

SERIES DE TIEMPO

## Trabajo final

*Mateo Tuberquia Giraldo.*  
*Brayan Enrique Pérez M.*

Docente

Francisco Javier Rodriguez Cortes

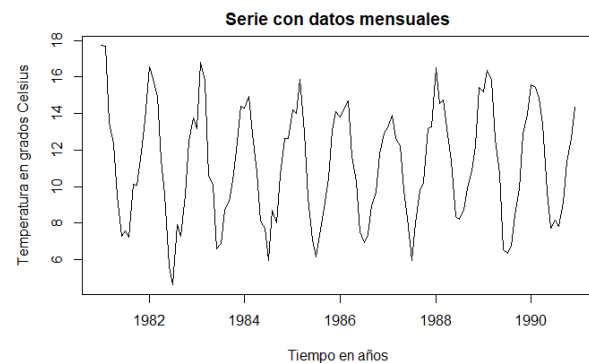
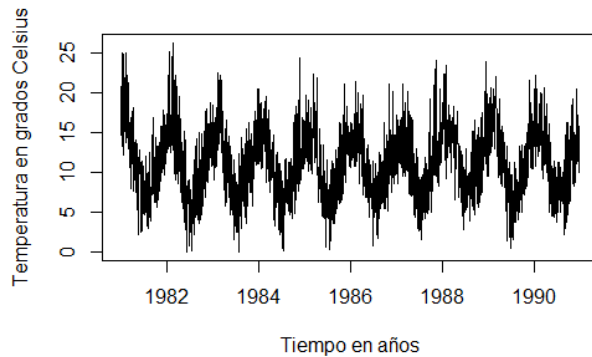
15 de abril de 2025

## Descripción

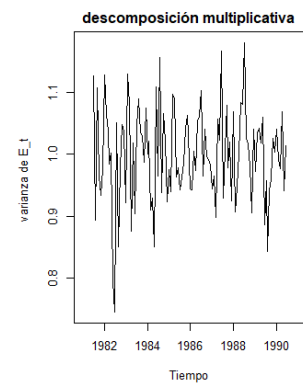
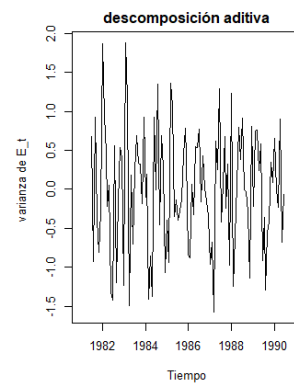
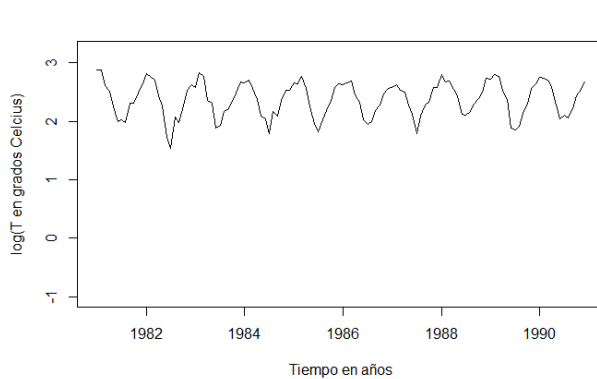
Estos datos describen las temperaturas mínimas diarias durante 10 años (1981-1991) en la ciudad de Melbourne, Australia. Las unidades están en grados Celsius y hay 3650 observaciones.

La fuente de los datos se acredita como la Oficina Australiana de Meteorología.

Los datos de esta serie de tiempo se presentan de manera diaria, dado el análisis realizado decidimos tomar una media de datos mensuales.



Estas gráficas corresponden a la serie con datos diarios y la serie con datos mensuales respectivamente.



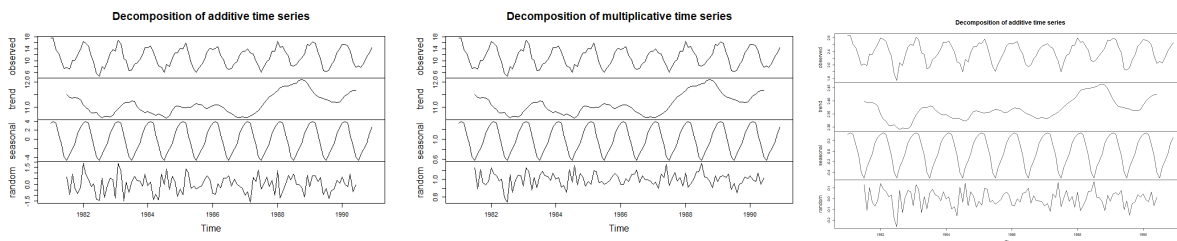
## Determinación del tipo de modelo

Por definición una serie es de componentes aditivas, cuando su varianza es constante alrededor de su trayectoria a largo plazo (la tendencia), en caso contrario, se considera que la serie es de componentes multiplicativas.

En este caso observamos en la gráfica de la serie que aparentemente su varianza es constante a lo largo del tiempo y por ello iniciamos planteando un modelo de componentes aditivas, sin embargo en la siguiente gráfica se realizó la comparación del patrón de varianza entre  $Y_t$  vs  $t$  y entre  $\text{Log}(Y_t)$  vs  $t$  para verificar en cual de ellos el patrón de varianza es mejor, allí nuevamente el patrón de varianza de  $Y_t$  vs  $t$  fue más estable confirmando la inclinación hacia un modelo de componentes aditivas.

Finalmente realizamos la comparación del patrón de varianza entre los errores en la descomposición clásica aditiva y la la descomposición clásica multiplicativa y allí nuevamente se confirma que el modelo con componentes aditivas tienen un patrón de varianza de los errores que se comporta mejor, es decir más estable.

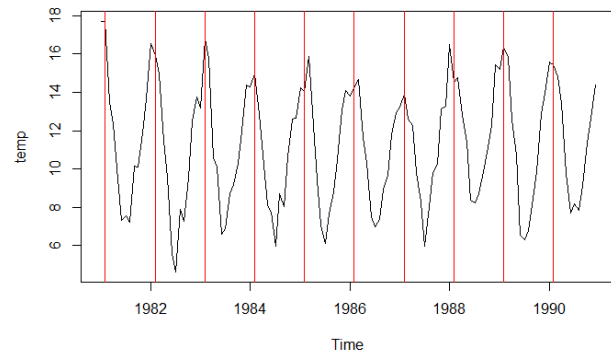
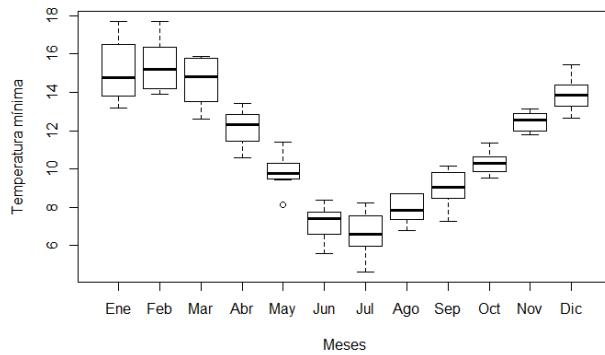
**Realizando la descomposición de la serie tenemos :**



## Estacionalidad

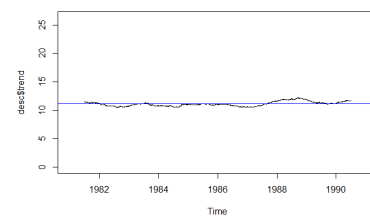
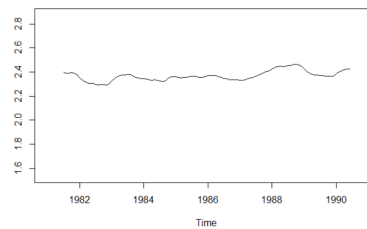
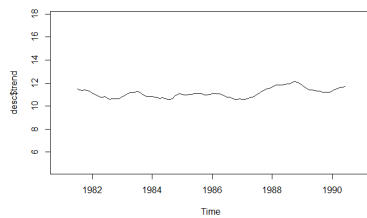
De la gráfica de la serie vs el tiempo, se concluye que aunque hay un fenómeno estacional ya que en cada año se observa que en los meses del inicio y final las temperaturas son altas, mientras que en los meses de junio y julio son bajas, a lo largo de la serie no parece tener una tendencia a crecer o a decrecer, es decir el comportamiento de la tendencia pudiera modelarse como una constante, vemos que la varianza es constante alrededor de la tendencia por lo que se asumen componentes aditivas.

Mediante el análisis de la serie se evidencia un patrón que se repite cada año y que cuya forma es aproximadamente la misma a lo largo de los años. Por medio del análisis gráfico de los box-plots determinamos que la localización media de la distribución de la serie cambia según el mes del año, por lo tanto se concluye que cada periodo en que divide el año calendario determina una estación la cual tiene incidencia sobre el valor medio de la serie.



Modelación determinística de la estacionalidad: En nuestro caso dada la naturaleza de los datos y en vista de los análisis previos se realiza la modelación determinística de la estacionalidad por medio de variables indicadoras.

## Evaluación de la tendencia



Para una serie de componentes aditivas se desea identificar cual función suave del tiempo pudiera representar a la componente  $T_t$  que arroja la descomposición clásica aditiva.

Esta componente se graficó en el rango de variación de los datos y del logaritmo de los datos cuando se analizó en dicha escala.

## Tendencia Global

Como en este caso la tendencia puede ser representada como una curva suave es factible postular una función del tiempo  $T(t, \beta)$ , donde  $\beta$  es el vector de parámetros de la función y es tal que cada uno de tales parámetros son desconocidos pero constantes en el tiempo. En este caso se dice que la tendencia puede ajustarse globalmente, usando un método de estimación que involucra todos los datos para obtener los parámetros.

## Modelos de regresión propuestos con presencia de tendencia y estacionalidad

Se proponen 3 modelos inicialmente con el fin de comparar sus resultados, como vimos que la descomposición clásica de  $\log(Y_t)$  también muestra comportamientos estables en la varianza de los errores y en la serie, no se descartan modelos multiplicativos del todo.

$$\begin{aligned} \log(Y_t) = & 2,634e - 1,567e^{-03t} + 1,823e^{-05t^2} + 8,278e^{-02}I_{1,t} + 1,108e^{-01}I_{2,t} + 5,448e^{-02}I_{3,t} - \\ & 1,416e^{-01}I_{4,t} - 3,328e^{-01}I_{5,t} - 6,486e^{-01}I_{6,t} - 7,560e^{-01}I_{7,t} - 5,575e^{-01}I_{8,t} - 4,338e^{-01}I_{9,t} \\ & - 3,006e^{-01}I_{10,t} - 1,004e^{-01}I_{11,t} + E_t, \quad E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 0,09493) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_t = \exp(& 2,677e - 3,239e^{-03} * t + 3,101e^{-05} * I(t^2) + 8,500e^{-02} * I1 + 1,114e^{-01} * I2 + 5,387e^{-02} * I3 \\ & - 1,424e^{-01} * I4 - 3,314e^{-01} * I5 - 6,454e^{-01} * I6 - 7,461e^{-01} * I7 - 5,578e^{-01} * I8 \\ & - 4,308e^{-01} * I9 - 3,024e^{-01} * I10 - 1,019e^{-01} * I11) + E_t, \quad E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 0,954) \end{aligned}$$

$$y_t = 13,629 + 0,002t + I1 + I2 + I3 + I4 + I5 + I6 + I7 + I8 + I9 + I10 + I11 + E_t, \quad E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1,004)$$

Modelo 1: Modelo log – cuadrático estacional con variables indicadoras, mes de referencia 12 (se usan las indicadoras para los meses 1 a 11).

Modelo 2: Modelo exponencial cuadrático estacional con variables indicadoras, mes de referencia 12 (se usan las indicadoras para los meses 1 a 11).

Modelo 3: Modelo lineal estacional con variables indicadoras, mes de referencia 12 (se usan las indicadoras para los meses 1 a 11).

El modelo exponencial es un modelo de regresión no lineal y no es linealizable, por tanto su ajuste no puede hacerse por M.C.O sino por mínimos cuadrados no lineales. Para denir valores iniciales del vector beta en el modelo exponencial-polinomial se usan las estimaciones de M.C.O de un modelo log-polinomial definido con el mismo grado p del polinomio usado en el modelo exponencial.

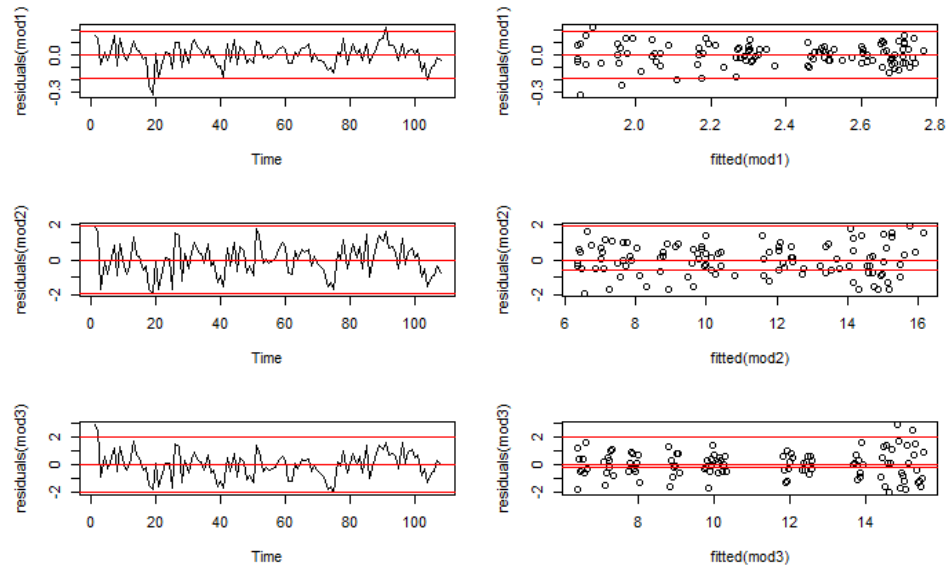
## Medidas de ajuste

### Diagnóstico y selección de modelos

Ante todo es necesario que los errores de ajuste cumplan los supuestos estadísticos: Independencia: Análisis del gráfico de residuos de ajuste vs tiempo y pruebas de incorrelación Media cero y varianza

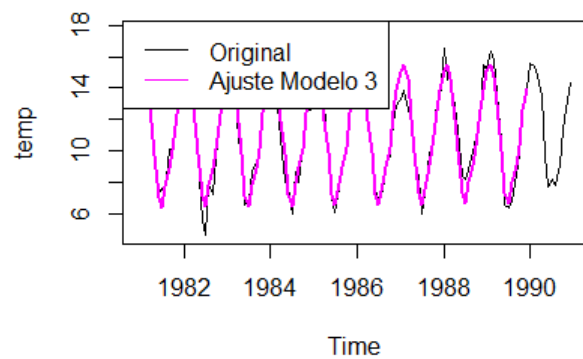
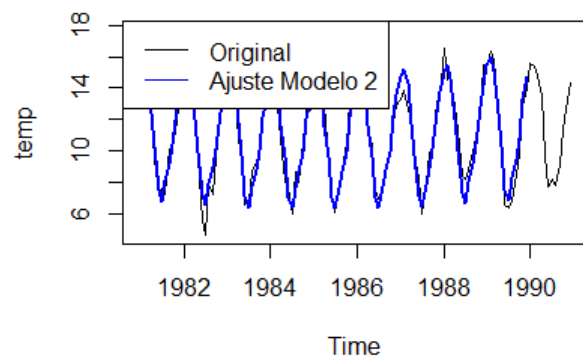
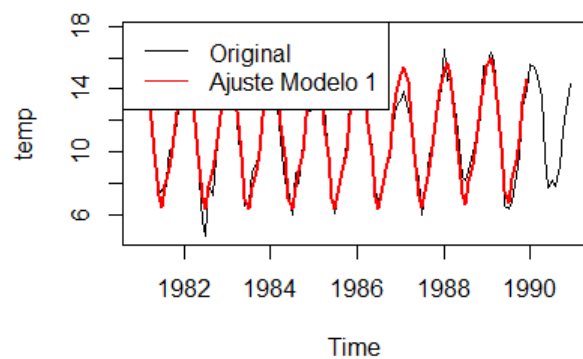
	R2	R2 Adj	AIC	BIC
Modelo 1	0.9103	0.899	0.01016438	0.01439057
Modelo 2	0.9129	0.9008	1.02648045	1.45327494
Modelo 3	0.9102	0.8989	1.02648045	1.62720255

constante: Análisis de los gráficos de residuos de ajuste vs. tiempo y residuos de ajuste vs. valores ajustados distribución normal: Gráfico de probabilidad normal y test de normalidad usando los residuos de ajuste. los tests y gráficos de normalidad requieren que sea válido el supuesto de independencia (por lo menos la incorrelación), pues con observaciones correlacionadas se puede llegar a conclusiones erróneas con relación a la distribución.



En principio se quiere evaluar si no hay evidencia contra los siguientes supuestos sobre los errores de ajuste: media igual a cero, varianza constante, patrón aleatorio alrededor de la media, y que no hay carencia de ajuste, lo cual verificamos en los gráficos anteriores.

## Ajustando modelos a la serie



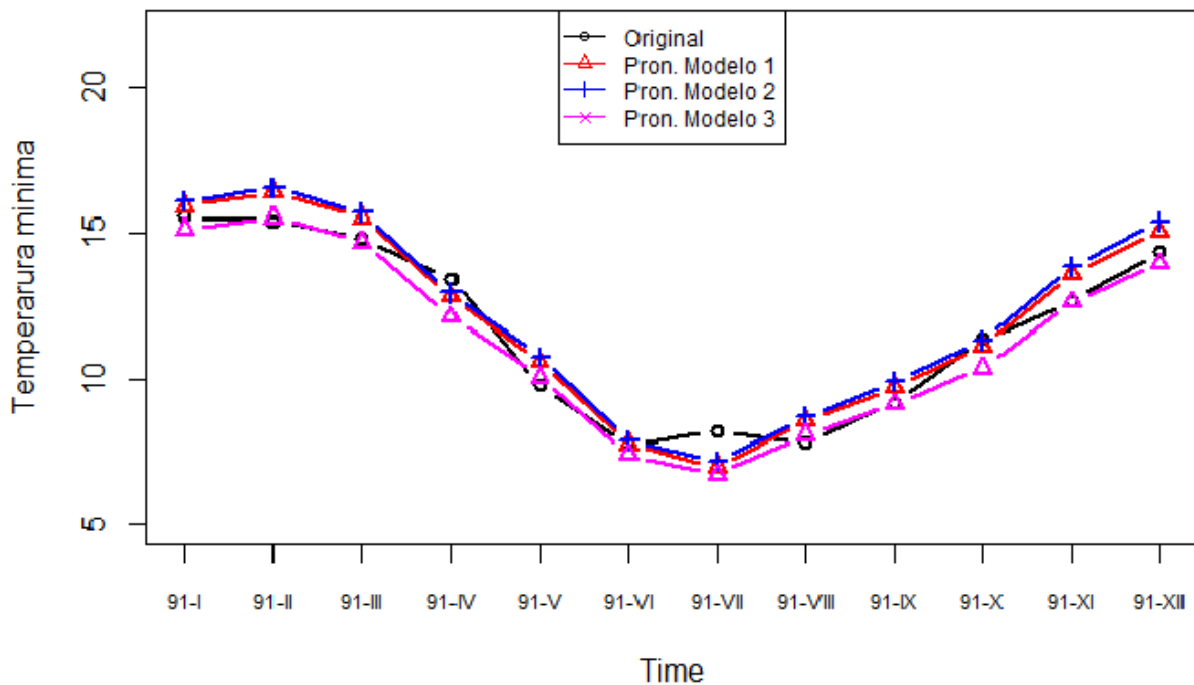
## Criterios para la comparación de los pronósticos de dos o más modelos

Se prefieren MAE, RMSE, y MAPE porque los errores positivos y negativos no se compensan. Entre dos o más modelos, se elige el de menor valor en la medida considerada.

No son permitidas comparaciones entre métodos de pronóstico que usen diferentes transformaciones de los datos, tampoco es apropiado hacer comparaciones para variables expresadas en diferentes escalas; sin embargo las medidas de precisión en términos relativos son libres de unidades y pueden usarse para tales comparaciones.

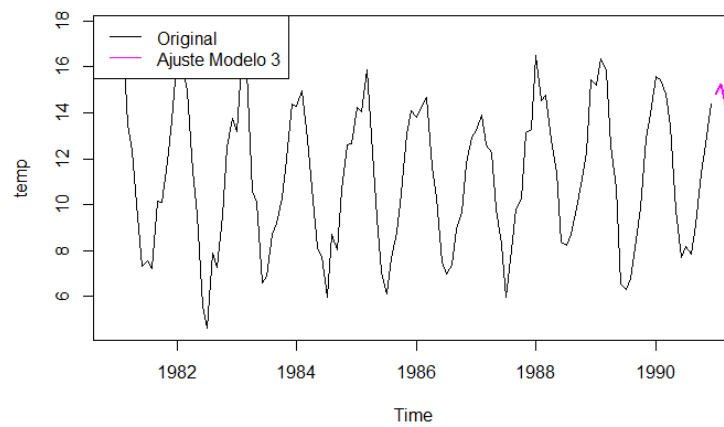
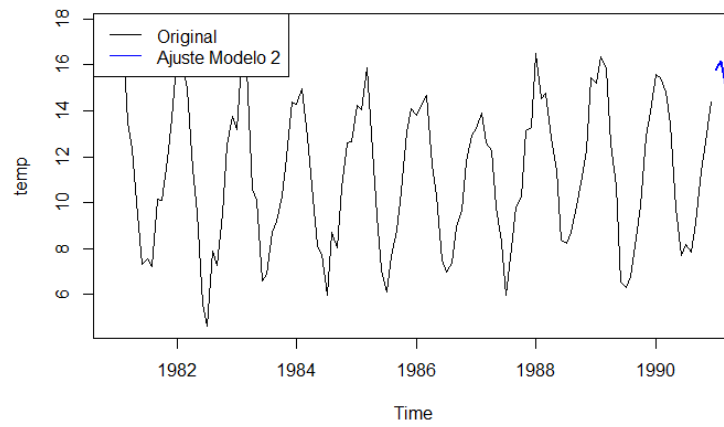
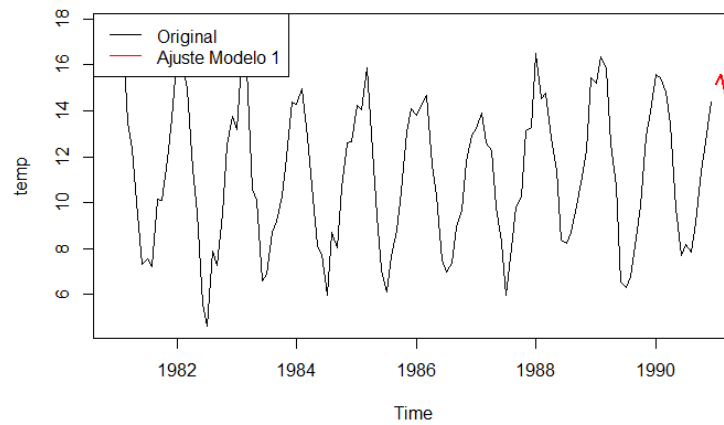
	ME	RMSE	MAE	MPE	MAPE	ACF1	Theils U
Modelo 1	-0.3065728	0.7268921	0.6538324	-2.313679	5.913891	-0.206841	0.4826548
Modelo 2	-0.4906977	0.8345161	0.7530419	-3.955326	6.738005	-0.1619445	0.5277818
Modelo 3	0.3766363	0.6829739	0.4866896	3.443535	4.59585	-0.4391428	0.4897707

El Modelo 1 es bajo todos los criterios el de mejor exactitud de los pronósticos puntuales. En este gráfico podemos comparar los pronósticos para el año 1991, acá se observa nuevamente que el modelo 1 es el que mejor se ajusta a la serie.





## Estimación y pronósticos



## Conclusión

En conclusión, considerando todos los resultados del ajuste, evaluación de residuos y medidas de pronóstico el modelo que más se ajusta a los datos y a la continuidad de los datos es el modelo 1. Además según las medidas de ajuste  $R^2$  y  $R^2$  ajustado el modelo que mejor se ajusta es el modelo 2 pero según el AIC y BIC el modelo que mejor se ajusta es el modelo 1, así mismo el modelo que mejor pronostica según los criterios de comparación de pronósticos es el modelo 1, los tres modelos cumplen con los supuestos. Se selecciona el modelo 1 ya que es el que mejor se ajusta y mejor pronostica.

## Parte II - Ajustes locales

De la gráfica de la serie se evidencia la presencia de estacionalidad y tendencia aditiva, constante y que hay presencia de ciclos como se mostró anteriormente en la gráfica de los boxplots comparativos de la distribución según el mes. Se concluye que en promedio la temperatura no es la misma a lo largo del año calendario y que año tras año varia con un comportamiento asociado a las estaciones climáticas. A continuación realizamos el análisis para el ajuste de modelos locales, esta estrategia admite cambios en los parámetros que denen las componentes estructurales (tendencia y estacionalidad), de manera que el modelo se adapten a tales cambios.

Extracción de las estimaciones de los factores estacionales calculados con el filtro de la descomposición:

<u>Deltas i</u>					
Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
3.5960021	3.9809606	3.5438929	0.9172377	-1.2424108	-3.8821998
Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
-4.6088342	-3.2167969	-2.1558945	-0.9279818	1.3315736	2.6644510

Obtención del valor de los  $s=12$  factores estacionales estimados, el periodo es  $s=12$  y la serie arranca en estacion 1.

Estimacion loess lineal optima de la tendencia

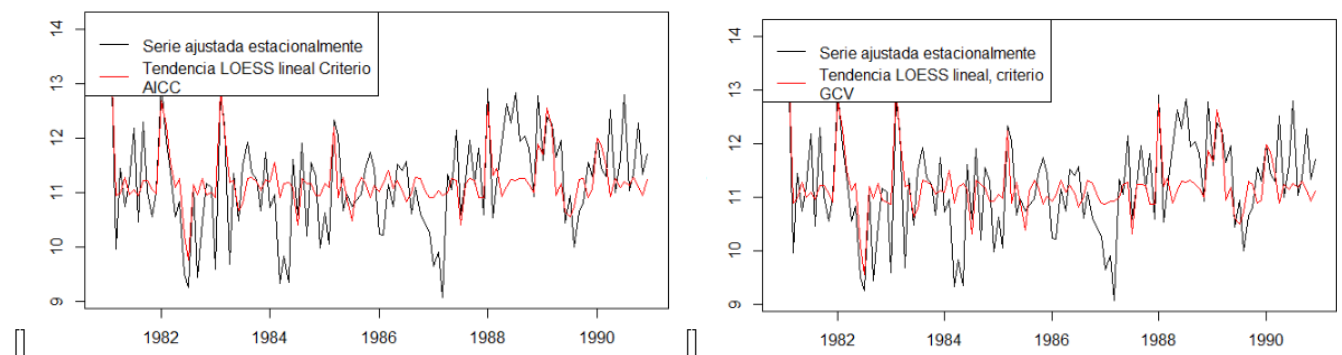


Figura 1: Loess lineal

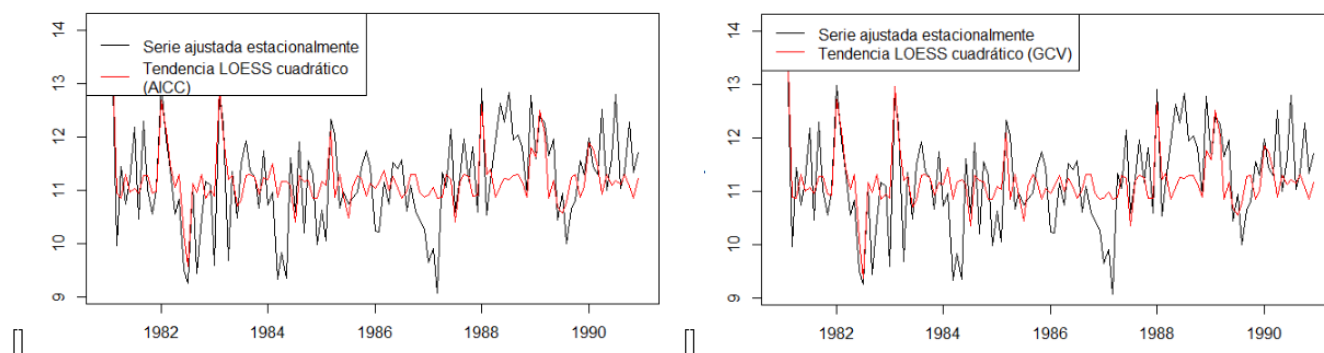


Figura 2: Loess cuadráticos

Para el ajuste loess de la tendencia, tanto lineal como cuadrático, el ajuste óptimo puede realizarse usando el criterio AICC, para la escogencia del parámetro de suavizamiento loess. Llamaremos “modelo 1” al ajuste mediante el filtro de la descomposición aditiva combinada con loess lineal usando criterio AICC, “modelo 1b” al ajuste por descomposición aditiva combinada con loess lineal usando criterio GCV, “modelo 2” al ajuste por descomposición aditiva combinada con loess cuadrático usando criterio AICC y “modelo 2b” al ajuste por descomposición aditiva combinada con loess cuadrático usando criterio GCV.

De los ajustes loess, se extrae el valor del parámetro de suavizamiento Loess ( $\alpha$ ) que indica la proporción de los  $n = 120$  datos que es usado en cada ajuste local de la serie desestacionalizada, y el número de parámetros equivalentes loess, que indica cuántos parámetros serían necesarios en un modelo polinomial global para alcanzar la misma calidad del ajuste loess correspondiente.

Modelo	Parametros de suavizamiento LOESS	Numero de Parametros equivalentes
1	0.4756145	4.23
1b	0.4008136	5.05
2	0.8937333	4.03
2b	0.7508652	4.59

De la tabla anterior es claro que los ajustes locales del modelo 2 por loess involucran una alta proporción de datos, por el otro lado, el modelo que menos proporción de datos usa es el modelo 1b. Es posible que en la práctica un ajuste global polinomial de tendencia logre seguir de la misma manera las variaciones observadas sobre la serie desestacionalizada.

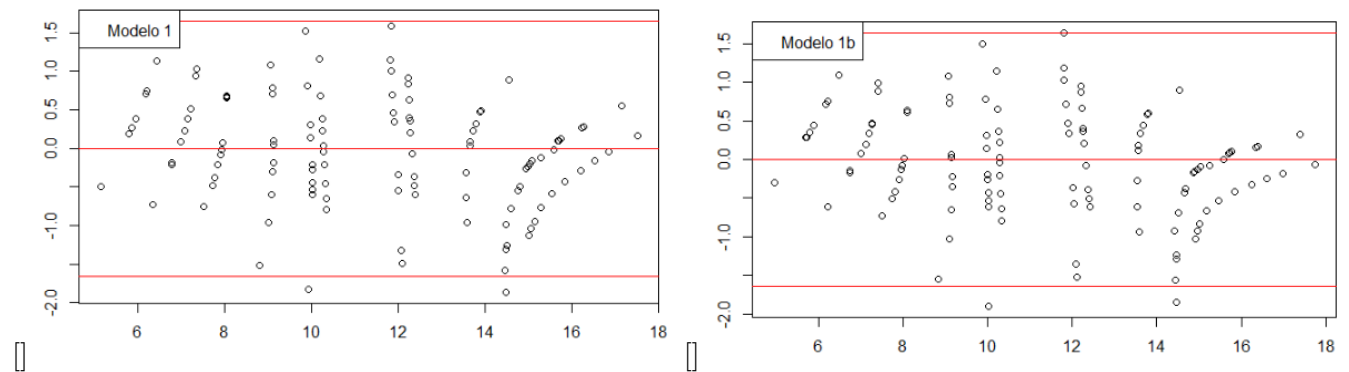


Figura 3: Loess lineal

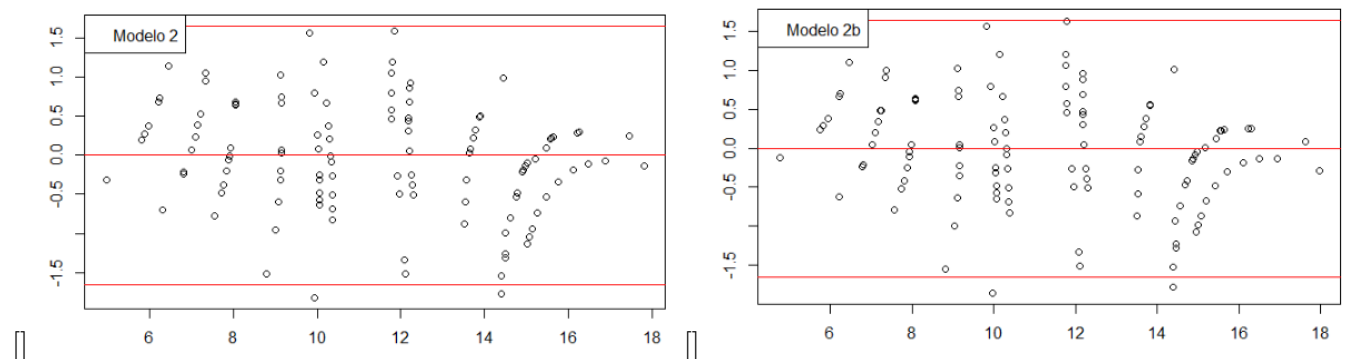


Figura 4: Loess cuadráticos

En las anteriores figuras se presentan las gráficas de los residuos de ajuste vs. tiempo adicionalmente se exhiben las gráficas de residuos de ajuste vs. valores ajustados. En las gráficas de los residuos de ajuste vs. tiempo vemos patrones de variación de los residuos en el tiempo muy similares entre los cuatro modelos. En ningún caso hay evidencia en contra a la carencia de ajuste, media en cero y varianza constante para ningún modelo. Tampoco es clara la presencia de variaciones cíclicas (aunque esto no es suficiente para garantizar la validez del supuesto de independencia entre los errores de ajuste). Por lo tanto los modelos cumplen los supuestos.

También en las gráficas residuos de ajuste vs. valores ajustados vemos una distribución relativamente homogénea de los residuos alrededor de cero, es decir, no hay evidencias en contra de los supuestos de media cero y varianza constante para los errores de ajuste y tampoco se observan patrones de carencia de ajuste.

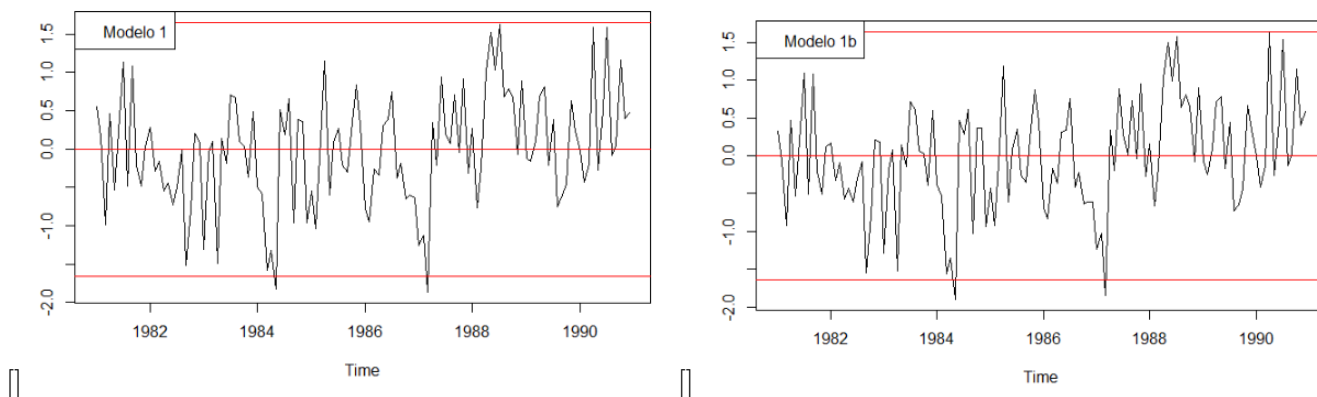


Figura 5: Loess lineal

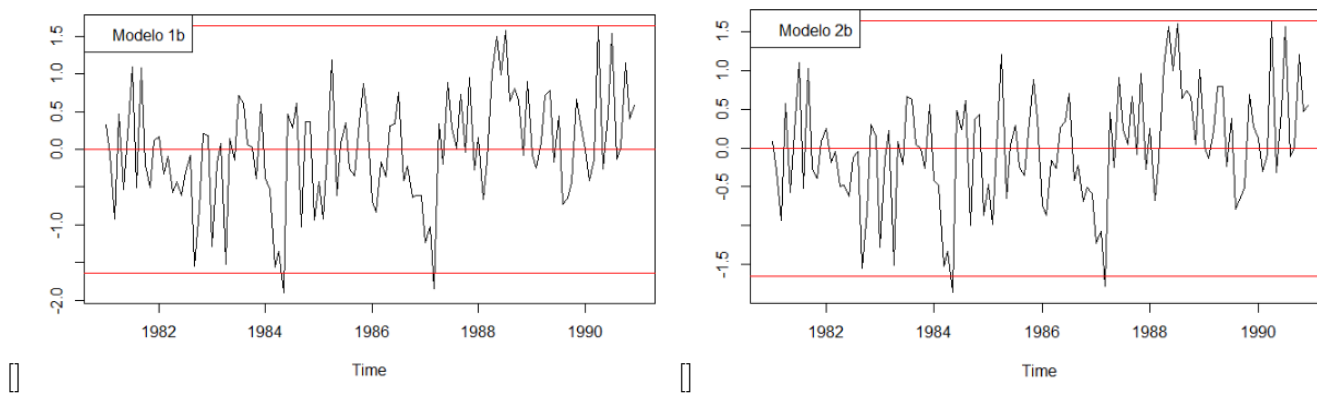


Figura 6: Loess cuadráticos

## Gráficas de la serie y sus ajustes

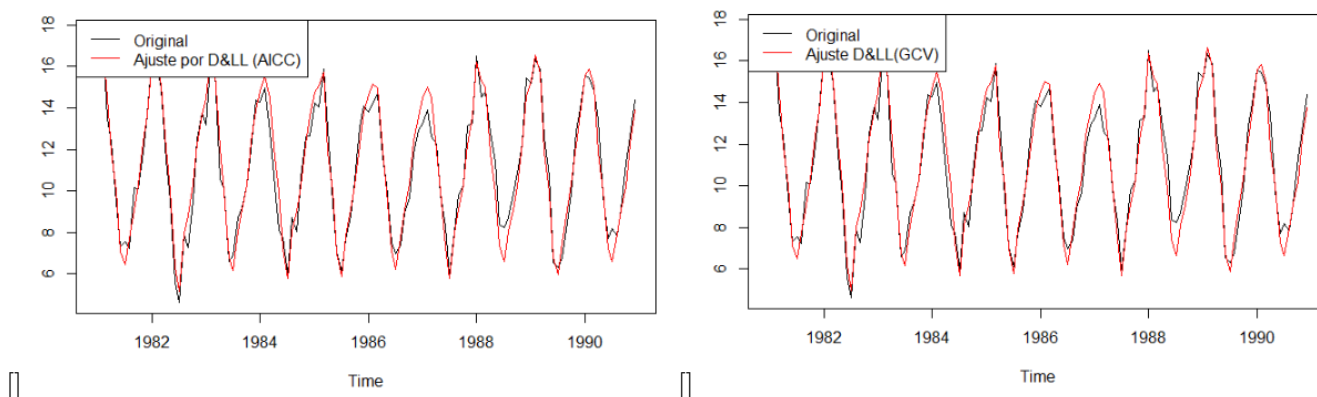


Figura 7: Loess lineal

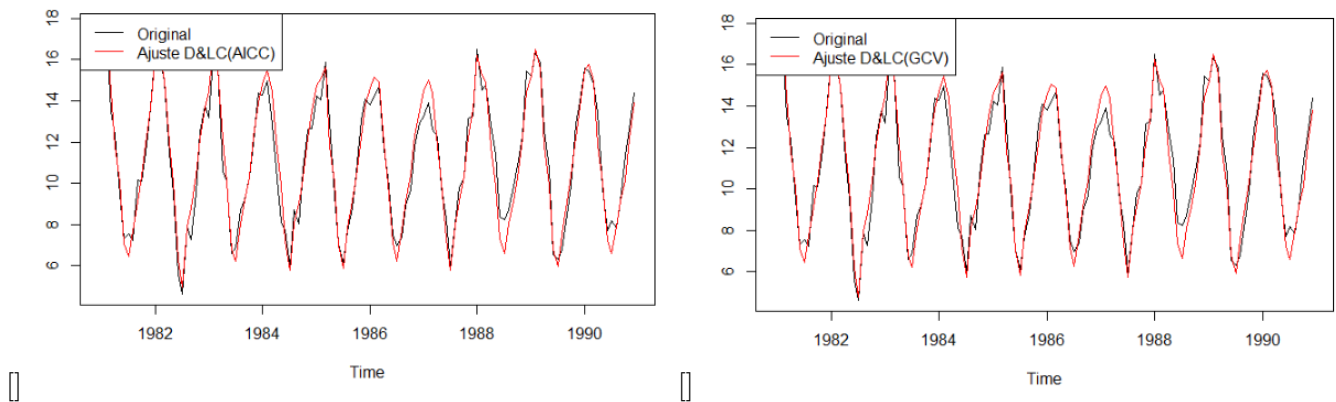


Figura 8: Loess cuadráticos

Con relación a la calidad de ajuste, en las figuras vemos un ajuste muy similar entre los modelos, todos consiguen seguir muy bien los patrones de tendencia, estacionalidad y al parecer también los ciclos. Por otro lado, los valores de AIC y BIC también son similares aunque numéricamente resulta menor el AIC en el modelo 1b mientras que el menor BIC corresponde al modelo 2 tiene los valores mayores en AIC y BIC (aunque como ya se indicó, no superan significativamente los valores de los otros modelos).

## Medidas de ajuste

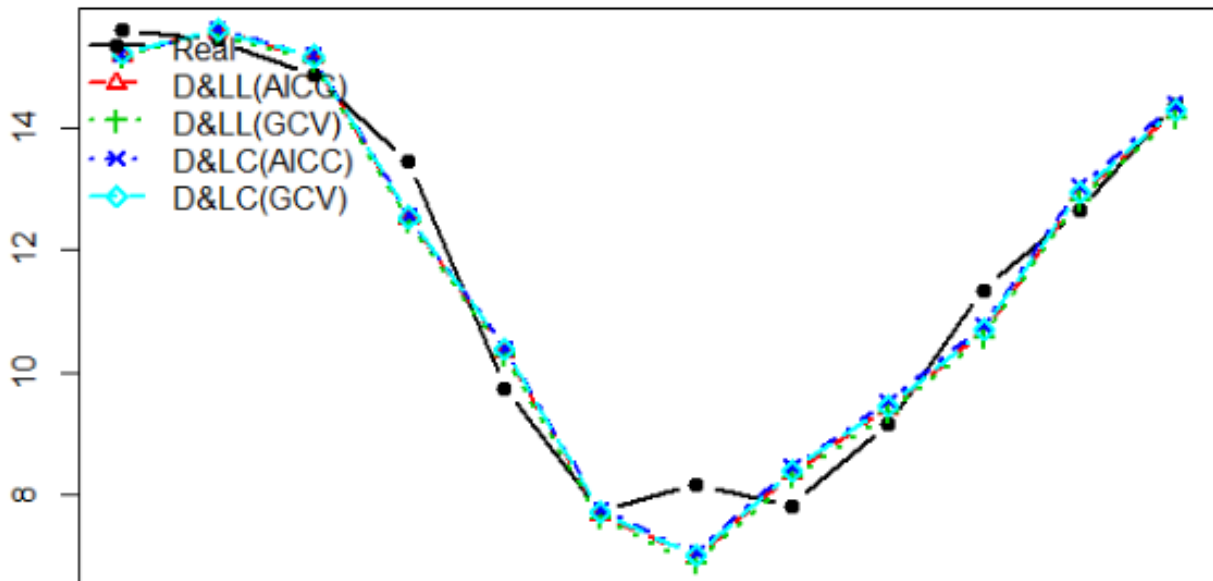
Modelo	AIC	BIC
1	0.67453	0.9557081
1b	0.6668718	0.9670628
2	0.6715285	0.9514554
2b	0.6733818	0.9765032

## Medidas de precisión de pronósticos puntuales

Modelo	RMSE	MAE	MAPE (%)
1	0.5684771	0.455197	4.352398
1b	0.5841757	0.4557628	4.349981
2	0.560602	0.4634356	4.476545
2b	0.562972	0.4576876	4.38488

El MAE, y RMSE estiman el error que en promedio se puede estar cometiendo en cada pronóstico realizado en un horizonte de  $m=13$  periodos, error expresado en las mismas unidades de la serie (es decir en puntos del índice) mientras que MAPE expresa este error medio en términos porcentuales con relación a cada valor real. A partir de la tabla anterior y la Figura siguiente se concluye que los pronósticos obtenidos con los 4 modelos LOESS producen pronósticos próximos con alguna sub estimación considerable en el mes de julio pero para los demás meses nos informa valores bastante cercanos a los valores reales.

Finalmente graficamos los pronósticos para el último año y se comparan con el valor real de la serie para ese año, allí se ve que la diferencia entre los modelos no es significativa ya que todos los modelos trazan la misma curva, en general podemos decir que los 4 modelos pronostican





## Conclusiones

Aparentemente todos los modelos locales considerados logran un buen ajuste, no sólo por las medidas y gráficas de ajuste sino también por el comportamiento observado en los residuos (aunque aún no se ha probado el supuesto de independencia ni el de normalidad). Sin embargo, en los pronósticos ex-post se encuentra que los últimos ajustes locales pueden conducir a extrapolaciones que conllevan a un gran error de pronóstico.

## Modelación del error

En el modelo de componentes estructurales aditivo la serie se asume que se puede descomponer en las componentes de tendencia, estacionalidad y error:

$$Y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t, t \in Z$$

La componente que interesa analizar en este capítulo es  $\varepsilon_t$ . La serie estimada  $\hat{\varepsilon}_t$  denominada residuo estructural", resulta de sustraer de  $Y_t$  las estimaciones de las dos primeras componentes, es decir

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{T}_t - \hat{S}_t$$

Para calcular los pronósticos  $Y_{T+j}$ ,  $j=1,2,\dots,h$  se debe analizar la serie  $\hat{\varepsilon}_t$  para detectar si tiene una dinámica autocorrelacionada ó, por el contrario, es solamente ruido aleatorio.

En el primer caso es posible pronosticar los residuos estructurales e incorporar éstos a los pronósticos con la tendencia y la componente estacional. En el segundo caso el pronóstico de un ruido aleatorio o (R.B) es cero.

## Uso de la ACF para identificar R.B

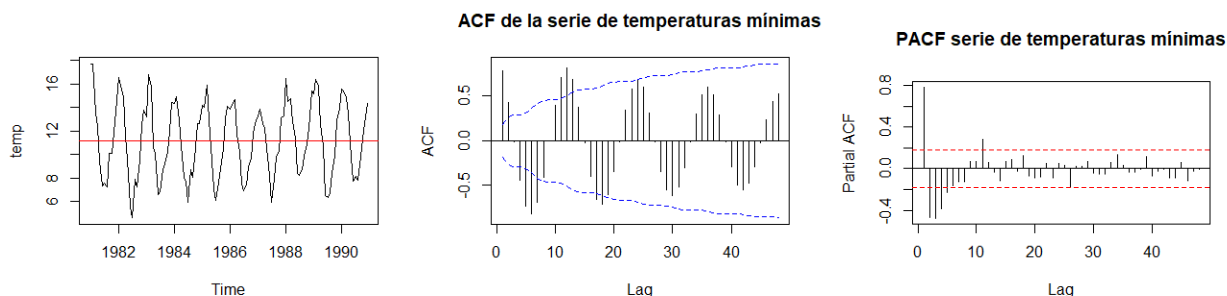
Con base en la ACF muestral probamos si la serie de tiempo proviene de un proceso de ruido blanco, realizando  $m = \lfloor n/4 \rfloor$  pruebas del tipo

$$H_0 : \rho(k) = 0 \quad Vs \quad H_1 : \rho(k) \neq 0$$

$k = 1, 2, \dots, m$ .

Para cada  $k$ , con  $\alpha \approx 5\%$ , se rechaza  $H_0$  si  $|\hat{\rho}(k)| > 2/\sqrt{n}$ . La ACF muestral permite chequear rápidamente estas  $m$  pruebas trazando en la gráfica los límites  $\pm 2/\sqrt{n}$ .

Se rechaza que el proceso es un ruido blanco si para algún  $k$  se observa que  $|\hat{\rho}(k)| > 2/\sqrt{n}$ , es decir, cuando en al menos una de las  $m$  pruebas se rechace la correspondiente hipótesis nula.



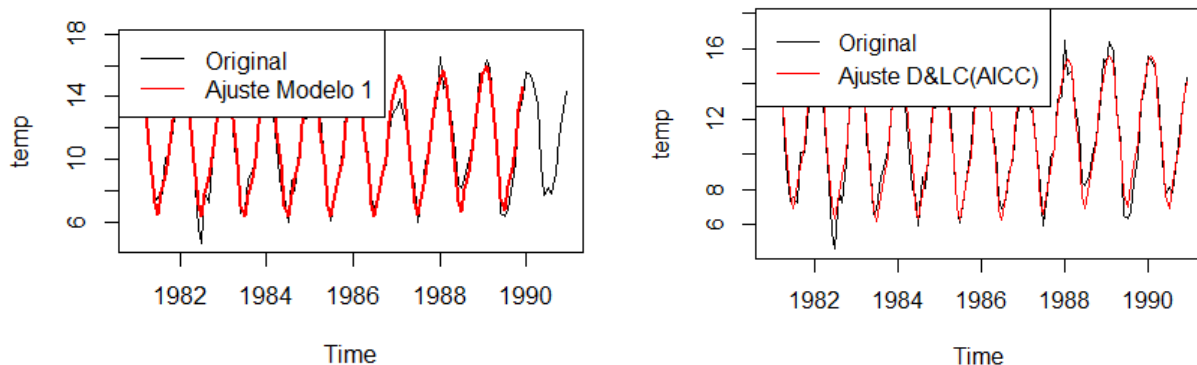
La gráfica de la serie revela una temperatura media constante en aproximadamente 11, también la varianza es aproximadamente constante, pero muestra variaciones cíclicas, lo que advierte de presencia de ciclos, existe posible correlación e independencia entre las variables del proceso del cual proviene esta serie. esto último implica que para  $k=1$ ,  $\rho(1) > 0$  y por tanto esta serie no proviene de un RB. Aunque no es R.B, tiene media constante, varianza constante y su ACF muestral indica que se cumple que  $\lim_{k \rightarrow \infty} (\rho(k)) = 0$  ópidamente, es decir es un proceso ergódico y por tanto estacionario. Es claro el patrón de cola exponencial sinusoidal amortiguada, ACF rechaza  $H_0$  en  $k=1,2,4,5,6,7,11,12,13,17,18,24$  de nuevo constatando que esta serie no proviene de un RB pues las observaciones separadas uno, dos y tres períodos en el tiempo están correlacionadas. Por su parte, PACF muestra rechazo en  $k=1,2,3,4,11$ , la PACF muestra un patrón tipo “cola” negativo.

Se realizara el análisis con el modelo log cuadrático estacional con indicadoras (modelo 1) global y con el modelo loess cuadrático con criterio AICC (modelo loess) y estacionalidad con indicadoras con nivel de referencia enero, usando los primeros  $n=108$  datos. Se Escribe la ecuación teórica y la ecuación ajustada con base en las estimaciones.

### Ecuación modelo 1

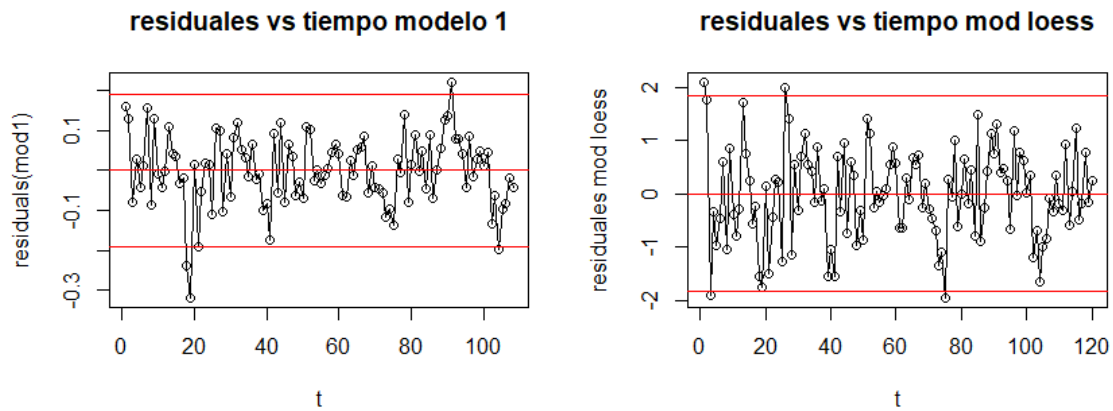
$$\begin{aligned} \log(Y_t) = & 2,634e - 1,567e^{-3t} + 1,823e^{-5t^2} + 8,278e^{-2}I_{1,t} + 1,108e^{-1}I_{2,t} + 5,448e^{-2}I_{3,t} - \\ & 1,416e^{-1}I_{4,t} - 3,328e^{-1}I_{5,t} - 6,486e^{-1}I_{6,t} - 7,560e^{-1}I_{7,t} - 5,575e^{-1}I_{8,t} - 4,338e^{-1}I_{9,t} \\ & - 3,006e^{-01}I_{10,t} - 1,004e^{-01}I_{11,t} + E_t, \quad E_t \stackrel{iid}{\sim} N(0, 0,09493) \end{aligned}$$

### Gráficas del ajuste de los modelos seleccionados



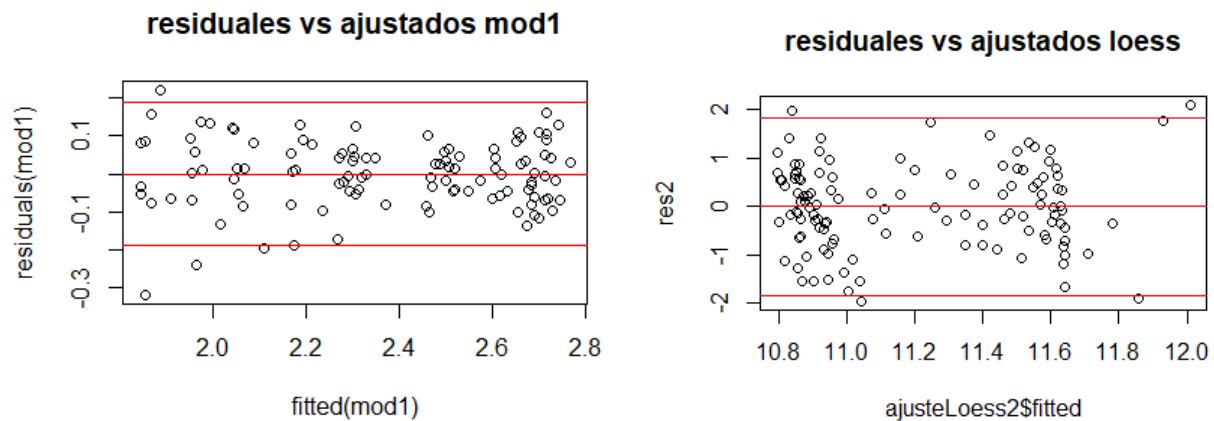
Como se mostró en la parte 1 y 2 del presente trabajo los ajustes con los modelos log cuadrático estacional y loess cuadrático con criterio AICc son bastantes aceptables, sin embargo no logran ajustarse perfectamente a la serie, dando una sensación de mejor ajuste el modelo loess.

### Análisis de las gráficas de residuales vs. tiempo y vs. valores ajustados



Aunque según gráficos de residuales del modelo 1 no hay evidencia fuerte contra supuestos  $E[E_t]=0$ , y  $\text{Var}[E_t]=2 \forall t \geq 0$ , Hay ciclos en la serie de residuos  $E_t = Y_t - \hat{Y}_t$ , lo cual implica que  $\rho(k) = \text{corr}(E_t, E_{t+k}) \neq 0$  para al menos un  $k \neq 0$ ,

El gráfico de residuales del modelo loess muestra que no hay evidencia contra supuestos de  $E[E_t]=0$ , y  $\text{Var}[E_t]=2 \forall t \geq 0$ , y tampoco se ve claramente la presencia de ciclos.



De los gráficos de los residuales vemos que no hay evidencia contra los supuestos de normalidad, por lo cual se puede asumir.

Se Realizan las pruebas de Box-Pierce, Lung-Box para los errores estructurales de los modelos 1 y loess y Durbin Watson de orden 1 para el modelo 1 y los tests de la ACF y PACF muestral, para los errores estructurales de los modelos 1 y loess.

<b>TEST DURBIN-WATSON PARA AUTO-CORRELACIÓN DE ORDEN 1</b>				
Modelo	rho estimado	Estadístico D-W	VP rho >0	VP rho <0
1	0.2155099	1.536955	0.005	0.994

En este caso  $d_1 \approx 2$ , por tanto el test a realizar es  $H_0 : \rho(1) = \text{corr}(E_t, E_{t+1}) = \phi_1 = 0$  vs  $H_1 : \rho(1) = \text{corr}(E_t, E_{t+1}) = \phi_1 > 0$ . El valor P es:  $P(DW1 \leq d_1) = 0$ , en este caso, conduce al rechazo de  $H_0$  en favor de  $H_1$ , por tanto los errores de ajuste en el modelo 1 no son R.B pues presentan auto-correlación de orden 1 positiva.

<b>Box-Pierce &amp; Ljung Box (Modelo 1)</b>							
<i>Box-Pierce</i>				<i>Ljung-Box</i>			
m	QBP	df	VP	m	QBP	df	VP
6	15.08788	6	0.019584101	6	15.62677	6	0.015903779
12	20.80831	12	0.053258919	12	22.10482	12	0.036361698
18	35.80655	18	0.007469632	18	39.99534	18	0.002090310
24	39.93878	24	0.021712763	24	45.20399	24	0.005509910
30	44.38522	30	0.043990346	30	51.27136	30	0.009115781
36	49.01747	36	0.072551808	36	57.99038	36	0.011532678
42	51.07626	42	0.159044207	42	61.31578	42	0.027373858
48	55.33976	48	0.217315088	48	69.00036	48	0.025104536

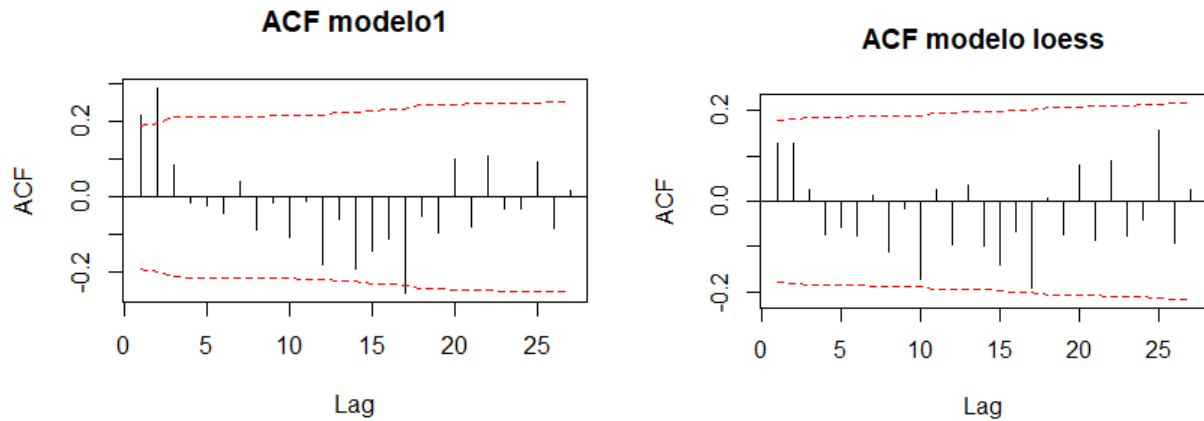
En las pruebas Box-Pierce para  $m = 42$  y  $48$  no se rechazan las hipótesis nulas, en todas las demas rechazan la hipotesis nula, por tanto dan evidencia contra el supuesto que los errores del modelo 1 sean un R.B.

En todas las pruebas ljung-Box se rechazan las hipótesis nulas, por tanto dan evidencia contra el supuesto que la serie provenga de R.B.

Box-Pierce & Ljung Box (Modelo Loess)							
Box-Pierce				Ljung-Box			
m	QBP	df	VP	m	QBP	df	VP
6	5.679281	6	0.4600583	6	5.904348	6	0.43399007
12	11.917880	12	0.4522972	12	12.816760	12	0.38249892
18	20.571919	18	0.3015580	18	22.961301	18	0.19208165
24	24.682386	24	0.4231811	24	28.039142	24	0.25839242
30	33.169599	30	0.3152292	30	39.193858	30	0.12144478
36	43.430567	36	0.1842705	36	53.520836	36	0.03024037
42	46.419681	42	0.2951209	42	58.079309	42	0.05040737
48	54.785926	48	0.2327735	48	72.067686	48	0.01386396

En todas las pruebas Box-Pierce no se rechazan las hipótesis nulas, por tanto no dan evidencia contra el supuesto que los errores del modelo loess sean un R.B.

En las pruebas ljung-Box para  $m = 36, 42, 48$  se rechazan las hipótesis nulas, En todas las demas no se rechazan las hipotesis nulas por tanto no dan evidencia contra el supuesto que los errores del modelo loess sean un R.B.



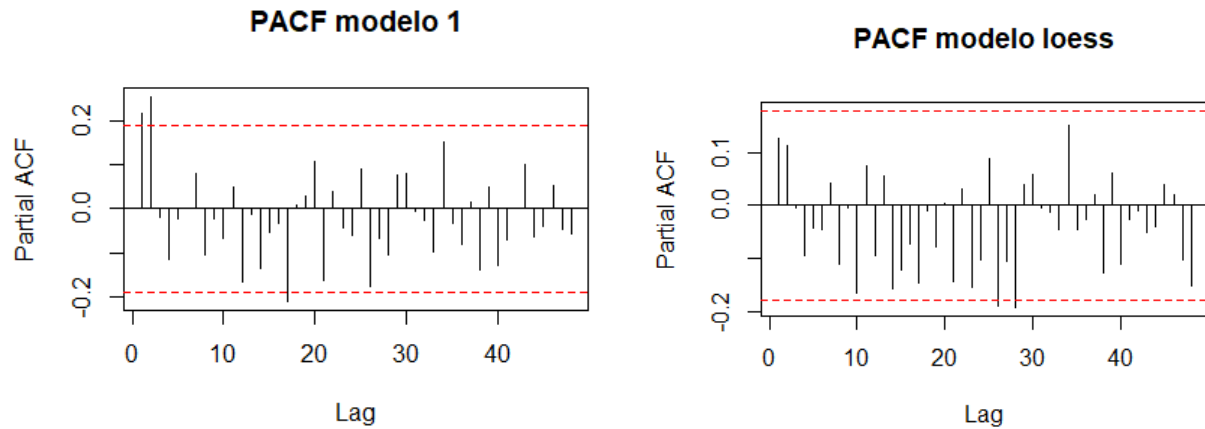
La conclusión anterior a la que llegamos del modelo 1 se verifica en el test de la ACF para  $k = 1, 2, 17$ :

$$H_0 : \rho(k) = \text{corr}(E_t, E_{t+k}) = 0 \quad V s \quad H_1 : \rho(k) \neq 0$$

Por su parte la ACF del modelo loess no rechaza  $H_0$  para ningún valor, a favor de  $\rho(k) = 0$

Por otra parte el test de la PACF para  $k = 1, 2, 17$ :  $H_0 : \phi_{kk} = \text{corr}(E_t, E_{t+k} | E_{t+1}, \dots, E_{t+k-1}) = 0$   $V s$   $H_1 : \phi_{kk} \neq 0$ , corroborando una vez mas que  $E_t$  del modelo 1 no es un ruido blanco.

Así mismo el test de la PACF para  $k = 27, 29$  muestra evidencia que  $E_t$  del modelo loess no es un ruido blanco. sin ser definitivo, hasta el momento parece haber más evidencia a favor de que  $E_t$  del modelo loess sea ruido blanco teniendo en cuenta la probabilidad de error tipo I de la prueba.



Con ACF-PAF del modelo 1 se identifica patrón de corte en ACF y posible patrón de cola decreciente con decaimiento sinusoidal en PACF, luego  $E_t$  es un MA(q) estacionario. Evaluando PACF el último corte ocurre en  $k = 17$  entonces tomamos  $p = 17$ , es decir, un MA(17). Sin embargo el último valor significativo cortando alguna de las bandas de rechazo es 2 por tanto el modelo sugerido es un MA(2). Para el modelo loess la acf sugiere que  $E_t$  es R.B.

A continuación se realizó la identificación de los modelos ARMA con criterio AIC con la función `auto.arima()` para los dos modelos.

Series: residuals (mod1)			
ARIMA(0,0,3) with zero mean			
Coefficients:			
	ma1	ma2	ma3
	0.1686	0.3565	0.1527
s.e.	0.0955	0.0978	0.1021
sigma <sup>2</sup> estimated as 0.006989: log likelihood = 116.14			
AIC = -224.29	AICc = -223.9	BIC = -213.56	

Series: ajusteLoess2\$residuals		
ARIMA(0,0,0) with zero mean		
sigma <sup>2</sup> estimated as 0.7363: log likelihood = -151.91		
AIC = 305.81	AICc = 305.84	BIC = 308.6

La tabla de auto arima de residuales del modelo 1 nos sugiere un modelo MA(2) y para el modelo loess nos informa que sus errores ya son ruido blanco debido a que no nos sugiere ningún modelo.

Posteriormente se hace la identificación de los modelos ARMA para  $E_t$  con la función `auto.arima()` de la serie de los errores de los 2 modelos.

Con `auto.arima` criterio AIC se identifican según salidas R presentadas que  $E_t$  del modelo 1 puede ser un ARMA(0,3) estacionario de media cero, o un ARMA(2,0)(0,1)[12] también estacionario con media cero.

Serie de los residuales del modelo 1			
ARIMA(2,0,0)(0,0,1)[12] with zero mean			
Coefficients:			
	ma1	ma2	sma1
	0.1799	0.2328	-0.1750
s.e.	0.0946	0.0976	0.1095
sigma^2 estimated as 0.006956: log likelihood = 116.29			
AIC = -224.57	AICc = -224.18	BIC = -213.84	

La primera tabla nos muestra los resultados obtenidos en R con la función `auto.arima()` para el modelo 1 y sugiere un modelo AR(2) y un modelo estacional MA(1) para los errores del modelo 1. La segunda tabla nos sugiere que los errores del modelo loess son un R.B.

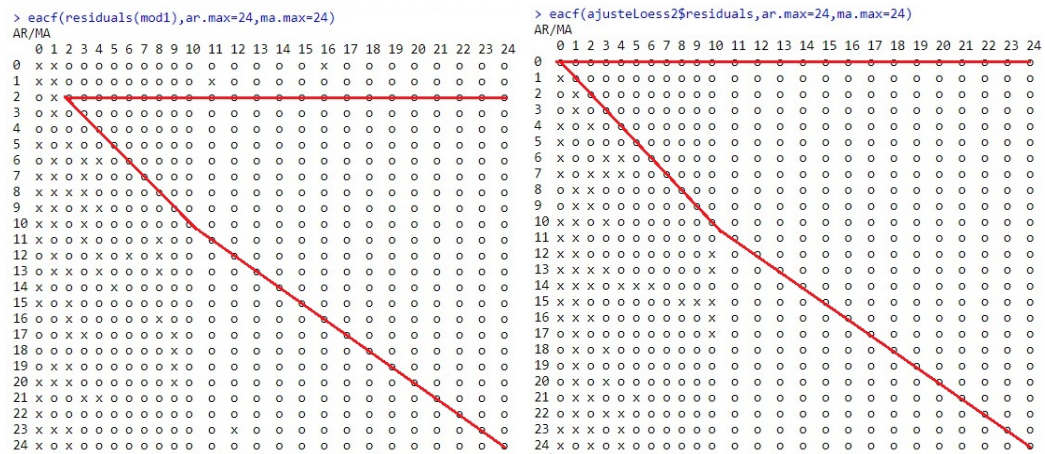
Serie de los residuales modelo Loess		
ARIMA(0,0,0) with zero mean		
sigma^2 estimated as 0.7363: log likelihood = -151.91		
AIC = 305.81	AICc = 305.84	BIC = 308.6

Las siguientes tablas muestran los resultados obtenidos con la función `SelectMode()` las dos primeras con el criterio AIC para ambos modelos y la segunda con el criterio BIC para ambos modelos igualmente. Para el modelo uno se sugiere un modelo AR(2) y para el modelo loess nuevamente se sugiere un AR(0) esto es, se sugiere que  $E_t$  es R.B. Lo anterior se repite con el criterio BIC, es decir nos sugiere que  $E_t$  del modelo 1 se ajuste con un AR(2) y que  $E_t$  del modelo loess es R.B.

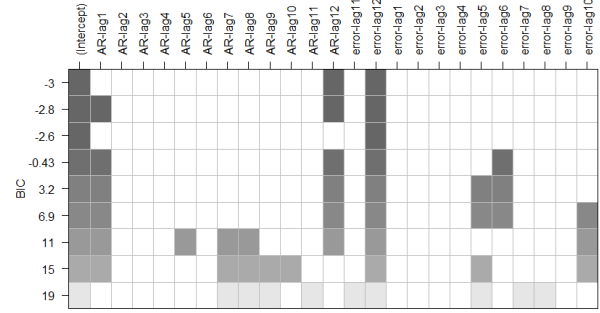
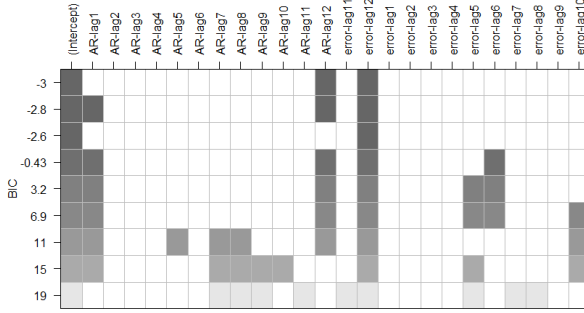
Modelo 1	p	AIC-Exact	AIC-Approx
	2	-530.5536	-5.203066
	3	-528.6113	-4.876061
	4	-528.2232	-2.934544
Modelo loess	p	AIC-Exact	AIC-Approx
	0	-34.74008	1.985936
	1	-34.73799	2.178154
	34	-23.84681	3.371018



Modelo 1	p	BIC-Exact	BIC-Approx
	2	-522.5072	5.5254590
	1	-519.4933	0.9018572
	0	-518.9154	4.0552952
Modelo loess	p	BIC-Exact	BIC-Approx
	0	-31.95258	7.560919
	1	-29.16301	10.540629
	34	-26.15969	15.310469



Las siguientes son las matrices arrojadas por R con la función eacpf y en ellas se sugiere un modelo ARMA(2,2) para los  $E_t$  del modelo 1 y un ARMA(0,0) para los  $E_t$  del modelo loess lo que nuevamente indica que  $E_t$  del modelo loess es R.B



Con armasubsets en el tablero presentado, ignoramos el modelo del primer renglón porque en éste, la parte AR no cumple  $p2$ , así que buscando el modelo de menor BIC satisfaciendo esta condición, encontramos ese modelo en segundo renglón:

$E_t$  una ARMA(12,12) pero sólo con parámetros  $\phi_2, \phi_{12}$  y  $\theta_{12}$ .

Se muestran los gráficos de los ajustes de los modelos ARMA con el fin de realizar comparativos entre ellas y determinar junto con los resultados de los criterios AIC y BIC cual de los tres modelos ajusta mejor.

Se usaron los modelos ARMA para el error estructural previamente identificados como los sugeridos con las funciones anteriormente mencionadas. Los modelos que se presentan en este trabajo son los siguientes:

Modelo 1a: MRLM con errores AR(2):

Ecuación estructural:

$$\log(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2^2 + \delta_1 I_{1,t} + \delta_2 I_{2,t} + \dots + \delta_{11} I_{11,t} + E_t$$

Ecuación ARMA:

$$E_t = \phi_1 E_{t-1} + \phi_2 E_{t-2} + a_t, \quad \{a_t\}_{t \in 3^+} \text{ un R.B } N(0, \sigma^2)$$

Modelo 1b: MRLM con errores ARMA(2,2):

Ecuación estructural:

$$\log(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2^2 + \delta_1 I_{1,t} + \delta_2 I_{2,t} + \dots + \delta_{11} I_{11,t} + E_t$$

Ecuación ARMA:

$$E_t = \sum_{j=1}^2 \phi_j E_{t-j} + a_t + \sum_{i=1}^2 \theta_i a_{t-i}, \quad \{a_t\}_{t \in 3^+} \text{ un R.B } N(0, \sigma^2)$$

Modelo 1c: MRLM con errores ARMA(12,12):

Ecuación estructural:

$$\log(Y_t) = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2^2 + \delta_1 I_{1,t} + \delta_2 I_{2,t} + \dots + \delta_{11} I_{11,t} + E_t$$

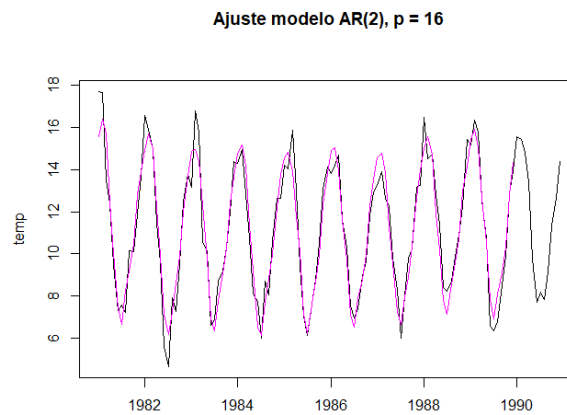
Ecuación ARMA:

$$E_t = \sum_{j=1}^{12} \phi_j E_{t-j} + a_t + \sum_{i=1}^{12} \theta_i a_{t-i}, \quad \{a_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+} \text{ un R.B } N(0, \sigma^2)$$

Con relación a la calidad de ajuste en la tabla podemos ver un ajuste muy similar entre los modelos,

<u>Criterios de Información</u>			
Modelo	P	AIC	BIC
<b>1a</b>	16	<b>1.032597</b>	<b>1.536381</b>
<b>1b</b>	18	1.06135	1.659578
<b>1c</b>	17	1.592764	4.092614

todos consiguen muy bien los patrones de tendencia, estacionalidad y errores. Por otro lado, los valores de AIC y BIC también son muy similares aunque numéricamente resulta menor el AIC y BIC del modelo 1a.



Ecuación ajustada estructural del modelo 1a

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t = & 14,42477510 - 0,03354103t + 0,00032141t^2 + 1,09017325I_{1,t} + 1,49889787I_{2,t} + \\ & 0,67101283I_{3,t} - 1,92270512I_{4,t} - 3,97957862I_{5,t} - 6,62898410I_{6,t} - 7,33024794I_{7,t} + \\ & 5,95713938I_{8,t} - 4,89507389I_{9,t} + 3,64913667I_{10,t} + 1,35321683I_{11,t} + \hat{E}_t \end{aligned}$$

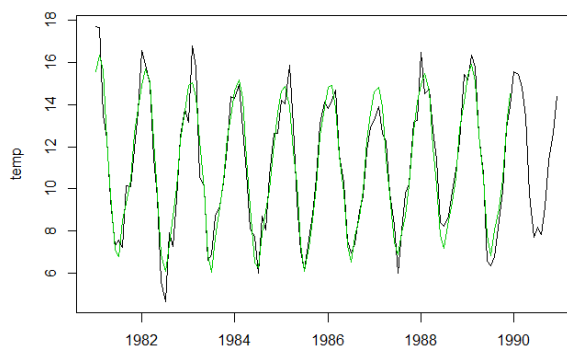
Ecuación ajustada del ARMA:

$$\hat{E}_t = 0,18196615E_{t-1} + 0,18206398E_{t-2} + a_t,$$

**Tabla de parámetros estimados modelo 1a con errores ARMA**

	Estimate	Std.Error	t value	Pr(> t )
ar1	0.18196615	0.09705814	1.8748	0.0639905 .
ar2	0.18206398	0.10005913	1.8196	0.0720779 .
intercept	14.42477510	0.49187567	29.3261	2.2e-16 ***
t	-0.03354103	0.01682224	-1.9938	0.0491295 *
t2	0.00032141	0.00017155	1.8736	0.0641603 .
Jan	1.09017325	0.38755397	2.8130	0.0060012 **
Feb	1.49889787	0.38761866	3.8669	0.0002054 ***
Mar	0.67101283	0.41670936	1.6103	0.1107658
Apr	-1.92270512	0.42109155	-4.5660	1.537e-05 ***
May	-3.97957862	0.42602056	-9.3413	5.553e-15 ***
Jun	-6.62898410	0.42607901	-15.5581	<2e-16 <2e-16 <2e-16 ***
Jul	-7.33024794	0.42497676	-17.2486	<2e-16 <2e-16 <2e-16 ***
Aug	-5.95713938	0.41861027	-14.2308	<2e-16 <2e-16 <2e-16 ***
Sep	-4.89507389	0.41300807	-11.8522	<2e-16 <2e-16 <2e-16 ***
Oct	-3.64913667	0.37984029	-9.6070	1.532e-15 ***
Nov	-1.35321683	0.38004915	-3.5606	0.0005880 ***
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1				

**ajuste modelo ARMA(2,2), p = 18**



**Tabla de parámetros estimados modelo 1b con errores AR**

Se muestran las tablas con los parámetros estimados de cada modelo, solo se escribió la ecuación ajustada del modelo seleccionado como el de mejor ajuste.

Después de la identificación de procesos estacionarios para los errores estructurales  $E_t$  y luego de ajustar los modelos de regresión con  $E_t$  modelado según un ARMA, se valida si para sus respectivos errores de ajuste  $a_t$  se cumplen supuesto de R.B y normalidad.

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
ar1	0.77637605	0.48262848	1.6086	0.1111973
ar2	-0.52049511	0.53763030	-0.9681	0.3355748
ma1	-0.60051883	0.49409383	-1.2154	0.2273944
ma2	0.60809993	0.43242508	1.4063	0.1630918
intercept	14.38234684	0.45624927	31.5230	<2e-16
t	-0.03197491	0.01490547	-2.1452	0.0346315 *
t2	0.00031199	0.00016098	1.9381	0.0557426 .
Jan	1.09901402	0.38878779	2.8268	0.0057933 **
Feb	1.49972268	0.39113301	3.8343	0.0002331 ***
Mar	0.66709457	0.41966300	1.5896	0.1154328
Apr	-1.91839577	0.43767329	-4.3832	3.161e-05 ***
May	-3.96966630	0.44216122	-8.9779	3.828e-14 ***
Jun	-6.62496925	0.44145049	-15.0073	<2e-16
Jul	-7.34913557	0.44347664	-16.5716	<2e-16
Aug	-6.00323729	0.44306437	-13.5494	<2e-16
Sep	-4.94817877	0.42131574	-11.7446	<2e-16
Oct	-3.66708471	0.38584993	-9.5039	3.073e-15 ***
Nov	-1.34061001	0.38259313	-3.5040	0.0007162 ***
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1				

Ajuste modelo ARMA(12,12) p = 17

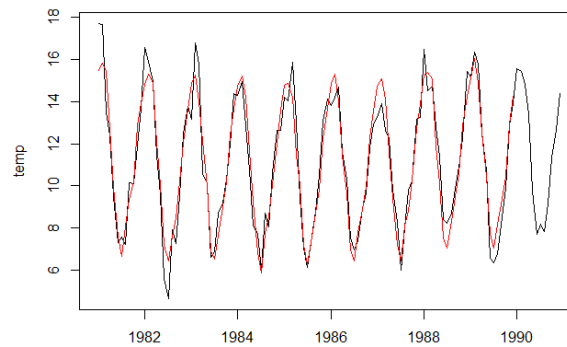
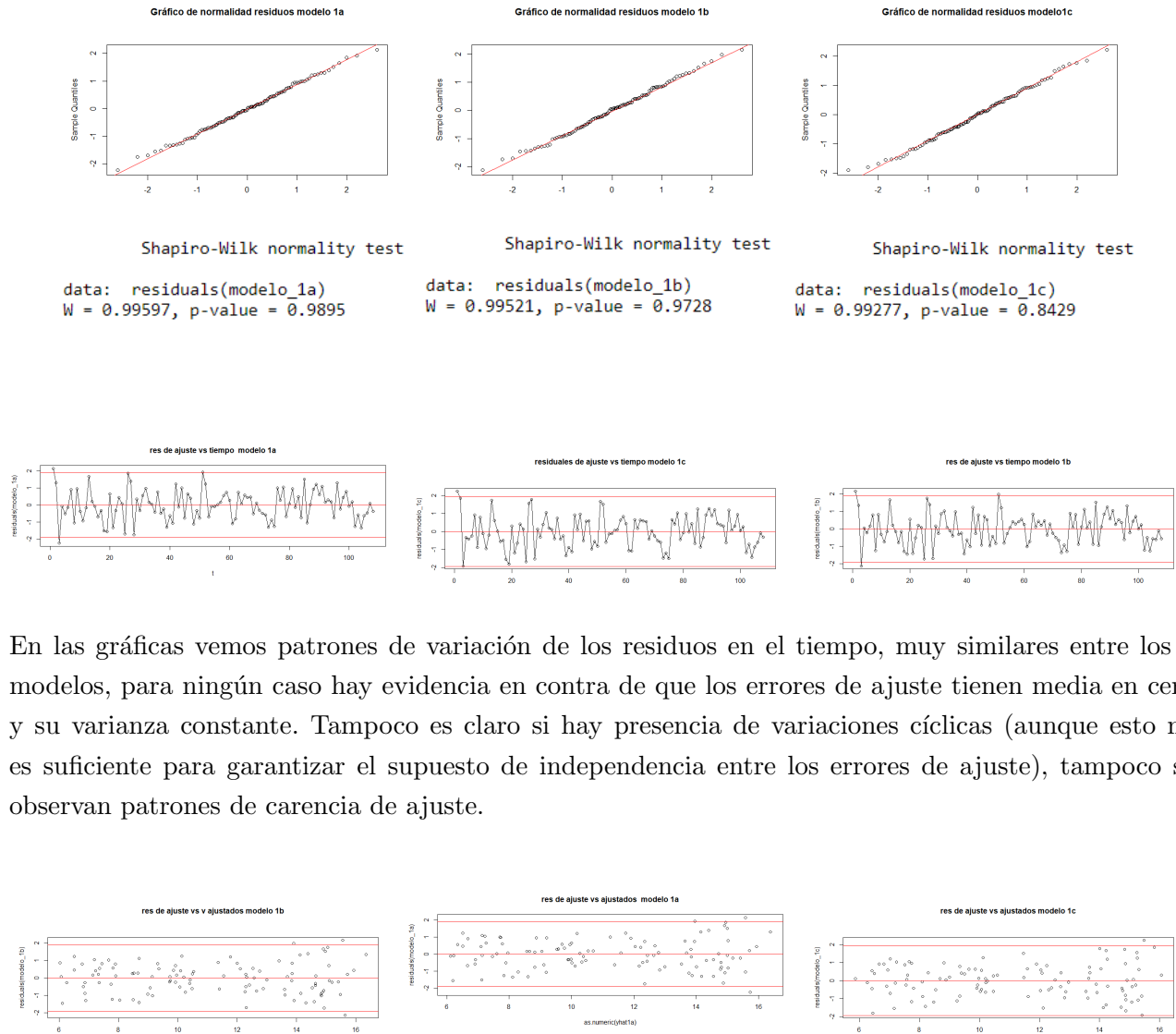


Tabla de parámetros estimados modelo 1c con errores ARMA

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
ar2	0.20441974	0.09789891	2.0881	0.0404315 *
ar12	-0.21221678	0.38975103	-0.5445	0.5878325
ma12	0.17087657	0.46752979	0.3655	0.7158492
intercept	14.30678925	0.42260950	33.8534	<2e-16
t	-0.03148085	0.01322197	-2.3809	0.0199929 *
t2	0.00031167	0.00016007	1.9471	0.0555386
Jan	1.15531320	0.41565075	2.7795	0.0069854 **
Feb	1.53863533	0.38132028	4.0350	0.0001375 ***
Mar	0.72997635	0.41314066	1.7669	0.0816048 .
Apr	-1.87809915	0.40715251	-4.6128	1.745e-05 ***
May	-3.93891952	0.41283029	-9.5413	2.712e-14 ***
Jun	-6.57785728	0.41068364	-16.0168	<2e-16
Jul	-7.29497258	0.41223009	-17.6964	<2e-16
Aug	-5.90465954	0.40692599	-14.5104	<2e-16
Sep	-4.85621107	0.41187830	-11.7904	<2e-16
Oct	-3.61495491	0.37485035	-9.6437	1.766e-14 ***
Nov	-1.32771006	0.41148785	-3.2266	0.0019063 **
Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1				

En estos resultados, las hipótesis nulas indican que los datos siguen una distribución normal, como los valores p son mayores que el nivel de significancia de 0.05, la decisión es que se rechaza la hipótesis nula por lo tanto los datos siguen una distribución normal

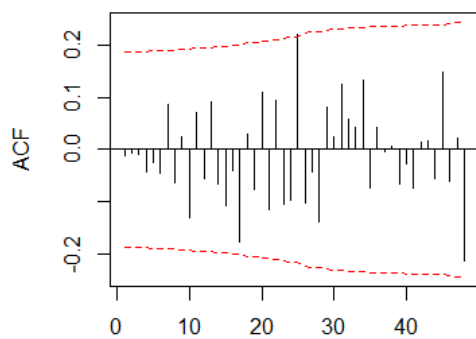


En las gráficas vemos patrones de variación de los residuos en el tiempo, muy similares entre los 3 modelos, para ningún caso hay evidencia en contra de que los errores de ajuste tienen media en cero y su varianza constante. Tampoco es claro si hay presencia de variaciones cíclicas (aunque esto no es suficiente para garantizar el supuesto de independencia entre los errores de ajuste), tampoco se observan patrones de carencia de ajuste.

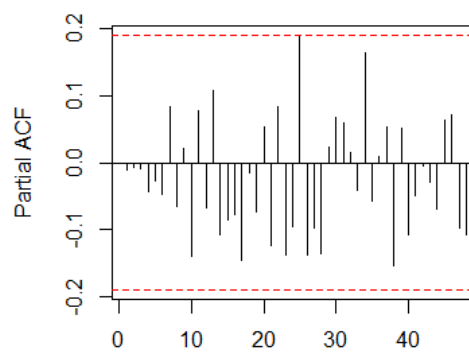
Para gráfico de residuales vs ajustados y en las gráficas de los residuales vs tiempo se verifica hay media cero y varianza constante para los errores de ajuste, no se observan patrones de carencia de ajuste.

sólo en modelo 1c, se rechaza en ACF y PACF para  $k = 23, 25$  en los otros dos modelos no hay rechazos en estos tests (aunque en modelo 1c la PACF muestra un corte en  $k=23, 25$ , se desprecia, el valor estimado es pequeño, ocurre en un  $k$  alto y éste no es múltiplo de 12). Luego, puede estar ocurriendo que en modelo 1c para los errores de ajuste  $a_t$  existen autocorrelaciones entre las variables separadas 12 períodos y eso implica que el proceso no es R.B, o bien, por ser un  $k$  alto pudiera ser debido a la influencia de observaciones extremas en la estimación de ACF y PACF en esos  $k$ , y éstas observaciones claramente se ven en los gráficos de residuos y entre ellas hay una que están bastante alejadas del resto.

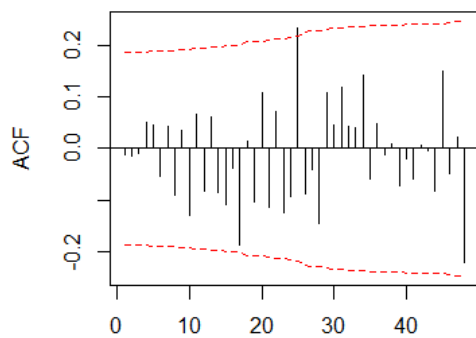
ACF modelo 1a



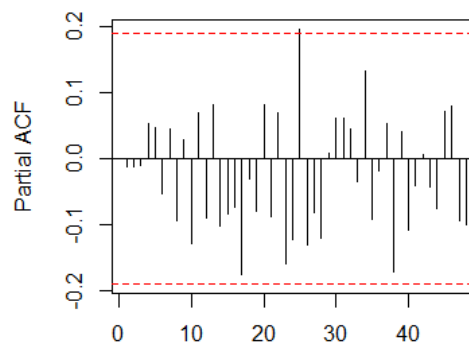
PACF modelo 1a



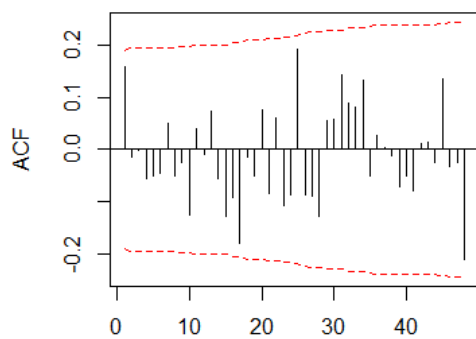
ACF modelo 1b



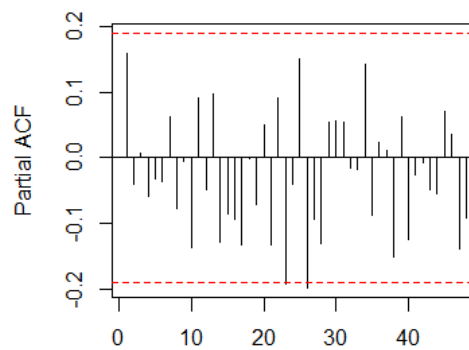
PACF modelo 1b



ACF modelo 1c



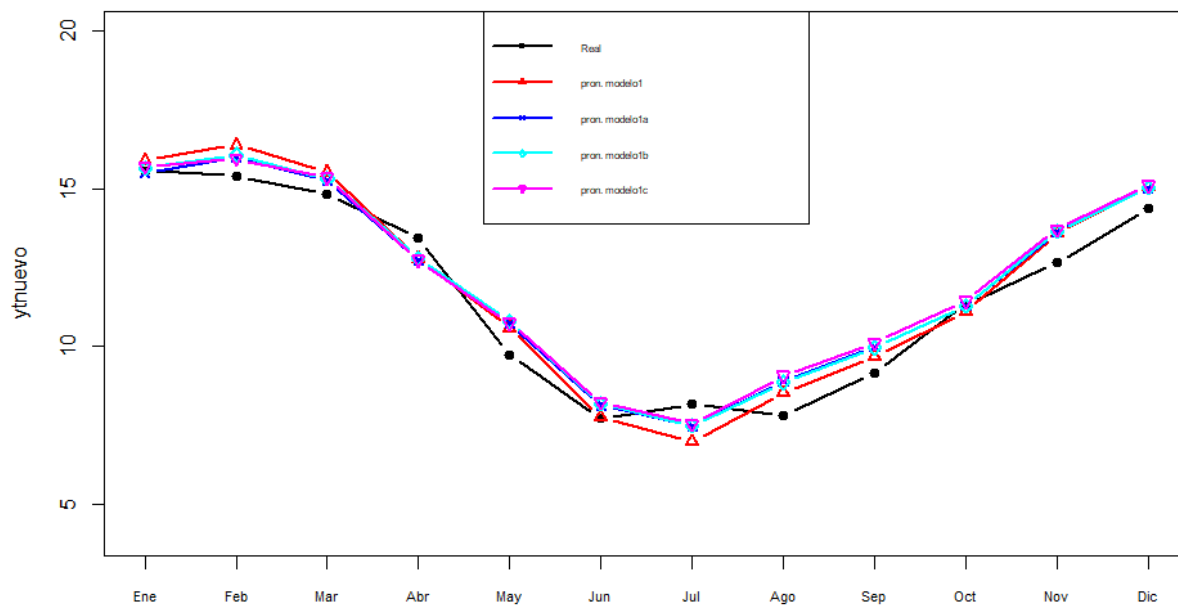
PACF modelo 1c



Comparando pronósticos, según medidas de precisión de pronósticos puntuales y por I.P, los mejores en pronósticos son los modelo 1a (mejor MAE, mejor MAPE, la misma amplitud media I.P), modelo 1b (mejor cobertura), aunque en todos los modelos con errores ARMA se disminuyó la cobertura, el 3.89% es el de mayor cobertura comparado con los otros modelos. sin embargo todas las medidas difieren por muy poco.

Medidas de Pronostico					
Modelo	Amplitud I.P	Cobertura I.P (%)	RMSE	MAE	MAPE
<b>1a</b>	1	<i>3.858425</i>	<b>0.7010009</b>	<b>0.6229147</b>	<b>6.000733</b>
<b>1b</b>	1	<b>3.895583</b>	0.7101108	0.6363721	6.093285
<b>1c</b>	1	3.858410	0.7586619	0.6802958	6.55719

Comparando gráficamente, los pronósticos de modelos 1a y 1b se acercan más a los valores reales de la validación cruzada.



Se recomienda modelo 1a por buen ajuste entre los modelos comparados, de los mejores en pronóstico y es un modelo válido, por tanto puede recomendarse.



## Conclusiones

Después de realizar todo el análisis anterior se identificaron 2 modelos finales, un modelo loess el cual indica que  $E_t$  es R.B por lo cual no fue necesario ajustarle modelos ARMA a sus residuales, esto puede ser porque al ajustar el modelo loess se hace con valores de la tendencia desnacionalizada pero que aun contienen componentes del error estructural. Por el contrario los MRLM la modelacion de la tendencia se hace desde el filtro de descomposición clásica y por ello la tendencia al modelarla no incluye componente de errores.

El modelo final ajustado es:

$$\begin{aligned} \hat{Y}_t = & 14,42477510 - 0,03354103t + 0,00032141t^2 + 1,09017325I_{1,t} + \\ & 1,49889787I_{2,t} + 0,67101283I_{3,t} - 1,92270512I_{4,t} - 3,97957862I_{5,t} - \\ & 6,62898410I_{6,t} - 7,33024794I_{7,t} + 5,95713938I_{8,t} - 4,89507389I_{9,t} + \\ & 3,64913667I_{10,t} + 1,35321683I_{11,t} + 0,18196615E_{t-1} + 0,18206398E_{t-2} + a_t, \end{aligned}$$

con  $a_t$  R.B