# Autómatas Finitos con Pila

Juan Mendivelso

Universidad Nacional de Colombia
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Presentación basada en las Notas de Clase del Profesor Rodrigo De Castro.

# Outline

1. Autómatas con Pila (AFP)
   - Autómatas con Pila Deterministas (AFPD)
   - Autómatas Finitos con Pila No Deterministas (AFPN)
2. Inserción/Reemplazo de Cadenas en la Pila
3. No equivalencia entre AFPD y AFPN
4. Producto Cartesiano entre un AFP y un AFD

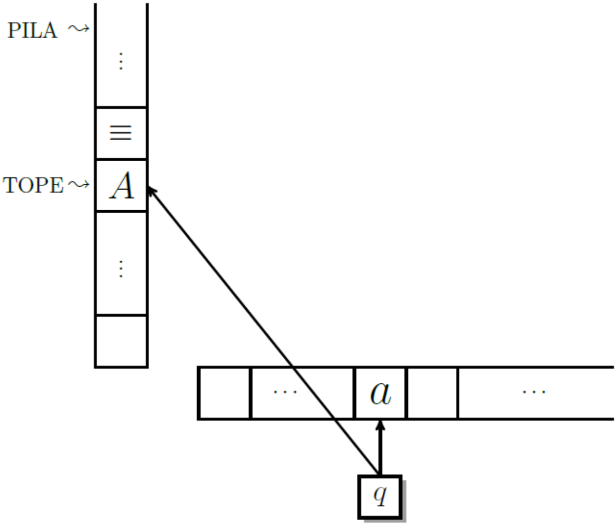
# Outline

1. Autómatas con Pila (AFP)
   - Autómatas con Pila Deterministas (AFPD)
   - Autómatas Finitos con Pila No Deterministas (AFPN)
2. Inserción/Reemplazo de Cadenas en la Pila
3. No equivalencia entre AFPD y AFPN
4. Producto Cartesiano entre un AFP y un AFD

# Autómatas con Pila Deterministas (AFPD)

- Modelo similar al de autómatas finitos deterministas pero que además tiene una pila que sirve como almacenamiento temporal.
- Se tiene la *cinta de entrada* semi-infinita dividida en celdas que contiene símbolos de $\Sigma$.
- Hay una cinta semi-infinita adicional llamada *pila* dividida en celdas que contiene símbolos de $\Gamma$.
- $\Sigma$ y $\Gamma$ no necesariamente son disyuntos.
- La unidad de control apunta simultáneamente a una celda de la cinta de entrada y a una celda de la pila.
- Inicialmente, la unidad de control apunta al primer símbolo de la cinta de entrada y al fondo de la pila.
- Las inserciones/borrados/consultas de la pila se hacen en el tope.

# Autómatas Finitos con Pila Deterministas (AFPD)



# Autómatas Finitos con Pila Deterministas (AFPD)

Un **Autómata Finito con Pila Determinista (AFPD)** es una séxtupla $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$ con las siguientes componentes:

1. $Q$ es el conjunto (finito) de estados internos de la unidad de control.
2. $q_0 \in Q$ es el estado inicial.
3. $F$ es el conjunto de estados finales o de aceptación $\emptyset \neq F \subseteq Q$.
4. $\Sigma$ es el alfabeto de entrada (alfabeto de cinta).
5. $\Gamma$ es el alfabeto de pila.
6. $\Delta$ es la función de transición del autómata:

$$\begin{aligned} \Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) &\to (Q \times (\Gamma \cup \{\lambda\})) \\ \Delta(q, a, A) &= (q', B). \end{aligned}$$

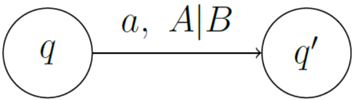
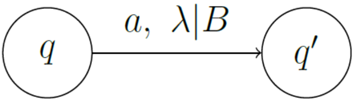
# Función de Transición $\Delta$

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \rightarrow (Q \times (\Gamma \cup \{\lambda\}))$$
$$\Delta(q, a, A) = (q', B)$$

- $\Delta$ puede estar parcialmente definida: las cadenas pueden abortarse.
- $q$ es el estado leído por la unidad de control, la cual pasa al estado $q'$.
- $a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$
    - Si $a \neq \lambda$, $a$ es el símbolo leído por la unidad de control en la cinta de entrada. La unidad se correrá una celda a la derecha en esta cinta.
    - Si $a = \lambda$, se ejecutará una transición $\lambda$, por lo que la unidad seguirá apuntando a la misma celda en la cinta de entrada.
- $A, B \in (\Gamma \cup \{\lambda\})$
    - Si $A \neq \lambda$, $A$ es el símbolo en el tope de la pila, el cual será
        - reemplazado si $B \neq \lambda$.
        - removido si $B = \lambda$. La unidad apuntará una celda abajo en la pila.
    - Si $A = \lambda$, y
        - $B = \lambda$, no se hará nada en la pila.
        - $B \neq \lambda$, se inserta el símbolo $B$ en la pila y el tope apuntará a este.

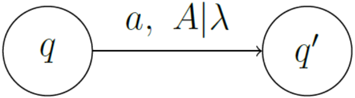
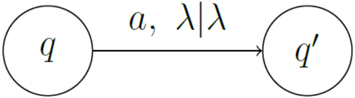
# Grafo de un AFPD

- Un AFPD se puede representar por un grafo dirigido y etiquetado.
- En la pila puede hacerse alguna de las siguientes operaciones:
  - Reemplazo (R)
  - Borrado (B)
  - Inserción (I)
  - Ninguna (N)
- La transición $\Delta(q, a, A) = (q', B)$ se representa así:

| **Parámetros** | **Grafo** | Entr. | Pila |
|---|---|---|---|
| $a \in \Sigma,\ A, B \in \Gamma$ |   | $\rightarrow$ | $-$ R |
| $a \in \Sigma,\ A = \lambda,\ B \in \Gamma$ |   | $\rightarrow$ | $\uparrow$ I |

# Grafo de un AFPD

- Un AFPD se puede representar por un grafo dirigido y etiquetado.
- En la pila puede hacerse alguna de las siguientes operaciones:
  - Reemplazo (R)
  - Borrado (B)
  - Inserción (I)
  - Ninguna (N)
- La transición $\Delta(q, a, A) = (q', B)$ se representa así:

| **Parámetros** | **Grafo** | Entr. | Pila |
|---|---|---|---|
| $a \in \Sigma,\ A \in \Gamma,\ B = \lambda$ |  | $\rightarrow$ | B $\downarrow$ |
| $a \in \Sigma,\ A = \lambda,\ B = \lambda$ |  | $\rightarrow$ | $-$ N |

# Grafo de un AFPD

- Un AFPD se puede representar por un grafo dirigido y etiquetado.
- En la pila puede hacerse alguna de las siguientes operaciones:
  - Reemplazo (R)
  - Borrado (B)
  - Inserción (I)
  - Ninguna (N)
- La transición $\Delta(q, a, A) = (q', B)$ se representa así:

| **Parámetros** | **Grafo** | Entr. | Pila |
|---|---|---|---|
| $a = \lambda,\ A, B \in \Gamma$ | $q \xrightarrow{\lambda,\ A\vert B} q'$ | $-$ | $-$ R |
| $a = \lambda,\ A = \lambda,\ B \in \Gamma$ | $q \xrightarrow{\lambda,\ \lambda\vert B} q'$ | $-$ | $\uparrow$ I |

# Grafo de un AFPD

- Un AFPD se puede representar por un grafo dirigido y etiquetado.
- En la pila puede hacerse alguna de las siguientes operaciones:
  - Reemplazo (R)
  - Borrado (B)
  - Inserción (I)
  - Ninguna (N)
- La transición $\Delta(q, a, A) = (q', B)$ se representa así:

| **Parámetros** | **Grafo** | Entr. | Pila |
|---|---|---|---|
| $a = \lambda,\ A \in \Gamma,\ B = \lambda$ | $q \xrightarrow{\lambda,\ A\mid\lambda} q'$ | – | B $\downarrow$ |
| $a = \lambda,\ A = \lambda,\ B = \lambda$ | $q \xrightarrow{\lambda,\ \lambda\mid\lambda} q'$ | – | – N |

# Función Parcialmente Definida

- La función de transición del AFPD $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$ es:

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \rightarrow (Q \times (\Gamma \cup \{\lambda\}))$$
$$\Delta(q, a, A) = (q', B).$$

- Esta función puede estar parcialmente definida: puede no estar definida para algunos valores de $q \in Q$, $a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$ y $A \in (\Gamma \cup \{\lambda\})$.
- Esto quiere decir que el autómata puede abortar el procesamiento de una cadena $u \in \Sigma^*$ sin haberla leída por completo.

# Determinismo en los AFPD

- Dada cualquier configuración instantánea $[q, \upsilon, \beta]$, solamente hay una instrucción posible (a lo sumo) que se puede aplicar.
- Si la instrucción $\Delta(q, a, A)$, donde $a \in \Sigma$ y $A \in \Gamma$, está definida, entonces ni $\Delta(q, \lambda, A)$ ni $\Delta(q, a, \lambda)$ pueden estar definidas simultáneamente.
- Esto implica que un AFPD lee cada cadena de entrada $u \in \Sigma^*$ de una manera única, aunque es posible que el procesamiento de $u$ se aborte sin consumir toda la entrada.

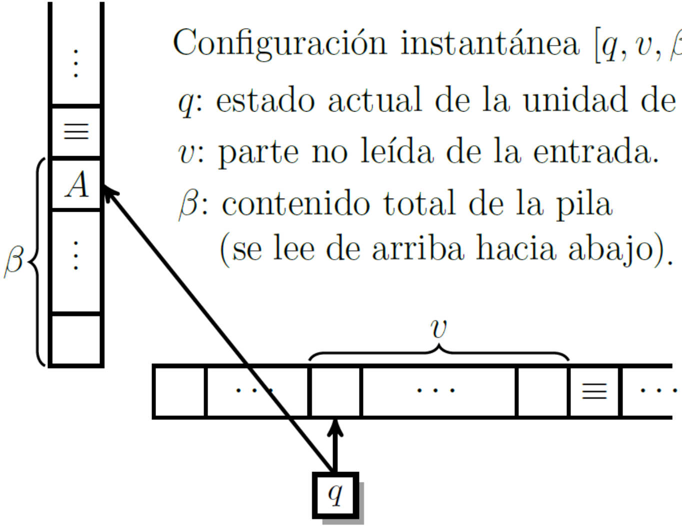
# Configuración o Descripción Instantánea

Configuración instantánea $[q, v, \beta]$

$q$: estado actual de la unidad de control.

$v$: parte no leída de la entrada.

$\beta$: contenido total de la pila (se lee de arriba hacia abajo).



# Paso Computacional

- En un **paso computacional**, el autómata pasa de la configuración instantánea $[q, \upsilon, \beta]$ a la configuración $[q', \omega, \gamma]$ cuando se realiza una transición de la función $\Delta$. Este se denota como

$$[q, \upsilon, \beta] \vdash [q', \omega, \gamma].$$

- La siguiente notación denota que el autómata pasa de la configuración $[q, \upsilon, \beta]$ a la configuración $[q', \omega, \gamma]$ en cero, uno o más pasos computacionales:

$$[q, \upsilon, \beta] \vdash^* [q', \omega, \gamma].$$

- Si es en uno o más pasos computacionales, la notación es:

$$[q, \upsilon, \beta] \vdash^+ [q', \omega, \gamma].$$

# Configuración Inicial

- Dado el AFPD $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$, la configuración instantánea inicial para una cadena $u \in \Sigma^*$ es $[q_0, u, \lambda]$.
- La pila está vacía.
- La unidad de control escanea el fondo de la pila y el primer símbolo de $u$.

## Configuración de Aceptación (Final)

- Dado el AFPD $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$, una configuración instantánea de aceptación es $[p, \lambda, \lambda]$ donde $p \in F$.
- Para que una cadena $u \in \Sigma^*$ sea aceptada:
  - $u$ debe ser consumida por completo.
  - La pila debe quedar vacía.
  - Debe terminar en estado de aceptación.

# Lenguaje Aceptado por un AFPD

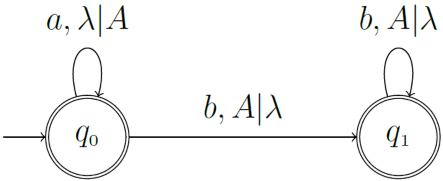
- El lenguaje aceptado por un AFPD $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$ se define como:
$$L(M) := \{u \in \Sigma^* : [q_0, u, \lambda] \vdash^* [p, \lambda, \lambda], p \in F\}.$$
- En otras palabras, $u \in \Sigma^*$ es aceptada si el único procesamiento posible de $u$, desde la configuración inicial $[q_0, u, \lambda]$, termina en una configuración de aceptación.
- Es decir, dado que la unidad de control empieza en el estado $q_0$, la pila vacía y apuntando al primer caracter de $u$ en la cinta de entrada, el único procesamiento de $u$ debe cumplir simultáneamente con:
  - $u$ debe ser procesada completamente.
  - el procesamiento debe terminar con pila vacía.
  - la unidad de control debe terminar en estado de aceptación.
- Si $q_0 \in F$, la cadena $\lambda$ es aceptada. En este caso, la configuración inicial también es de aceptación.

# Ejemplo de un AFPD

**Ejercicio**

Diseñar un AFPD $M$ que acepte el lenguaje $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ definido sobre $\Sigma = \{a, b\}$.

# Ejemplo de un AFPD




$$[q_0, aaabbb, \lambda] \vdash [q_0, aabbb, A] \vdash [q_0, abbb, AA] \vdash [q_0, bbb, AAA]$$
$$\vdash [q_1, bb, AA] \vdash [q_1, b, A] \vdash [q_1, \lambda, \lambda].$$

$$[q_0, aabbb, \lambda] \vdash [q_0, abbb, A] \vdash [q_0, bbb, AA] \vdash [q_1, bb, A]$$
$$\vdash [q_1, b, \lambda] \quad \text{(Procesamiento abortado).}$$

$$[q_0, aaabb, \lambda] \vdash [q_0, aabb, A] \vdash [q_0, abb, AA] \vdash [q_0, bb, AAA]$$
$$\vdash [q_1, b, AA] \vdash [q_1, \lambda, A].$$

# Ejercicio de un AFPD

**Ejercicio**

Diseñar un AFPD $M$ que acepte el lenguaje $L = \{a^{2n}b^n : n \geq 0\}$ definido sobre $\Sigma = \{a, b\}$.

# Ejercicio de un AFPD

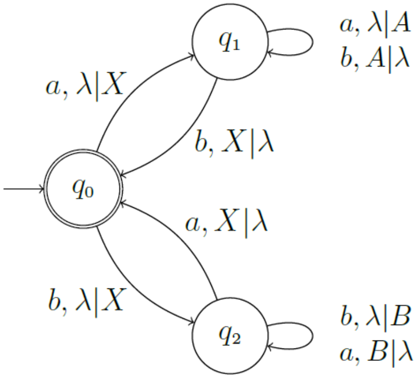
## Ejercicio

Diseñar un AFPD $M$ que acepte el lenguaje $L = \{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$ definido sobre $\Sigma = \{a, b\}$.

# Ejercicio de un AFP

## Ejercicio

Diseñar un AFPD $M$ que acepte el lenguaje
$L = \{u \in \Sigma^* : \#_a(u) = \#_b(u)\}$ definido sobre $\Sigma = \{a, b\}$.



# Outline

1. Autómatas con Pila (AFP)
   - Autómatas con Pila Deterministas (AFPD)
   - Autómatas Finitos con Pila No Deterministas (AFPN)
2. Inserción/Reemplazo de Cadenas en la Pila
3. No equivalencia entre AFPD y AFPN
4. Producto Cartesiano entre un AFP y un AFD

# Autómatas Finitos con Pila No Deterministas (AFPN)

- Un **Autómata Finito No-Determinista (AFPN)** $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$ cuenta con los mismos seis compontentes de un AFPD.
- La diferencia es que la función de transicion $\Delta$ está definida como:

$$\Delta : Q \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \times (\Gamma \cup \{\lambda\}) \to \mathcal{P}(Q \times (\Gamma \cup \{\lambda\}))$$
$$\Delta(q, a, A) = \{(p_1, B_1), (p_2, B_2), \ldots, (p_k, B_k)\}.$$

  - Para $\Delta(q, a, A)$ se ejecuta aleatoriamente una de las instrucciones $(p_i, B_i)$, $1 \leq i \leq k$ de acuerdo a las reglas establecidas de los AFPDs.
  - Una cadena puede tener varios procesamientos.
  - Si $\Delta(q, a, A)$ está definida, puede que $\Delta(q, \lambda, A)$ y/o $\Delta(q, a, \lambda)$ estén definidas simultáneamente.
- Al igual que en los AFPD, se permite $\Delta(q, a, A) = \emptyset$, por lo que puede haber procesamientos abortados.

# Lenguaje Aceptado por un AFPN

- El lenguaje aceptado por un AFPN $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$ se definde como:

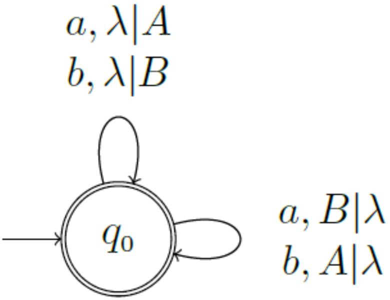
$$L(M) := \{u \in \Sigma^* : (\exists [q_0, u, \lambda] \vdash^* [p, \lambda, \lambda])[p \in F]\}.$$

- En otras palabras, $u$ es aceptada si existe por lo menos un procesamiento de $u$ desde la configuración inicial $[q_0, u, \lambda]$ hasta una configuración de aceptación.
- Es decir, dado que la unidad de control empieza en el estado $q_0$, la pila vacía y apuntando al primer caracter de $u$ en la cinta de entrada, alguno de sus procesamientos debe cumplir simultáneamente con:
  - $u$ debe ser procesada completamente.
  - el procesamiento debe terminar con pila vacía.
  - la unidad de control debe terminar en estado de aceptación.

# Ejercicio de un AFPN

## Ejercicio

Diseñar un AFPN $M$ que acepte el lenguaje $L = \{u \in \Sigma^* : \#_a(u) = \#_b(u)\}$ definido sobre $\Sigma = \{a, b\}$.



# Outline

# Inserción de Cadenas en la Pila y Reemplazo del Tope de la Pila

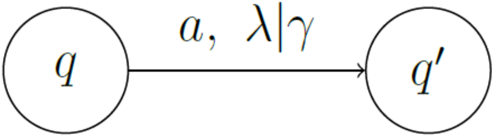
- Al ejecutar una instrucción básica, máximo se puede añadir un símbolo a la pila.
- Sin embargo, insertar una cadena $\gamma$ de longitud arbitraria en la pila se puede simular con una inserciones básica de cada símbolo de $\gamma$.
- El nuevo tope será el primer símbolo de $\gamma$.
- Entonces, la inserción de cadenas en la pila debe ser permitida.

# Inserción de Cadenas en la Pila

## Proposición 1

Dado el autómata finito con pila $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$, la instrucción $\Delta(q, a, \lambda) = (q', \gamma)$, donde $a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $q, Q' \in Q$ y $\gamma^*$, permite añadir la cadena $\gamma$ en la extremo del tope de la pila. El nuevo tope de la pila es el primer caracter de $\gamma$.

$$\Delta(q, a, \lambda) = (q', \gamma)$$



# Inserción de Cadenas en la Pila

## Proposición 1

Dado el autómata finito con pila $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$, la instrucción $\Delta(q, a, \lambda) = (q', \gamma)$, donde $a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $q, Q' \in Q$ y $\gamma^*$, permite añadir la cadena $\gamma$ en la extremo del tope de la pila. El nuevo tope de la pila es el primer caracter de $\gamma$.

$$q \xrightarrow{a,\ \lambda|BCD} q'$$

$$q \xrightarrow{a,\ \lambda|D} p_1 \xrightarrow{\lambda,\ \lambda|C} p_2 \xrightarrow{\lambda,\ \lambda|B} q'$$

# Reemplazo del Tope de la Pila

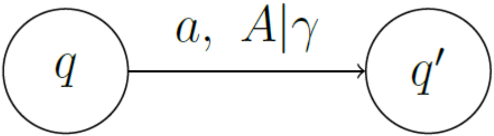
- De igual manera, el tope de la pila (un símbolo) puede ser reemplazado por toda una cadena $\gamma$.
- Esto se puede lograr con instrucciones básicas reemplazando el tope de la pila por el último símbolo de $\gamma$ y añadiendo los otros arriba de esta.
- El nuevo tope será el primer caracter de $\gamma$.
- Entonces, este tipo de reemplazo también debe ser una operación permitida.

# Reemplazo del Tope de la Pila

## Proposición 2

Dado el autómata finito con pila $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$, la instrucción $\Delta(q, a, A) = (q', \gamma)$, donde $a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $q, Q' \in Q$, $A \in \Gamma$ y $\gamma^*$, permite reemplazar el tope de la pila (que es $A$) por la cadena $\gamma$. El nuevo tope de la pila es el primer caracter de $\gamma$.

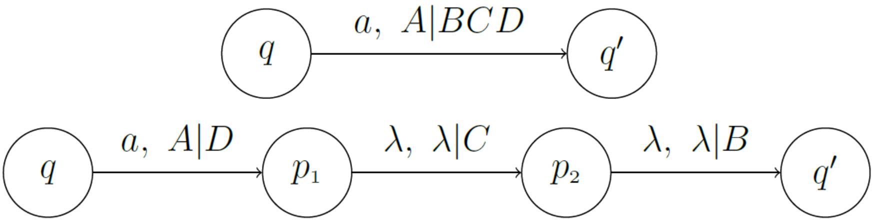
$$\Delta(q, a, A) = (q', \gamma)$$



# Reemplazo del Tope de la Pila

## Proposición 2

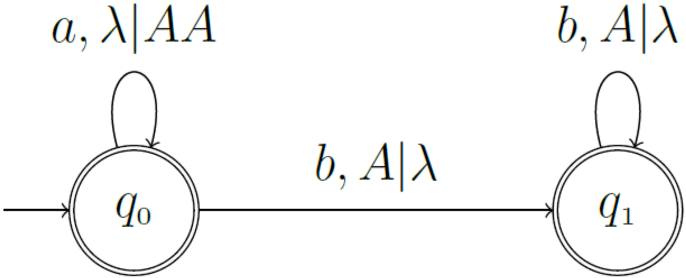
Dado el autómata finito con pila $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$, la instrucción $\Delta(q, a, \lambda) = (q', \gamma)$, donde $a \in (\Sigma \cup \{\lambda\})$, $q, Q' \in Q$ y $\gamma^*$, permite añadir la cadena $\gamma$ en la extremo del tope de la pila. El nuevo tope de la pila es el primer caracter de $\gamma$.



# Ejercicio

## Ejercicio

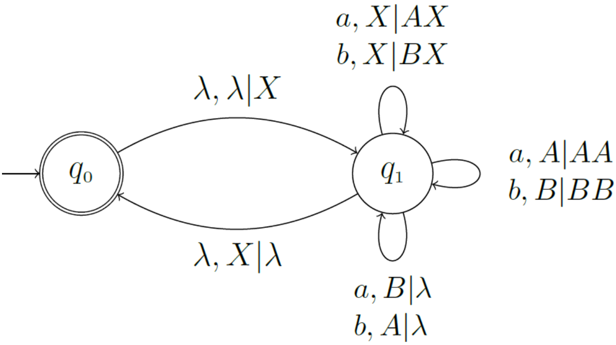
Diseñar un AFPD $M$ que acepte el lenguaje $L = \{a^n b^{2n} : n \geq 0\}$ definido sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que use la inserción/reemplazo de cadenas de longitud mayor a 1 en la pila.



# Ejercicio

## Ejercicio

Diseñar un AFPD $M$ que acepte el lenguaje $L = \{u \in \Sigma^* : \#_a(u) = \#_b(u)\}$ definido sobre $\Sigma = \{a, b\}$ que use la inserción/reemplazo de cadenas de longitud mayor a 1 en la pila.



# Outline

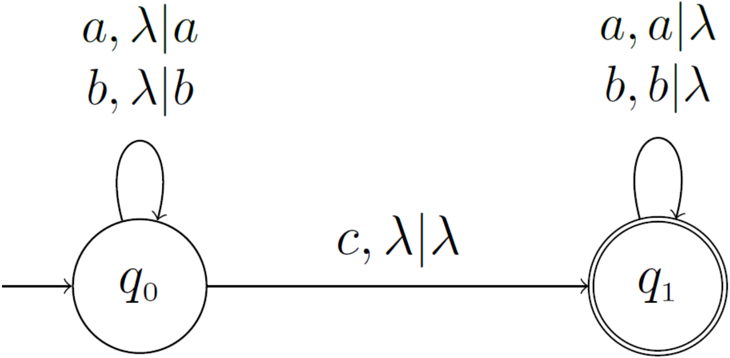
# No equivalencia entre AFPD y AFPN

- Los AFPD y AFPN no son computacionalmente equivalentes.
- Existen lenguajes aceptados por AFPN que no pueden ser aceptados por ningún AFPD.
- Un ejemplo de esto es $L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$ sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, i.e. los palíndromes de longitud par.
- $(ww^R)^R = (w^R)^R w^R = ww^R$.

# No equivalencia entre AFPD y AFPN

## Ejercicio

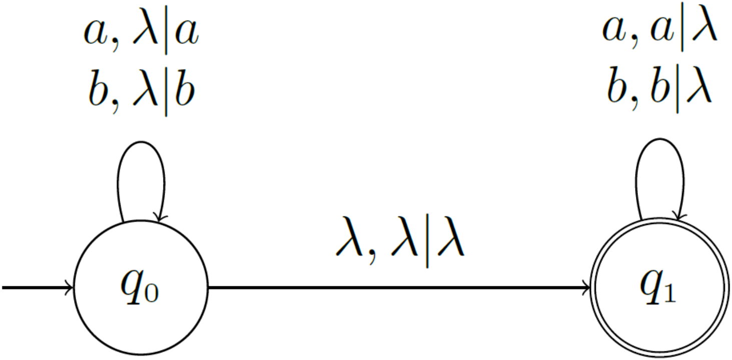
Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$, diseñe un AFPD que acepte el lenguaje $L' = \{wcw_R : w \in \{a, b\}^*\}$.



# No equivalencia entre AFPD y AFPN

## Ejercicio

Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, diseñe un AFPN que acepte el lenguaje $L = \{ww_R : w \in \Sigma^*\}$.



## Proposición 3

El lenguaje $L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$, donde $\Sigma = \{a, b\}$, no puede ser aceptado por ningún AFPD.

## Demostración (por contradicción)

- Suponer que existe un AFPD $M = (Q, q_0, F, \Sigma, \Gamma, \Delta)$ tal que $L(M) = L$.
- Las potencias $a^2$, $a^4$, $a^6$, $\ldots \in L$ son aceptadas por $M$.
- Como hay infinitas cadenas de la forma $a^{2n}$, $n \geq 0$, y solamente hay un número finito de configuraciones de aceptación, por el Principio de Palomar $[q_0, a^{2i}, \lambda] \vdash^* [p, \lambda, \lambda]$ y $[q_0, a^{2j}, \lambda] \vdash^* [p, \lambda, \lambda]$, $p \in F$.
- Como $M$ es determinista, $[q_0, a^{2i}x, \lambda] \vdash^* [p, x, \lambda]$ y $[q_0, a^{2j}x, \lambda] \vdash^* [p, x, \lambda]$ para toda $x \in \Sigma^*$.
- Entonces, $(\forall x \in \Sigma^*)[a^{2i}x \in L \iff a^{2j}x \in L]$.
- La contradicción surge porque, para $x = bba^{2i}$, $a^{2i}x \in L$ y $a^{2j}x \notin L$.

# Criterio General

## Proposición 4

Sea $\Sigma$ un alfabeto y $L \subseteq \Sigma^*$. Si $L$ contiene infinitas cadenas $L$-distinguibles dos a dos, entonces $L$ no puede ser aceptado por ningún AFPD.

## Demostración (por contradicción)

- Suponer que existe un AFPD $M$ tal que $L(M) = L$.
- Por hipótesis, existen infinitas cadenas $u_1, u_2, \ldots \in L$ que son $L$-distinguibles dos a dos y aceptadas por $M$.
- Hay infinitas $u_i, u_j \in L$, $u_i \neq u_j$, y $|F|$ configuraciones $[p, \lambda, \lambda]$, $p \in F$. Entonces, $[q_0, u_i, \lambda] \vdash^* [p, \lambda, \lambda]$ y $[q_0, u_j, \lambda] \vdash^* [p, \lambda, \lambda]$.
- $(\forall x \in \Sigma^*)[([q_0, u_i x, \lambda] \vdash^* [p, x, \lambda]) \wedge ([q_0, u_j x, \lambda] \vdash^* [p, x, \lambda])$ porque $M$ es determinista. Entonces, $(\forall x \in \Sigma^*)[u_i x \in L \iff u_j x \in L]$.
- Esto contradice que $u_i$ y $u_j$ son $L$-distinguibles.

# Ejercicio

## Ejercicio

Utilizar la Proposición 4 para demostrar que ningún AFPD puede aceptar el lenguaje $L = \{ww^R : w \in \Sigma^*\}$, donde $\Sigma = \{a, b\}$.

# Outline

# Producto Cartesiano entre un AFP y un AFD

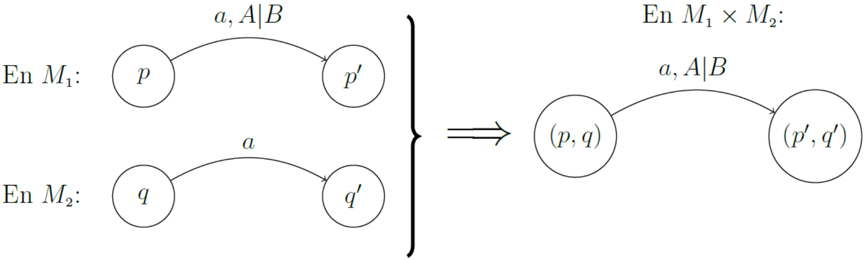
Sea $M_1 = (Q_1, q_1, F_1, \Sigma, \Gamma, \Delta)$ un AFP y sea $M_2 = (\Sigma, Q_2, q_2, F_2, \delta)$ un AFD. El **Producto Cartesiano** de estos es un AFP definido como:

$$M_1 \times M_2 = (Q_1 \times Q_2, (q_1, q_2), F_1 \times F_2, \Sigma, \Gamma, \Delta')$$

donde la función de transición $\Delta'$ consta de las siguientes instrucciones:

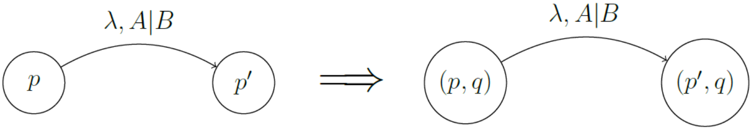
1. Si $(p', B) \in \Delta(p, a, A)$ y $\delta(q, a) = q'$, entonces $((p', q'), B) \in \Delta'((p, q), a, A)$, donde $a \in \Sigma$, $A, B \in (\Gamma \cup \{\lambda\})$.
2. Si $(p', B) \in \Delta(p, \lambda, A)$, entonces $((p', q), B) \in \Delta'((p, q), \lambda, A)$, donde $A, B \in (\Gamma \cup \{\lambda\})$, para todo $q \in Q_2$.

# Función de Transición




En $M_1$:

En $M_1 \times M_2$:




Para todo estado $q$ de $M_2$

# Lenguaje Aceptado

## Teorema

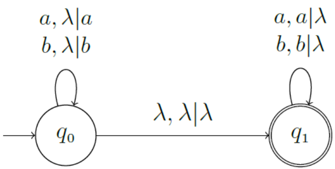
Sea $M_1 = (Q_1, q_1, F_1, \Sigma, \Gamma, \Delta)$ un AFP y sea $M_2 = (\Sigma, Q_2, q_2, F_2, \delta)$ un AFD tales que $L_1 = L(M_1)$ y $L_2 = L(M_2)$. El lenguaje aceptado por por $M_1 \times M_2$ es $L(M_1 \times M_2) = L_1 \cap L_2$.

## Ejercicio

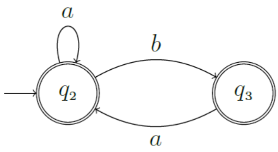
Diseñar un AFP que acepte el lenguaje $L$, sobre $\Sigma = \{a, b\}$, de todos los palíndromes de longitud par que no tienen dos $b$es consecutivas.

# Lenguaje Aceptado

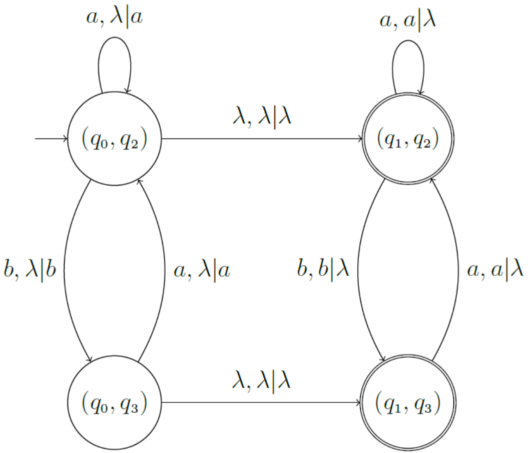
$M_1$:




$M_2$:




$M_1 \times M_2$:



# Bibliografía

1. Rodrigo De Castro Korgi. **Notas de Clase de Introducción a la Teoría de la Computación**. 2020. Contenidos e imágenes de estas notas fueron incluidas en esta presentación.
2. Harry R. Lewis, Christos H. Papadimitriou. **Elements of the Theory of Computation**. Prentice Hall. 1998.
3. John E. Hopcroft, Rajeev Motwani, Jeffrey D. Ullman. **Introduction to Automata Theory, Languages and Computation, Third Edition**. Pearson. 2006.