polinomial o exponencial) antes de calcular la curva cero.

Modelo Nelson & Siegel

- Nelson & Siegel (1987) estiman un modelo que permite interpolar la tasas de interés para periodos y cupones que no están en la base de datos.

$$r(t) = \alpha_1 + \alpha_2 \left(\beta \left(\frac{1 - e^{-t/\beta}}{t} \right) \right) + \alpha_3 \left(\beta \left(\frac{1 - e^{-t/\beta}}{t} \right) - e^{-t/\beta} \right)$$

este modelo se puede reescribir como

$$r(t) = \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\beta \left(\frac{1 - e^{-t/\beta}}{t} \right) - \alpha_3 e^{-t/\beta} \qquad (8)$$

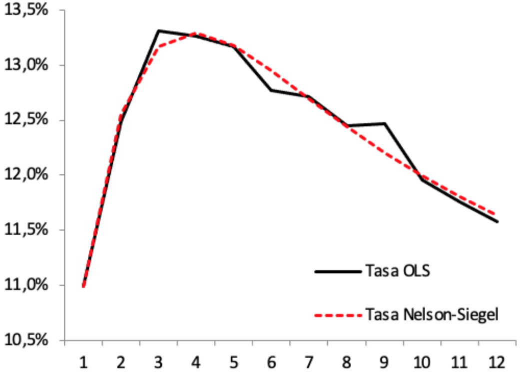
Modelo Nelson & Siegel

- **Ejemplo 4**: Estimar en Excel usando MCO y el modelo Nelson & Siegel para los siguientes bonos:

Nº Bono	Precio	Madurez (años)	Tasa cupon anual
1	91,8967	1	2,0%
2	83,2564	2	2,5%
3	76,0000	3	3,0%
4	76,2347	3	3,2%
5	71,2110	4	3,5%
6	67,9672	5	4,0%
7	66,0000	6	4,5%
8	66,1625	6	4,2%
9	65,4881	7	5,0%
10	65,7003	8	5,5%
11	64,0000	9	5,8%
12	66,6158	9	6,0%
13	68,0989	10	6,5%
14	70,0480	11	7,0%
15	72,3857	12	7,5%

Modelo Nelson & Siegel

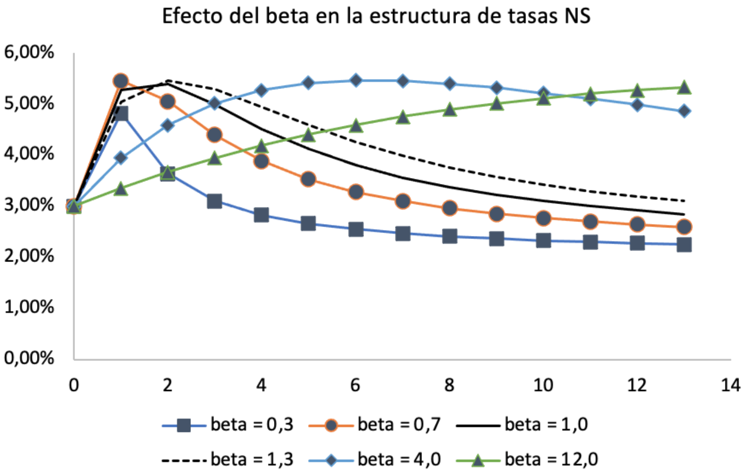
- Respuesta:



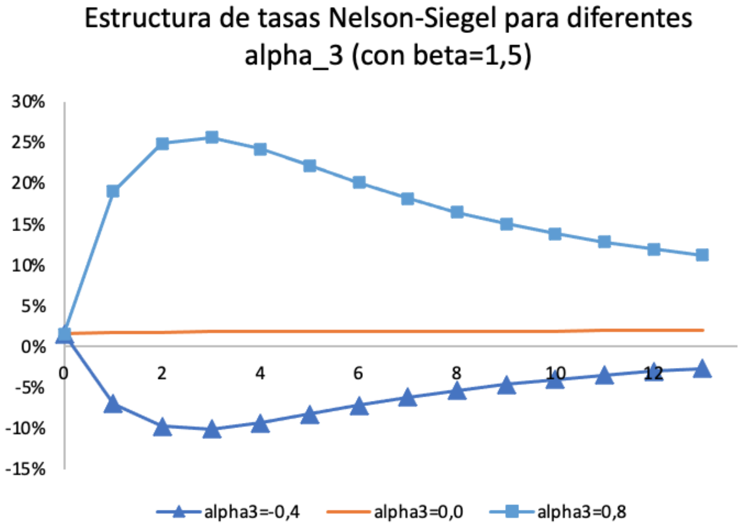
Propiedades NS

- **Propiedad 1: Tasa de interés de corto plazo $r(0)$**
  Con $t = 0$ tenemos $r(0) = \alpha_1 + \alpha_2$. Refleja la tasa de interés de muy corto plazo (consistente con la TPM), se espera que $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$.
- **Propiedad 2: Tasa de interés de largo plazo $r(\infty)$**
  Con $t = \infty$ tenemos $r(\infty) = \alpha_1$. Representa el interés a largo plazo asintótico, por lo tanto, debe ser positivo.
- **Propiedad 3: β controla la ubicación de la curvatura**
  El modelo NS solo está definido si $\beta > 0$, este parámetro define la ubicación de la curvatura a vencimientos medios.
- **Propiedad 4: α_3 afecta la concavidad/convexidad**
  El factor α_3 solamente afecta a los valores intermedios de la curva. $\alpha_3 > 0$ genera una curva concava, $\alpha_3 < 0$ una curva convexa y $\alpha_3 = 0$ una curva plana.

Propiedades NS



Propiedades NS



Extensión del modelo NS

- Svensson (1994)[2] sugirió agregar dos parametros extras para mejorar el ajuste de la curva a los datos observados.

$$
\begin{aligned}
r(t) =& \alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)\left(\beta_1 \frac{1 - e^{-t/\beta}}{t}\right) - \alpha_3 e^{-t/\beta} \\
&+ \alpha_4 \left(\beta_2 \frac{1 - e^{-t/\beta}}{t} - e^{-t/\beta_2}\right)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

  donde $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 \geq 0$.

- Este se conoce como el Modelo Nelson-Siegel-Svensson.
- Ver ejemplo de Excel en pestaña "NSS".

[2] Svensson, L. E. (1994). Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994.

Tasas Forward

- Son las tasas de interés para periodos futuros que surgen de las tasas cero actuales (tasas futuras esperadas).
- La tasa forward instantánea se obtiene con

$$e^{r_t \times t} e^{f_{t+1} \times 1} = e^{r_{t+1} \times (t+1)}$$

$$f_{t+1} = \ln \left[\frac{e^{r_{t+1} \times (t+1)}}{e^{r_t \times t}} \right] \tag{10}$$

Year (n)	*Zero rate for an n-year investment (% per annum)*	*Forward rate for nth year (% per annum)*
1	3.0	
2	4.0	5.0
3	4.6	5.8
4	5.0	6.2
5	5.3	6.5

- 5% es la tasa forward entre fines de $t = 1$ a fines de $t = 2$.

Tasas Forward

- Podemos obtener el mismo resultado anterior usando

$$f_{t+1} = \frac{r_{t+1} \times (t+1) - r_t \times t}{(t+1) - t}$$

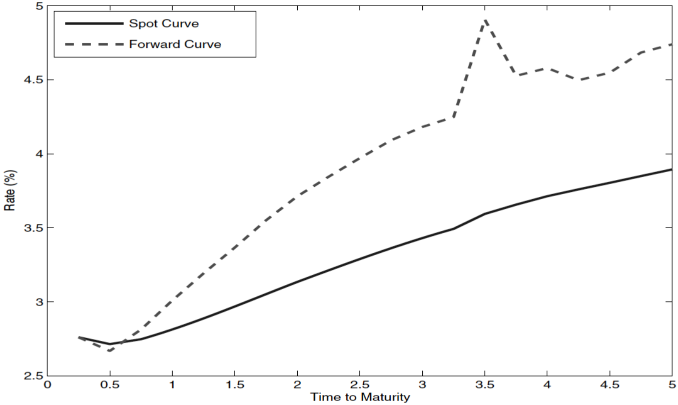
reescribiendo:

$$f_{t+1} = r_{t+1} + (r_{t+1} - r_t)\frac{t}{(t+1) - t}$$

- Si $r_{t+1} > r_t$ (pendiente positiva), entonces $f_{t+1} > r_{t+1}$
- Si $r_{t+1} < r_t$ (pendiente negativa), entonces $f_{t+1} < r_{t+1}$

Curva cero y Forward

- Notar que a mayor $\frac{t}{(t+1)-t}$ se amplifica el efecto de $(r_{t+1} - r_t)$.



Curva cero y Forward

- Notar que a mayor $\frac{t}{(t+1)-t}$ se amplifica el efecto de $(r_{t+1} - r_t)$.

Figure 4: Zero–Coupon Yield Curve and Forward Rates on May 9, 2006