Resumen de analisis matematico III

Mateo P. Cetti
Estudiante - Universdad Catolica de Cordoba
Ing Ambrosio Taravella, 6240, Cordoba, Argentina

August 11, 2020

1 Introduccion [03/08/20]

En esta meteria vamos a ver funciones como en AM2 solo que esta vez la entrada y salida esta acompañada de **numeros complejos**

- **Libro:** Variable compleja y sus aplicaciones (Churchil algo)

2 Numeros complejos

El conjunto $\mathbb{C}$ de los numeros complejos esta dado como:

$$\{\mathbb{C} = a + bi | a, b \epsilon \mathbb{R} y i = -1\}$$

El simbolo i con la propiedad de que $i^2 = -1$ se denomina unidad **imaginaria**

Suma y multiplicacion en $\mathbb{C}$:

- **Suma** $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- **Multiplicacion** $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (menos porque queda i^2)

Con estas operaciones, el conjunto $\mathbb{C}$ es un **Conjunto algebraico.**

si $z = a + bi$

- **Parte real de z:** a (Notacion: Re[z])
- **Parte imaginaria de z:** b (Notacion: Im[z])

Conjugado de un numero complejo (z) Dado el numero complejo $z = a + bi$, el numero complejo $x - bi$ se denomina conjugado de z y se denota $\overline{z}$

Dado el numero complejo $z = a + bi$, le podemos asignar el par ordenado (x, y), y reciprocamente, dado el par ordenado (x, y), le podemos asignar el numero complejo $z = a + bi$, de modo que existe una **relacion biunivoca** entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$

Mirando el plano cartesiano, el eje horizontal se denomina **eje real** y el eje vertical se denomina **eje imaginario**. Este plano se denomina **plano complejo**.

Observacion: Si $a + bi = c + di$ entonces $a = c$ y $b = d$

Modulo de z: Dado el numero complejo $z = a + bi$, el modulo de z que denotamos $|z|$ esta dado por:

$$|z| = \sqrt[2]{a^2 + b^2}$$

Propiedades

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $z\overline{z} = |z|^2$
5. $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

Una aplicacion de las propiedades de los $\mathbb{C}$

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{bi}{a^2 + b^2}$$

$$Re\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{a}{|z|^2}$$

$$Im\left[\frac{1}{z}\right] = \frac{bi}{|z|^2}$$

Forma polar o trigonometrica de un $\mathbb{C}$

- $a = |z|.cos\theta$
- $b = |z|.sen\theta$

$$z = |z|.cos\theta + |z|.i.sen\theta = |z|.(cos\theta + isen\theta)$$

El Angulo θ se denomina **argumento** del numero complejo.

Formula de Moivre: Si $z = |z|.(cos\theta + isen\theta$ entonces:

$$z^n = |z|^n.(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Funciones complejas Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$f(z) = z^2$$

Esto es,

$$f(a + bi) = (a + bi)^2 = a^2 + b^2 + 2abi$$

En general:

$$f(a + bi) = u(a, b) + iv(a, b) \text{ Donde } u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Limite y Continuidad

Limite de numeros complejos: sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y z_0 un punto de acumulacion del dominio de f. El numero complejo L es el limite de f en z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|f(z) - L| < \epsilon$ cuando $z \in dom(f)$ y $0 < |z - z_0| < \delta$

Continuidad de numeros complejos: sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y z_0 un punto del dominio de f, diremos que f es continua en z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$, tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ cuando $z \in dom(f)$ y $0 < |z - z_0| < \delta$.

$$\left(\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)\right)$$

3 Derivada y exponencial compleja

sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in dom(f)$. Diremos que f es derivable en z_0 si existe $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.
En este caso se llama a dicho limite **derivada** de f en z_0 y la denotamos $f'(z_0)$.

Ecuaciones de Cauchy - Riemann (Anda que te las demuestro)

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Sea $f : u + iv$ tal que $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son de clase C^1. si $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$ en algun conjunto A $\subset dom(u) \cap dom(v)$ entonces f es derivable en el conjunto A.

funcion analitica Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in dom(f)$. Diremos que f es **analitica** en el punto z_0 si existe $r > 0$ tal que $B_r(z_0) \subset dom(f)$ y f es derivable en todo punto de $B_r(z_0)$

Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in dom(f)$. Si f es analitica en $B_r(z_0) - z_0$ e dice que z_0 es un punto singular o **Singularidad** de f

Exponencial compleja Las siguientes condiciones son validas tambien para los numeros complejos:

1. $e^0 = 1$
2. $e^a e^b = e^{a+b}$
3. $\frac{de^x}{dx} = e^x$

$$e^{x+yi} = e^{(x+0i)+(0+yi)} = e^{x+0i}e^{0+yi} = e^x e^{yi}$$

Formula de Eeuler (Sin demostracion tambien)

$$e^{iy} = cos(y) + isin(y)$$

Propiedades basicas de la exponencial compleja:

1. $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$
2. e^z es **analitica** en todo el plano complejo
3. $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$
4. $|e^z| = e^{Re(z)}$