Resumen de algebra (segundo semestre)

Mateo P. Cetti

October 25, 2020

1 Espacios vectoriales

cualquier conjunto que posea operaciones de **suma** y **producto por un escalar**, cumpliendo todas las siguientes **propiedades:**

Suma:

1. **Asociativa** $(u + w) + v = u(w + v) = (u + v) + w$
2. **Conmutativa** $u + v = v + u$
3. **Elemento neutro** tal que $u + 0 = u$
4. Para cada vector u existe un elemento opuesto $(-u)$ tal que $u+(-u) = 0$.

Multiplicacion:

1. **Asociativa** $(k * k') * u = k * (k' * u) = (k * u) * k' k, k' e\mathbb{K}$
2. **Distributiva**
   - Respecto a la suma de vectores $k * (u + v) = k * u + k * v$
   - Respecto a la suma de escalares $(k_1 + k_2) * u = k_1 * u + k_2 * u$
3. **Elemento neutro** k=1, tal que $1 * u = u$

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, y V un conjunto de dos operaciones definimos:

Operacion interna llamada adición, que asigna a cada par u, v de elementos de V, un elemento de V denotado $u + v$

Operacion externa llamada multiplicación por un escalar que asigna a cada par formado por un elemento $ke\mathbb{K}$ y un elemento veV, un elemento de V denotado por kv

Subespacios vectoriales Un subconjunto no vacio W de un espacio vectorial V se denomina subespacio vectorial de V, si W es en si mismo un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y Multiplicacion por escalar definidas en V. Ademas debe cumplir:

- La suma de 2 vectores de W pertenecen a W $u, vW => u + vW$
- El producto de un vector de W por un escalar cualquiera K pertenece a W $uW, k\mathbb{K} => k.uW$
- El vector nulo pertenece a W

2 Clase 2

Combinacion lineal Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, v_1, v_2, v_n son vectores de V $k_1, k_2, ..., k_n$ son escalares de $\mathbb{K}$.

Se dice que un vector $v \in V$ es combinacion lineal de los vectores v_1, v_2, v_n segun los escalares k_1, k_2, k_n si y solo si:

$$v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_n + v_n$$

Generador de un subespacio vectorial Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, v_1, v_2, v_n son vectores de V, W es el conjunto de **todas** las combinaciones lineales de v_1, v_2, v_n. Llamaremos a W **subespacio generado** por v_1, v_2, v_n y lo indicaremos como:

$$W =< v_1, v_2, v_n >$$

y se lee "W es el subespacio generado por v_1, v_2, v_n"

El subespacio generado por los vectores v_1, v_2, v_n, puede ser el mismo V, en este caso diremos que el conjunto $S = v_1, v_2, ..., v_n$ genera el espacio vectorial V o bien, S es un generador de V.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, el conjunto $S = v_1, v_2, v_n$ es un **generador** de V si y solo si $v \in V \to v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_n v_n$

- Un generador es un conjunto de vectores tales que todo vector del espacio vectorial se puede expresar como una combinacion lineal de ellos
- El subespacio generado es el conjunto formado por todas las

Suma de conjuntos A y B son 2 conjuntos
$A + B = x = a + b/a \in Ayb \in B$

La suma de 2 conjuntos es un nuevo conjunto formado por elementos donde se suma 1 elemento del primer conjunto con 1 elemento del segundo conjunto.

Suma de subespacios vectoriales sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ si "w_1 y w_2 son subespacios del espacio vectorial V, entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio.

Interseccion de subespacios vectoriales sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ si "w_1 y w_2 son subespacios del espacio vectorial V, entonces $W_1 \cap W_2$ es un subespacio.

3 Clase 3 (Teoremas "utiles")

Teorema 1 (Combinacion lineal) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean v_1, v_2, v_n vectores de V. Si W es el conjunto de todas las combinaciones lineales de v_1, v_2, v_n se verifica:

- W es un subespacio de V
- v_1, v_2, v_n son elementos de W
- si W' es cualquier subespacio que contiene a v_1, v_2, v_n entonces $W \subset W'$

Teorema 2 (generador de un subespacio vectorial) Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.
$W =< v_1, v_2, v_n >$.
Si v_1 es combinación lineal de v_2, v_n, entonces: $< v_1, v_2, v_n >=< v_2, v_3, v_n >$

Como consecuencia de este teorema, si entre vectores de un **conjunto generador**, uno de ellos es **combinacion lienal** de los demas, este vector puede ser **eliminado** y los restantes siguen generando el mismo subespacio.

Dependencia e independencia lineal

- sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y v_1, v_2, v_n vectores de V el conjunto:

  - **a** v_1, v_2, v_n es **linearmente dependiente** si y solo si el vector nulo se expresa **de mas de una forma** como combinacion lineal, es decir, existen escalares k_1, k_2, k_n donde **NO TODOS son nulos**, tales que: $k_1 v_1 + k_2 v_2 + ... + k_n v_n = 0$
  - **b** v_1, v_2, v_n es **linearmente independiente** si y solo si el vector nulo se expresa **de una unica forma** como combinacion lineal, es decir, existen escalares $k_1, k_2, k_n = 0$ tal que: $0v_1 + 0v_2 + ... + 0v_n = 0$

Teoremas de caracterizacion **Teorema:** sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean v_1, v_2, v_n vectores de V con $n \geq 2$. El conjunto v_1, v_2, v_n es **Linearmente dependiente** si y solo si alguno de ellos es combinacion lineal de los restantes.

Teorema sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean v_1, v_2, v_n vectores de V con $n \geq 2$. El conjunto v_1, v_2, v_n es **Linearmente independiente** si y solo si todo $v \in < v_1, v_2, v_n >$ puede ser expresado como $v = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_n v_n$ de forma **unica**.

4 Clase 4

Generadores y dependencia o independencia lineal sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ generado por los vectores v_1, v_2,...,v_m, $w_1, w_2, ...w_n$ son elementos **arbitrarios** de V. Si $n > m$ entonces $w_1, w_2, 2_n$ son **linearmente dependientes**

Entre los **conjuntos generadores** de un espacio vectorial juegan un papel funamental aquellos que son **linearmente independientes**, por este motivo, los distinguiremos con un nombre especial: **Base**.

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ el conjunto de vectores v_1, v_2, v_n es una **base** de V si y solo si:

- v_1, v_2, v_n son linearmente **independientes**
- $V = v_1, v_2, v_n$

Base canonica Todo conjunto de n vectores linearmente independientes en $\mathbb{R}^n$ es una base en $\mathbb{R}^n$

Base ordenada Llamaremos base ordenada de V a una sucesion finita de vectores (v_1, v_2, v_n) linearmente independientes que generan a V tales que v_1, v_2, v_n es una base

Teorema Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si $B = v_1, v_2, v_n$ y $B' = u_1, u_2, u_m$ son bases de V entonces $n = m$
Dos bases cualesquiera de un mismo espacio vectorial V tienen el **mismo** numero de vectores.

Dimension El numero n (entero no negativo) se llama **dimension** del espacio vectorial V. Asi $Dim(V) = n$ siendo n el numero de vectores que forman sus bases

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimension finita n. Entonces se verifica:

- Cualquier subconjunto de V con mas de n elementos es linearmente **dependiente**
- Ningun subconjunto de V con menos de n elementos genera a V
- Todo subconjunto de n vectores linearmente independientes es una **base** de V
- Todo generador de V, con n vectores es una **base**

Existencia de bases

Teorema en un espacio vectorial de dimensión finita todo subconjunto no vacío linealmente independiente es parte de una base

Teorema Todo generador finito de V incluye una base

En todos los casos la dimension del subespacio de soluciones es igual al numero de incognitas no principales

Teorema Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si W_1 y W_2 son subespacios de dimension finita, entonces $(W_1 + W_2)$ es un subespacio de dimension finita y se verifica:

$$dim(W_1 + W_2) = dim(W_1) + dim(W_2) - dim(W_1 \cap W_2)$$

5 Clase 5

suma directa Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V, La suma $W_1 + W_2$ es **directa** si y solo si todo vector de $W_1 + W_2$ se expresa en una **unica** forma como suma de un elemento de W_1 y otro de W_2 y (siendo $u_1, v_1 \in W_1$ y $u_2, v_2 \in W_2$) $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$. La suma directa se denota como $W_1 \oplus W_2$

Teorema de caracterizacion de la suma directa Sean W_1 y W_2 subespacios vectoriales de V. La suma $W_1 + W_2$ es **directa** si y solo si $W_1 \cap W_2 = 0$

Coordenadas de un vector respecto a una base Sea $B = (v_1, v_2, v_n)$ una base **ordenada** del espacio vectorial V de dimension finita, entonces rodo vector de V se expresa de forma unica como combinacion lineal de los vectores de la base, esto es, existen escalares unicos $k_1, k_2, k_n \in \mathbb{K}$ tales que $v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_nv_n$.

Entonces, los escalares k_1, k_2, k_n son las **coordenadas del vector V respecto**

de la base B

Con estos escalares se puede armar una n-upla que recibe el nombre de: n-upla de coordenadas del vector V respecto de la base B y se denota:

- $(v)_B = (k_1, k_2, k_n)$
- $[v]_B = [k_1 k_2 k_n]$ (es una matriz de una sola columna :p)

Propiedades Sean $u, v \in V$ y B una base ordenada de B entonces:

- $(u + v)_B = (u)_B + (v)_B$
- $(ku)_B = k(u)_B$

Cambio de base La representación de vectores de un espacio vectorial V de dimensión finita para sus vectores de coordenadas **depende de la base elegida**.

$$[v]_b = P \cdot [v]_{b'}$$

La matriz P es cuadrada de orden $n * n$, es decir, $dim(P) = nxn$ siendo n la dimension de V. P es **inversible**, y $[v]_{b'} = p^{-1} \cdot [v]_b$

6 Aplicaciones lineales

Sean V **y** W dos espacios vectoriales, una aplicacion lineal F de V en W es una funcion que asigna a cada vector v un vector unico $F(v) \in W$. Una funcion es una aplicacion lineal si y solo si:

- $F(u + v) = F(u) + F(v)$
- $F(kv) = kF(v)$

Propiedades

1. $F(0_V) = F(0_W)$
2. $F(-v) = -F(v)$
3. $F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_n v_n) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \alpha_3 F(v_3) + \alpha_n F(v_n)$

Teorema de la existencia y unicidad de la aplicacion lineal Sean V y W espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$, si $B = (v_1, v_2, v_n)$ es una base ordenada de V y w_1, w_2, w_n son vectores arbitrarios de W, entonces existe una **unica** aplicacion $F : V \to W$ tal que F es **lineal** y $F(v_i) = w_i$

Observacion Si se conoce el efecto de una transformación lineal sobre los vectores de la base, se puede conocer el efecto sobre cualquier otro vector.

7 Nucleo e imagen de una aplicacion lineal

Imagen de una aplicacion lineal Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal, el conjunto de todos los vectores de W que son imagenes bajo F de algun vector $v \in V$ se conoce como **imagen** de F y se indica I_F

Teorema Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal entonces:

- I_F es un **subespacio** de W
- si v_1, v_2, v_n generan a V, entonces $F(v_1), F(v_2), F(v_n)$ generan a I_F
- Si $dim(V) = n$, entonces $dim(I_F) \leq n$

Nucleo de una aplicacion lineal Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal, el **nucleo** de la aplicacion lineal F esta formado por todos los vectores de V cuya imagen es el $\overline{0_W}$ y se indica N_F.
N_F **nunca es vacio** (nulo).

Teorema Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal y $N_F = \left\{v \in V/F(v) = \overline{0_W}\right\}$ entonces:

- N_F es un **subespacio** de V
- Si $dim(v) = n$ entonces $dimn_F \leq n$

Teorema Sea $f : V \to W$ una aplicacion lineal, si V es de dimension finita, entonces $dim(V) = dim(N_F) + dim(I_F)$

8 Tipos de aplicaciones lineales

Aplicacion lineal inyectiva Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal, esta es **inyectiva** si y solo si a todo vector w en la imagen de F le corresponde **exactamente un** vector de V

Teorema Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal, F es inyectiva si y solo si $N_F = \overline{0_V}$

Aplicacion lineal suryectiva Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal, F es **suryectiva** si $I_F = W$ (todos los vectores de W son imagen de **algun** vector de V)

Aplicacion lineal biyectiva Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal, F es **biyectiva** si y solo si es **inyectiva** y **suryectiva** a la vez.

teorema Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal, si $dim(V) = dim(W) = n$ entonces F es **biyectiva.**

Aplicacion lineal inversible Sea $F : V \to W$ una aplicacion lineal, si F es biyectiva, entonces:

- Esta definida la aplicacion inversa $F^{-1} : W \to V$
- F^{-1} es biyectiva
- La imagen inversa de W (o sea de V) es W

Operaciones con aplicaciones lineales .

$F + T : U \to W$
$(F + T)(u) = F(u) + T(u)$

$k \cdot F : V \to W$
$(KF)(u) = kF(u)$

9 Composicion, vectorial, operadores (?)

Composicion de aplicaciones lineales $F : U \to V$ y $G : V \to W$ son apl lineales arbitrarias, se define la compuesta de G con F:

$$G \circ F : U \to W$$

$$(G \circ F)(u) = G(F(u))$$

Teorema Si F y G son **lineales**, entonces $(G \circ F)$ tambien es lineal

Propiedades

- **Asociativa** $K \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$
- **Distributiva** $G \circ (F_1 + F_2) = G \circ F_1 + G \circ F_2$

El vectorial Sean V y W espacios vectoriales sobre K definimos $L(V, W)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en W.
Se pueden sumar y multiplicar vectoriales por un escalar

Operadores lineales L(V) Sea V un espacio vectorial sobre K llamamos $L(V)$ al conjunto de todas las aplicaciones lineales $F : V \to V$