Resumen de algebra (segundo semestre)

Mateo P. Cetti

August 13, 2020

1 Espacios vectoriales

cualquier conjunto que posea operaciones de **suma** y **producto por un escalar**, cumpliendo todas las siguientes **propiedades:**

Suma:

1. **Asociativa** $(u + w) + v = u(w + v) = (u + v) + w$
2. **Conmutativa** $u + v = v + u$
3. **Elemento neutro** tal que $u + 0 = u$
4. Para cada vector u existe un elemento opuesto $(-u)$ tal que $u+(-u) = 0$.

Multiplicacion:

1. **Asociativa** $(k * k') * u = k * (k' * u) = (k * u) * k' k, k' e \mathbb{K}$
2. **Distributiva**
   - Respecto a la suma de vectores $k * (u + v) = k * u + k * v$
   - Respecto a la suma de escalares $(k_1 + k_2) * u = k_1 * u + k_2 * u$
3. **Elemento neutro** k=1, tal que $1 * u = u$

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, y V un conjunto de dos operaciones definimos:

Operacion interna llamada adición, que asigna a cada par u, v de elementos de V, un elemento de V denotado $u + v$

Operacion externa llamada multiplicación por un escalar que asigna a cada par formado por un elemento $ke\mathbb{K}$ y un elemento veV, un elemento de V denotado por kv

Subespacios vectoriales Un subconjunto no vacio W de un espacio vectorial V se denomina subespacio vectorial de V, si W es en si mismo un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y Multiplicacion por escalar definidas en V. Ademas debe cumplir:

- La suma de 2 vectores de W pertenecen a W $u, vW => u + vW$
- El producto de un vector de W por un escalar cualquiera K pertenece a W $uW, k\mathbb{K} => k.uW$
- El vector nulo pertenece a W

2 Clase 2

Combinacion lineal Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, v_1, v_2, v_n son vectores de V $k_1, k_2, ..., k_n$ son escalares de $\mathbb{K}$.

Se dice que un vector $v \in V$ es combinacion lineal de los vectores v_1, v_2, v_n segun los escalares k_1, k_2, k_n si y solo si:

$$v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_n + v_n$$

Generador de un subespacio vectorial Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, v_1, v_2, v_n son vectores de V, W es el conjunto de **todas** las combinaciones lineales de v_1, v_2, v_n. Llamaremos a W **subespacio generado** por v_1, v_2, v_n y lo indicaremos como:

$$W =< v_1, v_2, v_n >$$

y se lee "W es el subespacio generado por v_1, v_2, v_n"

El subespacio generado por los vectores v_1, v_2, v_n, puede ser el mismo V, en este caso diremos que el conjunto $S = v_1, v_2, ..., v_n$ genera el espacio vectorial V o bien, S es un generador de V.

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, el conjunto $S = v_1, v_2, v_n$ es un **generador** de V si y solo si $v \in V \to v = k_1v_1 + k_2v_2 + k_nv_n$

- Un generador es un conjunto de vectores tales que todo vector del espacio vectorial se puede expresar como una combinacion lineal de ellos
- El subespacio generado es el conjunto formado por todas las

Suma de conjuntos A y B son 2 conjuntos
$A + B = x = a + b/a \in Ayb \in B$

La suma de 2 conjuntos es un nuevo conjunto formado por elementos donde se suma 1 elemento del primer conjunto con 1 elemento del segundo conjunto.

Suma de subespacios vectoriales sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ si "w_1 y w_2 son subespacios del espacio vectorial V, entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio.

Interseccion de subespacios vectoriales sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ si "w_1 y w_2 son subespacios del espacio vectorial V, entonces $W_1 \cap W_2$ es un subespacio.