Ejercicios resueltos

Mateo Bouchet Agudo

March 12, 2025

Discute el siguiente sistema en función del valor del parámetro a

$$\begin{cases} \mathbf{ax + 2ay + z = 1} \\ \mathbf{az + 2x - y = 1} \\ \mathbf{a^2x + az - y = a} \end{cases}$$

En primer lugar, vamos a obtener la matriz asociada al sistema.

$$\overbrace{\left(\underbrace{\begin{matrix} a & 2a & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a^2 & -1 & a \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ a \end{matrix} \right)}^{A*} \rightarrow \begin{matrix} \text{donde A es la matriz del sistema} \\ \text{y A* la matriz ampliada} \end{matrix}$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz A. Para ello, vamos a usar el determinante. Si det(A) = 0, entonces Rg(A) < 3. En otro caso, Rg(A) = 3.

$$\begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a^2 & -1 & a \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2a^4 - 3a^2 - 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} a_1 = -\sqrt{2} \\ a_2 = \sqrt{2} \end{cases}$$

Si a $\neq -\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, entonces Rg(A) = 3. Además, como A está contenida en A*, Rg(A*) = Rg(A) = nº incógnitas = 3. Por tanto, según el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema será compatible determinado y la solución general la podemos obtener empleando la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2a & 1 \\ 1 & -1 & a \\ a & -1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a^3 - 2a^2 + a - 1}{2a^4 - 3a^2 - 2} = \frac{a-1}{a^2-2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ a^2 & a & a \end{vmatrix}}{|A|} = 0 = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & 2a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ a^2 & -1 & a \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{2a^3 - 4a^2 + a - 2}{2a^4 - 3a^2 - 2} = \frac{a-2}{a^2-2}$$

Si a $= -\sqrt{2}$, la matriz que obtenemos es la siguiente:

$$\left(\begin{matrix} -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -1 & -\sqrt{2} \\ 2 & -1 & -\sqrt{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{matrix} \right)$$

Nos podemos dar cuenta que el Rg(A) = 2 ya que existe un menor 2x2 que es distinto de 0. Si tomamos el menor en la posición (2, 1):

$$\begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

En lo referente a A*, existe un menor 3x3 que es distinto de 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -10 - 5\sqrt{2} \neq 0$$

Esto implica que Rg(A*) = 3 > Rg(A). Por tanto, según el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.

Si a = $\sqrt{2}$, la matriz que obtenemos es la siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 2 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 2 & -1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}\right)$$

Nos podemos dar cuenta que el Rg(A) = 2 ya que existe un menor 2x2 que es distinto de 0. Si tomamos el menor en la posición (2, 1):

$$\begin{vmatrix} 2\sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

En lo referente a A*, existe un menor 3x3 que es distinto de 0. Por ejemplo

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -10 + 5\sqrt{2} \neq 0$$

Esto implica que Rg(A*) = 3 > Rg(A). Por tanto, según el teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible.