# Ejercicios resueltos

Mateo Bouchet Agudo

March 20, 2025

**Discute el siguiente sistema en función del valor del parámetro** $a$

$$\begin{cases} \mathbf{ax + y + z = 1} \\ \mathbf{ay + x + z = a} \\ \mathbf{x + y + 2z = a^2} \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a obtener la matriz asociada al sistema.

$$\overbrace{\left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\underbrace{\begin{matrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}}_{A}} & \begin{matrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{matrix} \end{array}\right)}^{A*} \rightarrow \begin{matrix}\text{donde A es la matriz del sistema} \\ \text{y A* la matriz ampliada}\end{matrix}$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz A. Para ello, vamos a usar el determinante. Si det(A) = 0, entonces Rg(A) < 3. En otro caso, Rg(A) = 3.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2a^2 - 2a = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Si a $\neq$ 0, 1, entonces Rg(A) = 3. Además, como A está contenida en A*, Rg(A*) = Rg(A) = nº incógnitas = 3. Por tanto, según el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema será compatible determinado y la solución general la podemos obtener empleando la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & 1 \\ a^2 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^3 + a^2 + a - 1}{2a^2 - 2a} = \frac{1 - a^2}{2a}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-a^3 + 3a^2 - a - 1}{2a^2 - 2a} = -\frac{a}{2} + 1 + \frac{1}{2a}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a^4 - 2a^2 + 1}{2a^2 - 2a} = \frac{a^3 + a^2 - a - 1}{2a}$$

Si a = 0, la matriz que obtenemos es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

Nos podemos dar cuenta que el Rg(A) = 2 ya que existe un menor 2x2 que es distinto de 0. Si tomamos el menor en la posición (1, 1):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

En lo referente a A*, existe un menor 3x3 que es distinto de 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Esto implica que Rg(A*) = 3 > Rg(A). Por tanto, según el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.

Si a = 1, la matriz que obtenemos es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Nos podemos dar cuenta que el Rg(A) = 2 ya que existe un menor 2x2 que es distinto de 0. Si tomamos el menor en la posición (1, 1):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Además, el Rg(A*) = Rg(A) = 2 ya que no encontramos ningún menor 3x3 distinto de 0 en la matriz ampliada. Empleando el teorema de Rouché-Frobenius, ya que Rg(A) = Rg(A*) $\neq$ n$^{o}$ incógnitas = 3, concluimos que el sistema es compatible indeterminadode orden 1.

Para encontrar la solución vamos a hacer Gauss por filas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 1F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 1F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Con la matriz escalonada es trivial obtener la solución al sistema:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$$