Resumen de analisis matematico III

Mateo P. Cetti
Estudiante - Universdad Catolica de Cordoba
Ing Ambrosio Taravella, 6240, Cordoba, Argentina

September 29, 2020

1 Introduccion [03/08/20]

En esta meteria vamos a ver funciones como en AM2 solo que esta vez la entrada y salida esta acompañada de **numeros complejos**

- **Libro:** Variable compleja y sus aplicaciones (Churchil algo)

2 Numeros complejos

El conjunto $\mathbb{C}$ de los numeros complejos esta dado como:

$$\{\mathbb{C} = a + bi | a, b \epsilon \mathbb{R} y i = -1\}$$

El simbolo i con la propiedad de que $i^2 = -1$ se denomina unidad **imaginaria**

Suma y multiplicacion en $\mathbb{C}$:

- **Suma** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- **Multiplicacion** $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (menos porque queda i^2)

Con estas operaciones, el conjunto $\mathbb{C}$ es un **Conjunto algebraico.**

si $z = a + bi$

- **Parte real de z:** a (Notacion: Re[z])
- **Parte imaginaria de z:** b (Notacion: Im[z])

Conjugado de un numero complejo (z) Dado el numero complejo $z = a + bi$, el numero complejo $x - bi$ se denomina conjugado de z y se denota $\overline{z}$

Dado el numero complejo $z = a + bi$, le podemos asignar el par ordenado (x, y), y reciprocamente, dado el par ordenado (x, y), le podemos asignar el numero complejo $z = a + bi$, de modo que existe una **relacion biunivoca** entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$

Mirando el plano cartesiano, el eje horizontal se denomina **eje real** y el eje vertical se denomina **eje imaginario**. Este plano se denomina **plano complejo**.

Observacion: Si $a + bi = c + di$ entonces $a = c$ y $b = d$

Modulo de z: Dado el numero complejo $z = a + bi$, el modulo de z que denotamos $|z|$ esta dado por:

$$|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$$

Propiedades

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $z\overline{z} = |z|^2$
5. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Una aplicacion de las propiedades de los $\mathbb{C}$

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{bi}{a^2+b^2}$$

$$Re\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{a}{|z|^2}$$

$$Im\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{bi}{|z|^2}$$

Forma polar o trigonometrica de un $\mathbb{C}$

- $a = |z|.cos\theta$
- $b = |z|.sen\theta$

$$z = |z|.cos\theta + |z|.i.sen\theta = |z|.(cos\theta + isen\theta)$$

El Angulo θ se denomina **argumento** del numero complejo.

Formula de Moivre: Si $z = |z|.(cos\theta + isen\theta$ entonces:

$$z^n = |z|^n.(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Funciones complejas Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = z^2$$

Esto es,

$$f(a + bi) = (a + bi)^2 = a^2 + b^2 + 2abi$$

En general:

$$f(a + bi) = u(a, b) + iv(a, b) \text{ Donde } u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Limite y Continuidad

Limite de numeros complejos: sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y z_0 un punto de acumulacion del dominio de f. El numero complejo L es el limite de f en z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|f(z) - L| < \epsilon$ cuando $z \in dom(f)$ y $0 < |z - z_0| < \delta$

Continuidad de numeros complejos: sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y z_0 un punto del dominio de f, diremos que f es continua en z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ cuando $z \in dom(f)$ y $0 < |z - z_0| < \delta$.

$$\left(\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)\right)$$

3 Derivada y exponencial compleja

sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in dom(f)$. Diremos que f es derivable en z_0 si existe $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.
En este caso se llama a dicho limite **derivada** de f en z_0 y la denotamos $f'(z_0)$.

Ecuaciones de Cauchy - Riemann (Anda que te las demuestro)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Sea $f : u + iv$ tal que $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de clase C^1. si $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ en algun conjunto A $\subset dom(u) \cap dom(v)$ entonces f es derivable en el conjunto A.

funcion analitica Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in dom(f)$. Diremos que f es **analitica** en el punto z_0 si existe $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subset dom(f)$ y f es derivable en todo punto de $B_r(z_0)$

Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in dom(f)$. Si f es analitica en $B_r(z_0) - z_0$ e dice que z_0 es un punto singular o **Singularidad** de f

Exponencial compleja Las siguientes condiciones son validas tambien para los numeros complejos:

1. $e^0 = 1$
2. $e^a e^b = e^{a+b}$
3. $\frac{de^x}{dx} = e^x$

$$e^{x+yi} = e^{(x+0i)+(0+yi)} = e^{x+0i} e^{0+yi} = e^x e^{yi}$$

Formula de Eeuler (Sin demostracion tambien)

$$e^{iy} = cos(y) + isin(y)$$

Propiedades basicas de la exponencial compleja:

1. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
2. e^z es **analitica** en todo el plano complejo
3. $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$
4. $|e^z| = e^{Re(z)}$

4 Clase 3 [24/08/20]

Logaritmo complejo Sea $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica en algun subconjunto abierto y conexo de $\mathbb{C}$ tal que:

$$e^{g(z)} = z$$

Si $g(z) = Re[g(z)] + iIm[g(z)]$, entonces

$$e^{g(z)} = z \Rightarrow e^{Re[g(z)]+iIm[g(z)]} = |z|e^{iArg(z)}$$

De donde

- $Re[g(z)] = ln|z|$ $(e^{Re[g(z)]} = |z|)$
- $Im[g(z)] = Arg[g(z)] + 2k\pi$

La funcion g se denomina logaritmo complejo de y lo denotamos log, esto es

$$log(z) = ln|z| + iArg(z) + 2k\pi$$

En el caso que $k = 0$, este logaritmo se denomina **rama principal** de la funcion logaritmo y la denominamos Log, esto es

$$Log(z) = ln|z| + iArg(z)$$

Algunas propiedades Como

$$e^{log(z)} = z$$

Derivando ambos miembros tenemos

$$e^{log(z)} \cdot log'(z) = 1$$

De donde

$$log'(z) = \frac{1}{e^{log(z)}} = \frac{1}{z}$$

Sean z_1 y z_2 numeros complejos con $z_1 \neq 0$

$$z_1^{z_2} = e^{z_2 log(z_1)}$$

Funciones trigonometricas complejas Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces el seno y coseno de z estan dados por:

$$cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iy} + e^{-iy})$$

$$sin(z) = \frac{1}{2}(e^{iy} - e^{-iy})$$

Funciones Armonicas Una funcion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que satisface la **ecuacion de Laplace** se denomina funcion armonica

Funcion de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = 0$$

Luego, si $f = u + iv$ es una **funcion analitica** u y v son **funciones armonicas** y se dice que v es **armonica conjugada** de u

Integrales de linea en el plano complejo Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ entonces:

$$\int_a^b \gamma(t)dt = \int_a^b \gamma_1(t)dt + i\int_a^b \gamma_2(t)dt$$

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua y sea C una curva de clase C^1 contenida en $dom(f)$. Si C esta parametrizada por $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, entonces la integral de linea de f a lo largo de c, que denotamos $\int_c f$ esta dada por

$$\int_c f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Propiedades de la integral de linea compleja

1. $\int_c af = a\int_c f$
2. $int_c(f + g) = \int_c f + \int_c g$
3. $|\int_c f| \leq \int_c |f|$
4. Si C_1 y C_2 son curvas tales que $C_1 \bigcup C_2$ esta contenida den $Dom(f)$, entonces $\int_{C_1 \bigcup C_2} f = \int_{c_1} f + \int_{c_2} f - \int_{C_1 \bigcap C_2}$

5 •

Notacion si Γ es una curva cerrada simple, con Γ^0 denotaremos a la **region acotada** por la curva

Teorema de Cauchy - Goursat Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y C una curva cerrada simple de clase C^1 contenida en el dominio de f tal que f es analitica sobre $\Gamma^0 \cup \Gamma$. Entonces

$$\int_\Gamma f = 0$$

Demostracion Supongamos que $f = u+iv$ y sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una parametrizacion de Γ. Si $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$ entonces

$$\int_\Gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b [u(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t),\gamma_2(t))][\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)]dt$$

$$\int_\Gamma f = \int_a^b u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t)) + iv(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t))dt + i\int_a^b [v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_1'(t)) + u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\gamma_2'(t))]$$

$$\int_a^b u(\gamma(t)), -v(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt + i\int_a^b (v(\gamma(t)), u(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

Por el teorema de green

$$\int_\Gamma f = \int_{\Gamma^0} (-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y))dxdy + i\int_{\Gamma^0} (\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,y))dxdy$$

y como f es analitica

$$-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$$

Por lo tanto $\int_\Gamma f = 0$

Definicion Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y A un conjunto contenido en $dom(f)$. Si z_0 es un punto de A y f es analitica en el conjunta $A - z_0$ se dice que z_0 es un punto **singular** de f

Teorema de Cauchy - Goursat generalizado Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y C una curva cerrada simple de clase C^1 y sean $z_1, z-2, \ldots, z_n \in C$ tal que f es analitica en la region $[C^0 \cup C] - z_1, \ldots, z_n$. Si $r_1, \ldots, r_n$ son numeros reales positivostales que $C_{r_j}(z_j) \cap C_{r_k}(z_k) = \emptyset$ si $j \neq k$

$$\int_c f = \sum_{j=1} \tag{1}$$

Observacion Si C_1 y C_2 son curvas cerradas simples de clase C^1 tales que $C_1 \subset C_2^0$ entonces

$$\int_{c_1} f = \int_{c_2} f$$

Se conoce a esto como el **principio de deformacion de contorno**

Teorema / Formula de la integral de Cauchy Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica y C una curva cerrada simple de clase C^1 contenida en el $Dom(f)$. Si $z_0 \in C^0$, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

6 series y sucesiones

Suceciones Una sucesion en $\mathbb{R}$ es una funcion $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Si el valor de ϕ en un natural n es S_n ($\phi(n) = S_n$) denotamos a esta sucesion como S_n

Ejemplo

- $S_n = \dfrac{1}{(1+i)^n}$

Dada la sucesion S_n en $\mathbb{C}$, si existe el $\liminf_{n\to\infty} S_n$, diremos que la sucesion es convergente, y si$\liminf_{n\to\infty} S_n = z_0$ decimos que S_n converge en z_0

Series Dada la sucesion a_k, construimos la sucesion S_n de la manera siguiente:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

A esta sucesion de sumas parciales la denominamos **serie** de terminos a_k y se lo denota como $\sum a_k$. Diremos que la serie $\sum a_k$ es convergente si lo es la sucesion de las sumas parciales S_n.

Si la serie $\sum a_k$ es convergente, existe:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

Definicion Dada la sucesion a_k en $\mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$, la serie $\sum a_k(z - z_0)^k$ se denomina serie de potencias de coeficientes a_k alrededor de z_0

Algebra de series Dadas las series $\sum a_k$ y $\sum b_k$ podemos construir las series que son sumas, restas, productos y cocientes de las mismas.

$$\sum_{k\geq 0} a_k \pm \sum_{k\geq 0} b_k = \sum_{k\geq 0} (a_k \pm b_k)$$

$$\left(\sum_{k\geq 0} a_k\right) \left(\sum_{k\geq 0} b_k\right) = \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{kj}\right) \text{Producto de cauchy}$$

$$\frac{\sum_{k\geq 0} a_k}{\sum_{k\geq 0} b_k} = \sum_{k\geq 0} c_k$$

Que despejando $\sum_{k\geq 0} a_k$ se puede obtener c_k de manera recursiva.

7 serie de Taylor y Laurent

Serie de Taylor Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitica, $z_0 \in dom(f)$ y sea Γ una curva cerrada simple contenida en $dom(f)$, si z_0 pertenece a Γ_0 y $r > 0$ es tal que $Cr(z_0) \subset \Gamma_0$ entonces, para $z \in Br(z_0)$

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

Serie de Log Sea $f(z) = Log(z)$ y tomemos $c \in \mathbb{C}$ tal que $c \neq 0$ entonces

$$Log(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k (z-1)^{k+1}}{k+1}$$

Serie de Laurent Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y seab r y $R > 0$, si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analitica en $A(z_0, r, R) = z \in \mathbb{C}/r < |z - z_0| < R$ entonces para $z \in A(z_0, r, R)$ tenemos

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} a_k(z - z_0^k) + \sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{(z - z_0)^k}$$

Donde:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{CR(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}dw = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{Cr(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{-k+1}}dw$$

Residuo

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{Cr(z_0)} f(w)dw \Rightarrow \int_{Cr(z_0)} f(w)dw = 2\pi i b_1$$

y se denota $b_1 = Res(f(z), z_0)$