Fidelidad Cuántica

La fidelidad cuántica es una medida fundamental en información cuántica que cuantifica cuán similares son dos estados cuánticos. Se utiliza ampliamente para evaluar la calidad de la preparación de estados cuánticos, la precisión en la transmisión de información y la eficiencia de algoritmos cuánticos.

Matemáticamente, la fidelidad entre dos estados puros $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ se define como:

$$F(|\psi\rangle, |\phi\rangle) = |\langle\psi|\phi\rangle|^2$$

Para calcular esta cantidad, se hace uso del concepto de observable cuántico, que representa una **magnitud física medible**. En el caso de la fidelidad, el observable correspondiente es un **operador proyector $\mathbf{\Pi_0}$**, que proyecta sobre el estado base $|0\rangle^{\otimes n}$. Este observable puede representarse como una combinación de operadores de **Pauli**, y su valor esperado sobre un estado cuántico $|\phi\rangle$ nos da la fidelidad buscada:

$$F = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \langle\phi|\mathbf{\Pi_0}|\phi\rangle$$

donde $\mathbf{\Pi_0} = |0\rangle\langle 0|^{\otimes n}$ y $|\phi\rangle = U^\dagger|\psi\rangle$.

Aquí, el operador cuántico U transforma el estado base $|0\rangle^{\otimes n}$ en el estado objetivo $|\psi\rangle$, y su inversa $U^\dagger$ permite recuperar el estado inicial. El operador proyector actúa como un observable que discrimina si se ha vuelto al estado base, midiendo así la **fidelidad**.

Ejemplo 1: Supongamos que $|\psi\rangle = H|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ y $|\phi\rangle = |0\rangle$. La fidelidad se obtiene evaluando el observable $\mathbf{\Pi_0} = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z})/\mathbf{2}$, resultando:

$$F = |\langle\psi|\phi\rangle|^2 = \langle\psi|\mathbf{\Pi_0}|\psi\rangle = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \mathbf{0.5}$$

Ejemplo 2: Supongamos ahora que se tiene un estado de dos qubits:

$$|\psi\rangle = H^{\otimes 2}|00\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\right)$$

Este es el resultado de aplicar el operador cuántico $U = H^{\otimes 2}$ sobre $|0\rangle^{\otimes 2}$.

Al aplicar $U^\dagger = H^{\otimes 2}$ nuevamente, el estado vuelve a $|0\rangle^{\otimes 2}$. Por tanto, la probabilidad de medir $|0\rangle^{\otimes 2}$ es:

$$P\left(|0\rangle^{\otimes 2}\right) = \left|\langle 00|H^{\otimes 2}|\psi\rangle\right|^2 = \mathbf{1}$$

lo que implica fidelidad perfecta: $\boldsymbol{F} = \mathbf{1.0}$.

Un caso general de fidelidad igual a $\mathbf{1.0}$ ocurre cuando se compone un circuito cuántico con su circuito inverso (o matriz inversa). Esta operación devuelve el estado cuántico original, de modo que la probabilidad de medir el estado base $|0\rangle^{\otimes n}$ después de aplicar ambas transformaciones es exactamente $\mathbf{1}$. La siguiente figura representa esta composición:

Circuito total: $\quad U^{\dagger}U|0\rangle^{\otimes n} = (U^{\dagger}U)|0\rangle^{\otimes n} = I|0\rangle^{\otimes n} = |0\rangle^{\otimes n}$

$$\text{Qubit 0:} \quad |0\rangle \xrightarrow{U} \xrightarrow{U^{\dagger}} \text{medición}$$

$$\text{Qubit 1:} \quad |0\rangle \xrightarrow{U} \xrightarrow{U^{\dagger}} \text{medición}$$

Este enfoque de medir la fidelidad mediante valores esperados de observables definidos como operadores proyectores es altamente eficiente, especialmente en algoritmos variacionales y técnicas de *benchmarking* cuántico.

Implementación en Qiskit 2.0

En el siguiente enlace puede observar la implementación en Qiskit de la medición de Fidelidad aquí definida:

https://github.com/gpatigno/QC_2025/blob/main/LAB/PR2/Fidelidad_Cuantica_2025.ipynb