

Branimir Novoselnik 0036444731 1.D_AUT	Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb Zavod za automatiku i računalno inženjerstvo	12.6.2012
	Adaptivno i robusno upravljanje	
	Seminar 3: Robusna stabilnost	

3.1 Uvod

U sklopu ovog seminara biti će obrađena analiza utjecaja parametara sustava na stabilnost. Pod parametrima sustava automatskog upravljanja podrazumijevaju se vremenske konstante, koeficijenti pojačanja, koeficijenti karakterističnih jednadžbi i sl. Pri projektiranju sustava potrebno je odrediti područje promjene iznosa ovih parametara u kojem će sustav biti stabilan.

Vrlo je složena analiza utjecaja promjene puno različitih parametara sustava na stabilnost - ako imamo κ parametara koji se mogu mijenjati govorimo o κ – dimenzijskom području stabilnosti koje je potrebno odrediti. U takvim situacijama potrebno je koristiti dostignuća iz teorije robusne stabilnosti. U ovom seminaru biti će obrađena dva postupka analize robusne stabilnosti - analiza robusne stabilnosti primjenom teorema malog pojačanja i polinomski pristup Karitonova ¹. Prvim postupkom je omogućena analiza stabilnosti sustava kod kojih se obično mijenja samo jedan parametar, za razliku od polinomskog pristupa Karitonova, kojim je omogućena analiza robusne stabilnosti za bilo koji broj promjenjivih parametara karakterističnog polinoma zatvorenog kruga.

3.2 Analiza robusne stabilnosti primjenom teorema malog pojačanja

Pri projektiranju sustava automatskog upravljanja, najčešće se počinje od dvije osnovne pretpostavke:

- matematički model sustava daje točan opis realnog sustava,
- matematički model ne mijenja se s vremenom,

na osnovu kojih se projektira regulator uz koji će se postići stabilnost zatvorenog kruga upravljanja i sve željene performanse (brzina, točnost, nadvišenje i sl.). No, u praksi obje ove pretpostavke nikada nisu ispunjene. Ne samo da postoji neizvjesnost u našem poznavanju dinamike sustava (matematičkim modelom nikad nećemo moći u potpunosti točno opisati realni sustav), već je i sam sustav podvrgnut raznim promjenama zbog koji će mu se s vremenom mijenjati dinamika. Te promjene mogu nastati uslijed raznih čimbenika (starenje, naprezanje komponenata, promjene uvjeta rada ili okoline sustava, kvarovi, parametri sustava koji su ovisni o vremenu i sl.). Dakle, nužno je da regulator stabilizira i postigne odgovarajuće performanse realnog sustava, a ne samo nominalnog matematičkog modela. Tako dolazimo do definicije robusnog regulatora ¹ koji mora zadovoljiti zahtjeve za čitavu familiju matematičkih modela sustava, a ne samo nominalnog matematičkog modela.

¹Vladimir Leonidović Karitonov - ruski matematičar.

Definicija 1. (Robusni regulator)

Za danu familiju matematičkih modela, koja se sastoji od

- (1) *konačnog broja specifičnih modela,*
- (2) *nominalnog modela i opisa neizvjesnosti u modelu, ili*
- (3) *strukturnog modela za sustav s opisom neizvjesnosti u iznosima parametara modela,*

regulator će biti robustan ako i samo ako interno stabilizira svaki od modela u familiji.

Nominalni matematički model G_n i opis neizvjesnosti Δ (eng. *uncertainty description*) koji je povezan s nominalnim modelom procesa, na neki način ograničavaju fizikalni stvarni proces G , koji leži u skupu svih procesa opisanih parom (G_n, Δ) . Dva su osnovna oblika neizvjesnosti:

- strukturirana neizvjesnost,
- nestrukturirana neizvjesnost.

Strukturirana neizvjesnost pretpostavlja da se neizvjesnost može modelirati te da su poznate granice unutar kojih se mijenjaju neizvjesni parametri. Nestrukturirana neizvjesnost podrazumijeva manje znanje o procesu (npr. poznato je samo da se frekvencijska karakteristika procesa nalazi unutar određenih granica).

Opis dinamičke (nestrukturirane neizvjesnosti)

Najjednostavniji opis razlike između realnog procesa i nominalnog matematičkog modela je pomoću tzv. aditivne neizvjesnosti (aditivna perturbacija ili apsolutna pogreška modela):

$$\Delta_a(s) = G(s) - G_n(s). \quad (3-1)$$

Druga mogućnost je opisati pogrešku modela pomoću multiplikativne neizvjesnosti (relativna pogreška modela):

$$\Delta_m(s) = \left(\frac{G(s)}{G_n(s)} - 1 \right). \quad (3-2)$$

Za 3-1 definiramo $W(s)$ kao težinu (ponder) neizvjesnosti koji zadovoljava nejednadžbu:

$$|\Delta_a(j\omega)| < |W(j\omega)|; \forall \omega. \quad (3-3)$$

Multiplikativna neizvjesnost 3-2 može se pomoću težine neizvjesnosti $W_2(s)$ pisati na ovaj način:

$$\Delta(s)W_2(s) = \frac{G(s)}{G_n(s)} - 1. \quad (3-4)$$

Ako je $\|\Delta\|_\infty \leq 1$, tada:

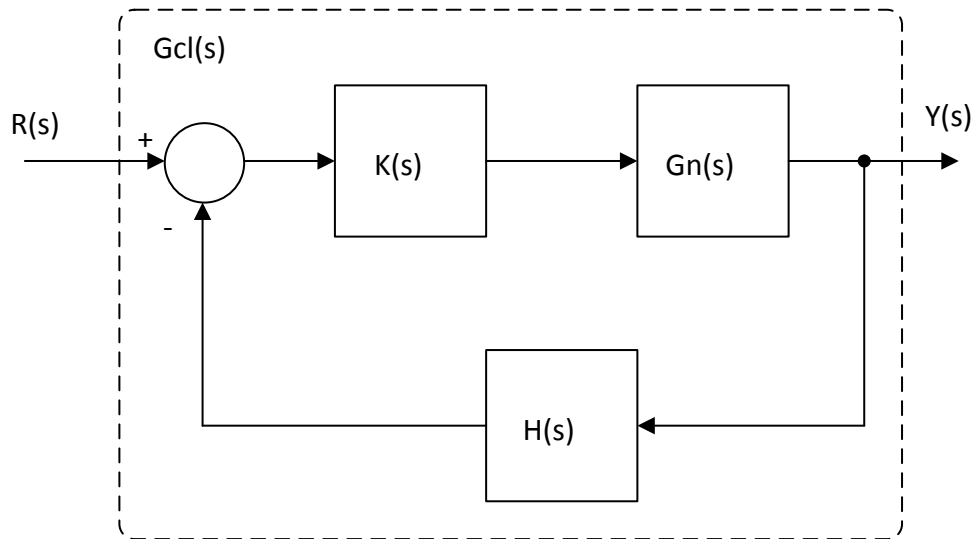
$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_n(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)| \quad (3-5)$$

Prema tome, težine neizvjesnosti $W(j\omega)$ o $W_2(j\omega)$ daju profil (granicu) neizvjesnosti. U analizi stabilnosti ćemo sustav opisati pomoću nominalnog matematičkog modela i jednog od navedenih modela neizvjesnosti. Robusna stabilnost takvog sustava podrazumijevat će internu stabilnost svih procesa iz familije (skupa) procesa opisanih nominalnim matematičkim modelom i modelom neizvjesnosti. Vrlo važan rezultat teorije upravljanja koji je moguće koristiti za izvod uvjeta robusne stabilnosti je tzv. teorem malog pojačanja (eng. *Small-gain theorem*).

Teorem 1. (*Teorem malog pojačanja*)

Ako se razmatra zatvoreni krug upravljanja dan na slici 3.1 te ako se pretpostavi da su kompenzator $K(s)$, proces $G_n(s)$ i $H(s)$ stabilni, tada će zatvoreni krug ostati stabilan ako vrijedi:

$$|G_o(s)| = |K(s)G_n(s)H(s)| < 1. \quad (3-6)$$



Slika 3.1: Blok-shema zatvorenog kruga upravljanja.

Po ovom teoremu slijedi da će zatvoreni krug upravljanja, koji se sastoji od stabilnih komponenata, biti stabilan samo ako je umnožak svih pojačanja u petlji manji od jedan, što vrijedi i za linearne i za nelinearne sustave. Teoremom se garantira potpuna stabilnost, tj. da su svi signali unutar sustava ograničeni ako je pobuda na sustav ograničena. No, teorem malog pojačanja daje dovoljne uvjete za stabilnost što znači da je moguće da uvjet 3-6 za neki sustav nije zadovoljen, a da je sustav ipak stabilan.

Uz pretpostavku o jediničnoj povratnoj vezi ($H(s) = 1$) i uvođenjem *komplementarne funkcije osjetljivosti* definirane sa:

$$T(s) = 1 - S(s) = 1 - \frac{1}{1 + G_o(s)} = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{K(s)G_n(s)}{1 + K(s)G_n(s)} \quad (3-7)$$

te upotrebom multiplikativnog modela neizvjesnosti 3-2, uvjet 3-6 rezultira *uvjetom robusne stabilnosti*:

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1. \quad (3-8)$$

Drugim riječima, zatvoreni krug će biti *robustno stabilan* ako je zadovoljeno:

$$|W_2(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|}. \quad (3-9)$$

Definiramo i *multiplikativno osiguranje stabilnosti* MSM (eng. *Multiplicative Stability Margin*) kao najmanji iznos destabilizirajuće neizvjesnosti:

$$\text{MSM} = \frac{1}{M_m}, \quad (3-10)$$

gdje je: $M_m = \sup_{\omega} |T(j\omega)|$ (sup je supremum funkcije, iznos koji ju ograničava odozgo).

3.2.1 Opis zadanog procesa i problema

Zadan je proces čija je prijenosna funkcija dana s:

$$G(s) = \frac{-a}{s^2 + s + 0.5}, \quad (3-11)$$

gdje je a parametar koji je neizvjestan. Poznata je nominalna vrijednost tog parametra i granice unutar kojih se može mijenjati (tablica 3.1).

Tablica 3.1: Nominalni iznos parametra a i granice unutar kojih se mijenja.

a_n	a_{min}	a_{max}
0.2	0.2	0.7

Za zadani proces potrebno je pomoću teorema malog pojačanja analizirati robustnu stabilnost.

3.2.2 Modeliranje multiplikativne pogreške modela

Prema izrazu 3-2, uz uvrštenje a_n iz tablice 3.1, dobivamo:

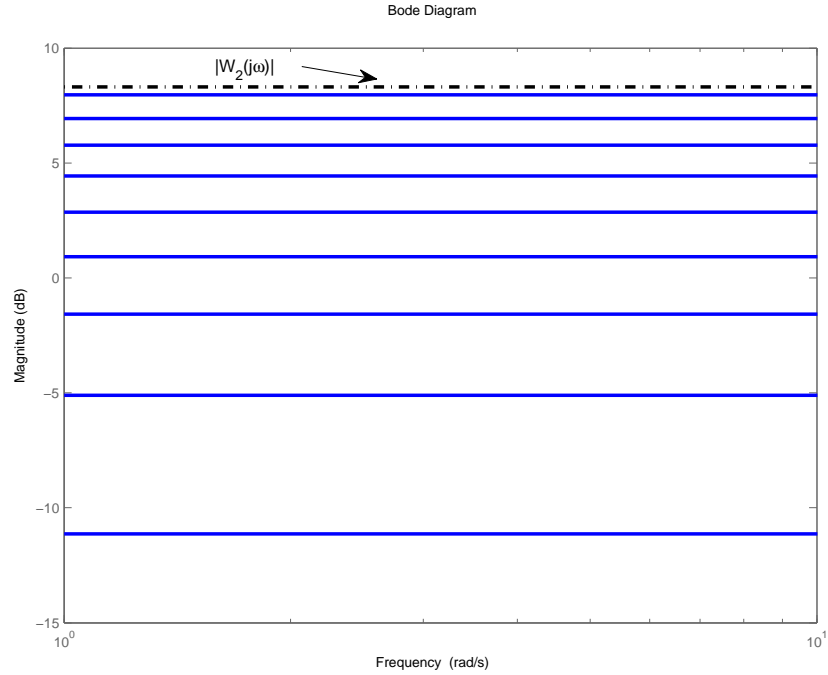
$$\Delta_m(s) = \frac{G(s)}{G_n(s)} - 1 = \frac{\frac{-a}{s^2+s+0.5}}{\frac{-a_n}{s^2+s+0.5}} - 1 = \frac{a}{a_n} - 1 = 5a - 1. \quad (3-12)$$

Iz izraza 3-12 vidimo da je multiplikativna pogreška oblika pojačanja (nije funkcija od s). Na slici 3.2 je prikazana amplitudno-frekvencijska karakteristika multiplikativne neizvjesnosti za različite vrijednosti promjenjivog parametra a (odabrano je 10 jednoliko razmaknutih vrijednosti iz intervala od a_{min} do a_{max} , karakteristike su prikazane plavom bojom). Kako multiplikativna težina neizvjesnosti $W_2(s)$ mora zadovoljiti uvjet 3-5, dovoljno je postaviti $W_2(s) = 2.6$. Na slici 3.2 je prikazana i amplitudno-frekvencijska karakteristika $|W_2(j\omega)|$, gdje se vidi da je uvjet 3-5 uistinu zadovoljen.

3.2.3 Primjena teorema malog pojačanja

Prema teoremu malog pojačanja, zadani sustav će biti stabilan ako je zadovoljen uvjet 3-9. Odredimo prvo $T(s)$ prema 3-7 (uz $K(s) = 1$):

$$T(s) = \frac{G_n(s)}{1 + G_n(s)} = \frac{-a_n}{s^2 + s + 0.5 - a_n} = \frac{-0.2}{s^2 + s + 0.3}. \quad (3-13)$$



Slika 3.2: Amplitudno-frekvencijska karakteristika multiplikativne neizvjesnosti i multiplikativne težine neizvjesnosti $W_2(s)$.

Prema uvjetu 3-9 amplitudna karakteristika multiplikativne neizvjesnosti $|W_2(j\omega)|$ mora na svim frekvencijama biti ispod inverzne amplitudne karakteristike $\frac{1}{|T(j\omega)|}$. Na slici 3.3 mogu se vidjeti navedene amplitudne karakteristike. Iz ovog prikaza je jasno vidljivo da uvjet robusne stabilnosti nije zadovoljen, jer amplitudna karakteristika $W_2(j\omega)$ nije na svim frekvencijama ispod $\frac{1}{|T(j\omega)|}$ (ili malo preciznije rečeno, na niskim frekvencijama nije zadovoljen uvjet pa sustav nije robusno stabilan).

No, kao što je već rečeno, teorem malog pojačanja daje samo dovoljne uvjete stabilnosti. To što za ovaj slučaj uvjet teorema nije zadovoljen, ne znači da sustav nije stabilan. Uvjet je dosta konzervativan pa se može dogoditi da sustav može tolerirati neizvjesnosti koje ne zadovoljavaju taj uvjet.

3.2.4 Određivanje multiplikativnog osiguranja analitičkim putem

Uvrštavanjem $j\omega$ umjesto s u 3-13 dobivamo frekvencijsku karakteristiku od $T(s)$:

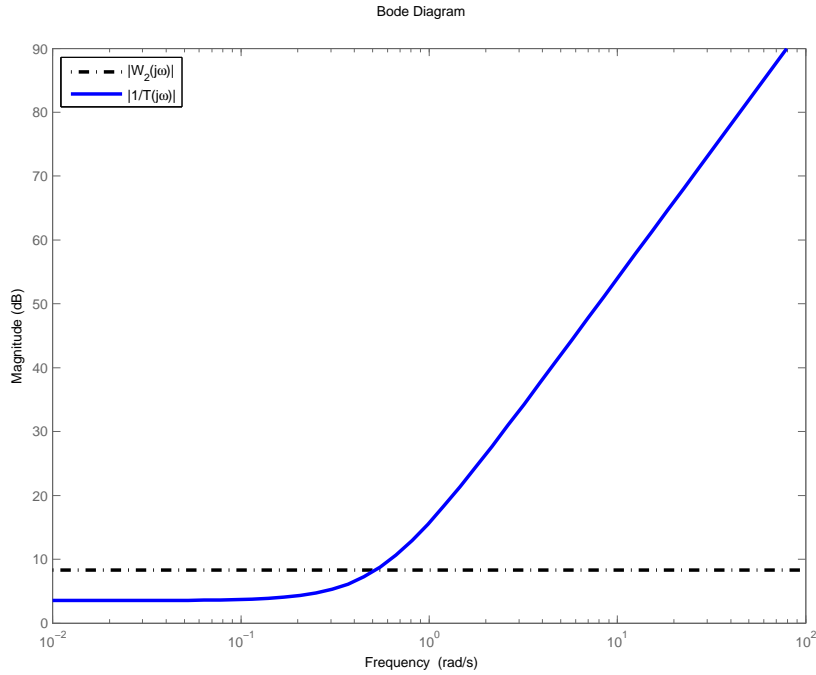
$$T(j\omega) = \frac{-0.2}{0.3 - \omega^2 + j\omega}. \quad (3-14)$$

Iz 3-14 slijedi $|T(j\omega)|$:

$$|T(j\omega)| = \frac{0.2}{\sqrt{(0.3 - \omega^2)^2 + \omega^2}} = A(\omega). \quad (3-15)$$

Potrebno je odrediti supremum, tj. maksimum od 3-15:

$$\begin{aligned} \frac{dA(\omega)}{d\omega} &= -\frac{2\omega + 4\omega(\omega^2 - 0.3)}{10((\omega^2 - 0.3)^2 + \omega^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{dA(\omega_{max})}{d\omega_{max}} &= 0, \\ \omega_{max} &= 0. \end{aligned} \quad (3-16)$$



Slika 3.3: Usporedni prikaz amplitudnih karakteristika $|W_2(j\omega)|$ i $\frac{1}{|T(j\omega)|}$.

Prema tome, supremum funkcije $|T(j\omega)|$ je:

$$M_m = |T(j0)| = \frac{2}{3}. \quad (3-17)$$

Prema 3-10 dobivamo multiplikativno osiguranje stabilnosti:

$$\begin{aligned} \text{MSM} &= \frac{1}{M_m} = \frac{3}{2} = 1.5 \\ \text{MSM}_{dB} &= 20 \log 1.5 \approx 3.5218 \end{aligned} \quad (3-18)$$

Dobiveni rezultat prikazan je grafički na slici 3.4. Vidi se da je iznos MSM-a ispravno izračunat - da bi sustav bio robusno stabilan potrebno je da $|W_2(j\omega)|$ bude manje od iznosa MSM-a na svim frekvencijama.

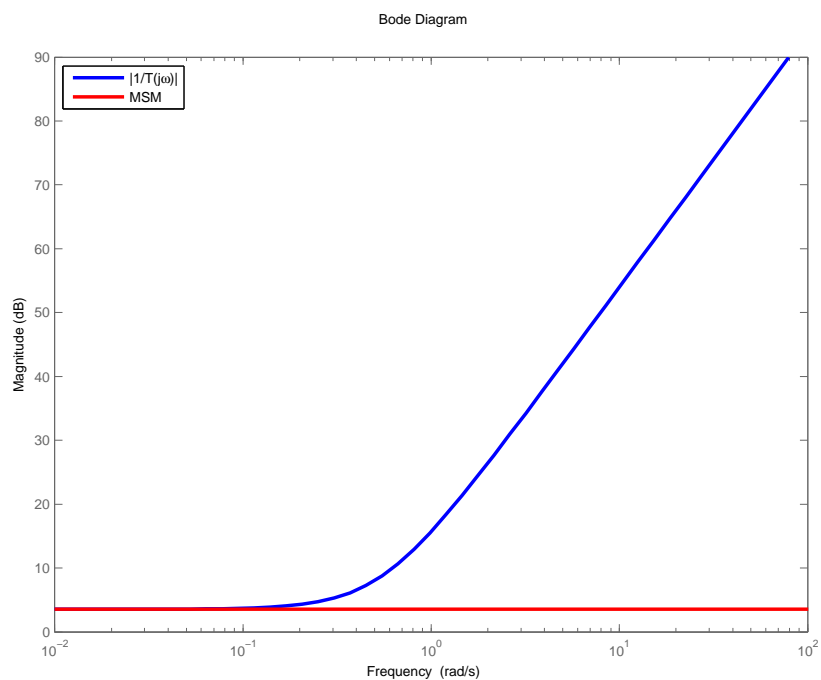
To znači da će razmatrani sustav biti robusno stabilan sve dok je parametar a manji od granične vrijednosti koja se dobije iz:

$$\begin{aligned} |W(j\omega)| &= \text{MSM} \\ 5a - 1 &= 1.5 \\ a_{gr} &= 0.5. \end{aligned} \quad (3-19)$$

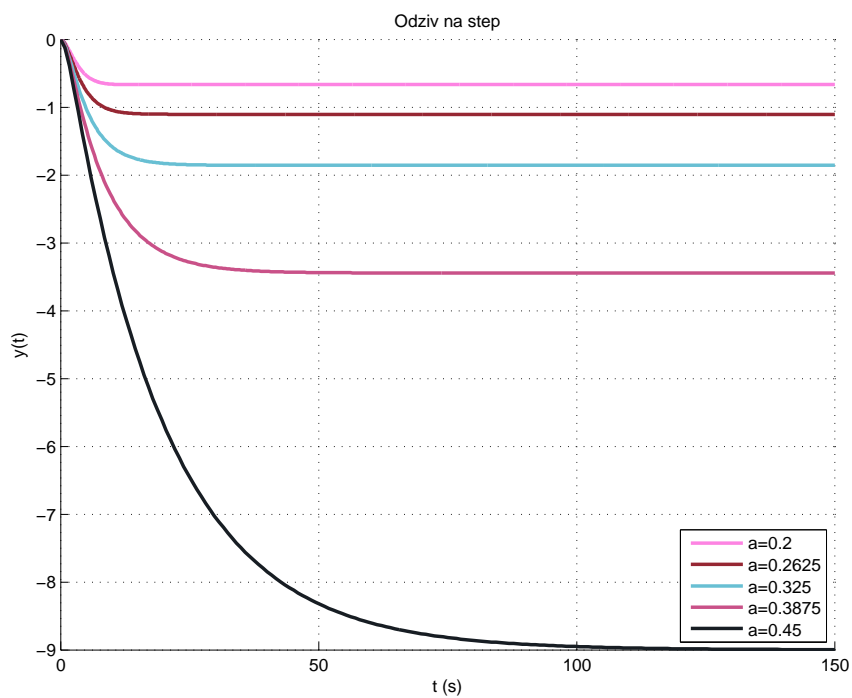
3.2.5 Simulacija zatvorenog kruga upravljanja

Provedena je simulacija zatvorenog kruga upravljanja uz različite iznose vrijednosti promjenjivog parametra a . Na slici 3.5 vidimo odzive na step pobudu uz promjene parametra a od nominalne vrijednosti do vrijednosti 0.45, a na slici 3.6 odzive uz promjene parametra a od 0.48 do 0.5. Vidimo da je sustav stabilan dok je parametar a manji od 0.5, kao što je rečeno u prethodnom poglavlju.

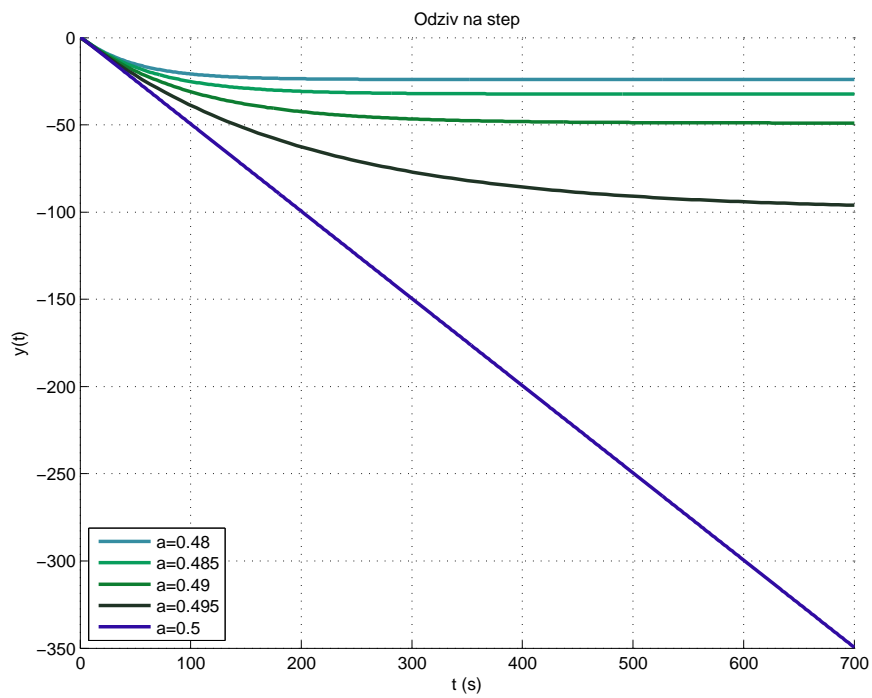
Ako se parametar a nastavi povećavati od 0.5 prema maksimalnoj vrijednosti 0.7, zatvoreni krug postaje nestabilan, što se vidi i iz odziva na slici 3.7.



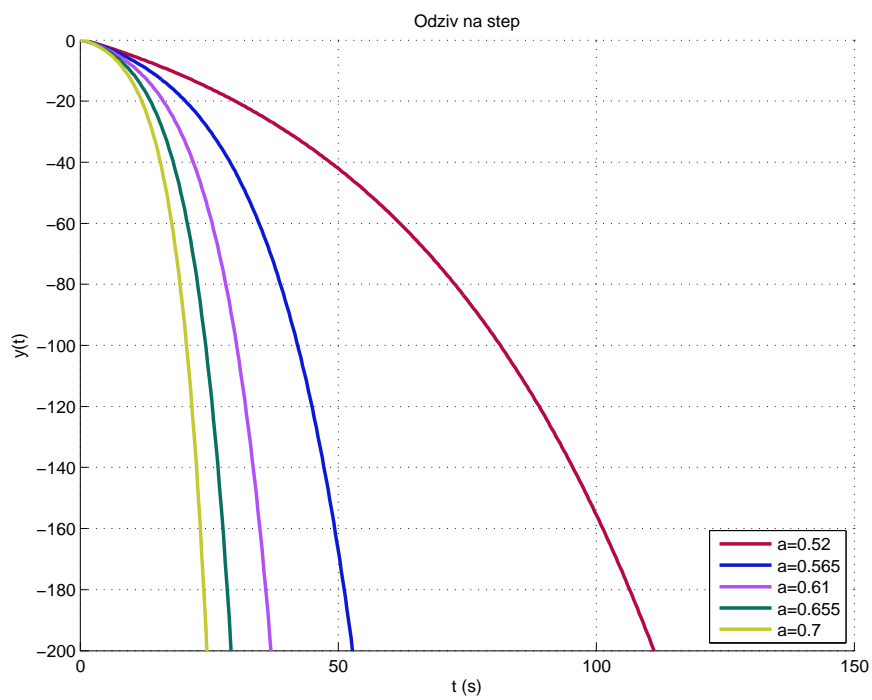
Slika 3.4: Grafička provjera izračunatog multiplikativnog osiguranja stabilnosti.



Slika 3.5: Odzivi zatvorenog kruga upravljanja na step pobudu uz promjene parametra a u intervalu $[0.2, 0.45]$.



Slika 3.6: Odzivi zatvorenog kruga upravljanja na step pobudu uz promjene parametra a u intervalu $[0.48, 0.5]$.



Slika 3.7: Odzivi zatvorenog kruga upravljanja na step pobudu uz promjene parametra a u intervalu $[0.52, 0.7]$.

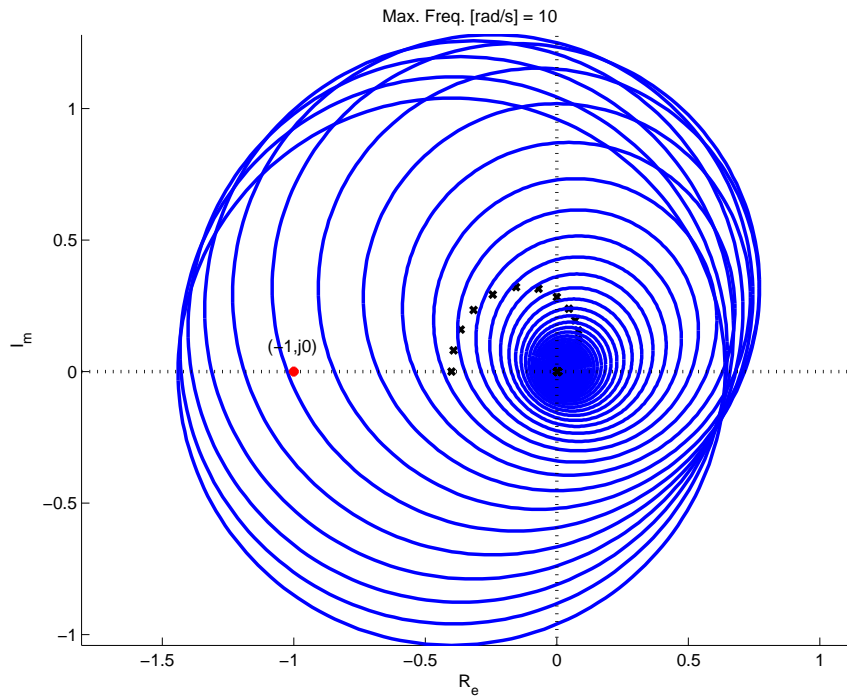
3.2.6 Grafička interpretacija robusne stabilnosti

Uvjet robusne stabilnosti 3-9 može se tumačiti na sljedeći način. Iz ovih izraza:

$$\begin{aligned} |W_2(j\omega)T(j\omega)| &< 1, \\ \left| \frac{W_2(j\omega)G_o(j\omega)}{1+G_o(j\omega)} \right| &< 1, \\ |W_2(j\omega)G_o(j\omega)| &< |1 + G_o(j\omega)|; \forall \omega, \end{aligned} \quad (3-20)$$

slijedi grafička interpretacija uvjeta 3-9 - da bi sustav bio robusno stabilan, za svaku frekvenciju ω kritična točka $(-1, j0)$ mora biti izvan kružnice sa središtem u $G_o(j\omega)$ i radijusom $|W_2(j\omega)G_o(j\omega)|$ (slika 6.35 u [1]).

Na slici 3.8 prikazana je tražena grafička interpretacija za sustav iz zadatka. Crvenom točkom je istaknuta kritična točka $(-1, j0)$. Krugovi su crtani za iznose frekvencije ω iz intervala $[0, 10]$ [rad/s] (jednoliko raspoređenih 100 iznosa iz tog intervala). Vidimo da za niske frekvencije krugovi obuhvaćaju kritičnu točku pa još jednom možemo potvrditi da sustav nije robusno stabilan.



Slika 3.8: Grafička interpretacija uvjeta robusne stabilnosti 3-9.

3.2.7 Osiguravanje robusne stabilnosti pomoću kompenzatora $K(s)$

Kao što se vidi iz slike 3.3, da bi uvjet robusne stabilnosti bio zadovoljen potrebno je podići amplitudnu karakteristiku $\frac{1}{|T(j\omega)|}$. To možemo postići korištenjem kompenzatora $K(s)$ koji u ovom slučaju može biti obično pojačanje K .

Za $T(s)$ sada dobivamo:

$$T(s) = \frac{KG_n(s)}{1 + KG_n(s)} = \frac{-0.2K}{s^2 + s + 0.5 - 0.2K}, \quad (3-21)$$

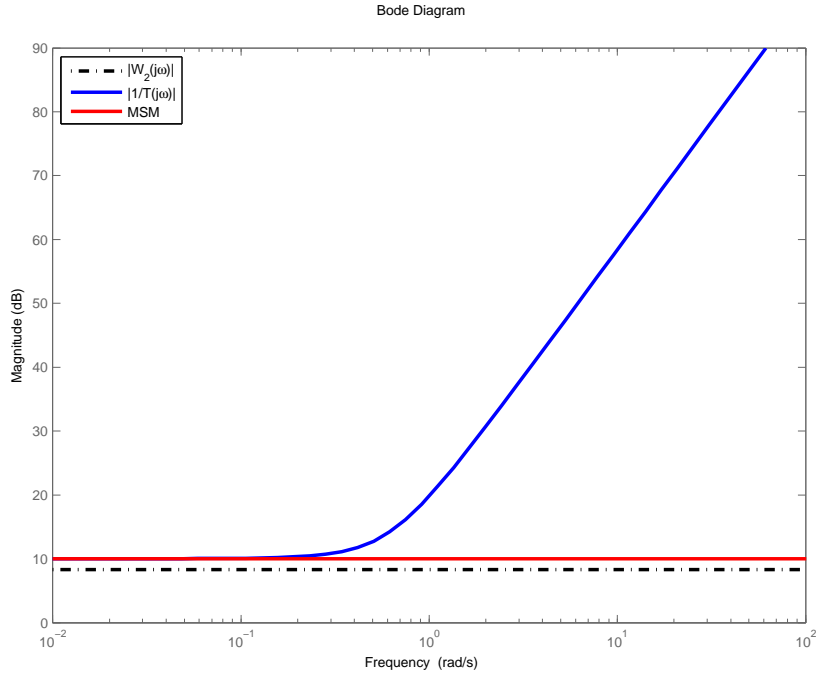
tj. za $|T(j\omega)|$:

$$|T(j\omega)| = \frac{0.2K}{\sqrt{(0.5 - 0.2K - \omega^2)^2 + \omega^2}}. \quad (3-22)$$

Po uvjetu robusne stabilnosti iznos MSM mora biti veći od $|W_2(j\omega)| = 2.6$. Drugim riječima:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|T(j0)|} &> 2.6 \\ \frac{0.5-0.2K}{0.2K} &> 2.6 \\ K &< 0.69444 \end{aligned} \quad (3-23)$$

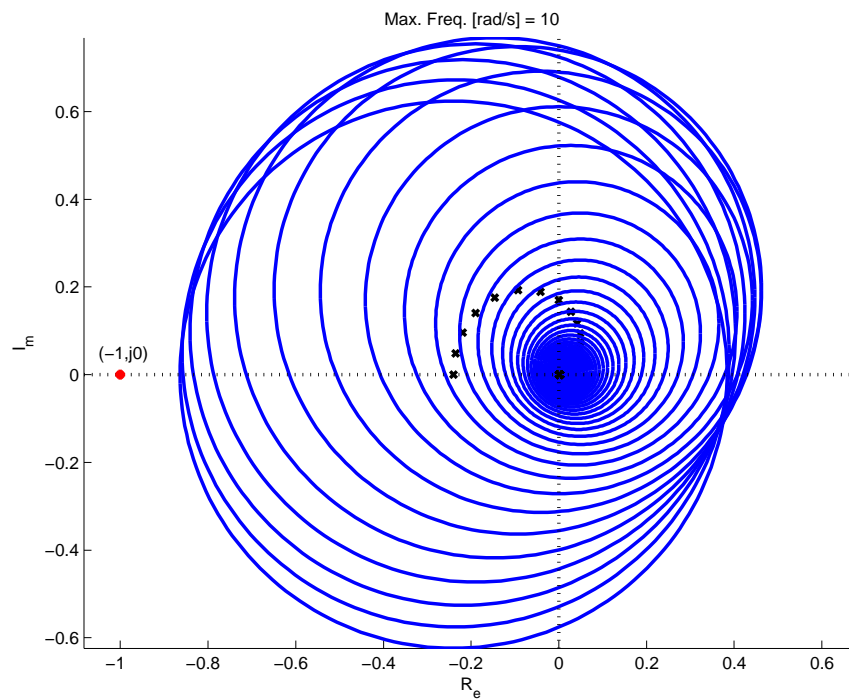
Odaberimo primjerice $K = 0.6$. Na slici 3.9 su prikazane amplitudne frekvencijske karakteristike $|W_2(j\omega)|$ i $|\frac{1}{T(j\omega)}|$. Vidimo da je upotrebom predloženog kompenzatora zadovoljen uvjet robusne stabilnosti 3-9, tj. za sve frekvencije je amplitudna karakteristika težine neizvjesnosti $W_2(s)$ ispod inverzne amplitudne frekvencijske karakteristike funkcije osjetljivosti $T(s)$.



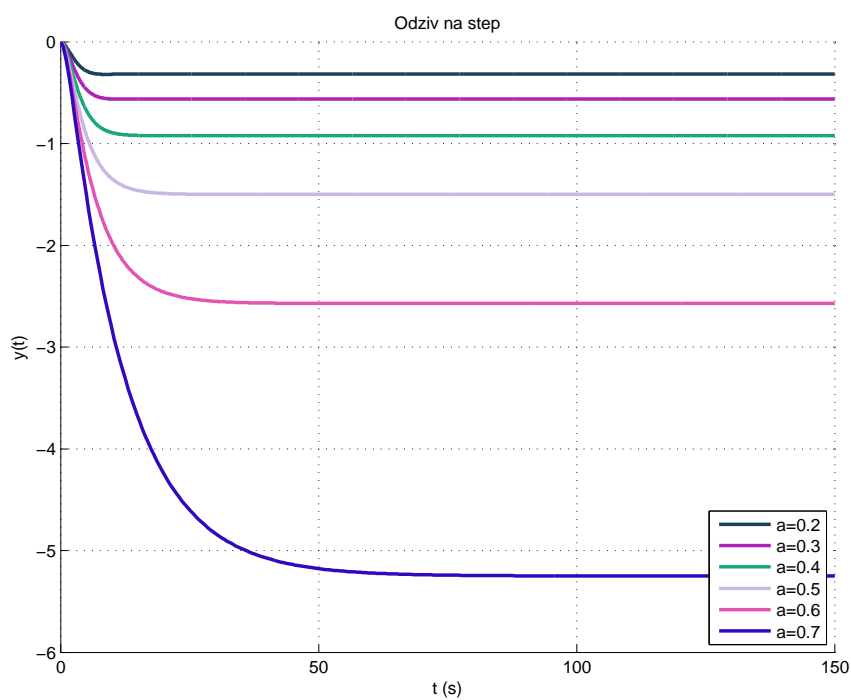
Slika 3.9: Usporedba amplitudnih frekvencijskih karakteristika $|W_2(j\omega)|$ i $\frac{1}{|T(j\omega)|}$ uz korištenje kompenzatora $K = 0.6$.

Na slici 3.10 je prikazana grafička interpretacija uvjeta robusne stabilnosti za slučaj korištenja predloženog kompenzatora. Kritična točka $(-1, j0)$ ovaj puta nije obuhvaćena niti jednim krugom što potvrđuje da je sada sustav robusno stabilan.

Odzivi na step zatvorenog kruga uz korištenje kompenzatora te uz promjene neizvjesnog parametra a od nominalne vrijednosti 0.2 do maksimalne vrijednosti 0.7 (slika 3.11) dokazuju da je sustav robusno stabilan – odzivi uz vrijednosti parametra a iz čitavog opsega mogućih vrijednosti su stabilni. Dakle, kompenzator je postigao internu stabilizaciju za sve familije modela procesa što znači da je sustav robusno stabilan.



Slika 3.10: Grafička interpretacija uvjeta robusne stabilnosti 3-9 uz korištenje kompenzatora $K = 0.6$.



Slika 3.11: Odzivi zatvorenog kruga upravljanaj uz korištenje kompenzatora $K = 0.6$.

3.2.8 Analiza robusne stabilnosti korištenjem aditivno modelirane neizvjesnosti

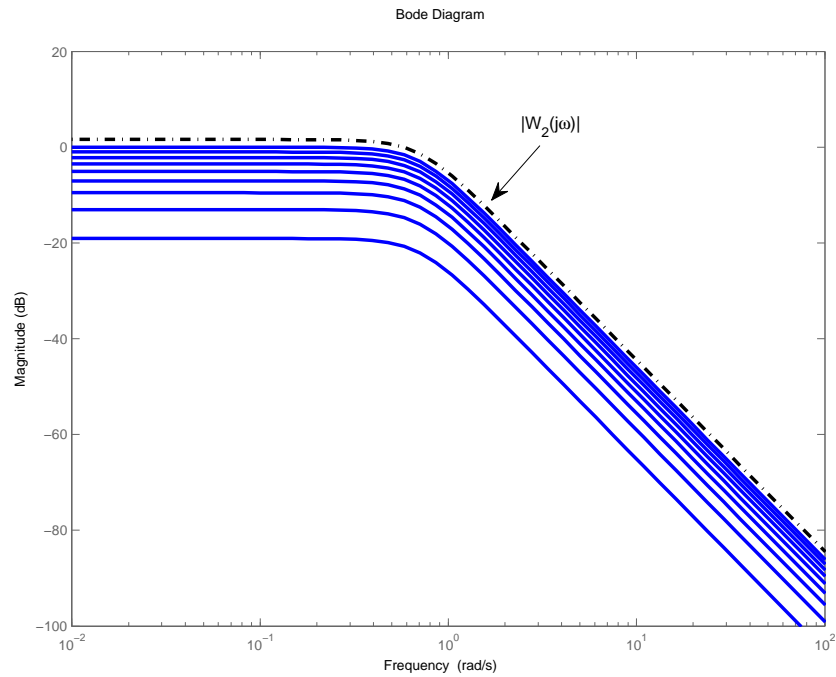
Po izrazu 3-1 dobivamo za zadani proces:

$$\Delta_a(s) = G(s) - G_n(s) = \frac{a_n - a}{s^2 + s + 0.5}. \quad (3-24)$$

Crtanjem amplitudnih frekvencijskih karakteristika $|\Delta_a(j\omega)|$ za razne iznose parametra a (slika 3.12) zaključujemo da je dovoljno odabrati aditivnu težinu neizvjesnosti kako slijedi:

$$W(s) = \frac{0.6}{s^2 + s + 0.5}, \quad (3-25)$$

jer mora biti zadovoljen uvjet 3-3. Na slici 3.12 se vidi da je uvjet zadovoljen.



Slika 3.12: Amplitudne karakteristike aditivno modelirane neizvjesnosti za razne iznose parametra a te amplitudna karakteristika aditivne težine neizvjesnosti $W(s)$.

Korištenjem aditivno modelirane neizvjesnosti, uvjet robusne stabilnosti 3-9 se mijenja u:

$$|W(j\omega)| < \frac{1}{|H(j\omega)S(j\omega)|}, \quad (3-26)$$

gdje je: $H(s)$ prijenosna funkcija povratne veze (kod nas je $H(s) = 1$) i $S(s) = \frac{1}{1+G_o(s)} = 1 - T(s)$ osjetljivost sustava.

Odredimo prvo $S(s)$ iz 3-13

$$S(s) = 1 - T(s) = \frac{s^2 + s + 0.5}{s^2 + s + 0.3}. \quad (3-27)$$

Definiramo aditivno osiguranje stabilnosti (eng. *Additive Stability Margin*, ASM) kao:

$$\text{ASM} = \frac{1}{\sup_{\omega} |H(j\omega)S(j\omega)|}. \quad (3-28)$$

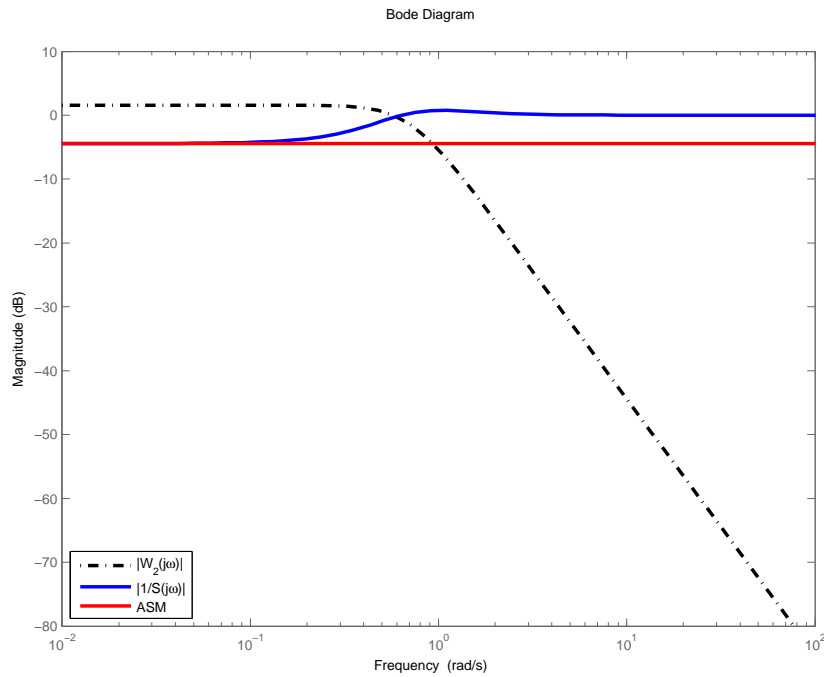
Maksimum od $|S(j\omega)|$ je:

$$\sup_{\omega} |S(j\omega)| = |S(j0)| = \frac{5}{3}. \quad (3-29)$$

Stoga je ASM:

$$\begin{aligned} \text{ASM} &= \frac{3}{5}, \\ \text{ASM}_{dB} &= 20 \log \text{ASM} \approx -4.43697. \end{aligned} \quad (3-30)$$

Provjera uvjeta robusne stabilnosti 3-26 napravljena je grafički na slici 3.13. Vidimo da uvjet nije zadovoljen na nižim frekvencijama, gdje je $|W(j\omega)|$ iznad $\frac{1}{|S(j\omega)|}$.



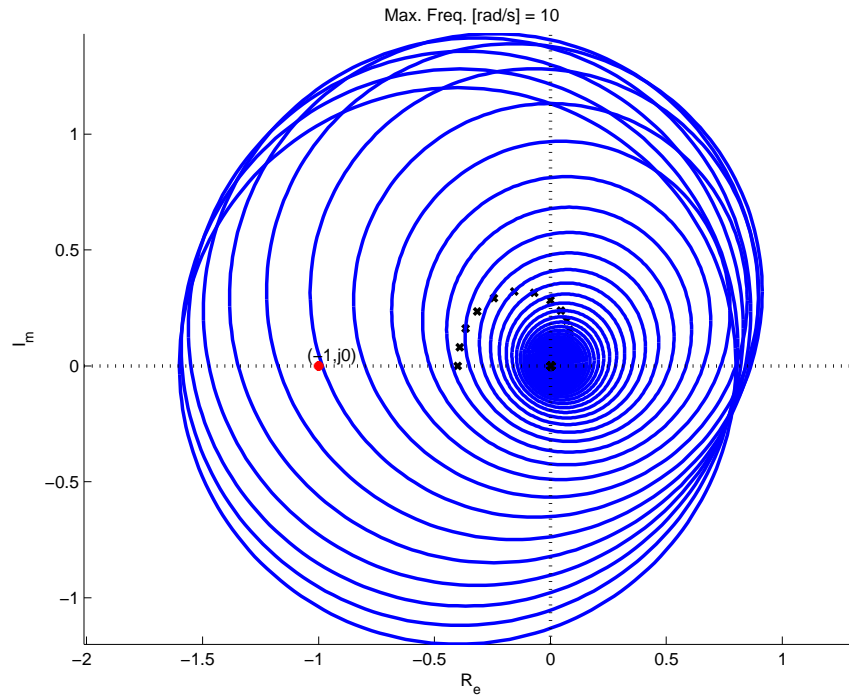
Slika 3.13: Grafička provjera uvjeta robusne stabilnosti 3-26.

Slično kao i za multiplikativni model neizvjesnosti, uvjet robusne stabilnosti za aditivni model neizvjesnosti moguće je grafički interpretirati pomoću diska. Naime, iz 3-26 slijedi (uz $H(s) = 1$):

$$|W(j\omega)| < |1 + G_o(j\omega)|; \forall \omega. \quad (3-31)$$

Dakle, uvjet robusne stabilnost s aditivnim modelom neizvjesnosti traži da za svaku frekvenciju ω kritična točka $(-1, j0)$ bude izvan kružnice sa središtem u $G_o(j\omega)$ i radijusom $|W(j\omega)|$. Navedena grafička interpretacija prikazana je na slici. Vidimo da je kritična točka (označeno crvenom točkom) unutar krugova za niske frekvencije pa sustav nije robusno stabilan.

Nedostatak aditivno modelirane neizvjesnosti leži u tome što pogreška u $G_n(s)$ ne predstavlja pogrešku u $G_o(s)$. Naime, $[G_n(s) + \Delta_a(s)] K(s) \neq G_n(s)K(s) + \Delta_a(s)$



Slika 3.14: Grafička interpretacija uvjeta robusne stabilnosti 3-26.

pa je teško odrediti učinak aditivne neizvjesnosti $\Delta_a(s)$ na $G_n(s)K(s)$. Zato nije moguće jednostavno odrediti kompenzator $K(s)$ kojim će se sustav robusno stabilizirati, kao što je to bio slučaj kod korištenja multiplikativne neizvjesnosti. Naime, multiplikativna neizvjesnost nema taj nedostatak budući da je multiplikativna neizvjesnost na $G_n(s)$ ujedno i multiplikativna neizvjesnost na $G_n(s)K(s)$.

3.3 Analiza stabilnosti korištenjem pristupa Karitonova

Kod analize stabilnosti nekog sustava automatskog upravljanja, vrlo važan je karakteristični polinom zatvorenog kruga $\alpha_{cl}(s)$ - nazivnik funkcije prijenosa zatvorenog kruga $G_{cl}(s)$. Za potrebe robusne analize stabilnosti, ovaj polinom neće imati samo jedan argument (kompleksna varijabla s) već dva argumenta kako slijedi: $\alpha_{cl}(s, \mathbf{q})$. Sa \mathbf{q} se označava *vektor neizvjesnih realnih koeficijenata* karakterističnog polinoma $\alpha_{cl}(s)$.

Definicija 2. (*Skup ograničenja neizvjesnosti*)

Skup ograničenja neizvjesnosti Q je skup:

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l \mid q_i \in \mathbb{R} \text{ za } i = 1, 2, \dots, l\} \quad (3-32)$$

Definicija 3. (*Nezavisna struktura neizvjesnosti*)

Za neizvjestan polinom:

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i \quad (3-33)$$

se kaže da ima nezavisnu strukturu neizvjesnosti ako svaka komponenta q_i vektora \mathbf{q} ulazi u samo jedan koeficijent.

Definicija 4. (*Intervalska familija polinoma*)

Za familiju polinoma:

$$\mathcal{P}(s, Q) = \left\{ p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i \mid \mathbf{q} \in Q \right\} \quad (3-34)$$

kažemo da je intervalska familija polinoma (eng. Interval polynomial family) ako neizvjesni polinom $p(s, \mathbf{q})$ ima nezavisnu strukturu neizvjesnosti, svaki njegov koeficijent ovisi kontinuirano o vektoru \mathbf{q} i ako je skup njegovih ograničenja neizvjesnosti Q tipa n - dimenzijskog kvadra (eng. Box of uncertainty), tj.

$$Q = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^l \mid q_i^- < q_i < q_i^+ \text{ za } i = 1, 2, \dots, l\}, \quad (3-35)$$

gdje su q_i^- i q_i^+ donja i gornja granica za svaki pojedini element iz vektora \mathbf{q} .

Pitanje na koje treba odgovoriti je: jesu li svi korijeni karakterističnog polinoma zatvorenog kruga $\alpha_{cl}(s, \mathbf{q})$ striktno u lijevoj poluravnini kompleksne s - ravnine za sve kombinacije iznosa koeficijenata a_i unutar dozvoljenih granica njihovih promjena? Ako je odgovor potvrđan, onda je familija sustava opisanih sa $\alpha_{cl}(s, \mathbf{q})$ robusno stabilna.

Klasični kriteriji stabilnosti (npr. Routhov kriterij) daje odgovor o stabilnosti $\alpha_{cl}(s)$ s konstantnim koeficijentima. Ne bi bilo praktično ručno provjeravati svaki karakteristični polinom iz familije polinoma, jer takvih polinoma ima u suštini beskonačno. Srećom, postoje relativno jednostavni testovi robusne stabilnosti za sustave s neizvjesnim parametrima. Jedan od takvih testova se temelji na teoremu Karitonova i on će biti obrađen u nastavku. Teorem Karitonova primijenjiv je za intervalske strukture neizvjesnosti (kvadar), a područje stabilnosti je u lijevoj poluravnini s .

Definicija 5. (*Polinomi V. L. Karitonova*)

Za intervalsku familiju polinoma 3-34 definiramo četiri fiksna polinoma \mathcal{K} (polinomi Karitonova):

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1(s) &= a_0^- + a_1^- s + a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^- s^4 + \dots \\ \mathcal{K}_2(s) &= a_0^+ + a_1^+ s + a_2^- s^2 + a_3^- s^3 + a_4^+ s^4 + \dots \\ \mathcal{K}_3(s) &= a_0^+ + a_1^- s + a_2^- s^2 + a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4 + \dots \\ \mathcal{K}_4(s) &= a_0^- + a_1^+ s + a_2^+ s^2 + a_3^- s^3 + a_4^- s^4 + \dots\end{aligned}\tag{3-36}$$

Koeficijenti ovih polinoma ovise samo o donjim i gornjim granicama odgovarajućih koeficijenata iz familije polinoma pa njih možemo odrediti unaprijed.

Teorem 2. (*Teorem Karitonova*)

Intervalska familija polinoma n – tog reda opisana sa 3-34 je robusno stabilna ako i samo ako svaki od četiriju polinoma V. L. Karitonova 3-36 jest stabilan, tj. ako svi korijeni tih polinoma leže u lijevoj poluravnini kompleksne s – ravnine.

Prema tome, robusna stabilnost intervalske familije polinoma može se odrediti sljedećim jednostavnim testom:

- (1) formiraju se četiri polinoma \mathcal{K}_1 , \mathcal{K}_2 , \mathcal{K}_3 i \mathcal{K}_4 ,
- (2) provede se njihova faktorizacija,
- (3) ispitaaju se njihovi korijeni.

Ako su svi korijeni u lijevoj poluravnini, tada je familija robusno stabilna. Ako je bilo koji od korijena na imaginarnoj ($j\omega$) osi ili u desnoj poluravnini, familija nije robusno stabilna.

Zgodno je za primijetiti da će polinomi \mathcal{K} tvoriti četiri vrha pravokutnika čiji su bridovi paralelni s realnom i imaginarnom osi, kada se računaju u točki na imaginarnoj osi:

1. $\mathcal{K}_1(j\omega)$ je donji lijevi vrh,
2. $\mathcal{K}_2(j\omega)$ je gornji desni vrh,
3. $\mathcal{K}_3(j\omega)$ je donji desni vrh,
4. $\mathcal{K}_4(j\omega)$ je gornji lijevi vrh.

Ovaj pravokutnik predstavlja skup iznosa za familiju polinoma na određenoj frekvenciji.

3.3.1 Opis zadanog procesa i problema

Zatvoreni krug automatskog upravljanja opisan je karakterističnim polinomom:

$$\alpha_{cl}(s) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0.\tag{3-37}$$

U tablici 3.2 su zadane nominalne vrijednosti koeficijenata tog polinoma i dva postotka (p_1 i p_2) koji opisuju odstupanje koeficijenata polinoma 3-37 od svojih nominalnih vrijednosti, s gornjom i donjom granicom odstupanja kako slijedi:

$$\left. \begin{aligned} a_i^- &= (1 - \frac{p}{100})a_i \\ a_i^+ &= (1 + \frac{p}{100})a_i \end{aligned} \right\} a_i \in [a_i^-, a_i^+].\tag{3-38}$$

Tablica 3.2: Nominalni iznosi koeficijenata polinoma $\alpha_{cl}(s)$ i postotci promjene.

a_3	a_2	a_1	a_0	$p_1[\%]$	$p_2[\%]$
6	12	8	14	10	50

Time je opisana intervalska familija polinoma $\mathcal{A}(s, Q)$ 3-39.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(s, Q) &= \{ \alpha_{cl}(s, a) = s^4 + \sum_{i=0}^3 a_i s^i \mid Q \} \\ Q &= \{ a_3 \in [a_3^-, a_3^+], a_2 \in [a_2^-, a_2^+], a_1 \in [a_1^-, a_1^+], a_0 \in [a_0^-, a_0^+] \} \end{aligned} \quad (3-39)$$

Za zadanu intervalsku familiju polinoma, potrebno je korištenjem teorema Karitonova (Teorem 2) analizirati robusnu stabilnost.

3.3.2 Određivanje polinoma Karitonova uz zadani postotak promjene parametara

Korištenjem definicije 5 lako određujemo polinome Karitonova. Prvo je potrebno odrediti intervale promjena za svaki pojedini koeficijent zadanog karakterističnog polinoma zatvorenog kruga 3-37. To radimo pomoću Matlab funkcije 1. Za $p_1 = 10\%$ dobivamo sljedeće intervale:

- $a_0 \in [12.6, 15.4]$,
- $a_1 \in [7.2, 8.8]$,
- $a_2 \in [10.8, 13.2]$,
- $a_3 \in [5.4, 6.6]$,

Matlab kod 1: genQ.m - funkcija za određivanje intervala promjene koeficijenata karakt. polinoma

```

1 function Q=genQ(a, p)
2 % Funkcija određuje intervale promjena za svaki koeficijent iz a.
3 %
4 % ulazi:
5 %       - a - vektor nominalnih vrijednosti
6 %       - p - postotak promjene (koeficijenti se mijenjaju
7 %         u intervalu +-p%)
8 %
9 % izlazi:
10 %      - Q - matrica dimenzija (2 x n). Svaki redak ima dva
11 %        elementa - odgovarajući a.min i a.max.
12
13 Q=[];
14 for i=1:length(a)
15     Q=[Q; (1-p/100)*a(i) (1+p/100)*a(i)];
16 end

```

Sada možemo odrediti polinome Karitonova pomoću funkcije 2.

Matlab kod 2: genK.m - funkcija za određivanje polinoma Karitonovaa

```

1 function K=genK(Q)
2 % Funkcija određuje 4 polinoma Karitonova.
3 %
4 % ulazi:
5 %      - Q - matrica dimenzija (2 x n). Svaki redak ima dva
6 %      elementa - odgovarajući a.min i a.max.
7 %
8 % izlazi:
9 %      - K - matrica dimenzija (4 x n+1) gdje svaki redak
10 %      sadržava koeficijente odgovarajućeg polinoma
11 %      Karitonova. Koeficijent uz vodeću potenciju je
12 %      uvijek 1 (tako je zadano u zadatku).
13 index=[1 1 2 2;2 2 1 1;2 1 1 2;1 2 2 1];
14 K=zeros(4,size(Q,1)+1);
15 for i1=1:size(Q,1)
16     for i2=1:4
17         tmp=mod(i1,4);
18         if tmp, i_tmp=tmp; else i_tmp=4; end
19         K(i2,i1)=Q(i1,index(i2,i_tmp));
20     end
21 end
22 K(:,end)=ones(4,1);
23 K=fliplr(K);

```

Time su dobiveni traženi polinomi:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_1 &= s^4 + 6.6 s^3 + 13.2 s^2 + 7.2 s + 12.6 \\
 \mathcal{K}_2 &= s^4 + 5.4 s^3 + 10.8 s^2 + 8.8 s + 15.4 \\
 \mathcal{K}_3 &= s^4 + 6.6 s^3 + 10.8 s^2 + 7.2 s + 15.4 \\
 \mathcal{K}_4 &= s^4 + 5.4 s^3 + 13.2 s^2 + 8.8 s + 12.6
 \end{aligned} \tag{3-40}$$

3.3.3 Primjena teorema Karitonova na analizu robusne stabilnosti

Prema teoremu Karitonova (Teorem 2), svi polinomi 3-40 moraju biti stabilni. Koristit ćemo Routhov kriterij stabilnosti na polinomima 3-40 (radi jednostavnosti koristimo priloženu m-funkciju *routh.m*, dodatak A, Matlab kod 16). Prema tom kriteriju, da bi polinom bio stabilan, prvi stupac Routhove tablice mora biti pozitivan. U nastavku su navedene Routhove tablice za svaki razmatrani Karitonov polinom.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{66}{5} & \frac{63}{5} \\ \frac{33}{5} & \frac{36}{5} & 0 \\ \frac{666}{55} & \frac{63}{5} & 0 \\ \frac{123}{370} & 0 & 0 \\ \frac{63}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-41}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{54}{5} & \frac{77}{5} \\ \frac{27}{5} & \frac{44}{5} & 0 \\ \frac{1238}{135} & \frac{77}{5} & 0 \\ -\frac{1661}{6190} & 0 & 0 \\ \frac{77}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3-42}$$

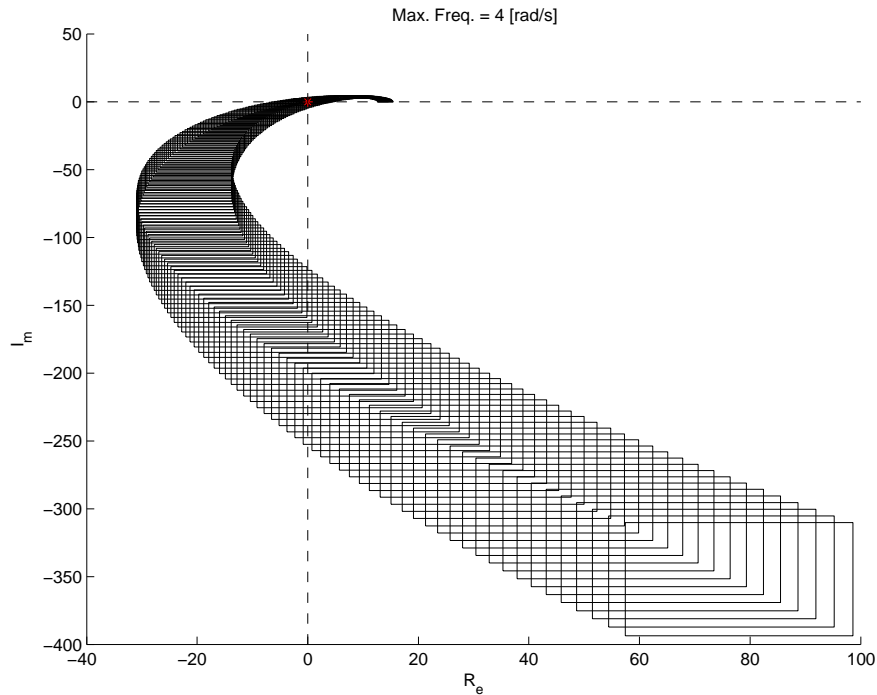
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{54}{5} & \frac{77}{5} \\ \frac{33}{5} & \frac{36}{5} & 0 \\ \frac{534}{55} & \frac{77}{5} & 0 \\ -\frac{2909}{890} & 0 & 0 \\ \frac{77}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-43)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{66}{5} & \frac{63}{5} \\ \frac{27}{5} & \frac{44}{5} & 0 \\ \frac{1562}{135} & \frac{63}{5} & 0 \\ \frac{22801}{7810} & 0 & 0 \\ \frac{63}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3-44)$$

Uvidom u Routhove tablice 3-41 – 3-44 uočavamo da polinomi \mathcal{K}_2 i \mathcal{K}_3 nisu stabilni. Stoga, po teoremu Karitonova slijedi da razmatrana intervalska familija karakterističnih polinoma nije robusno stabilna!

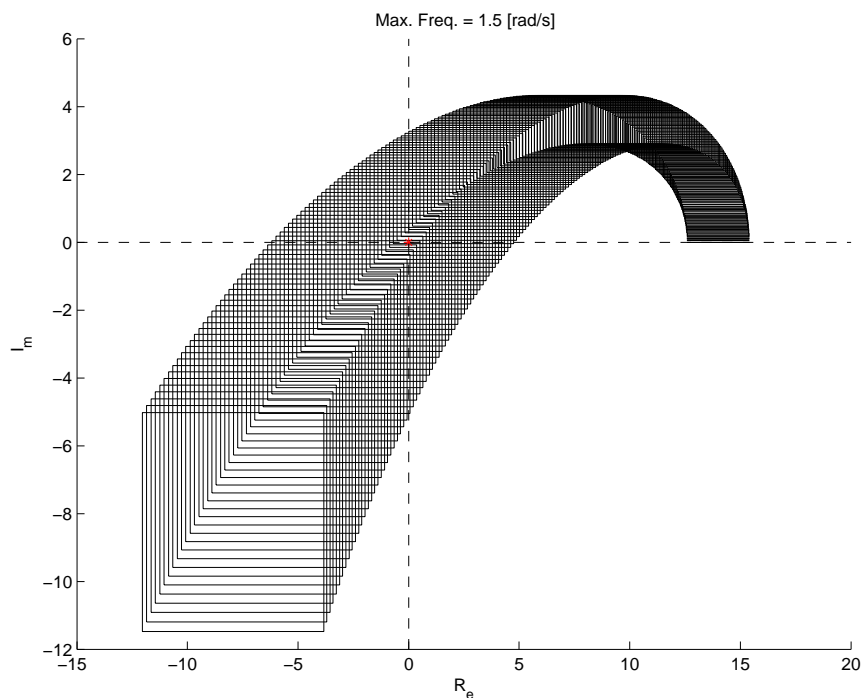
3.3.4 Skupovi iznosa za familiju polinoma 3-39

Kao što je već rečeno, polinomi \mathcal{K} izračunati na imaginarnoj ($j\omega$) osi čine vrhove pravokutnika čiji su bridovi paralelni s realnom i imaginarnom osi, a taj pravokutnik predstavlja skup iznosa za familiju polinoma na određenoj frekvenciji ω . Kako je zadana familija polinoma četvrtog reda, skupovi iznosa moraju prolaziti kroz četiri kvadranta kompleksne ravnine u smjeru obrnutom od kazaljke na satu. Ako je familija robusno stabilna niti jedan od skupova neće zahvatiti ishodište koordinatnog sustava (načelo isključenja nule).



Slika 3.15: Skupovi iznosa za promjene parametara od $\pm 10\%$.

Skupovi iznosa za promjene parametara od $\pm 10\%$ dani su na slici 3.15. Izračuni i crtanje je obavljeno u Matlabu, a maksimalna frekvencija do koje se računalo je navedena iznad slike. Na slici 3.16 prikazan je detalj slike 3.15 oko ishodišta. Analizom grafičkog prikaza može se zaključiti sljedeće:



Slika 3.16: Skupovi iznosa za promjene parametara od $\pm 10\%$ - detaljniji prikaz oko ishodišta.

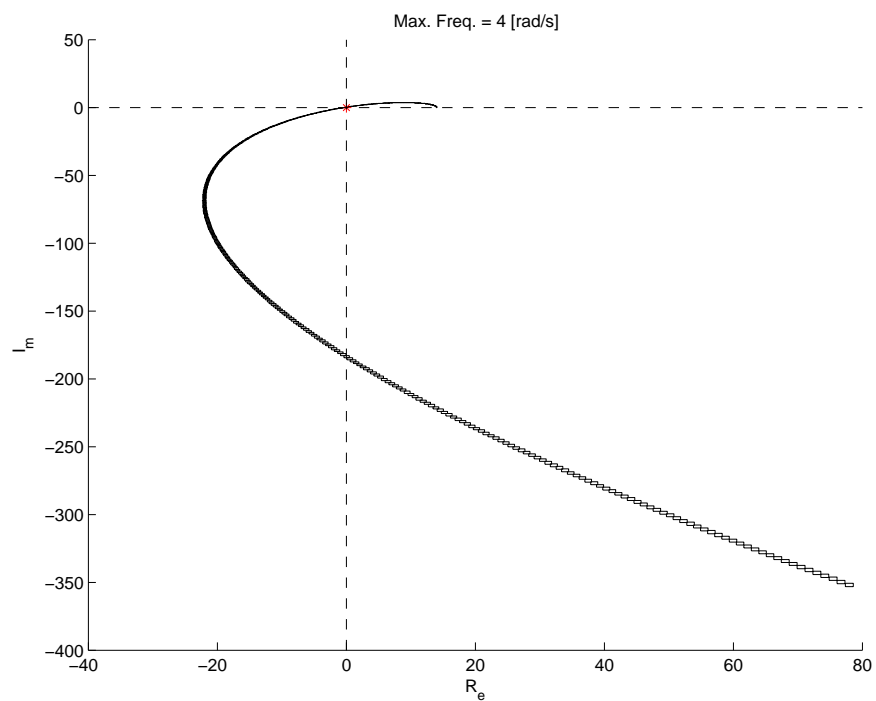
- Skupovi iznosa gibaju se u smjeru suprotno od kazaljke na satu.
- Pri tome, skupovi iznosa ne prolaze redom od prvog kroz drugi i treći do četvrtog kvadranta, kako bi trebali.
- Posljedica toga je da skupovi iznosa zahvaćaju kritičnu točku $(0, j0)$ (ishodište) pa se može zaključiti da razmatrana intervalska familija karakterističnih polinoma nije robusno stabilna.

U nekoliko simulacija određena je gornja granica za iznos postotka promjene parametara uz koju će promatrana familija karakterističnih polinoma biti robusno stabilna. Ta granica iznosi (zaokruženo) $\pm 0.5\%$.

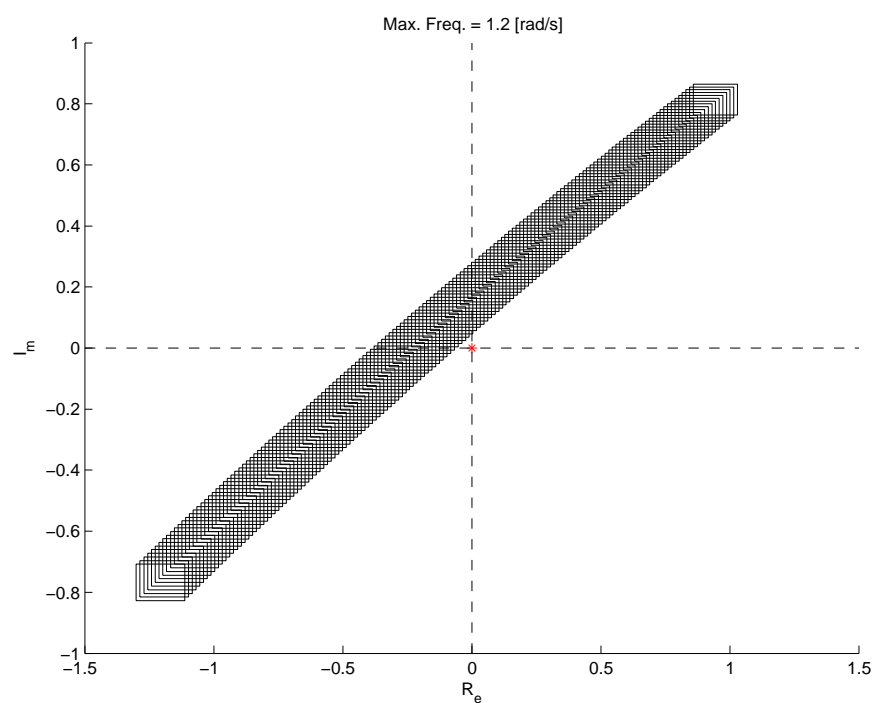
Ako smanjimo maksimalan postotak promjene ispod te granice, familija bi trebala biti robusno stabilna. Uzmimo da se događaju maksimalne promjene parametara od $\pm 0.3\%$.

Na slikama 3.17 i 3.18 prikazani su skupovi iznosa za ovaj slučaj. Na detaljnijem prikazu oko ishodišta vidimo da skupovi iznosa uistinu prolaze redom od prvog, preko drugog i trećeg pa do četvrtog kvadranta i pri tome ne dodiruju ishodište pa je familija robusno stabilna.

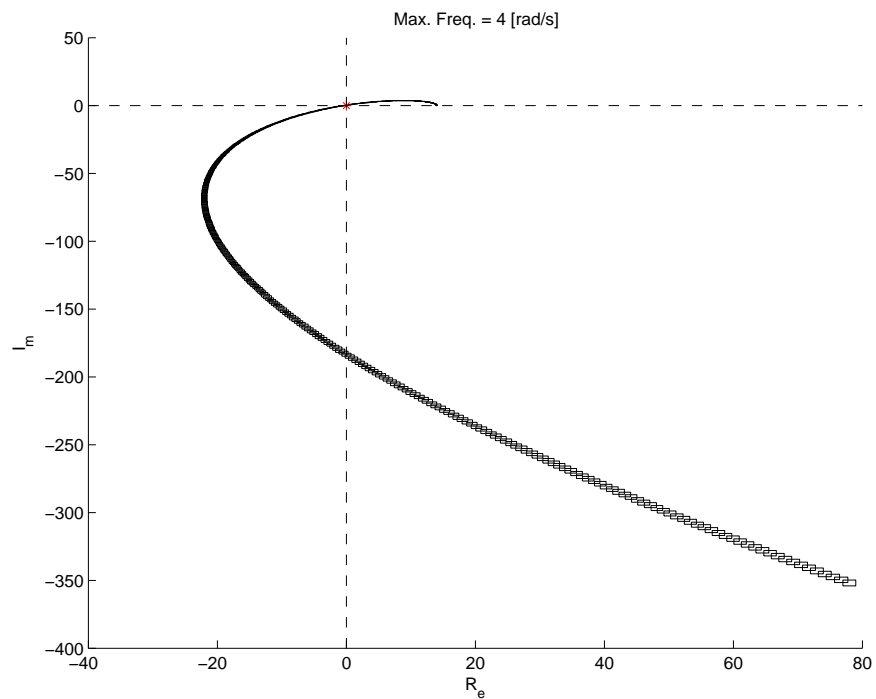
Na slikama 3.19 i 3.20 prikazani su skupovi iznosa za granični slučaj $p = \pm 0.5\%$. Ishodište je obuhvaćeno skupovima iznosa pa familija nije robusno stabilna. Iz ovoga je jasno da će i za sve veće iznose postotka promjene koeficijenata karakterističnog polinoma familija biti robusno nestabilna.



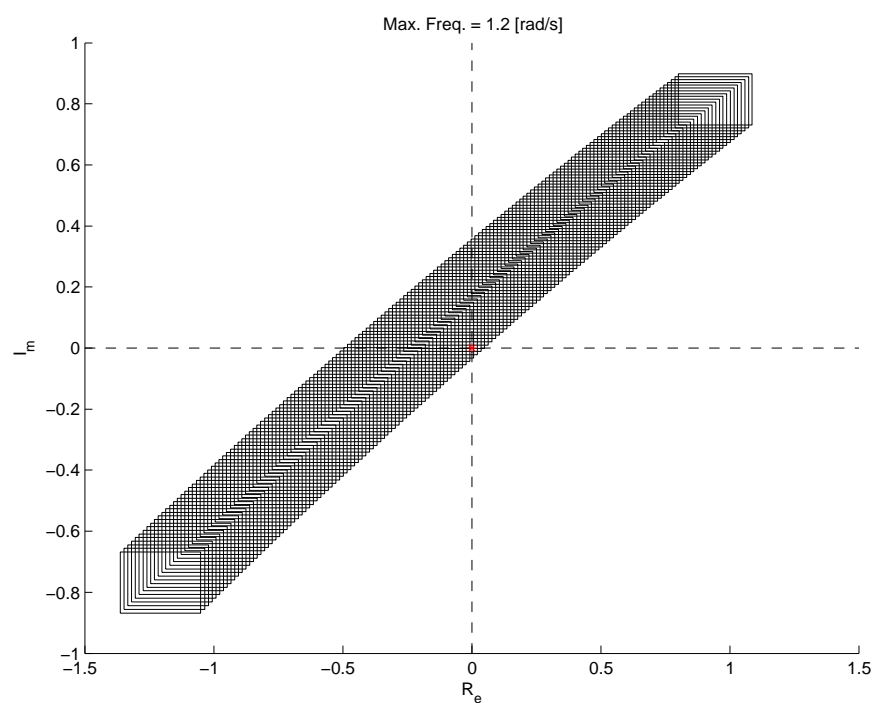
Slika 3.17: Skupovi iznosa za promjene parametara od $\pm 0.3\%$.



Slika 3.18: Skupovi iznosa za promjene parametara od $\pm 0.3\%$ - detaljniji prikaz oko ishodišta.



Slika 3.19: Skupovi iznosa za promjene parametara od $\pm 0.5\%$.



Slika 3.20: Skupovi iznosa za promjene parametara od $\pm 0.5\%$ - detaljniji prikaz oko ishodišta.

3.3.5 Analiza robusne stabilnosti uz veći postotak promjene koeficijenta karakt. polinoma

U prethodnom poglavlju pokazano je da će za sve iznose postotka promjene koeficijenta karakt. polinoma veće od $p = 0.5\%$ od nominalnih iznosa, familija karakterističnih polinoma biti nestabilna (skupovi iznosa će obuhvaćati ishodište). Tako odmah možemo reći da će familija biti robusno nestabilna i za drugi zadani postotak $p_2 = 50\%$. Ipak, u ovom poglavlju ćemo ukratko navesti sve međurezultate u analizi i za taj drugi slučaj, jer se to traži u zadatku.

Polinomi Karitonova

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_1 &= s^4 + 9.0 s^3 + 18.0 s^2 + 4.0 s + 7.0 \\ \mathcal{K}_2 &= s^4 + 3.0 s^3 + 6.0 s^2 + 12.0 s + 21.0 \\ \mathcal{K}_3 &= s^4 + 9.0 s^3 + 6.0 s^2 + 4.0 s + 21.0 \\ \mathcal{K}_4 &= s^4 + 3.0 s^3 + 18.0 s^2 + 12.0 s + 7.0\end{aligned}\tag{3-45}$$

Primjena teorema Karitonova na analizu robusne stabilnosti

Routhove tablice za Karitonove polinome:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 7 \\ 9 & 4 & 0 \\ \frac{158}{9} & 7 & 0 \\ \frac{65}{158} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{3-46}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 3 & 12 & 0 \\ 2 & 21 & 0 \\ -\frac{39}{2} & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{3-47}$$

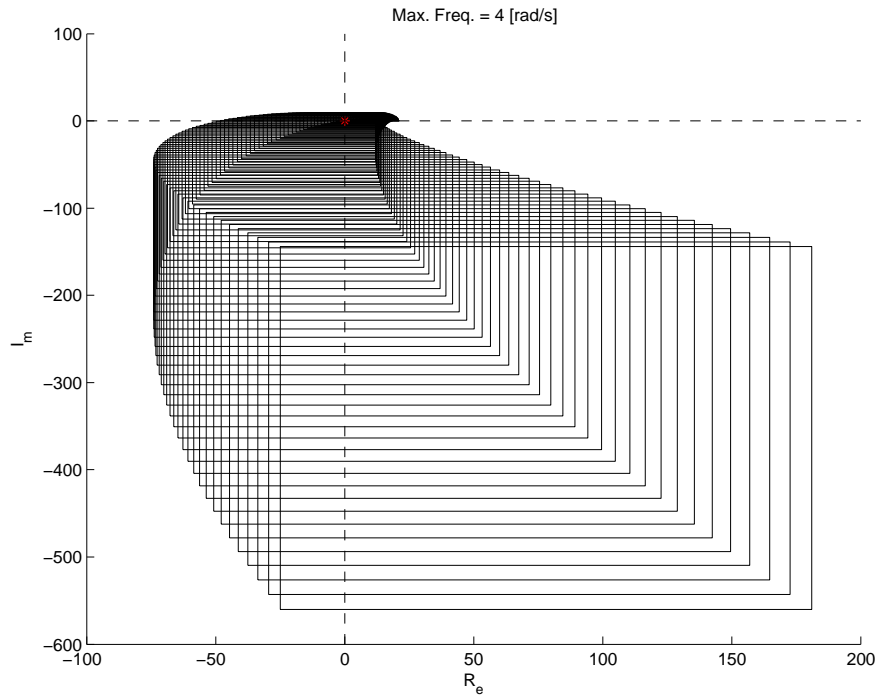
$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 21 \\ 9 & 4 & 0 \\ \frac{50}{9} & 21 & 0 \\ -\frac{1501}{50} & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{3-48}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 18 & 7 \\ 3 & 12 & 0 \\ 14 & 7 & 0 \\ \frac{21}{2} & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{3-49}$$

Kako prvi stupci u Routhovim tablica 3-47 i 3-48 imaju negativne elemente, prema Karitonovom teoremu familija karakterističnih polinoma nije robusno stabilna!

Skupovi iznosa za familiju polinoma

Grafičkim prikazom skupova iznosa za familiju polinoma 3-39 uz postotak promjene koeficijenta polinoma od $\pm 50\%$ možemo potvrditi da razmatrana familija polinoma nije robusno stabilna, jer skupovi iznosa obuhvaćaju ishodište.



Slika 3.21: Skupovi iznosa za promjene parametara od $\pm 50\%$.

3.3.6 Primjenjivost teorema Karitonova u slučaju da se parametar uz najveću potenciju mijenja u rasponu $\pm 100\%$

Analiza robusne stabilnosti opisana u prethodnim poglavljima temelji se na *konceptu nepromjenjivosti reda* zatvorenog kruga upravljanja - svi karakteristični polinomi u familiji polinoma moraju biti n -tog reda. U slučaju da se parametar uz najveću potenciju mijenja u rasponu $\pm 100\%$, ova pretpostavka bi bila narušena (za neke kombinacije parametara bi red sustava bio četvrtog, a za neke trećeg reda) pa analizu robusne stabilnosti pomoću teorema Karitonova u tom slučaju nije moguće koristiti.

3.4 Zaključak

Pri projektiranju bilo kojeg sustava automatskog upravljanja nužno je na neki način provjeriti stabilnost samog sustava ovisno o promjenama parametara tog sustava, jer nijedan matematički model pomoću kojega se sustav projektira nije u stanju savršeno dobro opisati dinamiku stvarnog sustava. Do razlika između matematičkog modela i stvarnog procesa dolazi zbog našeg nedostatnog znanja o dinamici stvarnog procesa, ali i zbog vremenskih promjena parametara stvarnog procesa uslijed raznih čimbenika (starenje komponenata, kvarovi, postojanje parametara koji su inherentno vremenski promjenjivi i sl.). Sve to rezultira određenom neizvjesnošću modela koju moramo uzeti u obzir kod projektiranja regulatora. Glavni cilj teorije robusnog upravljanja je sinteza robusnog regulatora koji će biti u stanju interno stabilizirati čitavu familiju procesa određenu nominalnim matematičkim modelom i modelom neizvjesnosti te postići željene performanse u radu.

Teorem malog pojačanja i teorem Karitonova, koji su bili obrađeni u ovom seminaru, daju nam neophodan alat za analizu robusne stabilnosti sustava, što je nužan korak koji treba provesti prije nego što se projektirani regulator pusti u rad na pravom sustavu. I jedan i drugi teorem rezultiraju s prilično konzervativnim uvjetima na robusnu stabilnost pa je moguće da neki sustav ne zadovolji uvjete tih

teorema, a ipak bude stabilan. No, ako su uvjeti zadovoljeni, teoremi garantiraju da su sustavi sigurno robusno stabilni. Prednost postupaka analize robusne stabilnosti pomoću ova dva teorema je njihova jednostavnost – vrlo ih je lagano grafički predočiti pa se uvjeti mogu provjeriti i eksperimentalno, bez nekog velikog i kompliciranog analitičkog izračuna. Teorem Karitonova ima prednost nad teoremom malog pojačanja u tome što omogućava analizu robusne stabilnosti za bilo koji broj promjenjivih parametara karakterističnog polinoma zatvorenog kruga, dok je teoremom malog pojačanja omogućena analiza robusne stabilnosti sustava kod kojih se obično mijenja samo jedan parametar.

Literatura

- [1] Z. Vukić, Lj. Kuljača. *Automatsko upravljanje - analiza linearnih sustava*. Kigen d.o.o., 2005.

A Matlab kodovi

Matlab kod 3: zad1params.m - skripta s parametrima za 1. zadatak

```
1 an=0.2;
2 amin=0.2; amax=0.7;
```

Matlab kod 4: zad11.m - skripta s rješenjem zadatka 1.1

```
1 clear; clc;
2
3 zadlparams
4 a=linspace(amin, amax, 10);
5 figure
6 hold on
7 for i=1:length(a)
8     bodemag(tf(a(i)/an-1), 'b')
9 end
10 W=2.6;
11 save W W
12 bodemag(tf(W), 'k-')
13 text('String', '|W.2(j\omega)|', 'Position', ...
14     [1.5857582036529 9.10714285714286 17.3205080756888])
15 annotation('arrow', [0.389285714285714 0.464285714285714], ...
16     [0.852380952380952 0.835714285714286]);
17 h = findobj(gcf, 'type', 'line');
18 set(h, 'linewidth', 2);
19 print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad11.eps')
```

Matlab kod 5: zad12.m - skripta s rješenjem zadatka 1.2

```
1 clear; clc;
2 zadlparams
3 s=tf('s');
4
5 T=-an/(s^2+s+0.5-an);
6 load W
7 figure, hold on
8 bodemag(tf(W), 'k-')
9 bodemag(1/T, 'b')
10 legend('|W.2(j\omega)|', '|1/T(j\omega)|', 'Location', 'NorthWest')
11 h = findobj(gcf, 'type', 'line');
12 set(h, 'linewidth', 2);
13 print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad12.eps')
```

Matlab kod 6: zad13.m - skripta s rješenjem zadatka 1.3

```
1 clear; clc;
2 zadlparams
3 syms w
4 s=tf('s');
5 T=-an/(s^2+s+0.5-an);
6 A=an/sqrt((0.5-an-w^2)^2+w^2);
7 MSM=1/subs(A, 0);
8 figure, hold on
```

```

9 bodemag(1/T, 'b')
10 bodemag(tf(MSM), 'r')
11 legend('|1/T(j\omega)|', 'MSM', 'Location', 'NorthWest')
12 h = findobj(gcf, 'type', 'line');
13 set(h, 'linewidth', 2);
14 print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad13.eps')

```

Matlab kod 7: zad14.m - skripta s rješenjem zadatka 1.4

```

1 clear; clc;
2
3 s=tf('s');
4 a=linspace(0.52,0.7,5);
5 figure, hold on, grid on
6 xlabel('t (s)'); ylabel('y(t)'); title('Odziv na step');
7
8 for i=1:length(a)
9     Go=-a(i)/(s^2+s+0.5);
10    Gcl=minreal(Go/(1+Go));
11    [y,t]=step(Gcl,150);
12    plot(t,y, 'Color', rand(1,3))
13 end
14 str=['''a=' mat2str(a(1)) '''];
15 for i=2:length(a)
16     str=[str ', ''a=' mat2str(a(i)) '''];
17 end
18 eval(['legend(' str ', ''Location'', ''SouthEast'');'])
19 h = findobj(gcf, 'type', 'line');
20 set(h, 'linewidth', 2);
21 axis([xlim -200 0])
22 % if max(a)<0.5
23 %     ...
24 %     print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad14stabilno.eps')
25 % elseif max(a)==0.5
26 %     print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad14narubu.eps')
27 % else
28 %     ...
29 %     print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad14nestabilno.eps')
30 % end

```

Matlab kod 8: zad16.m - skripta s rješenjem zadatka 1.6

```

1 clear; clc;
2 zadlparams
3 load W
4 figure, hold on, axis equal
5
6 for w=linspace(0,10,100)
7     absGo=an/sqrt((0.5-w^2)^2+w^2);
8     Go=-an/(0.5-w^2+1j*w);
9     [cx,cy,-]=cylinder(W*absGo,200);
10    cx=cx(1,:); cy=cy(1,:);
11    cx=cx+real(Go);
12    cy=cy+imag(Go);
13    plot(cx,cy)
14    plot(real(Go),imag(Go), 'kx')
15 end
16 text(-1.1,0.1, '(-1,j0)')

```

```

17 plot(xlim,[0 0], 'k:')
18 plot([0 0], ylim, 'k:')
19 plot(-1,0, 'r*')
20 xlabel('R_e'); ylabel('I_m');
21 title('Max. Freq. [rad/s] = 10')
22 h = findobj(gcf, 'type', 'line');
23 set(h, 'linewidth', 2);
24 print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad16.eps')

```

Matlab kod 9: zad17.m - skripta s rješenjem zadatka 1.7

```

1 clear; clc;
2 zadlparams
3 s=tf('s');
4 a=linspace(amin,amax,10);
5 figure, hold on
6 for i=1:length(a)
7     bodemag((an-a(i))/(s^2+s+0.5), 'b')
8 end
9 Wn=0.6;
10 bodemag(Wn/(s^2+s+0.5), 'k-.')
11 text('String', '|W_2(j\omega)|', 'Position', ...
12     [2.42039504915012 4.53416149068325 17.3205080756888]);
13 annotation('arrow', [0.619642857142857 0.571428571428571], ...
14     [0.751380952380952 0.678571428571429]);
15 h = findobj(gcf, 'type', 'line');
16 set(h, 'linewidth', 2);
17 print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad171.eps')
18
19 syms w
20 T=-an/(s^2+s+0.5-an);
21 S=1-T;
22 A=sqrt((0.5-w^2)^2+w^2)/sqrt((0.5-an-w^2)^2+w^2);
23 ASM=1/subs(A, 0);
24
25 figure, hold on
26 bodemag(Wn/(s^2+s+0.5), 'k-.')
27 bodemag(1/(1-T), 'b')
28 bodemag(tf(ASM), 'r')
29 legend('|W_2(j\omega)|', '|1/S(j\omega)|', 'ASM', 'Location', 'SouthWest')
30 h = findobj(gcf, 'type', 'line');
31 set(h, 'linewidth', 2);
32 print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad172.eps')
33
34 figure, hold on, axis equal
35 for w=linspace(0,10,100)
36     Go=-an/(0.5-w^2+1j*w);
37     W=Wn/(0.5-w^2+1j*w);
38     [cx, cy, ~]=cylinder(abs(W), 200);
39     cx=cx(1,:); cy=cy(1,:);
40     cx=cx+real(Go);
41     cy=cy+imag(Go);
42     plot(cx, cy)
43     plot(real(Go), imag(Go), 'kx')
44 end
45 plot(xlim,[0 0], 'k:')
46 plot([0 0], ylim, 'k:')
47 plot(-1,0, 'r*')
48 text(-1.05,0.05, '(-1,j0)')

```

```

49 xlabel('R_e'); ylabel('I_m');
50 title('Max. Freq. [rad/s] = 10')
51 h = findobj(gcf,'type','line');
52 set(h,'linewidth',2);
53 print(gcf,'-depsc','-r300','izvještaj/slike/zad173.eps')

```

Matlab kod 10: zad1MSMK.m - skripta s rješenjem zadatka 1 uz korištenje kompenzatora $K=0.6$

```

1 clear; clc;
2
3 zadlparams
4 K=0.6;
5 s=tf('s');
6 T=-K*an/(s^2+s+0.5-K*an);
7 load W
8
9 syms w
10 s=tf('s');
11 A=K*an/sqrt((0.5-K*an-w^2)^2+w^2);
12 MSM=1/subs(A,0);
13 figure, hold on
14 bodemag(tf(W),'k-.')
15 bodemag(1/T,'b')
16 bodemag(tf(MSM),'r')
17 legend('|W.2(j\omega)|','|1/T(j\omega)|','MSM','Location','NorthWest')
18 h = findobj(gcf,'type','line');
19 set(h,'linewidth',2);
20 print(gcf,'-depsc','-r300','izvještaj/slike/zad1MPMK1.eps')
21
22 figure, hold on, axis equal
23 for w=linspace(0,10,100)
24     absGo=K*an/sqrt((0.5-w^2)^2+w^2);
25     Go=-K*an/(0.5-w^2+1j*w);
26     [cx,cy,~]=cylinder(W*absGo,200);
27     cx=cx(1,:); cy=cy(1,:);
28     cx=cx+real(Go);
29     cy=cy+imag(Go);
30     plot(cx,cy)
31     plot(real(Go),imag(Go),'kx')
32 end
33 plot(xlim,[0 0],'k:')
34 plot([0 0],ylim,'k:')
35 plot(-1,0,'r*')
36 text(-1.05,0.05, '(-1,j0)')
37 xlabel('R_e'); ylabel('I_m');
38 title('Max. Freq. [rad/s] = 10')
39 h = findobj(gcf,'type','line');
40 set(h,'linewidth',2);
41 print(gcf,'-depsc','-r300','izvještaj/slike/zad1MPMK2.eps')
42
43 a=linspace(0.2,0.7,6);
44 figure, hold on, grid on
45 xlabel('t (s)'); ylabel('y(t)'); title('Odziv na step');
46
47 for i=1:length(a)
48     Go=-K*a(i)/(s^2+s+0.5);
49     Gcl=minreal(Go/(1+Go));
50     [y,t]=step(Gcl,150);

```

```

51     plot(t,y, 'Color', rand(1,3))
52 end
53 str=['''a=' mat2str(a(1)) '''];
54 for i=2:length(a)
55     str=[str '','a=' mat2str(a(i)) '''];
56 end
57 eval(['legend(' str ', 'Location','SouthEast');'])
58 h = findobj(gcf, 'type', 'line');
59 set(h, 'linewidth', 2);
60 %print(gcf, '-depsc', '-r300', 'izvještaj/slike/zad1MPMK3.eps')

```

Matlab kod 11: zad2params.m - skripta s parametrima za 2. zadatak

```

1 a3=6; a2=12; a1=8; a0=14;
2 p1=10; p2=50;

```

Matlab kod 12: zad21.m - skripta s rješenjem zadatka 2.1

```

1 clear; clc;
2 zad2params
3 a=[a0 a1 a2 a3];
4 Q=genQ(a,p1);
5 K=genK(Q);
6 % ispis polinoma K u LaTeX formatu za p=p1
7 for i=1:4
8     disp(['\mathcal{K}_-' mat2str(i) ' && ' ...
9         latex(vpa(poly2sym(K(i,:), 's')) '\')])
9 end

```

Matlab kod 13: zad22.m - skripta s rješenjem zadatka 2.2

```

1 clear; clc;
2
3 zad21
4 b=1;
5 for i=1:4
6     a=routh(K(i,:));
7     %latex(sym(a))
8     disp(['Prvi stupac za K' mat2str(i) ': ' mat2str(a(:,1))]);
9     disp(latex(sym(a)))
10    if(sum(a(:,1)>0)<size(a(:,1),1)), tmp=0; else tmp=1; end
11    b=b*tmp;
12 end
13
14 if(b)
15     disp('Zatvoreni krug je robusno stabilan!');
16 else
17     disp('Zatvoreni krug nije robusno stabilan!');
18 end

```

Matlab kod 14: zad23.m - skripta s rješenjem zadatka 2.3

```

1 clear; clc;
2
3 zad21

```

```

4 K1=poly2sym(K(1,:), 's');
5 K2=poly2sym(K(2,:), 's');
6 K3=poly2sym(K(3,:), 's');
7 K4=poly2sym(K(4,:), 's');
8 figure, hold on
9 wmax=1.5;
10 for w=linspace(0,wmax,200)
11     t1=subs(K1, 's', (1j*w));
12     t2=subs(K3, 's', (1j*w));
13     t3=subs(K2, 's', (1j*w));
14     t4=subs(K4, 's', (1j*w));
15     plot(real([t1 t2 t3 t4 t1]),imag([t1 t2 t3 t4 t1]), 'k')
16 end
17
18 plot(0,0, 'r*')
19 plot(xlim,[0 0], 'k—')
20 plot([0 0],ylim, 'k—')
21 xlabel('R_e'); ylabel('I_m');
22 title(['Max. Freq. = ' mat2str(wmax) ' [rad/s]']);
23
24 print(gcf, '-depsc', '-r300', ['izvještaj/slike/zad23p' ...
    mat2str(p1*10) 'wmax' mat2str(10*wmax) '.eps'])

```

Matlab kod 15: zad24.m - skripta s rješenjem zadatka 2.4

```

1 clear; clc;
2
3 zad2params
4 a=[a0 a1 a2 a3];
5 Q=genQ(a,p2);
6 K=genK(Q);
7 % ispis polinoma K u LaTeX formatu za p=p2
8 for i=1:4
9     disp(['\mathcal{K}_' mat2str(i) ' &= ' ...
        latex(vpa(poly2sym(K(i,:), 's')) '\')])
10 end
11 b=1;
12 for i=1:4
13     a=routh(K(i,:));
14     latex(sym(a))
15     disp(['Prvi stupac za K' mat2str(i) ': ' mat2str(a(:,1))]);
16     if(sum(a(:,1)>0)<size(a(:,1),1)), tmp=0; else tmp=1; end
17     b=b*tmp;
18 end
19
20 if(b)
21     disp('Zatvoreni krug je robusno stabilan!');
22 else
23     disp('Zatvoreni krug nije robusno stabilan!')
24 end
25
26 K1=poly2sym(K(1,:), 's');
27 K2=poly2sym(K(2,:), 's');
28 K3=poly2sym(K(3,:), 's');
29 K4=poly2sym(K(4,:), 's');
30 figure, hold on
31 wmax=4;
32 for w=linspace(0,wmax,100)
33     t1=subs(K1, 's', (1j*w));

```

```

34     t2=subs(K3,'s',(1j*w));
35     t3=subs(K2,'s',(1j*w));
36     t4=subs(K4,'s',(1j*w));
37     plot(real([t1 t2 t3 t4 t1]),imag([t1 t2 t3 t4 t1]),'k')
38 end
39
40 plot(0,0,'r*')
41 plot(xlim,[0 0],'k—')
42 plot([0 0],ylim,'k—')
43 xlabel('R_e'); ylabel('I_m');
44 title(['Max. Freq. = ' mat2str(wmax) ' [rad/s]']);
45 print(gcf,'-depsc','-r300',['izvještaj/slike/zad24wmax' ...
    mat2str(wmax) '.eps'])

```

Matlab kod 16: routh.m - funkcija za određivanje stabilnosti polinoma Routhovim kriterijem

```

1 function a = routh(x)
2 %ROUTH
3 %
4 %     a = routh(x);
5 %
6 %     Function to create the Routh array for a nth degree
7 %     polynomial to determine the number of roots of the polynomial
8 %     with positive real parts.
9 %
10 %     x is the polynomial to be tested
11 %     a is the Routh array for polynomial x
12 %
13 n = length(x)-1; % degree of x
14 %
15 if mod(n,2) == 0, % no. of columns in array
16     ncol=(n/2)+1;
17 else
18     ncol=(n+1)/2;
19 end
20 %
21 a = zeros(n+1,ncol); % initialize array
22 %
23 for i = 1:ncol % 1st row of array
24     a(1,i) = x(2*i-1);
25 end
26 %
27 for i = 1:ncol-1 % 2nd row of array
28     a(2,i) = x(2*i);
29 end
30 %
31 if mod(n,2) == 1,
32     a(2,ncol) = x(n+1);
33 end
34 %
35 for i = 3:n+1 % rest of the rows
36     for j = 1:ncol-1
37         a(i,j) = (a(i-1,1)*a(i-2,j+1) - a(i-1,j+1)*a(i-2,1)) / a(i-1,1);
38     end
39 end

```