1. Muestre que las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas justificando su respuesta:

- $n^n + 3n = \omega(n!)$

Para demostrar que $\omega(n!)$ es igual a $f(x) = n^n + 3n$ aplicamos el limite siguiente

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{n^n + 3n}{n!}$$

que se puede reescribir como

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(n \cdot n \cdot n \cdot n \ldots n) + 3n}{n(n-1)(n-2)\ldots(1)} \Leftrightarrow \frac{n(n^{n-1} + 3)}{n(n-1)(n-2)\ldots(1)}$$

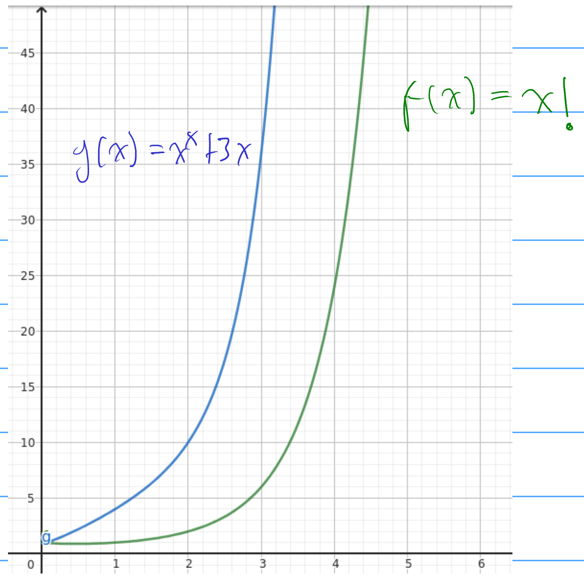
$$\to \lim_{n \to \infty} \frac{(n^{n-1} + 3)}{(n-1)(n-2)\ldots(1)}$$

y si nos damos cuenta el numerador crece más rápido que el denominador pues se multiplica n veces el número n y se le suma las 3 veces de n.

El numerador aunque crece de manera rápida, cada vez se multiplica por un valor menor, haciendo que crezca menos rápido que el numerador. Es por ello que se tiene:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^n + 3n}{n!} = \infty$$

Al cumplirse la anterior expresión se demuestra que $\omega(n!) = n^n + 3n$ tal y como se puede ver en la siguiente gráfica



Sabiendo esto se puede concluir que la afirmación $n^n + 3n = \omega(n!)$ es verdadera

- $n^3 = o(n^3 \lg n)$ little o

Para demostrar que se cumple $n^3 = o(n^3 \lg n)$ podemos plantear la siguiente ecuación:

$$n^3 < (n^3 \lg n)\, c$$

Factorizando lo anterior se tiene:

$$\rightarrow n^3 < n^3 \lg n\, c$$

$$\rightarrow 1 < \lg n\, c$$

Podemos análizar la anterior desigualdad en varios casos.

Para $n=1$ se tiene:

$$\rightarrow 1 < \log(1)\, c$$

$$\rightarrow 1 < 0$$

Para $n=2$ se tiene:

$$\rightarrow 1 < \log(2)$$

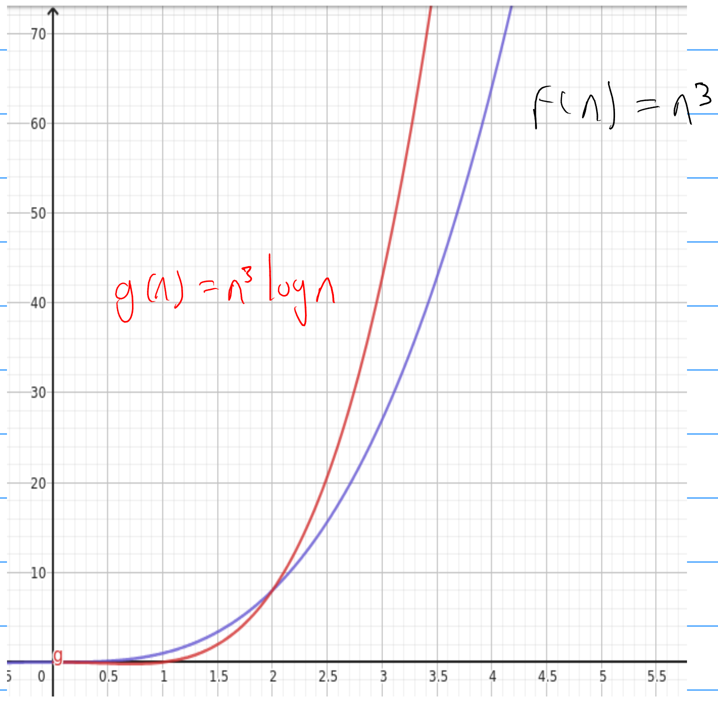
$$\rightarrow 1 < 1$$

Para $n=3$ se tiene

$$1 < \log(3)$$

$$1 < 1{,}58.$$

Dado lo anterior nos damos cuenta que el enunciado es verdadero para aquellos $n > 2$ tal y como se puede apreciar en la gráfica siguiente



- $n^2 \log n = \omega(n^3 \log n)$

Para verificar si la expresión anterior es verdadera o no podemos expresar la siguiente desigualdad:

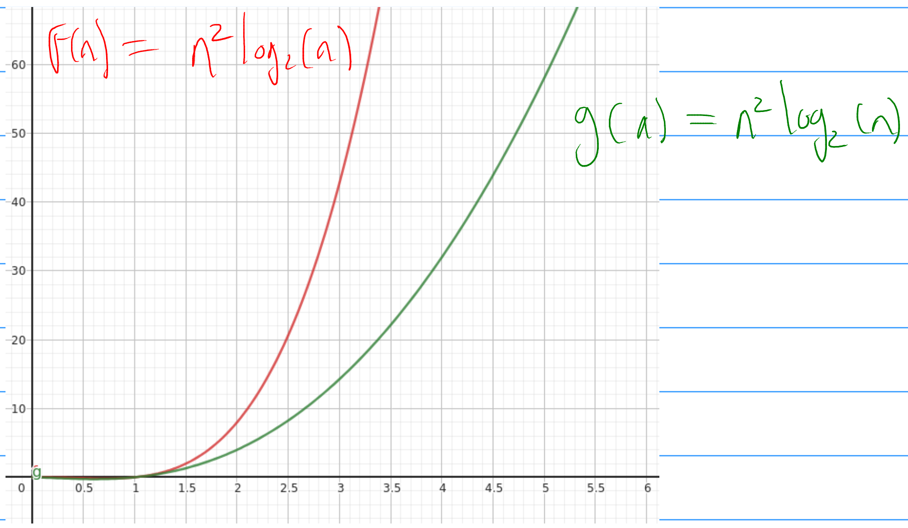
$$(n^3 \log n)\, c < n^2 \log n$$

Simplificando se tiene que:

$$\rightarrow \quad n^3 \log n \; c < n^2 \log n$$

$$\rightarrow \quad n\, c < 1$$

y si nos damos cuenta la anterior desigualdad es falsa para cualquier $n > 0$. Es por ello que el enunciado es falso tal y como se puede ver en la siguiente gráfica



- $n^3 - 1 = \Omega(n^4)$

Para saber si la expresión anterior es verdadera o falsa tenemos que:

$$n^4 c \leq n^3 - 1$$

Simplificando:

$$c \leq \frac{n^3 - 1}{n^4}$$

$$c \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}$$

Para que el enunciado sea verdadero se debe cumplir que:

$$c \leq \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

Por lo que aplicando el límite a la última expresión tenemos:

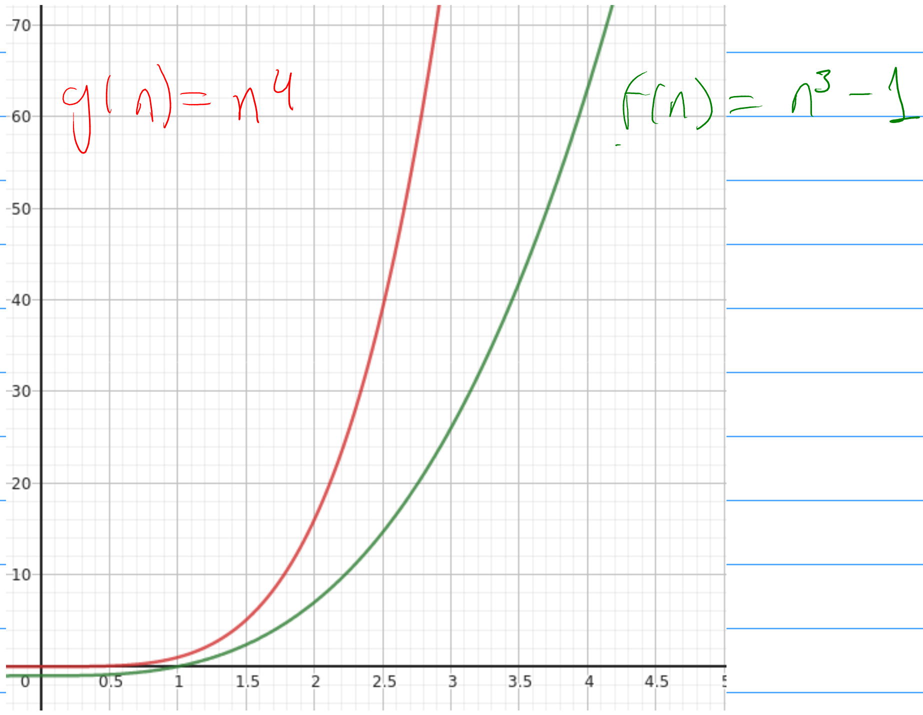
$$c \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4}$$

$$c \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^4}$$

Ambos límites son decrecientes iguales a 0 cuando n tiende a 0, por lo que la única manera de que se cumpla la desigualdad es cuando c=0. lo que significa que la desigualdad original estaría como

$$n^4(0) \leq n^3 - 1$$

lo cual es Falso pues c debe pertenecer a $\mathbb{R}^+$, es por ello que el enunciado es falso para cualquier $n \geq 1$.



- $n^3 \log n = \Theta(n^3)$

Por definición se sabe que:

$$\Theta(g(x)) = c_1 f(x) \leq g(x) \leq c_2 f(x)$$

En donde se cumple que:

$$c_1 \leq \lim_{n \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} \leq c_2$$

En este caso se tiene que:

$$\rightarrow \quad c_1 n^3 \log n \leq n^3 \leq c_2 \log n \, n^3$$

$$\rightarrow \quad c_1 \leq \frac{n^3}{n^3 \log n} \leq c_2$$

$$\rightarrow \quad c_1 \leq \frac{1}{\log n} \leq c_2$$

Aplicando el límite cuando n tiende a ∞ se tiene:

$$c_1 \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n} \leq c_2$$

Analizando hacia la izquierda tenemos:

$$c_1 \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\log n}$$

$$c_1 \leq 0$$

Lo anterior es falso pues no hay un valor c que sea menor o igual a 0 y pertenezca a $\mathbb{R}^+$, es por ello que el enunciado es Falso