

# Robusno upravljanje

---

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: [zeljko.ban@fer.hr](mailto:zeljko.ban@fer.hr)



# Sustavi s promjenjivim parametrima



- Parametri sustava automatskog upravljanja
  - Vremenske konstante
  - Pojačanja
- Promjena parametara
  - promjena karakterističnih jednadžbi, nula i polova
  - promjena stabilnosti sustava



# Sustavi s promjenjivim parametrima

---



- Analiza stabilnosti sustava
  - Određivanja područja parametara u kojem je sustav stabilan
- Sustav sa  $k$  promjenjivih parametara
  - $k$  – dimenzionalno područje stabilnosti
    - svaka točka prostora – karakteristična jednadžba s jedinstvenim parametrima



# Robusna stabilnost

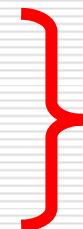
- Klasičan pristup projektiranju regulatora
  - Prepostavke
    - Točan opis realnog sustava matematičkim modelom
    - Matematički model ima konstantne parametre
  - Zadatak – projektirati regulator za postizanje
    - stabilnosti zatvorenog kruga
    - ostvariti tražene performanse zatvorenog kruga sustava
- Problem
  - Neizvjesnost u poznavanju dinamike sustava
  - Vremenska promjena parametara sustava
- Uzroci promjena
  - Promjena parametara uslijed starenja
  - Promjena uvjeta rada (radne točke nelinearnog sustava)
  - Kvar komponente
  - Iznos parametra koji eksplicitno ovisi o vremenu



# Analiza stabilnosti sustava s promjenjivim parametrima



- Krivulja mesta korjena
  - analiza promjene položaja korjena karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga sustava
  - primjena kod promjene pojačanja prijenosne funkcije otvorenog kruga (*jedan parametar*)
- D – rastavljanje
  - određivanje područja stabilnosti u prostoru parametara sustava (*ili koeficijenata karakteristične jednadžbe*)
  - *dva parametra*
- Teorem malog pojačanja
  - (*jedan parametar*)
- Polinomski pristup Karitonova
  - (*bilo koji broj parametara*)



Postupak analize  
robusne stabilosti

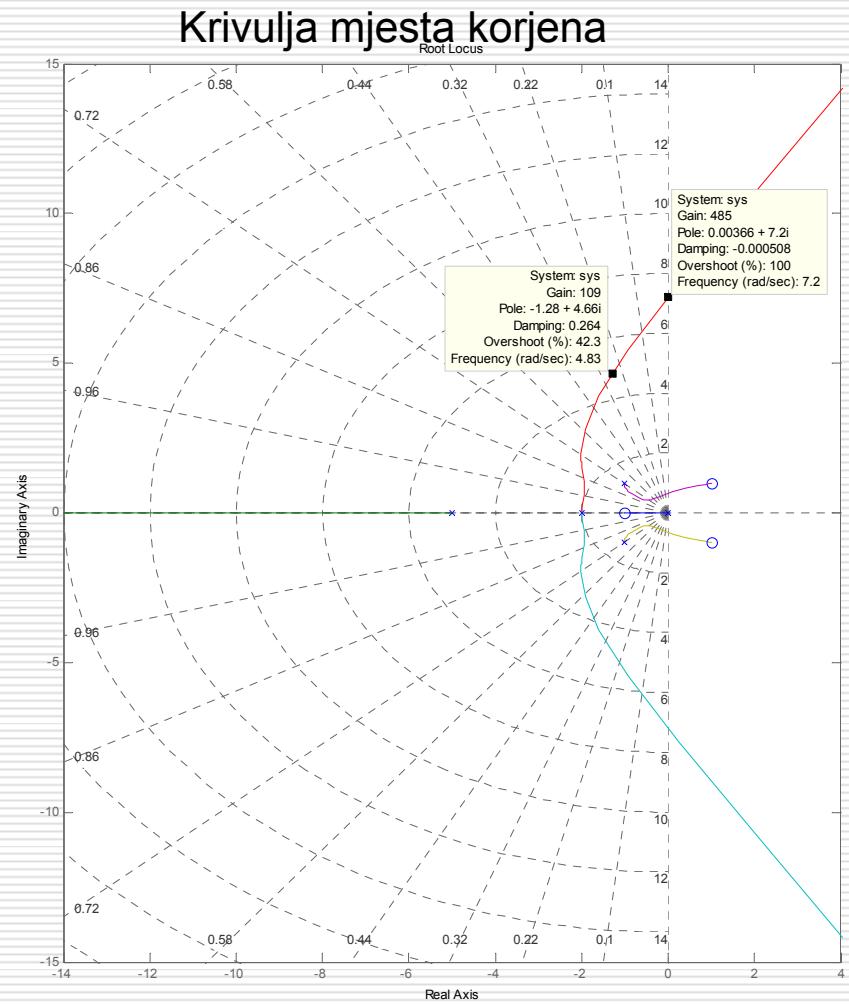
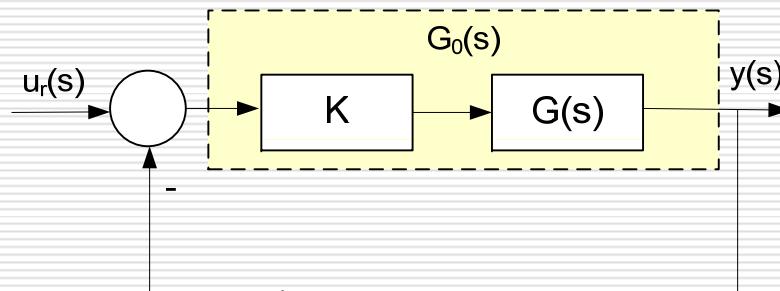
# Krivulja mjesta korjena

## Primjer

- Proces zadan prijenosnom funkcijom otvorenog kruga

$$G_0(s) = K \frac{(s+1)(s-1+j)(s-1-j)}{s(s+5)(s+2)^2(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$G_0(s) = K \frac{s^3 - s^2 + 2}{s^6 + 11s^5 + 44s^4 + 86s^3 + 88s^2 + 40s}$$





# D- rastavljanje

- Određivanje stabilnog i nestabilnog područja n-dimenzionalnog prostora parametara sustava
- Područje nestabilnog režima rada
  - korjeni karakteristične jednadžbe s pozitivnim realnim dijelom
- Područje stabilnog režima rada
  - korjeni karakteristične jednadžbe s negativnim realnim dijelom
- D-rastavljanje
  - Određivanje ruba stabilnosti pomoću krivulje Mihajlova

Kriterij stabilnosti Mihajlova

Prijenosna funkcija **zatvorenog** kruga

$$G_z(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Karakteristični polinom **zatvorenog** kruga

$$D(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i$$

$$D(j\omega) = \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i = X(\omega) + jY(\omega)$$

$$X(\omega) = a_0 - \omega^2 a_2 + \omega^4 a_4 - \omega^6 a_6 + \dots$$

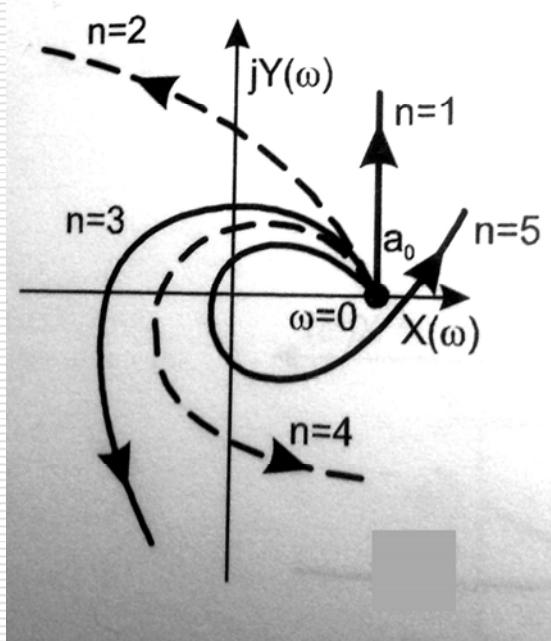
$$Y(\omega) = \omega a_1 - \omega^3 a_3 + \omega^5 a_5 - \omega^7 a_7 + \dots$$



# Kriterij Mihajlova

$$X(\omega) = a_0 - \omega^2 a_2 + \omega^4 a_4 - \omega^6 a_6 + \dots$$

$$Y(\omega) = \omega a_1 - \omega^3 a_3 + \omega^5 a_5 - \omega^7 a_7 + \dots$$



Za stabilnost sustava n-tog reda nužno je i dovoljno da frekvencijska karakteristika karakterističnog vektora zatvorenog kruga pri promjeni frekvencije  $0 < \omega < \infty$

započne na pozitivnom dijelu realne osi i da, ne prolazeći ishodištem (ne poprimi iznos 0) prođe po redu kroz n kvadrantata u pozitivnom smislu.

$$\Delta \arg[D(j\omega)] = n \frac{\pi}{2} \quad \forall \omega = 0 \text{ do } \infty$$

Rub stabilnosti

$$X(\omega) = 0$$

$$Y(\omega) = 0$$



# D- rastavljanje

Određivanje ruba stabilnosti pomoću kriterija stabilnosti Mihajlova

$$D(j\omega) = \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i = X(\omega) + jY(\omega) = 0$$

Jednadžba može biti zadovoljena uz jedan nulti realni korjen ili

par imaginarnih korjena  
*(konjugirano kompleksnih)*

Uz dva promjenjiva parametra u sustavu  $\alpha$  i  $\beta$  jednadžba ima oblik

$$D(j\omega, \alpha, \beta) = X(\omega, \alpha, \beta) + jY(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

$$X(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

$$Y(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

Uvjet ruba stabilnosti može se zapisati u parametarskom obliku:

$$\alpha = f_1(\omega),$$

$$\beta = f_2(\omega)$$

Karakteristična jednadžba – linearna ovisnost o parametrima:

$$D(j\omega, \alpha, \beta) = \alpha G(j\omega) + \beta H(j\omega) + L(j\omega) = 0$$

$$X(\omega, \alpha, \beta) = \alpha G_1(\omega) + \beta H_1(\omega) + L_1(\omega) = 0$$

$$Y(\omega, \alpha, \beta) = \alpha G_2(\omega) + \beta H_2(\omega) + L_2(\omega) = 0$$



# D- rastavljanje

karakteristična jednadžba linearno ovisna o parametrima



$$D(j\omega, \alpha, \beta) = \alpha G(j\omega) + \beta H(j\omega) + L(j\omega) = 0$$

$$X(\omega, \alpha, \beta) = \alpha G_1(\omega) + \beta H_1(\omega) + L_1(\omega) = 0$$

$$Y(\omega, \alpha, \beta) = \alpha G_2(\omega) + \beta H_2(\omega) + L_2(\omega) = 0$$

Rješenjem jednadžbi dobiju se parametri:

$$\alpha = \frac{H_1 L_2 - H_2 L_1}{G_1 H_2 - G_2 H_1} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta},$$

$$\beta = \frac{G_2 L_1 - G_1 L_2}{G_1 H_2 - G_2 H_1} = \frac{\Delta \beta}{\Delta},$$

gdje su:

$$\Delta = G_1 H_2 - G_2 H_1$$

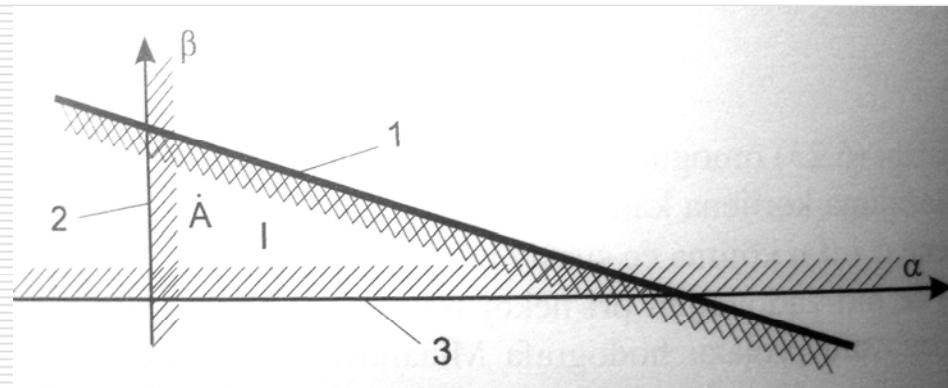
$$\Delta \alpha = H_1 L_2 - H_2 L_1$$

$$\Delta \beta = G_2 L_1 - G_1 L_2$$

Pri  $\omega=0$ ,  $\omega=\infty$ ,  $\omega=\omega_{gr}$ ,  $\alpha$  i  $\beta$  mogu poprimiti neodređeni oblik tipa  $0/0$  i  $\infty/\infty$

U tom slučaju se umjesto linearne ovisnosti dobivaju singularni pravci

Singularni pravci i linarna krivulja D dijele prostor na područja.  
**Jedno područje stabilno.**



Područje stabilnosti – područje bez ijednog korjena s realnim dijelom

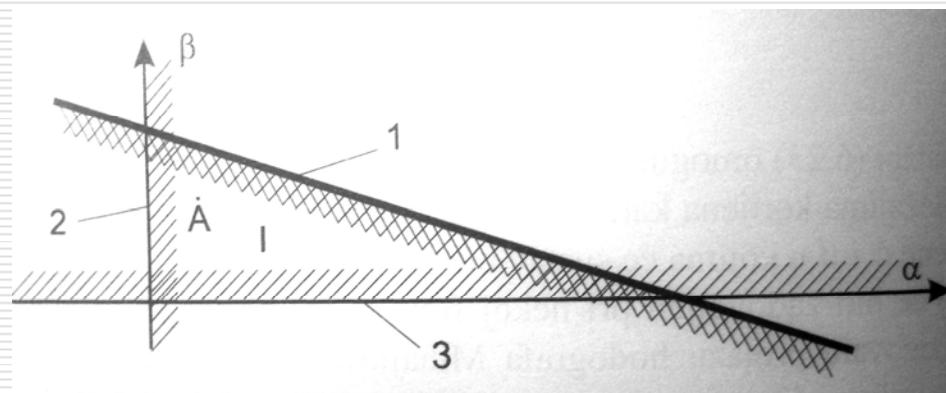


# D- rastavljanje

karakteristična jednadžba linearno ovisna o parametrima



Određivanje stabilnog područja metodom  
**šrafiranja**



$$\Delta = G_1 H_2 - G_2 H_1$$

Ako pri porastu frekvencije  
 $-\infty < \omega < 0$  i  $0 < \omega < \infty$   
bude determinanta sustava  $\Delta > 0$   
**šrafira se lijeva strana** D krivulje

Ako pri porastu frekvencije  
 $-\infty < \omega < 0$  i  $0 < \omega < \infty$   
bude determinanta sustava  $\Delta < 0$   
**šrafira se desna strana** D krivulje

U točkama  $\omega=0$  i  $\omega=\infty$   
šrafirane strane D-krivulje i singularnih  
pravaca moraju biti  
okrenute jedna prema drugoj

Provjera područja stabilnosti  
Za točku iz područja  $(\alpha, \beta)$   
određuje se stabilnost jednim od kriterija  
stabilnosti (npr. Hurwitz)

Jedna stabilna točka  
↑  
cijelo stabilno područje



# D- rastavljanje

karakteristična jednadžba **NELINEARNO** ovisna o parametrima



Postupak analogan uz  
Nelinearan sustav jednadžbi

$$X(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

$$Y(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

Kod šrafiranja gleda se predznak Jakobijane

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix}$$

Ako pri porastu frekvencije  
 $-\infty < \omega < 0$  i  $0 < \omega < \infty$   
bude determinanta sustava  $J > 0$   
**šrafira se lijeva strana D krivulje**

Ako pri porastu frekvencije  
 $-\infty < \omega < 0$  i  $0 < \omega < \infty$   
bude determinanta sustava  $J < 0$   
**šrafira se desna strana D krivulje**

U točkama  $\omega=0$  i  $\omega=\infty$   
šrafirane strane D-krivulje i singularnih  
pravaca moraju biti  
okrenute jedna prema drugoj

Provjera područja stabilnosti  
Za točku iz područja  $(\alpha, \beta)$   
određuje se stabilnost jednim od kriterija  
stabilnosti (npr. Hurwitz)

Jedna stabilna točka  
↑  
cijelo stabilno područje

# D- rastavljanje

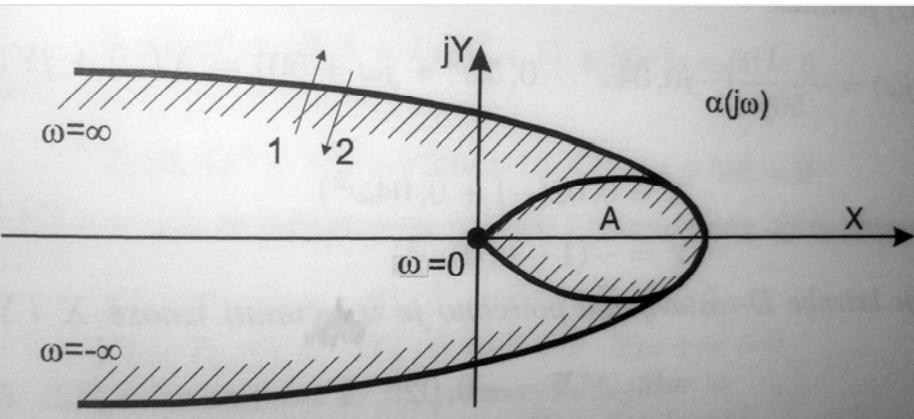
karakteristična jednadžba ovisna o **jednom parametru**

Za sustav s jednim promjenjivim parametrom krivulja rastavljanja ima oblik

$$D(j\omega) = Q(j\omega) + \alpha R(j\omega)$$

$$\alpha(j\omega) = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega)$$

Krivulja ima oblik



D-krivulja je transformirana kompleksna ravnina korjena karakteristične jednadžbe

Područje parametra  
**lijevo od krivulje D-rastavljanja**  
 u smjeru porasta frekvencije odgovara  
**lijeva poluravnina** kompleksne ravnine korjena

U realnim sustavima parametri su realni (pojačanja, vremenske konstante) pa je od interesa samo realna os.



# D-rastavljanje

## Primjer 1



Sustav s jediničnom negativnom povratnom vezom određen je prijenosnom funkcijom otvorenog kruga

$$G_0(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$K = 50;$$

$$T_1 = 0.4s$$

$$T_2 = 0.1s$$

Potrebno je odrediti utjecaj vremenske konstante derivacijskog člana na stabilnost zatvorenog sustava

Karakteristična jednadžba zatvorenog sustava

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0$$

Uvrštenjem vrijednosti se dobije

$$0.04s^3 + 0.5s^2 + (1 + 50\tau)s + 50 = 0$$

$$\tau = -\frac{1}{50s} (0.04s^3 + 0.5s^2 + s + 50)$$

Zamjenom s sa  $j\omega$  dobije se

$$\begin{aligned}\tau &= -\frac{1}{50j\omega} (-j0.04\omega^3 - 0.5\omega^2 + j\omega + 50) \\ &= X(\omega) + jY(\omega)\end{aligned}$$

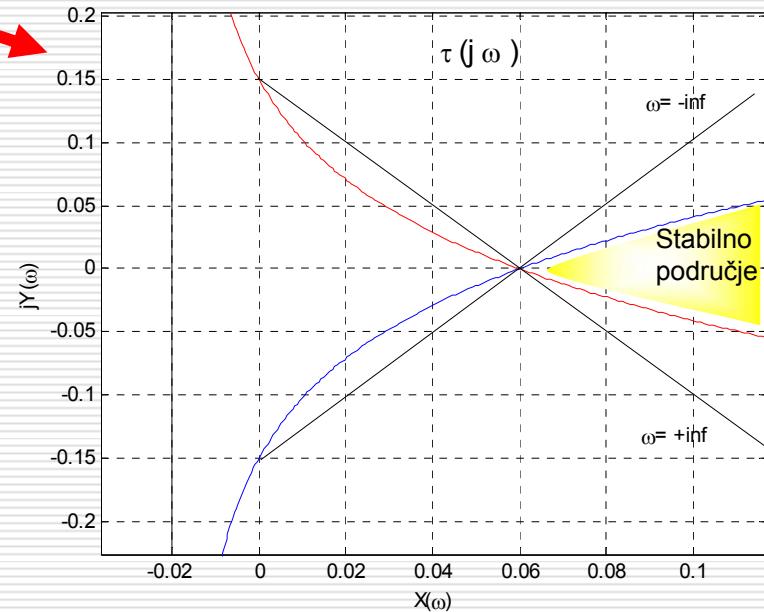
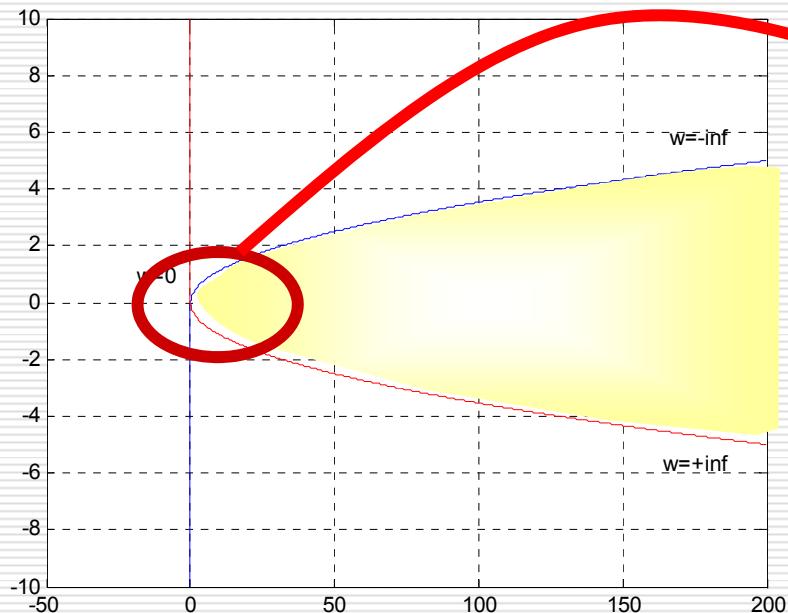
$$X(\omega) = \frac{1}{50} (0.04\omega^2 - 1)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\omega} (1 - 0.01\omega^2)$$



# D-rastavljanje

## Primjer 1



$$X(\omega) = \frac{1}{50} (0.04\omega^2 - 1)$$
$$Y(\omega) = \frac{1}{\omega} (1 - 0.01\omega^2)$$

Određenje pravaca:

$$\omega=0 \rightarrow X=-0.02; Y=\pm\infty$$

$$\omega=+\infty \rightarrow X=+\infty; Y=-\infty$$

$$\omega=-\infty \rightarrow X=+\infty; Y=+\infty$$

Sjecište s realnom i imaginarnom osi

$$X(\omega_1) = 0 \rightarrow \omega_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{0.04}} = \pm 5 \quad Y = \pm 0.15$$

$$Y(\omega_2) = 0 \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{0.01}} = 10 \quad X = 0.06$$



# D-rastavljanje

## Primjer 2



Sustav s jediničnom negativnom povratnom vezom određen je prijenosnom funkcijom otvorenog kruga

$$G_0(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$K = 50;$$

$$T_1 = 0.4s$$

Potrebno je odrediti utjecaj vremenskih konstanti  $T_2$  i  $\tau$  na stabilnost zatvorenog sustava

Karakteristična jednadžba zatvorenog sustava

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0$$

Uvrštenjem vrijednosti se dobije

$$0.4T_2 s^3 + (0.4 + T_2)s^2 + (1 + 50\tau)s + 50 = 0$$

$$T_2(0.4s^3 + s^2) + \tau 50s + (0.4s^2 + s + 50) = 0$$

Zamjenom s sa  $j\omega$  dobije se

$$X(\omega, T_2, \tau) = -T_2\omega^2 + 50 - 0.4\omega^2 = 0$$

$$Y(\omega, T_2, \tau) = -T_2 \cdot 0.4 \cdot \omega^3 + \tau 50\omega + \omega = 0$$



# D-rastavljanje

## Primjer 2



$$X(\omega, T_2, \tau) = -T_2\omega^2 + 50 - 0.4\omega^2 = 0$$

$$Y(\omega, T_2, \tau) = -T_2 \cdot 0.4 \cdot \omega^3 + \tau 50\omega + \omega = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 0 \\ -0,4\omega^3 & 50\omega \end{vmatrix} = -50\omega^3$$

$$\Delta T_2 = \begin{vmatrix} -(50 + 0,4\omega^2) & 0 \\ -\omega & 50\omega \end{vmatrix} = -(50 - 0,4\omega^2)\omega \cdot 50$$

$$\Delta \tau = \begin{vmatrix} -\omega^2 & -(50 - 0,4\omega^2) \\ -0,4\omega^3 & -\omega \end{vmatrix} = \omega^3 - 0,4\omega^3(50 - 0,4\omega^2)$$

Primjenom (6.27) dobivamo:

$$T_2 = \frac{\Delta T_2}{\Delta} = \frac{50}{\omega^2} - 0,4 \quad (6.39)$$

$$\tau = \frac{\Delta \tau}{\Delta} = 0,02(19 - 0,16\omega^2) \quad (6.40)$$

Za različite iznose  $\omega$ , iz (6.39) i (6.40) proizlaze iznosi promjenljivih parametara  $T_2$  i  $\tau$  kojima je određena krivulja D-rastavljanja (tabela 6.1).

Tabela 6.1.

$\omega$	0	5	6	7	8	9	10	$\sqrt{\frac{19}{0,16}}$	$\sqrt{\frac{50}{0,4}}$	15	$\pm\infty$
$T_2$	$\infty$	1.6	0.99	0.62	0.38	0.22	0.1	0.02	0	-0.18	-0.4
$\tau$	0.38	0.3	0.27	0.22	0.18	0.12	0.06	0	-0.02	-0.34	$-\infty$



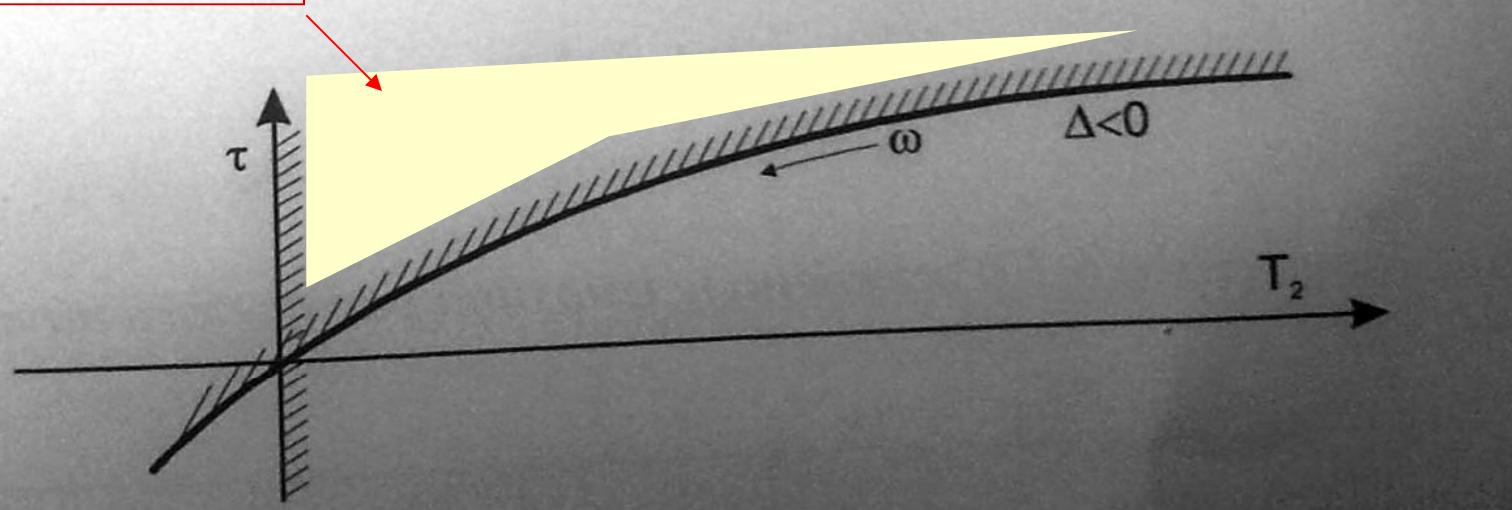
# D-rastavljanje

## Primjer 2



$\omega$	0	5	6	7	8	9	10	$\sqrt{\frac{19}{0.16}}$	$\sqrt{\frac{50}{0.4}}$	15	$\pm\infty$
$T_2$	$\infty$	1.6	0.99	0.62	0.38	0.22	0.1	0.02	0	-0.18	-0.4
$\tau$	0.38	0.3	0.27	0.22	0.18	0.12	0.06	0	-0.02	-0.34	$-\infty$

Područje stabilnosti



Provjera područja za  $T_2 = \tau = 0.2s$

Karakteristična jednadžba

$$0.08s^3 + 0.6s^2 + 11s + 50 = 0$$

$$s = \begin{bmatrix} -1.2500 + 11.1102i \\ -1.2500 - 11.1102i \\ -5.0000 \end{bmatrix}$$



# D-rastavljanje

## Primjer 3



**Primjer 6.9** Potrebno je odrediti utjecaj parametara  $K$  i  $\tau$  na stabilnost sustava iz prethodnog primjera za  $T_1 = 0,4[s]$  i  $T_2 = 0,1[s]$ . Karakteristična jednadžba zatvorenog sustava je:

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0$$

odnosno:

$$0,4s^3 + 0,5s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0 \quad (6.42)$$

Uvrštenjem u (6.42)  $K\tau = \alpha$  i  $K = \beta$ , sustav jednadžbi (6.26) poprima oblik:

$$\begin{aligned} X(\omega, \alpha, \beta) &= -0,5\omega^2 + \beta \\ Y(\omega, \alpha, \beta) &= -0,04\omega^3 + \omega + \alpha \end{aligned} \quad (6.43)$$

Iz (6.43) proizlazi:

$$\beta = 0,5\omega^2$$

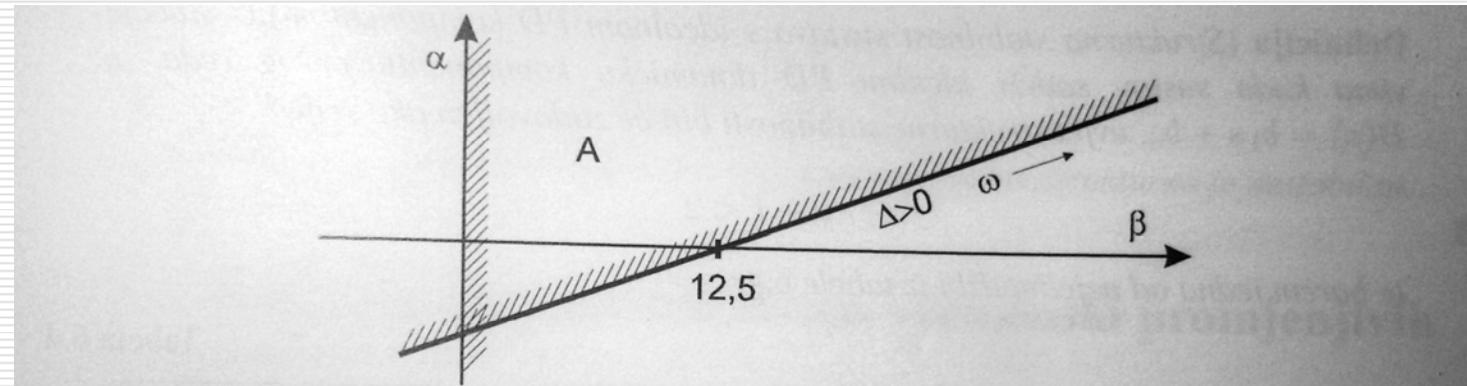
$$\alpha = -1 + 0,4\omega^2$$

$$\Delta = \omega$$

# D-rastavljanje

## Primjer 3

$\omega$	0	$\sqrt{\frac{1}{0.04}}$	6	7	8	9	10	11	12	14	$\pm\infty$
$\alpha$	-1	0	0.4	0.96	1.6	2.24	3	3.84	4.76	6.84	$+\infty$
$\beta$	0	12.5	18	24.5	32	40.5	50	60.5	72	98	$+\infty$



Slika 6.22: Krivulja D-rastavljanja

Iz primjene Hurwitzova kriterija za  $\beta = 20$  i  $\alpha = 2$  proizlazi da je pretendentno područje A stabilno područje. Budući da je  $\alpha = K\tau$  pozitivna veličina, područje stabilnosti je dio područja A, koji se nalazi u prvom kvadrantu.



# Robusna stabilnost

---

- Opis dinamičkog sustava
  - Nominalni matematički model
  - Neizvjesnost
    - Matematički model točno ne opisuje sustav
    - Model sustava se mijenja s vremenom
  - Robusni regulator
    - Regulator koji interno stabilizira svaki model u familiji
      - konačan broj specifičnih modela sustava
      - nominalni model sustava i opis neizvjesnosti u modelu
      - strukturni model sustava i opis neizvjesnosti u iznosu parametara modela

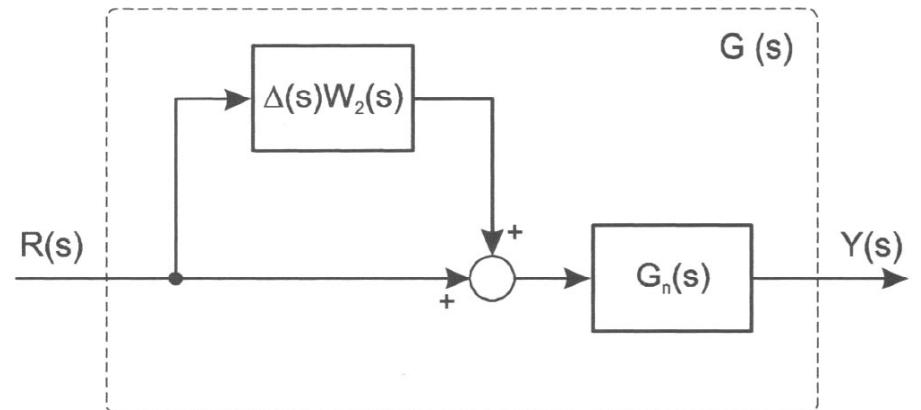
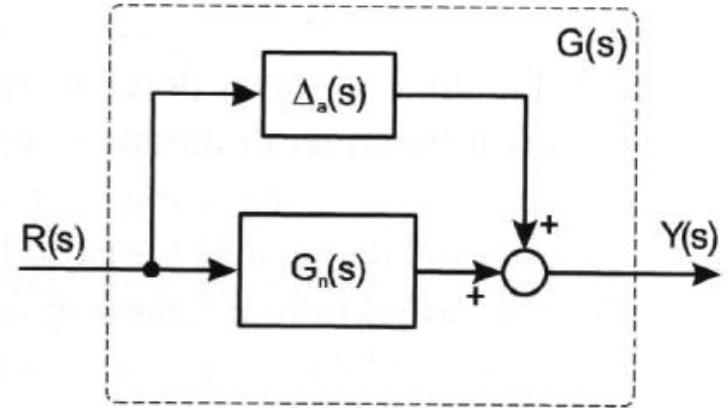


# Neizvjesnost

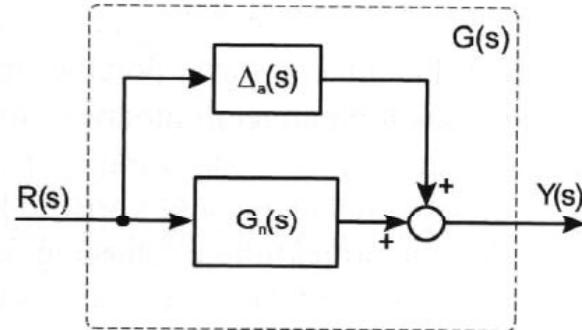
- Odstupanje nominalnog modela od stvarnog modela porcesa
- Vrste
  - Strukturirana neizvjesnost
    - neizvjesnost se može modelirati
    - poznaju se granice promjene neizvjesnih parametara
      - (*polova, nula, pojačanja, koeficijenata polinoma prijenosne funkcije*)
  - Nestrukturirana neizvjesnost
    - Manje znanje o procesu
      - Npr. zna se da frekvencijska karakteristika leži unutar nekih granica

# Nestrukturirana neizvjesnost

- Vrste opisa nestruktuirane neizvjesnosti
  - Aditivna neizvjesnost
    - model neizvjesnosti dodaje se nominalnom modelu
  - Multiplikativna neizvjesnost
    - Model neizvjesnosti u seriji s nominalnim modelom



# Aditivna nestrukturirana neizvjesnost



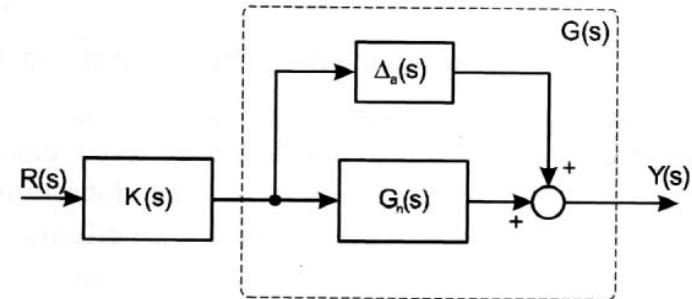
$$\Delta_a(s) = G(s) - G_n(s)$$

$G_n(s)$  – nominalni model sustava

$G(s)$  – potpuni model realnog sustava

$\Delta_a$  – model aditivne neizvjesnosti

Dodavanje serijskog kompenzatora



Problem što pogreška u  $G_n(s)$  ne predstavlja pogrešku otvorenog sustava  
 $G_o(s) = K(s)G(s)$

$$[G_n(s) + \Delta_a(s)]K(s) \neq G_n(s)K(s) + \Delta_a(s)$$

Teško je odrediti učinak aditivne perturbacije  $\Delta_a(s)$  na model  $G_n(s)K(s)$   
 Taj problem rješiv multiplikativnom perturbacijom



# Multiplikativna nestrukturirana neizvjesnost



- Svojstva
  - mala na niskim frekvencijama
    - (dobro poznat nominalni model)
  - velika na visokim frekvenicjama
    - slabo poznat nominalni model
- Oblik opisa neizvjesnosti u relativnom odnosno multiplikativnom obliku

$$G(s) = [1 + \Delta_m(s)] G_n(s)$$

Prikaz nestrukturirane neizvjesnosti relativnom pogreškom u odnosu na nominalni model

$$\Delta_m(s) = \left[ \frac{G(s)}{G_n(s)} - 1 \right]$$

Prikaz nestrukturirane neizvjesnosti relativnom pogreškom u odnosu na stvarni model procesa

$$\Delta_M(s) = \left[ \frac{G_n(s)}{G(s)} - 1 \right]$$

Izražavanje relativne pogreke u odnosu na nominalni model pomoću stabilne nepromjenjive prijenosne funkcije (*Težinske funkcije*)

$$\Delta_m(s) = \Delta(s) W_2(s)$$

$W_2(s)$  - stabilna nepromjenjiva prijenosna funkcija (*Težina neizvjesnosti*)

$\Delta(s)$  – promjenjiva stabilna funkcija prijenosa sa svojstvom

$$\|\Delta\|_{\infty} < 1$$



# Objašnjenje $\infty$ -norme

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{1/p} \text{ resp. } \|f\|_{p,X} = \left( \int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Two norms  $\|\cdot\|_\alpha$  and  $\|\cdot\|_\beta$  on a vector space  $V$  are called *equivalent* if there exist positive real numbers  $C$  and  $D$  such that

$$C\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq D\|x\|_\alpha$$

for all  $x$  in  $V$ . For instance, on  $\mathbb{C}^n$ :

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

## Maximum norm (special case of: infinity norm, uniform norm, or supremum norm)

Main article: [Maximum norm](#)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

The set of vectors whose infinity norm is a given constant,  $c$ , forms the surface of a [hypercube](#) with edge length  $2c$ .

### H<sub>2</sub> Norm

The H<sub>2</sub> norm of a stable continuous system with transfer function  $H(s)$ , is the root-mean-square of its impulse response, or equivalently

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Trace}(H(j\omega)^H H(j\omega)) d\omega}$$

This norm measures the steady-state covariance (or power) of the output response

$y = Hw$  to unit white noise inputs  $w$ .

$$\|H\|_2^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} E\{y(t)^T y(t)\}, \quad E(w(t)w(\tau)^T) = \delta(t - \tau)I$$

### Infinity Norm

The infinity norm is the peak gain of the frequency response, that is,

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega} |H(j\omega)| \quad (\text{SISO case})$$

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{\max}(H(j\omega)) \quad (\text{MIMO case})$$

where  $\sigma_{\max}(\cdot)$  denotes the largest singular value of a matrix.



# Objašnjenje $\infty$ -norme

## H2 Norm

The  $H_2$  norm of a stable continuous system with transfer function  $H(s)$ , is the root-mean-square of its impulse response, or equivalently

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Trace}(H(j\omega)^H H(j\omega)) d\omega}$$

This norm measures the steady-state covariance (or power) of the output response

$y = Hw$  to unit white noise inputs  $w$ .

$$\|H\|_2^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} E\{y(t)^T y(t)\}, \quad E(w(t)w(\tau)^T) = \delta(t-\tau)I$$

## Infinity Norm

The infinity norm is the peak gain of the frequency response, that is,

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega} |H(j\omega)| \quad (\text{SISO case})$$

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{\max}(H(j\omega)) \quad (\text{MIMO case})$$

where  $\sigma_{\max}(\cdot)$  denotes the largest singular value of a matrix.



# Multiplikativna nestrukturirana neizvjesnost

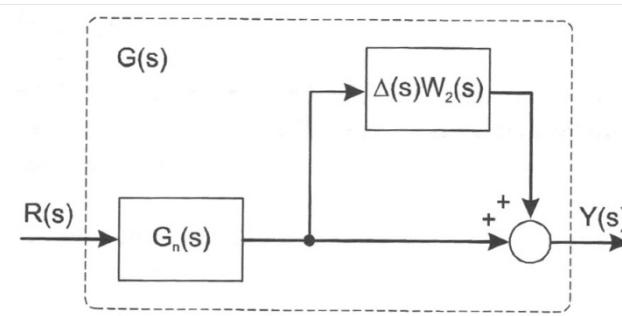
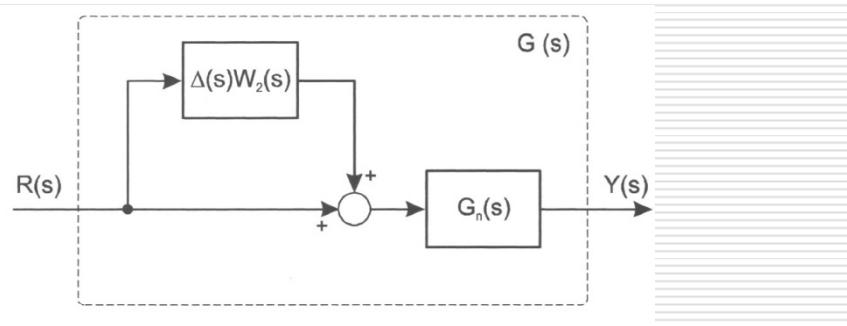


$$G(s) = [1 + \Delta_m(s)] G_n(s)$$

$$\Delta_m(s) = \left[ \frac{G(s)}{G_n(s)} - 1 \right] \quad \Delta_m(s) = \Delta(s) W_2(s)$$

Multiplikativna neizvjesnost na ulazu u proces

Multiplikativna neizvjesnost na izlazu iz procesa





# Nestrukturirana neizvjesnost

- Prepostavka
  - nestabilni polovi nominalnog modela se nisu pokratili
    - isti broj polova u desnoj poluravnini kod nominalnog modela i pravog procesa
    - promjenjiva stabilna funkcija  $\Delta(s)$  je dozvoljena
- Kvantifikacija pogreške modeliranja
  - pogreške nije moguće precizno matematički opisati
  - kvantifikacija pomoću granica odnosno težina neizvjesnosti
    - svojstva
      - nisu dane preko parametara
      - nestrukturirane pogreške modeliranja → nestrukturirane neizvjesnosti
      - uzimanje u obzir visokofrekvenčkih fenomena nemodeliranih u nominalnom modelu
      - neizvjesnost parametara
        - opis preko nestrukturirane neizvjesnosti – konzervativni odgovori



# Opis nestrukturirane neizvjesnosti

Neizvjesnost za aditivni oblik pogreške

$$|\Delta_a(j\omega)| < |W(j\omega)| \quad \forall \omega$$

Apsolutna vrijednost neizvjesnosti mora biti manja od težinske funkcije

Uz prijenosnu funkciju modela tipa niskoporpusnog filtera  
uz određenje gornje granice norme na niskim frekvencijama

$$\|G(j\omega)\|_{\infty} < \|W(j\omega)\|_{\infty} \quad \forall \omega$$

$$\|W^{-1}(j\omega)G(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad \forall \omega$$

Uz

$$\Delta(s)W_2(s) = \frac{G(s)}{G_n(s)} - 1$$

U tom slučaju se može

$$\Delta(s)W_2(s)$$

interpretirati kao normirana promjena realnog procesa od jedinice.

Uz

$$\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$$

vrijedi

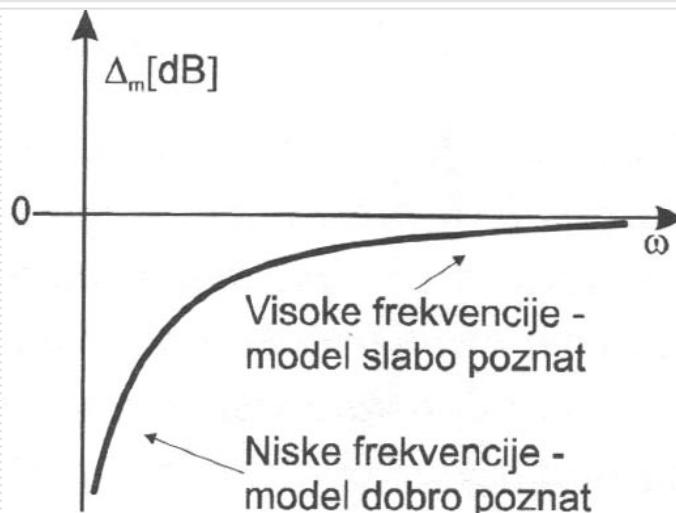
$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_n(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)| \quad \forall \omega$$

Težine neizvjesnosti  $w(j\omega)$  i  $w_2(j\omega)$  određuju granicu neizvjesnosti

# Opis nestrukturirane neizvjesnosti

$W_2(j\omega)$  rastuća funkcija s frekvencijom

Tipičan oblik funkcije  $\Delta_m(s) = \Delta(s)W_2(s)$

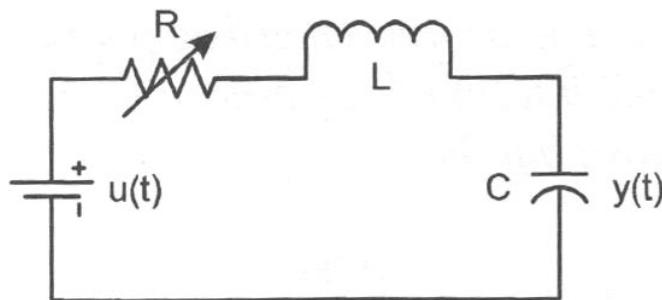


Uz poznati  $G_n(s)$  i  $W(s)$  ili  $W_2(s)$   
za projektiranje robusnog regulatora treba koristiti par  $\{G_n(s) \text{ i } W(s)\}$   
Neizvjesni parametri na ovaj način se pretvaraju u neizvjesnu dinamiku

# Primjer

Idealizirani serijski RLC krug s pobudom pomoću naponskog izvora,  
te naponom na kondenzatoru kao odzivom  
Neizvjesni parametri R,L,C prema nominalnim parametrima

*Neizvjesnost parametara  
moguće je prikazati kao  
neizvjesnost dinamike*



Prijenosna funkcija kruga

Nominalni model

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$G_n(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{L_n C_n s^2 + R_n C_n s + 1}$$

$R_n, L_n, C_n$  su nominalne vrijednosti parametara  $R, L, C$

Neizvjesnost poznavanja parametara

=

neizvjesnost koeficijenata funkcije prijenosa pravog procesa



# Primjer

Neizvjestan samo otpor i L i C konstantni i poznati.  
Frekvencija neprigušenih oscilacija poznata i konstantna

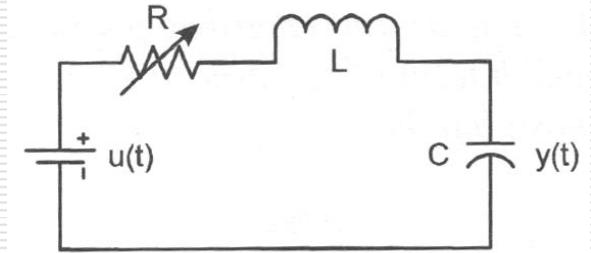
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Faktor prigušenja se mijenja

$$2\zeta\omega_n = \frac{R}{L}$$

Funkcija prijenosa RLC kruga uz  
neizvjestan faktor prigušenja

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



Nominalni model uz  
 $\omega_n = 1\text{s}^{-1}$ ,  $\zeta_n = 0.2$   
ima oblik:

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta_n s + 1}$$

Model pravog RLC kruga uz  
faktor neizvjesnosti  
 $\zeta_n \in [0.1, 0.2]$   
ima oblik:

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}; \quad \zeta \in [0.1, 0.2]$$



# Primjer

Težina neizvjesnosti  $W(s)$   
može se odrediti iz grafičkog prikaza

$$|\Delta_a(j\omega)| = |G(j\omega) - G_n(j\omega)|$$

Uz faktor prigušenja u granicama

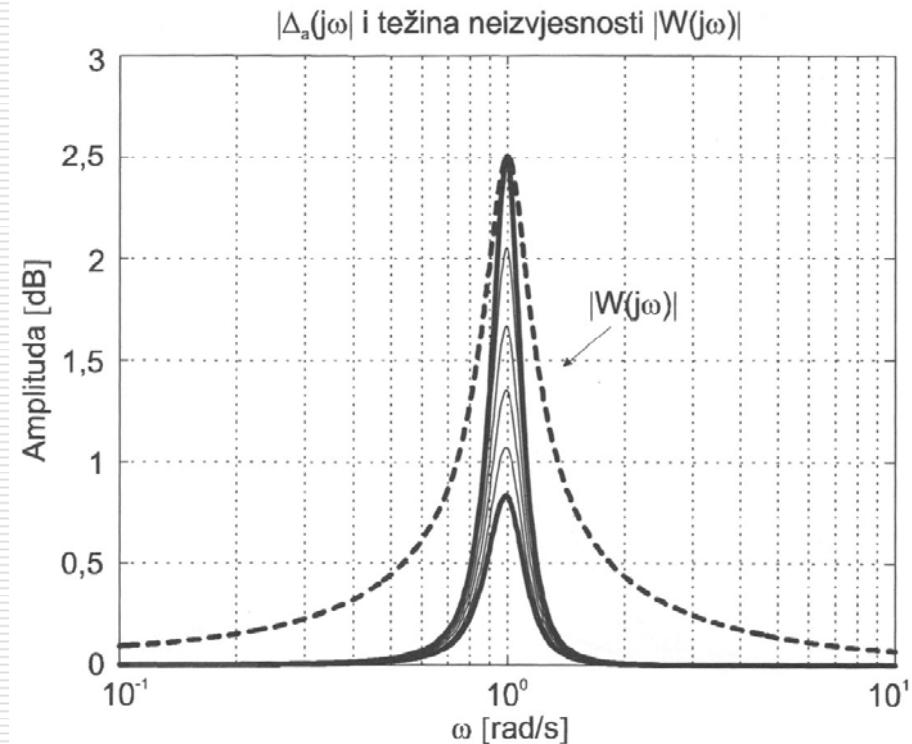
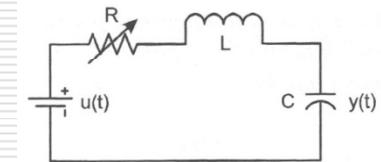
$$\zeta \in [0.1, 0.2]$$

Težina neizvjesnosti  $W(s)$  treba  
zadovoljavati nejednadžbu

$$|W(j\omega)| > |\Delta_a(j\omega)| \quad \forall G$$

Slika prikazuje različite neizvjesnosti  
 $|\Delta_a(j\omega)|$  za različite faktore prigušenja  
u rasponu  $\zeta \in [0.1, 0.2]$  i  $\omega \in [0.1, 10]$

Moguće je odrediti neizvjesnost  $W$   
čija je apsolutna vrijednost veća od svih  
stvarnih apsolutnih vrijednosti neizvjesnosti





# Primjer

Moguća neizvjesnost sa svojstvom

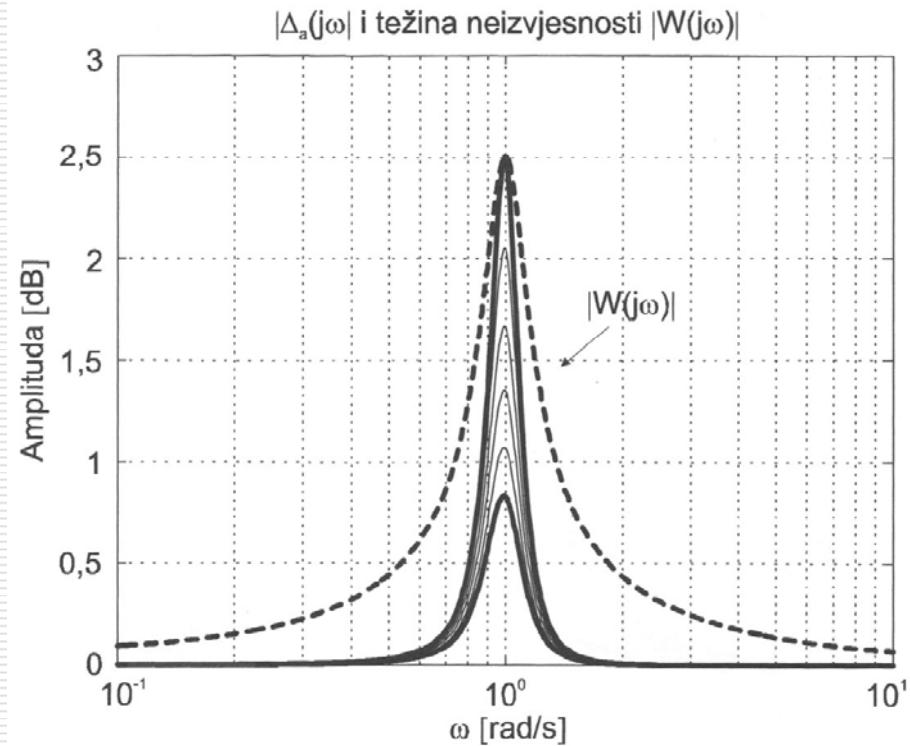
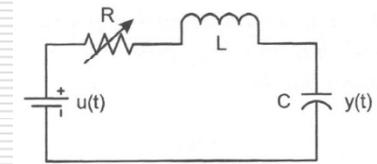
$$|W(j\omega)| > |G(j\omega) - G_n(j\omega)| \quad \forall G$$

$$\text{Uz } \zeta \in [0.1, 0.2] \quad \omega \in [0.1, 10]$$

može biti opisana prijenosnom funkcijom

$$W(s) = \frac{0.06(1+80s)}{1.7s^2 + 0.40s + 1.7}$$

Predložena težinska neizvjesnost  
W(s) je ostvariva zbog  
- konačnog reda  
- opisa kauzalnom racionalnom funkcijom



# Primjer 2

## Neizvjesno vrijeme kašnjenja

Stvarni proces opisan je modelom uz neodređenost vremena kašnjenja

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s+1}; \quad \tau \in [0 \quad 0.2]$$

Nominalni model određen je uz zanemarenje vremena kašnjenja u obliku

$$G_n(s) = \frac{1}{s+1};$$

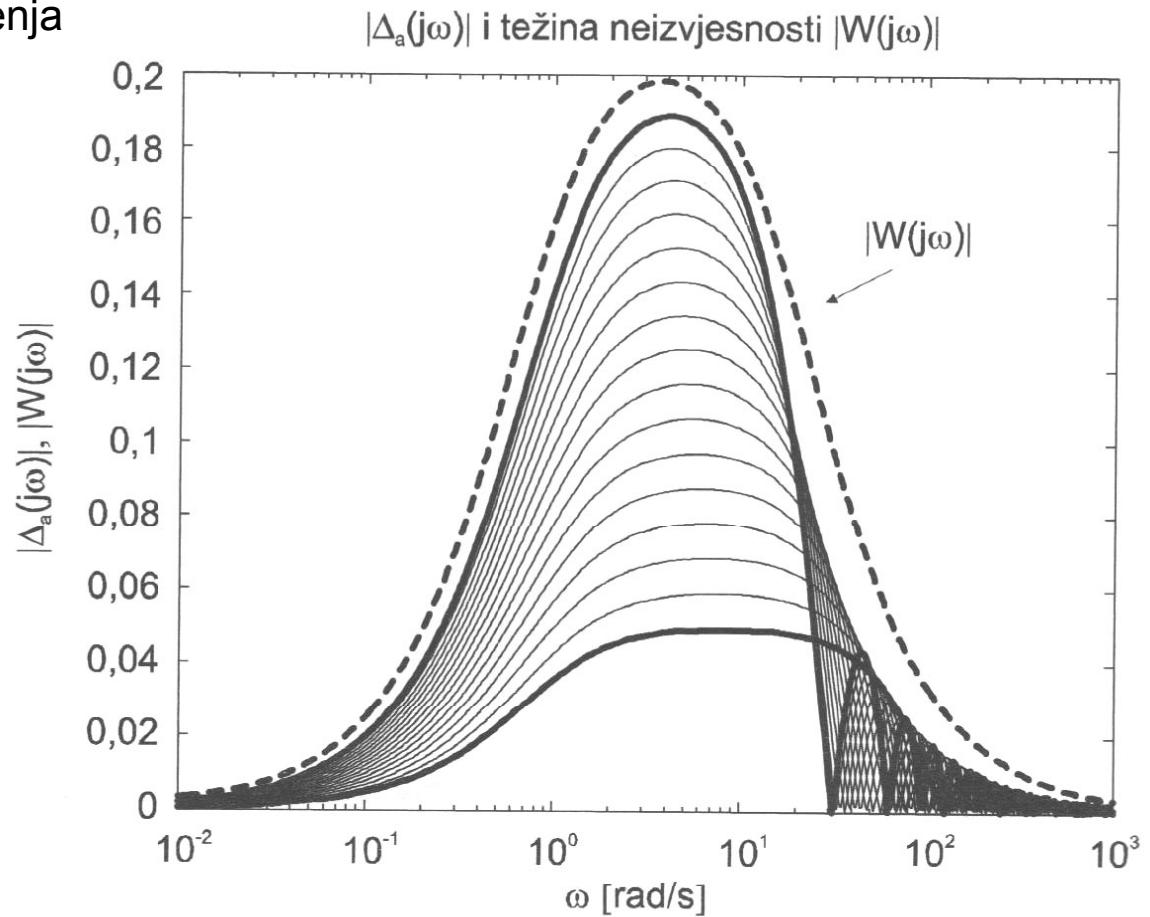
Neizvjesnost je određena razlikom stvarnog i nominalnog modela

$$|G(s) - G_n(s)|$$

Krivulje neizvjesnosti

$$|\Delta_a(j\omega)| = |G(j\omega) - G_n(j\omega)|$$

za različita vremena kašnjenja u intervalu  $\tau \in [0 \quad 0.2]$  dane su slikom





## Primjer 2

### Neizvjesno vrijeme kašnjenja



Za iscrtane krivulje neizvjesnosti

$$|\Delta_a(j\omega)| = |G(j\omega) - G_n(j\omega)|$$

Za proces s neizvjesnim vremenom kašnjenja

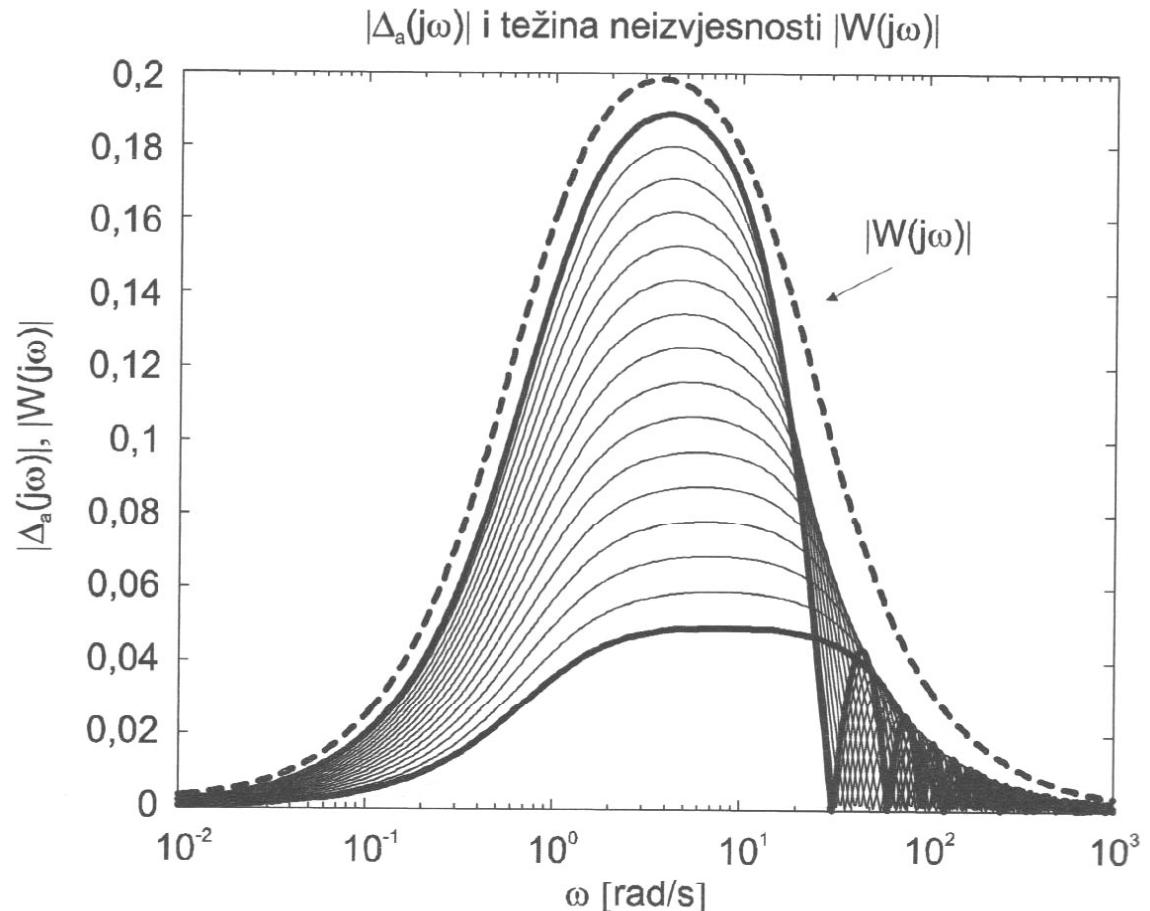
$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s+1}; \quad \tau \in [0 \quad 0.2]$$

određena je težina neizvjesnosti koja zadovoljava uvjet

$$|W(j\omega)| > |\Delta_a(j\omega)|$$

oblika

$$W(s) = \frac{0.0025(1+100s)}{(1+1.2s)(1+0.06s)};$$





# Primjer 3

## Neizvjesno vrijeme kašnjenja – multiplikativna neizvjesnost



Stvarni proces opisan je modelom uz neodređenost vremena kašnjenja

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2}; \quad \tau \in [0.03 \quad 0.15]$$

Nominalni model određen je uz zanemarenje vremena kašnjenja u obliku

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2};$$

Ovo kašnjenje moguće je tretirati kao multiplikativnu perturbaciju (nesigurnost) nominalnog modela uz ugrađivanje  $G(s)$  u familiju:

$$\{(1 + \Delta W_2) G_n : \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$$

Da bi se to ostvarilo, nužno je da težinska funkcija  $W_2$  zadovoljava nejednadžbu

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_n(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)|; \quad \forall \omega, \tau$$

Uvrštenjem funkcija nominalnog i stavnog modela, uvjet poprima oblik

$$|e^{-\tau j\omega} - 1| \leq |W_2(j\omega)|; \quad \forall \omega, \tau$$

Jedna od mnogo mogućih težina neizvjesnosti koja zadovoljava nejednadžbu je

$$W_2(s) = \frac{0.21s}{0.095s + 0.9}$$

# Primjer 3

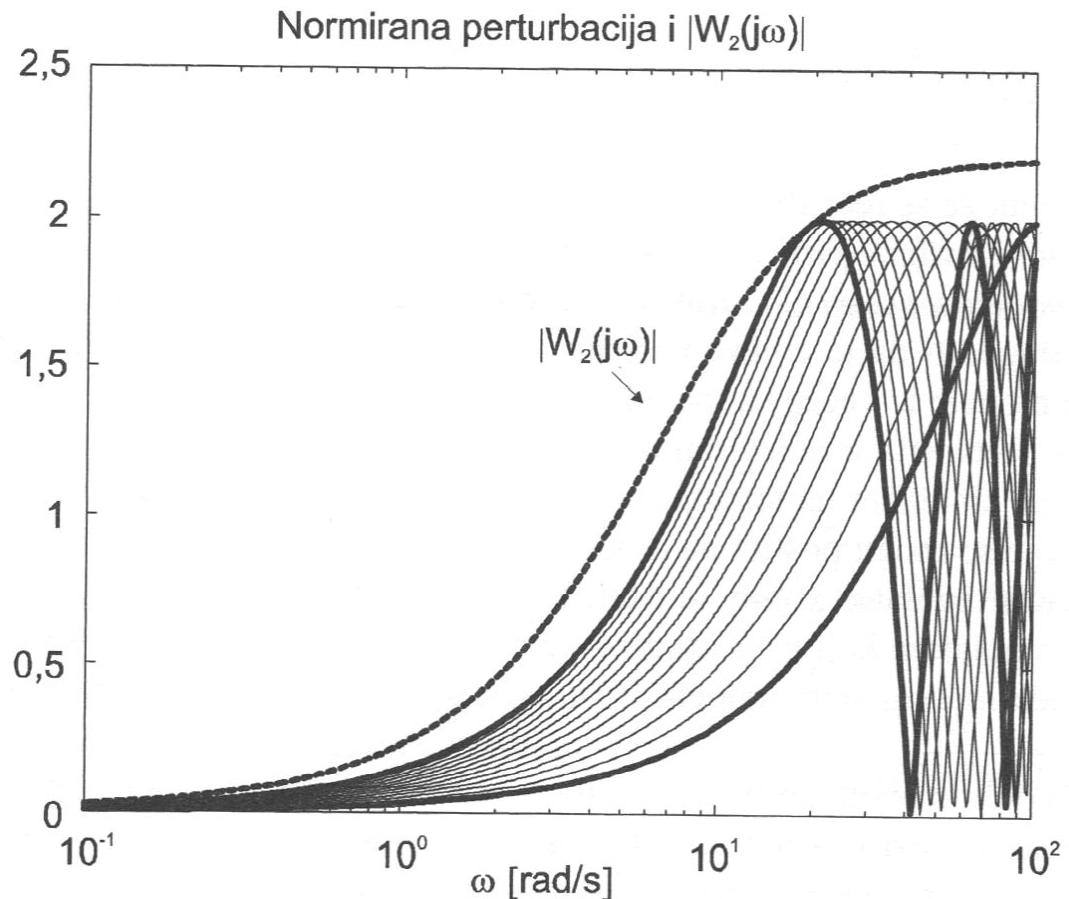
Prikaz normalizirane perturbacije

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_h(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)|; \quad \forall \omega, \tau$$

i težine neizvjesnosti

$$W_2(s) = \frac{0.21s}{0.095s + 0.9}$$

Iz slike se vidi da težina prekonzervativno aproksimira normaliziranu perturbaciju za zadanu neizvjesnost kašnjenja





# Svojstva modela strukturne neizvjesnosti



- Perturbacijski model (multiplikativni ili aditivni)
  - Gruba aproksimacija skupa neizvjesnosti.
  - Stvarni skup neizvjesnosti je podskup aproksimiranog skupa
- Ako regulator zadovoljava projektne zahtjeve za aproksimirani skup
  - regulator zadovoljava i sve modele u skupu neizvjesnosti
  - Aproksimirani skup je veći od stvarnog skupa
- Projektiranje regulatora
  - teže postići tražene zahtjeve (performanse zatvorenog kruga) za modele iz većeg skupa
  - Regulator projektiran za modele iz većeg skupa
    - konzervativan je za modele iz manjeg skupa
- Neizvjsnost
  - aditivna → absolutna pogreška
  - multiplikativna → relativna pogreška



# Primjer 5

## Neizvjesnost u povratnoj vezi



Familija procesa s neizvjesnim parametrom  $\zeta$  određena je prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}; \quad \zeta \in [0.1 \quad 0.2]$$

Promjenjivi parametar može se izraziti kao

$$\zeta = 0.15 + 0.05\Delta, \quad \text{uz} \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

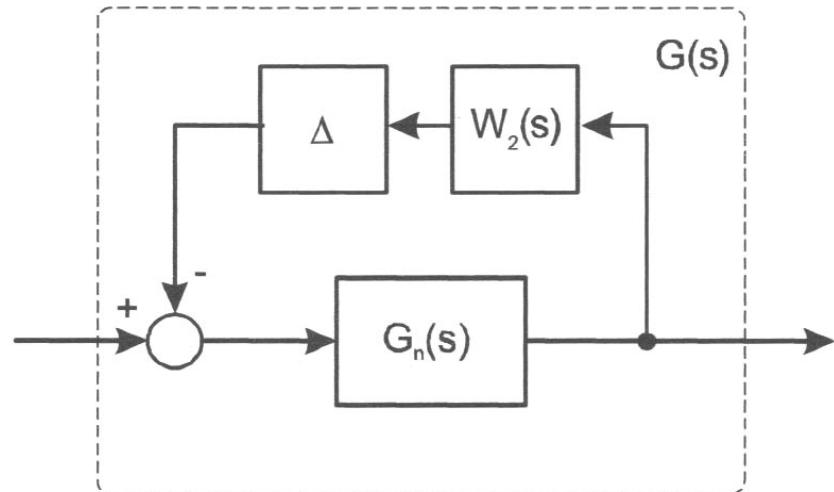
Familija procesa može se izraziti prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{G_n(s)}{1 + \Delta W_2(s)G_n(s)}; \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

uz

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1}, \quad \text{uz} \quad W_2(s) = 0.05s$$

Blok shema definiranog prikaza familije modela neizvjesnosti definirana je kao sustav s povratnom vezom





# Najčešće korišteni modeli neizvjesnosti



- Multiplikativni model perturbacije

$$G(s) = [1 + \Delta(s)W_2(s)]G_n(s)$$

- aditivni model perturbacije

$$\begin{aligned} G(s) &= [G_n(s) + \Delta_G(s)] = \\ &= [G_n(s) + \Delta(s)W_2(s)] \end{aligned}$$

- model perturbacije kao sustav s povratnom vezom

$$G(s) = \frac{G_n(s)}{1 + \Delta W_2(s)G_n(s)}$$

- model perturbacije

$$G(s) = \frac{G_n(s)}{1 + \Delta W_2(s)}$$



# Analiza robusne stabilnosti

Teorem malog pojačanja



- Robusna stabilnost podrazumijeva
  - regulator stabilizira sve matematičke modele procesa iz skupa određenog neizvjesnošću
    - robusna stabilnost
  - postiže se željeno ponašanje zatvorenog sustava za sve matematičke modele procesa
    - robusnost performansi
  - Izvođenje uvjeta stabilnosti (jedan od kriterija)
    - Nyquistov kriterij
    - Kriterij Mihajlova (varijacija Nyquistova kriterija)
    - Teorem malog pojačanja

# Teorem malog pojačanja

## □ Teorem

- Zatvoren krug procesa sa stabilnim dijelovima  $K(s)$ ,  $G_n(s)$ ,  $H(s)$
- bit će stabilan ako vrijedi

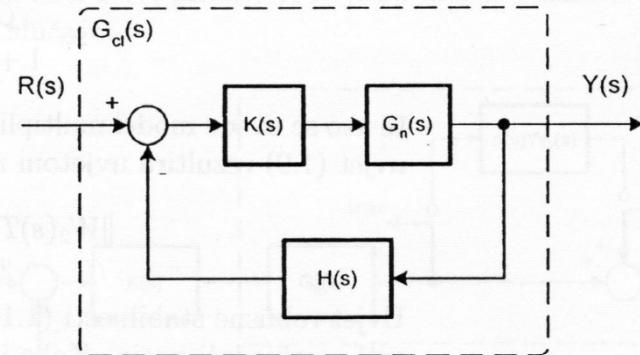
$$G_0(s) = |K(s)G_n(s)H(s)| < 1$$

Budući da je

$$|K(s)G_n(s)H(s)| \leq |K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)|$$

Stabilnost zatvorenog kruga zagaranuirana je ako vrijedi

$$|K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)| < 1$$



Teorem malog pojačanja određuje da je za stabilnost zatvorenog kruga nužno da pojačanje otvorenog kruga bude malo



# Teorem malog pojačanja

---

- Teorem vrijedi za linearne i nelinearne sustave
- Garantira totalnu stabilnost
  - Sustav će biti totalno stabilan (*sve prijenosne funkcije zatvorenog kruga su stabilne*) ako
    - su svi signali u sustavu ograničeni
    - su sve pobude na sustav ograničene
  - Teorem daje dovoljne uvjete za stabilnost
    - moguće je imati stabilan sustav koji ne zadovoljava teorem malog pojačanja



# Teorem malog pojačanja

## dovoljan uvjet stabilnosti



Moguće da uvjet stabilnosti teorema malog pojačanja

$$|K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)| < 1$$

ne bude zadovoljen i da sustav bude stabilan

Uz  $H(s)=1$  bit će

$$|K(s)G_n(s)| < 1$$

Ako stabilni kompenzator  $K(s)$  i stabilni nominalni proces ( $\Delta=0$ ) zadovoljavaju gornji uvjet stabilnosti  $\rightarrow$  sustav je stabilan

Uz  $G_0(s)$  stabilan i  $\|G_0(s)\|_\infty < 1$

i izraz  $(1+G_0(s))^{-1}$  je stabilan

Moguće je definirati komplementarnu funkciju osjetljivosti oblika

$$\begin{aligned} T(s) &\triangleq 1 - S(s) = 1 - \frac{1}{1 + G_0(s)} = \\ &= \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K(s)G_n(s)}{1 + K(s)G_n(s)} \end{aligned}$$

Uvođenjem uvjeta množstvene neizvjesnosti u obliku

$$G(s) = [1 + \Delta_m(s)]G_n(s)$$

Uvjet stabilnosti  $|K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)| < 1$   
postaje uvjet robusne stabilnosti

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1$$



# Teorem malog pojačanja

## dovoljan uvjet stabilnosti



Iz izraza  $T(s) \triangleq 1 - S(s) = 1 - \frac{1}{1 + G_0(s)}$

je vidljivo da je  $S(s) + T(s) = 1$

Uz  $S(s) \triangleq \frac{1}{1 + G_0(s)}$

**S je osjetljivost sustava**

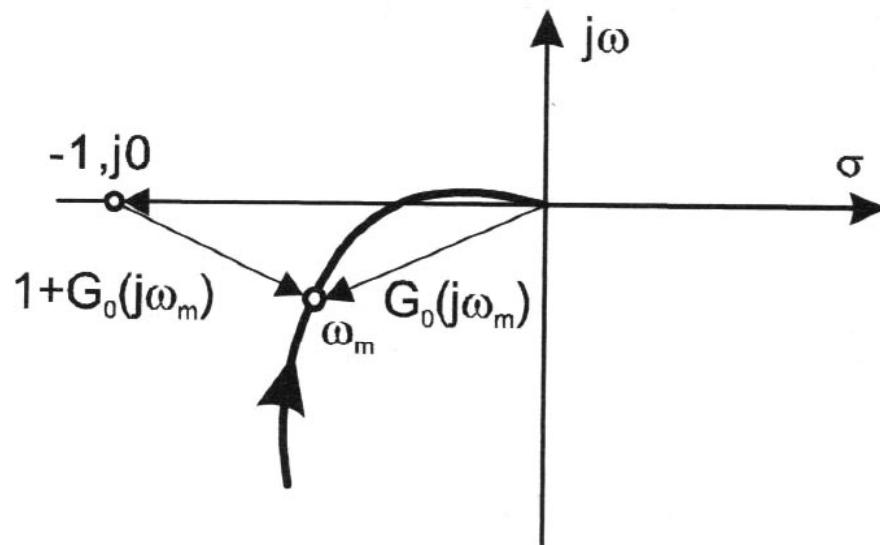
Ako je pojačanje otvorenog kruga veliko  $|G_0| \gg 1$  Komplementarna osjetljivost će biti  $|T| \approx 1$

**Osjetljivost mora biti  $|S| \ll 1$**

Mala osjetljivost znači da sustav ima dobra svojstva eliminiranja poremećaja i praćenja postavne veličine

Nužne informacije o relativnoj stabilnosti i osjetljivosti sustava mogu se dobiti iz Nyquistove karakteristike otvorenog kruga

Najmanja udaljenost od kritične točke  $(-1, j0)$  do Nyquistove karakteristike (*na frekvenciji*  $\omega_m$ ) jednaka je  $1/\|S\|_\infty$





# Teorem malog pojačanja

dovoljan uvjet stabilnosti

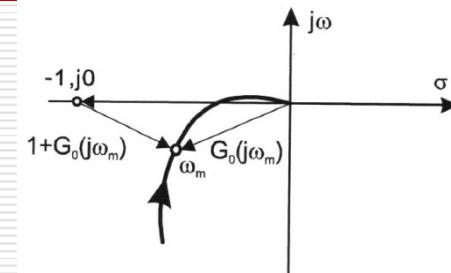
Najmanja udaljenost točke  $(-1, j0)$  i Nyquistove krivulje je

$$\inf_{\omega} |-1 - L(j\omega)| = \inf_{\omega} |1 + L(j\omega)| = \\ = \left[ \sup_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \right]^{-1}$$

$L$  je povratna razlika ili pojačanje petlje  
 $L(s) = -G_0(s)$

Osjetljivost izražena pomoću povratne razlike

$$S(s) \triangleq \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 - L(s)} = 1 - T(s)$$



Uvjet robusne stabilnosti  $\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1$

poprima oblik

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{W_2(j\omega)G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right| < 1 \quad \forall \omega$$

Odnosno

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow |W_2(j\omega)G_0(j\omega)| < |1 + G_0(j\omega)| \quad \forall \omega$$



# Teorem malog pojačanja

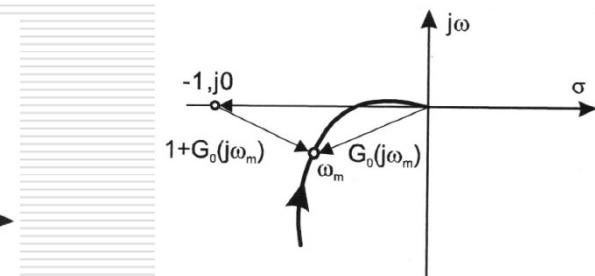
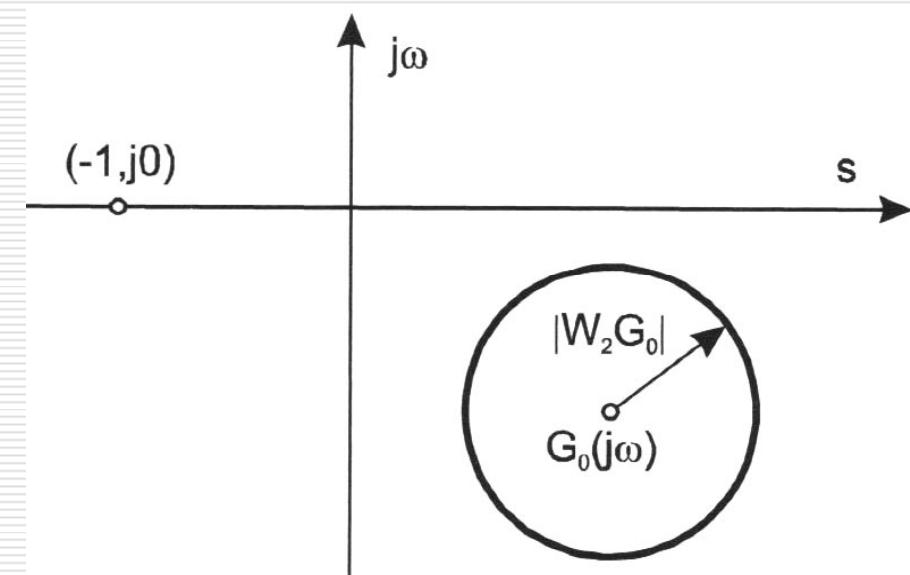
dovoljan) uvjet stabilnosti



## Uvjet robusne stabilnosti

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow |W_2(j\omega)G_0(j\omega)| < |1 + G_0(j\omega)| \quad \forall \omega$$

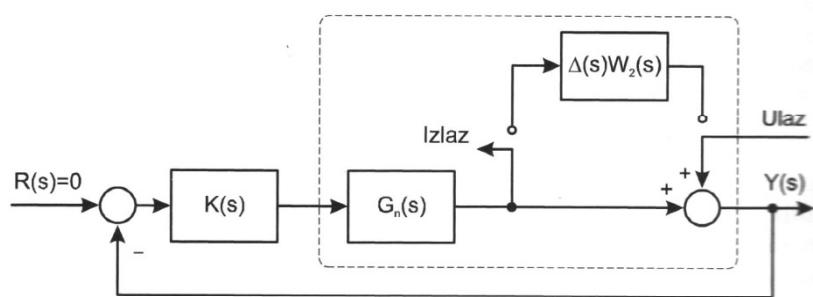
traži da za svaku frekvenciju  $\omega$ , kritična točka  $(-1, j0)$  bude izvan kružnice sa središtem  $G_0(j\omega)$  i radijusom  $|W_2(j\omega) G_0(j\omega)|$



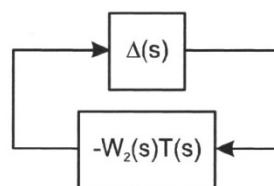
Sustav je globalno stabilan ako kritična točka  $(-1, j0)$  ne uđe niti u jednu kružnicu sa središtem na  $G_0(j\omega)$  i radijusom  $W_2(j\omega) G_0(j\omega)$ .

# Robusna stabilnost

Zatvoren sustav s multiplikativnom neizvjesnošću na izlazu



Zatvoren sustav sa stajališta neizvjesnosti ima oblik



Maksimalno pojačanje otvorenog kruga na slici iznosi:

$$\|-\Delta(s)W_2(s)T(s)\|_{\infty}$$

Maksimalno pojačanje otvorenog kruga je manje od 1

$$\|-\Delta(s)W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1$$

ako i samo ako vrijedi uvjet teorema malog pojačanja

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1$$

Prema tome iz uvjeta stabilnosti po teoremu malog pojačanja,  
**za robusnu stabilnost mora biti**

$$|\Delta_m(s)| = |\Delta(s)W_2(s)| < \frac{1}{|T(s)|}$$



# Robusna stabilnost

Uvjet robusne stabilnosti

$$|\Delta_m(s)| = |\Delta(s)W_2(s)| < \frac{1}{|T(s)|}$$

može se umjesto u Laplaceovom izraziti u frekvencijskom području

$$|\Delta_m(j\omega)| = |\Delta(j\omega)W_2(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|}, \quad \forall \omega$$

Ako je multiplikativna pogreška modeliranja (neizvjesnost)  
**ograničena i stabilna**

$$|\Delta(s)| < W_2(s)$$

Zatvoreni krug će biti **robusno stabilan**  
ako je zadovoljeno

$$|T(s)| < \frac{1}{|W_2(s)|}, \quad \text{odnosno} \quad |W_2(s)T(s)| < 1$$



# Robusna stabilnost

## Multiplikativno osiguranje stabilnosti



Određivanje najmanje neizvjesnosti koja će destabilizirati sustav.

Multiplikativna neizvjesnost mora biti manja od  $1/T \rightarrow$  mora biti manja od minimalnog iznosa  $1/T$

Minimizacija desne strane jednadžbe uvjeta robusne stabilnosti

$$|\Delta_m(s)| = |\Delta(s) W_2(s)| < \frac{1}{|T(s)|}$$

znači da treba MAKSIMIZIRATI  $|T(s)|$

Ako sustav ima rezonanciju

(npr. sustav 2. reda sa  $\zeta < 0.7$ )

tad će maksimalni iznos  $|T(j\omega)|$  za  $0 < \omega < \infty$  biti na rezonantnoj frekvenciji  $\omega_n$ .

Najmanji iznos destabilizirajuće neizvjesnosti naziva se **MULTIPLIKATIVNO OSIGURANJE STABILNOSTI** dan je sa

$$\text{MSM} \triangleq \frac{1}{M_m}, \quad \text{gdje je} \quad M_m = \sup_{\omega} |T(j\omega)|$$

*sup*  $\rightarrow$  supremum funkcije (*najmanja gornja granica*)



# Robusna stabilnost

## Multiplikativno osiguranje stabilnosti

$$\text{MSM} \triangleq \frac{1}{M_m}, \quad \text{gdje je } M_m = \sup_{\omega} |T(j\omega)|$$

$\sup \rightarrow$  supremum funkcije (najmanja gornja granica)

Supremum funkcije je najveća vrijednost funkcije iako je funkcija ne postigne.

Primjer.

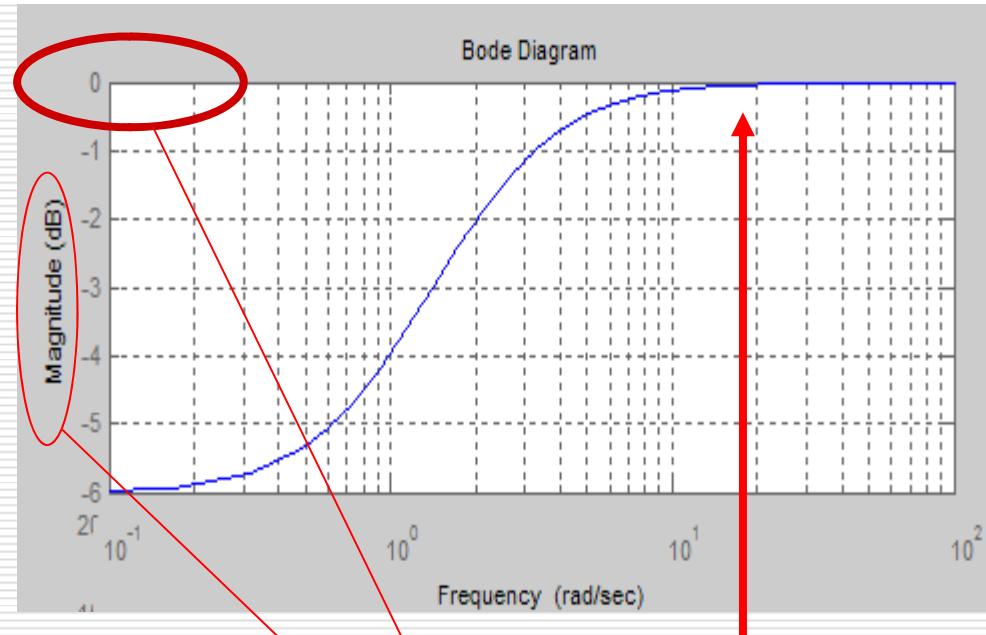
Funkcija  $T(s) = \frac{s+1}{s+2}$  nema rezonantni

maksimum nego se asimptotski približava vrijednosti 1 kako  $\omega \rightarrow \infty$

$$\sup_{\omega} \left( \frac{|j\omega + 1|}{|j\omega + 2|} \right) = 1$$

Sustav je **robusno stabilan** u odnosu na **nemodeliranu multiplikativnu neizvjesnost** ako je njezina amplitudna frekvencijska karakteristika manja od **MSM** tj.

$$(|\Delta_m|) < \text{MSM}$$





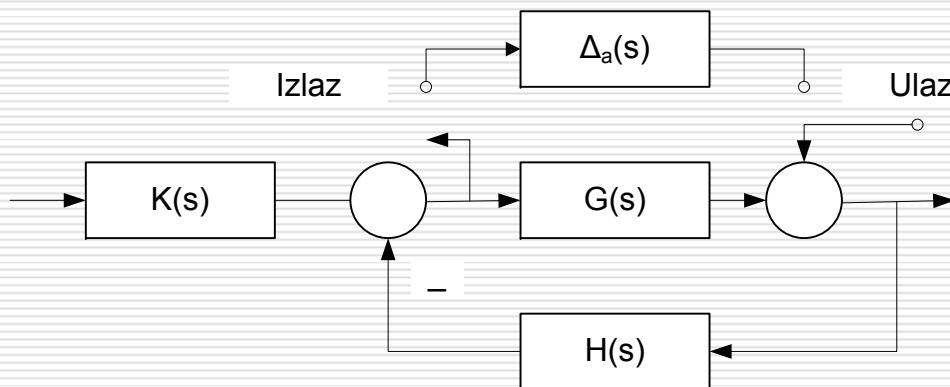
# Robusna stabilnost

## Aditivno osiguranje stabilnosti



### Aditivna neizvjesnost

Sa stajališta neizvjesnosti proces ima oblik



Aditivna neizvjesnost vidi slijedeću prijenosnu funkciju procesa

$$\frac{-H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Zatvoreni krug će biti robusno stabilan ako vrijedi

$$|\Delta_a(s)| < \left| \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)} \right|^{-1} = \frac{1}{|H(s)S(s)|}$$

gdje je  $S(s) = \frac{1}{|1 + G(s)H(s)|}$

Ako je neizvjesnost stabilna i ograničena

$$|\Delta_a(j\omega)| < |W(j\omega)|; \quad \forall \omega$$

zatvoreni sustav će biti robusno stabilan ako je:

$$|H(s)S(s)| < \frac{1}{W(s)};$$

odnosno

$$|W(s)H(s)S(s)| < 1$$

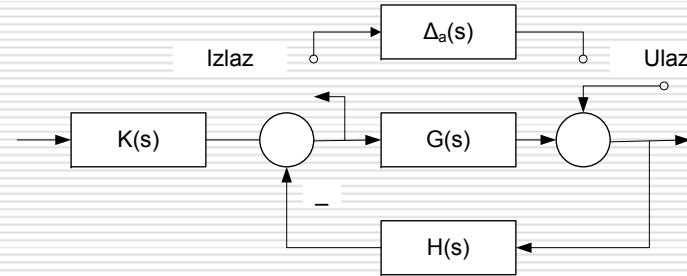


# Robusna stabilnost

Aditivno osiguranje stabilnosti



Aditivna neizvjesnost



$$|H(s)S(s)| < \frac{1}{W(s)}; \quad \text{odnosno} \quad |W(s)H(s)S(s)| < 1$$

Aditivno osiguranje stabilnosti je:

$$\text{ASM} \triangleq \frac{1}{\sup_{\omega} |H(j\omega)S(j\omega)|}$$



# Robusna stabilnost

## Svojstva



- Usporedba robusne stabilnosti s amplitudnim i faznim osiguranjem
- Amplitudno i fazno osiguranje
  - mora biti zadovoljeno na srednjim frekvencijama  $\omega_c, \omega_{\pi}$
  - Fazno osiguranje
    - dozvoljeno pojačanje do ruba stabilnosti
    - uvjet da ne dođe do promjena u fazi
    - mjera tolerancije faze bez promjene pojačanja
  - Amplitudno osiguranje
    - mjera tolerancije neizvjesnosti pojačanja bez promjeni faze
- MSM i ASM – općenitija mjera stabilnosti
  - (Naziv: pojačanje-faza osiguranje)
  - MSM omogućuje istovremenu promjenu pojačanja i faze u blizini frekvencija  $\omega_c, \omega_{\pi}$
- Robusna stabilnost
  - mora biti zadovoljena na svim frekvencijama
- Svojstva
  - Multiplikativna neizvjesnost može biti **bilo koja stabilna funkcija prijenosa** uz uvjet da je njena amplituda **ispod granice MSM**
  - Teorem malog pojačanja
    - daje dovoljne uvjete stabilnosti (ne i nužne)
    - Postoje stabilni sustavi kod kojih teorem malog pojačanja nije zadovoljen
  - MSM i ASM su često konzervativne mjere
    - sustavi mogu tolerirati neizvjesnosti koje ne zadovoljavaju ove mjere



# Uvjeti robusne stabilnosti

Oblici uvjeta stabilnosti za različite modele neizvjesnosti  
(uz jediničnu povratnu vezu)

Model neizvjesnosti (perturbacija)	Uvjet robusne stabilnosti
$[1 + \Delta(s)W_2(s)]G_n(s)$	$\ W_2(s)T(s)\ _{\infty} < 1$
$G_n(s) + \Delta(s)W_2(s)$	$\ W_2(s)K(s)S(s)\ _{\infty} < 1$
$\frac{G_n(s)}{1 + \Delta(s)W_2(s)G_n(s)}$	$\ W_2(s)G_n(s)S(s)\ _{\infty} < 1$
$\frac{G_n(s)}{1 + \Delta(s)W_2(s)}$	$\ W_2(s)S(s)\ _{\infty} < 1$



# Primjer

## Robusna stabilnost



Potrebito je analizirati robusnu stabilnost sustava danog nominalnom prijenosnom funkcijom

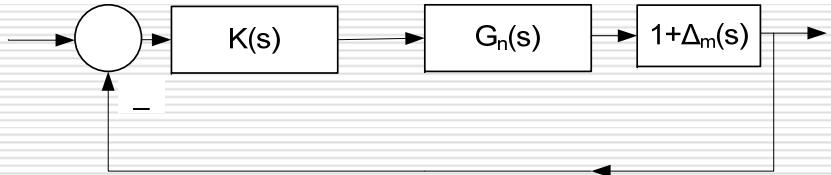
$$G_n(s) = \frac{17 \cdot 10^4 \cdot (s + 0.1)}{s(s + 3)(s^2 + 10s + 10^4)}$$

Zatvoreni sustav s jediničnom povratnom vezom bit će nestabilan, no smanjenjem pojačanja moguće ga je stabilizirati.

Ako se serijskim kompenzatorom  $K(s)=0.5$  stabilizira sustav, hoće li takav sustav biti robusno stabilan s obzirom na nemodelirani pol na 50 rad/s

### Rješenje

Shema sustava



Upotreba multiplikativne perturbacije u svrhu opisa neizvjesnosti uzrokovane nemodeliranom dinamikom

$$1 + \Delta_m(s) = \frac{50}{(s + 50)}$$

Odnosno

$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{(j\omega + 50)} \right|$$



# Primjer

## Robusna stabilnost

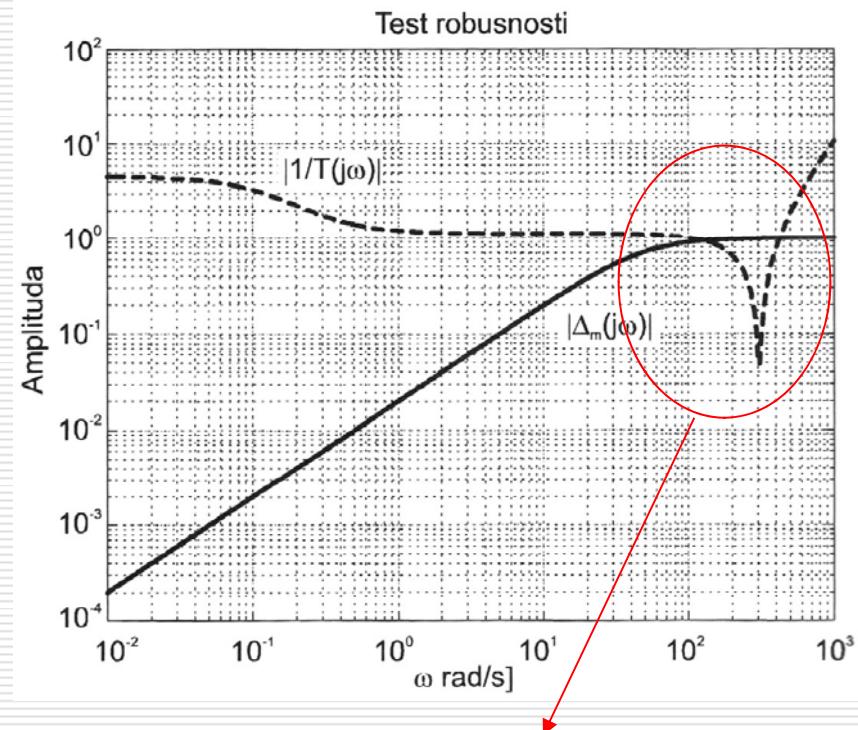


$$G_n(s) = \frac{17 \cdot 10^4 \cdot (s + 0.1)}{s(s + 3)(s^2 + 10s + 10^4)}$$

$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{(j\omega + 50)} \right|$$

Test robusne stabilnosti

- crtanje amplitudne frekvencijske karakteristike multiplikativne neizvjesnosti  $|\Delta_m(j\omega)|$
- Provjera da li je na svim frekvencijama ispod recipročne amplitudne frekvencijske karakteristike komplementarne funkcije osjetljivosti  $|1/T(j\omega)|$  uz upotrebljeni kompenzator  $K=0.5$



Kompenzator stabilizira nominalni sustav no ne zadovoljava robusnu stabilnost jer ne zadovoljava uvjet

$$|\Delta_m(j\omega)| < \left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega$$



# Primjer

## Robusna stabilnost



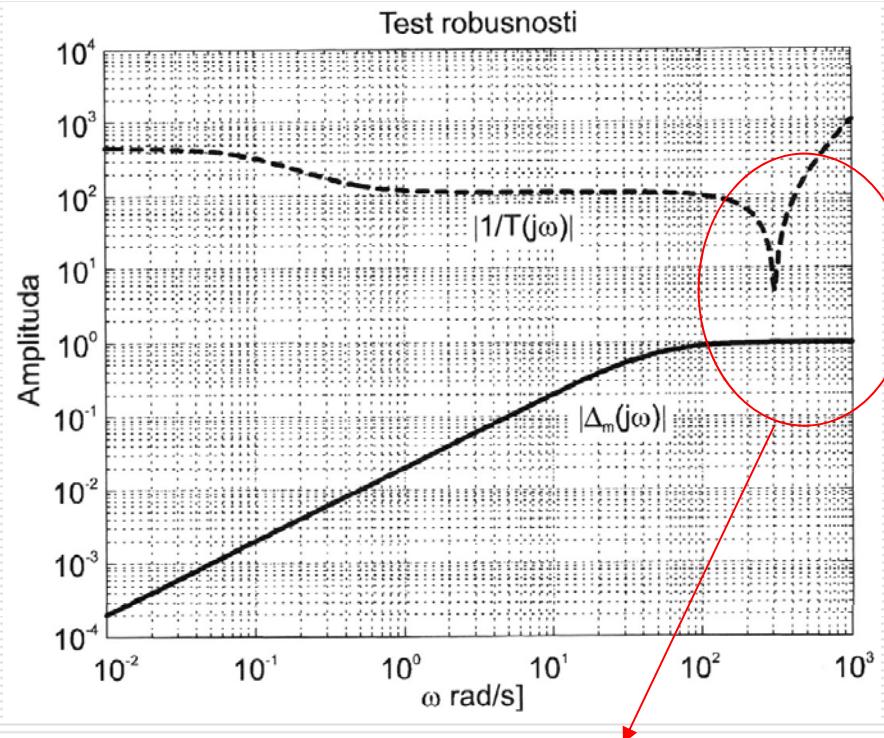
$$G_n(s) = \frac{17 \cdot 10^4 \cdot (s + 0.1)}{s(s+3)(s^2 + 10s + 10^4)}$$

$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{(j\omega + 50)} \right|$$

Ako se umjesto kompenzatora  $K(s)=0.5$  upotrijebi kompenzator  $K_1=5 \cdot 10^{-3}$  dobije se svojstvo robusne stabilnosti

Robusna stabilnost se može postići i kompenzatorom

$$K_2(s) = \frac{0.15(s+25)}{s+2.5}$$



Kompenzator stabilizira nominalni sustav i **zadovoljava robusnu stabilnost** jer zadovoljava uvjet

$$|\Delta_m(j\omega)| < \left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega$$



# Primjer

## Robusna stabilnost



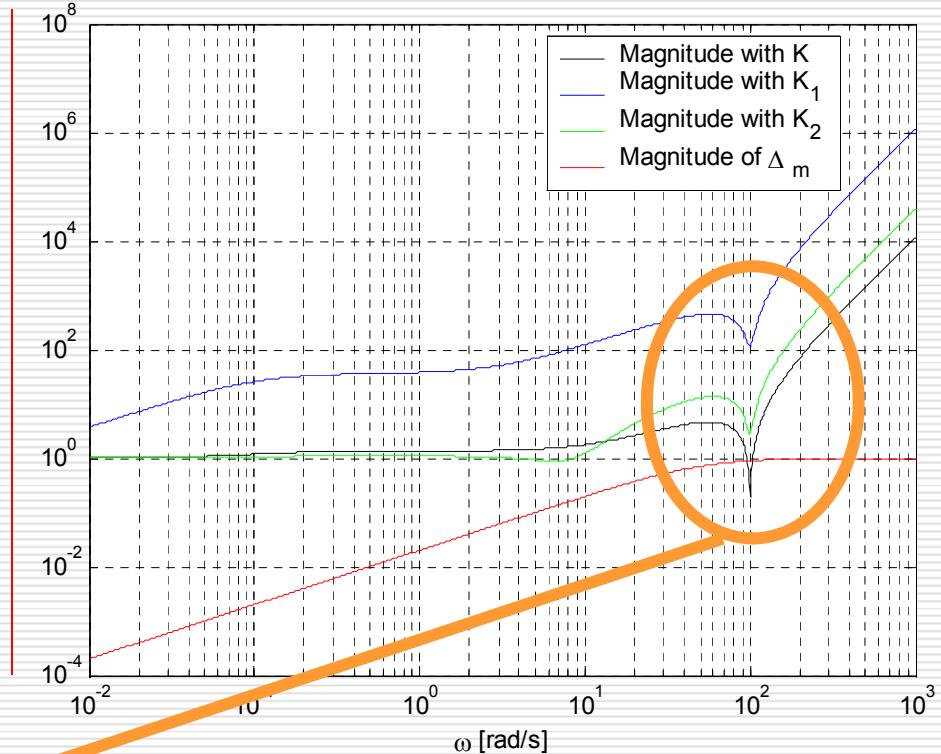
$$G_n(s) = \frac{17 \cdot 10^4 \cdot (s + 0.1)}{s(s + 3)(s^2 + 10s + 10^4)}$$
$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{(j\omega + 50)} \right|$$

Rezultati ako se umjesto kompenzatora  $K(s)=0.5$  upotrijebe kompenzatori:

$$K_1 = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$K_2(s) = \frac{0.15(s + 25)}{s + 2.5}$$

Kompenzatori  $K_1$  i  $K_2$  stabiliziraju nominalni sustav i **zadovoljavaju robusnu stabilnost jer zadovoljavaju uvjet**



$$|\Delta_m(j\omega)| < \left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega$$