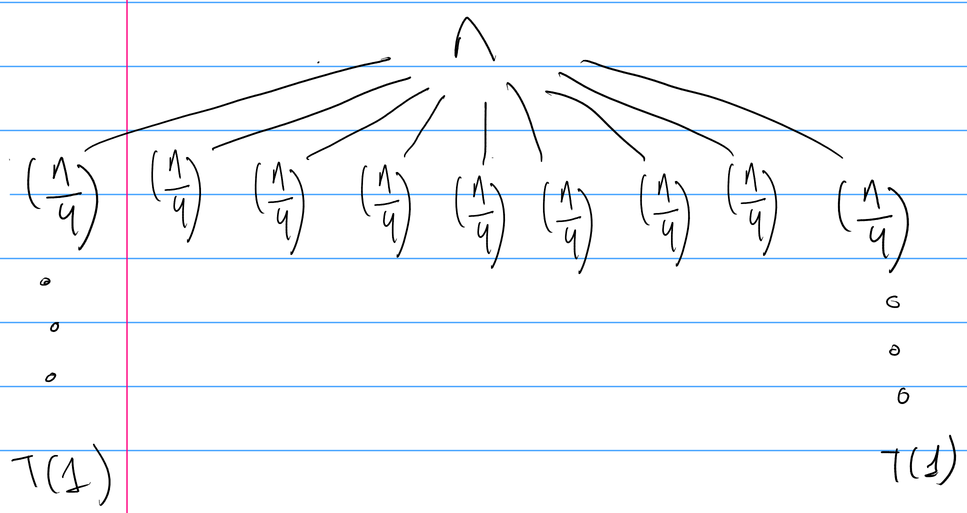
2. Use el método del árbol de recursión para obtener una posible cota superior ajustada para los siguientes numerales. Pruebe dicha cota con el método de la sustitución. Debe mostrar un bosquejo del árbol de recursión, la información obtenida de dicho árbol, la suma en la que se muestre el costo de la parte base y de la parte recursiva del árbol, la suposición y la prueba de sustitución clara y organizada.

- $T(n) = 9T(n/4) + n$

Árbol de recursión



Costo

cn

$9\left(\frac{n}{4}\right)c$

$\log_4 n$

Altura del arbol

$$1 = \frac{n}{4^i}$$

$$\rightarrow 4^i = n$$

$$\rightarrow \log_4 n = i$$

Sumatoria de costos

$$T(n) = \left(\frac{9}{4}\right)^0 cn + \frac{9}{4} cn + \left(\frac{9}{4}\right)^2 cn + \ldots T(1)$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{9}{4}\right)^i cn + \text{último nivel}$$

El costo para el último nivel es:

$\rightarrow$ Hay 9^i nodos $= 9^{\log_4 n} = n^{\log_4 9}$

Entonces el costo es de $\Theta(n^{\log_4 9})$

Subiendo lo anterior se tiene:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{9}{4}\right)^i cn + \Theta(n^{\log_4 9})$$

Aplicando una serie geometrica tenemos

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{9}{4}\right)^i cn + \Theta(n^{\log_4 9}) < \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^i cn + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$T(n) = \frac{1}{1 - \frac{9}{4}} cn + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$T(n) = \frac{-4}{5} cn + \Theta(n^{\log_4 3})$$

$$T(n) = O(n)$$

Método de sustitución para probar $O(n)$

¿$T(n) = O(n)$?

1) Proponemos a $O(n)$ como solución de $T(n)$ por lo cual tenemos

$$T(n) = cn \quad \text{para un } c > 0$$

2) Sustituimos lo anterior en $T(n) = 9T(n/4) + n$

y suponiendo que se cumple para valores menores a n.

$$\rightarrow T(n) \leq c\left(\frac{n}{4}\right) \quad \text{para todo } n > n_0$$

Reemplazando en la original:

$$\rightarrow T(n) = 9T\left(\frac{n}{4}\right) + n \leq 9c\left(\frac{n}{4}\right) + n$$

$$= \frac{9}{4}cn + n$$

$$= cn + \frac{5}{4}cn$$

y si tomamos $c \geq 9$ tenemos:

$$\frac{5}{4}cn \leq n$$

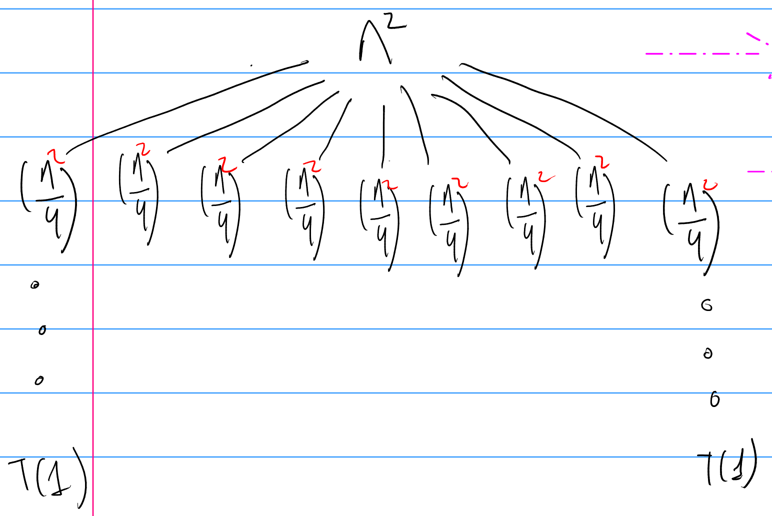
Con lo que podemos decir

$$T(n) \leq cn + (5/4)\,cn \leq 2cn$$

Por lo que se demuestra que $O(n) = T(n)$ para una constante c y un n_0 tal que $T(n) \leq cn$ para todo $n > n_0$

b) ▪ $T(n) = 9T(n/4) + n^2$

Árbol de recursión



Costo

cn^2

$\frac{9cn^2}{16}$

$\log_4 n$

Altura del arbol

$$1 = \frac{n}{4^i}$$

$$\rightarrow 4^i = n$$

$$\rightarrow \log_4 n = i$$

Costo para $T(n)$

$$T(n) = cn^2 + \frac{9}{16}cn^2 + \frac{81}{256}cn^2 + \dots + T(1)$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{9}{16}\right)^i cn^2 + \underbrace{\Theta(n^{\log_4 9})}$$

Se obtiene pues en el último nivel hay 9^i nodos $= 9^{\log_4 n} = n^{\log_4 9}$, y tiene un costo $c = \Theta(1)$ por lo que se tiene $\Theta(n^{\log_4 9})$

Aplicando la serie geometrica se tiene:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{9}{16}\right)^i cn^2 + \Theta(n^{\log_4 9}) < \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^i cn^2$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{9}{16}} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 9})$$

$$T(n) = \frac{16}{7} cn^2 + \Theta(n^{\log_4 9})$$

$T(n) = O(n^2)$ pues n^2 crece mayor que $\Theta(n^{\log_4 9})$

→ Entonces $T(n)$ es igual a $O(n^2)$

Metodo de sustitución para comprob, $T(n) = O(n^2)$

Hipotesis de inducción:

Caso base ⇒ $\frac{n}{4}$

$$T(n/4) \leq c\left(\frac{n}{4}\right)^2$$

Paso inductivo:

- $T(n) = 9T(n/4) + n^2$

$$T(n) \leq 9\left(c\frac{n^2}{16}\right) + n^2$$

$$T(n) \leq \frac{9}{16} cn^2 + n^2$$

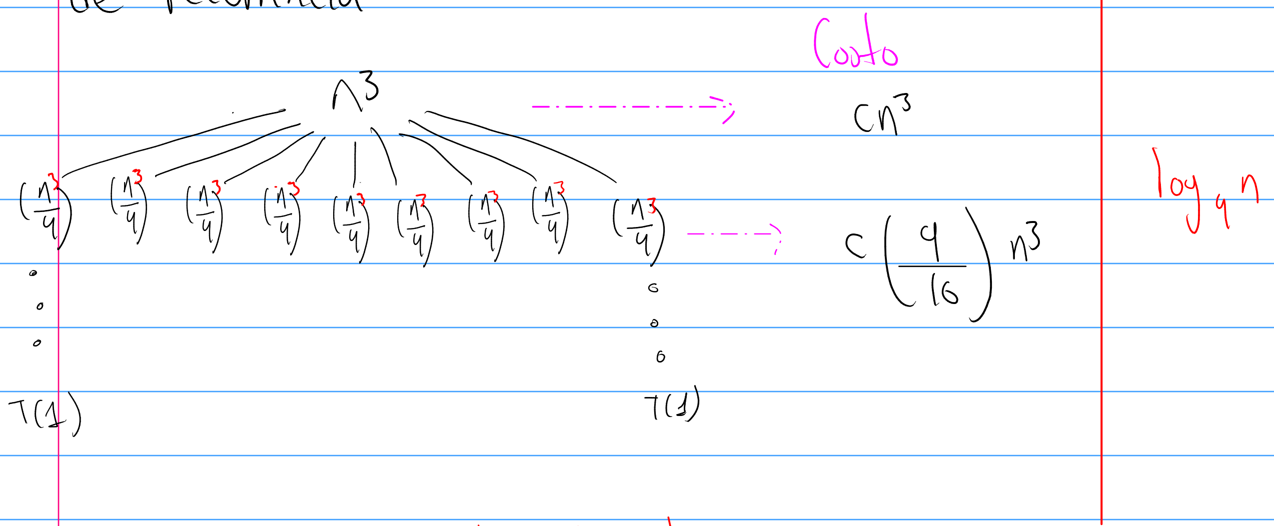
$$T(n) \leq n^2\left(\frac{9}{16}c + 1\right)$$

$$T(n) \leq n^2 + 1 \quad \text{si } c = 16$$

Si escogemos $c = 16$ nos damos cuenta que es verdad pues n^2+1 es mayor a n^2

- $T(n) = 9T(n/4) + n^3$

Árbol de recurrencia



Altura $\Rightarrow$ $\log_4 n$ se halla de las mismas maneras anteriores

Costos de $T(n)$:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{9}{16}\right)^i n^3 + \text{último paso}$$

Para el último paso tenemos:

$\Theta(n^{\log_4 n})$ pues hay 9^i nodos $= n^{\log_4 9}$ y el costo es $\Theta(1)$

se tiene así que $\Theta(n^{\log_4 n})$.

Sabiendo lo anterior tenemos:

$$\rightarrow T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n - 1} \left(\frac{9}{16}\right)^i n^3 + \text{último paso}$$

$$\rightarrow T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{9}{16}\right)^i n^3 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

Aplicando la serie geometrica finita se tiene:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} \left(\frac{9}{16}\right)^i n^3 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right) < \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^i n^3 + \theta\left(n^{\log_4 3}\right)$$

$$\rightarrow T(n) = \frac{1}{1-\frac{9}{16}} cn^3 + \theta\left(n^{\log_4 9}\right)$$

$$\rightarrow T(n) = \frac{16}{7} cn^3 + \theta\left(n^{\log_4 9}\right)$$

$T(n) = O(n^3)$ pues n^3 crece mayor que $\theta(n^{\log_4 9})$

$\rightarrow$ Entonces $T(n)$ es igual a $O(n^3)$

Método de sustitucción para $O(n^3)$

Hipotesis de inducción:

Caso base $\Rightarrow \frac{n}{4}$

$$T(n/4) \leq c\left(\frac{n}{4}\right)^2$$

Paso inductivo:

$$T(n) \leq 9c\left(\frac{n}{4}\right)^3 + n^3$$

$$T(n) \leq \frac{9c\,n^2}{64} + n^3$$

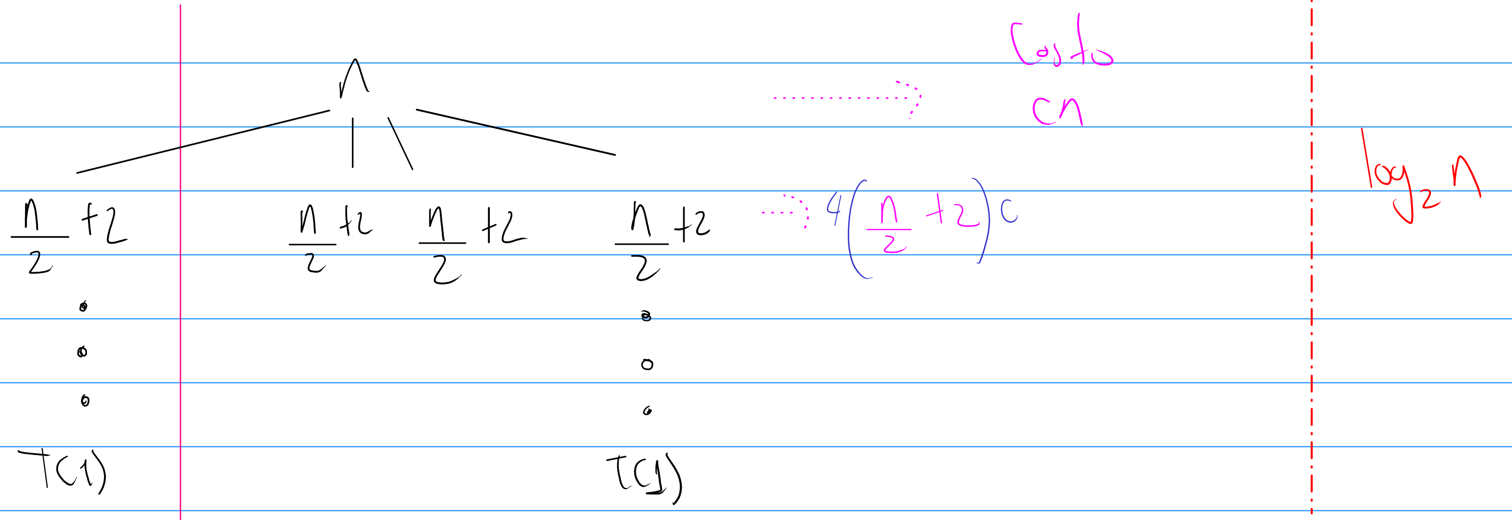
$$T(n) \leq \frac{9}{64} c n^3 + n^3$$

$$T(n) \leq n^3 \left(\frac{9}{64} c + 1 \right)$$

Si tomamos a $c \geq 64$ se cumple la desigualdad por lo que se demuestra que $T(n) = O(n^3)$

4.4-3

Use a recursion tree to determine a good asymptotic upper bound on the recurrence $T(n) = 4T(n/2 + 2) + n$. Use the substitution method to verify your answer.



Altura $\Rightarrow$ $\log_2 n = i$

Costo de $T(n)$:

$$T(n) = n + 4\left(\frac{n}{2} + 2\right) + 16\left(\frac{n}{2} + 3\right) \ldots + \text{último}$$

$$= n + 2n + 8 + 4n + 48 + \ldots + \text{último}$$

El costo para el último es de:

$$4^i = n^2$$

$$\rightarrow 4^{\log_2 n} = n^2$$

y al tener una complejidad cada nodo de $\Theta(1)$ se tiene que el costo del último es de $\Theta(n^2)$

Sabiendo lo anterior se tiene:

$$T(n) = n + 2n + 8 + 4n + 48 + \dots + \Theta(n^2)$$

$$= \sum_{i=0}^{\log_2 n-1} \left(\frac{n}{2^i} + 2\right) + \Theta(n^2)$$

y simplificando se tiene:

$$T(n) = \frac{n}{2^{\log_2 n-1}} - \frac{n}{2^0} + \Theta(n^2)$$

$$= \frac{2n}{2^n} - n + \Theta(n^2)$$

$$= \Theta(n^2)$$