INVESTIGACIÓN

Integrantes: William Martínez, Santiago Mora
Curso: 3ro Software
Fecha: 03/06/2025

1.- Conceptos

Axiomas de Probabilidad

La probabilidad es una rama de las matemáticas que estudia el comportamiento de fenómenos aleatorios.

Para fundamentar su estudio, en 1933 el matemático Andrey Kolmogórov formuló tres axiomas fundamentales que permiten construir toda la teoría formal de la probabilidad. Estos tres principios forman la base del cálculo de probabilidades: no negatividad, espacio muestral y aditividad finita. A partir de ellos, se han derivado múltiples propiedades y teoremas que facilitan el analisis de eventos compuestos, condicionales y dependientes. En este trabajo se explican los tres axiomas fundamentas y cinco teoremas derivados comúnmente utilizados para resolver problemas en contextos reales.

1. Axioma de No Negatividad

Este axioma establece que la probabilidad de cualquier evento es siempre mayor o igual que cero. Es decir, no existen probabilidades negativas, ya que estas carecen de interpretación logica en contextos físicos o experimentales. Matematicamente, se expresa como $P(A) \geq 0$. Esto garantiza que las medidas asignadas a los eventos son coherentes con su frecuencia esperada de ocurrencia. Es la base para asegurar que la probabilidad sea una función medida válida.

2. Axioma del Espacio Muestral

Afirma que la probabilidad del espacio muestral completo es igual a 1, representando la certeza total de que algún resultado posible ocurriera. Si S es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento, entonces $P(S) = 1$. Este axioma implica que el universo de eventos está completamente definido y que su suma de probabilidades debe cubrir todos los escenarios.

3. Aditividad Finita (Eventos Mutuamente Excluyentes)

Este axioma sostiene que si dos o más eventos son mutuamente excluyentes (no pueden suceder al mismo tiempo), la probabilidad de que ocurra alguno de ellos es la suma de sus probabilidades individuales.

Formalmente, si $A \cap B = \emptyset$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Este principio permite trabajar como uniones de eventos disjuntos de manera simple y lógica

4. Monotonía (Subconjuntos)

La propiedad de monotonía indica que si un evento A está completamente contenido dentro de otro evento B (es decir, $A \subseteq B$), entonces la probabilidad de A no puede ser mayor que la de B: $P(A) \leq P(B)$. Esta propiedad es coherente con el concepto de inclusión de conjuntos y refuerza la lógica de que un evento maś específico tiene menos o igual probabilidad que uno más general.

5. Aditividad Enumerada (Infinita)

Extiende el axioma de aditividad finita a una cantidad infinita de eventos disjuntos. Si tenemos una sucesión $A_1, A_2, A_3, \ldots$ de eventos mutuamente excluyentes, la probabilidad de su unión es la suma infinita de las probabilidades individuales:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Esta propiedad es muy útil en contextos donde se trabaja con procesos estocásticos o distribuciones de probabilidad continuas.

6. Ley de la Probabilidad Total

Este teorema se aplica cuando se tiene una partición del espacio muestral en eventos $B_1, B_2, \ldots, B_n$, y se desea conocer la probabilidad de un evento A condicionando a estos subconjuntos. Se expresa como:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A \setminus B_i)$$

Es muy útil para problemas con múltiples caminos o causas que llevan a un mismo resultado.

7. Probabilidad Condicional

La probabilidad condicional mide la probabilidad de que ocurra un evento A dado que se sabe que ha ocurrido otro evento B, y se representa como:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{si } P(B) > 0$$

Es fundamental para el analisis de dependencia entre eventos, cadenas de eventos, o decisiones bajo incertidumbre

8. Fórmula de Inclusión - Exclusión (dos eventos)

Permite calcular la probabilidad de la unión de eventos no disjustos. Corrige la aditividad simple restando la intersección doblamente contada:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

2. Ejercicios de ejemplo de cada axioma

1. Axioma de No Negatividad

Al lanzar una ruleta equilibrada con 4 colores: rojo, azul, verde y amarillo, ¿es válida una probabilidad de -0.2 para que salga rojo?

$$P(rojo) = \frac{1}{4} = 0.25$$

La probabilidad no puede ser negativa

$$P(Rojo) \geq 0$$

La probabilidad de -0.2 no es válida.

2. Axioma del Espacio Muestral

Lanzas un dado justo. ¿Cuál es la suma total de las probabilidades de todos los resultados posibles?

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Cada resultado tiene probabilidad de $\frac{1}{6}$

$$\sum_{i=1}^{6} P(i) = 6 \cdot \frac{1}{6} = 1$$

$$P(S) = 1$$

3. Aditividad Finita (EME)

¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par o impar al lanzar un dado?

- Par: $\{2, 4, 6\} \Rightarrow P(par) = \frac{3}{6}$
- Impar: $\{1, 3, 5\} \Rightarrow P(impar) = \frac{3}{6}$

$$P(par \cup impar) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

4. Monotonía (Subconjuntos)

En una urna hay bolas numeradas del 1 al 10.

Define $A = \{2,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$

- ¿Se cumple que $P(A) \leq P(B)$?

$$P(A) = \frac{2}{10} = 0.2$$

$$P(B) = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$A \subseteq B \Rightarrow 0.2 \leq 0.4 \;//$$

5. Aditividad Enumerada (Infinita)

Lanza una moneda hasta que salga cara. ¿Cuál es la probabilidad de que eventualmente salga?

- Cara al 1er intento: $\frac{1}{2}$
- Cara al 2do intento: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
- Cara al 3er intento: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

....

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i} = 1$$

6. Ley de la Probabilidad Total

En una fábrica:

- 70% de las máquinas son del tipo A y 30% del tipo B.
- El 5% de las piezas del tipo A son defectuosas, y el 10% de las del tipo B.

¿Qué probabilidad hay de que una pieza al azar sea defectuosa?

A: La pieza fue producida por una máquina tipo A

B: La pieza fue producida por una máquina tipo B

D: La pieza está defectuosa

$P(A) = 0.7$

$P(B) = 0.3$

$P(D|A) = 0.05$

$P(D|B) = 0.10$

$$P(D) = P(A) \cdot P(D|A) + P(B) \cdot P(D|B)$$

$$P(D) = (0.7)(0.05) + (0.3)(0.10)$$

$$P(D) = 0.035 + 0.03$$

$$P(D) = 0.065 \Rightarrow 6.5\% \,//$$

7. Probabilidad Condicional

En una bolsa hay 5 bolas: 2 rojas y 3 azules

Si se saca una bola y es azul, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída del total?

A: La bola es azul

E: Se extrajo una bola del total

$P(A) = \frac{3}{5}$, $P(E) = 1$

$$P(\text{Azul} | \text{Extraída}) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

$$P(A/E) = \frac{3/5}{1}$$

$$P(A/E) = \frac{3}{5} //$$

8. Inclusión - Exclusión

En un grupo:

- 40% estudian Matemáticas
- 30% estudian Física
- 15% estudian ambos

M: Estudia matemáticas

F: Estudia Física

$M \cap F$: Estudia ambas materias

$M \cup F$: Estudia al menos una

- ¿Cuál es la probabilidad de que alguien estudie al menos una?

$P(M) = 0.40$

$P(F) = 0.30$

$P(M \cap F) = 0.15$

$$P(M \cup F) = P(M) + P(F) - P(M \cap F)$$

$$P(M \cup F) = 0.40 + 0.30 - 0.15$$

$$P(M \cup F) = 0.55 //$$