Taller en clase

Integrantes: Alvaro Sebastián, Ruiz Mateo

Curso: 3ro Software "A"

Fecha: 03-06-2025

Tema: Axiomas de probabilidad

Axiomas de probabilidad

Dado un experimento y un conjunto de posibles resultados (S), la probabilidad tiene como propósito asignar a cada evento (A) un valor (P(A)), denominado la probabilidad de (A). Este valor proporciona una medida precisa de la posibilidad de que el evento ocurra. Para asegurar que estas asignaciones sean coherentes con la comprensión intuitiva de la probabilidad, deben cumplir con ciertos axiomas fundamentales.

Los axiomas de probabilidad constituyen los cimientos matemáticos sobre los cuales se construye toda la teoría moderna de la probabilidad, estableciendo las condiciones mínimas que debe cumplir cualquier función para ser considerada una medida de probabilidad válida.

La formalización axiomática desarrollada por Andréi Kolmogórov en 1933 revolucionó el campo probabilístico al proporcionar un marco riguroso y matemáticamente consistente que unificó diferentes enfoques previos. Esta sistematización no solo permitió la rigorización de argumentos ya utilizados, sino que también abrió las puertas al estudio de problemas que se encontraban fuera de los marcos clásicos tradicionales.

La definición axiomática de Kolmogórov establece que la asignación de probabilidad a cada uno de los sucesos considerados en un experimento aleatorio debe ser coherente con las operaciones lógicas entre dichos sucesos.
Esta coherencia se garantiza mediante un sistema de tres axiomas que funcionan como reglas fundamentales, de las cuales se derivan varios teoremas que se listan como propiedades o consecuencias de los axiomas.

Primer Axioma: No negatividad

El axioma de no negatividad establece que la probabilidad de cualquier suceso S es no negativa: $P(S) \geq 0$ para todo $S \in A$. Esto garantiza que las probabilidades sean números reales no negativos, lo cual es esencial para su interpretación lógica y física. Además, asegura que cualquier función de probabilidad válida debe asignar valores no negativos a todos los eventos del espacio muestral. Ejemplo:

- En un hospital, se estudia la probabilidad de que un paciente presente una reacción alérgica a uno de tres medicamentos A, B, o C. Se recogen datos sobre 1000 pacientes. El análisis muestra:

$P(A) = 0.08$
$P(B) = 0.12$
$P(C) = -0.04$

Análisis: El valor de $P(C) = -0.04$ viola el axioma de no negatividad.

Segundo Axioma: Normalización

El axioma de normalización establece que la probabilidad del espacio muestral completo es 1: $P(\Omega) = 1$, lo que significa que al menos un resultado ocurrirá con certeza. Este principio es fundamental para garantizar la coherencia matemática en la teoría de probabilidades, ya que define una escala donde 1 representa certeza total y 0, imposibilidad absoluta. Gracias a esta norma, todas las posibilidades individuales se encuentran dentro de este rango, asegurando una interpretación clara y consistente de los eventos posibles. Ejemplo:

- En un examen de opción múltiple, cada pregunta tiene 4 respuestas posibles (A, B, C, D) y solo una es correcta.

Espacio muestral: $\Omega = \{A, B, C, D\}$

El profesor asigna estas probabilidades con base en un modelo erróneo:

$P(A) = 0.3$
$P(B) = 0.4$
$P(C) = 0.3$
$P(D) = 0.2$

Suma total: $P(\Omega) = 0.3 + 0.4 + 0.3 + 0.2 = 1.2$ ×

Análisis: El modelo no cumple el axioma de normalización

Tercer Axioma: σ - Aditividad

El axioma de σ- aditividad establece si $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ son sucesos mutuamente excluyentes ($S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$) entonces $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(S_n)$. Es decir, si se tienen eventos mutuamente excluyente, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades individuales. Este principio extiende la aditividad finita a conjuntos infinitos numerables, lo que permite manejar probabilidades en espacios continuos y trabajar con límites y convergencia. Gracias a la σ- aditividad, es posible desarrollar conceptos avanzados como distribuciones continuas y procesos estocásticos, asegurando una base matemática sólida para el análisis probabilístico. Ejemplo:

- Un geólogo estudia la probabilidad de que un sismo tenga una magnitud en ciertos rangos. Los rangos son disjuntos:

S_1: magnitud entre 1.0 y 1.9
S_2: entre 2.0 y 2.9
S_3: entre 3.0 y 3.9
- ...

S_n: entre n.0 y n.9

Sucesos disjuntos: Cada intervalo es exclusivo de los demás:

$$S_i \cap S_j = \emptyset \quad \text{si } i \neq j$$

El modelo asigna: $P(S_n) = 0.1 \times (0.9)^n$, $n \in \mathbb{N}$

Este modelo es geométrico decreciente y la suma infinita converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 0.1 \cdot (0.9)^n = 1 - 0.1 = 0.9$$

Supón que el sismo no puede tener magnitud mayor a 10, entonces:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{10} S_n\right) = \sum_{n=1}^{10} P(S_n) \Rightarrow \text{Modelo válido si suma} \leq 1$$

Análisis: este axioma permite modelar fenómenos en series infinitas, como tiempos de espera, longitudes, colas, etc.

Axioma del Suceso imposible

Este axioma establece que la probabilidad de que ocurra un suceso imposible (el conjunto vacío) es cero. Es el punto de partida del sistema de medidas de probabilidad. No hay ningún subconjunto de Ω más "pequeño" que el vacío y por lo tanto su probabilidad representa, $P(\emptyset) = 0$, la menor cantidad posible de ocurrencia: 0.

Ejemplo:

- En una empresa se realiza un sorteo con 200 boletos numerados del 001 al 200. Sólo hay un ganador. Sea el evento $A = \{\text{boleto } 205\}$.

Como ese boleto no fue vendido ni forma parte del experimento, entonces:

$$A = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(\emptyset) = 0$$

Esto refleja que no se puede asignar probabilidad a un suceso que no pertenece al espacio muestral definido.

Axioma de Cota Superior

Se propone un límite máximo lógico a la probabilidad de cualquier evento. El valor 1 representa certeza total de que un evento ocurrirá.

$$P(A) \leq 1$$

Esto registra la codificación de probabilidades a valores dentro del intervalo $[0, 1]$. Esto asegura que cualquier suma o combinación de probabilidades también se mantenga dentro de este rango, garantizando estabilidad. Ejemplo:

- En una cadena de producción de autos, el 82% son sedán, el 15% son SUV, y el 6% son eléctricos.

Un estudiante afirma que la probabilidad de sacar un sedán o eléctricos o SUV es:

$P(\text{sedán} \cup \text{eléctrico}) = 0,82 + 0,06 = 0,88$.

Nunca debe superar 1, incluso ignorando las intersecciones o clasificaciones dobles.

Axioma del complemento

Este axioma se basa en que todo suceso o ocurre o no ocurre. Dado que la probabilidad total del espacio es 1, la probabilidad del evento complementario es simplemente el "resto" de la probabilidad total. Ejemplo:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- En un hospital, el 12% de los pacientes presentan efectos adversos por un nuevo medicamento.

La probabilidad de que un paciente no presente efectos adversos es:

$$P(A^c) = 1 - 0,12 = 0,88$$

Suponiendo que de 1000 pacientes tratados, 880 no presentaron efectos. Entonces:

$$P(A^c) = \frac{880}{1000} = 0,88 \to P(A) = 0,12$$

Se valida empíricamente la relación complementaria.

Axioma de monotonía

$$A \subseteq B \to P(A) \leq P(B)$$

Refleja que si un evento A está completamente contenido dentro de B, entonces no puede ser más probable que B, ya que cualquier ocurrencia de A también es una ocurrencia de B. Ejemplo:

- En una base de datos de clientes:
  A: clientes que compraron en enero = 600
  B: compraron en el trimestre enero-marzo = 1450

- Total de clientes registrados

$$P(A) = \frac{600}{2000} = 0,3 \qquad P(B) = \frac{1450}{2000} = 0,725$$

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

La importancia de esta axiomatización trasciende el ámbito puramente matemático, ya que ha permitido el desarrollo de aplicaciones en campos tan diversos como la física cuántica, las finanzas, la ingeniería y las ciencias sociales. La generalidad del marco axiomático ha facilitado la extensión de la teoría probabilística desde problemas discretos simples hasta sistemas continuos complejos, manteniendo siempre la consistencia matemática fundamental.

Los axiomas de Kolmogorov son fundamentales en la teoría de la probabilidad moderna debido a su simplicidad y capacidad generativa.

Referencias.

D. C. Montgomery y G. C. Runger, Estadística para ingenieros y científicos, 5ª ed. México: Mc Graw - Hill, 2018 [En línea], Disponible en: https://www.uteg.edu.ec/biblioteca-libros/wp-content/uploads/2021/11/Estadística-para-ingenieros-y-científicos.pdf