

Árboles

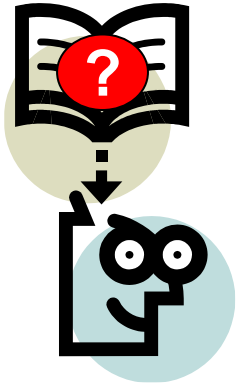
PhD. Félix Oscar Fernández Peña.

Árboles

Contenido

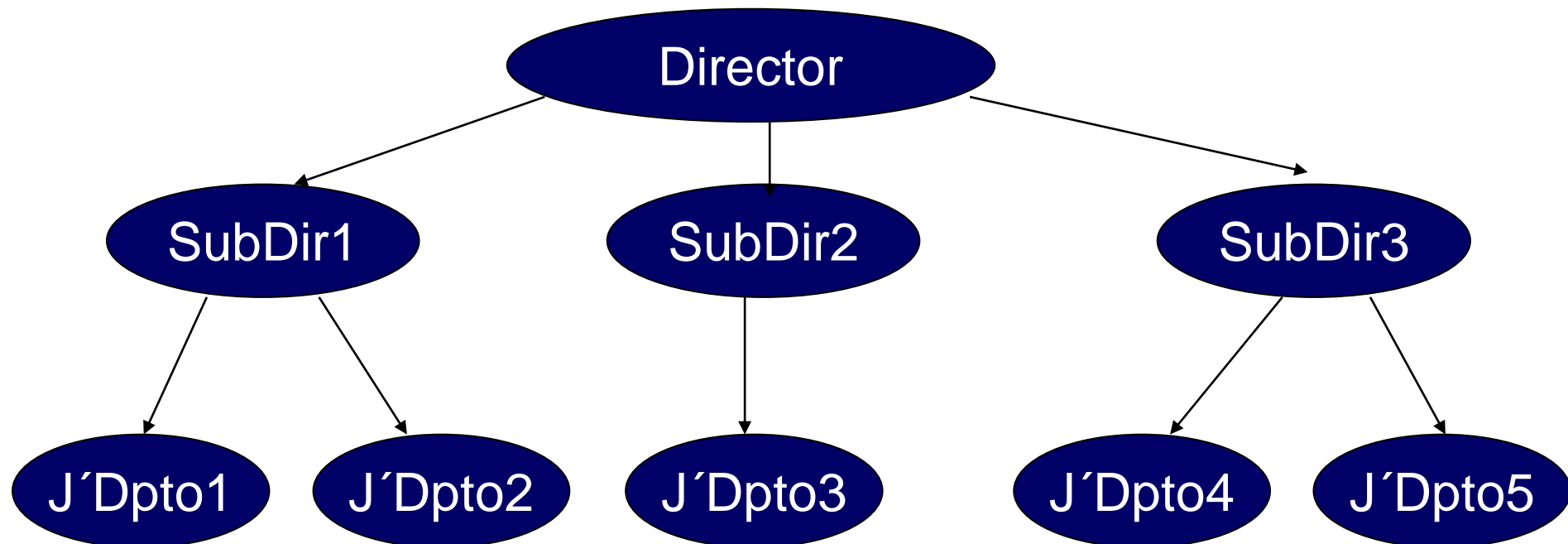
- Definición de árbol
- Árboles Binarios
- Recorridos en árboles binarios
- Árboles de búsqueda:
 - Árboles lexicográficos
 - Árboles hilvanados
- Árboles generales
- Transformación de árboles generales en binarios

Introducción



¿Qué estructura de datos se debe utilizar para representar estructuras jerárquicas o taxonómicas?

Ejemplo:



Definición de Árbol

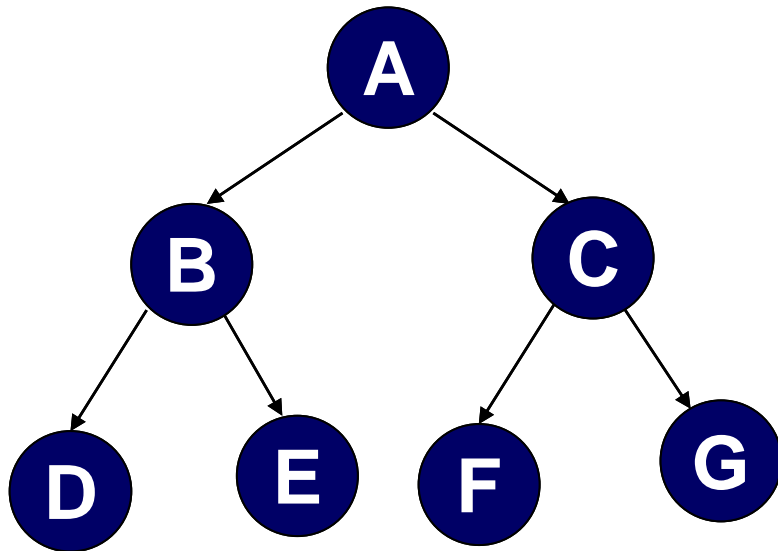
Un **árbol** (tree) es un T.D.A. que consta de un conjunto finito T de nodos y una relación R (paternidad) entre los nodos tal que:

- Hay un nodo, especialmente designado, llamado la **raíz** del árbol T .
- Los nodos restantes, excluyendo la raíz, son particionados en m ($m \geq 0$) conjuntos disjuntos T_1, T_2, \dots, T_m , cada uno de los cuales es, a su vez, un árbol, llamado **subárbol** de la raíz del árbol T .
- A los nodos que no son raíces de otros subárboles se les denomina **hojas** del árbol T , o sea, no tienen **sucesores** o **hijos**.

Aclaraciones

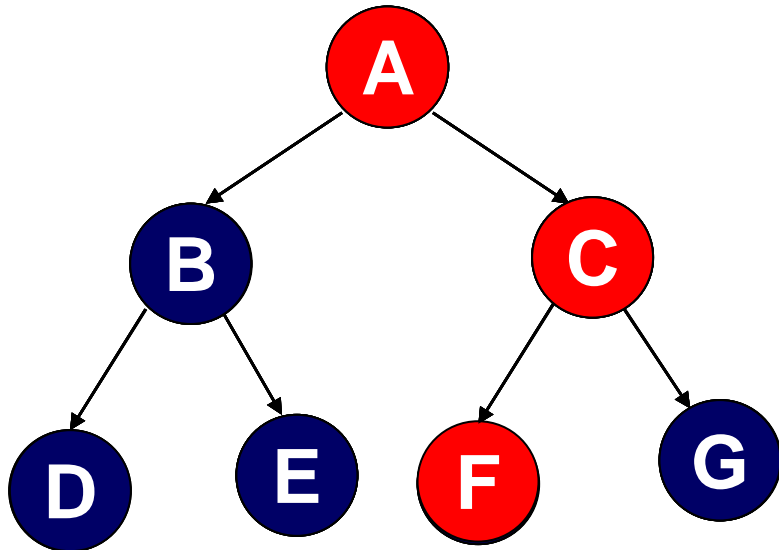
- Si el conjunto finito T de nodos del árbol es vacío, entonces se trata de un ***árbol vacío***.
- En esta estructura existe **sólo un nodo** sin padre, que es la ***raíz*** del árbol.
- Todo nodo, a excepción del nodo raíz, tiene ***uno y sólo un padre***.
- Los subárboles de un nodo son llamados ***hijos***.

Ejemplos



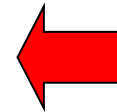
- Padre de C: **A**
- Padre de E: **B**
- Padre de G: **C**
- Padre de A: **NO**
- Hijos de A: **B** **C**
- Hijos de C: **F** **G**
- Hijos de F: **NO**

Ejemplos

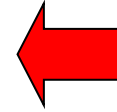


Secuencias

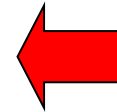
- de A a G



- de A a E



- de A a F



C es sucesor de A y

F es sucesor de C

Otras definiciones

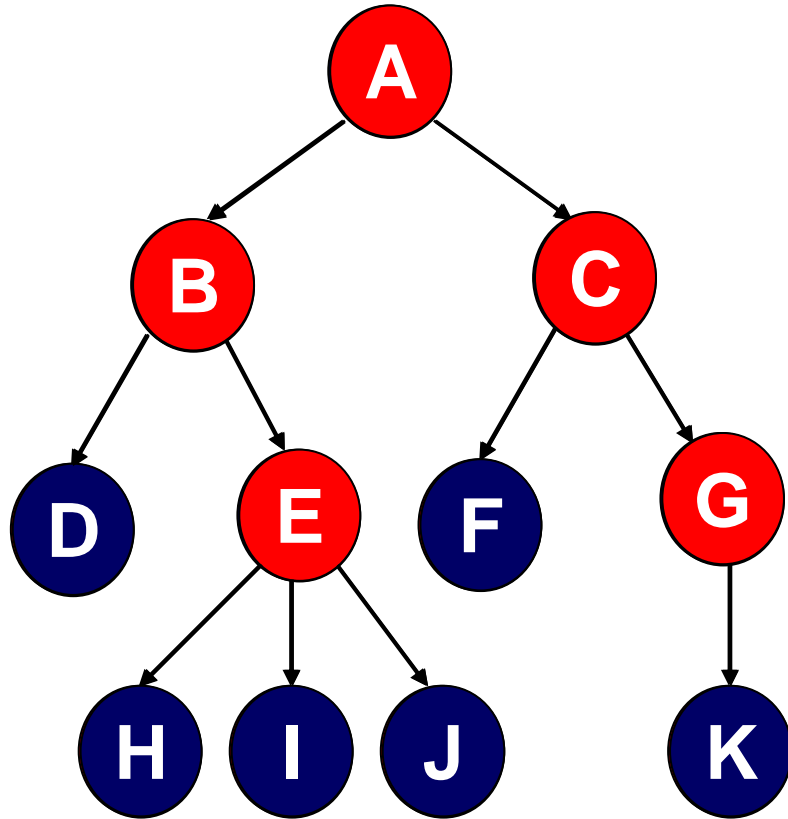
Grado de un nodo: cantidad de hijos de un nodo.

Grado de un árbol al mayor de los grados de todos sus nodos.

Nodo hoja a un nodo sin hijos o con grado = 0.

Nodo rama a un nodo que tiene hijos, o sea, a la raíz de un subárbol.

Ejemplos



Grado

• de A:

2

• de E:

3

• de G:

1

• de J:

0

Grado del árbol: 3

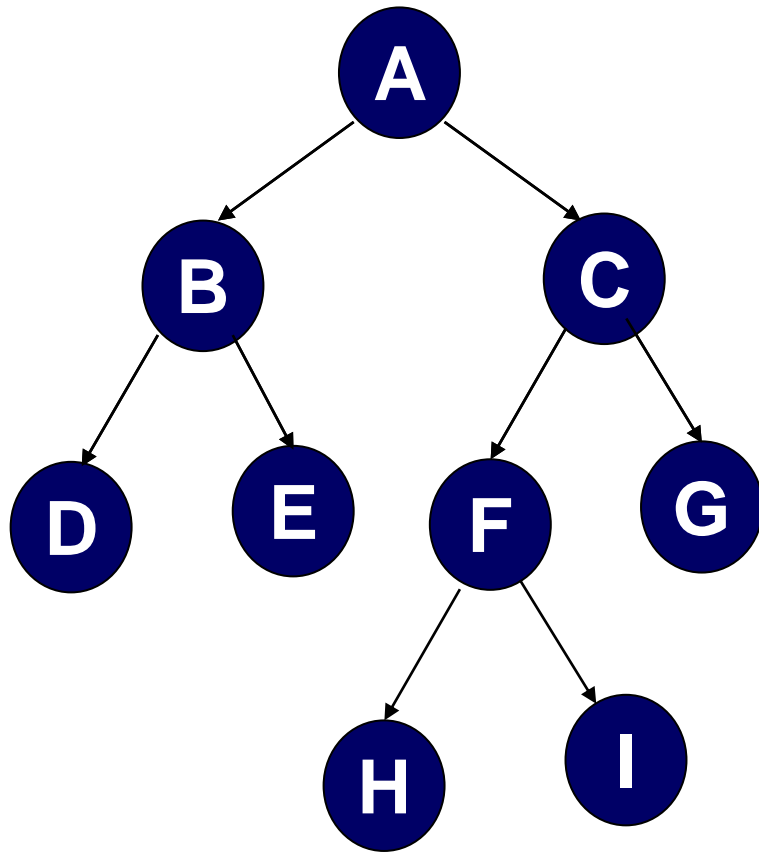
Nodos hojas: D, H, I, J, F, K

Nodos ramas: A, B, C, E, G

Otras definiciones

Nivel de un nodo al nivel de su padre más uno. Por definición, la raíz del árbol tiene nivel 0. Esta definición es recursiva.

Ejemplos



Nivel

de A: **0**

de E: **2**

de B: **1**

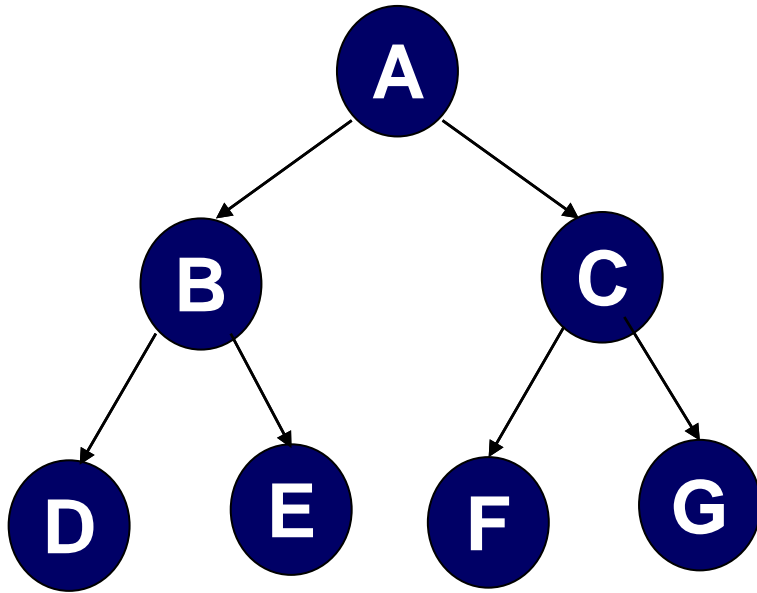
de I: **3**

de G: **2**

Otras definiciones

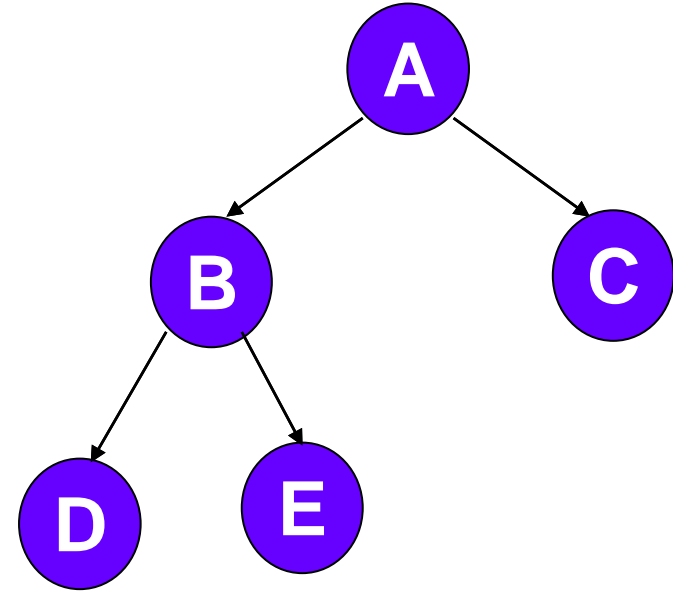
Árbol completo de nivel n a un árbol en el que cada nodo de nivel n es una hoja y cada nodo de nivel menor que n tiene, al menos, un subárbol no vacío.

Ejemplos



Árbol **completo** de nivel 2

Cada nodo del nivel n es una hoja



Árbol **no completo** de nivel 2

Un nodo del nivel n-1 es una hoja

Otras definiciones

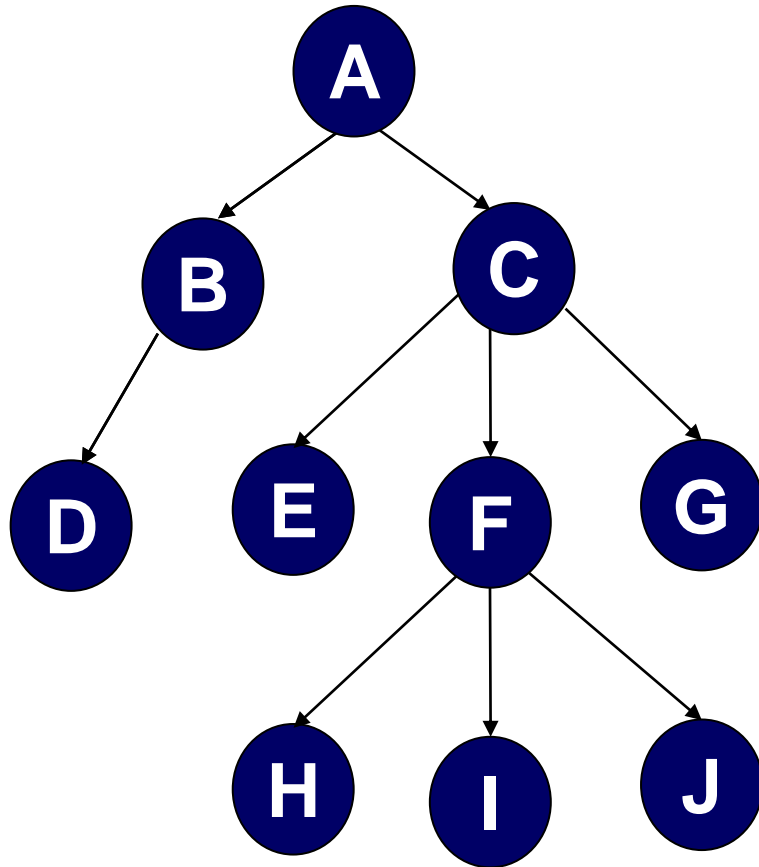
Padre de un nodo al nodo raíz del subárbol más pequeño que contiene a dicho nodo y en el cual él no es raíz.

Hijo(s) de un nodo al (los) nodo(s) raíz(ces) de uno de sus subárboles.

Predecesor de un nodo al nodo que le antecede en un recorrido del árbol.

Hermano de un nodo a otro nodo hijo de su padre.

Ejemplos



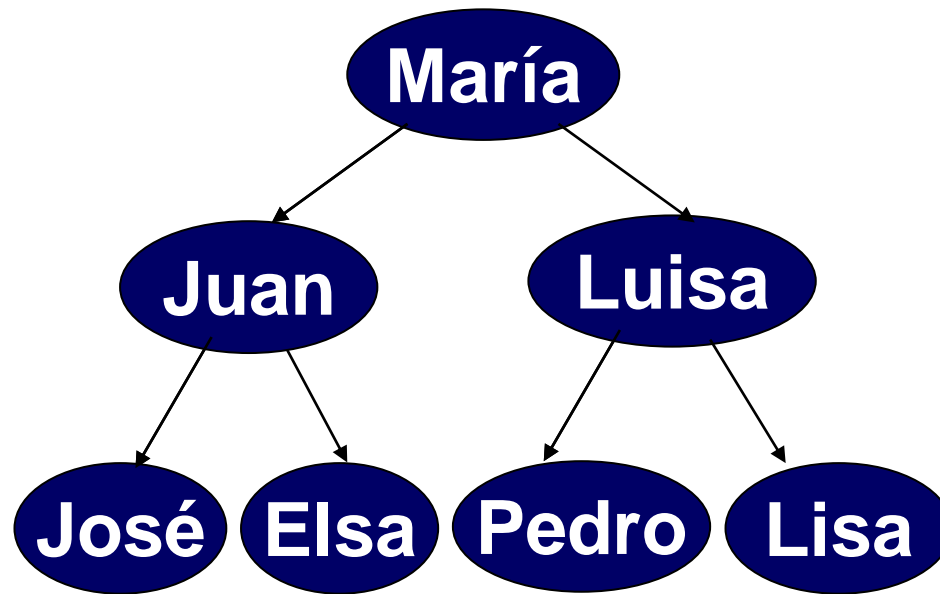
- Padre de G: **C**
- Hijos de C: **E** **F** **G**
- Hermanos de I: **H** **J**

Otras definiciones

Árbol ordenado a todo árbol para el que se considera el orden relativo de los sucesores o subárboles de cualquier nodo. Es decir, en un árbol ordenado se habla de primero, segundo o último hijo de un nodo en particular. El primer hijo de un nodo de un árbol ordenado es denominado el hijo mayor de ese nodo y el último hijo es denominado el menor.

El Árbol es ordenado si al intercambiar el orden relativo de los subárboles de un nodo, representa una situación semánticamente diferente.

Ejemplos: Árbol genealógico de María (sin los hermanos)



El árbol es ordenado

- El primer subárbol corresponde al padre.
- El segundo subárbol a la madre.

Otras definiciones

Árbol orientado a un árbol para el cual no interesa el orden relativo de los sucesores o subárboles de cualquier nodo, ya que sólo se tiene en cuenta la orientación de los nodos.

Ejemplo:

La estructura organizativa de una empresa, donde no es importante el orden de los subdirectores a la hora de representarlos en el árbol.

En la solución de problemas informáticos, los más utilizados son los árboles ordenados.

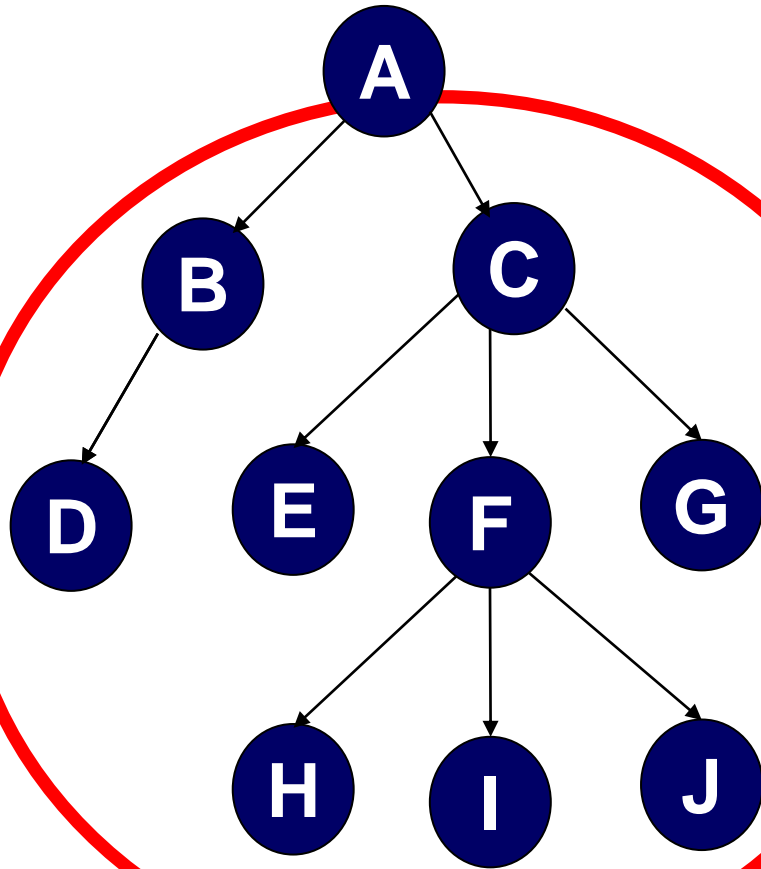
Otras definiciones

Una ***floresta*** es una colección de dos o más árboles disjuntos.

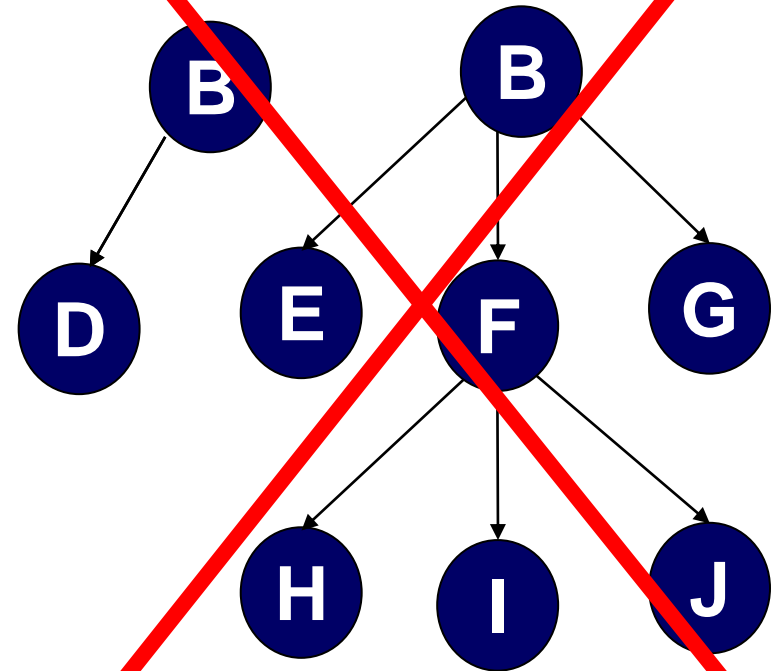
Aclaraciones:

- Disjuntos significa que no hay nodos en común entre dos árboles cualesquiera de la misma.
- De un árbol se obtiene una floresta al quitarle la raíz, si tiene dos hijos o más.
- De una floresta se obtiene un árbol al añadir un nodo que sea raíz de todos los árboles que la conforman.

Ejemplos



Es un árbol



NO es una floresta

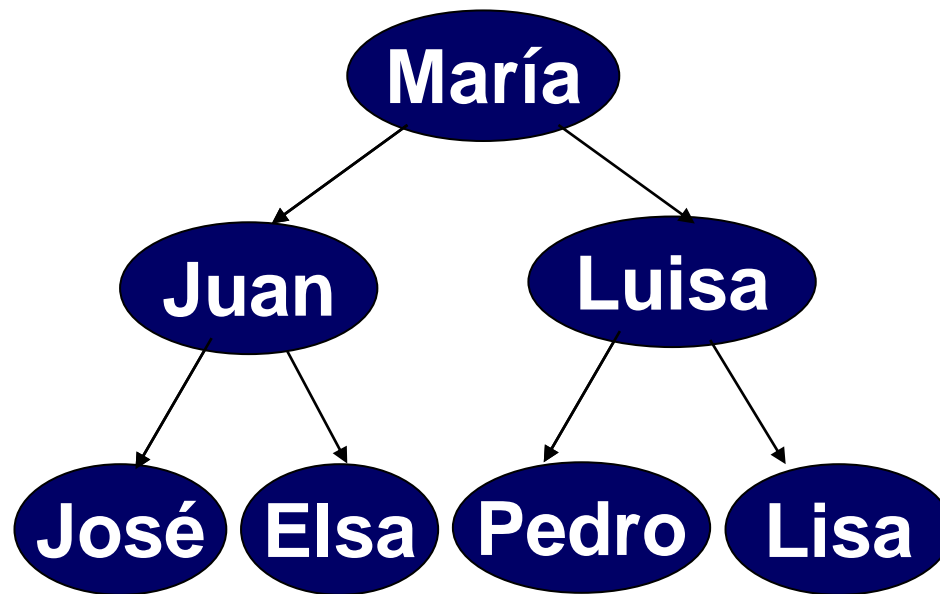
Definición de Árbol Binario

Un **árbol binario** (en inglés **binary tree**) es un árbol ordenado de grado 2.

Aclaraciones:

- cada nodo tiene como máximo dos hijos, o sea, dos subárboles.
- Al ser ordenado el árbol, importa el orden de los subárboles, es decir, que será necesario especificar de cada nodo cuál es el hijo izquierdo y cuál el hijo derecho.

Ejemplo



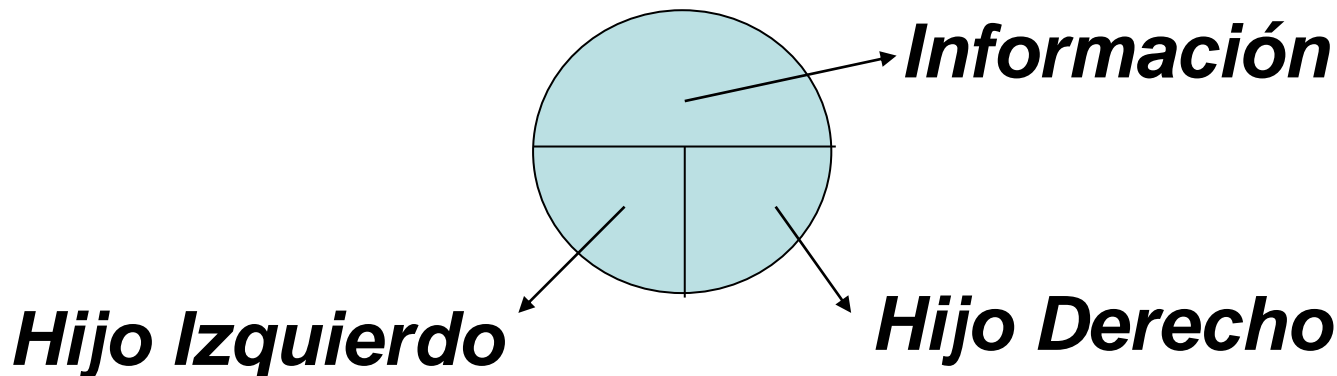
El árbol genealógico es un árbol binario.

- Cada nodo tiene dos hijos
- Es significativo el orden de los subárboles.

Árbol Binario: Características

Cada nodo del árbol binario contiene:

- Una referencia a su información.
- Un apuntador a su hijo izquierdo.
- Un apuntador a su hijo derecho.



Recorridos de un Árbol Binario

Los recorridos se clasifican de acuerdo al momento en que se visita la raíz del árbol y los subárboles izquierdo y derecho.

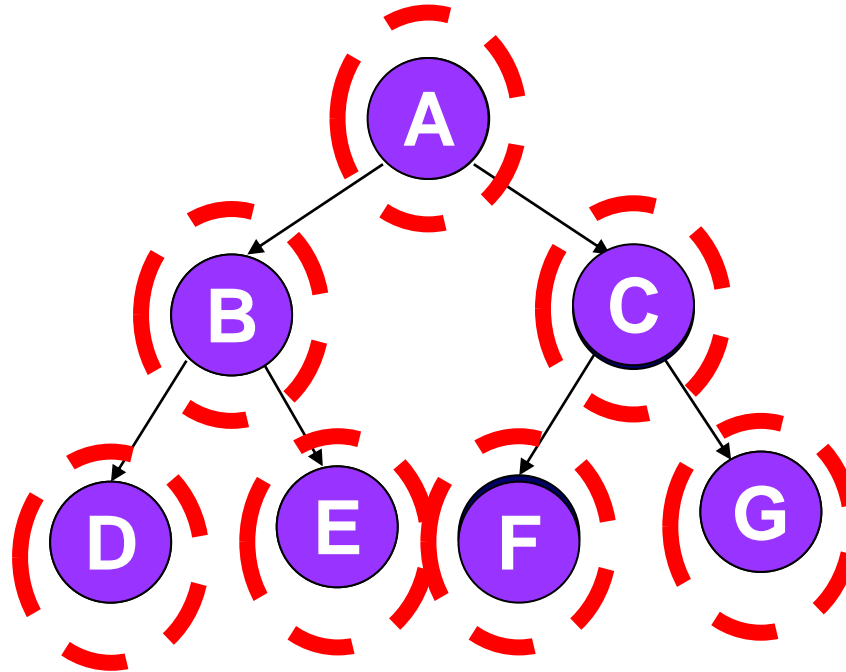
Existen tres recorridos:

- Recorrido en Preorden
- Recorrido en orden simétrico o inorden
- Recorrido en orden final o Postorden

Recorrido en Preorden

1. Visitar la raíz.
2. Recorrer subárbol izquierdo en preorden.
3. Recorrer subárbol derecho en preorden.

Recorrido en Preorden



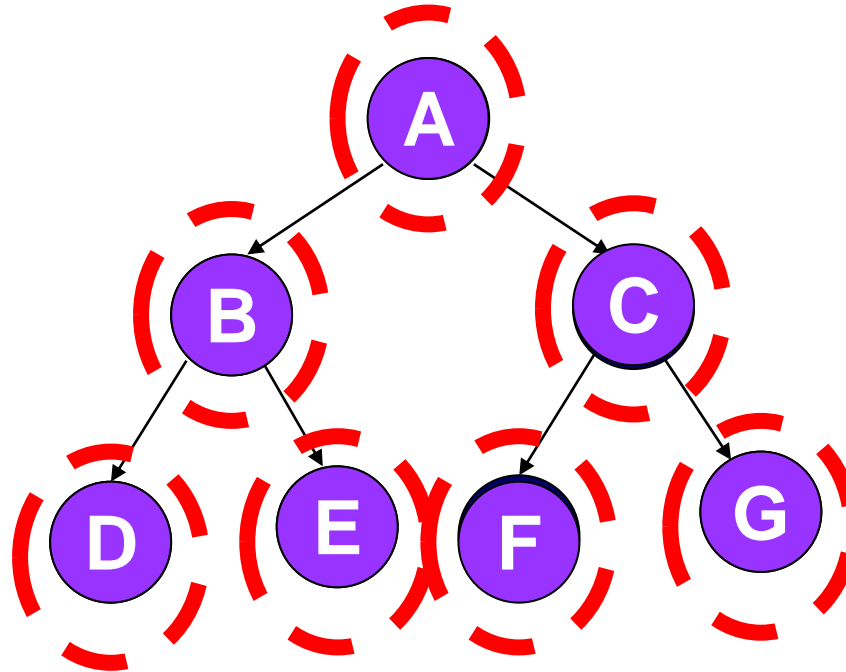
Recorrido: **A** **B** **D** **E** **C** **F** **G**

1. Raíz.
2. Subárbol izquierdo en preorden.
3. Subárbol derecho en preorden.

Recorrido en Simétrico

1. Recorrer subárbol izquierdo en simétrico.
2. Visitar la raíz.
3. Recorrer subárbol derecho en simétrico.

Recorrido en Simétrico



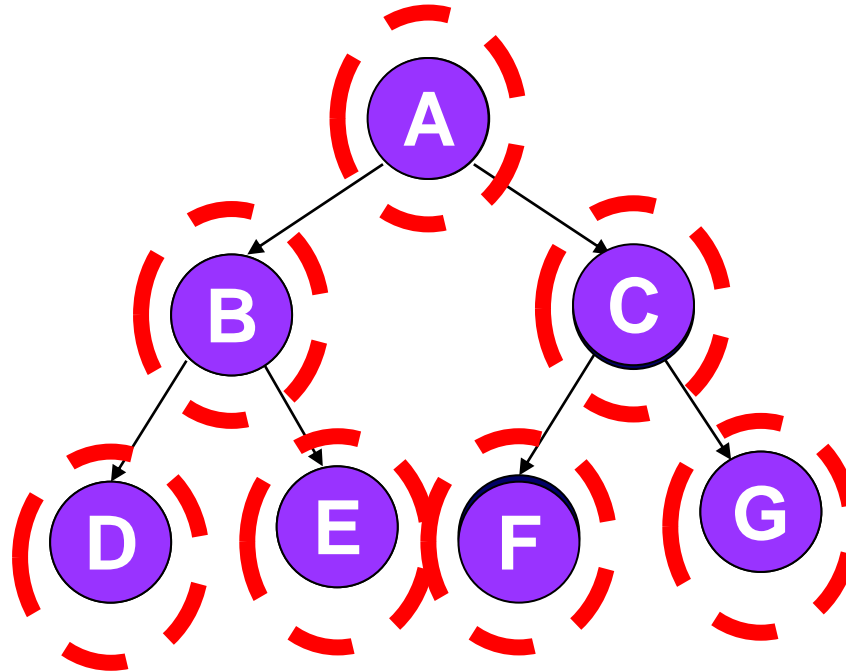
Recorrido **D** **B** **E** **A** **F** **C** **G**

1. Subárbol izquierdo en simétrico.
2. Raíz.
3. Subárbol derecho en simétrico.

Recorrido en Postorden

1. Recorrer subárbol izquierdo en orden final.
2. Recorrer subárbol derecho en orden final.
3. Visitar la raíz.

Recorrido en Postorden



Recorrido **D** **E** **B** **F** **G** **C** **A**

1. Subárbol izquierdo en orden final.
2. Subárbol derecho en orden final.
3. Raíz.

Árboles de Búsqueda

Permiten realizar operaciones (recorridos, búsqueda de un elemento, etc) de forma más eficiente.

Hay dos momentos para la manipulación de un árbol:

- La construcción del árbol.
- El recorrido del árbol para realizar las operaciones requeridas según el problema a resolver.

Existen dos tipos especiales de árboles de búsqueda:

- Árboles lexicográficos.
- Árboles hilvanados.

Árboles Lexicográficos

Un ***árbol lexicográfico*** es un árbol binario que, recorrido en orden simétrico, permite obtener la información de los nodos en algún criterio de ordenamiento.

La técnica de construcción de un árbol lexicográfico consiste en un proceso recursivo que va colocando los nodos en el subárbol izquierdo o derecho del nodo raíz, según sea el criterio de ordenamiento deseado (ascendente o descendente).

Árboles Lexicográficos

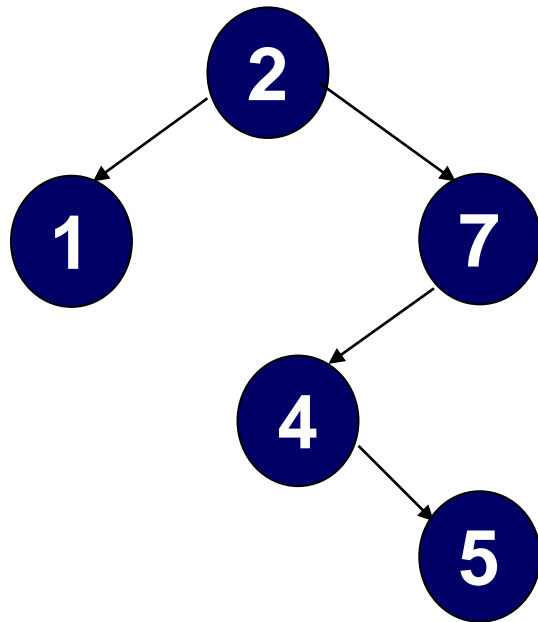
Siguiendo un ordenamiento ascendente:

1. Se compara el nodo que se quiere insertar con la raíz del árbol.
 - Si es menor, se coloca en el subárbol izquierdo siguiendo el mismo proceso.
 - Si es mayor, se coloca en el subárbol derecho siguiendo el mismo proceso.

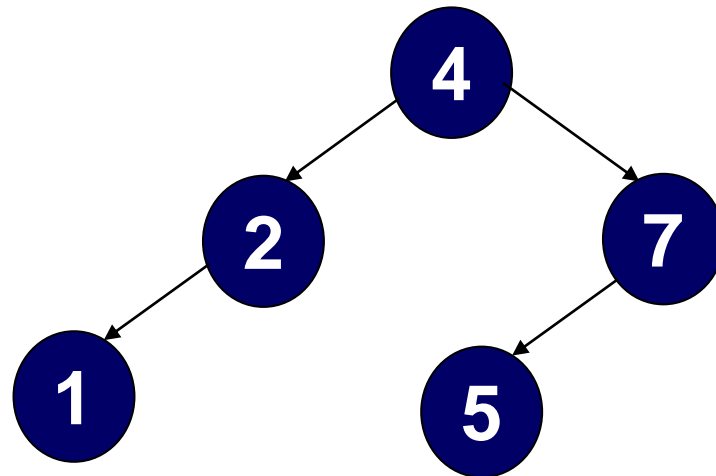
Árboles Lexicográficos: Ejemplo

Árbol lexicográfico con ordenamiento ascendente.

Lista: 2, 7, 1, 4, 5



Lista: 4, 7, 2, 1, 5



Si se recorre en orden simétrico, se obtiene la información de sus nodos en orden ascendente: 1, 2, 4, 5, 7 con independencia del orden de la lista original.

Problemas

El recorrido de árboles con programas recursivos resulta costoso ya que implica un gasto adicional de memoria y tiempo de ejecución. Para árboles muy grandes se puede desbordar el stack del sistema relativamente pronto.



¿Cuál es la solución?



Árboles hilvanados

Árboles Hilvanados

Un ***árbol hilvanado*** (o ***árbol entrelazado***) es un árbol binario en el que cada hijo izquierdo de valor nulo es sustituido por un enlace o hilván al nodo que le antecede en orden simétrico (excepto el primer nodo en orden simétrico) y cada hijo derecho de valor nulo es sustituido por un enlace o hilván al nodo que le sigue en el recorrido en orden simétrico (excepto el último nodo en orden simétrico).

Árboles Hilvanados

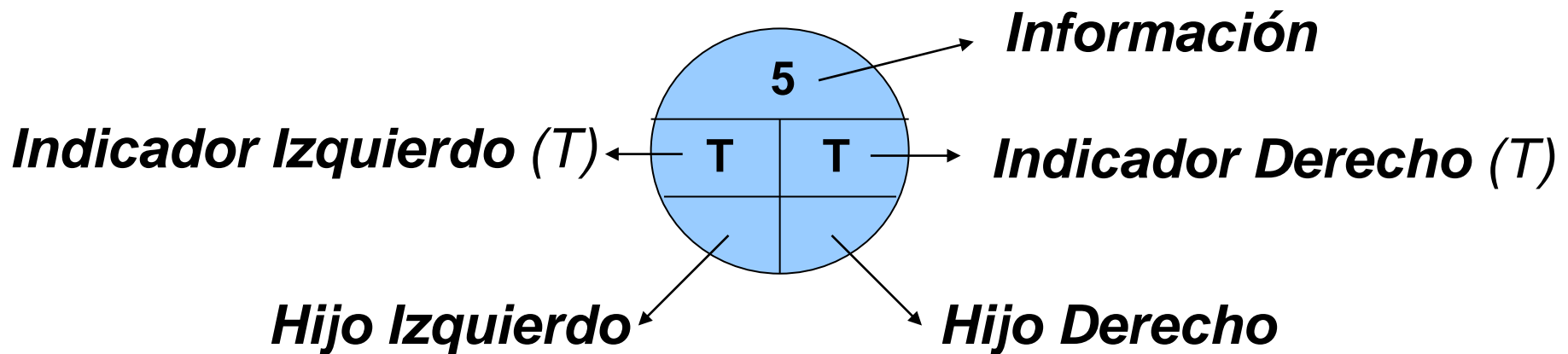
Ahora, un recorrido en orden simétrico se puede implementar sin necesidad de recursividad.

Sin embargo, se requiere que los nodos tengan en su estructura algún atributo que permita saber cuándo un enlace es real y cuándo se trata de un hilván. En este caso es necesario un atributo para cada hijo.

Árbol Hilvanado

Cada nodo del árbol hilvanado contiene:

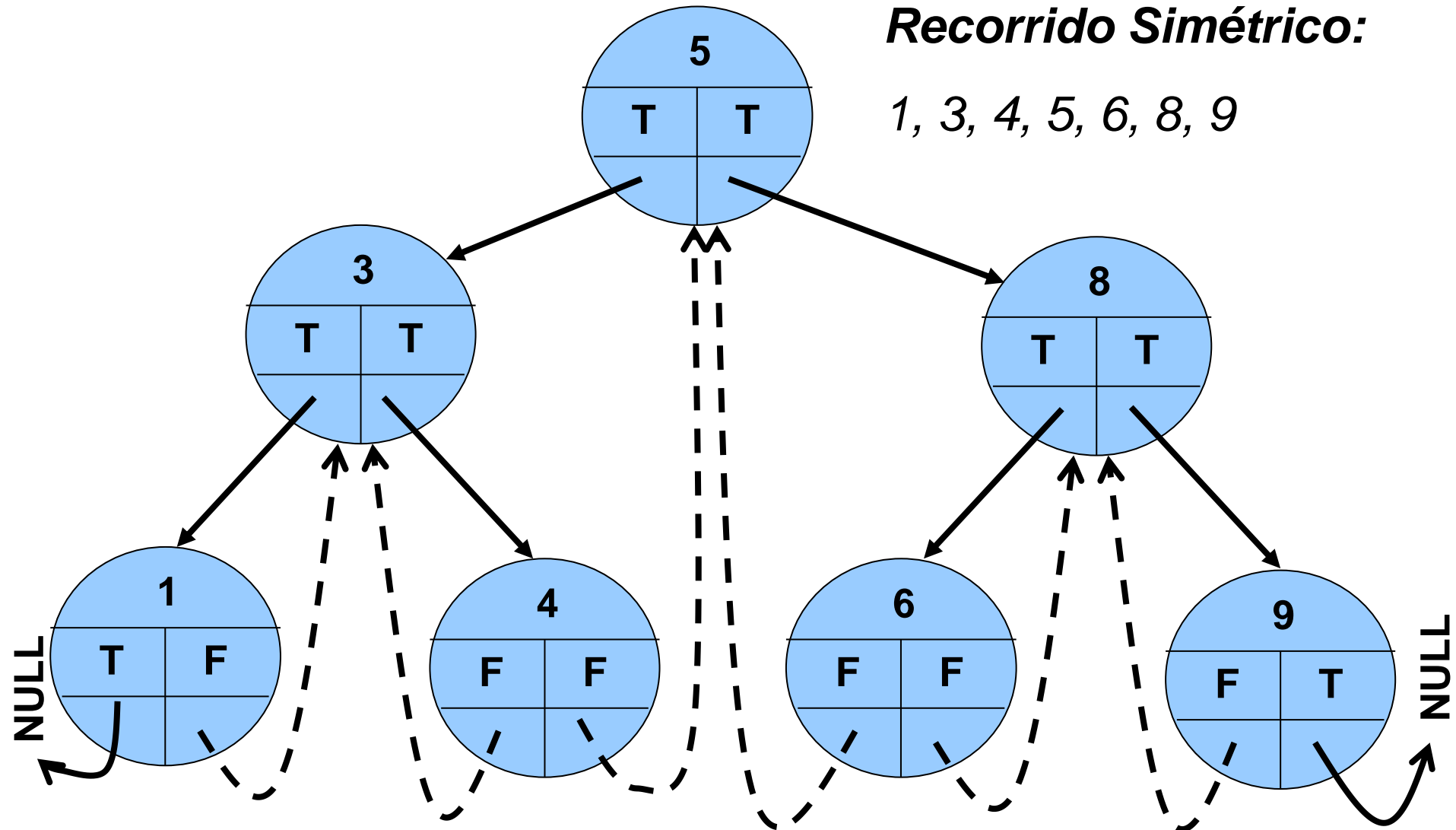
- Una referencia a su información.
- Un apuntador a su hijo izquierdo.
- Indicador Izquierdo (Verdadero o Falso).
- Un apuntador a su hijo derecho.
- Indicador Derecho (Verdadero o Falso).



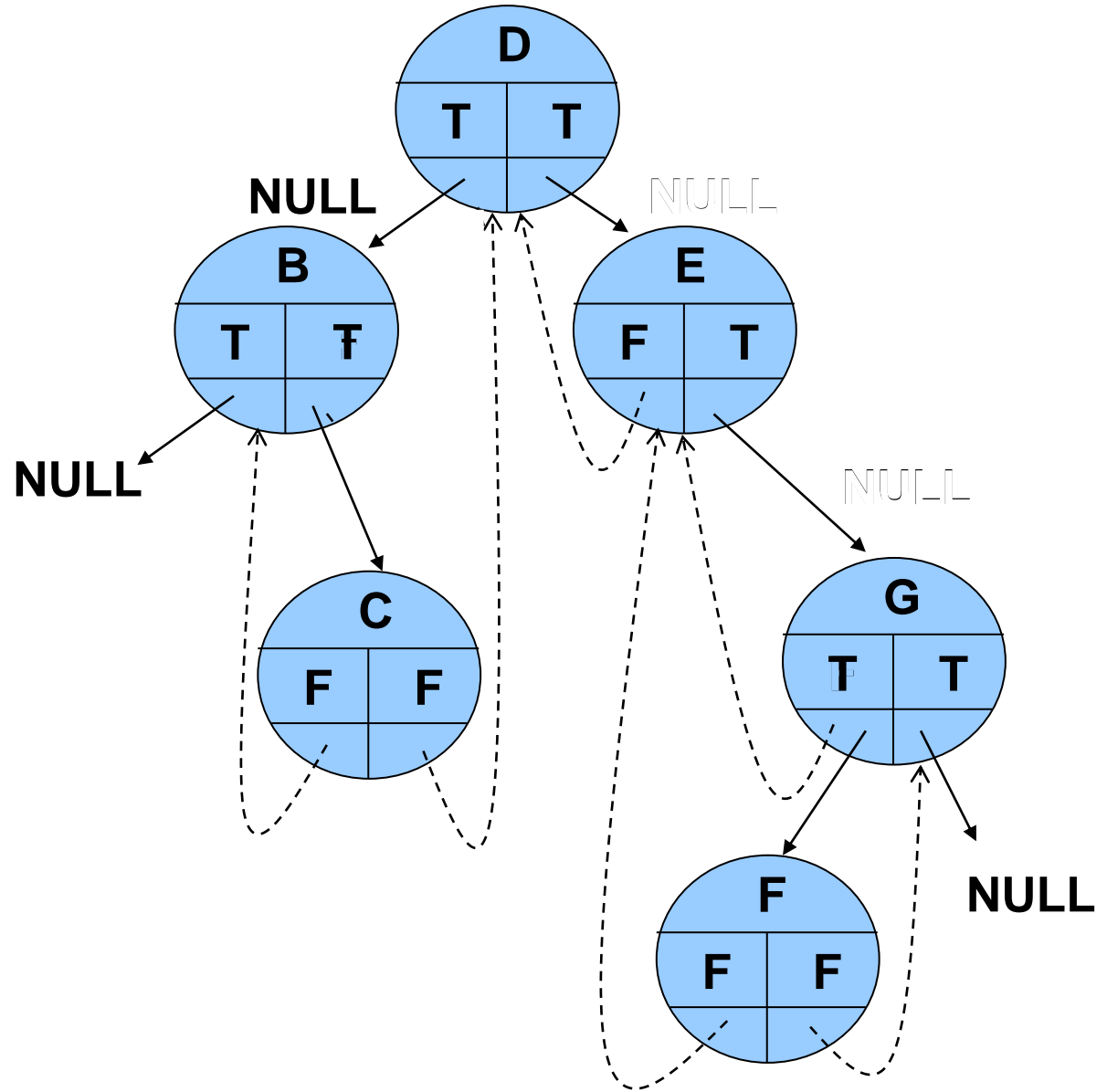
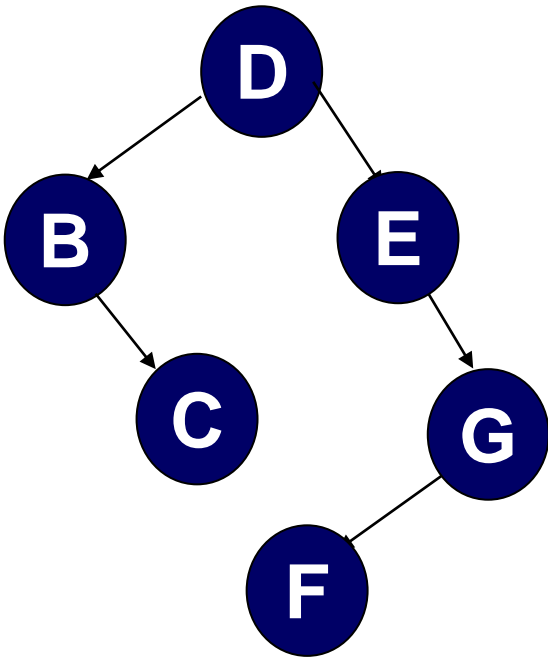
Árboles Hilvanados

Recorrido Simétrico:

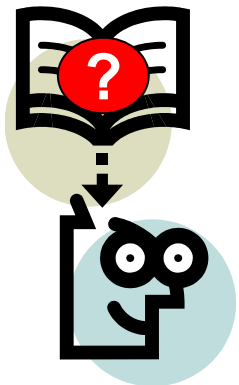
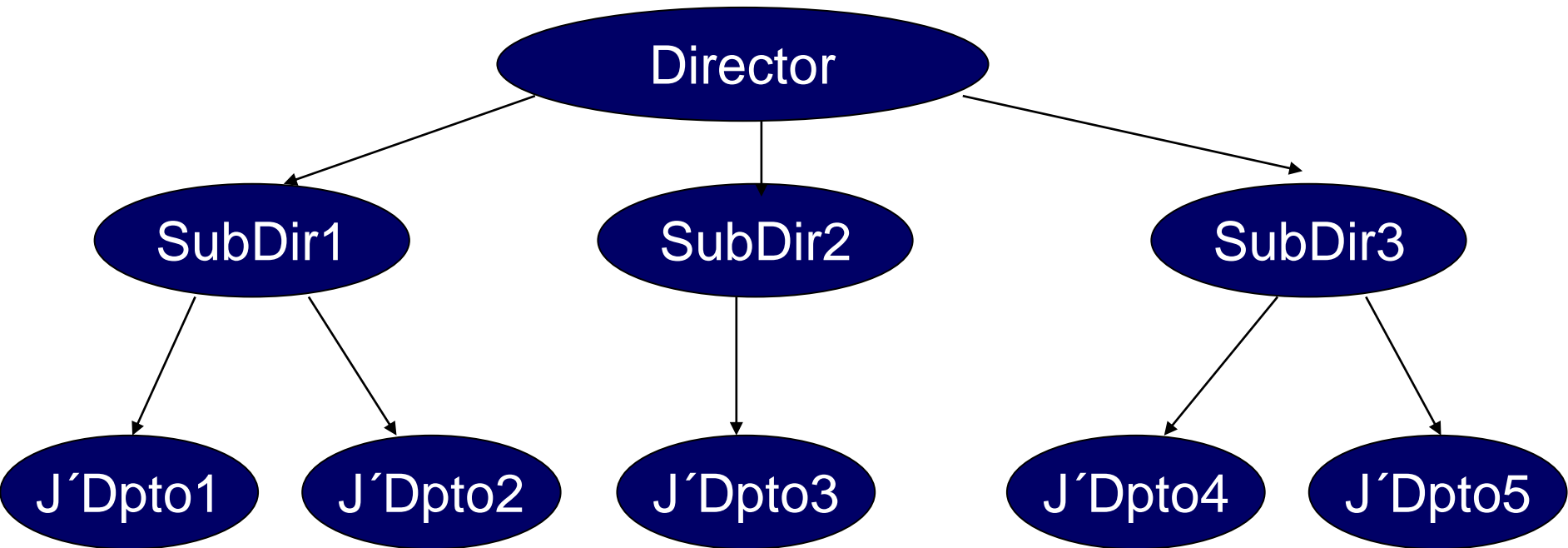
1, 3, 4, 5, 6, 8, 9



Construyendo Árboles Hilvanados



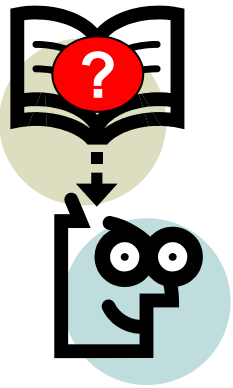
Árboles Generales



¿La estructura anterior se puede representar con un árbol binario?

Árboles Generales

Son árboles cuyo grado es mayor que dos.



¿Cómo representarlos?

Árboles Generales

- 1 Por cada nodo: la información y una lista de referencias a cada uno de sus hijos.
- **Arreglo:** Se pierde espacio, cada nodo tiene un grado diferente.
 - **Lista secuencial:** la manipulación de la lista de hijos se hace difícil al no poder acceder directamente a uno de los hijos.

Árboles Generales

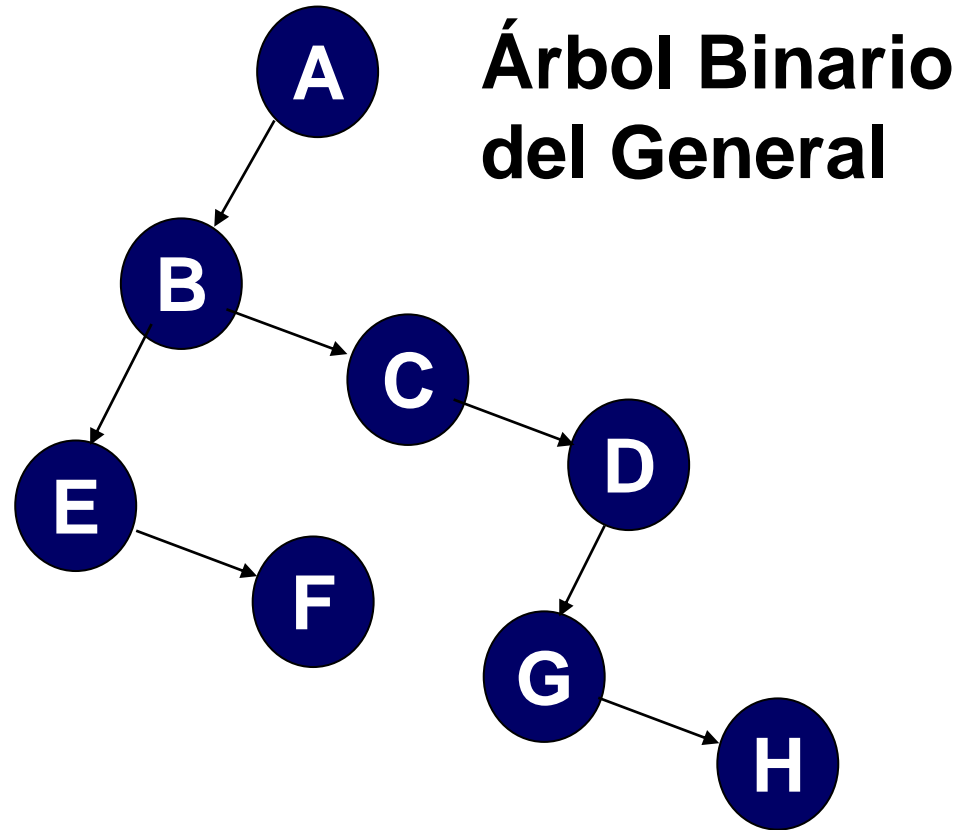
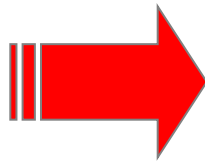
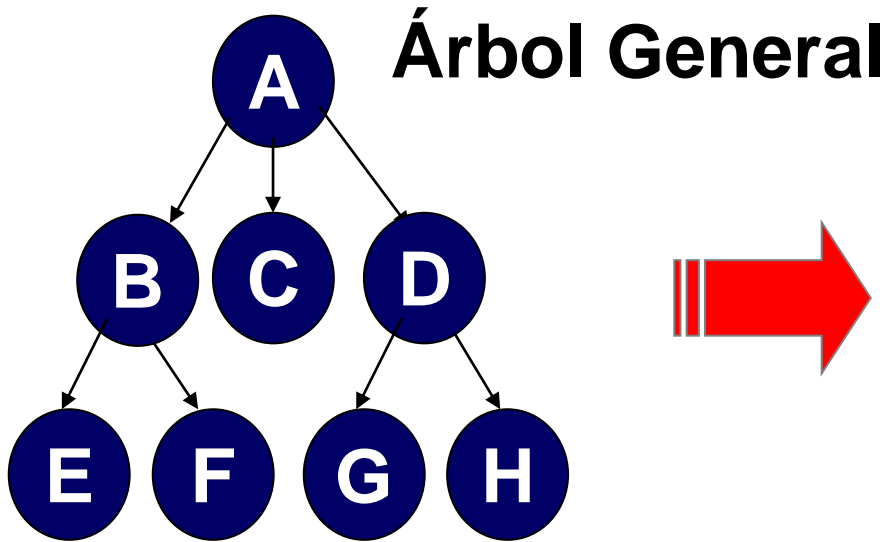
2 Transformar el árbol general en binario

Cada nodo tiene en su enlace izquierdo a su primer hijo en el general y a la derecha de un nodo van sus hermanos en el general.

Aclaraciones:

- El árbol se convierte en binario donde el **enlace izquierdo** representa al **primer hijo** (en el árbol general) y el **enlace derecho** al siguiente **hermano** (en el árbol general).
- El árbol es **ordenado** porque a la izquierda está su primer hijo (si lo tiene) y a la derecha estarán sus hermanos (si los tiene) con sus descendientes.

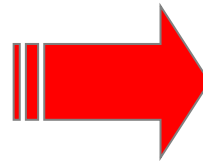
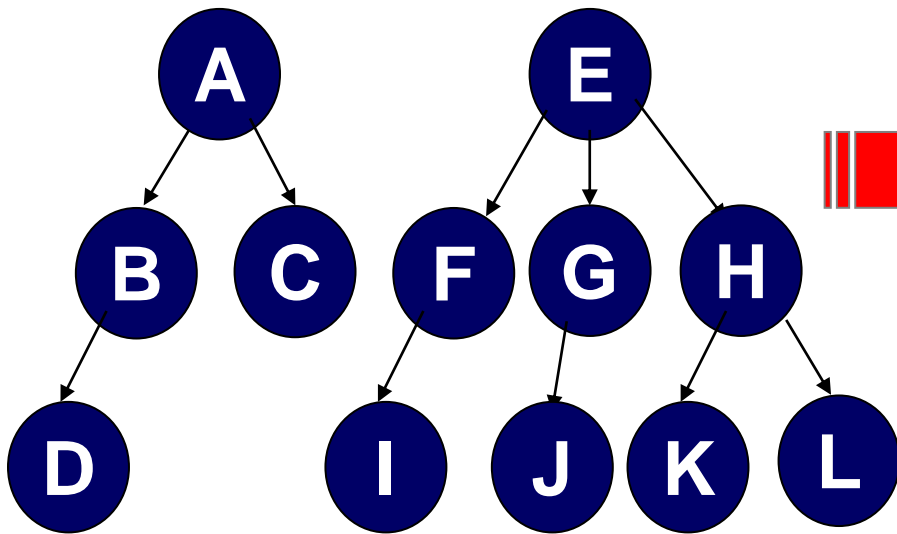
Transformación de General en Binario



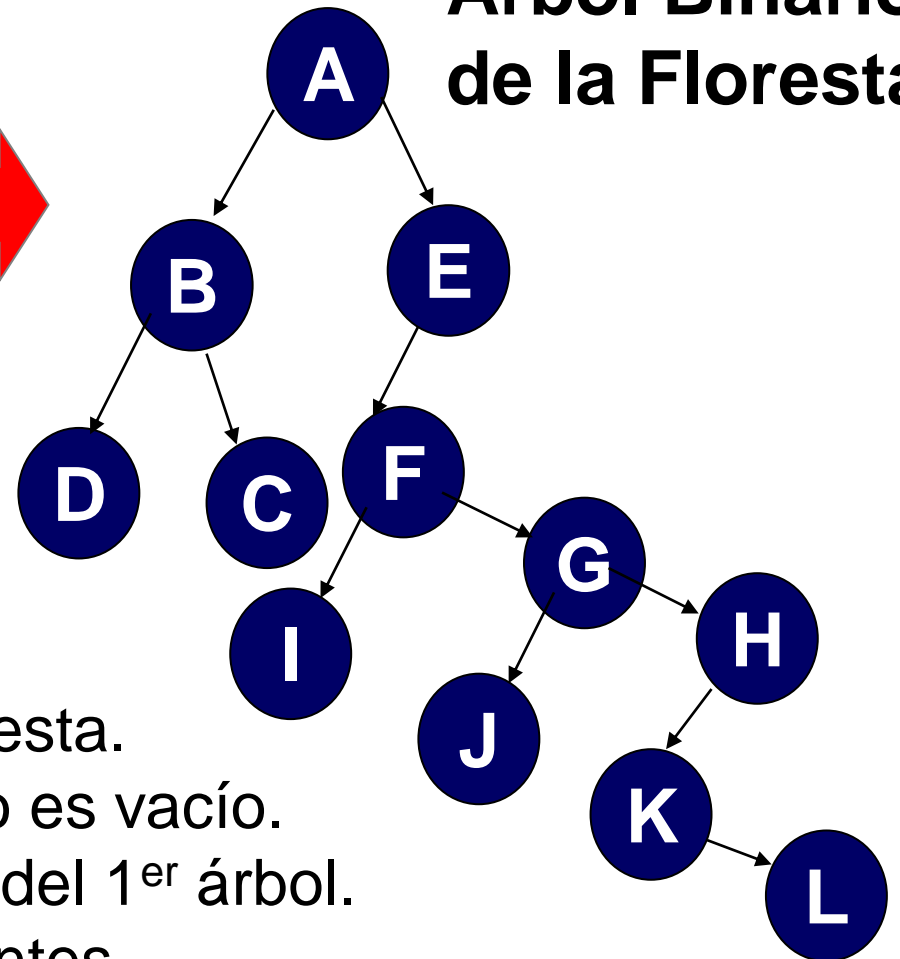
- El que no tiene hijo izquierdo es hoja en el general.
- El que no tiene hijo derecho es el último hermano en el general.

Transformación de General en Binario

Floresta



**Árbol Binario
de la Floresta**



N - cantidad de árboles de la floresta.

- Si $N=0$ entonces el árbol binario es vacío.
- Si $N>0$ - raíz del binario es raíz del 1^{er} árbol.
 - Hijo izquierdo sus descendientes.
 - Hijo derecho, la raíz del 2^{do} árbol.

Conclusiones

- La ED Árbol es altamente utilizada en soluciones prácticas.
- Los árboles binarios tienen un amplio uso en el procesamiento de información.
- La solución a problemas de procesamiento utilizando árboles involucra, comúnmente, el uso de la recursividad.