Resumen de Analisis Numerico

Mateo P. Cetti
Estudiante - Universdad Catolica de Cordoba
Ing Ambrosio Taravella, 6240, Cordoba, Argentina

August 25, 2021

1 Introduccion

1.1 Objetivo del analisis numerico

El objetivo del analisis numerico es el de enseñarle a la computadora a realizar operaciones matematicas complejas. Se estudian metodos numericos que nos permiten interactuar con la computadora

Antiguamente los metodos numericos eran usados de manera muy limitada por el tedioso trabajo de usarlos a mano. Ahora con el auge de las computadoras, estos modelos son mas usados y generan mucho mejores resultados.

1.2 Problematicas

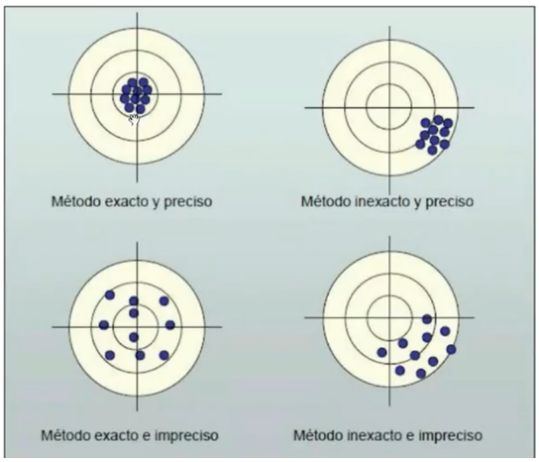
1. Las computadoras no trabajan en un universo **infinito** (Ojo con el acarreo del error). En nuestra mente hay infinitos numeros, y entre dos numeros tambien hay infinitos numeros (Universo discreto y acotado).

2. Las computadoras trabajan internamente con el sistema **binario**, y los numeros tienen un espacio "finito" de digitos. Utilizan la notacion de **mantisa** y **exponente**.

3. Como en el desarrollo de Taylor, los metodos numericos se basan en formulaciones teoricas **complejas** e **infinitas**.

2 Conceptos elementales

- **Digitio**: Unidad elemental en la representacion de un numero.
- **Numero**: Conjunto de digitos que conforman un elemento.
- **Cifras**: Cantidad de digitos.
- **Cifras significativas**: Cantidad de digitos que poseen un valor confiable.
- **Error**: Diferencia entre valor real y un valor proximo al real.
- **Exactitud**:Aproximacion de un numero a su valor verdadero.
- **Precisión**: Esta relacionada al grado de **dispersión** entre los **valores aproximados**.



2.1 Errores

Valor aproximado entre un valor **real** y uno **proximo**.

$$E = x_v - x_a \tag{1}$$

Esto (1) se conoce como **error total**. En muchas ocaciones se trabaja con el **error relativo** (2):

$$E_r = \frac{x_v - x_a}{x_v} \tag{2}$$

Y muchas otras veces se utiliza el **error relativo porcentual** (3):

$$E_r = \frac{x_v - x_a}{x_v} 100 \tag{3}$$

Muchos de los metodos son iterativos (Mejoran los resultados en cada iteracion). En la practica el valor **verdadero** no se conoce, por lo que se suele trabajar con **errores aproximados** o aproximacion de errores.

$$E_a = x_{actual} - x_{previo} \tag{4}$$

$$E_{ra} = \frac{x_{actual} - x_{previo}}{x_{actual}} \tag{5}$$

$$E_{ra}[\%] = \frac{x_{actual} - x_{previo}}{x_{actual}} 100 \tag{6}$$

Si dichos errores aumentan con cada iteracion decimos que el metodo **diverge** a la solucion (El metodo no sirve para el problema elegido). Sino, decimos que el metodo **converge** en la solucion

3 Raices de ecuaciones lineales

3.1 Presentacion del problema

Para diversos problemas (Ej: amortiguacion de un auto) es muy utiliza averiguar raices de ecuaciones.

3.2 Metodo de la biseccion

Este metodo sirve para todas las funciones excepto aquellas que tengan **raices multiples de orden par**. Este metodo consiste en elegir **dos puntos** en una funcion continua y multiplicarlos Si hay un cambio de signo entonces en el intervalo entre ambos puntos **hay una raiz** (o mas de una).

$$f(a)f(b) \leq 0 \tag{7}$$

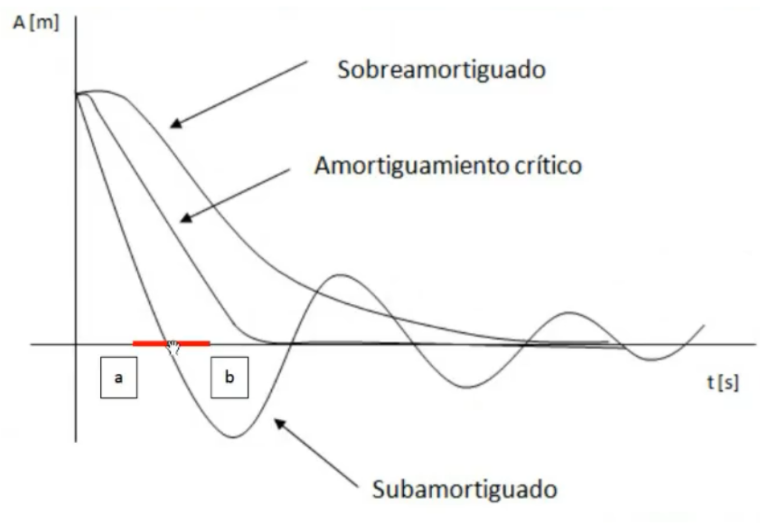


Fig. 3

Este metodo **no es util** cuando hay **muchas raices** en **intervalos muy pequeños**, ya que no nos dice la cantidad exacta de raices en el intervalo elegido.

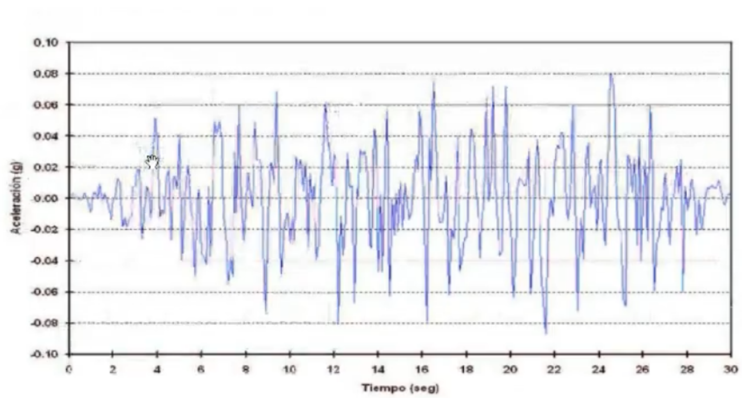


Fig. 5

Para **calcular** la raiz de una funcion, se eligen los puntos a y b y se aplica el metodo. Si hay una raiz, entonces se vuelve a realizar el metodo pero en el intervalo a y c o c y a en donde c es:

$$c = \frac{a+b}{2} \tag{8}$$

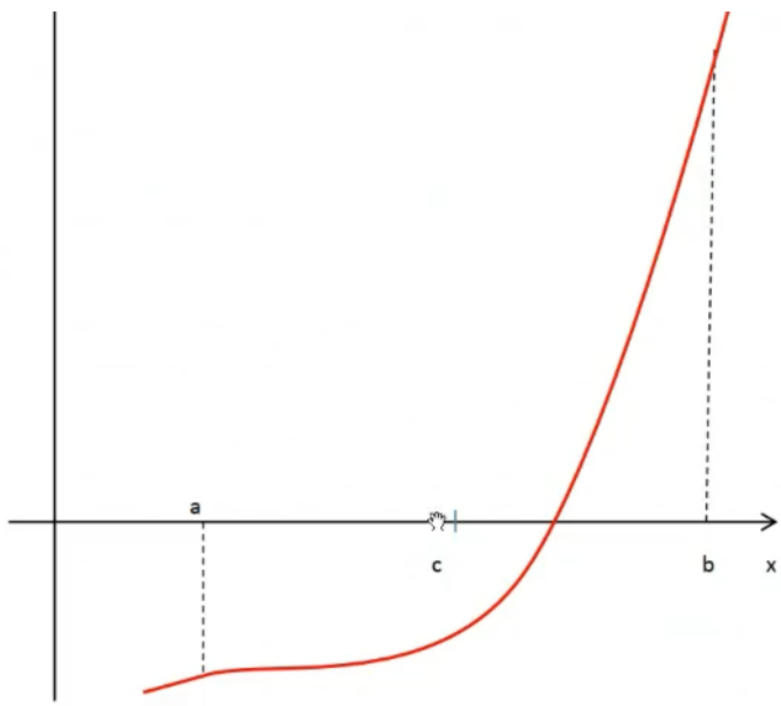


Fig. 7

Si $f(a)f(c) \leq 0$ entonces la raiz esta en el intervalo a y c. sino, esta en el intervalo c y b

Ventajas de este metodo

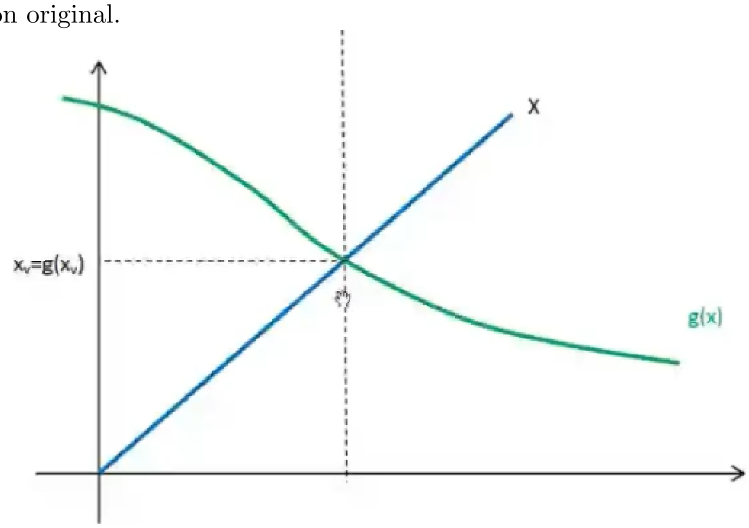
- Alto grado de convergencia
- Confiable
- Facil programacion

Desventajas

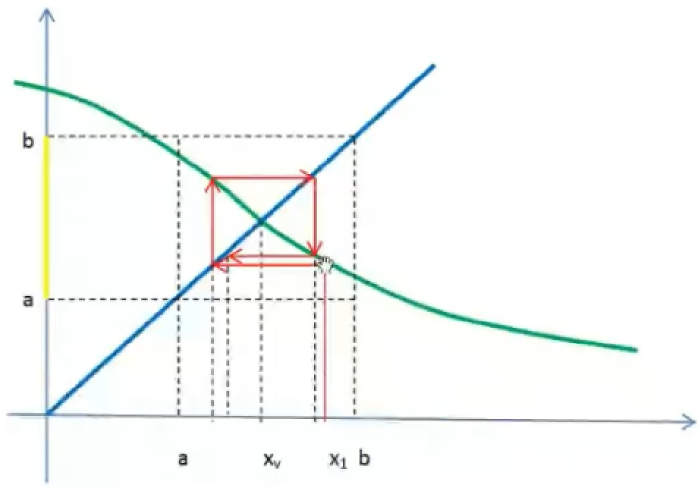
- No es apto para raices multiples de orden par
- convergencia **lenta**

3.3 Metodo de punto fijo

Este metodo coinciste en generar una funcion $g(x)$ a partir de la funcion $f(x)$ original que intersecte a la funcion identidad. De ser ese el caso, llamamos al punto interseccion punto fijo, y en su dominio encontraremos la raiz de la funcion original.



$$x_v = g(x_v) \tag{9}$$



Estas funciones $g(x)$ se obtienen de la funcion $f(x)$ original de varias formas:

- Por simple despeje
- Sumando o restando a ambos lados x
- Utilizando algun otro metodo matematico
- Proponiendo una $g(x)$ (Solo si se esta muy canchero)

No todas las funciones $g(x)$ funcionan, cuando no funcionan decimos que son funciones **divergentes**. Para asegurarnos que la funcion se comporte de manera **convergente**, esta debe cumplir con con 2 coindiciones:

1. $g(x) \in [a, b]$ (amarillo)
2. $|g'(\varepsilon)| \leq 1$ y ε maximice la derivada

Empezamos con ε y aplicamos la formula:

$$x_{i+1} = g(x_i) \tag{10}$$

Ventajas

1. Rapida convergencia
2. Facil de programar
3. Se puede partir de un valor proxmio sin importar de que lado esta la raiz (Metodo abierto)

Desventajas

1. Dificultad para encontrar una $g(x)$ convergente
2. Puede quedar en un **lazo anidado**

4 noseque

5 Ajuste de curvas

5.1 Presentacion del problema

En muchas ocasiones en los problemas prácticos de la ingeniería, trabajamos con datos experimentales discretos, es decir que obtenemos, por medición un conjunto de puntos aislados que responden a una ley física específica. Por ende necesitaremos ajustar curvas para interpolar valores entre los medidos para predecir el comportamiento del fenómeno que estamos estudiando. En este capítulo veremos varias formas de hacer esto, desde aproximar una simple línea recta hasta un complejo polinomio trazador, pasando por la interpolación polinomial.

5.2 Regresion lineal por minimos cuadrados

Es buscar una linea recta que pase lo mas cerca posible por todos los puntos, o dicho de otra manera que minimize los errores de aproximacion

$$y = a_{+} a_1 x + E \tag{11}$$

Donde a_0 y a_1 son la ordenada al origen y la pendiente respectivamente de la recta, y E es el error entre el modelo y las observaciones

La idea es minimizar la suma de todos los errores de todos los puntos:

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a_0 - a_1 x_i) \tag{12}$$