

Adaptivno i robusno upravljanje

http://www.fer.hr/predmet/aru_a

Izv. prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: *zeljko.ban@fer.hr*



Izvodači nastave

□ Nositelji predmeta

- prof. dr. sc. Zoran Vukić
- prof. dr. sc. Željko Ban
 - C-09-08
 - e-mail: zeljko.ban@fer.hr
 - konzultacije: *iza predavanja*

□ Asistent

- Tomislav Pavlović, dipl. ing.
 - C-09-19
 - e-mail: tomislav.pavlovic@fer.hr

□ Stranica predmeta

- http://www.fer.hr/predmet/aru_a



Osnovni podaci o predmetu

- ECTS bodovi: 4
- Oblici izvođenja nastave
 - Predavanja:
 - 2 školska sata tjedno tijekom 13 tjedana
 - Domaće zadaće (*seminarski zadaci*)
 - 3 domaće zadaće
 - (u svakom nastavnom ciklusu po jedan)



Provjera znanja

kontinuirano praćenje nastave



Aktivnost	Najveći broj bodova
Domaće zadaće (DZ)	30 bodova
Međuispit (MI)	25 bodova
Završni ispit – pismeni (ZIP)	25 bodova
Završni ispit – usmeni (ZIU)	20 bodova

Uvjeti izlaska na završni ispit

- Odrađene sve DZ
 - skupljeno najmanje 15 bodova

Uvjeti za prolaz na ispitu

- Ukupno skupljeno najmanje 50 bodova
- Na MI ostvariti 50% bodova
- Na ZIP ostvariti 50% bodova
- Pozitivno ocijenjen završni usmeni ispit

Ocjenjivanje – fiksni pragovi

- | | |
|------------------|------|
| ■ Dovoljan (2) | 50 |
| ■ Dobar (3) | 62,5 |
| ■ Vrlo dobar (4) | 75 |
| ■ Izvrstan (5) | 87,5 |



Provjera znanja

ispitni rok



Aktivnost	Najveći broj bodova
Domaće zadaće (DZi)	10%
Pismeni ispit	40%
Usmeni ispit	50%

DZi = DZ/3 – (DZ bodovi ostvareni tijekom semestra od domaćih zadaća)

- Uvjeti izlaska na završni ispit
 - Odrađene sve DZ i skupljeno 50% bodova
- Uvjeti za prolaz na ispitul
 - Skupljeno barem 50% bodova iz DZ
 - Na pismenom ispitu ostvareno 50% bodova
 - Pozitivno ocijenjen usmeni ispit

- Ocjenvivanje – fiksni pragovi**
 - Dovoljan (2) 50
 - Dobar (3) 62,5
 - Vrlo dobar (4) 75
 - Izvrstan (5) 87,5



Provodenje provjere znanja

- Domaće zadaće
 - Zadaju se
 - u terminima predavanja (materijali za DZ bit će prisutni na web stranici predmeta)
 - Predaju se
 - do termina definiranog kod zadavanja zadatka
 - format DZ bit će definiran uputama
 - Blic provjera znanja iz područja domaće zadaće
- Međuispiti i završni ispiti
 - Međuispit se organizira kao pismeni ispiti
 - Za studente koji iz medicinski opravdanih razloga nisu mogli pristupiti međuispitu (odlukom nositelja predmeta) može se organizirati dodatni ispit koji će biti u usmenom obliku
 - Završni ispit organizira se kao pismeni i usmeni
 - Za studente koji iz medicinski opravdanih razloga nisu mogli pristupiti završnom ispitu (odlukom nositelja predmeta) može se organizirati dodatni ispit
 - Molba za nadoknadu predaje se tajnici zajedno s ispričnicom liječnika



Svrha predmeta

- Definiranje adaptivnog upravljanja
- Definiranje potrebe za adaptivnim ili robusnim upravljanjem
- Određivanje sustava pogodnih za adaptivno i robusno upravljanje
- Prikaz metoda adaptivnog i robusnog upravljanja



Cilj predmeta

-
- Pregled metoda adaptivnog upravljanja
 - Upravljanje s promjenjivim pojačanjem
 - Adaptivno upravljanje s referentnim modelom
 - Signalna adaptacija
 - Parametarska adaptacija
 - Adaptivno upravljanje zasnovano na kliznim režimima
 - Adaptivno upravljanje zasnovano na samopodesivim regulatorima
 - Određivanje strukture i parametara adaptivnog upravljanja
 - Određivanje referentnog modela
 - Identifikacija sustava
 - Robusno upravljanje
 - Pregled sustava pogodnih za robusno upravljanje
 - Izvedba robusnog upravljanja



Potrebna znanja

□ Automatika

- Automatsko upravljanje
- Signali i sustavi
- Modeliranje i simuliranje sustava

□ Matematika

- linearna algebra
- numerička matematika
- vjerojatnost i statistika

□ Računalna tehnologija

- Matlab



Sadržaj predmeta

Tj.	Predavanja			Seminar	
	Datum	Cjelina		Datum	Vježba
1.	06.03.2014 11h-13h B5	Uvodna razmatranja o predmetu: pregled nastavnih cjelina, organizacija provedbe nastave i ispita			
2.	13.03.2014 11h-13h B5	Pregled metoda adaptivnog upravljanja Gain scheduling			
3.	20.03.2014 11h-13h B5	Adaptivno upravljanje s referentnim modelom - parametarskom adaptacijom - signalnom adaptacijom			DZ1
4.	27.03.2014 11h-13h B5	Klizni režimi			
5.	03.04.2014 11-13h B5	Metode sa samopodesivim regulatorom - identifikacija modela			
6.	10.04.2014 11h-13h B5	Identifikacija parametara (dinamika, perzistencija, izvod min square, bias)			
7.	17.04.2014 11h-13h B5	Upravljanje po minimumu varijance			
08. 09.		Međuispit			
10.	08.05.2014 11h-13h	LQG			DZ2
11.	15.05.2014 11h-13h	Upravljanje na bazi postavljanja polova Kad upotrijebiti adaptivno, a kad robusno upravljanje			



Sadržaj predmeta

Tj.	Predavanja		Lab. vježbe	
	Datum	Cjelina	Datum	Vježba
14.	22.05.2014 11h-13h B5	Robusno upravljanje		
15.	29.05.2014 11h-13h B5	Strukturirane i nestrukturirane neizvjesnosti		
16.	05.06.2014 11h-13h B5	Problem malog pojačanja		DZ3
17.	12.06.2014 11h-13h B5	Caritonov teorem		
18. 19.		Završni ispit i Ponovljene provjere		



Literatura

- Vukić Z., Kuljača Lj.: *Automatsko upravljanje – Analiza linearnih sustava*, Kigen, Zagreb, 2005.
- Butler H.: *Model reference adaptive control - from theory to practice*, Prentice Hall, New York, 1992.
- Chalam V. V.: *Adaptive Control Systems - Techniques and Applications*, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1987.
- Levine W.S.: *The Control Handbook*, IEEE Press, CRC Press, 1996.
- Netushil A.: *Theory of automatic control (English translation)*, MIR Publishers, Moscow, 1978.
- Utkin V. I.: *Sliding Modes and their Application in Variable Structure Systems* (English translation), MIR Moscow, 1978.
- Åstrom K., Wittenmark B.: *Adaptive Control*, Reading, MA: Addison Wesley, 1989.
- Ioannou P. A., Sun J.: *Robust Adaptive Control*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- Narendra K. S., Annaswamy A. M.: *A new adaptive law for robust adaptation without persistent excitation*, IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-32, pp. 134-145, February 1987.
- Matlab, manual (i help u pdf. obliku)



Adaptivno upravljanje

(definicija)



- Sustav adaptivnog upravljanja
 - Regulacijski sustav koji se može prilagođavati promjenama unutar upravljanog sustava
 - Regulirani sustav koji se sastoji od
 - osnovne regulacijske petlje povratne veze
 - reguliranje procesa na temelju promjena procesnih signala
 - dodatne regulacijske petlje
 - kompenziranje promjene parametara reguliranog procesa
- Karakteristika adaptivnog upravljanja
 - Upravljanje u zatvorenoj petlji
 - Informacije o karakteristikama sustava se određuju za vrijeme rada sustava (*on-line*)
 - Osnovne funkcije u adaptivnom upravljanju
 - identifikacija nepoznatih parametara ili mjerjenje i računanje kriterija kvalitete (*performance index*)
 - Odabir upravljačke strategije
 - Djelovanje na sustav modifikacijom
 - signala
 - parametra
 - strukture



Upotreba adaptivnog upravljanja

- Razlozi za upotrebu adaptivnog upravljanja
 - promjene u dinamici procesa
 - promjena reda sustava tijekom rada
 - promjene parametara procesa
 - djelomično nepoznata dinamika ili parametri procesa
 - promjena radne točke nelinearnog sustava
 - promjene karakteristika upravljačkog signala ili smetnji
 - pojava stohastičkih smetnji
 - povećanje efikasnosti sustava
- Rješenje
 - Adaptivno upravljanje
 - Robusno upravljanje



Upotreba adaptivnog i robusnog upravljanja



□ Adaptivno upravljanje

- upotreba kad su unaprijed nepoznate promjene u procesu
- on-line estimacija parametara regulatora i određivanje oblika regulatora

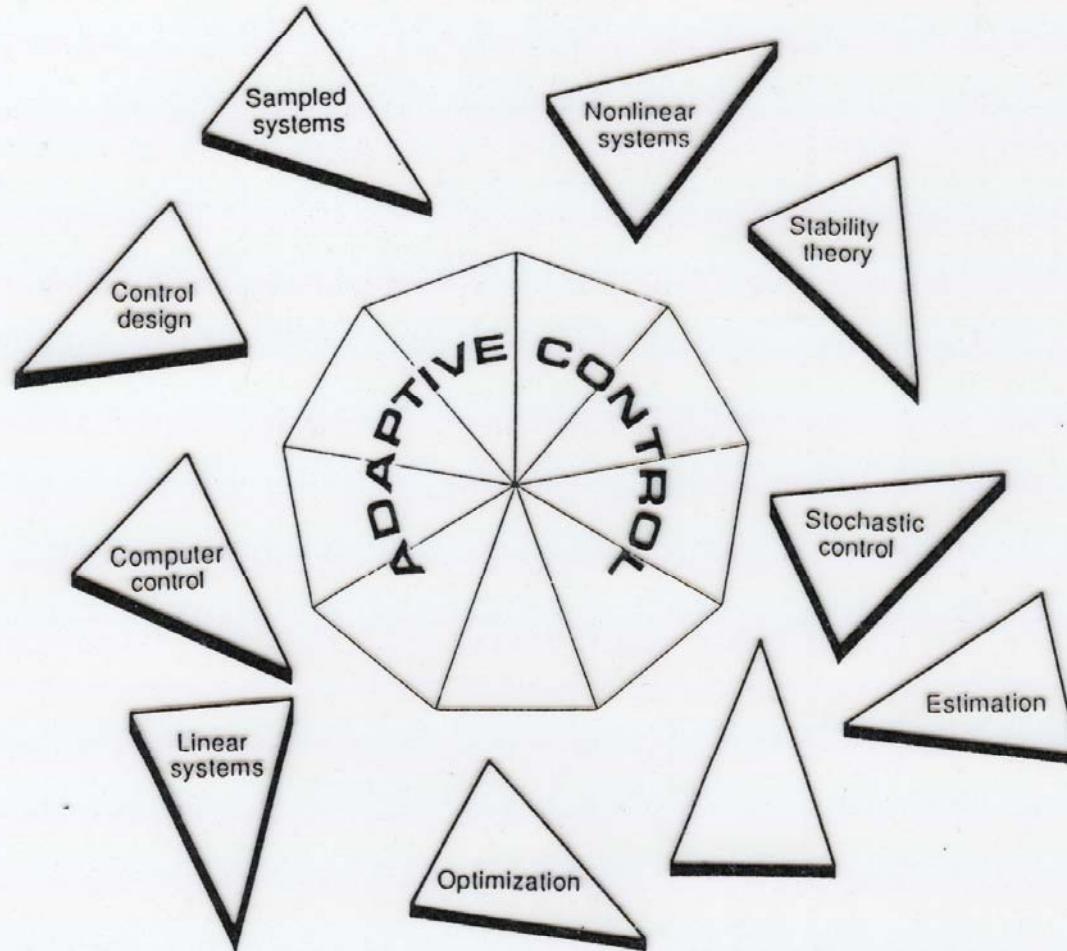
□ Robusno upravljanje

- poznata struktura procesa
- poznate granice promjene parametara

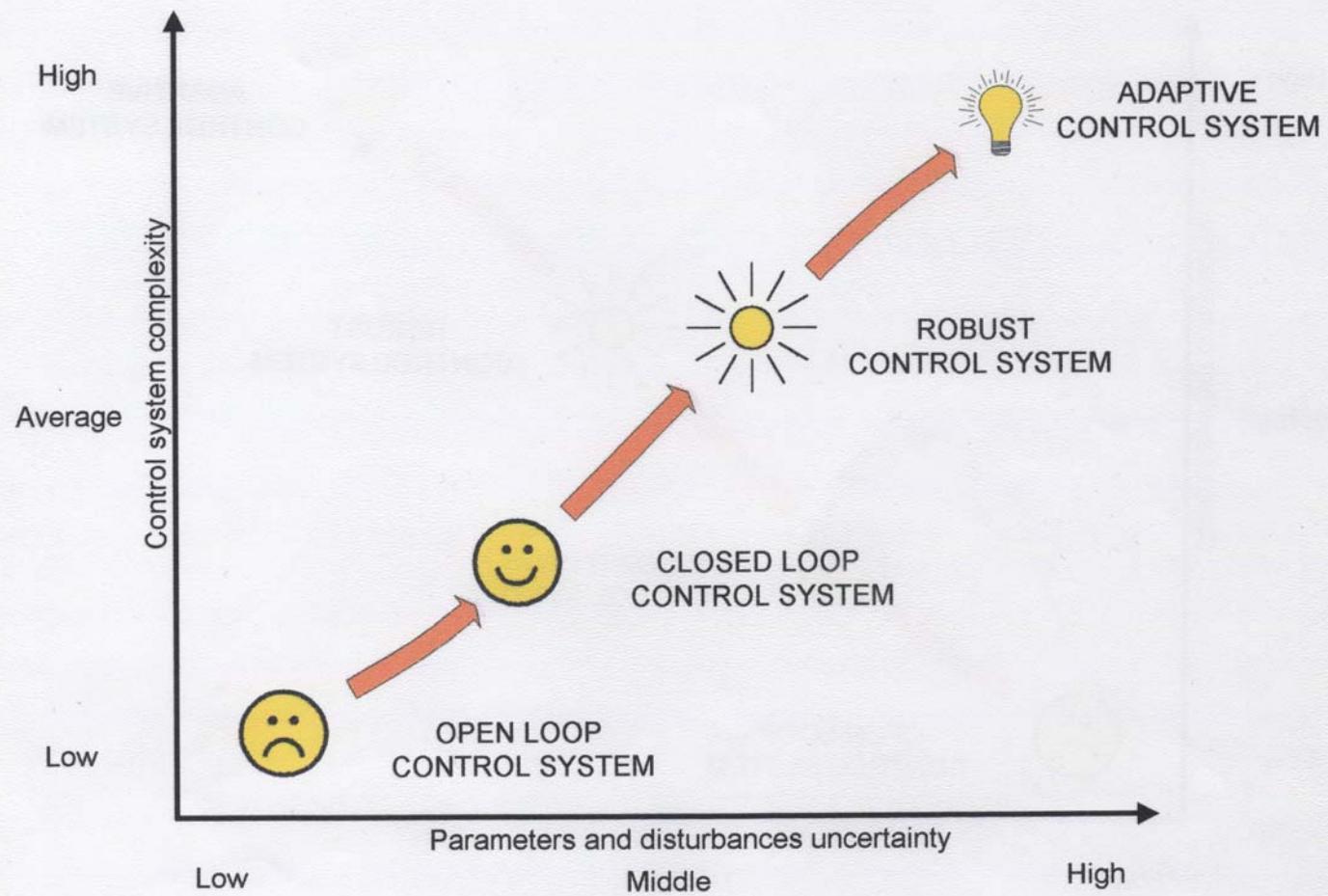


Adaptivno upravljanje

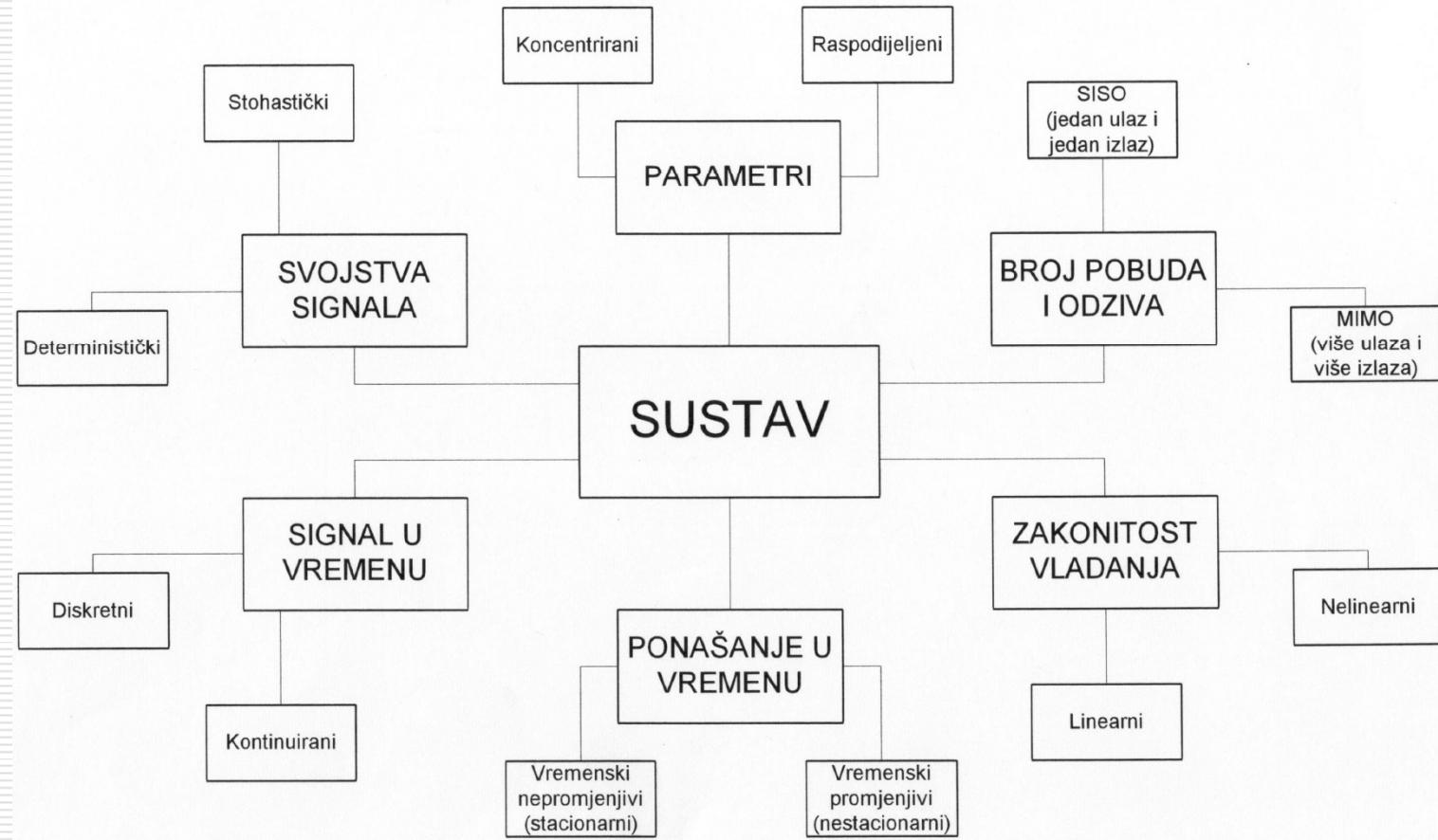
poveznica s drugim granama automatike



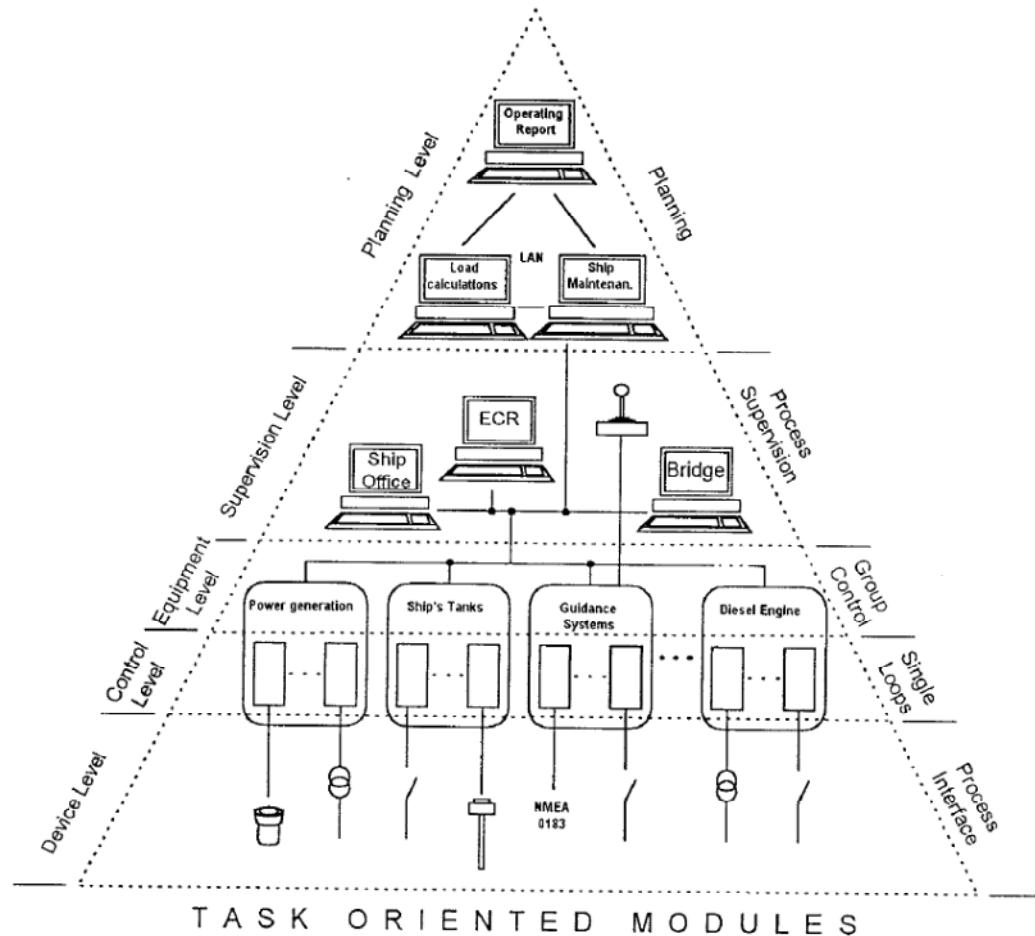
Složenost upravljanja



Podjela sustava



Hijerarhijsko distribuirano upravljanje

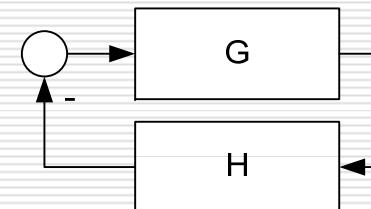
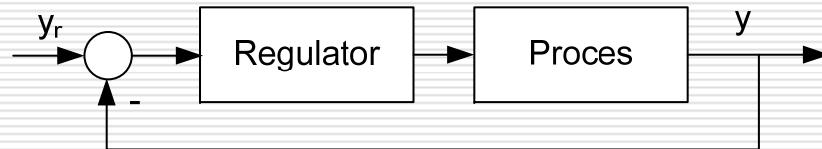


Problem osjetljivosti i stabilnosti

- Većina klasičnih regulatora
 - regulatori s negativnom povratnom vezom i fiksnim parametrima
 - Smanjenje osjetljivosti na promjene parametara povećanjem pojačanja petlje povratne veze

$$\text{Osjetljivost} = \frac{1}{1 + GH}$$

- Regulatori s visokim pojačanjem
 - velik iznos upravljačkog signala
 - smanjenje stabilnosti sustava
- Ograničena nesigurnost parametara procesa
 - Robusni regulatori (regulatori s povećanom kompleksnošću)
 - Potrebno je precizno poznavati
 - strukturu procesa
 - granice promjene parametara procesa



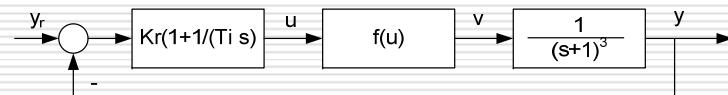
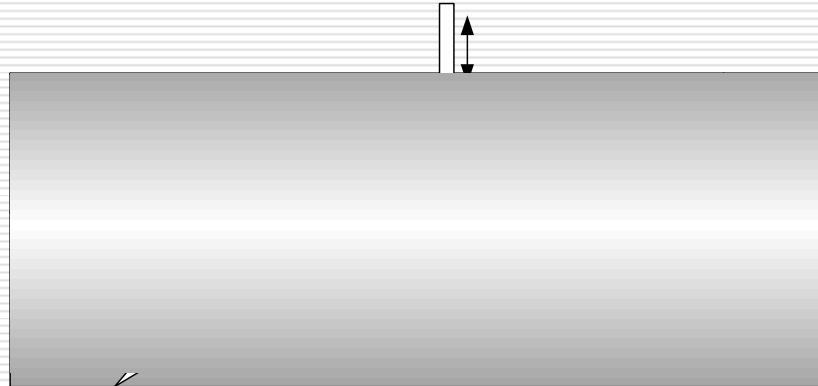


Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 1. Nelinearni ventil



- Ventil s nelienearnom statičkom karakteristikom kao dio procesa
- Linearizacija sustava oko radne točke
 - pojačanje petlje povratne veze proporcionalno $f'(u)$
- Sustav radi dobro u jednoj radnoj točci



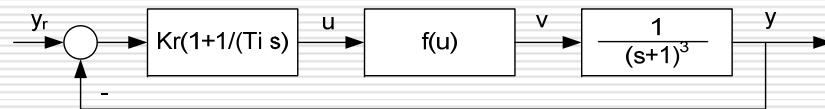
$$v = f(u) = u^4; \quad u \geq 0$$



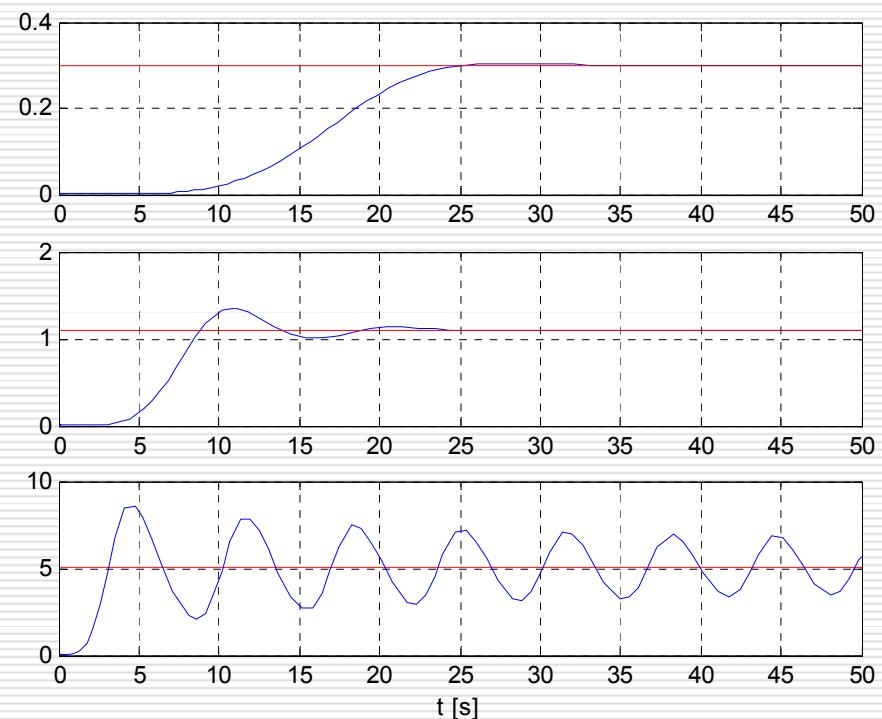
Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 1. Nelinearni ventil

- Odzivi sustava u raznim radnim točkama
 - Različito pojačanje regulacijske petlje
 - Različita oscilatornost i brzina odziva
- Parametri PI regulatora
 - $K_r=0.15$
 - $T_i \cdot 1$



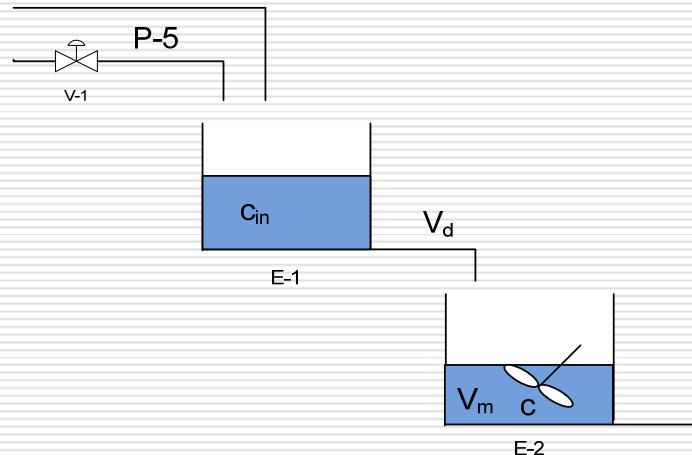
$$v = f(u) = u^4; \quad u \geq 0$$



Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 2. Upravljanje koncentracijom

- Regulacija koncentracije fluida regulacijom protoka kroz cijev
 - Prvi rezervoar nema miješanja
 - Drugi rezervoar ima idelano miješanje
 - varijable
 - c_{in} – koncentracija u ulaznom rezervoaru
 - V_d – volumen cijevi
 - V_m - volumen rezervoara
 - c – koncentracija u izlaznom rezervoaru
 - q protok



Balans masa

$$V_m \frac{dc(t)}{dt} = q(t)[c_{in}(t - \tau) - c(t)]$$

$$\tau = \frac{V_d}{q(t)}; \quad T = \frac{V_m}{q(t)}$$

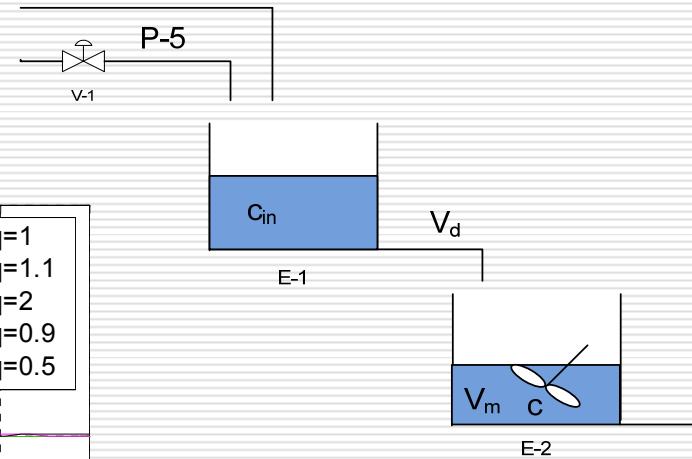
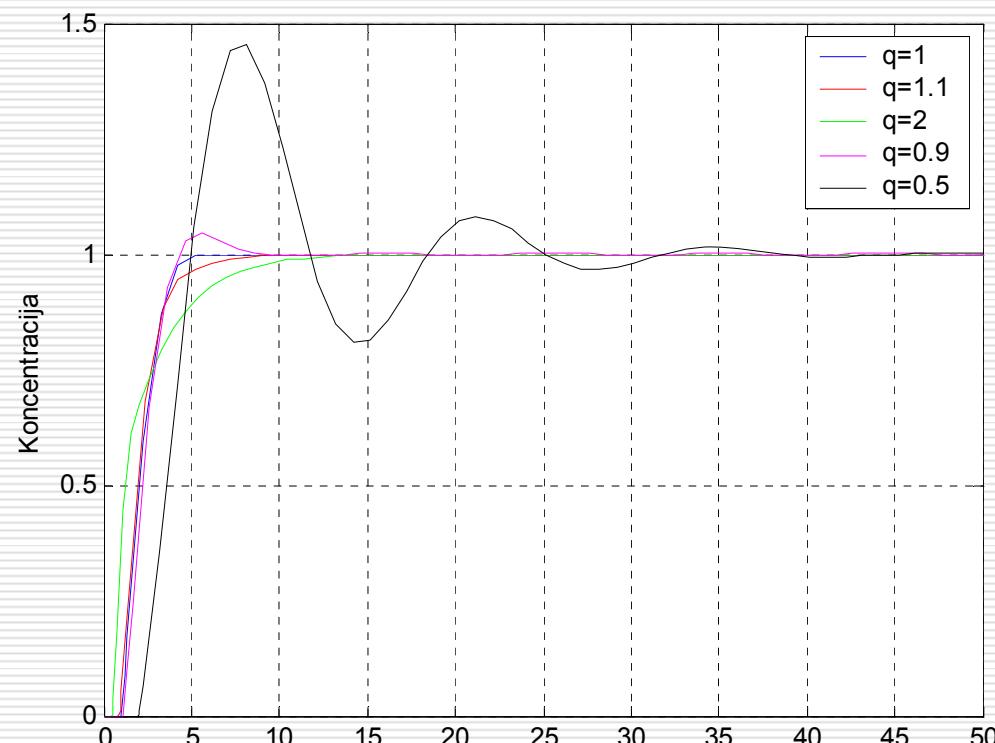
Prijenosna funkcija uz konstantan protok

$$G_0(s) = \frac{e^{-\tau s}}{1 + Ts}$$



Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 2. Upravljanje koncentracijom

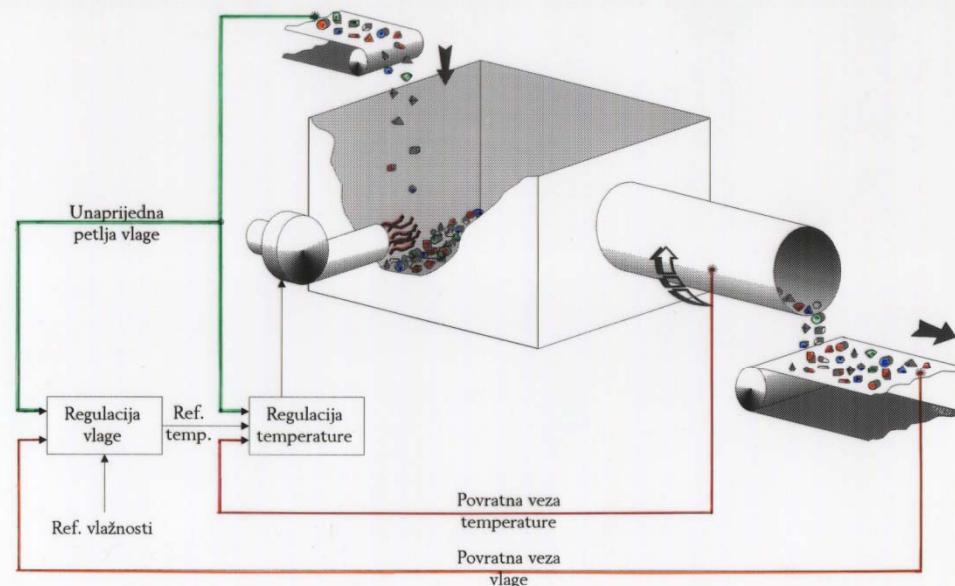


- PI – regulator
- $K_r = 0.5$
- $T_i = 1.1$
- $V_d = V_m = 1$

Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 3. Sustav sušenja materijala

- Rotacijski sušač
 - Kaskadna regulacija
 - Petlja po temperaturi
 - Petlja po vlažnosti
 - Predupravljanje po vlažnosti
- Teško odrediti potpuni model procesa
- Problem upravljanja konvencionalnim regulatorima
- Dinamika se mijenja sa
 - brzinom materijala kroz sušač
 - vlažnošću ulaznog materijala
 - brzinom proizvodnje (promjena mrtvog vremena)
- Konvencionalni regulator s konstantnim pojačanjem
 - konzervativno podešenje prema najvećem mrvom vremenu
- Kombinacija unaprijednog upravljanja (feedforward) i upravljanja u povratnoj vezi uz primjenu adaptivnog upravljanja



Podjela adaptivnog upravljanja

http://www.fer.hr/predmet/aru_a

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: zeljko.ban@fer.hr

1



Sadržaj predavanja

- Nastavak prikaza primjera sustava s promjenjivim parametrima ili radnom točkom
- Podjela adaptivnih regulatora
- Primjeri kad ne treba koristiti adaptivno upravljanje
- Adaptivni regulator s podesivim pojačanjem
- Ekstremalni adaptivni regulator

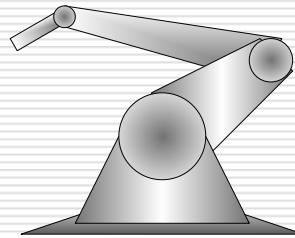


Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 4. Robotska ruka

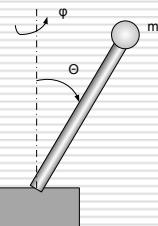


- Promjena momenta inercije robotske ruke
- Uzrok
 - Robot je nelinearan sustav
 - Moment inercije je ovisan o geometriji robota (položaju ruke)
- Primjer jednostavne robotske ruke s dva stupnja slobode



- Jednadžba dinamičke ravnoteže zakretnog momenta oko vertikalne osi

$$\frac{d}{dt} \left[J(\Theta) \frac{d\varphi}{dt} \right] = J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{dJ}{d\Theta} \frac{d\Theta}{dt} \frac{d\varphi}{dt} = M_t + M_e$$
- J – ukupni moment inercije motora i tereta
- M_e – moment motora
- M_t – moment trenja
- m_i – masa tereta



Adaptivno i robuno upravljanje

3



Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 4. Robotska ruka

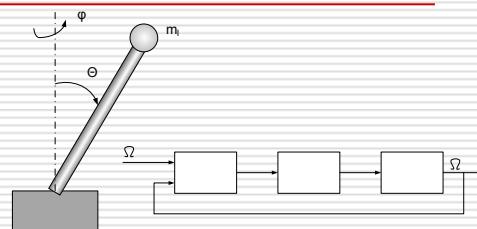


- Moment inercije ovisi o kutu
 - (moment inercije motora «momenta inercije tereta»)
$$J(\Theta, m_i) = \alpha + \beta m_i + (\gamma + \delta m_i) \sin^2 \Theta$$
- Manji utjecaj tereta uz postojanje reduktora

$$J = J_m + \frac{1}{N^2} J_t$$
 - J_m – moment inercije motora
 - J_t – moment inercije tereta
- DC motor uz povratnu vezu struje armature
 - uz zanemarenje momenta trenja
 - uz konstantan kut Θ ($J(\Theta)=\text{const}$)

$$M_e = kI_a$$

$$J \frac{d\Omega}{dt} = M_e$$



- Regulator PI tipa

$$I_a = K \left[\alpha \Omega_{ref} - \Omega + \frac{1}{T_i} \int_0^t (\Omega_{ref} - \Omega) d\tau \right]$$
- Diferencijalna jednadžba

$$J \frac{d^2\Omega}{dt^2} + kK \frac{d\Omega}{dt} + \frac{kK}{T_i} \Omega = \alpha kK \frac{d\Omega_{ref}}{dt} + \frac{kK}{T_i} \Omega_{ref}$$
- Odabrani parametri regulatora

$$K = \frac{2\zeta_0 \omega_0 J}{k} \quad T_i = \frac{2\zeta_0}{\omega_0}$$

Adaptivno i robuno upravljanje

4



Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 4. Robotska ruka

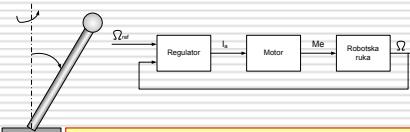


- Prijenosna funkcija zatvorenog kruga Ω / Ω_{ref}

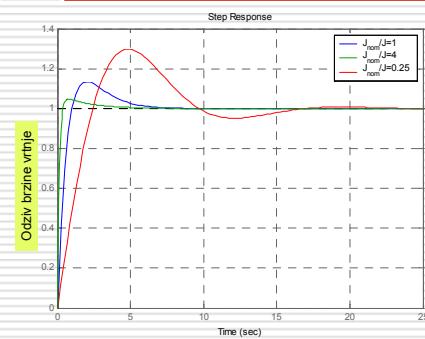
$$G(s) = \frac{2\alpha\zeta_0\omega_0 s + \omega_0^2}{s^2 + 2\zeta_0\omega_0 s + \omega_0^2}$$

- Parametrom α podešava se nadvišeње odziva
- Pojačanje regulatora K treba biti proporcionalno ukupnom momentu inercije
 - Uz regulator podešen prema nominalnom momentu inercije J_{nom}
 - primijenjen na sustav s momentom inercije J
 - Karakteristična jednadžba
- $s^2 + 2\zeta_0 \frac{J_{nom}}{J} \omega_0 s + \frac{J_{nom}}{J} \omega_0^2 = 0$
- Prigušenje

$$\zeta = \zeta_0 \sqrt{\frac{J_{nom}}{J}}$$



Odzivi



Adaptivno i robusno upravljanje

5



Sustavi nepogodni za klasične regulatore

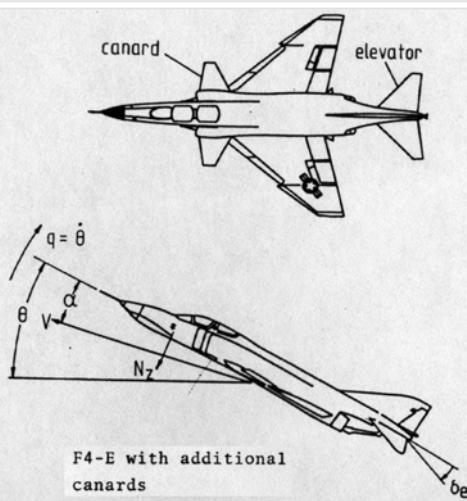
Prim. 5. Avion – F4-E



- Avion s dodatnim krilima (canards) za povećanje brzine reakcije
 - povećanje brzine manevriranja
 - smanjenje stabilnosti
- Dinamika aviona ovisi o
 - brzini (V [Mach = 334m/s])
 - visini
 - napadnom kutu (α) (kut između osi aviona i vektora brzine)
- Linearizacija oko stacionarnih uvjeta letenja
- Varijable stanja
 - $x_z = N_z$
 - (normalno ubrzanje (okomito na os aviona))
 - $x_\theta = q = d\theta/dt$
 - (brzina propinjanja (pitch rate))
 - $x_e = \delta_e$
 - (kut elerona (elevatora))
- Dinamika servo pogona elerona i canardsa ima prijenosnu funkciju

$$\frac{\delta_e}{u} = \frac{a}{s+a}, \quad a = 14$$

$$\dot{\delta}_e = -a\delta_e + au$$



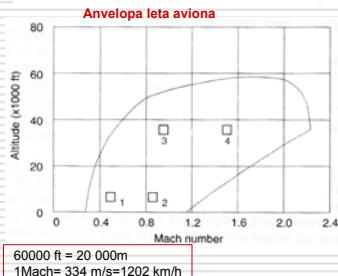
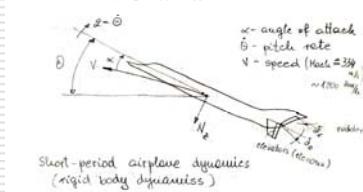
Adaptivno i robusno upravljanje

6



Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 5. Avion



- Prema slici prikaza anvelope leta aviona

- područje mogućih stanja dijeli se na 4 područja
- identifikacija parametara aviona u svakom od 4 područja leta

Varijable stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{N}_z \\ \dot{q} \\ \dot{\delta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_z \\ q \\ \delta_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ a \end{bmatrix} u$$

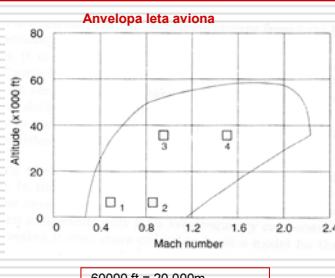
Adaptivno i robuno upravljanje

7



Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 5. Avion



Karakteristične
vrijednosti

Parametri prema područjima leta

Flight Condition	1	2	3	4
Mach (1 Mach ≈ 334 [m/s])	0.5	0.85	0.9	1.5
Altitude [feet]	5000	5000	35000	35000
a_{11}	-0.9896	-1.702	-0.667	-0.5162
a_{12}	17.41	50.72	18.11	26.96
a_{13}	96.15	263.5	84.34	178.9
a_{21}	0.2648	0.2201	0.08201	-0.6806
a_{22}	-0.8512	-1.418	-0.6587	-1.225
a_{23}	-11.39	-31.99	-10.81	-30.38
b	-97.78	-272.2	-85.09	-175.6
λ_1 (short period dynamics)	-2.07	-4.90	-1.87	-0.87+j4.3
λ_2 (short period dynamics)	1.23	1.78	0.56	-0.87-j4.3

Nestabilno
Podzvučna brzina Slabo
prigušeno
Nadzvučna brzina

Varijable stanja

$$\begin{bmatrix} \dot{N}_z \\ \dot{q} \\ \dot{\delta}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_z \\ q \\ \delta_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ a \end{bmatrix} u$$

- Parametri dinamike modela aviona ovise o režimu leta

- Nestabilno ponašanje kod podzvučnog leta (pozitivni polovi sustava)
- autopilot mora biti određen za različite uvjete leta
- Izvedba autopilota na osnovi programiranog pojačanja (gain scheduling)

Adaptivno i robuno upravljanje

8

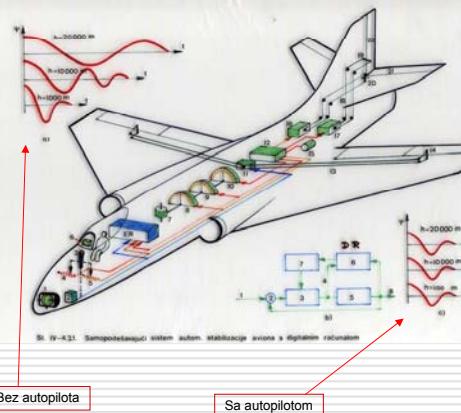


Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 5. Avion



- Dinamika aviona mijenja se s režimom letenja
- Autopilot izведен kao regulator na osnovi programiranog pojačanja (*gain scheduling*)
- Parametri regulatora određuju se na osnovi mjerjenja:
 - dinamičkog tlaka
 - Mahovog broja
- Prefilteri se koriste između komandnih signala pilota i izvršnih elemenata
 - Osiguravaju se ograničenja u kojima se avion ponaša kao kruto tijelo
 - ne pobudjuju se karakteristične frekvencije savijanja aviona



Adaptivno i robusno upravljanje

9

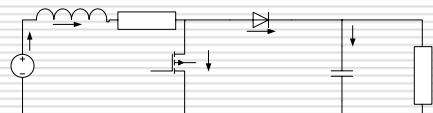


Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 6. Uzlazni DC/DC pretvarač



- Nelinearni sustav kojem se mijenjaju pojačanja i vremenske konstante s promjenom radne točke
- Varijable i parametri pretvarača
 - C_1 - kapacitet kondenzatora, [F]
 - i_{L1} - struja induktiviteta, [A],
 - L_1 - induktivitet, [H],
 - R_1 - otpor tereta, [Ω],
 - R_{L1} - otpor zavojnice, [Ω],
 - v_{C1} - napon na kondenzatoru, [V],
 - v_{in} - ulazni napon, [V]
 - d - postotak vođenja sklopke (duty cycle)
- Model pretvarača ovisi o vođenju sklopke
- Kod vođenja sklopke T_1



Kod nevođenja sklopke

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L1} \\ \dot{v}_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{L1}}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in},$$

$$v_{out} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \end{bmatrix} + [0] v_{in},$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L1} \\ \dot{v}_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{L1}}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in},$$

$$v_{out} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \end{bmatrix} + [0] v_{in}.$$

Adaptivno i robusno upravljanje

10



Sustavi nepogodni za klasične regulatore

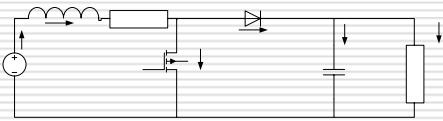
Prim. 6. Uzlazni DC/DC pretvarač



- Usrednjeni model pretvarača

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L1} \\ \dot{v}_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{L1}}{L_1} & -\frac{1-d}{L_1} \\ \frac{1-d}{C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} [v_{in}],$$

$$v_{out} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \end{bmatrix} + [0] v_{in},$$



$$G_{c1}(s) = \frac{v_{out}(s)}{d(s)} = \frac{K_1(1-T_b s)}{T_n^2 s^2 + 2T_n \zeta s + 1}$$

$$G_{c2}(s) = \frac{v_{out}(s)}{v_{in}(s)} = \frac{K_2}{T_n^2 s^2 + 2T_n \zeta s + 1}$$

- Prijenosne funkcije izlaznog napona pretvarača u odnosu na
 - upravljačku veličinu d
 - ulazni napon v_{in} (Poremećaj)
- Prijenosne funkcije s promjenjivim koeficijentima
- Koeficijenti ovisni o radnoj točci
 - ulazni napon
 - upravljački signal d
 - struja kroz induktivitet

$$K_1 = \frac{V_{C1}}{1-d} - \frac{I_{L1} \cdot R_{L1}}{(1-d)^2},$$

$$T_b = \frac{I_{L1} \cdot L_1}{(1-d) \cdot V_{C1} - R_{L1} \cdot I_{L1}},$$

$$K_2 = \frac{1}{1-d},$$

$$T_n = \frac{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}{1-d},$$

$$\zeta = \frac{\sqrt{L_1 \cdot C_1} \left(\frac{R_{L1}}{L_1} + \frac{1}{R_1 \cdot C_1} \right)}{2(1-d)}.$$

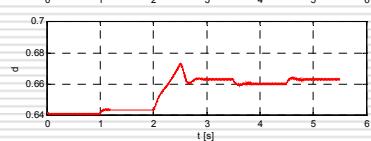
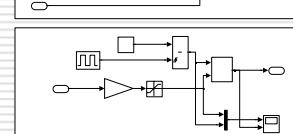
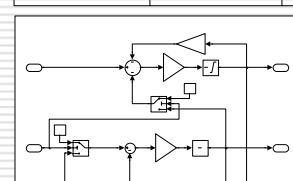
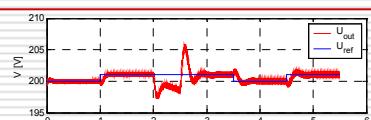
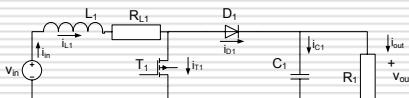
Adaptivno i robusno upravljanje

11



Sustavi nepogodni za klasične regulatore

Prim. 6. Uzlazni DC/DC pretvarač



Adaptivno i robusno upravljanje

12



Problem adaptivnog upravljanja



- Primjeri sustava pokazuju zašto je adaptivno upravljanje potrebno
- Industrijski procesi su kompleksni
 - varijacija parametara
- Prednost u upotrebi inteligentnog regulatora
- Adaptivna regulacija ne zamjenjuje znanje o procesu koje je potrebno za određivanje
 - specifikacije postrojenja
 - strukture regulatora
 - dizajna regulatora
- Adaptive regulator sadrži
 - Upravljački zakon s podešivim parametrima ili signalima
 - strukturu regulatora
 - Odziv sustava s zatvorenom petljom povratne veze određen je:
 - referentnim modelom
 - specifikacijama kod dizajniranja regulatora
 - Proceduru proračuna koja mora biti pogodna za on-line računanje
 - Osjećavanje parametara (signala) ili strukture zasnovano na mjerenjima
 - implementacija zakona upravljanja



Primjer sustava s varijabilnim parametrima

Ne treba adaptivno upravljanje



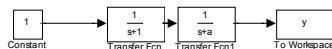
- Sustav s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga

$$G_0(s) = \frac{1}{(s+1)(s+a)}$$

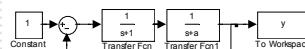
- Parametar a :

- $a = -0.01$
- $a = 0$
- $a = 0.01$

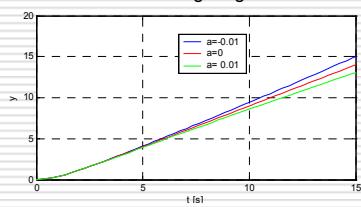
- Blok shema otvorenog kruga



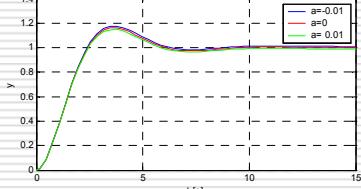
- Blok shema zatvorenog kruga



Odziv otvorenog kruga



Prijelazna pojava zatvorenog kruga





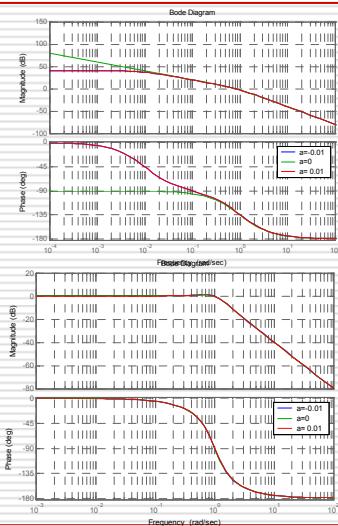
Primjer sustava s varijabilnim parametrima

Ne treba adaptivno upravljanje



- Sustav s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga
- $$G_0(s) = \frac{1}{(s+1)(s+a)}$$
- Parametar a:
 - a = -0.01
 - a = 0
 - a = 0.01
- Prijenosna funkcija zatvorenog kruga

$$\begin{aligned} G_z(s) &= \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{s^2 + (1+a)s + 1 + a} \\ &= \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ \omega_n &= \sqrt{1+a} \\ \zeta &= \frac{\sqrt{1+a}}{2} \end{aligned}$$



Frekvenčijska karakteristika
otvorenog kruga

Frekvenčijska karakteristika
zatvorenog kruga

Adaptivno i robusno upravljanje

15

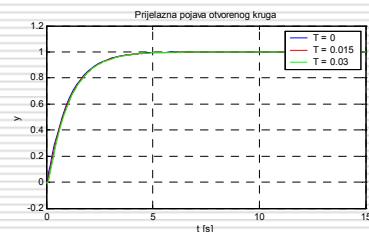
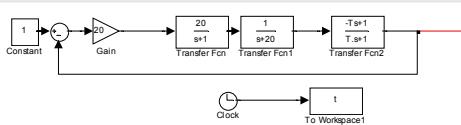


Primjer sustava s varijabilnim parametrima

Treba adaptivno upravljanje



- Sustav s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga
- $$G_0(s) = \frac{20(1-sT)}{(s+1)(s+20)(1+Ts)}$$
- Parametar a:
 - T = 0
 - T = 0.015
 - T = 0.03
- Blok shema zatvorenog kruga



Adaptivno i robusno upravljanje

16



Primjer sustava s varijabilnim parametrima

Treba adaptivno upravljanje

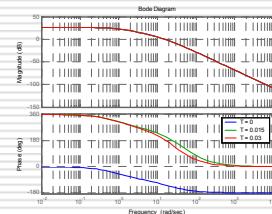


- Sustav s prijenosnom funkcijom otvorenog kruga

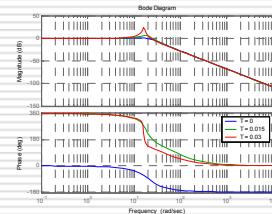
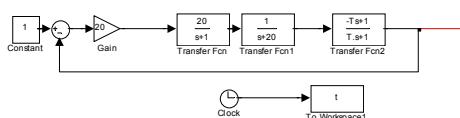
$$G_0(s) = \frac{20(1-sT)}{(s+1)(s+20)(1-Ts)}$$

- Parametar a :

- $T = 0$
- $T = 0.015$
- $T = 0.03$



- Blok shema zatvorenog kruga

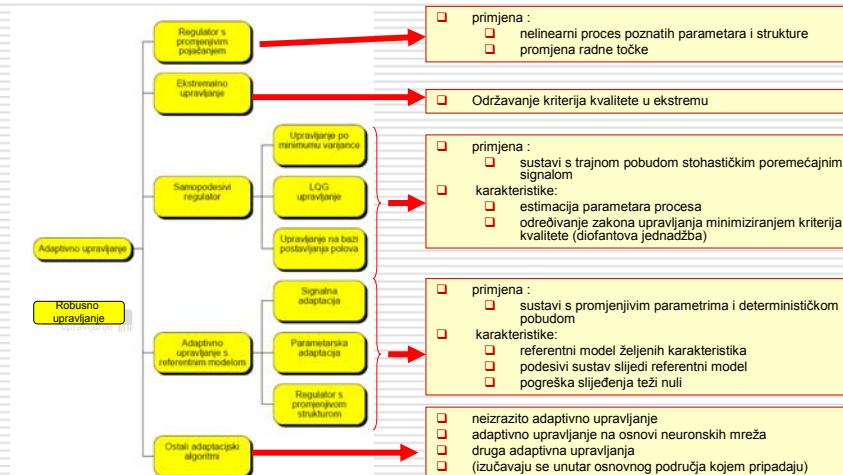


Adaptivno i robusno upravljanje

17



Podjela adaptivnog upravljanja



Adaptivno i robusno upravljanje

18



Regulator s promjenjivim pojačanjem

Gain scheduling



- Primjena za regulaciju:
 - nelinearnih procesa
 - poznatih parametara i strukture
 - promjena radne točke
- Karakteristike:
 - opis područja radnih točaka parametarskom funkcijom (parametar)
 - linearizacija procesa u cijelom radnom području ili za konačan broj radnih točaka
- Rad regulatora
 - mjerjenje parametra prema kojem se podešava regulator
 - određivanje radne točke i računanje
 - upravljačke varijable
 - izlaza iz regulatora
 - izlazne veličine
 - određivanje pojačanja regulatora



Regulator s promjenjivim pojačanjem

Opis



- Promjena radne točke – promjena dinamičkih karakteristika sustava
 - promjena pojačanja regulatora – održanje istih karakteristika u cijelom području upravljanja
- Ideja
 - Linearizacija procesa u više radnih točaka
 - Određivanje pojačanja za svaku radnu točku
- Opis nelinearnog sustava
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_s(t)),$$
$$y(t) = g(x(t))$$
 - gdje su
 - f - nelinearna vektorska jednadžba varijabli stanja,
 - g - nelinearna izlazna funkcija,
 - t - vrijeme,
 - u_s - upravljački signal,
 - x - vektor varijabli stanja nelinearnog sustava,
 - y - izlazna varijabla.
- Područje radnih točaka (x_t, u_t)
 - opis parametarskom jednadžbom
$$f_1(x_t(\lambda), u_t(\lambda)) = 0$$
 - f_1 – parametarska funkcija kojom su određene radne točke s obzirom na parametar λ
 - x_t, u_t – varijable stanja i upravljačka varijabla u radnoj točci
 - λ – parametar za određivanje radne točke



Regulator s promjenjivim pojačanjem

Opis



Linearizacija

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= \underline{A}(\lambda)\tilde{x}(t) + \underline{b}(\lambda)\tilde{u}_s(t), \\ \tilde{y}(t) &= \underline{c}^T(\lambda)\tilde{x}(t),\end{aligned}$$

- $\underline{A}(\lambda) = \underline{D}_r \underline{f}(\underline{x}_r(\lambda), u_r(\lambda))$ - matrica stanja sustava dobivena linearizacijom u radnoj točki $(\underline{x}_r(\lambda), u_r(\lambda))$,
 $\underline{b}(\lambda) = \underline{D}_r \underline{f}_x(\underline{x}_r(\lambda), u_r(\lambda))$ - ulazna matrica sustava dobivena linearizacijom u radnoj točki $(\underline{x}_r(\lambda), u_r(\lambda))$,
 $\underline{c}^T(\lambda) = \underline{D}_r \underline{f}_y(\underline{x}_r(\lambda))$ - izlazna matrica sustava dobivena linearizacijom u radnoj točki $(\underline{x}_r(\lambda), u_r(\lambda))$,
 $\tilde{u}_s(t) = u_s(t) - u_r(\lambda)$ - odstupanje upravljačkog signala od vrijednosti u radnoj točci,
 $\tilde{x}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}_r(\lambda)$ - odstupanje vektora varijabli stanja od radne točke,
 $\tilde{y}(t) = y(t) - g(\underline{x}_r(\lambda))$ - odstupanje izlazne varijable od radne točke.

Uz uvjete stabilnosti dobije se skup regulatora

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= A_r(\lambda)z(t) + B_r(\lambda)\varepsilon(t), \\ u_s(t) &= C_r(\lambda)z(t) + D_r(\lambda)\varepsilon(t)\end{aligned}$$

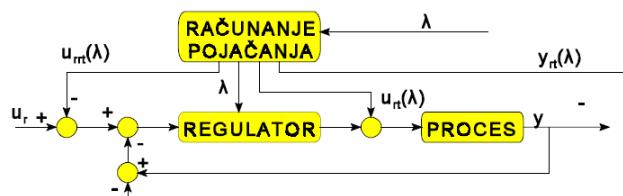


Regulator s promjenjivim pojačanjem

Opis



Opći oblik regulatora s promjenjivim pojačanjem





Regulator s promjenjivim pojačanjem

Opis



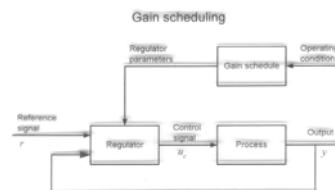
Prednosti

- brza adaptacija
- jednostavna implementacija

Mane

- neočekivana promjena u procesu *(promjena koja nije uzeta u obzir kod dizajna regulatora)*
- uzrokuje neželjeno ponašanje

Češći oblik regulatora s promjenjivim pojačanjem



Regulator s promjenjivim pojačanjem

Primjer



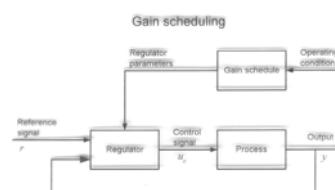
Prednosti

- brza adaptacija
- jednostavna implementacija

Mane

- neočekivana promjena u procesu *(promjena koja nije uzeta u obzir kod dizajna regulatora)*
- uzrokuje neželjeno ponašanje

Češći oblik regulatora s promjenjivim pojačanjem





Regulator s promjenjivim pojačanjem

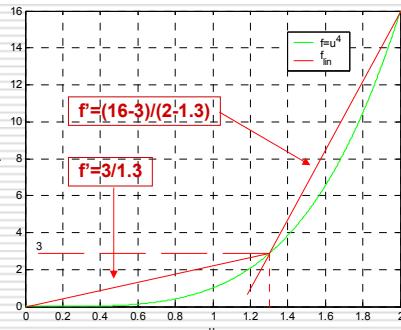
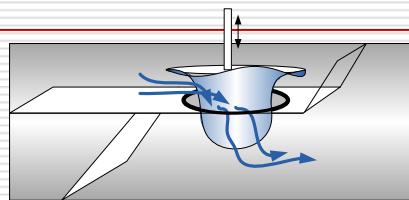
Primjer - ventil



- Ventil s nelienearnom statičkom karakteristikom kao dio procesa
- Linearizacija sustava oko dvije radne točke na karakteristici ventila
 - pojačanja petlje povratne veze proporcionalno $f'(u)$
- poboljšanje ponašanja



$$v = f(u) = u^4; \quad u \geq 0$$



Adaptivno i robuno upravljanje

25

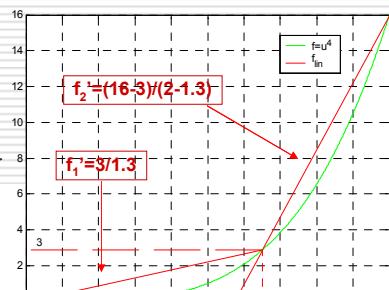
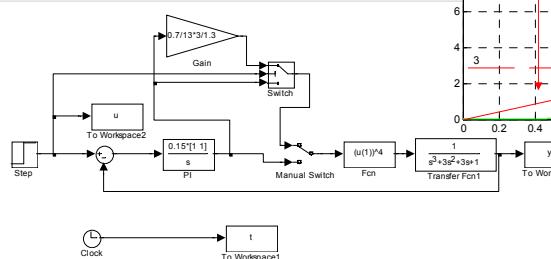


Regulator s promjenjivim pojačanjem

Primjer - ventil



- Varijabla uza određivanje radne točke je u_r
- Regulator projektiran za protok manji od 3
- Korekcija pojačanja
 - Za referencu manju od 3 se ne korigira pojačanje
 - Za referencu veću od 3 pojačanje se svodi na iznos 3/13
 - množenje s recipročnom vrijednošću nagiba karakteristike f'_2 i
 - korekcija na pojačanje početnje krivulje (množenje s 3/1.3)



Adaptivno i robuno upravljanje

26



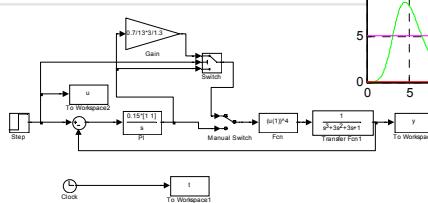
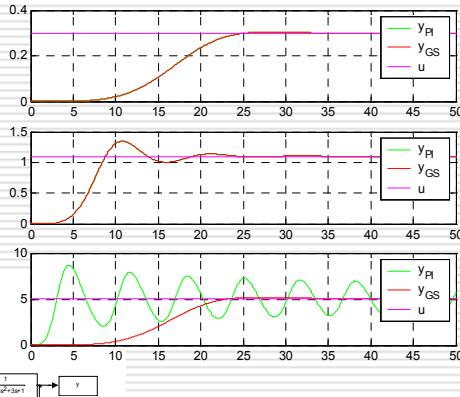
Regulator s promjenjivim pojačanjem

Primjer - ventil



□ Odzivi

- Za referencu manju od 3 nema korekcije (PI i GS su isti)
 - Za referencu veću od 3 GS bolji odziv
- Poboljšanje ponašanja
- regulator projektirati u više točaka



Adaptivno i robuno upravljanje

27



Regulator s promjenjivim pojačanjem

Prim. 2. Uzlazni DC/DC pretvarač napajan gorivnim člankom

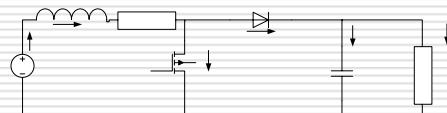


□ Usrednjeni model pretvarača

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_{L1} \\ \dot{v}_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_{L1}}{L_1} & -\frac{1-d}{L_1} \\ \frac{1-d}{C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} v_{in},$$

$$v_{out} = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} i_{L1} \\ v_{C1} \end{bmatrix} + [0] v_{in},$$

- Pojačanje pretvarača ovisi o V_{C1} i d
- Prigušenje sustava ovisi o izlaznom otporu R_1 i upravljačkoj varijabli d
- Upravljačka varijabla d je mjera izlaznog napona
- Projektiranje regulatora s promjenjivim pojačanjem
 - Pojačanje regulatora ovisi o izlaznom napunu i otporu
 - Izlazni otpor se određuje iz izlaznog napona i izlazne struje
 - Izlazni napon i izlazna struja se mijere



$$G_{c1}(s) = \frac{v_{out}(s)}{d(s)} = \frac{K_1(1-T_bs)}{T_n^2 s^2 + 2T_n \zeta s + 1}$$

$$G_{c2}(s) = \frac{v_{out}(s)}{v_{in}(s)} = \frac{K_2}{T_n^2 s^2 + 2T_n \zeta s + 1}$$

$$K_1 = \frac{V_{C1}}{1-d} - \frac{I_{L1} \cdot R_{L1}}{(1-d)^2}, \quad T_b = \frac{I_{L1} \cdot L_1}{(1-d) \cdot V_{C1} - R_{L1} \cdot I_{L1}},$$

$$T_n = \sqrt{\frac{L_1 \cdot C_1}{1-d}},$$

$$K_2 = \frac{1}{1-d}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{L_1 \cdot C_1} \left(\frac{R_{L1}}{L_1} + \frac{1}{R_1 \cdot C_1} \right)}{2(1-d)}.$$

Adaptivno i robuno upravljanje

28

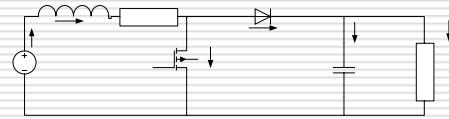


Regulator s promjenjivim pojačanjem

Prim. 2. Uzlazni DC/DC pretvarač napajan gorivnim člankom



- Tablica pojačanja regulatora određena optimiranjem za
 - 6 vrijednosti otpora
 - 6 vrijednosti napona
 - Dimenzije tablice pojačanja 6x6



- Kriterij optimiranja

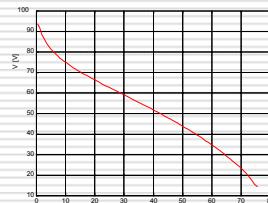
$$J(e) = \int_0^t [e^2(t) + f(e(t))] dt$$

- Varijable

- $e = V_{ref} - V_{out}$ – signal pogreške
- V_{ref} – referentni napon,
- $f(e)$ – težinska funkcija derivacije signala pogreške

$$f(e) = K_w \begin{cases} \left(\frac{de(t)}{dt} \right)^2, & \forall \left(\frac{de(t)}{dt} \right)^2 \leq D_{max} \\ D_{max}, & \forall \left(\frac{de(t)}{dt} \right)^2 > D_{max} \end{cases}$$

Karakteristika gorivnog članka

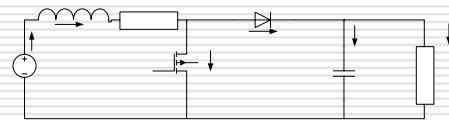


Regulator s promjenjivim pojačanjem

Prim. 2. Uzlazni DC/DC pretvarač



- Tablica pojačanja regulatora određena optimiranjem za
 - 6 vrijednosti otpora
 - 6 vrijednosti napona
 - Dimenzije tablice pojačanja 6x6



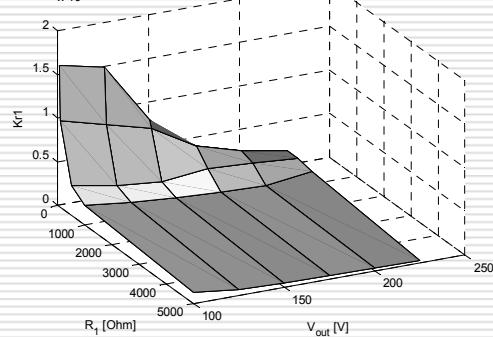
- Kriterij optimiranja

$$J(e) = \int_0^t [e^2(t) + f(e(t))] dt$$

- Varijable

- $e = V_{ref} - V_{out}$ – signal pogreške
- V_{ref} – referentni napon,
- $f(e)$ – težinska funkcija derivacije signala pogreške

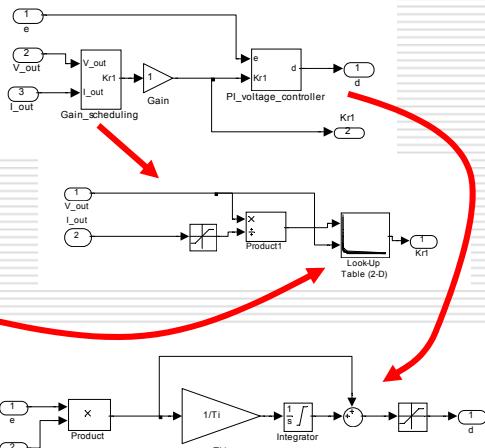
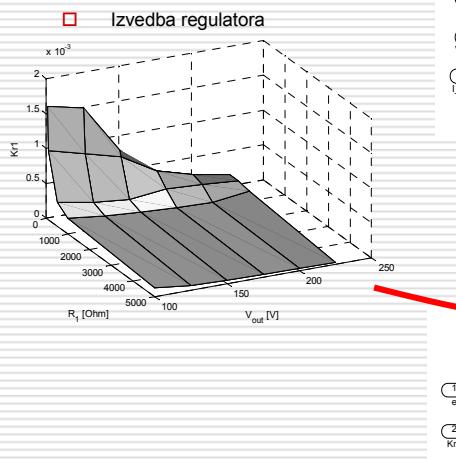
$$f(e) = K_w \begin{cases} \left(\frac{de(t)}{dt} \right)^2, & \forall \left(\frac{de(t)}{dt} \right)^2 \leq D_{max} \\ D_{max}, & \forall \left(\frac{de(t)}{dt} \right)^2 > D_{max} \end{cases}$$





Regulator s promjenjivim pojačanjem

Prim. 2. Uzlazni DC/DC pretvarač



Adaptivno i robusno upravljanje

31

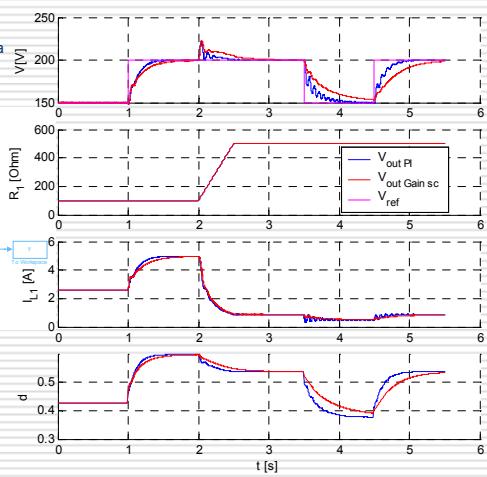
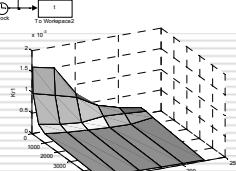
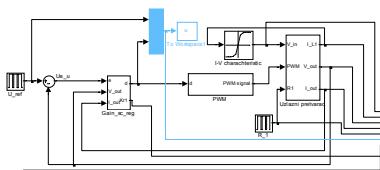


Regulator s promjenjivim pojačanjem

Prim. 2. Uzlazni DC/DC pretvarač



- Regulator s promjenjivim pojačanjem
 - približno isti odziv u svim radnim točkama (za velike i male struje)
- PI regulator – odziv ovisan o radnoj točci



Adaptivno i robusno upravljanje

32



Ekstremalno adaptivno upravljanje

Extremal adaptive control



- Primjena za regulaciju procesa kad se u ekstremu održava:
 - izlazna veličina procesa
 - neovisno o smetnjama i promjenama parametara
- Kriterij (koji se drži u ekstremu) određuje vrstu upravljanja:
 - vremenski optimalno upravljanje
 - upravljanje optimalno po utrošku energije
 - upravljanje po maksimalnoj snazi
- Sustav s promjenjivim parametrima
 - potreba za estimiranjem ekstremalne funkcije



Ekstremalno adaptivno upravljanje

Extremal adaptive control



- Primjenjivo i na sustavu s više ulaza
 - Izlazni vektor (koji se želi držati u ekstremu) aproksimira se u svakom trenutku diskretizacije jednostavnom funkcijom ulazne varijable koja ima ekstrem
 - aproksimacija kriterija kvalitete u blizini ekstrema kvadratnom funkcijom
 - estimacija parametara funkcije u realnom vremenu
 - egzaktno računanje signala koji dovodi aproksimiranu funkciju u ekstrem bez obzira na promjene parametara sustava

$$y(k) = \underline{u}^T(k-1) \hat{\mathcal{A}} \underline{u}(k-1) + \hat{\underline{b}}^T \underline{u}(k-1) + \hat{c},$$

gdje su:

$\hat{\mathcal{A}}$ - simetrična negativno definitna matrica dimenzije $m \times m$,

$\hat{\underline{b}}$ - vektor parametara uz linearni član, dimenzije $m \times 1$,

\hat{c} - konstanta,

$y(k)$ - veličina sustava koja se dovodi u maksimum u trenutku k (izlazna veličina ili kriterij kvalitete),

\underline{u} - upravljački vektor.

$$\underline{u}(k) = -\frac{1}{2} \hat{\mathcal{A}}^{-1} \hat{\underline{b}}.$$

Upravljačka varijabla koja dovodi do ekstrema



Ekstremalno adaptivno upravljanje

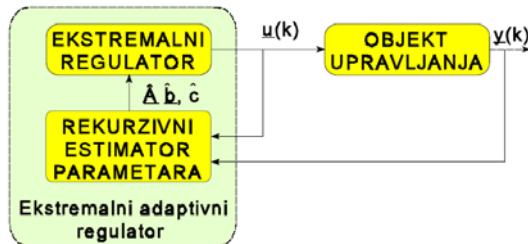
Extremal adaptive control



- Blok shema ekstremalnog adaptivnog regulatora

$$y(k) = \underline{u}^T(k-1) \hat{A} \underline{u}(k-1) + \underline{b}^T \underline{u}(k-1) + \hat{c},$$

$$\underline{u}(k) = -\frac{1}{2} \hat{A}^{-1} \underline{b}.$$



Adaptivno i robusno upravljanje

35



Ekstremalno adaptivno upravljanje

Primjeri primjene



- Primjeri primjene

- Regulacija izlazne snage gorivnog članka
 - Izlazna snaga u ovisnosti o izlaznoj struji – zvonolika karakteristika (zbog nelinearne karakteristike otpora)
 - Ekstremalni regulator na DC/AC pretvaraču prema mreži
- Regulacija izlazne snage fotoelektričnog članka
 - Karakteristika članka se mijenja ovisno o dozračenosti energije i temperaturi
 - DC/AC pretvarač
 - ekstremalni regulator
 - održanje maksimalne snage članka
 - Isporuka snage mreži

Adaptivno i robusno upravljanje

36

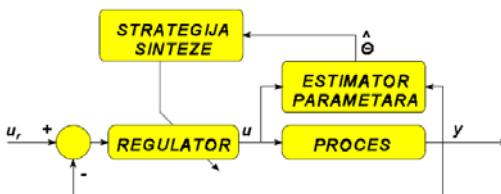


Samopodesivi adaptivni regulator

Self tuning adaptive control



- Primjena :
 - sustavi s trajnom pobudom stohastičkim poremećajnim signalom
- karakteristike:
 - estimacija parametara procesa
 - određivanje zakona upravljanja minimiziranjem kriterijuma kvalitete (diofantova jednadžba)
- rad regulatora
 - estimacija parametara procesa
 - rješenje diofantove jednadžbe
 - polinomi regulatora
 - računanje izlazne veličine iz regulatora



- Prednosti
 - promjenjivo na stohastičke sustave
 - digitalna realizacija
- Nedostaci
 - sporija adaptacija od MRAS upravljanja

Adaptivno i robusno upravljanje

37

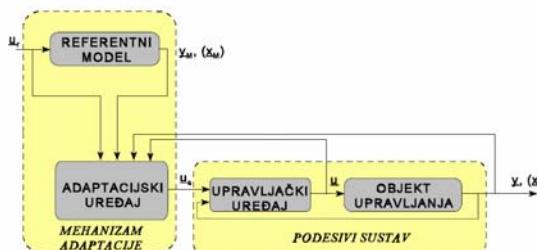


Adaptivni regulator s referentnim modelom

Model reference adaptive control



- karakteristike:
 - referentni model željenih karakteristika
 - podesivi sustav slijedi referentni model
 - pogreška slijedenja teži nuli
 - signalna adaptacija - dodavanje signala adaptacije referentnom signalu
 - parametarska adaptacija - upravljački signal se određuje iz referentnog signala i varijabilne pomoćne varijable adaptacije
 - regulator s promjenjivom strukturom - teorija regulatora s promjenjivom strukturom primjenjena na vektor razlike varijabli stanja referentnog modela i podesivog sustava
 - dovođenje u klizni režim
 - kliznim režimom određeno ponašanje sustava



- Prednosti
 - realizacija u analognoj i digitalnoj tehnici
- Nedostaci
 - određivanje parametara i modela
 - može dati velike upravljačke signale
 - nije preporučljiva za stohastičke sustave

Adaptivno i robusno upravljanje

38

Adaptivno upravljanje s referentnim modelom i parametarskom adaptacijom

Adaptivno i robusno upravljanje

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: zeljko.ban@fer.hr

1



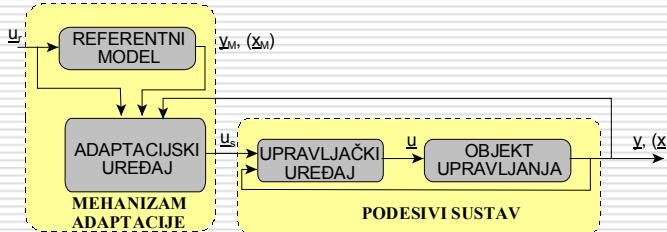
Sadržaj predavanja

- Izvod algoritma adaptivnog upravljanja s referentnim modelom i parametarskom adaptacijom
- Dokaz stabilnosti
 - Kriterij stabilnosti Ljapunova
 - Kriterij stabilnosti Popova
- Normiranje signala algoritma
- Primjer



Parametarska adaptacija

struktura algoritma



$$\dot{x}_M = A_M x_M + b_M u_r, \\ y_M = c_M x_M,$$

$$\dot{x} = Ax + bu_s, \\ y = cx,$$

$$e = x_M - x$$

Struktura algoritma

- Diferencijalna jednadžba pogreške:

$$\dot{e} = A_M e + \mu_1 \\ \mu_1 = (A_M - A)x + b_M u_r - bu_s$$

- Zahtjev na sustav da bi pogreška težila k nuli:

$$\mu_1 = 0$$



Parametarska adaptacija

struktura algoritma



$$\dot{x}_M = A_M x_M + b_M u_r, \\ y_M = c_M x_M,$$

$$\dot{x} = Ax + bu_s, \\ y = cx,$$

$$e = x_M - x$$

Struktura algoritma

- Diferencijalna jednadžba pogreške:

$$\dot{e} = A_M e + \mu_1 \\ \mu_1 = (A_M - A)x + b_M u_r - bu_s$$

- Zahtjev na sustav da bi pogreška težila k nuli:

$$\mu_1 = 0$$

Uz izbor varijabli stanja

$$A_M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_{M1} & -a_{M2} & -a_{M3} & \dots & -a_{Mn-1} \end{bmatrix}, \quad b_M^T = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ b_{Mn}], \\ c_M = [c_{M1} \ c_{M2} \ c_{M3} \dots \ c_{Mn}],$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad b^T = [0 \ 0 \ 0 \ \dots \ b_n], \\ c = [c_1 \ c_2 \ c_3 \dots \ c_n].$$

Oblik algoritma upravljanja

$$u_s = \frac{1}{b_0} \tilde{a}^T \underline{x} + \frac{b_{Mn}}{b_0} u_r,$$

$$\tilde{a}^T = -[a_{M0} - a_0 \ a_{M1} - a_1 \ a_{M2} - a_2 \ \dots \ a_{Mn-1} - a_{n-1}]$$

$$u_s = k_d(t) u_r(t) + k_p^T(t) \underline{x}(t)$$



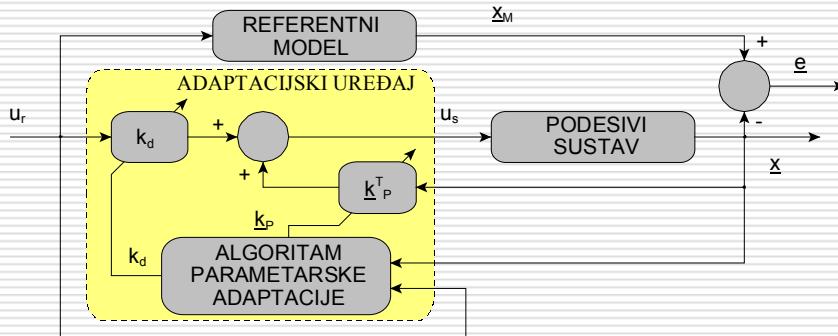
Parametarska adaptacija

struktura algoritma



$$u_s = k_d(t) u_r(t) + \underline{k}_P^T(t) \underline{x}(t)$$

$k_d(t)$ - vremenski promjenjivi parametar adaptacije u direktnoj grani,
 $\underline{k}_P^T(t)$ - vektor vremenski promjenjivih parametara adaptacije u povratnoj vezi.



Adaptivno i robusno upravljanje

5



Parametarska adaptacija

opći oblik varijabli stanja



- Nemogućnost prikaza algoritma algebarskom jednadžbom ako
 - sustav nije moguće prikazati u kanoničkoj osmotriovoj formi
 - (matrica A ima samo elemente u zadnjem retku i jedinice u pomoćnoj dijagonali)
 - nemogućnost mjerjenja traženih varijabli
 - matrica C ima promjenjive elemente
- Potreban prikaz sustava da izlazna varijabla bude jedna od varijabli stanja
 - jednadžba $\underline{\mu}_1 = 0$ ne mora imati rješenje
 - traži se minimum norme vektora $\underline{\mu}_1$
 - težinska norma (euklidска норма)

$$f_n(\underline{\mu}_1) = \underline{\mu}_1^T \cdot \underline{W} \cdot \underline{\mu}_1,$$

- W- pozitivno definitna matrica težinskih koeficijenata
- f_n – norma vektora

Adaptivno i robusno upravljanje

6



Parametarska adaptacija

opći oblik varijabli stanja



$$f_n^2(\underline{\mu}_1) = \underline{\mu}_1^T \cdot \underline{W} \cdot \underline{\mu}_1,$$

Kvadrat norme vektora $\underline{\mu}_1$

$$\begin{aligned} f_n^2(\underline{\mu}_1) &= \underline{b}^T \underline{W} \underline{b} u_s^2 - 2(\underline{b}^T \underline{W} \tilde{\underline{A}} \underline{x} + \underline{b}_M^T \underline{W} \underline{b} u_r) u_s + \\ &+ (\tilde{\underline{A}} \underline{x} + \underline{b}_M \underline{u}_r)^T \underline{W} (\tilde{\underline{A}} \underline{x} + \underline{b}_M \underline{u}_r), \end{aligned}$$

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{A}_M - \underline{A}.$$

Minimum norme vektora $\underline{\mu}_1 \rightarrow$ minimum kvadra norme vektora $\underline{\mu}_1$

$$\frac{\partial f_n^2(\underline{\mu}_1)}{\partial u_s} = 0.$$

$$\frac{\partial f_n^2(\underline{\mu}_1)}{\partial u_s} = 2 \left[\underline{b}^T \underline{W} \left(\underline{b} - \tilde{\underline{A}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_s} \right) u_s + \left(\frac{\partial \underline{x}^T}{\partial u_s} \tilde{\underline{A}}^T - \underline{b}^T \right) \underline{W} (\tilde{\underline{A}} \underline{x} + \underline{b}_M \underline{u}_r) \right].$$



Parametarska adaptacija

opći oblik varijabli stanja



Izražavanje vektora varijabli stanja u vremenskoj domeni

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{b} u_s, \text{ (uz } \underline{x}(0)=\underline{0})$$

$$\underline{x}(t) = \int_0^t \underline{\Phi}(t-\tau) \underline{b} u_s(\tau) d\tau,$$

$$\underline{\Phi}(t) = \underline{\mathcal{L}}^{-1}[(sI - \underline{A})^{-1}],$$

I - jedinična matrica,
s - Laplaceov operator.

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial u_s} = \int_0^t \underline{\Phi}(t-\tau) \underline{b} d\tau = f_x(t).$$

$$\frac{\partial f_n^2(\underline{\mu}_1)}{\partial u_s} = 0.$$

$$\frac{\partial f_n^2(\underline{\mu}_1)}{\partial u_s} = 2 \left[\underline{b}^T \underline{W} \left(\underline{b} - \tilde{\underline{A}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_s} \right) u_s + \left(\frac{\partial \underline{x}^T}{\partial u_s} \tilde{\underline{A}}^T - \underline{b}^T \right) \underline{W} (\tilde{\underline{A}} \underline{x} + \underline{b}_M \underline{u}_r) \right].$$

$$u_s(t) = \left\{ \underline{b}^T \underline{W} [\underline{b} - \tilde{\underline{A}} f_x(t)] \right\}^{-1} \cdot [\underline{b}^T - f_x^T(t) \cdot \tilde{\underline{A}}^T] \cdot \underline{W} \cdot (\tilde{\underline{A}} \underline{x} + \underline{b}_M \underline{u}_r).$$



Parametarska adaptacija

opći oblik varijabli stanja



Izražavanje vektora varijabli stanja u vremenskoj domeni

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u_s, (\text{uz } \underline{x}(0)=\underline{0})$$

$$\frac{\partial f_n^2(\underline{\mu}_1)}{\partial u_s} = 0.$$

$$\tilde{\underline{A}} = \underline{A}_M - \underline{A}.$$

$$\frac{\partial f_n^2(\underline{\mu}_1)}{\partial u_s} = 2 \left[\underline{b}^T \underline{W} \left(\underline{b} - \tilde{\underline{A}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial u_s} \right) u_s + \left(\frac{\partial \underline{x}^T}{\partial u_s} \tilde{\underline{A}}^T - \underline{b}^T \right) \underline{W} \left(\tilde{\underline{A}} \underline{x} + \underline{b}_M u_r \right) \right].$$

$$u_s(t) = \left\{ \underline{b}^T \underline{W} \left[\underline{b} - \tilde{\underline{A}} f_x(t) \right] \right\}^{-1} \cdot \left[\underline{b}^T - f_x^T(t) \cdot \tilde{\underline{A}}^T \right] \cdot \underline{W} \cdot (\tilde{\underline{A}} \underline{x} + \underline{b}_M u_r).$$

Primjenom težinske matrice oblika $W=[w_{ij}]$ sa svojstvom $w_{ij}=0$ $i=1, 2, \dots, n-1, j=1, 2, \dots, n-1$, uz $w_{nn}=1$,

$$\underline{u}_s = k_d(t) \underline{u}_r(t) + \underline{k}_p^T(t) \underline{x}(t)$$

$$k_d(t) = \left\{ \underline{b}^T \underline{W} \left[\underline{b} - \tilde{\underline{A}} f_x(t) \right] \right\}^{-1} \cdot \left[\underline{b}^T - f_x^T(t) \cdot \tilde{\underline{A}}^T \right] \cdot \underline{W} \cdot \underline{b}_M$$

$$\underline{k}_p^T(t) = \left\{ \underline{b}^T \underline{W} \left[\underline{b} - \tilde{\underline{A}} f_x(t) \right] \right\}^{-1} \cdot \left[\underline{b}^T - f_x^T(t) \cdot \tilde{\underline{A}}^T \right] \cdot \underline{W} \cdot \tilde{\underline{A}}$$



Kriterij stabilnosti Ljapunova



$$V(\underline{\varrho}) > 0 \quad \forall \underline{\varrho} \neq \underline{0} \quad (\text{pozitivna definitnost}),$$

$$\dot{V}(\underline{\varrho}) < 0 \quad \forall \underline{\varrho} \neq \underline{0} \quad (\text{negativna definitnost}),$$

$$V(\underline{\varrho}) \rightarrow \infty \quad \forall \|\underline{\varrho}\| \rightarrow \infty,$$

$$V(\underline{0}) = 0,$$

$\underline{\varrho}$ - argument funkcije Ljapunova,

V - funkcija Ljapunova,

\dot{V} - derivacija funkcije Ljapunova.

$$V = \underline{\varrho}^T P \underline{\varrho} + \underline{\Phi}^T \Gamma^{-1} \underline{\Phi},$$

$$\dot{V} = -\underline{\varrho}^T Q \underline{\varrho} + f(\underline{\Phi})$$

$$-Q = A_M^T P + P A_M$$

$P \Gamma$ - pozitivno definitne matrice
 Q - pozitivno definicitna matica
 $\underline{\varrho}$ - vektor pogreške sustava prema referentnom modelu
 $\underline{\Phi}$ - vektor pogreške parametara

Derivacija funkcije Ljapunova negativno definitna ako je $f(\underline{\Phi})=0$
 $f(\underline{\Phi})=0 \quad \Rightarrow \quad$ određenje parametara adaptacije k_d i k_p



Kriterij stabilnosti Ljapunova

Uz sustav oblika

$$\dot{\underline{e}} = \underline{A}_M \underline{e} + \underline{\mu}_1,$$

$$\underline{\mu}_1 = (\underline{A}_M - \underline{A} - \underline{b} \underline{k}_p^T(t)) \underline{x} + (\underline{b}_M - \underline{b} \underline{k}_d(t)) u_r$$

Pogreška parametara

$$(\underline{b}_M - \underline{b} \underline{k}_d(t))$$

$$(\underline{A}_M - \underline{A} - \underline{b} \underline{k}_p^T(t))$$

$$V = \underline{e}^T P \underline{e} + \underline{\Phi}^T \Gamma^{-1} \underline{\Phi},$$

$$V = \underline{e}^T \underline{P} \underline{e} + \underline{\Psi}_d \underline{\gamma}_d^{-1} \underline{\Psi}_d + \underline{\Psi}_p^T \underline{\Gamma}_p^{-1} \underline{\Psi}_p,$$

\underline{P}

- pozitivno definitna simetrična matrica dimenzije $n \times n$,

$\underline{\Gamma}_p^{-1}$

- pozitivno definitna dijagonala matrica dimenzije $n \times n$,

$\underline{\gamma}_d^{-1}$

- pozitivna konstanta,

$[-a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{n-1}]$

- poslednji redak matrice stanja sustava prema jednadžbi (3-5),

$[-a_{m0} \ a_{m1} \ \dots \ a_{m,n-1}]$

- poslednji redak matrice stanja referentnog modela

prema jednadžbi (3-5),

b_0, b_{m0}

- elementi posljednjeg redaka ulaznog vektora sustava odnosno modela

prema jednadžbi (3-5),

k_d

- parametar adaptacije u direktnoj grani

$\underline{k}_p^T(t) = [k_{p1}(t) \ k_{p2}(t) \ \dots \ k_{pn}(t)]$

- vektor parametara adaptacije u povratnoj vezi.

$$\underline{\mu}_1 = i \underline{\Psi}_p^T \underline{x} + i \underline{\Psi}_d u_r,$$

$$i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T.$$



Kriterij stabilnosti Ljapunova

Uz sustav oblika

$$V = \underline{e}^T \underline{P} \underline{e} + \underline{\Psi}_d \underline{\gamma}_d^{-1} \underline{\Psi}_d + \underline{\Psi}_p^T \underline{\Gamma}_p^{-1} \underline{\Psi}_p,$$

$$\underline{\mu}_1 = i \underline{\Psi}_p^T \underline{x} + i \underline{\Psi}_d u_r,$$

$$i = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T.$$

$$\underline{\Psi}_d = b_{M0} - b_0 \underline{k}_d(t),$$

$$\underline{\Psi}_p^T = [-(a_{M0}-a_0)-b_0 k_{p1}(t) \ -(a_{M1}-a_1)-b_0 k_{p2}(t) \ \dots \ -(a_{mn-1}-a_{n-1})-b_0 k_{pn}(t)],$$

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\underline{e}^T \underline{Q} \underline{e} + 2 \underline{x}^T \underline{\Psi}_p^T i^T \underline{P} \underline{e} + 2 \underline{\Psi}_p^T \underline{\Gamma}_p^{-1} \underline{\Psi}_p + \\ & + 2 u_r \underline{\Psi}_d i^T \underline{P} \underline{e} + 2 \underline{\Psi}_d \underline{\gamma}_d^{-1} \underline{\Psi}_d, \end{aligned}$$

$$(\underline{x}^T \underline{\Psi}_p^T)(i^T \underline{P} \underline{e}) + \underline{\Psi}_p^T \underline{\Gamma}_p^{-1} \underline{\Psi}_p = 0,$$

$$u_r \underline{\Psi}_d i^T \underline{P} \underline{e} + \underline{\Psi}_d \underline{\gamma}_d^{-1} \underline{\Psi}_d = 0$$

$$\dot{k}_p^T = \mathbf{v} \cdot \underline{x}^T \underline{\Gamma}_p,$$

$$k_d = \mathbf{v} \cdot u_r \cdot \underline{\gamma}_d,$$

$$\mathbf{v} = d^T \underline{e} \quad - \text{signal poopćene pogreške}$$

$$d^T = \frac{1}{b_0} i^T \underline{P} \quad - \text{vektor težinskih koeficijenata}$$



Algoritam parametarske adaptacije prema kriteriju stabilnosti Ljapunova

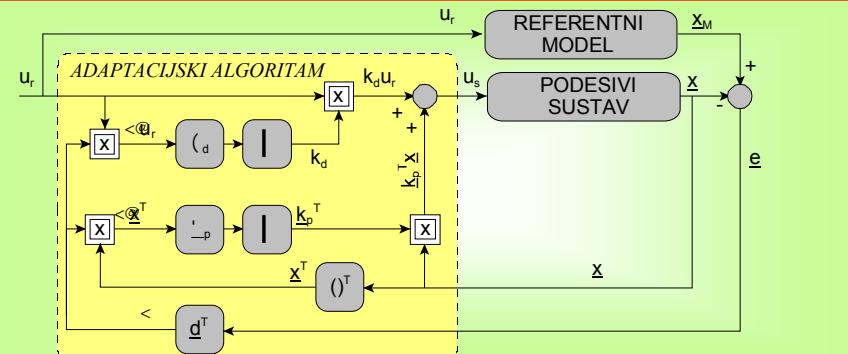


$$u_s = k_d(t) u_r(t) + k_p^T(t) \dot{x}(t)$$

$$\dot{k}_p^T = v \dot{x}^T \Gamma_p, \quad \dot{k}_d = v \cdot u_r \cdot \gamma_d,$$

$v = d^T e$ – signal popočene pogreške

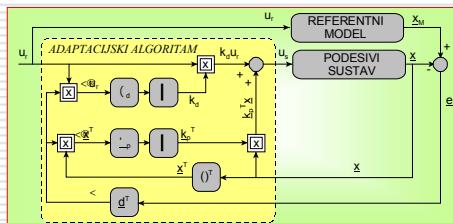
$$d^T = \frac{1}{b_0} i^T P \quad \text{– vektor težinskih koeficijenata}$$



13



Algoritam parametarske adaptacije prema kriteriju stabilnosti Ljapunova



- Algoritam adaptacije
 - integralna svojstva
 - varijable stanja
 - prema kanoničkoj osmotriovoj formi
 - potpuni vektor varijabli stanja sustava i modela
- PI ponašanje
 - brži odziv od upotrebe samo I ponašanja
- Adaptacijski algoritam s PI ponašanjem parametara adaptacije
 - Stabilnost – teorija hiperstabilnosti Popova

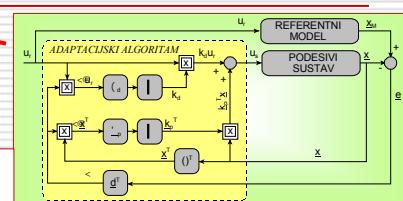


Algoritam parametarske adaptacije s PI ponašanjem parametara adaptacije



□ Adaptacijski algoritam s PI ponašanjem parametara adaptacije

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_p^T &= \mathbf{k}_{pi}^T + \mathbf{k}_{pp}^T, & k_d &= k_{di} + k_{dp}, \\ \mathbf{k}_{pi}^T &= \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{pi}, & k_{di} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{di}, \\ \mathbf{k}_{pp}^T &= \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \boldsymbol{\Gamma}_{pp}, & k_{dp} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{dp}, \\ \nu &= \mathbf{d}^T \mathbf{e}, \end{aligned}$$



- | | |
|--|--|
| \mathbf{k}_{pi}^T | - redni vektor integralne komponente parametra adaptacije u povratnoj vezi, (dimenzije 1xn), |
| \mathbf{k}_{pp}^T | - redni vektor proporcionalne komponente parametra adaptacije u povratnoj vezi, (dimenzije 1xn), |
| k_i | - integralna komponenta parametra adaptacije u direktnoj grani, (dimenzije 1x1), |
| k_d | - proporcionalna komponenta parametra adaptacije u direktnoj grani, (dimenzije 1x1), |
| \mathbf{d}^T | - redni vektor težinskih koeficijenata pogreške, |
| $\boldsymbol{\Gamma}_{pi}, \boldsymbol{\Gamma}_{pp}$ | - dijagonale težinske matrice koeficijenata integralnog, odnosno proporcionalnog dijela adaptacijskog algoritma u povratnoj vezi, (dimenzija nxn), |
| γ_{di}, γ_{dp} | - koeficijenti integralnog, odnosno proporcionalnog dijela adaptacijskog algoritma u direktnoj grani. |



Kriterij hiperstabilnosti Popova



$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) > 0, \quad \forall \omega > 0$$

$$\int_0^t \nu^T(\tau) \cdot \mu(\tau) d\tau \geq -\delta, \quad \forall t > 0$$

- | | |
|----------|---|
| δ | - pozitivna konstanta, |
| μ | - izlazna varijabla nelinearnog dijela sustava, |
| v | - izlazna varijabla linearnog dijela sustava. |



Algoritam parametarske adaptacije s PI ponašanjem parametara adaptacije



$$\begin{aligned} \mathbf{k}_p^T &= \mathbf{k}_{pi}^T + \mathbf{k}_{pp}^T, & k_d &= k_{di} + k_{dp}, \\ \dot{\mathbf{k}}_{pi}^T &= \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{pi}, & \dot{k}_{di} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{di}, \\ \mathbf{k}_{pp}^T &= \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{pp}, & k_{dp} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{dp}, \\ \nu &= \mathbf{d}^T \mathbf{e}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\underline{e}} &= \underline{A}_M \underline{e} + \underline{\mu}_1, \\ v &= \underline{d}^T \underline{e}. \end{aligned}$$

Linearni dio sustava

$$v(s) = \underline{G}^T(s) \underline{\mu}_1(s) = \underline{d}^T(sI - \underline{A}_M)^{-1} \underline{\mu}_1(s)$$

Nelinearni dio sustava

$$\underline{\mu} = -\underline{\mu}_1 = (\underline{b} \underline{k}_p^T(t, v) - (\underline{A}_M - \underline{A})) \underline{x} + (\underline{b} k_d(t, v) - \underline{b}_M) u_r.$$



Algoritam parametarske adaptacije s PI ponašanjem parametara adaptacije



Linearni dio sustava

$$v(s) = \underline{G}^T(s) \underline{\mu}_1(s) = \underline{d}^T(sI - \underline{A}_M)^{-1} \underline{\mu}_1(s)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_p^T &= \mathbf{k}_{pi}^T + \mathbf{k}_{pp}^T, & k_d &= k_{di} + k_{dp}, \\ \dot{\mathbf{k}}_{pi}^T &= \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{pi}, & \dot{k}_{di} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{di}, \\ \mathbf{k}_{pp}^T &= \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{\Gamma}_{pp}, & k_{dp} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{dp}, \\ \nu &= \mathbf{d}^T \mathbf{e}, \end{aligned}$$

Nelinearni dio sustava

$$\underline{\mu} = -\underline{\mu}_1 = (\underline{b} \underline{k}_p^T(t, v) - (\underline{A}_M - \underline{A})) \underline{x} + (\underline{b} k_d(t, v) - \underline{b}_M) u_r.$$

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) > 0, \quad \forall \omega > 0$$

$$\int_0^t \nu^T(\tau) \cdot \mu(\tau) d\tau \geq -\delta, \quad \forall t > 0$$

Linearni dio sustava

- obuhvaća vektor težinskih koeficijenata pogreške
 - postavljanje nula prijenosne funkcije težinskim koeficijentima pogreške
 - pozitivan realni dio prijenosne funkcije linearog dijela sustava
 - potpuni vektor stanja

Nelinearni dio sustava

- obuhvaća algoritam adaptacije



Kriterij hiperstabilnosti Popova

Algoritam s PI ponašanjem parametara adaptacije



Linearni dio sustava

1. uvjet hiperstabilnosti

$$v(s) = \underline{G}^T(s) \underline{\mu}_1(s) = \underline{d}^T(s\underline{I} - \underline{A}_M)^{-1} \underline{\mu}_1(s)$$

$$\operatorname{Re}(G(j\omega)) > 0, \quad \forall \omega > 0$$

Linearni dio sustava

- Prijenosna matrica G zadovoljava 1. uvjet hiperstabilnosti Popova ako
 - svaki element matrice zadovoljava tu nejednakost
- Svaka prijenosna funkcija u prijenosnoj matrici mora biti:
 - stabilna
 - broj polova i nula može se razlikovati najviše za jedan polovi i nule dolaze naizmjenično
 - ukupni fazni kut je u rasponu od -90 do 90 stupnjeva
- Težinskim koeficijentima matrice d određuje se položaj nula prema polovima.



Kriterij hiperstabilnosti Popova

Algoritam s PI ponašanjem parametara adaptacije



Nelinearni dio sustava

2. uvjet hiperstabilnosti

$$\underline{\mu} = -\underline{\mu}_1 = (\underline{b}\underline{k}_p^T(t,v) - (\underline{A}_M - \underline{A}))\underline{x} + (\underline{b}\underline{k}_d(t,v) - \underline{b}_M)\underline{u}_r.$$

$$\int_0^t v(\tau) \cdot \underline{\mu}(\tau) d\tau \geq -\underline{\delta}_0,$$

$\underline{\delta}_0 = [\underline{\delta}_{10}^2 \underline{\delta}_{20}^2 \dots \underline{\delta}_{n0}^2]^T$ - realni vektor pozitivnih konačnih komponenti

Nelinearni dio sustava

- Integral umnoška ulaza i izlaza iz nelinearnog dijela sustava
 - ne smije težiti $-\infty$
- Sve komponente integrala moraju biti
 - konačne ili
 - težiti $+\infty$



Kriterij hiperstabilnosti Popova

Algoritam s PI ponašanjem parametara adaptacije



Nelinearni dio sustava

2. uvjet hiperstabilnosti

$$\underline{u} = -\underline{u}_1 = (\underline{b}k_p^T(t, v) - (\underline{A}_M - \underline{A}))\underline{x} + (\underline{b}k_d(t, v) - \underline{b}_M)u_r.$$

$$\int_0^t v(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \geq -\delta_v,$$

$$\mathbf{J} = \int_0^t \nu \cdot \left\{ [\mathbf{b} \mathbf{k}_{pi}^T(t, \nu) - \tilde{\mathbf{A}}] \mathbf{x} + [\mathbf{b} k_{di}(t, \nu) - \mathbf{b}_M] u_r \right\} d\tau \geq -\delta_0$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}_M - \mathbf{A}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3 + \mathbf{J}_4 \geq -\delta_0,$$

$$\mathbf{J}_1 = \int_0^t \nu \left(\mathbf{b} \mathbf{k}_{pi}^T(\tau, \nu) - \tilde{\mathbf{A}} \right) \mathbf{x} d\tau, \quad \mathbf{J}_2 = \int_0^t \nu \mathbf{b} \mathbf{k}_{pp}^T(\tau, \nu) \mathbf{x} d\tau,$$

$$\mathbf{J}_3 = \int_0^t \nu (b k_{di}(\tau, \nu) - b_M) u_r d\tau, \quad \mathbf{J}_4 = \int_0^t \nu \mathbf{b} \mathbf{k}_{dp}(\tau, \nu) \cdot u_r d\tau.$$



Kriterij hiperstabilnosti Popova

Algoritam s PI ponašanjem parametara adaptacije



Nelinearni dio sustava

2. uvjet hiperstabilnosti

v – skalar

- komutativnost množenja

$$\dot{k}_{pi}^T = v \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{\Gamma}_{pi}^T$$

$$\underline{x}^T v = \underline{\Gamma}_{pi}^{-1} \dot{k}_{pi}$$

J_2 – Umnožak xv izražen pomoću k_{pp}

J_3 – Umnožak $u_r v$ izražen pomoću dk_{di}/dt

J_4 – Umnožak $u_r v$ izražen pomoću k_{dp}

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{k_{pi}(0)}^{k_{pi}(t)} (\mathbf{b} \mathbf{k}_{pi}^T - \tilde{\mathbf{A}}) \Gamma_{pi}^{-1} d(k_{pi}) = \left(\frac{1}{2} \mathbf{b} \mathbf{k}_{pi}^T - \tilde{\mathbf{A}} \right) \Gamma_{pi}^{-1} \mathbf{k}_{pi} \Big|_{k_{pi}(0)}^{k_{pi}(t)} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{b} \mathbf{k}_{pi}^T(t) \Gamma_{pi}^{-1} \mathbf{k}_{pi}(t) - \tilde{\mathbf{A}} \Gamma_{pi}^{-1} \mathbf{k}_{pi}(t) - \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{b} \mathbf{k}_{pi}^T(0) \Gamma_{pi}^{-1} \mathbf{k}_{pi}(0) + \tilde{\mathbf{A}} \Gamma_{pi}^{-1} \mathbf{k}_{pi}(0) \end{aligned}$$

$$J_2 = \int_0^t \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_{pp}^T(\tau) \cdot \Gamma_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{k}_{pp}(\tau) \cdot d\tau$$

$$J_4 = \int_0^t \mathbf{b} \cdot k_{dp} \cdot k_{dp} \cdot \gamma_{dp}^{-1} \cdot d\tau = \mathbf{b} \gamma_{dp}^{-1} \int_0^t k_{dp}^2 \cdot d\tau$$

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^t (\mathbf{b} k_{di} - \mathbf{b}_M) \cdot \dot{k}_{di} \cdot \gamma_{di}^{-1} \cdot d\tau = \gamma_{di}^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{b} k_{di}^2 - \mathbf{b}_M k_{di} \right) \Big|_{k_{di}(0)}^{k_{di}(t)} = \\ &= \gamma_{di}^{-1} \left[\frac{1}{2} \mathbf{b} k_{di}^2(t) - \mathbf{b}_M k_{di}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{b} k_{di}^2(0) + \mathbf{b}_M k_{di}(0) \right] \end{aligned}$$



Kriterij hiperstabilnosti Popova

Algoritam s PI ponašanjem parametara adaptacije



Nelinearni dio sustava

$$J_1 = \frac{1}{2} \mathbf{b} \mathbf{k}_{pi}^T(t) \Gamma_{pi}^{-1} \mathbf{k}_{pi}(t) - \tilde{\mathbf{A}} \Gamma_{pi}^{-1} \mathbf{k}_{pi}(t) - J_3 = \gamma_{di}^{-1} \left[\frac{1}{2} \mathbf{b} k_{di}^2(t) - \mathbf{b}_M k_{di}(t) - \frac{1}{2} \mathbf{b} k_{di}^2(0) + \mathbf{b}_M k_{di}(0) \right]$$

$$- \frac{1}{2} \mathbf{b} \mathbf{k}_{pi}^T(0) \Gamma_{pi}^{-1} \mathbf{k}_{pi}(0) + \tilde{\mathbf{A}} \Gamma_{pi}^{-1} \mathbf{k}_{pi}(0)$$

2. uvjet hiperstabilnosti

$$J_2 = \int_0^t \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_{pp}^T(\tau) \cdot \Gamma_{pp}^{-1} \cdot \mathbf{k}_{pp}(\tau) \cdot d\tau$$

$$J_4 = \int_0^t \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_{dp} \cdot \mathbf{k}_{dp} \cdot \gamma_{dp}^{-1} \cdot d\tau = \mathbf{b} \gamma_{dp}^{-1} \int_0^t k_{dp}^2 \cdot d\tau$$

- svi integrali imaju vrijednost veću od $-\infty$ za proizvoljne promjene parametara adaptacije, uz uvjet:

- matrice koeficijenata adaptacije pozitivno definitne
- matrica \mathbf{b} ima pozitivne retke gdje matrica $\mathbf{A}_M - \mathbf{A}$ ima retke različite od nule

Analiza

- J_1 – kvadratna funkcija s pozitivnim koeficijentom uz kvadratni član (postoji minimum)
- J_2 – integral pozitivne kvadratne funkcije (konačni minimum)
- J_3 – pozitivna kvadratna funkcija u slučaju da vektor \mathbf{b} ima elemente veće od nule na mjestima gdje vektor \mathbf{b}_M ima nenulte elemente
- J_4 – integral pozitivne kvadratne funkcije (funkcija s konačnim minimumom)

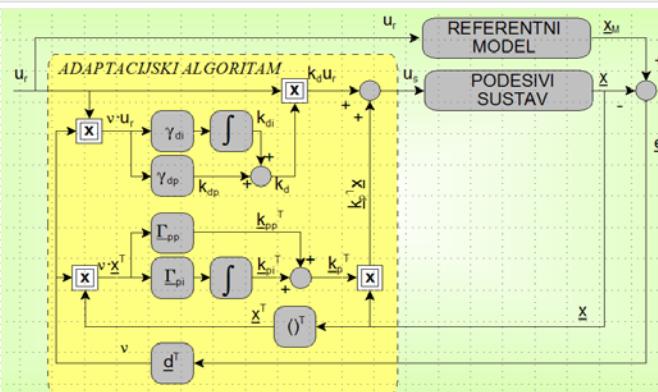


Shema algoritma adaptacije

Algoritam s PI ponašanjem parametara adaptacije



$$\begin{aligned} \mathbf{k}_p^T &= \mathbf{k}_{pi}^T + \mathbf{k}_{pp}^T, & k_d &= k_{di} + k_{dp}, \\ \mathbf{k}_d^T &= \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \Gamma_{pi}, & k_{di} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{di}, \\ \mathbf{k}_{pp}^T &= \nu \cdot \mathbf{x}^T \cdot \Gamma_{pp}, & k_{dp} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{dp}, \\ \nu &= \mathbf{d}^T \mathbf{e}, \end{aligned}$$





Normiranje signala

- Nivo referentnog signala utječe na brzinu adaptacije
- Parametri adaptacije proporcionalni
 - umnošku vektora pogreške i vektora stanja
 - umnošku vektora pogreške i referentnog signala
- Održanje iste brzine adaptacije u svim radnim točkama
 - ==> NORMIRANJE SIGNALA



Normiranje signala

$$\underline{u}_s = \underline{k}^T \underline{\xi},$$

$$\underline{k}^T = \begin{bmatrix} \underline{k}_d & \underline{k}_p^T \end{bmatrix}$$

- vektor parametara adaptacije,

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \underline{u}_r \\ \underline{x}_R \end{bmatrix}$$

- vektor signala

Nenormirani parametri adaptacije

$$\begin{aligned} \underline{k}_d^T &= \underline{k}_i^T + \underline{k}_p^T, \\ \dot{\underline{k}}_i^T &= \mathbf{v} \cdot \underline{\xi}^T \cdot \underline{\Gamma}_i, \\ \underline{k}_p^T &= \mathbf{v} \cdot \underline{\xi}^T \cdot \underline{\Gamma}_p. \end{aligned}$$

$$k_{no} = \begin{cases} \delta_0 & \forall \left(\frac{\underline{u}_r}{\underline{u}_{r0}} \right)^2 < \delta_0, \\ \left(\frac{\underline{u}_r}{\underline{u}_{r0}} \right)^2 & \forall \left(\frac{\underline{u}_r}{\underline{u}_{r0}} \right)^2 \geq \delta_0. \end{cases}$$

Normirani parametri adaptacije

$$\begin{aligned} \underline{k}^T &= \underline{k}_i^T + \underline{k}_p^T, \\ \dot{\underline{k}}_i^T &= \frac{1}{k_{no}} \cdot \mathbf{v} \cdot \underline{\xi}^T \cdot \underline{\Gamma}_i, \\ \underline{k}_p^T &= \frac{1}{k_{no}} \cdot \mathbf{v} \cdot \underline{\xi}^T \cdot \underline{\Gamma}_p. \end{aligned}$$



Primjer – DC motor



$$u_a = L_{au} \frac{di_a}{dt} + R_{au} i_a + e,$$

$$e = K\omega,$$

$$m_m = K_i \omega,$$

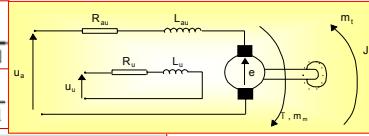
$$m = J \frac{d\omega}{dt} + m_r,$$

$$m_t = K_t \omega,$$

$$R_{au} = R_a + R_d, \quad L_{au} = L_a + L_d$$

$$G_i(s) = \frac{U_i(s)}{I_a(s)} = \frac{K_i}{T_i s + 1}$$

$$G_u(s) = \frac{U_o(s)}{\Omega(s)} = \frac{K_b}{T_b s + 1}$$



$$I_a(s) = \frac{K_{au}}{T_{au}s + 1}(U_a(s) - E(s)),$$

$$E(s) = K\Omega(s), \quad M_m(s) = K_i \Omega(s),$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{J_s}(M_m(s) - M_r(s)), \quad M_r(s) = K_t \Omega(s),$$

$$G_{TU}(s) = \frac{U_o(s)}{U_r(s)} = \frac{K_{TU}}{T_{TU}s + 1}$$

$$K_{au} = 1/R_{au} \text{ - koeficijent pojačanja armaturnog kruga, [1/A]},$$

$$T_{au} = L_{au}/R_{au} \text{ - armaturna vremenska konstanta, [s]},$$

$$s \text{ - Laplaceov operater.}$$

- i_a - struja armature, [A].
- J - moment inercije motora i tereta, [kg m^2].
- K - konstanta motora, [Vs].
- K_i - konstanta tereta, [Nms].
- L_a - induktivitet armaturnog kruga motora, [H].

$$L_{au} = L_a + L_d.$$

$$L_d$$

$$R_a = R_d + R_a$$

$$R_d$$

$$R_{au} = R_a + R_d$$

$$R_{au}$$

$$R_a$$

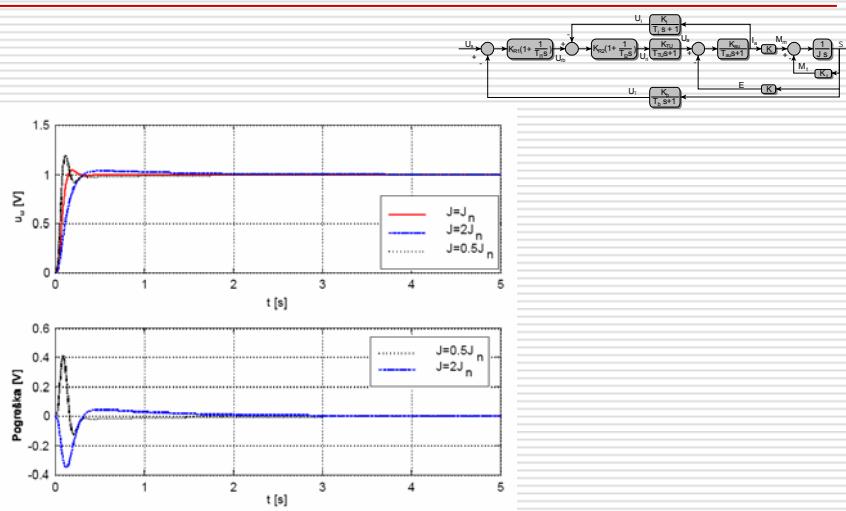
$$R_d$$

$$R_{au}$$



Primjer – DC motor

Odziv neadaptativnog sustava



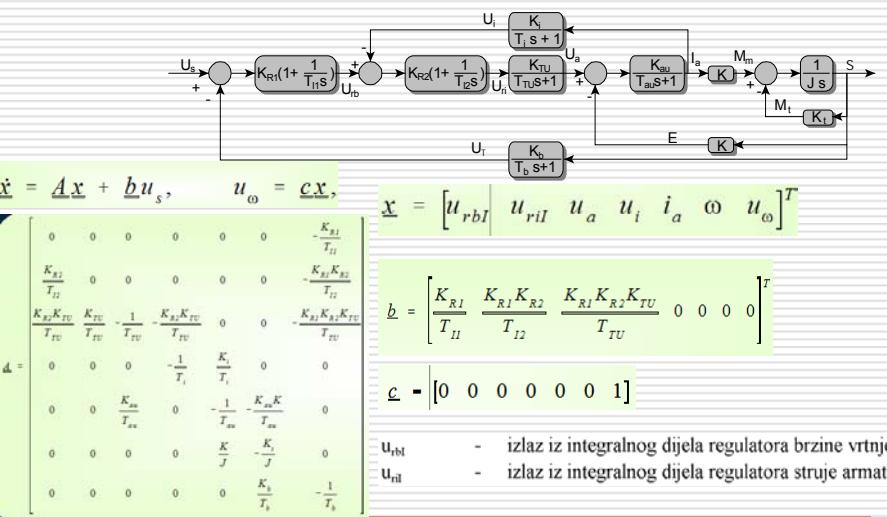
Adaptivno i robusno upravljanje

29



Primjer – DC motor

Prikaz u prostoru stanja



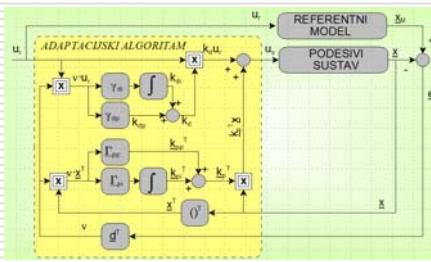
Adaptivno i robusno upravljanje

30



Primjer – DC motor

Adaptivni regulator



$$u_s = k_d(t) u_r(t) + \underline{k}_p^T(t) \underline{x}(t)$$

$$\begin{aligned} \underline{k}_p^T &= \underline{k}_{pi}^T + \underline{k}_{pp}^T, & k_d &= k_{di} + k_{dp}, \\ \dot{\underline{k}}_p^T &= \nu \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{\Gamma}_{pi}, & \dot{k}_{di} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{di}, \\ \dot{\underline{k}}_{pp}^T &= \nu \cdot \underline{x}^T \cdot \underline{\Gamma}_{pp}, & \dot{k}_{dp} &= \nu \cdot u_r \cdot \gamma_{dp}, \\ \nu &= \underline{d}^T \underline{e}, \end{aligned}$$

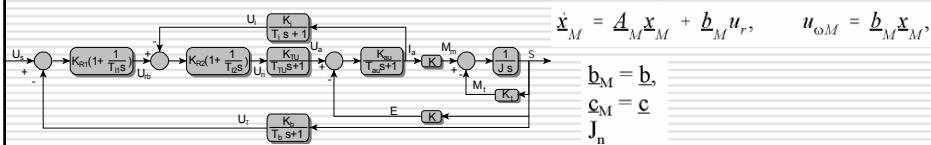
□ Vektor varijabli stanja

$$\underline{x} = [u_{rbI} \ u_{riI} \ u_a \ u_i \ i_a \ \omega \ u_\Theta]^T$$

□ Referentni model

- jednak podesivom sustavu s nominalnim parametrima

Podesivi sustav



$$\dot{\underline{x}}_M = \underline{A}_M \underline{x}_M + \underline{b}_M u_r, \quad u_{\Theta M} = \underline{b}_M \underline{x}_M,$$

$$\underline{b}_M = \underline{b},$$

$$\underline{C}_M = \underline{C}$$

$$\underline{J}_n$$

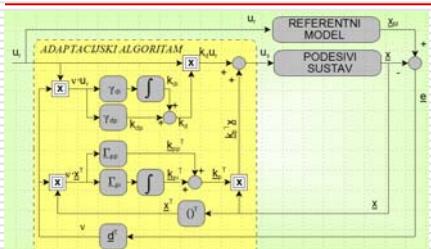
Adaptivno i robuno upravljanje

31



Primjer – DC motor

Adaptivni regulator – provjera globalne stabilnosti po Popovu



$$v(s) = \underline{G}^T(s) \underline{\mu}_1(s) = \underline{d}^T(s\underline{L} - \underline{A}_M)^{-1} \underline{\mu}_1(s)$$

$$\underline{\mu} = -\underline{\mu}_1 = (\underline{b} \underline{k}_p^T(t, v) - (\underline{A}_M - \underline{d})) \underline{x} + (\underline{b} \underline{k}_d(t, v) - \underline{b}_M) u_r.$$

□ Uvjeti stabilnosti

■ 1. uvjet stabilnosti

- Re(G^T(j\omega)) > 0
- G^T – redna prijenosna matrica – nazivnik je određen s det(sl - A_M), brojnik – nule određene polovima i koeficijentima d
- odabir d – zadovoljen 1. uvjet hiperstabilnosti

■ 2. uvjet hiperstabilnosti

- određivanje integrala

$$\int_0^t v(\tau) \cdot \underline{\mu}(\tau) d\tau \geq -\underline{\delta}_0,$$

Adaptivno i robuno upravljanje

32



Primjer – DC motor

Adaptivni regulator – provjera globalne stabilnosti po Popovu



$$v(s) = \underline{G}^T(s) \underline{\mu}_1(s) = \underline{d}^T(s\underline{L} - \underline{A}_M)^{-1} \underline{\mu}_1(s)$$

$$\underline{\mu} = -\underline{\mu}_1 = (\underline{b}\underline{k}_p^T(t,v) - (\underline{A}_M - \underline{d}))\underline{x} + (\underline{b}\underline{k}_d(t,v) - \underline{b}_M)u_r.$$

$$\int_0^t v(\underline{b}\underline{k}_p^T(\tau,v) - \underline{A})\underline{x}d\tau \geq -\underline{\delta}_0,$$

$$\underline{J}_1 = \underline{J}_1 + \underline{J}_2 + \underline{J}_3 + \underline{J}_4 \geq -\underline{\delta}_0, \quad \underline{A} = \underline{A}_M - \underline{d}$$

$$\underline{J}_1 = \int_0^t v(\underline{b}\underline{k}_p^T(\tau,v) - \underline{A})\underline{x}d\tau, \quad \underline{J}_2 = \int_0^t v\underline{b}\underline{k}_{pp}^T(\tau,v)\underline{x}d\tau,$$

$$\underline{J}_3 = \int_0^t v(\underline{b}\underline{k}_d(\tau,v) - \underline{b}_M)u_r d\tau, \quad \underline{J}_4 = \int_0^t v\underline{b}\underline{k}_d(\tau,v)\cdot u_r d\tau.$$

$$\underline{\Gamma}_{PI} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{P12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{P13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{P14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{P15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_{P16} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_{PI} = \begin{bmatrix} k_{P12}(t) \\ k_{P13}(t) \\ k_{P14}(t) \\ k_{P15}(t) \\ k_{P16}(t) \\ k_{PI}(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{A} = \underline{A}_M - \underline{d} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} K \left(\frac{1}{J_n} - \frac{1}{J} \right) - K \left(\frac{1}{J_n} - \frac{1}{J} \right) 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Adaptivno i robuno upravljanje

33



Primjer – DC motor

Adaptivni regulator – provjera globalne stabilnosti po Popovu



$$\underline{J} = \underline{J}_1 + \underline{J}_2 + \underline{J}_3 + \underline{J}_4 \geq -\underline{\delta}_0, \quad \underline{A} = \underline{A}_M - \underline{d}$$

$$\underline{J}_1 = \int_0^t v(\underline{b}\underline{k}_p^T(\tau,v) - \underline{A})\underline{x}d\tau, \quad \underline{J}_2 = \int_0^t v\underline{b}\underline{k}_{pp}^T(\tau,v)\underline{x}d\tau,$$

$$\underline{J}_3 = \int_0^t v(\underline{b}\underline{k}_d(\tau,v) - \underline{b}_M)u_r d\tau, \quad \underline{J}_4 = \int_0^t v\underline{b}\underline{k}_d(\tau,v)\cdot u_r d\tau.$$

$$\underline{J}_1 = \frac{K_{RI}}{2T_{II}} \left(k_{P11}^2(t) \gamma_{P11}^{-1} + k_{P12}^2(t) \gamma_{P12}^{-1} + k_{P13}^2(t) \gamma_{P13}^{-1} + k_{P14}^2(t) \gamma_{P14}^{-1} + k_{P15}^2(t) \gamma_{P15}^{-1} + k_{P16}^2(t) \gamma_{P16}^{-1} + k_{PI}^2(t) \gamma_{PI}^{-1} \right) + c_1$$

$$\underline{J}_1 = \frac{K_{RI} K_{R2}}{2T_{I2}} \left(k_{P11}^2(t) \gamma_{P11}^{-1} + k_{P12}^2(t) \gamma_{P12}^{-1} + k_{P13}^2(t) \gamma_{P13}^{-1} + k_{P14}^2(t) \gamma_{P14}^{-1} + k_{P15}^2(t) \gamma_{P15}^{-1} + k_{P16}^2(t) \gamma_{P16}^{-1} + k_{PI}^2(t) \gamma_{PI}^{-1} \right) + c_2$$

$$\underline{J}_1 = \frac{K_{RI} K_{R2} k_{tu}}{2T_{TU}} \left(k_{P11}^2(t) \gamma_{P11}^{-1} + k_{P12}^2(t) \gamma_{P12}^{-1} + k_{P13}^2(t) \gamma_{P13}^{-1} + k_{P14}^2(t) \gamma_{P14}^{-1} + k_{P15}^2(t) \gamma_{P15}^{-1} + k_{P16}^2(t) \gamma_{P16}^{-1} + k_{PI}^2(t) \gamma_{PI}^{-1} \right) + c_3$$

Linearna funkcija koeficijenata K_{PI}
 nije zagarantiran minimum
 Globalna stabilnost
 nije zagarantirana
 postoji samo lokalna stabilnost

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{K_t}{J_n} \gamma_{P15}^{-1} k_{P15}(t) - \left(\frac{K_t}{J_n} + \frac{K_t}{J} \right) \gamma_{P16}^{-1} k_{P16}(t) + c_4 \\ 0 \end{array} \right]$$

Kvadratne funkcije koeficijenata k_{pi} – imaju minimum

Adaptivno i robuno upravljanje

34



Primjer – DC motor – drugi odabir varijabli stanja

Adaptivni regulator – provjera globalne stabilnosti po Popovu



$$G(s) = \frac{u_o(s)}{u_s(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^7 + a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u_m = Cx,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_3 \\ -a_0 b_3 + b_2 \\ (-a_1 + a_0^2) b_3 \\ (-a_2 + 2a_1 a_0 - a_0^3) b_3 \\ (-a_3 + a_0^2) b_3 \\ (-a_4 + a_0^2) b_3 \\ (-a_5 + a_0^2) b_3 \\ -a_6 b_1 + b_0 \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$J_1 = \frac{1}{2} b k_{pi}^T(t) \Gamma_{pi}^{-1} k_{pi}(t) - \tilde{A} \Gamma_{pi}^{-1} k_{pi}(t) -$$

$$-\frac{1}{2} b k_{pi}^T(0) \Gamma_{pi}^{-1} k_{pi}(0) + \tilde{A} \Gamma_{pi}^{-1} k_{pi}(0)$$

$$J_3 = \gamma_{di}^{-1} \left[\frac{1}{2} b k_{di}^2(t) - b_M k_{di}(t) - \frac{1}{2} b k_{di}^2(0) + b_M k_{di}(0) \right]$$

$$J_2 = \int_0^t b \cdot k_{pp}^T(\tau) \cdot \Gamma_{pp}^{-1} \cdot k_{pp}(\tau) \cdot d\tau$$

$$J_4 = \int_0^t b \cdot k_{dp} \cdot k_{dp} \cdot \gamma_{dp}^{-1} \cdot d\tau = b \gamma_{dp}^{-1} \int_0^t k_{dp}^2 \cdot d\tau$$

Referentni model jednak sustavu s nominalnim parametrima potpuni vektor stanja

Zadovoljen kriterij hiperstabilnosti elementi matrice b pozitivni za moment inercije $J \# 10^7 J_n$

□ Problem

□ Varijable stanja procesa

□ nisu mjerljive

Adaptivno i robusno upravljanje

35



Algoritam adaptacije s reduciranim vektorom varijabli stanja



$$\dot{x}_M = Ax_M + bu_r,$$

$$\dot{x} = Ax + bu_s,$$

$$x_{MR} = Ex_M,$$

$$x_R = Ex,$$

$$\varrho_R = x_{MR} - x_R = E\varrho,$$

$$v = d^T(x_{MR} - x_R) = d^T E e = d^T e_R,$$

$$u_s = k_d u_r + k_p^T x_R =$$

$$= (k_{dp} + k_{di}) u_r + (k_{pp}^T + k_{pi}^T) E x.$$

$$k_p^T = k_{pi}^T + k_{pp}^T, \quad k_d = k_{di} + k_{dp},$$

$$k_{pi}^T = v \cdot x_R^T \cdot \Gamma_{pi}, \quad k_{di} = v \cdot u_r \cdot \gamma_{di},$$

$$k_{pp}^T = v \cdot x_R^T \cdot \Gamma_{pp}, \quad k_{dp} = v \cdot u_r \cdot \gamma_{dp},$$

Primjer F 1. red

$$E = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$d = d_1.$$

Primjer F 3. red

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$d^T = [d_1 \ d_2 \ d_3].$$

Adaptivno i robusno upravljanje

36



Algoritam adaptacije

s reduciranim vektorom varijabli stanja - STABILNOST



$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \underline{\mathbf{d}}^T \cdot (\underline{\mathbf{x}}_{MR} - \underline{\mathbf{x}}_R) = \underline{\mathbf{d}}^T E \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{d}}^T \underline{\mathbf{e}}_R, & \dot{\underline{\mathbf{e}}} &= \underline{\mathcal{A}}_M \underline{\mathbf{e}} + \underline{\mathbf{u}}_1, \\ \mathbf{u}_s &= k_d u_r + \underline{\mathbf{k}}_p^T \underline{\mathbf{x}}_R = & \mathbf{v} &= \underline{\mathbf{d}}^T E \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{d}}^T \underline{\mathbf{e}}_R, \\ &= (k_{dp} + k_{di}) u_r + (\underline{\mathbf{k}}_{pp}^T + \underline{\mathbf{k}}_{pi}^T) E \underline{\mathbf{x}} & \underline{\mathbf{u}} &= -\underline{\mathbf{u}}_1 = [\underline{\mathbf{b}}(\underline{\mathbf{k}}_{pp}^T + \underline{\mathbf{k}}_{pi}^T) E - \underline{\mathcal{A}}] \underline{\mathbf{x}} + [\underline{\mathbf{b}}(k_{dp} + k_{di}) - b_M] u_r \end{aligned}$$

$$G_R^T(s) = \underline{\mathbf{d}}^T E (sI - \underline{\mathcal{A}}_M)^{-1}$$

$$\underline{J} = \int_0^t \mathbf{v} \left[[\underline{\mathbf{b}}(\underline{\mathbf{k}}_{pp}^T + \underline{\mathbf{k}}_{pi}^T) E - \underline{\mathcal{A}}] \underline{\mathbf{x}} + [\underline{\mathbf{b}}(k_{dp} + k_{di}) - b_M] u_r \right] d\tau \geq -\underline{\Delta}_0.$$

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \underline{J}_1 + \underline{J}_2 + \underline{J}_3 + \underline{J}_4 \geq -\underline{\Delta}_0, \\ \underline{J}_1 &= \int_0^t \mathbf{v} (\underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{k}}_{pi}^T E - \underline{\mathcal{A}}) \underline{\mathbf{x}} d\tau, & \underline{J}_2 &= \int_0^t \mathbf{v} \underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{k}}_{pp}^T E \underline{\mathbf{x}} d\tau, \\ \underline{J}_3 &= \int_0^t \mathbf{v} (\underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{k}}_{di} - \underline{\mathbf{b}}_M) u_r d\tau, & \underline{J}_4 &= \int_0^t \mathbf{v} \underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{k}}_{dp} u_r d\tau. \end{aligned}$$

Adaptivno i robuno upravljanje

37



Algoritam adaptacije

s reduciranim vektorom varijabli stanja - STABILNOST



$$G_R^T(s) = \underline{\mathbf{d}}^T E (sI - \underline{\mathcal{A}}_M)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \underline{J}_1 + \underline{J}_2 + \underline{J}_3 + \underline{J}_4 \geq -\underline{\Delta}_0, \\ \underline{J}_1 &= \int_0^t \mathbf{v} (\underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{k}}_{pi}^T E - \underline{\mathcal{A}}) \underline{\mathbf{x}} d\tau, & \underline{J}_2 &= \int_0^t \mathbf{v} \underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{k}}_{pp}^T E \underline{\mathbf{x}} d\tau, \\ \underline{J}_3 &= \int_0^t \mathbf{v} (\underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{k}}_{di} - \underline{\mathbf{b}}_M) u_r d\tau, & \underline{J}_4 &= \int_0^t \mathbf{v} \underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{k}}_{dp} u_r d\tau. \end{aligned}$$

- 1. uvjet hiperstabilnosti zadovoljen
 - ako je prijenosna funkcija referentnog modela stabilna i ako joj relativni red (razlika reda nazivnika i brojnika prijenosne funkcije) nije veći od m, gdje je m broj varijabli stanja koje se koriste u adaptacijskom algoritmu
 - pravilan izbor konstanti težinske matrice $\underline{\mathbf{d}}^T$ može se postići da prijenosna funkcija linearog dijela zadovoljava uvjet hiperstabilnosti

■ integrali J_3 i J_4 identični su kao kod primjene potpunog vektora varijabli stanja

■ integral J_1 zadovoljava drugi uvjet hiperstabilnosti uz uvjet da:

- je dijagonalna matrica težinskih koeficijenata Γ_{pi} pozitivno definitna
- matrica $\underline{\mathbf{b}}$ ima elemente veće od nule recima gdje matrica $(\underline{\mathbf{b}} \underline{\mathbf{k}}_{pi}^T(0) E - \underline{\mathcal{A}})$ ima retke razlike od nule
- elementi ostalih redaka matrice $\underline{\mathbf{b}}$ budu veći ili jednaki nuli

■ integral J_2 zadovoljava drugi uvjet hiperstabilnosti

- izražavanjem umnoška poopćene pogreške i reduciranog vektora stanja koeficijentom adaptacije, dobije se isti izraz kao kod integrala za potpuni vektor stanja

Adaptivno i robuno upravljanje

38



Primjer DC motor

Algoritam adaptacije s reduciranim vektorom varijabli stanja



$$E = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad d = d_1.$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d^T = [d_1 \ d_2].$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad d^T = [d_1 \ d_2 \ d_3].$$

- vektor stanja 1. reda
 - nezadovoljen 1. uvjet hiperstabilnosti
 - (relativni red prijenosne funkcije linearog dijela sustava 6.)
- vektor stanja 2. reda
 - nezadovoljen 1. uvjet hiperstabilnosti
 - (relativni red prijenosne funkcije linearog dijela sustava 5.)
- vektor stanja 3. reda
 - nezadovoljen 1. uvjet hiperstabilnosti
 - (relativni red prijenosne funkcije linearog dijela sustava 4.)
- moguća samo lokalna stabilnost
 - potrebno istražiti simuliranjem



Algoritam adaptacije s referentnim modelom reduciranih reda



$$\dot{\underline{x}}_{MR} = \underline{A}_{MR}\underline{x}_{MR} + \underline{b}_{MR}u_r,$$

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{b}u_s,$$

$$\underline{x}_R = \underline{F}\underline{x},$$

\underline{A} - matrica stanja podesivog sustava dimenzije $m \times n$,
 \underline{A}_{MR} - matrica stanja reduciranih referentnih modela dimenzije $m \times m$ ($m \leq n$),
 \underline{b} - ulazna matrica podesivog sustava dimenzije $m \times 1$,
 \underline{b}_{MR} - ulazna matrica reduciranih referentnih modela dimenzije $m \times 1$,
 \underline{E} - matrica transformacije vektora stanja podesivog sustava dimenzije $m \times n$,
 \underline{x} - vektor stanja podesivog sustava dimenzije $n \times 1$,
 \underline{x}_R - reducirani vektor stanja podesivog sustava dimenzije $m \times 1$,
 \underline{x}_{MR} - vektor stanja reduciranih referentnih modela dimenzije $m \times 1$.

$$\dot{\underline{e}}_R = \underline{A}_{MR}\underline{e}_R + (\underline{A}_{MR}\underline{E} - \underline{E}\underline{A})\underline{x} + \underline{b}_{MR}u_r - \underline{E}\underline{b}u_s$$

$$v = \underline{d}^T \underline{e}_R = \underline{d}^T (\underline{x}_{MR} - \underline{x}_R),$$

$$\underline{\mu} = -\underline{\mu}_1 = \left[\underline{E}\underline{A} - \underline{A}_{MR}\underline{E} + \underline{E}\underline{b}(\underline{k}_{pp}^T + \underline{k}_{pi}^T)\underline{F} \right] \underline{x} + \left[\underline{E}\underline{b}(k_{dp} + k_{di}) - b_{MR} \right] u_r$$

$$\underline{Q}^T(s) = \underline{d}^T(sI - \underline{A}_{MR})^{-1}$$

$$\tilde{\underline{A}}_R = \underline{A}_{MR}\underline{E} - \underline{E}\underline{A}.$$

$$J = \int_0^T v \left\{ \left[\underline{E}\underline{b}(\underline{k}_{pp}^T + \underline{k}_{pi}^T)\underline{F} - \tilde{\underline{A}}_R \right] \underline{x} + \left[\underline{E}\underline{b}(k_{dp} + k_{di}) - b_{MR} \right] u_r \right\} d\tau \geq -\underline{\delta}_0^2,$$



Primjer DC motor

Algoritam adaptacije s referentnim modelom reduciranih reda



$$G_{MR}(s) = \frac{u_{MRO}}{u_r} = \frac{b_{M0}}{a_{M3}s^3 + a_{M2}s^2 + a_{M1}s + a_{M0}},$$

Model	b_{M0}	a_{M0}	a_{M1}	a_{M2}	a_{M3}	$e_{max} [\%]$
3. red	3.0968e+004	3.0968e+004	2.2045e+003	7.5634e+001	1.0000e+000	1.49

Prijenosna matrica linearog dijela

$$G_{MR3}(s) = \begin{bmatrix} d_1s^2 + (d_1a_{M2} - d_3a_{M0})s + d_1a_{M1} - d_2a_{M0} \\ s^3 + a_{M2}s^2 + a_{M1}s + a_{M0} \\ d_2s^2 + (d_1 + a_{M2}d_2 - d_3a_{M1})s + d_1a_{M2} - d_3a_{M0} \\ s^3 + a_{M2}s^2 + a_{M1}s + a_{M0} \\ d_3s^2 + d_2s + d_1 \\ s^3 + a_{M2}s^2 + a_{M1}s + a_{M0} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mu} = -\underline{\mu}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{M0}x_1 + a_{M1}x_2 + a_{M2}x_3 + x_4 - u_r b_{M0} \end{bmatrix}.$$

- Koefficijenti referentnog modela određeni optimiranjem

- prema sustavu s nominalnim parametrima
- ISE kriterij

$$J_{ISE} = \int_0^t (u_{MRO} - u_{\omega})^2 d\tau,$$

Polovi prijenosne matrice

$$\underline{\mu} = \begin{bmatrix} -39.7889 \\ -17.9226+j21.3794 \\ -17.9226-j21.3794 \end{bmatrix}$$

Odabir nula na 0.4 realnog dijela pola za 3. prijenosnu funkciju (samo je ona pobuđena vektorom $\underline{\mu}$):
 $z1=-15,9155$ $z2=-7,1691$



Primjer DC motor

Algoritam adaptacije s referentnim modelom reduciranih reda

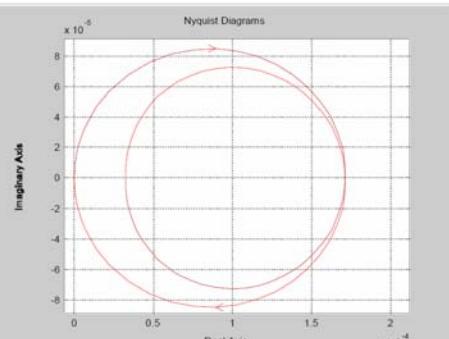


Prijenosna matrica linearog dijela

$$G_{MR3}(s) = \begin{bmatrix} d_1s^2 + (d_1a_{M2} - d_3a_{M0})s + d_1a_{M1} - d_2a_{M0} \\ s^3 + a_{M2}s^2 + a_{M1}s + a_{M0} \\ d_2s^2 + (d_1 + a_{M2}d_2 - d_3a_{M1})s + d_1a_{M2} - d_3a_{M0} \\ s^3 + a_{M2}s^2 + a_{M1}s + a_{M0} \\ d_3s^2 + d_2s + d_1 \\ s^3 + a_{M2}s^2 + a_{M1}s + a_{M0} \end{bmatrix}$$

- Koefficijenti d određeni prema nulama 3. prijenosne funkcije
- Ostali parametri određeni optimiranjem prema ISE kriteriju

Odabir nula na 0.4 realnog dijela pola za 3. prijenosnu funkciju:
 $z1=-15,9155$ $z2=-7,1691$



$$\begin{aligned} d1 &= 1 \\ d2 &= 0.20232 \\ d3 &= 8.7643 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

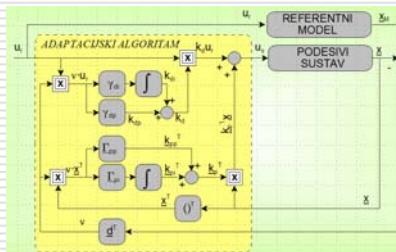
Ostali koefficijenti optimiranje po ISE kriteriju

$$d_3s^2 + d_2s + 1 = \left(\frac{1}{z_1}s - 1 \right) \left(\frac{1}{z_2}s - 1 \right)$$



Primjer DC motor

Algoritam adaptacije s referentnim modelom reducirano reda



$$G_M(s) = \frac{u_{M\text{Ref}}}{u_r} = \frac{b_{M0}}{a_{M1}s^3 + a_{M2}s^2 + a_{M3}s + a_{M0}},$$

Model	b _{M0}	a _{M1}	a _{M2}	a _{M3}	a _{M0}	Res [%]
3. red	3.0968e+004	3.0968e+004	2.2045e+003	7.5634e+001	1.0000e+000	1.49

Rezultati optimiranja				Rezultati simuliranja				
J/J _n	d ₁ d ₂ d ₃	V _{dp}	V _{di}	V _{pp1} V _{pp2} V _{pp3}	V _{pi1} V _{pi2} V _{pi3}	J/J _n	ε _{mo} [%]	ε _{ms} [%]
0.5	0.20232 8.7643·10 ⁻³	7.1293	589.6935	0.4299 0 0	189.8297 0 0	0.5	0.2147	0.0224
						2.0	0.3986	0.0833

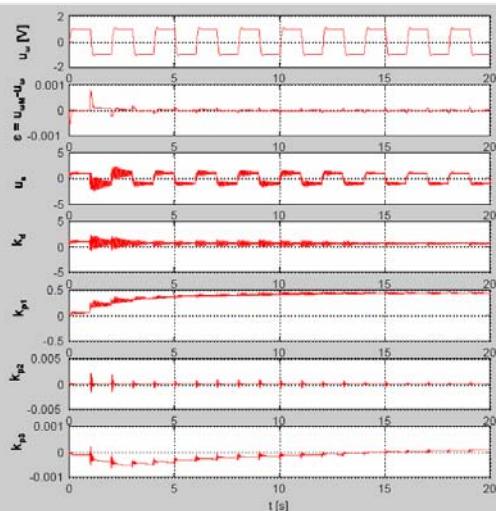
Adaptivno i robusno upravljanje

43



Primjer DC motor

Algoritam adaptacije s referentnim modelom reducirano reda



J/J_n=0.5
koeficijenti adaptacije
optimirani za J/J_n=0.5

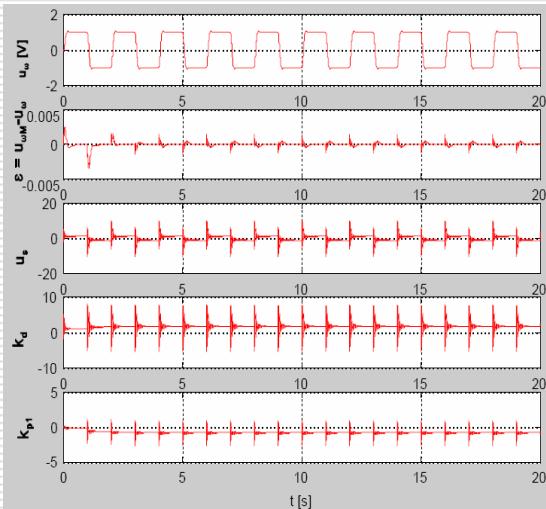
Adaptivno i robusno upravljanje

44



Primjer DC motor

Algoritam adaptacije s referentnim modelom reduciranih reda



$J/J_n=2$
koeficijenti adaptacije
optimirani za $J/J_n=0.5$

Adaptivno i robuno upravljanje

45



Primjer DC motor

Algoritam adaptacije s referentnim modelom reduciranih reda



Iznos maksimalne pogreške
neadaptivnog sustava
 $e=41.1\%$ za $J=0.5J_n$,
 $e=35.2\%$ za $J=2J_n$.

$$G_{MR}(s) = \frac{U_{MR0}}{U_r} = \frac{b_{M0}}{a_{M3}s^3 + a_{M2}s^2 + a_{M1}s + a_{M0}},$$

Model	b _{M0}	a _{M1}	a _{M2}	a _{M3}	a _{M4}	a _{M5}	t _{res} [s]
3. red	3.0968e+004	3.0968e+004	2.2045e+003	7.5634e+001	1.0000e+000		1.49

Adaptivni sustav

Rezultati optimiranja						Rezultati simuliranja		
J/J _n	d ₁ d ₂ d ₃	Y _{dp}	Y _{di}	Y _{pp1} Y _{pp2} Y _{pp3}	Y _{pi1} Y _{pi2} Y _{pi3}	J/J _n	ε _{mo} [%]	ε _{ms} [%]
0.5	1 0.20232 8.7643·10 ⁻³	7.1293	589.6935	0.4299 0 0	89.8297 0 0	0.5 2.0	0.2147 0.3986	0.0224 0.0833

Adaptivno i robuno upravljanje

46

Adaptivno upravljanje s referentnim modelom i signalnom adaptacijom

Toni Bjažić

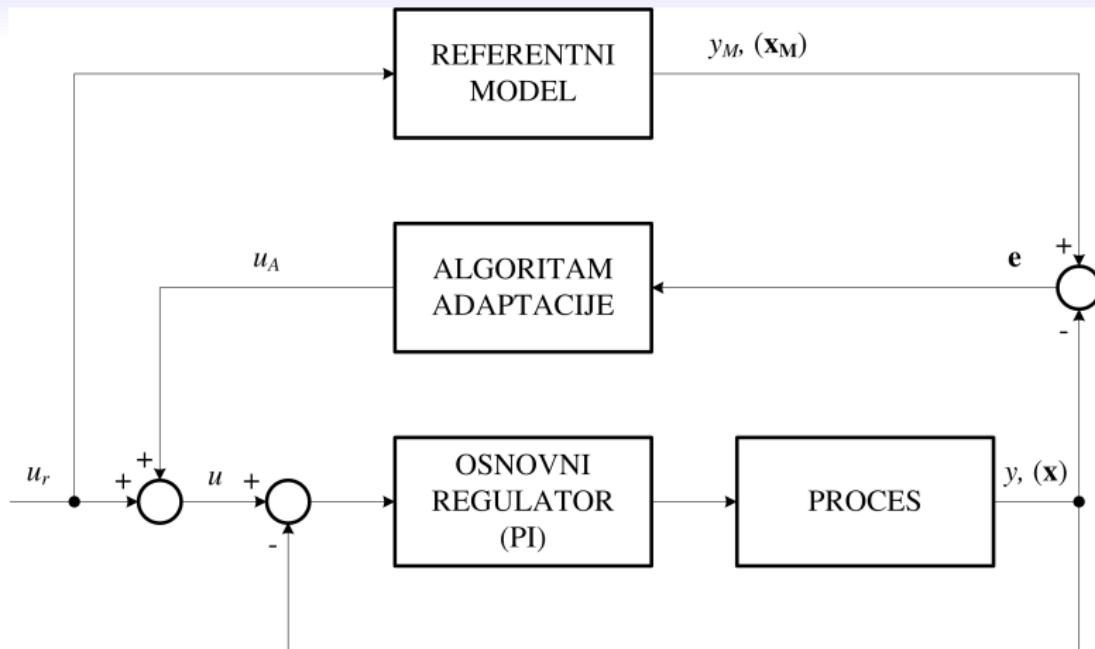
Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

12. ožujka 2009.

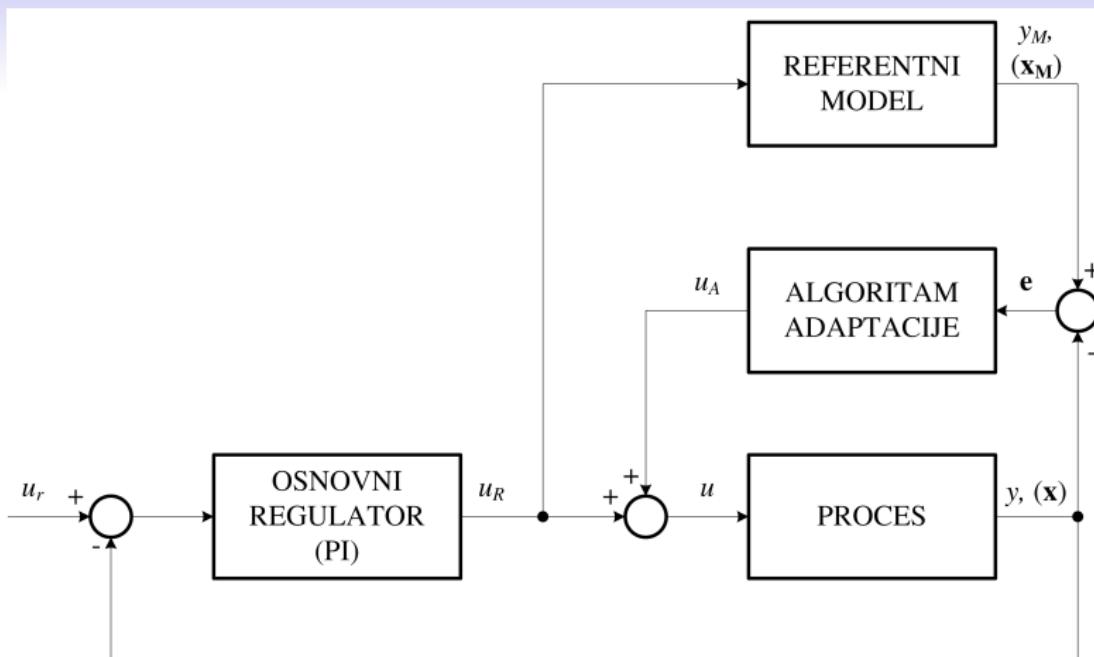
Sadržaj izlaganja

- 1 Struktura algoritma**
- 2 Algoritam signalne adaptacije s referentnim modelom**
- 3 Rezultati primjene adaptivnog regulatora s referentnim modelom**
- 4 Zaključak**

Struktura algoritma



Sl. 1. Adaptivni sustav s referentnim modelom i algoritmom signalne adaptacije u vanjskoj petlji.



Sl. 2. Adaptivni sustav s referentnim modelom i algoritmom signalne adaptacije u unutrašnjoj petlji.

Algoritam signalne adaptacije s referentnim modelom

Linearni vremenski nepromjenjivi sustavi s jednim ulazom i jednim izlazom (SISO) mogu se prikazati jednadžbama u prostoru stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t), \quad (1)$$

gdje su:

- \mathbf{A} – matrica sustava ($n \times n$),
- \mathbf{b} – ulazni vektor sustava ($n \times 1$),
- \mathbf{x} – vektor varijabli stanja sustava ($n \times 1$),
- u – upravljački signal sustava (1×1).

Referentni model opisan je jednadžbama:

$$\dot{\mathbf{x}}_M(t) = \mathbf{A}_M \mathbf{x}_M(t) + \mathbf{b}_M u_x(t), \quad (2)$$

gdje su:

- \mathbf{A}_M – matrica referentnog modela ($n \times n$),
- \mathbf{b}_M – ulazni vektor referentnog modela ($n \times 1$),
- \mathbf{x}_M – vektor varijabli stanja referentnog modela ($n \times 1$),
- u_x – referentni signal u_r ili u_R (1×1), ovisno o strukturi adaptacije.

Vektor pogreške slijedenja dan je izrazom:

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}_M(t) - \mathbf{x}(t). \quad (3)$$

Iz opisa sustava i referentnog modela u prostoru stanja (1) i (2) može se dobiti izraz za derivaciju pogreške:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \dot{\mathbf{x}}_M(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_M \mathbf{e}(t) + \boldsymbol{\sigma}(t) - \mathbf{b} u_A(t), \quad (4)$$

gdje je:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (\mathbf{A}_M - \mathbf{A}) \mathbf{x}(t) + (\mathbf{b}_M - \mathbf{b}) u_x(t). \quad (5)$$

Vektor $\boldsymbol{\sigma}$ određen je varijacijama parametara sustava (procesa) od referentnog modela.

Stabilnost adaptivnog regulatora može se pokazati pomoću kriterija stabilnosti Lyapunova. Prikladna Lyapunovljeva pozitivno određena funkcija neka je kvadratnog oblika:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}, \quad (6)$$

gdje je \mathbf{P} pozitivno određena matrica dana sa:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}, \quad (7)$$

gdje je \mathbf{Q} proizvoljna pozitivno određena matrica.

Derivacija funkcije Lyapunova (6) određena je sa:

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{e}}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \mathbf{e}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{e}}. \quad (8)$$

Uvrštavanjem (4) u (8), slijedi:

$$\dot{V} = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} - 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{b} u_A, \quad (9)$$

gdje je u_A signal adaptacije.

Derivacija funkcije Lyapunova (9) bit će negativno određena za slijedeći oblik signala adaptacije:

$$u_A(t) = h \cdot \text{sign}(\nu(t)), \quad (10)$$

$$\nu(t) = \mathbf{d}^T \mathbf{e}(t), \quad \mathbf{d}^T = \mathbf{b}^T \mathbf{P}, \quad (11)$$

gdje su:

- ν – poopćena pogreška,
- h – koeficijent adaptacije,
- \mathbf{d}^T – težinski vektor koeficijenata pogreške.

Algoritam adaptacije s funkcijom predznaka (10) generira trajne oscilacije visoke frekvencije u signalu adaptacije u_A , što nije pogodno u sustavima automatskog upravljanja. Zbog toga se umjesto funkcije preznaka u algoritmu može koristiti funkcija zasićenja:

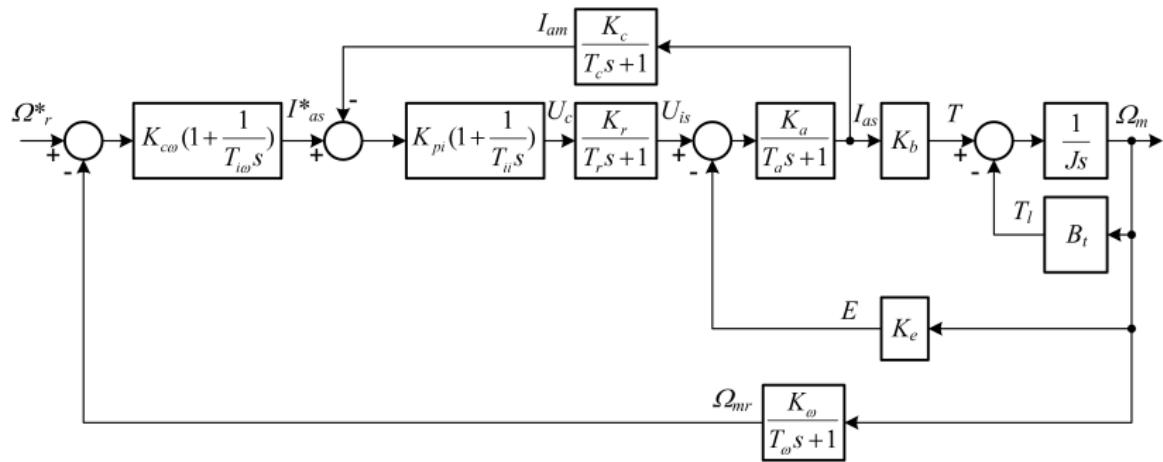
$$u_A(t) = \text{sat}(\nu(t), h) = \begin{cases} h, & \text{za } \nu(t) > \nu_s \\ K_\nu \nu(t), & \text{za } |\nu(t)| \leq \nu_s \\ -h, & \text{za } \nu(t) < -\nu_s \end{cases}, \quad (12)$$

gdje su:

- h – iznos zasićenja algoritma,
- K_ν – koeficijent pojačanja poopćene pogreške,
- ν_s – područje linearnosti funkcije zasićenja.

Koeficijenti matrice \mathbf{P} , a time i \mathbf{d}^T mogu se odrediti iz (7), uz dane koeficijente matrice \mathbf{Q} (obično se uzima $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, \mathbf{I} je jedinična matrica). Međutim, tako određeni težinski koeficijenti ne daju najbolju adaptaciju, tj. najmanju vrijednost pogreške u prijelaznoj pojavi pa stoga ti težinski koeficijenti nisu optimalni. Zbog toga se oni određuju optimiranjem uz pomoć programskih paketa kao što je MATLAB, OPTIMIZATION TOOLBOX.

Rezultati primjene adaptivnog regulatora s referentnim modelom



Sl. 3. Blokovska shema kaskadnog sustava regulacije brzine vrtnje BLDC pogona.

Adaptivni regulator izведен je u strukturi prema Sl. 1. Kao varijable stanja odabране su:

$$G_1(z) = \frac{\dot{\Omega}_{mr}(z)}{\Omega_{mr}(z)} = \frac{z - 1}{T_d z}, \quad (13)$$

$$G_2(z) = \frac{\ddot{\Omega}_{mr}(z)}{\Omega_{mr}(z)} = \frac{z^2 - 2z + 1}{T_d^2 z^2}, \quad (14)$$

gdje je $T_d = 50 \mu s$ vrijeme diskretizacije algoritma.

Referentni model je odabran da dobro opisuje ponašanje pogona s nominalnim parametrima:

$$G_M(s) = \frac{\Omega_{Mmr}(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{(1 + T_f s)(1 + 2\zeta T_n s + T_n^2 s^2)}, \quad (15)$$

gdje je Ω_{Mmr} izlaz referentnog modela, a parametri $\zeta = 0.318$ i $T_n = 1.197 \text{ ms}$ su dobiveni optimiranjem.

Težinski koeficijenti pogreške određeni su optimiranjem prema ISE integralnom kriteriju:

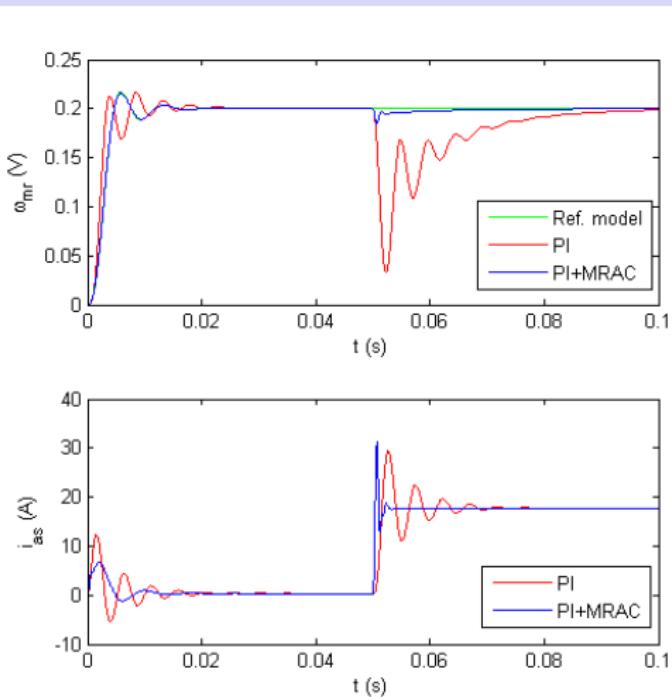
$$I = \int e^2(t) dt, \quad (16)$$

gdje je:

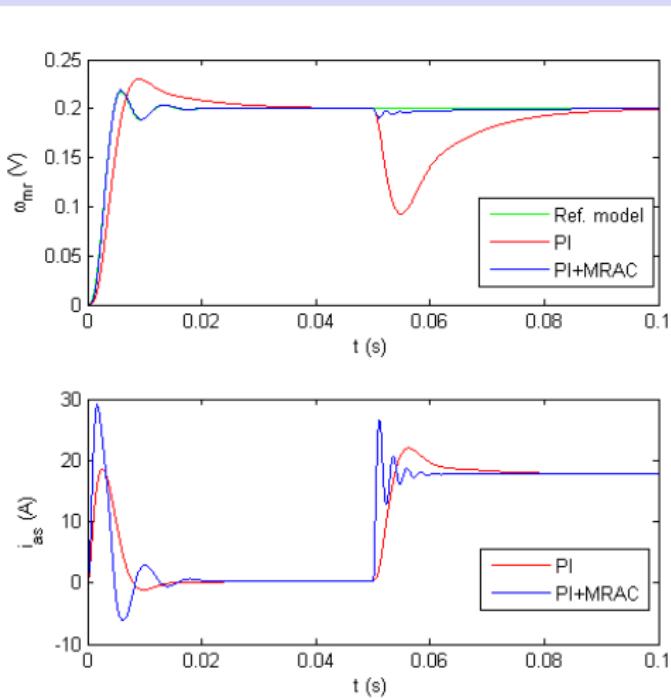
$$e(t) = \omega_{Mmr}(t) - \omega_{mr}(t). \quad (17)$$

Optimiranje je provedeno uz djelovanje referentne veličine $u_r(t) = 0.1 S(t)$, iznos zasićenja $h = 0.1$ i koeficijent pojačanja $K_\nu = 1$. Rezultat optimiranja je:

$$\mathbf{d}^T = [18.018 \ 4.429 \cdot 10^{-3} \ 1.438 \cdot 10^{-6}]. \quad (18)$$



Sl. 4. Odzivi za moment inercije $J = 0.5J_n$.



Sl. 5. Odzivi za moment inercije $J = 2J_n$.

Zaključak

- Algoritam signalne adaptacije generira upravljački signal koji, neovisno o strukturi algoritma, minimizira razliku između željenog vladanja sustava određenog referentnim modelom i odziva samog sustava, tj. forsira sustav da što bolje slijedi referentni model
- Koeficijenti adaptivnog algoritma se projektiraju offline te se ne moraju podešavati za vrijeme rada sustava, odnosno algoritam signalne adaptacije ne zahtijeva učenje

KLIZNI REŽIMI U UPRAVLJANJU SILAZNIM DC/DC PRETVARAČEM

Tomislav Pavlović

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva

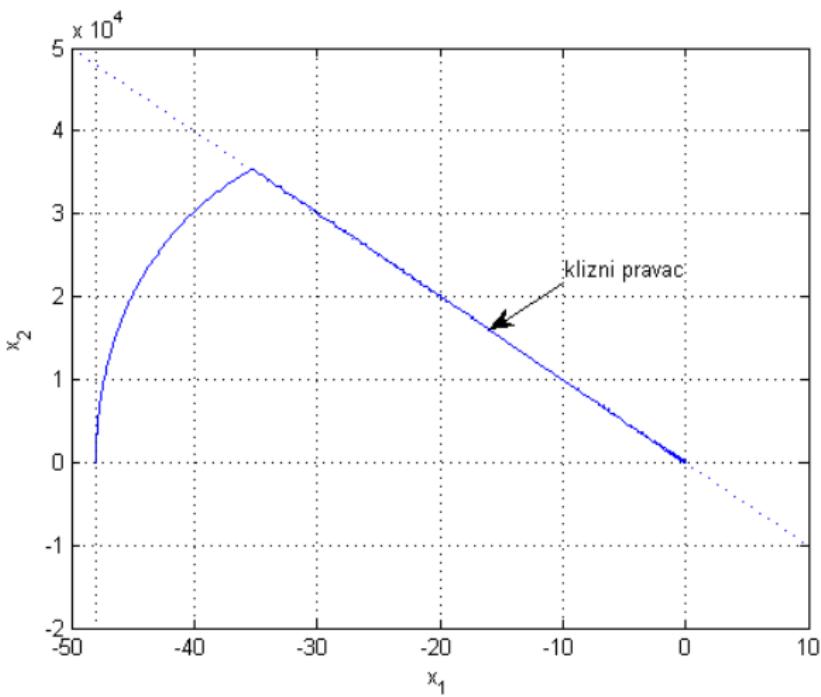
12. ožujka 2009.

Sadržaj

- 1 Uvod**
- 2 Klizni režim**
- 3 Primjer: DC/DC pretvarač**
- 4 Simulacijski rezultati**
- 5 Zaključak**

Uvod

- Težnja kvalitetnom upravljanju realnih sustava, koje karaterizira nelinearnost i promjenjivost parametara dovela je do razvoja adaptivnih i robustnih algoritama upravljanja - jedan od njih su i klizni režimi
- Klizni režimi - posebna klasa sustava upravljanja s promjenljivom strukturom
- Struktura sustava (regulatora, tj. upravljačkog signala) mijenja se visokom frekvencijom, ovisno o stanjima sustava prema pravilu odlučivanja (funkcija prekapčanja)
- Upravljanje pomoću kliznih režima spada u strukture upravljanja po varijablama stanja
- Klizni režim odvija se u dvije faze:
 - dovođenje sustava na kliznu plohu (*reaching phase*)
 - klizanje duž klizne plohe prema stabilnoj točki (*sliding phase*)



Slika 1: Fazna trajektorija sustava u kliznom režimu

Matematički opis kliznog režima

Zamislimo sustav sa m ulaza:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1)$$

gdje su:

- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$... vektor varijabli stanja,
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$... matrica sustava,
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$... ulazna matrica,
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$... vektor ulaza,
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$... omeđena i nepoznata funkcija stanja sustava i
- t ... vrijeme.

- *Funkcija prekapčanja - linearna funkcija definirana sa:*

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x}, \quad (2)$$

gdje je: $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- *Klizna ploha:*

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : s(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (3)$$

- Sustav je u kliznom režimu ako postoji konačno vrijeme t_k takvo da rješenje jednadžbe (1) $x(t)$ zadovoljava

$$s(t) = 0 \quad \text{za sve } t \geq t_k.$$

- Upravljački algoritam se projektira u dva koraka:
 - odabir funkcije prekapčanja - mora osigurati stabilnu i željenu dinamiku u kliznom režimu
 - sinteza upravljačkog zakona - mora faznu trajektoriju dovesti na kliznu plohu i tamo je zadržati
- Upravljačka veličina obično se sastoji od linearog i nelinearnog dijela (diskontinuiran, funkcija signum)
- Uvjeti na funkciju prekapčanja i upravljački zakon:
 - uvjet postojanja kliznog režima
 - uvjet dohvatanja klizne plohe
 - uvjet stabilnosti

- *uvjet postojanja kliznog režima:* trajektorije stanja u proizvoljno maloj okolini klizne plohe moraju biti usmjerene ka kliznoj plohi i upravljački signal mora osigurati da tamo ostanu

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} &< 0 \\ \lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} &> 0\end{aligned} \Leftrightarrow s\dot{s} < 0 \quad (4)$$

- *uvjet dohvaćanja klizne plohe:* trajektorije stanja moraju sjeći kliznu plohu neovisno o početnoj točki sustava (to osigurava linearni dio upravljačkog signala) i
- *uvjet stabilnosti:* funkciju prekapčanja treba tako dizajnirati da je sustav kad jednom uđe u klizni režim stabilan, tj. da trajektorija stanja sustava u kliznom režimu teži prema stabilnoj ravnotežnoj točki.

Ekvivalentno upravljanje

Prepostavimo da je u sustavu (1) funkcija neodređenosti $f(x, u, t)$ identički jednaka nuli, tj.:

$$\dot{x} = Ax + Bu. \quad (5)$$

Nadalje, neka u trenutku t_k varijable stanja leže na kliznoj plohi \mathcal{S} definiranoj s (3) i neka je sustav u kliznom režimu, tj.:

$$Sx(t) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{s}(t) = S\dot{x}(t) = 0 \quad (6)$$

za svaki $t \geq t_k$. Uvrštenjem $\dot{x}(t)$ iz (5) u (6) dobiva se:

$$S\dot{x}(t) = SAx(t) + SBu(t) = 0 \quad \text{za svaki } t \geq t_k. \quad (7)$$

Rješavanjem izraza (7) po u , uz pretpostavku da je matrica \mathbf{SB} nesingularna dobiva se upravljački signal poznat kao ekvivalentna upravljačka veličina:

$$u_{eq}(t) = -(\mathbf{SB})^{-1} \mathbf{SAx}(t). \quad (8)$$

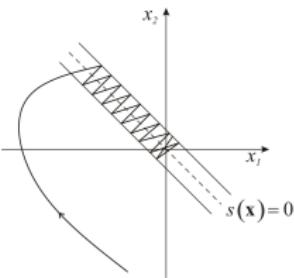
Ekvivalentna upravljačka veličina predstavlja *srednju vrijednost* upravljačkog signala. Uvrštenjem izraza (8) umjesto u u izraz (5) dobiva se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \left(\mathbf{I}_n - \mathbf{B}(\mathbf{SB})^{-1} \mathbf{S} \right) \mathbf{Ax}(t). \quad (9)$$

gdje je: \mathbf{I}_n jedinična matrica reda n . Sustav opisan izrazom (9) je reduciranih reda. Naime, dok je sustav u kliznom režimu, m varijabli stanja je vezano uvjetom (6), tj. mogu se prikazati kao linearne kombinacije preostalih $n - m$ varijabli stanja.

Pojava "Chatteringa"

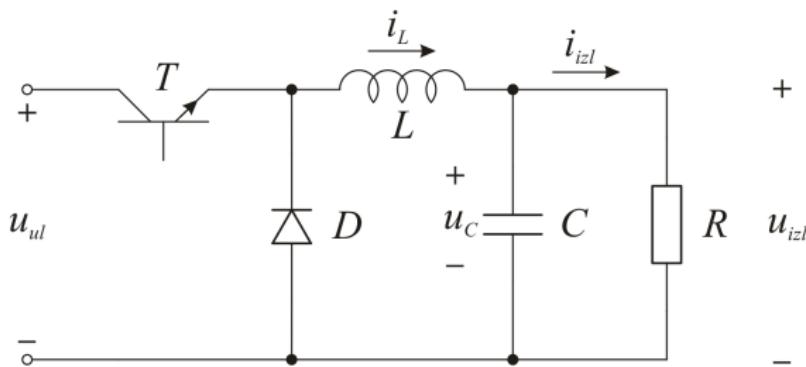
- do sada je bilo riječi o idealnom kliznom režimu koji prepostavlja beskonačnu frekvenciju prekapčanja
- u praksi frekvencija prekapčanja je limitirana - dolazi do chatteringa
- chattering - visokofrekventne oscilacije fazne trajektorije u uskom području oko klizne plohe
- chattering se uklanja zamjenom funkcije signum funkcijom zasićenja ili sigmoidalnom funkcijom



Slika 2: Pojava chatteringa u sustavu drugog reda.

Primjer: DC/DC pretvarač

DC/DC pretvarači su pogodni za primjenu regulatora s kliznim režimom jer je prekapčanje inheretno svojstvo njihovog rada (sadrže sklopke).



Slika 3: Shema silaznog DC/DC pretvarača.

Model silaznog pretvarača u prostoru stanja

Kao varijable stanja odabiru se pogreška izlaznog napona ($x_1 = u_{izl} - U_{ref}$) i njena derivacija.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_{ul}}{LC} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{U_{ref}}{LC} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \quad (10)$$

gdje je:

- U_{ref} - referentni iznos izlaznog napona pretvarača i
- $u \in \{0, 1\}$ - upravljački signal ($u = 0$ tranzistor ne vodi, $u = 1$ tranzistor vodi).

Funkcija prekapčanja i uvjet stabilnosti

Funkcija prekapčanja:

$$s(\mathbf{x}) = mx_1 + x_2 = \mathbf{S}\mathbf{x} = 0, \quad (11)$$

gdje je: $\mathbf{S} = [\begin{matrix} m & 1 \end{matrix}]$ Iz (11) dobiva se:

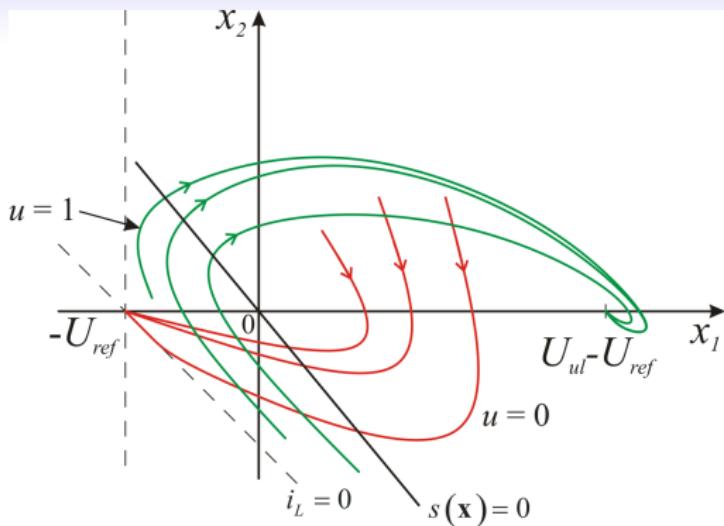
$$x_2 + mx_1 = \dot{x}_1 + mx_1 = 0. \quad (12)$$

Rješavanjem diferencijalne jednadžbe (12) dobiva se:

$$x_1(t) = x_1(t_k) e^{-m(t-t_k)}, \quad (13)$$

gdje je: t_k vrijeme ulaska sustava u klizni režim, a $x_1(t_k)$ iznos pogreške izlaznog napona u t_k . Iz (13) vidi se da je sustav u kliznom režimu stabilan za svaki $m > 0$.

Upravljački zakon



Slika 4: Fazne trajektorije silaznog DC/DC pretvarača

$$u = \begin{cases} 0 & \text{za } s(x) > 0 \\ 1 & \text{za } s(x) < 0 \end{cases} = \frac{1}{2} (1 - \text{sgn}(s)) \quad (14)$$

Uvjet dohvaćanja i postojanja kliznog režima

Iz slike 4 vidi se da upravljački zakon (14) zadovoljava uvjet dohvaćanja klizne plohe.

Sustav opisan izrazom (10) može se kraće zapisati kao:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{D} \quad (15)$$

Deriviranjem izraza (11) dobiva se:

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}} \quad (16)$$

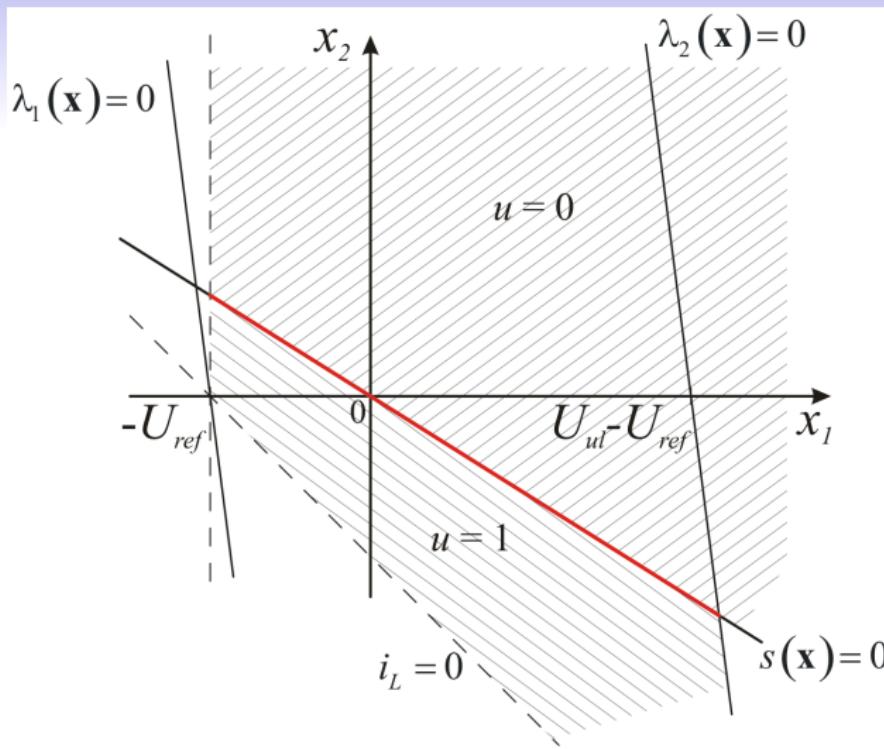
Uvrštenjem (15) u (16) dobiva se:

$$\dot{s} = \mathbf{SAx} + \mathbf{SBu} + \mathbf{SD} \quad (17)$$

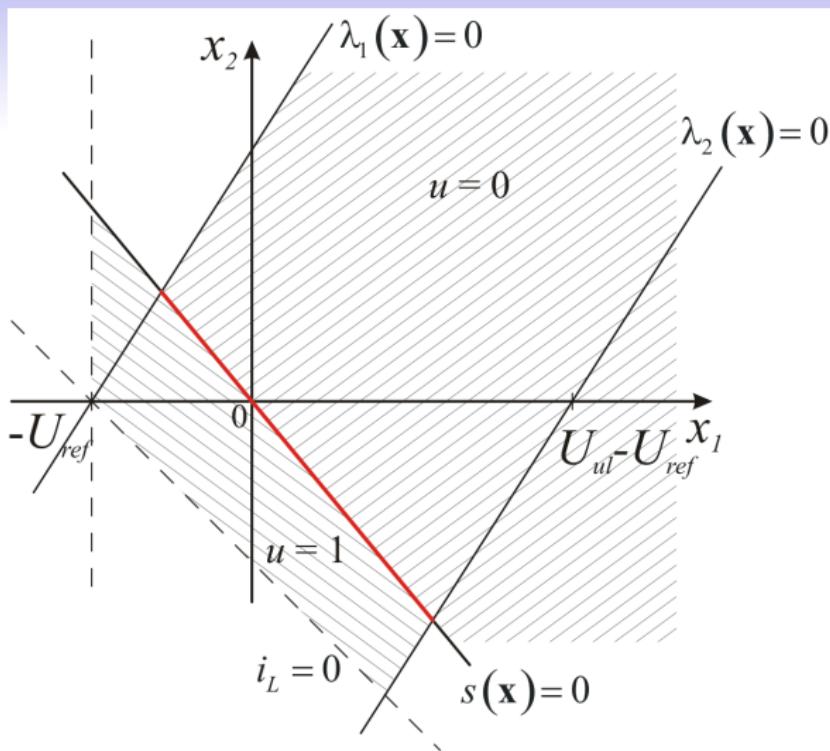
Uvjet dohvaćanja i postojanja kliznog režima

Uvrštenjem matrica **A**, **B** i **D** iz (10) i $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} m & 1 \end{bmatrix}$ u (17), te sređivanjem dobiva se uvjet postojanja kliznog režima na kliznom pravcu $s(\mathbf{x}) = 0$:

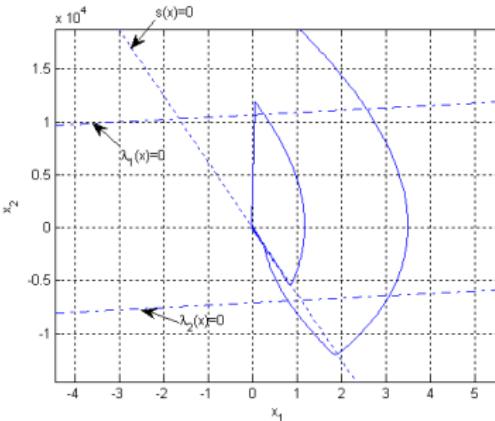
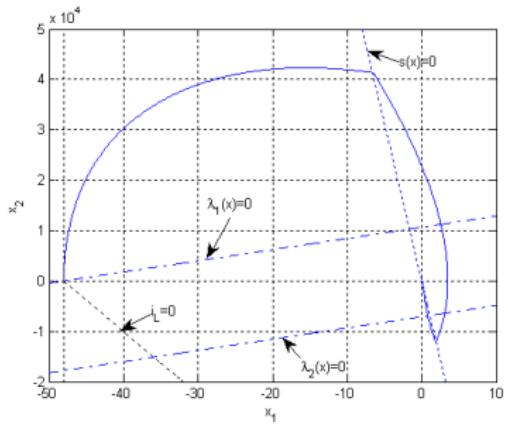
$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{LC}x_1 + \left(m - \frac{1}{RC}\right)x_2 - \frac{U_{ref}}{LC} < 0 && \text{za } s(\mathbf{x}) > 0 \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{LC}x_1 + \left(m - \frac{1}{RC}\right)x_2 + \frac{U_{ul}}{LC} - \frac{U_{ref}}{LC} > 0 && \text{za } s(\mathbf{x}) < 0\end{aligned}\tag{18}$$



Slika 5: Područje postojanja kliznog režima za $m < 1/RC$.



Slika 6: Područje postojanja kliznog režima za $m > 1/RC$.



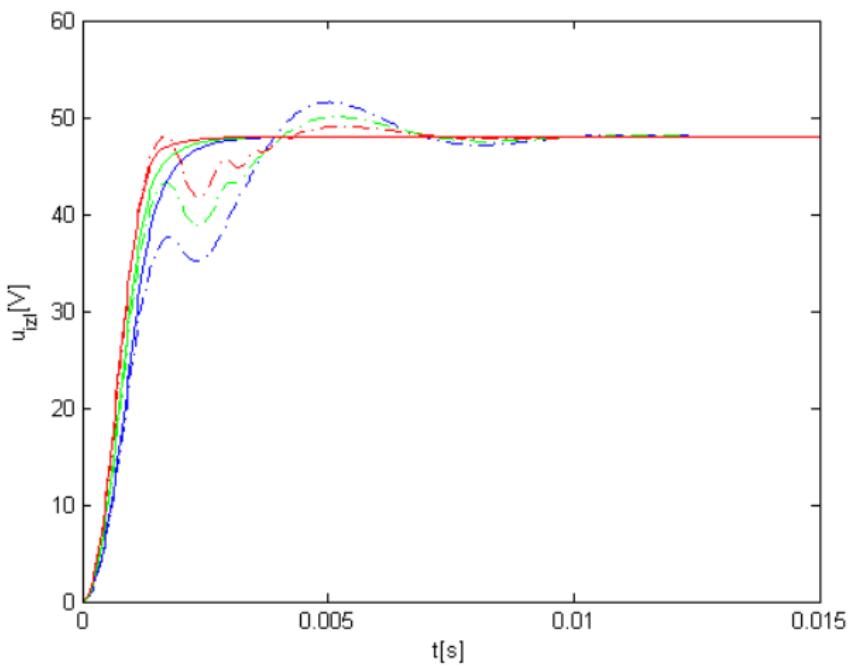
Slika 7: Fazne trajektorije silaznog pretvarača pri pokretanju (lijevo) i promjeni izlaznog otpora (desno).

Simulacijski rezultati

- ponašanje pri promjeni reference izlaznog napona: $U_{ref} = 48S(t) \text{ V}$
- ponašanje uslijed promjene izlaznog otpora:
 $R(t) = [46 - 13.8S(t - 0.05) + 13.8S(t - 0.1)] \Omega$
- utjecaj ulaznog napona: $U_{ul} = 60 \text{ V}$, $U_{ul} = 77 \text{ V}$ i $U_{ul} = 94 \text{ V}$
- ponašanje s PID regulatorom (podešen za radnu točku određenu otporom iznosa $R = 46 \Omega$) i regulatorom s kliznim režimom ($m = 2000$)

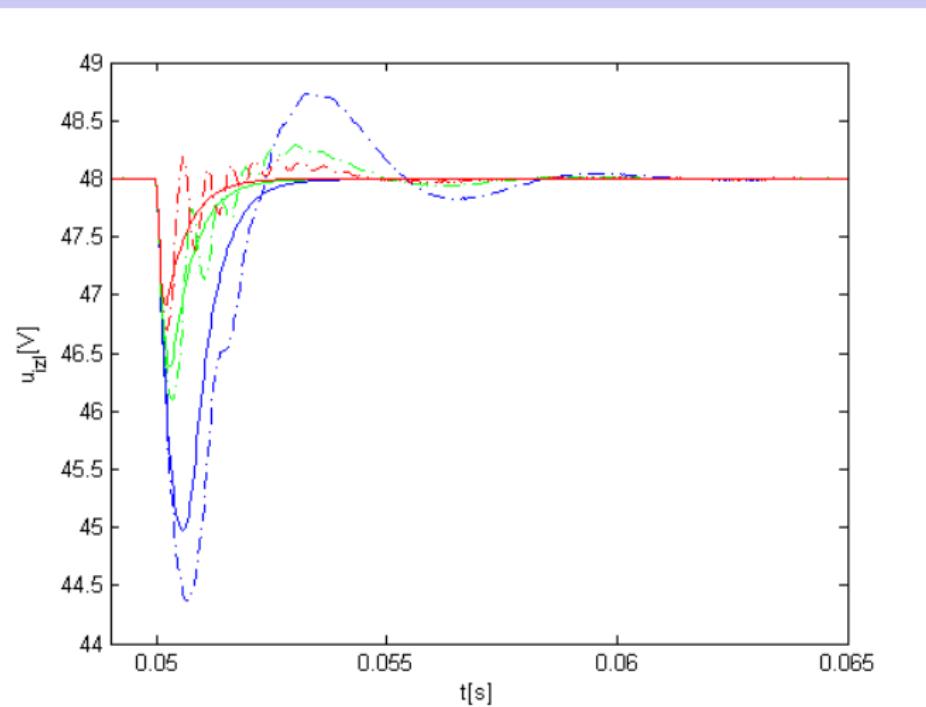
k_R	$T_I[\text{ms}]$	$T_D[\text{ms}]$	T_ν
0.25	0.3	2.2	$T_D/5$

Tablica 1: Parametri PID regulatora

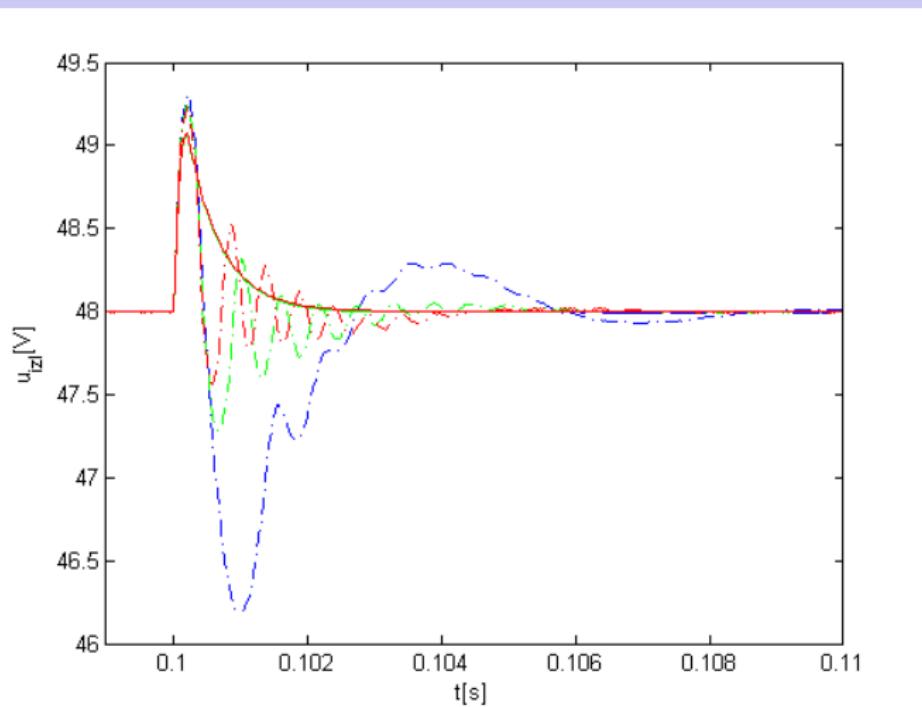


Slika 8: Odziv u_{izl} silaznog DC/DC pretvarača pri pokretanju pretvarača. Odzivi s PID regulatorom ($\cdots \cdot \cdot$), regulatorom s KR (—). $U_{ul} = 60 \text{ V}$, $U_{ul} = 77 \text{ V}$, $U_{ul} = 94 \text{ V}$

KLIZNI REŽIMI U UPRAVLJANJU SILAZNIM DC/DC PRETVARAČEM



Slika 9: Odziv u_{izl} silaznog DC/DC pretvarača pri promjeni izlaznog otpora s 46Ω na 32.2Ω . Odzivi s PID regulatorom ($- \cdot -$), regulatorom s KR (—). $U_{ul} = 60 \text{ V}$, $U_{ul} = 77 \text{ V}$, $U_{ul} = 94 \text{ V}$



Slika 10: Odziv u_{izl} silaznog DC/DC pretvarača pri promjeni izlaznog otpora s 32.2Ω na 46Ω . Odzivi s PID regulatorom ($- \cdot -$), regulatorom s KR ($-$). $U_{ul} = 60 \text{ V}$, $U_{ul} = 77 \text{ V}$, $U_{ul} = 94 \text{ V}$

KLIZNI REŽIMI U UPRAVLJANJU SILAZNIM DC/DC PRETVARAČEM

Zaključak

- Klizni režimi spadaju u adaptivne i robusne strukture upravljanja
- Ulaskom u klizni režim dolazi do redukcije reda sustava
- Dinamika sustava u kliznom režimu određena je oblikom klizne plohe
- Sustav u kliznom režimu postaje neosjetljiv na promjene parametara
- Prijelazna pojava odvija se u dvije faze - faza dolaska u klizni režim i faza klizanja
- Nužno je imati informacije o varijablama stanja (mjerjenje ili estimacija)
- Zbog konačne frekvencije prekapčanja u realnim sustavima dolazi do chatteringa (kvazi klizni režim)

Regulator s promjenjivom strukturom

Regulator s kliznim režimom

http://www.fer.hr/predmet/aru_a

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: zeljko.ban@fer.hr

1



Adaptivni regulator s promjenjivom strukturom



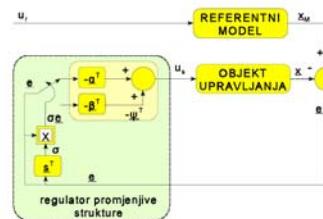
- Djelovanje
 - struktura regulatora se mijenja
 - koeficijenti pojačanja referentnog signala mijenjaju se ovisno o stanju sustava
 - faze djelovanja
 - dovođenje sustava na kliznu plohu
 - klizanje duž klizne plohe prema stabilnoj točci
 - stabilna točka
 - ishodište fazne ravnine sustava
 - pogreška i njena derivacija jednake nuli
- Izvedba
 - s referentnim modelom
 - ponašanje sustava određeno referentnim modelom
 - primjena kliznih režima na pogrešku između podesivog sustava i referentnog modela
 - klizna ravnina određuje brzinu adaptacije
 - bez referentnog modela
 - ponašanje sustava određeno kliznom ravninom
 - klizni režim se primjenjuje na signal razlike
 - (referentnog signala i izlaznog signala podesivog sustava)



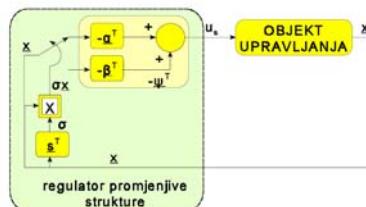
Adaptivni regulator s promjenjivom strukturu



- Adaptivni regulator s referentnim modelom i promjenjivom strukturu
 - u regulator se uvodi vektor pogreške između referentnog modela i podesivog sustava (objekta upravljanja)
 - regulator generira upravljački signal u_s stacionarno stanje
 - pogreška i njena derivacija jednake nulli



- Adaptivni regulator s promjenjivom strukturu – bez referentnog modela
 - Objekt upravljanja kao prvu varijablu stanja ima razliku referentnog signala i izlaznog signala
 - regulator generira upravljački signal u_s stacionarno stanje
 - prva varijabla stanja i njena derivacija jednake nulli



Adaptivno i robusno upravljanje

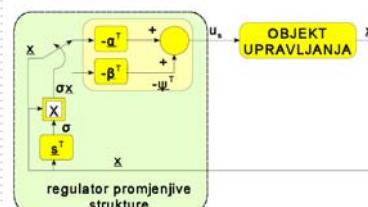
3



Adaptivni regulator s promjenjivom strukturu



- Daljnja razmatranja na običnom nelinearnom sustavu
 - za sustav s referentnim modelom isto uz varijable stanja utemeljene na pogrešci sustava prema referentnom modelu



$$u_s = -\Psi^T \dot{x},$$

$$\Psi = [\Psi_i], \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Psi_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{za } \sigma x_i > 0 \\ \beta_i, & \text{za } \sigma x_i < 0 \end{cases}$$

- n - red sustava,
 σ - klizna hiperravnina

$$\sigma = \Sigma^T \dot{x}$$

\underline{s} - redni vektor konstanti koji određuje ponašanje sustava u kliznom režimu

linija prekapčanja $\sigma=0$ je klizni režim

Uvjet postojanja kliznog režima

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \dot{\sigma} \leq 0$$

Adaptivno i robusno upravljanje

4



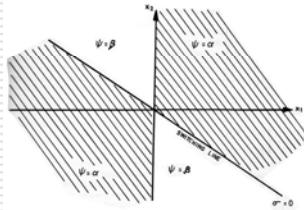
Adaptivni regulator s promjenjivom strukturom

Klizni režim

- prekapčanje na liniji $\sigma=0$
- upravljački signal ovisan o umnošku σx .

Rad regulatora

- dovođenje na klizni pravac
- klizanje duž kliznog pravca



$$u_s = -\Psi^T \dot{x}$$

$$\Psi = [\Psi_i], \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Psi_i = \begin{cases} \alpha_i, & \text{za } \sigma x_i > 0 \\ \beta_i, & \text{za } \sigma x_i < 0 \end{cases},$$

n - red sustava,

σ - klizna hiperravnina

$$\sigma = \Sigma^T \dot{x}$$

Σ - redni vektor konstanti koji određuje ponašanje sustava u kliznom režimu

linija prekapčanja $\sigma=0$ je klizni režim

Uvjet postojanja kliznog režima

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma \dot{\sigma} \leq 0$$



Adaptivni regulator s promjenjivom strukturom za sustave s jednim ulazom



Zamislimo sustav sa m ulaza:

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(x, u, t)$$

gdje su:

- $x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$... vektor varijabli stanja,
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$... matrica sustava,
- $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$... ulazna matrica,
- $u \in \mathbb{R}^{m \times 1}$... vektor ulaza,
- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$... omeđena i nepoznata funkcija stanja sustava i
- t ... vrijeme.



Adaptivni regulator s promjenjivom strukturom za sustave s jednim ulazom



- *Funkcija prekapčanja* - linearna funkcija definirana sa:

$$s(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x},$$

gdje je: $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- *Klizna ploha*:

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : s(\mathbf{x}) = 0\}.$$

- Sustav je u kliznom režimu ako postoji konačno vrijeme t_k takvo da rješenje jednadžbe $\dot{\mathbf{x}}(t)$ zadovoljava

$$s(t) = 0 \quad \text{za sve } t \geq t_k.$$



Adaptivni regulator s promjenjivom strukturom za sustave s jednim ulazom



- Upravljački algoritam se projektira u dva koraka:
 - odabir funkcije prekapčanja - mora osigurati stabilnu i željenu dinamiku u kliznom režimu
 - sinteza upravljačkog zakona - mora faznu trajektoriju dovesti na kliznu plohu i tamo je zadržati
- Upravljačka veličina obično se sastoji od linearne i nelinearne dijela (diskontinuiran, funkcija signum)
- Uvjeti na funkciju prekapčanja i upravljački zakon:
 - uvjet postojanja kliznog režima
 - uvjet dohvatanja klizne plohe
 - uvjet stabilnosti

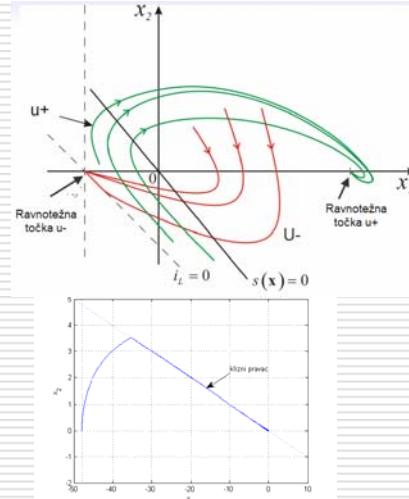


Adaptivni regulator s promjenjivom strukturom za sustave s jednim ulazom



- uvjet postojanja kliznog režima:
 - trajektorije stanja u proizvoljno maloj okolini klizne plohe moraju biti usmjerene ka kliznoj plohi
 - upravljački signal mora osigurati da tamo ostanu
$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \Leftrightarrow s\dot{s} < 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \Leftrightarrow s\dot{s} < 0$$
- uvjet dohvaćanja klizne plohe:
 - trajektorije stanja moraju sjeći kliznu plohu neovisno o početnoj točki sustava
 - to osigurava linearni dio upravljačkog signala
- Uvjet stabilnosti
 - funkciju prekapčanja treba tako dizajnirati da je
 - sustav u kliznom režimu stabilan,
 - tj. da trajektorija stanja sustava u kliznom režimu teži prema stabilnoj ravnotežnoj točci



Adaptivno i robusno upravljanje

9



Adaptivni regulator s promjenjivom strukturom za sustave s jednim ulazom



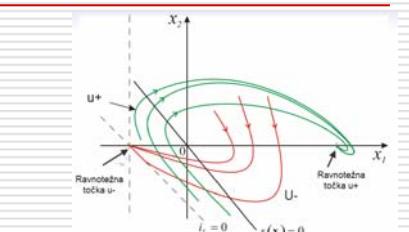
$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \dot{s} < 0 \Leftrightarrow s\dot{s} < 0$$

$$\lim_{s \rightarrow 0^-} \dot{s} > 0 \Leftrightarrow s\dot{s} < 0$$

$$u = \begin{cases} u^+ & \text{za } s(x) > 0 \\ u^- & \text{za } s(x) < 0 \end{cases}$$

Najčešći oblik funkcije prekapčanja (klizne plohe)
linearna kombinacija varijabli stanja

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i x_i + x_n$$



Uvjet stabilnosti (uz pretpostavku linearног i vremenski nepromjenjivog sustava)

$$m_i > 0$$

Adaptivno i robusno upravljanje

10



Ekvivalentno upravljanje

Dinamika sustava u kliznom režimu

- određena kliznom plohom
- vektor stanja teži nuli

Pretpostavimo da je u sustavu funkcija neodređenosti $f(x, u, t)$ identički jednaka nuli, tj.:

$$\dot{x} = Ax + Bu.$$

Nadalje, neka u trenutku t_k varijable stanja leže na kliznoj plohi S definiranoj s

$$Sx(t) = 0 \quad \text{i} \quad \dot{s}(t) = S\dot{x}(t) = 0$$

za svaki $t \geq t_k$. Uvrštenjem $\dot{x}(t)$ dobiva se:

$$S\dot{x}(t) = SAx(t) + SBu(t) = 0 \quad \text{za svaki } t \geq t_k.$$



Ekvivalentno upravljanje

Rješenjem izraza $S dx/dt = 0$ po u dobije se upravljački signal poznat kao ekvivalentna upravljačka veličina

$$u_{eq}(t) = - (SB)^{-1} S A x(t)$$

- Ekvivalentna upravljačka veličina
 - srednja vrijednost upravljačkog signala
- Uvrštenje u jednadžbu stanja

$$\dot{x}(t) = \left(I_n - B (SB)^{-1} S \right) A x(t)$$

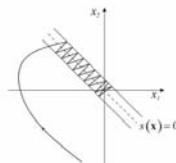
- I_n – jedinična matrica reda n
- Sustav reduciranih reda
 - m jednadžbi vezane uvjetom $Sx=0$
 - mogu se prikazati kao linearna kombinacija ostalih $n-m$ varijabli



Preslušavanje u sustavu s kliznim režimom

Pojava "Chatteringing"

- do sada je bilo riječi o idealnom kliznom režimu koji prepostavlja beskonačnu frekvenciju prekapčanja
- u praksi frekvencija prekapčanja je limitirana - dolazi do chatteringa
- chattering - visokofrekventne oscilacije fazne trajektorije u uskom području oko klizne plohe
- chattering se uklanja zamjenom funkcije signum funkcijom zasićenja ili sigmoidalnom funkcijom



Adaptivno i robusno upravljanje

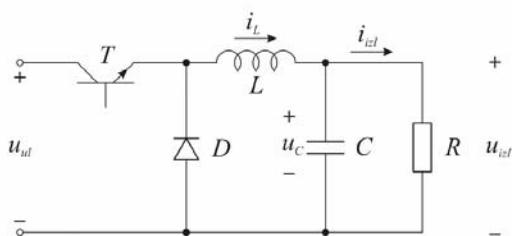
13



Primjer DC/DC pretvarač

Primjer: DC/DC pretvarač

DC/DC pretvarači su pogodni za primjenu regulatora s kliznim režimom jer je prekapčanje inherentno svojstvo njihovog rada (sadrže sklopke).



Slika 3: Shema silaznog DC/DC pretvarača.

Adaptivno i robusno upravljanje

14



Model silaznog pretvarača

Kao varijable stanja odabiru se pogreška izlaznog napona ($x_1 = u_{izl} - U_{ref}$) i njena derivacija.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{U_{ul}}{LC} \end{bmatrix}}_{B} u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{U_{ref}}{LC} \end{bmatrix}}_{D}$$

gdje je:

- U_{ref} - referentni iznos izlaznog napona pretvarača i
- $u \in \{0, 1\}$ - upravljački signal ($u = 0$ tranzistor ne vodi, $u = 1$ tranzistor vodi).



Funkcija prekapčanja i uvjet stabilnosti



Funkcija prekapčanja:

$$s(\mathbf{x}) = mx_1 + x_2 = \mathbf{S}\mathbf{x} = 0,$$

gdje je: $\mathbf{S} = [m \ 1]$ Iz (11) dobiva se:

$$x_2 + mx_1 = \dot{x}_1 + mx_1 = 0.$$

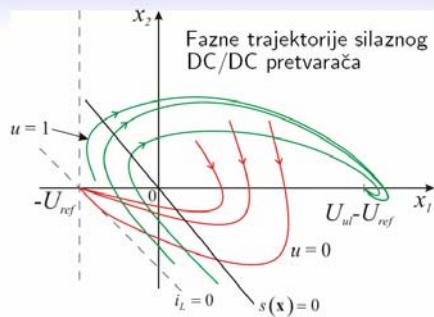
Rješavanjem diferencijalne jednadžbe (12) dobiva se:

$$x_1(t) = x_1(t_k) e^{-m(t-t_k)},$$

gdje je: t_k vrijeme ulaska sustava u klizni režim, a $x_1(t_k)$ iznos pogreške izlaznog napona u t_k . Iz (13) vidi se da je sustav u kliznom režimu stabilan za svaki $m > 0$.



Upravljački zakon



$$u = \begin{cases} 0 & \text{za } s(x) > 0 \\ 1 & \text{za } s(x) < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}(1 - \text{sgn}(s))$$

Adaptivno i robusno upravljanje

17



Uvjet dohvaćanja i postojanja kliznog režima



Iz slike se vidi da upravljački zakon zadovoljava uvjet dohvaćanja klizne plohe

Sustav opisan izrazom

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} + \mathbf{D}$$

Deriviranjem izraza $s(\mathbf{x})$ dobiva se:

$$\dot{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\dot{\mathbf{x}}$$

Uvrštenjem se dobiva :

$$\dot{s} = \mathbf{SAx} + \mathbf{SBu} + \mathbf{SD}$$

Adaptivno i robusno upravljanje

18



Uvjet dohvaćanja i postojanja kliznog režima



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{U_{ul}}{LC} \\ 0 \end{bmatrix}}_B u + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{U_{ref}}{LC} \end{bmatrix}}_D \quad \mathbf{s} = [m \ 1]$$

$$\dot{s} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{B}u + \mathbf{S}\mathbf{D}$$

$$s(x) = 0$$

Uvjet postojanja kliznog režima

$$\lambda_1(x) = -\frac{1}{LC}x_1 + \left(m - \frac{1}{RC}\right)x_2 - \frac{U_{ref}}{LC} < 0 \quad \text{za } s(x) > 0$$

$$\lambda_2(x) = -\frac{1}{LC}x_1 + \left(m - \frac{1}{RC}\right)x_2 + \frac{U_{ul}}{LC} - \frac{U_{ref}}{LC} > 0 \quad \text{za } s(x) < 0$$

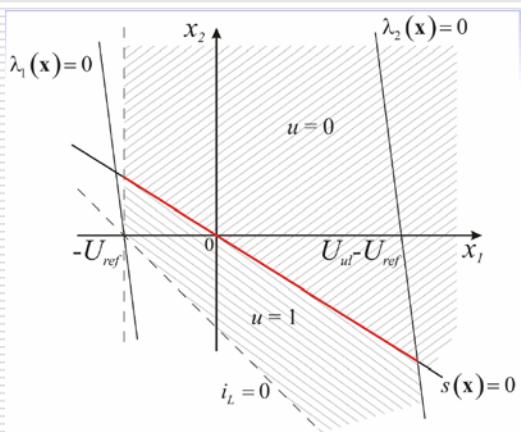


Uvjet dohvaćanja i postojanja kliznog režima



$$\lambda_1(x) = -\frac{1}{LC}x_1 + \left(m - \frac{1}{RC}\right)x_2 - \frac{U_{ref}}{LC} < 0 \quad \text{za } s(x) > 0$$

$$\lambda_2(x) = -\frac{1}{LC}x_1 + \left(m - \frac{1}{RC}\right)x_2 + \frac{U_{ul}}{LC} - \frac{U_{ref}}{LC} > 0 \quad \text{za } s(x) < 0$$



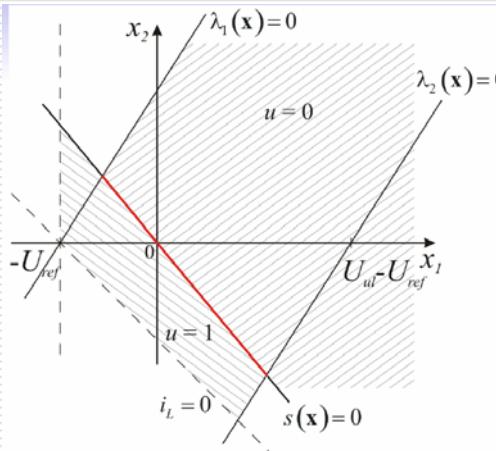
Područje postojanja kliznog režima za $m < 1/RC$



Uvjet dohvaćanja i postojanja kliznog režima



$$\begin{aligned}\lambda_1(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{LC}x_1 + \left(m - \frac{1}{RC}\right)x_2 - \frac{U_{ref}}{LC} < 0 && \text{za } s(\mathbf{x}) > 0 \\ \lambda_2(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{LC}x_1 + \left(m - \frac{1}{RC}\right)x_2 + \frac{U_{ul} - U_{ref}}{LC} > 0 && \text{za } s(\mathbf{x}) < 0\end{aligned}$$

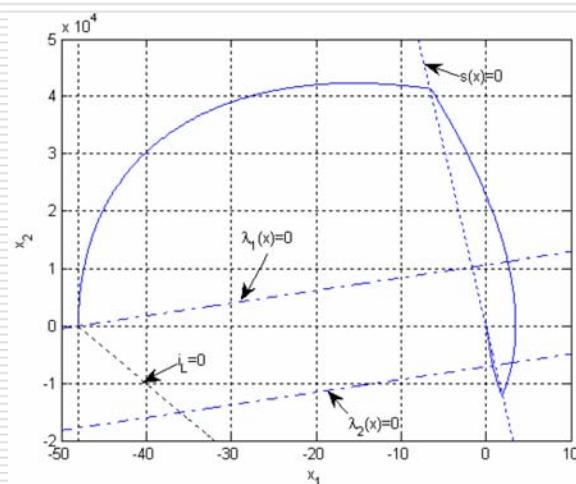


Područje postojanja kliznog režima za $m > 1/RC$



Fazne trajektorije

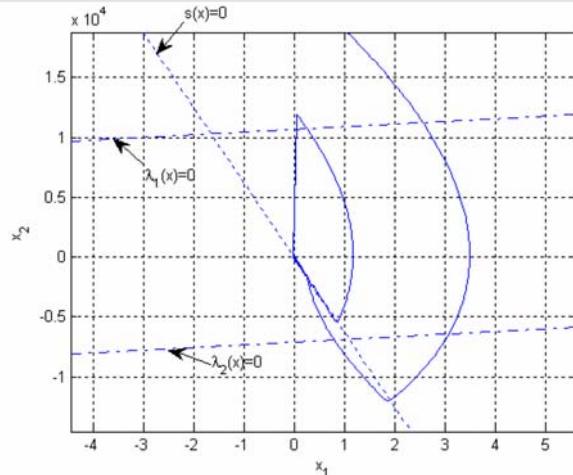
pri pokretanju (promjena ref. napona)





Fazne trajektorije

pri promjeni izlaznog otpora



Adaptivno i robusno upravljanje

23



Rezultati simulacije



- ponašanje pri promjeni reference izlaznog napona: $U_{ref} = 48S(t)$ V
- ponašanje uslijed promjene izlaznog otpora:
 $R(t) = [46 - 13.8S(t - 0.05) + 13.8S(t - 0.1)] \Omega$
- utjecaj ulaznog napona: $U_{ul} = 60$ V, $U_{ul} = 77$ V i $U_{ul} = 94$ V
- ponašanje s PID regulatorom (podešen za radnu točku određenu otporom iznosa $R = 46 \Omega$) i regulatorom s kliznim režimom ($m = 2000$)

k_R	$T_I[ms]$	$T_D[ms]$	T_ν
0.25	0.3	2.2	$T_D/5$

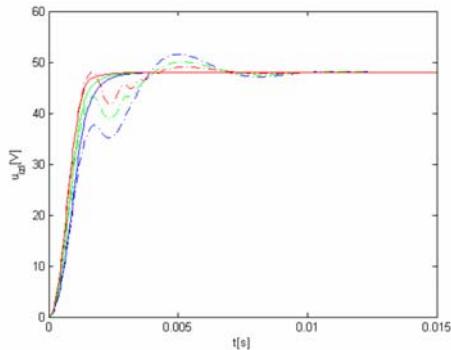
Tablica 1: Parametri PID regulatora

Adaptivno i robusno upravljanje

24



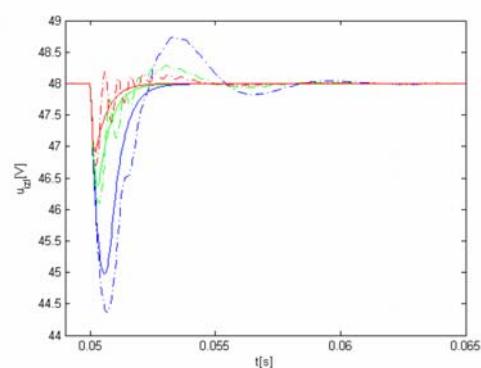
Rezultati simulacije



Odziv u_{izl} silaznog DC/DC pretvarača pri pokretanju pretvarača
Odzivi s PID regulatorom (---), regulatorom s KR (—). $U_{ul} = 60$ V,
 $U_{il} = 77$ V, $U_{ol} = 94$ V



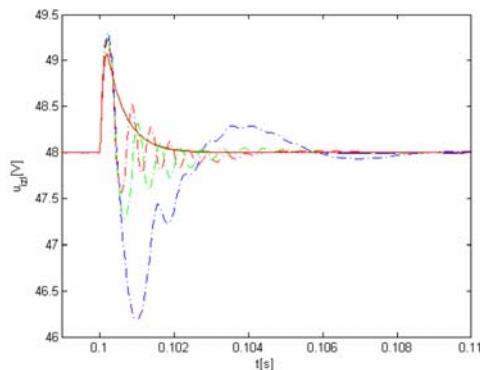
Rezultati simulacije



Odziv u_{izl} silaznog DC/DC pretvarača pri promjeni izlaznog
otpora s 46Ω na 32.2Ω . Odzivi s PID regulatorom (---), regulatorom
s KR (—). $U_{ul} = 60$ V, $U_{il} = 77$ V, $U_{ol} = 94$ V



Rezultati simulacije



Odziv u_{izl} silaznog DC/DC pretvarača pri promjeni izlaznog otpora s 32.2Ω na 46Ω . Odzivi s PID regulatorom ($- \cdot -$), regulatorom s KR ($-$). $U_{ul} = 60$ V, $U_{ul} = 77$ V, $U_{ul} = 94$ V



Karakteristike kliznih režima



- Klizni režimi spadaju u adaptivne i robusne strukture upravljanja
- Ulaskom u klizni režim dolazi do redukcije reda sustava
- Dinamika sustava u kliznom režimu određena je oblikom klizne plohe
- Sustav u kliznom režimu postaje neosjetljiv na promjene parametara
- Prijelazna pojava odvija se u dvije faze
 - faza dolaska u klizni režim
 - faza klizanja
- Nužno je imati informacije o varijablama stanja
 - (mjerjenje ili estimacija)
- Zbog konačne frekvencije prekapčanja u realnim sustavima dolazi do preslušavanja (*chatteringa*)
 - (kvazi klizni rezim)

Identifikacija parametara modela

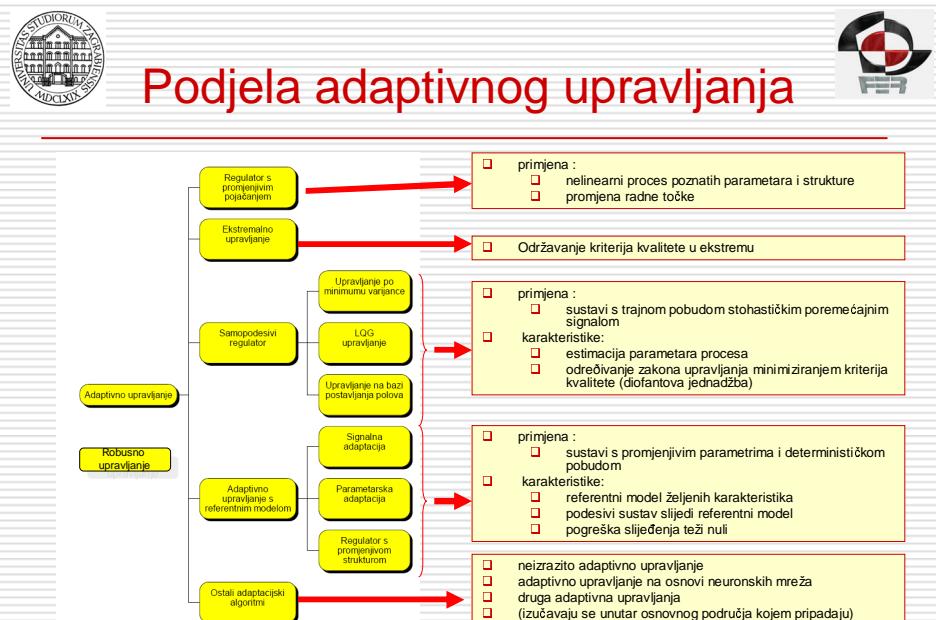
http://www.fer.hr/predmet/aru_a

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: zeljko.ban@fer.hr

1

Podjela adaptivnog upravljanja



2

1

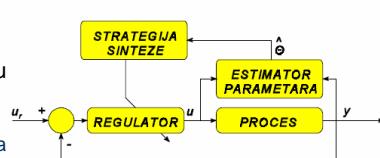


Adaptivno upravljanje na osnovi samopodesivih regulatora



□ Svojstva

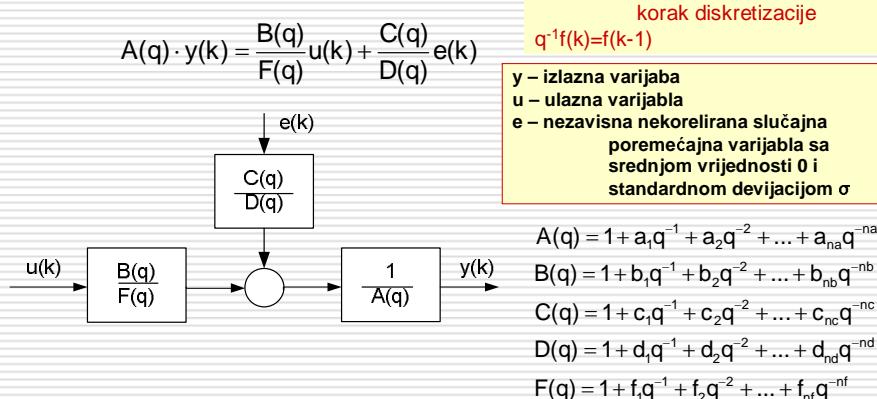
- Osigurava traženu kvalitetu regulacije bez obzira na promjene parametara sustava
- Parametri regulatora se određuju u realnom vremenu iz parametara estimiranog modela procesa
- Estimirani model procesa LINEARAN
- Koraci tijekom rada u realnom vremenu
 - Estimacija parametara modela
 - Sintesa regulatora
 - Proračun signala izlaza iz regulatora za sljedeći korak diskretizacije
- Vrsta modela
 - Linearni
 - Jedan ulaz jedan izlaz (SISO)
 - S konstantnim parametrima
 - Diskretni



Vrste modela sustava



Opći oblik diskretnog linearog SISO modela s konstantnim parametrima



Vrste modela sustava

Specijalizirani modeli su podskupovi općeg modela

Opći model $A(q) \cdot y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} e(k)$

ARMAX
Auto Regresive Moving Average eXogenous

$A(q) \cdot y(k) = q^{-d} \cdot B(q) \cdot u(k) + C(q) \cdot e(k)$

Ay – Auto regresion
Bu – extra input
Ce – Moving average of the white noise

ARX
Auto Regressive eXtra input

$A(q) \cdot y(k) = B(q) \cdot u(k) + e(k)$

Adaptivno i robusno upravljanje 5

Vrste modela sustava

Specijalizirani modeli su podskupovi općeg modela

Opći model $A(q) \cdot y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} e(k)$

OE
Output error

$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + e(k)$

BJ
Box-Jenkins

$y(k) = \frac{B(q)}{F(q)} u(k) + \frac{C(q)}{D(q)} e(k)$

Adaptivno i robusno upravljanje 6



Vrste modela sustava

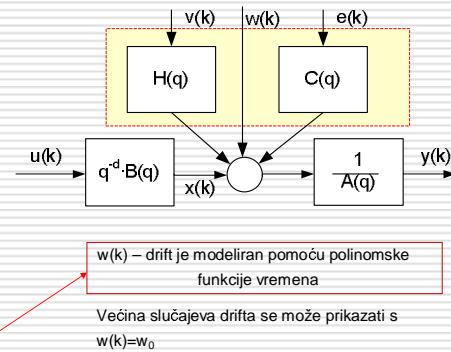
Model sustava s mjerljivom smetnjom i driftom

$$A(q) \cdot y(k) = q^{-d} \cdot B(q) \cdot u(k) + H(q) \cdot v(k) + w(k) + C(q) \cdot e(k)$$

$u(k)$ – upravljački ulaz
 $v(k)$ – mjerljivi poremećaj
 $w(k)$ – drift
 $e(k)$ – slučajni poremećaj

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na} \\ B(q) &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{nc} q^{-nc} \\ H(q) &= h_0 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots + h_{nh} q^{-nh} \end{aligned}$$

$$w(k) = w_0 + w_1 k + w_2 k^2 + \dots + w_{nw} k^{nw}$$



Odabir karakteristika modela

- Odabrani model mora
 - dobro opisivati sustav
 - imati najjednostavniju strukturu koja dobro opisuje sustav
 - biti najnižeg mogućeg reda za dobar opis sustava
- Za potrebe adaptivnog upravljanja
 - estimacija u realnom vremenu
 - fiksira se struktura modela (kod definiranja algoritma)
 - fiksira se red modela
 - fiksira se korak uzorkovanja
- Metode identifikacije
 - Metoda najmanjih kvadrata (*Least Squares – LS*)
 - Metoda pomoćnih varijabli (*Instrumental Variable – IV*)
 - Metoda najveće sličnosti (*Maximum Likelihood – ML*)



Regresijski oblik modela

pogodan za identifikaciju metodom najmanjih kvadrata



$$A(q) \cdot y(k) = q^{-d} \cdot B(q) \cdot u(k) + H(q) \cdot v(k) + w(k) + C(q) \cdot e(k)$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na}$$

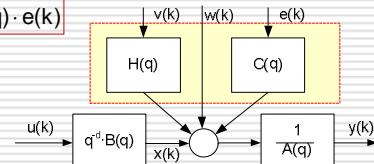
$$B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$$

$$H(q) = h_0 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots + h_{nh} q^{-nh}$$

$$w(k) = w_0 + w_1 k + w_2 k^2 + \dots + w_{nw} k^{nw}$$

$$y_k = \Theta^T \cdot \varphi_k + e_k = \varphi_k^T \Theta + e_k$$



Vektor parametara

$$\Theta^T = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{na} & b_0 & b_1 & \cdots & b_{nb} & h_0 & h_1 & \cdots & h_{nh} & w_0 & w_1 & \cdots & w_{nw} & c_1 & c_2 & \cdots & c_{nc} \end{bmatrix}$$

$$\varphi^T = \begin{bmatrix} y_{k-1} & y_{k-2} & \cdots & y_{k-na} & u_{k-d} & u_{k-d-1} & \cdots & u_{k-d-nb} & v_k & v_{k-1} & \cdots & v_{k-nh} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & k & \cdots & k^{nw} & e_{k-1} & e_{k-2} & \cdots & e_{k-nc} \end{bmatrix}$$

Vektor regresije

Adaptivno i robusno upravljanje

9

Regresijski oblik modela - primjer

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \dots + a_{na} q^{-na}$$

$$B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \dots + b_{nb} q^{-nb}$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \dots + c_{nc} q^{-nc}$$

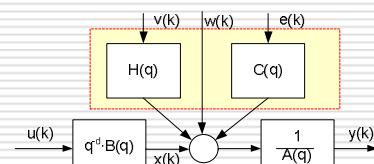
$$H(q) = h_0 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \dots + h_{nh} q^{-nh}$$

$$w(k) = w_0 + w_1 k + w_2 k^2 + \dots + w_{nw} k^{nw}$$

Primjer:

$k=6$

$na=3, nb=2, d=1, nh=1, nw=1, nc=1$



$$\begin{aligned} \Theta^T &= [-a_1 & -a_2 & -a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & h_0 & h_1 & w_0 & w_1 & c_1] \\ \varphi^T(6) &= [y_5 & y_4 & y_3 & u_5 & u_4 & u_3 & v_6 & v_5 & 1 & 6 & e_5] \end{aligned}$$

$$y_6 = \Theta^T \cdot \varphi_6 + e_6 = \varphi_6^T \Theta + e_6$$

Adaptivno i robusno upravljanje

10



Algoritam najmanjih kvadrata

Početna jednadžba

$$y_k = \Theta^T \cdot \varphi_k + e_k = \varphi_k^T \Theta + e_k$$

Predikcija izlazne varijable uz vektor parametara Θ iz prošlog koraka

$$\hat{y}(k | \Theta) = \Theta^T (k-1) \cdot \varphi(k)$$

uz $e(k)$ nekorelirani bijeli šum očekivanje iznosi

$$E\{e(k)\} = 0$$

Pogreška predikcije

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k | \Theta)$$

Uz poznatu strukturu modela i mjerene podatke iz vektora φ izlazna varijabla sustava se opisuje sa

$$y(k) = \varphi^T(k) \hat{\Theta} + \hat{\varepsilon}(k)$$

$\hat{\Theta}$ – estimirani vektor parametara modela
 $\hat{\varepsilon}(k)$ – pogreška estimacije u trenutku k

Cilj je odrediti $\hat{\Theta}$ sa svojstvom da pogreška estimacije $\hat{\varepsilon}$ bude minimalna

$$\hat{\varepsilon}(k) = e(k) + \varphi^T(k) [\Theta - \hat{\Theta}]$$

Ako se postigne $\Theta = \hat{\Theta}$ vrijedi:

$$\hat{\varepsilon}(k) \approx e(k) \quad \text{za } \Theta \approx \hat{\Theta}$$



Algoritam najmanjih kvadrata

Vektor parametara u općem obliku

$$\Theta^T = \left[\underbrace{-a_1}_{na} \underbrace{-a_2}_{na} \cdots \underbrace{-a_{nb}}_{na} \underbrace{b_0}_{nb+1} \underbrace{b_1}_{nb+1} \cdots \underbrace{b_{nh}}_{nb+1} \underbrace{h_0}_{nh+1} \underbrace{h_1}_{nh+1} \cdots \underbrace{h_{nw}}_{nh+1} \underbrace{w_0}_{nw+1} \underbrace{w_1}_{nw+1} \cdots \underbrace{w_{nc}}_{nw+1} \underbrace{c_1}_{nc} \underbrace{c_2}_{nc} \cdots \underbrace{c_{nc}}_{nc} \right]$$

ima $npar$ parametara:

$$npar = na + nb + nh + nw + nc$$

Za uspješnu estimaciju, sustav mora raditi dovoljno dugo da se formira N vektora podataka, gdje je:

N > npar

Vektori imaju oblik

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} \hat{\Theta} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}(1) \\ \hat{\varepsilon}(2) \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}(N) \end{bmatrix}$$

$$Y = \Phi \hat{\Theta} + \hat{\varepsilon}$$

gdje su:

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}; \quad \hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}(1) \\ \hat{\varepsilon}(2) \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}(N) \end{bmatrix}$$

$$\hat{\varepsilon} = Y - \Phi \hat{\Theta}$$



Princip najmanjih kvadrata

Suma kvadrata razlike mјerenog vektora Y i estimiranog izlaznog vektora mora biti minimalna.

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_i^2(k) = \frac{1}{2} \hat{E}^T \hat{E} = \frac{1}{2} \|\hat{E}\|^2$$

Otežana suma kvadrata razlike mјerenog vektora Y i estimiranog izlaznog vektora (težinski faktori – mjera preciznosti)

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \hat{\varepsilon}_i^2(k) = \frac{1}{2} \hat{E}^T Q \hat{E}$$

Kriterij najmanjih kvadrata

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2} \hat{E}^T \hat{E} = (Y - \Phi \hat{\Theta})^T (Y - \Phi \hat{\Theta})$$

$$J(\hat{\Theta}) = Y^T Y - Y^T \Phi \hat{\Theta} - \hat{\Theta}^T \Phi^T Y + \hat{\Theta}^T \Phi^T \Phi \hat{\Theta}$$

Traženje ekstrema

-derivacija kriterija po parametrima = 0
(Jacobian matrica)

$$\frac{\partial J(\hat{\Theta})}{\partial \hat{\Theta}} = \Phi^T \Phi \hat{\Theta} - Y^T \Phi$$

Minimum se postiže uz pozitivnu 2. derivaciju kriterija po parametrima (Hessian)

$$\left[\frac{\partial^2 J(\hat{\Theta})}{\partial \hat{\Theta}^2} \right] = \Phi^T \Phi \geq 0$$

Adaptivno i robusno upravljanje

13



Princip najmanjih kvadrata

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_i^2(k) = \frac{1}{2} \hat{E}^T \hat{E} = \frac{1}{2} \|\hat{E}\|^2$$

Izjednačavanjem gradijenta s nulom dobije se izraz za estimirane parametre:

$$\frac{\partial J(\hat{\Theta})}{\partial \hat{\Theta}} = \Phi^T \Phi \hat{\Theta} - Y^T \Phi = 0$$

Pogreška estimacije (rezidui – ostaci)

$$\hat{E} = R^T = [\eta(1) \quad \eta(2) \quad \dots \quad \eta(N)]$$

Iz jednadžbe

$$\hat{E} = R^T = Y - \Phi \hat{\Theta}_{LS}$$

proizlazi

$$\Phi^T Y = \Phi^T \Phi \hat{\Theta}_{LS} + \Phi^T R$$

$$\Phi^T R = 0$$

$$\hat{\Theta}_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = \Phi^{\dagger} Y$$

gdje je

Φ^{\dagger} – pseudoinverz od Φ

Pseudoinverzna matrica matrice Φ postoji ako matrica Φ ima puni rang (zadovoljeno uz stalnu pobudu sustava test signalom)

Adaptivno i robusno upravljanje

14



Princip najmanjih kvadrata



Iz definicije rezidua

Za velik broj N, uvjeti poprimaju oblik

$$R = (y - \Phi\hat{\Theta}_{LS})$$

i uvjeta

$$\Phi^T R = 0$$

$$[\varphi(1) \quad \varphi(2) \quad \cdots \quad \varphi(N)] R = 0$$

$$E\{y(k-i)\eta(k)\} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n_a$$

$$E\{u(k-i)\eta(k)\} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n_b + 1$$

proizlazi

$$\sum_{k=1}^{n_a} y(k-i)\eta(k) = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n_a$$

$$\sum_{k=1}^{n_b+1} u(k-i)\eta(k) = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, \dots, n_b + 1$$



Svojstva estimatora

na osnovi najmanjih kvadrata



RLS - Recursive Least Square

Svojstva

- $\hat{\Theta}_{LS}$ je slučajna varijabla

- može se analizirati pomoću jednadžbe
 $y(k) = \varphi^T(k)\hat{\Theta} + \hat{\epsilon}(k)$

- karakteriziraju je

- bias
 - sistemска pogreška estimiranih parametara
 - kovarijanca
 - raspršenje estimiranih parametara uzrokovanih slučajnom pogreškom



Svojstva RLS estimatora

Bias

- Uzimajući jednadžbu
 $y(k) = \varphi^T(k)\hat{\Theta} + \hat{\epsilon}(k)$

■ za $k=1,2, \dots, N$

- Dobije se
 $Y = \Phi\hat{\Theta} + \hat{E}$

- Uvrštenjem u jednadžbu estimiranih parametara

$$\hat{\Theta}_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

- Dobije se

$$\begin{aligned}\hat{\Theta}_{LS} &= (\Phi^T\Phi)^{-1}[\Phi^T\Phi\Theta + \Phi^T\hat{E}] = \\ &= \Theta(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\hat{E}\end{aligned}$$

- Srednja devijacija estimiranih parametara od stvarne vrijednosti određena je sa

$$\hat{\Theta}_{LS} - \Theta = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\hat{E}$$

- Uz determinističke podatke u Φ i srednju vrijednost $\epsilon(k)$ jednaku 0, očekivanje pogreške parametara ima oblik

$$E\{\hat{\Theta}_{LS} - \Theta\} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T E_E \{ \hat{E} \} = 0$$

- Uz slučajne ali nezavisne elemente matrice Φ dobije se očekivanje

$$E\{\hat{\Theta}_{LS} - \Theta\} = E_\Phi \left\{ (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T \right\} E_E \{ \hat{E} \} = 0$$

- indeks Φ i E označavaju očekivanje s obzirom na Φ i E objekte

Zaključak

- Potrebna asimptotska nekoreliranost šuma e i podataka Φ za estimaciju bez pogreške

Adaptivno i robusno upravljanje

17



RLS estimator

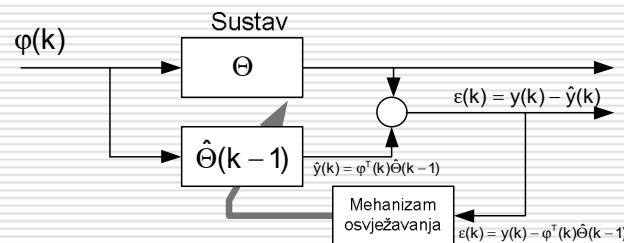
Ne osvježavaju se svi podaci u svakom koraku k

- ne računa se cijeli

$$\hat{\Theta}_{LS}(k)$$

- dodaje se samo jedan novi podatak i računa se
 $\hat{\Theta}_{LS}(k+1)$

- Rekurzivni proces prikazan slikom



Adaptivno i robusno upravljanje

18



RLS estimator

Za $\hat{\Theta}_{LS}$ uzimajući podatke od 1 do k estimirani parametri imaju oblik

$$\hat{\Theta}_{LS} = (\Phi^T(k)\Phi(k))^{-1}\Phi^T(k)Y(k) \quad \hat{\Theta}_{LS}(k+1) = (\Phi^T(k+1)\Phi(k+1))^{-1}\Phi^T(k+1)Y(k+1)$$

$\Phi(k)$ je vremenska funkcija i zasnovan je na podacima u vremenskim koracima od 1 do t

$$Y(k) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}; \quad \Phi(k) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(k) \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T(k+1)\Phi(k+1) = \begin{bmatrix} \Phi^T(k) & \varphi(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(k) \\ \varphi^T(k+1) \end{bmatrix}$$

$$= \Phi^T(k)\Phi(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

U trenutku k+1 određuje se novo mjerjenje iz procesa tako da se dobije

$$Y(k+1) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix}; \quad \Phi(k+1) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(k) \\ \varphi^T(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(k) \\ \varphi^T(k+1) \end{bmatrix}$$

Adaptivno i robusno upravljanje

19



RLS estimator

Estimirani parametri u trenutku k+1 imaju oblik

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = (\Phi^T(k+1)\Phi(k+1))^{-1}\Phi^T(k+1)Y(k+1)$$

Prema tome je

$$\Phi^T(k+1)\Phi(k+1) = \begin{bmatrix} \Phi^T(k) & \varphi(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(k) \\ \varphi^T(k+1) \end{bmatrix}$$

$$= \Phi^T(k)\Phi(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

Na taj način se lako odrede nove vrijednosti za $\Phi^T(k+1)\Phi(k+1)$ no problem je odrediti njihovu inverznu matricu direktno (rekurzivnom metodom) bez potrebe za treženjem kompletne inverzne matrice u svakom koraku.

Osim toga potrebno je izračunati $\Phi^T(k+1)Y(k+1)$

Adaptivno i robusno upravljanje

20



RLS estimator

Uvrštenjem vrijednosti za
 $\Phi^T(k+1) - i - Y(k+1)$

Dobije se

$$\begin{aligned}\Phi^T(k+1)Y(k+1) &= [\Phi^T(k) \quad \varphi(k+1)] \begin{bmatrix} Y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} \\ &= \Phi^T(k)Y(k) + \varphi(k+1)y(k+1)\end{aligned}$$

Uvođenjem oznaka

$$P(k) = [\Phi^T(k) \Phi(k)]^{-1}$$

$$B(k) = \Phi^T(k)Y(k)$$

Jednadžbe estimiranih parametara u k i k+1 koraku imaju oblik

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = P(k+1)B(k+1)$$

$$\hat{\Theta}_{LS}(k) = P(k)B(k)$$

Uz

$$\Phi^T(k+1)\Phi(k+1) = \Phi^T(k)\Phi(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

Slijedi

$$P^{-1}(k+1) = P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

Uz

$$\Phi^T(k+1)Y(k+1) = \Phi^T(k)Y(k) + \varphi(k+1)y(k+1)$$

Slijedi

$$B(k+1) = B(k) + \varphi(k+1)y(k+1)$$

Rekurzivno računanje novih vrijednosti

RLS estimator

Lema inverzije matrica

Neka su:

$$A = P^{-1}(k) \quad B = \varphi(k+1) \quad C = 1 \quad D = \varphi^T(k+1)$$

Matrice kompatibilnih dimenzija tako da postoji produkt i suma oblika

$$A + BCD = P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

Tada vrijedi

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1}$$

Uzimajući vrijednosti matrica prema polinomima estimacije dobije se

$$\begin{aligned}& [P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)]^{-1} \\ &= P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}\end{aligned}$$

Temeljem ove leme riješen je problem inverzije matrice u svakom koraku (dijeljenje sa skalarom u svakom koraku)



RLS estimator

Prema lemi inverzije

$$\begin{aligned} & \left[P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \right]^{-1} \\ &= P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \end{aligned}$$

P(k) je pozitivno definitna matrica jednaka kovarijancnoj matrici od $\Theta(k)$
s očekivanjem $\hat{\Theta}_{LS}(k)$

dobije se

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Zamjenom } y(k+1) \quad \text{iz jednadžbe } \varepsilon(k+1) &= y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\Theta}_{LS}(k) \\ &= y(k+1) - \hat{y}(k+1) \end{aligned}$$

U jednadžbu

$$B(k+1) = B(k) + \varphi(k+1)y(k+1)$$

dobije se

$$B(k+1) = B(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)\hat{\Theta}_{LS}(k) + \varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$



RLS estimator

Iz jednadžbe

$$P^{-1}(k+1)\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = \underbrace{\left[P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1) \right]}_{P^{-1}(k+1)} \hat{\Theta}_{LS}(k) + \varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$

množenjem sa $P(k+1)$ dobije se

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = \hat{\Theta}_{LS}(k) + \underbrace{P(k+1)\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)}_{L(k+1)}$$



RLS algoritam



$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = \hat{\Theta}_{LS}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$

$$\varepsilon(k+1) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\Theta}_{LS}(k)$$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

Za ARMAX model s d=1 i C(q)=1 regresijski vektor ima oblik

$$\varphi^T(k) = [-y_{k-1} \ \cdots \ -y_{k-na} \ u_{k-1} \ \cdots \ u_{k-nb-1}]$$

Vektor estimiranih parametara

$$\hat{\Theta}_{LS} = [\hat{a}_1 \ \hat{a}_2 \ \cdots \ \hat{a}_{na} \ \hat{b}_0 \ \hat{b}_1 \ \cdots \ \hat{b}_{nb}]$$



Pseudokod RLS algoritma



Inicijaliziraj algoritam sa $P(0)$, $\hat{\Theta}(0)$

Formiraj $\varphi(k+1)$ iz novih mjerenih podataka

Formiraj $\varepsilon(k+1)$ iz novih mjerenih podataka

$$\varepsilon(k+1) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\Theta}(k)$$

Izračunaj $P(k+1)$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

Izračunaj $\hat{\Theta}(k+1)$

$$\hat{\Theta}(k+1) = \hat{\Theta}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$

Čekaj sljedeći korak diskretizacije



Svojstva RLS algoritma



- RLS algoritam estimira samo koeficiente polinoma A i B
- RLS ne daje dobre rezultate uz obojeni šum
- Ukoliko se kao pogreška uzme $C(q)\hat{e}(k)$
 - dobiva se pogreška (bias) kod estimacije polinoma A i B



Inicijalizacija estimatora



- Inicijalizacija početnih parametara estimatora
 - Vektor regresije $\varphi(0)$
 - Početni vektor parametara $\hat{\Theta}_{LS}(0)$
 - Početna matrica kovarijance $P(0)$



Inicijalizacija vektora regresije $\varphi(0)$

- Sakupljanje podataka prije pokretanja algoritma rekurzivne estimacije
 - broj potrebnih koraka za skupljanje podataka
 - ovisi o modelu

$$A(q) \cdot y(k) = q^{-d} \cdot B(q) \cdot u(k) + H(q) \cdot v(k) + w(k) + C(q) \cdot e(k)$$

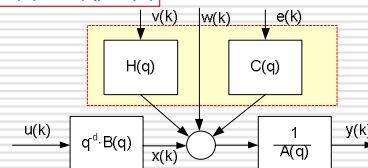
$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \dots + a_{na}q^{-na}$$

$$B(q) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \dots + b_{nb}q^{-nb}$$

$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \dots + c_{nc}q^{-nc}$$

$$H(q) = h_0 + h_1q^{-1} + h_2q^{-2} + \dots + h_{nh}q^{-nh}$$

$$w(k) = w_0 + w_1k + w_2k^2 + \dots + w_{nw}k^{nw}$$



$$\kappa = \max\{na, nb + 1, nh + 1, nw + 1, nc\}$$



Inicijalizacija vektora regresije $\varphi(0)$ Primjer

Primjer

Proces opisan sa:

$$y(k) = \varphi^T(k) \hat{\Theta}$$

gdje su:

$$\hat{\Theta}^T = [\hat{a}_1 \quad \hat{b}_0 \quad \hat{b}_1 \quad \hat{b}_2]$$

$$\varphi^T(k) = [-y(k-1) \quad u(k-1) \quad u(k-2) \quad u(k-3)]$$

- vektor regresije treba
 - 3 koraka da sakupi dovoljno prošlih vrijednosti $u(k)$
- u četvrtom koraku
 - startanje rekurzivnog estimatora



Inicijalizacija vektora parametara



$$\hat{\Theta}_{LS}(0)$$

- Početna vrijednost vektora parametara
 - nije ključna za konvergenciju postupka estimacije
 - prednost
 - djelomično poznavanje parametara procesa
 - nepoznati parametri
 - Prepostavka
 - Sustav je jedan integrator s jediničnim pojačanjem $G(z) = \frac{h}{z - 1}$

$$\begin{bmatrix} \text{Parametri} \\ a_i \quad b_i \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_i = 0 \quad \forall i \neq 1 \\ b_0 = h \\ b_i = 0 \quad \forall i \neq 0 \end{cases}$$



Inicijalizacija matrice kovarijance



$$P(0)$$

- Početna vrijednost $P(0)$ ovisi o
 - nesigurnosti nepoznatih parametara
 - parametri polinoma A,B,C mogu imati različite početne nesigurnosti
- Standardni odabir
 - $P(0)=r I_{npar}$
 - r – skalar
 - I_{npar} – jedinična matrica dimenzije npar
 - npar – broj parametara za estimaciju
- Odabir r:

$$r = \begin{cases} \text{velik} & 100 < r < 1000 \\ \text{mali} & 1 < r < 10 \end{cases}$$
- Svojstva odabira
 - **velik**
 - brži odziv algoritma estimacije
 - veće fluktuacije parametara (i upravljačkog signala)
 - **mali**
 - spor odziv algoritma
 - sporije promjene parametara
 - glađi upravljački signal



Inicijalizacija matrice kovarijance P(0) Primjer



Primjer

Proces opisan sa:

$$y(k) = \varphi^T(k)\hat{\theta}$$

gdje su:

$$\hat{\Theta}^T = [\hat{a}_1 \quad \hat{a}_2 \quad \hat{b}_0 \quad \hat{b}_1]$$

Pretpostavka boljeg poznавanja koeficijenata a_1 i a_2 i slabijeg poznавanja koeficijenata b_0 i b_1

$$P(0) = \begin{bmatrix} r_{a1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{a2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{b0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{b1} \end{bmatrix} \quad r_{a1} = r_{a2} \approx 100 \\ r_{b0} = r_{b1} \approx 1$$

Matrica kovarijance u trenutku k

$$P(k) = \left[P^{-1}(0) + \sum_{i=1}^k \varphi(i)\varphi^T(i) \right]^{-1}$$

Velik $P(0)$

- manji utjecaj od regresijskog vektora
- (zbog recipročne vrijednosti $P(0)$)

Mali $P(0)$

- velik utjecaj na $P(k)$

Početno ponašanje rekurzivnog estimatora ovisi o

- Odabiru $\varphi(0), \hat{\Theta}_{LS}(0)$ i $P(0)$
- tipu sustava
- obliku pobudnog signala

Adaptivno i robusno upravljanje

33



Primjer identifikacije



Proces je opisan jednadžbom

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1)$$

s parametrima

$$a = -0.8 ; b(k) = 0.5 \quad \forall k > 0 ; c = 0$$

$e(k)$ je bijeli šum sa $E\{e(k)\}=0$ i $E\{e^2(k)\}=0.25$

Inicijalizacija parametara estimatora

$$P(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} ; \hat{\Theta}(0) = \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(k-1) = [-y(k-1) \quad u(k-1)] = [0 \quad 0] \\ \text{za } k=0$$

Pobudni signal

pravokutni signal perioda 100s
jedinične amplitude

Adaptivno i robusno upravljanje

34



Primjer identifikacije

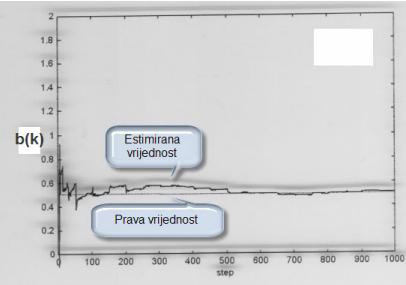
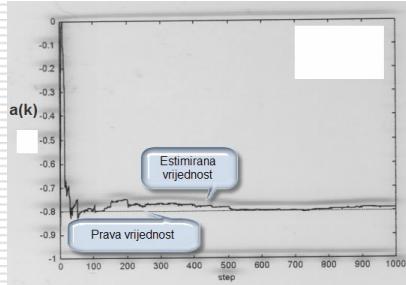
$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1)$$

$$a = -0.8 ; \quad b(k) = 0.5 \quad \forall k > 0 ; \quad c = 0$$

$e(k)$ je bijeli šum sa $E\{e(k)\}=0$ i $E\{e^2(k)\}=0.25$

$$P(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} ; \quad \hat{\Theta}(0) = \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(k-1) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Primjer identifikacije proces s promjenjivim parametrima

Proces je opisan jednadžbom

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1)$$

s parametrima

$$a = -0.8 ;$$

$$\forall k > 0 ; \quad c = 0$$

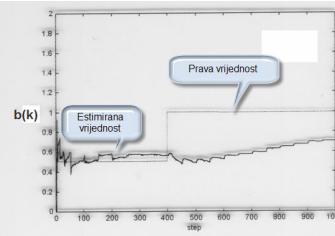
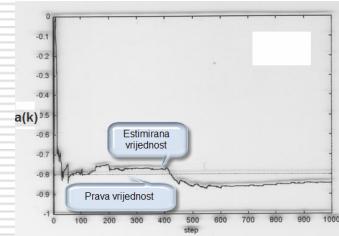
$$b(k) = \begin{cases} 0.5 \text{ for } 0 < k < 400 \\ 1 \text{ for } 400 \leq k < \infty \end{cases}$$

$e(k)$ je bijeli šum sa $E\{e(k)\}=0$ i $E\{e^2(k)\}=0.25$

Inicijalizacija parametara estimatora

$$P(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} ; \quad \hat{\Theta}(0) = \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(k-1) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ za } k=0$$





Primjer identifikacije proces s promjenjivim parametrima

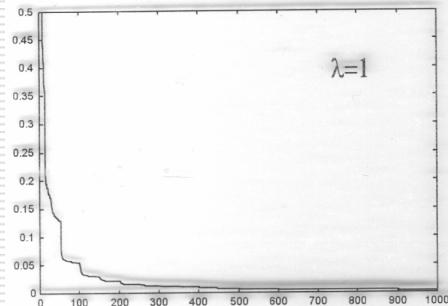


Razlog loše estimacije

- tijekom estimacije trag matrice kovarijance teži nuli

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}[P(k)] \rightarrow 0$$

- nakon toga algoritam ne reagira na promjenu parametara sustava



Nova vrijednost parametara je zasnovana na staroj

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = \hat{\Theta}_{LS}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$

Novo mjerene nije uzeto u obzir
Algoritam se "ugasio"



Algoritam za sustave s promjenjivim parametrima



Poboljšanje algoritma upotrebom

- Eksponencijalnog otežavanja podataka
- Automatska promjena eksponencijalnog faktora zaboravljanja
- Resetiranje matrice kovarijance
- Modificiranje matrice kovarijance



Eksponencijalno otežavanje podataka



- Kriterij za izvod algoritma prelazi iz

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \hat{\varepsilon}_i^2(k) = \frac{1}{2} \hat{E}^T Q \hat{E}$$

- u algoritam

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \lambda^{k-1} q_i \hat{\varepsilon}_i^2(k)$$

- Odabir λ određen

- brzom adaptacijom
- dobom estimacijom
 - za $\lambda \approx 1$
 - greška predikcije starija od T_m iznosi
 - $e^{-1} \approx 36\%$ prema novijim podacima
 - $T_m = 1/(1-\lambda)$

Algoritam matrice kovarijance

$$P(k+1) = \left[I - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}{\lambda(k+1) + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \right] P(k)$$

$\lambda(k)$ – eksponencijalni faktor zaboravljanja
 $0 < \lambda < 1$

Prema iskuštvu najbolje je uzeti
 $0.95 < \lambda < 0.99$

Preporučeni izbor: **$\lambda=0.98$**

Adaptivno i robusno upravljanje

39

Primjer identifikacije proces s promjenjivim parametrima

Za proces opisan jednadžbom

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1)$$

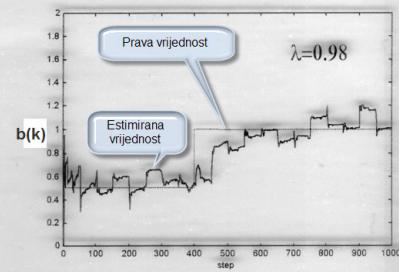
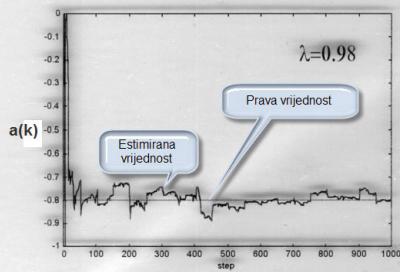
$$a = -0.8 ; \quad \forall k > 0 ; c = 0$$

$e(k)$ je bijeli šum sa $E\{e(k)\}=0$ i $E\{e^2(k)\}=0.25$

Inicijalizacija parametara estimatora

$$P(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} ; \hat{\Theta}(0) = \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(k-1) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ za } k=0$$





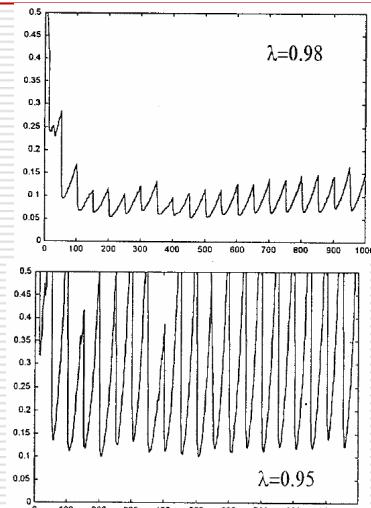
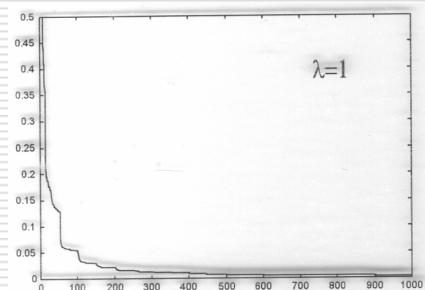
Primjer identifikacije proces s promjenjivim parametrima



Trag kovarijancne matrice

Nova vrijednost parametara je zasnovana na staroj

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = \hat{\Theta}_{LS}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$



41



Vremenski promjenjivi eksponencijalni faktor zaboravljanja



Vremenska promjena parametra λ

$$\lambda(k) = \lambda_0\lambda(k-1) + (1-\lambda_0)$$

uz

$$\lambda_0 = 0.99$$

$$\lambda(0) = 0.95$$

u algoritam

$$P(k+1) = \left[I - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}{\lambda(k+1) + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \right] \frac{P(k)}{\lambda(k+1)}$$

Svojstva

- λ se mijenja od 0.95 do 0.99
- veća brzina algoritma estimacije u početku

Optimalni izbor faktora zaboravljanja uzima u obzir

- brzo praćenje promjene parametara
- veća osjetljivost na šum
- što manje oscilacija estimiranih parametara
- veća inercija estimatora

Preporuka odabira

- brze promjene parametara procesa
 - brzo zaboravljanje mjerjenih signala
- spore promjene parametara ili ako nema perzistentne pobude
 - sporo zaboravljanje

Adaptivno i robusno upravljanje

42



Resetiranje matrice kovarijance



- Resetiranje matrice kovarijance $P(k)$
 - osiguranje da trag matrice ne postane premali
 - svakih k_i koraka matrica se resetira na vrijednost koja sprečava gašenje algoritma
- Prim.: nakon k_i koraka:
$$P(k_i) = \beta_i I_{n \times n} \quad r = \begin{cases} \text{velik} & 100 < r < 1000 \\ \text{mali} & 1 < r < 10 \end{cases}$$
 - β_i – skalar $\beta_i < r$
- Nepogodnost
 - izgubljena eksponencijalna konvergencija
 - aktuator stalno aktivran

Adaptivno i robusno upravljanje

43



Svojstva RLS algoritma



- Matrica $P(k)$ mora biti pozitivno definitna
 - računa se oduzimanjem dviju pozitivno definitnih matrica
$$P(k+1) = \left[I - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}{\lambda(k+1) + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \right] P(k)$$
 - Numerička greška računanja
 - $P(k)$ može prestati biti pozitivno definitna
 - divergencija algoritma estimacije
 - U adaptivnom upravljanju
 - mora se definirati rezervni plan spašavanja sustava u slučaju divergencije algoritma estimacije.

Adaptivno i robusno upravljanje

44



Svojstva RLS algoritma



- RLS algoritam
 - brza konvergencija
 - pouzdan
 - jednostavan za implementaciju
- Opasnost
 - divergencija algoritma zbog negativno definitne $P(k)$ zbog akumulacije numeričke pogreške računanja



Uzrok divergencije



- Konstantan faktor zaboravljanja $\lambda < 1$
- Nestabilan numerički algoritam za računanje matrice kovarijance $P(k)$
- Upotreba neperzistentnog pobudnog signala
- Nemjerljivi poremećaji u sustavu
 - opasnost kad referentni signal nije perzistentno pobuđen
- Nemodelirana dinamika procesa

Adaptivno upravljanje

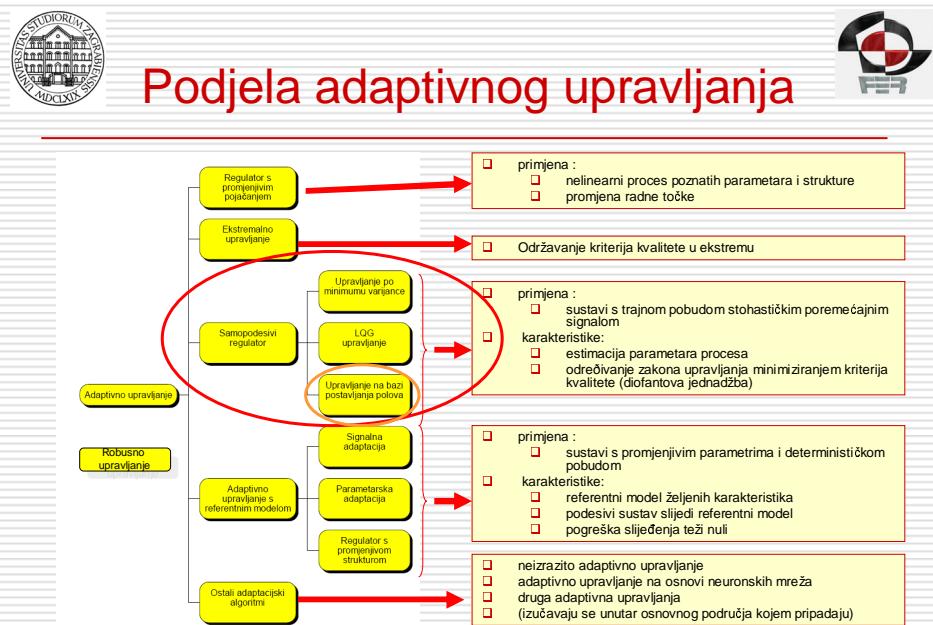
Samopodesivi regulator na bazi postavljanja polova

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: zeljko.ban@fer.hr

1

Podjela adaptivnog upravljanja



Adaptivno i robusno upravljanje

2

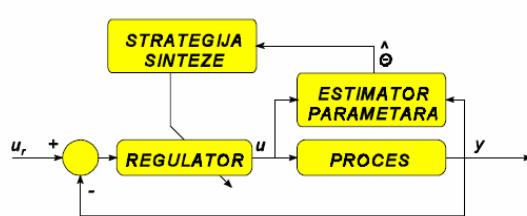
1



Adaptivno upravljanje na osnovi samopodesivih regulatora



- Tijekom rada samopodesivog regulatora provodi se:
 - Estimacija parametara modela
 - Sinteza regulatora
 - Proračun signala izlaza iz regulatora za slijedeći korak diskretizacije
- Vrsta modela
 - Linearni
 - Jeden ulaz jedan izlaz (SISO)
 - S konstantnim parametrima
 - Diskretni



Adaptivno i robusno upravljanje

3



Samopodesivi regulator na osnovi postavljanja polova

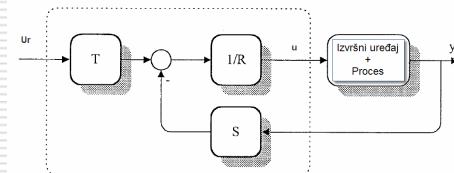


- Ideja
 - Parametri prijenosne funkcije procesa određeni estimacijom

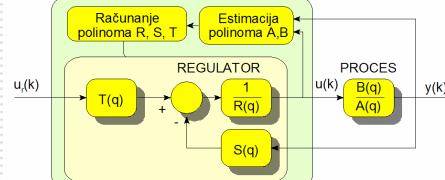
$$G_p(q) = \frac{B(q)}{A(q)}$$
 - Željeno ponašanje sustava određeno prijenosnom funkcijom modela

$$G_m(q) = \frac{B_m(q)}{A_m(q)}$$
 - Prijenosna funkcija zatvorenog sustava jednaka željenoj prijenosnoj funkciji

Struktura regulatora za dobivanje željenog ponašanja sustava



Adaptivno upravljanje



Adaptivno i robusno upravljanje

4



Mogućnost realizacije

- Da bi prijenosnu funkciju željenog ponašanja bilo moguće realizirati, mora biti zadovoljeno:
 - Regulator mora biti kauzalan
 - mogućnost realizacije regulatora
 - Zatvoren sustav mora biti kauzalan
 - Sustav s malom osjetljivošću na šum
 - Zatvoren sustav mora biti potpuno stabilan
 - Onemogućenje postojanja i kraćenja nestabilnih polova i nula
 - Nema direktnog prijenosa signala s ulaza na izlaz
 - Želi se prijenos cijele energije kroz proces

Adaptivno i robusno upravljanje

5



Mogućnost implementacije

Prijenosna funkcija regulatora

$$M(q) = \frac{G_m(q)}{G_p(q)} = \frac{N(q)}{D(q)}$$

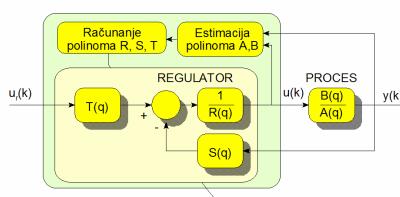
G_m i M moraju biti kauzalni

$$G_m(q) = M(q)G_p(q)$$

$$\deg(A_m) - \deg(B_m) = \deg(A) - \deg(B) + \deg(D) - \deg(N)$$

M je kauzalan ako je $\deg(D) \geq \deg(N)$

$$\deg(A_m) - \deg(B_m) \geq \deg(A) - \deg(B)$$



- Kašnjenje u procesu manje od kašnjenja zatvorenog sustava
- nestabilne nule i polovi procesa moreaju biti sadržane i u modelu željenog ponašanja
- Polinom Am(q) mora biti Hurwitz (korjeni u jediničnom krugu)

Adaptivno i robusno upravljanje

6



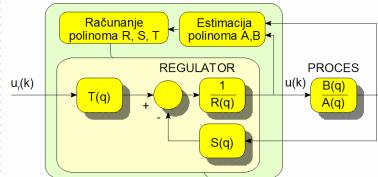
Izvod algoritma

- Prijenosna funkcija zatvorenog kruga jednaka željenoj prijenosnoj funkciji $G_m(q)$

$$G_m(q) = \frac{B(q)T(q)}{A(q)R(q) + B(q)s(q)} = \frac{B_m(q)}{A_m(q)},$$

- $R(q), S(q), T(q)$ – polinomi samopodesivog regulatora

Izjednačenje polova
 $A(q)R(q) + B(q)S(q) = A_m(q).$



Izjednačenje nula

$$B(q)T(q) = B_m(q).$$

Adaptivno i robusno upravljanje

7



Izvod algoritma

Rješenjem Diophantove jednadžbe

$$A(q)R(q) + B(q)S(q) = A_m(q).$$

Dobiju se polinomi regulatora $R(q)$ i $S(q)$ temeljem polinoma željene funkcije $A_m(q)$ i estimiranih polinoma procesa $A(q)$ i $B(q)$

Izjednačenje nula

$$B(q)T(q) = B_m(q).$$

Adaptivni algoritam upravljanja

Određivanje $T(q)$

$$u(k) = \frac{1}{R(q)} [T(q)u_r(k) - S(q)y(k)].$$

Adaptivno i robusno upravljanje

8



Izvod algoritma

Nule sustava

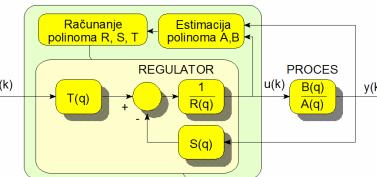


Izjednačenje nula

$$B(q)T(q) = B_m(q) \rightarrow \text{Određivanje } T(q)$$

$$A(q)R(q) + B(q)S(q) = A_m(q).$$

- Nule sustava (nule polinoma $B(q)$) sadržane su među nulama zatvorenog sustava
 - Neželjene nule sustava moguće je kратiti polovima ako su u stabilnom području
 - Željene nule se postavljaju polinomom $T(q)$
- Faktorizacija polinoma B
 - $B=B^+B^-$
 - B^- -dio polinoma B s nestabilnim korjenima
 - B^+ -dio polinoma B sa stabilnim korjenima (može se kompenzirati polovima)
- Polinom B_m se mora moći faktorizirati
 - $B_m(q)=B^+(q)B'_m(q)$
 - nestabilne nule se ne mogu mijenjati i moraju biti sadržane u željenom ponašanju sustava
 - Stabilne nule sustava se mogu kратiti
- Pošto je polinom B^+ faktor od B , mora biti i faktor od R da se mogu kратiti neželjene stabilne nule polinomom $AR+BS$



Prijenosna funkcija zatvorenog sustava

$$\frac{B^-B^+T}{B^+(AR' + B^-S)} = \frac{B^-B'_m}{A_m}$$

Odnosno

$$\frac{T}{AR' + B^-S} = \frac{B'_m}{A_m}$$

$$R(q) = B^+(q)R'(q)$$

Adaptivno i robusno upravljanje

9

Izvod algoritma

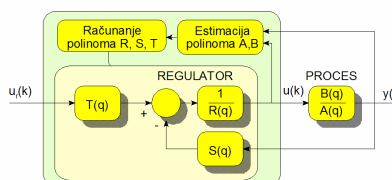
$$\frac{T}{AR' + B^-S} = \frac{B'_m}{A_m}$$

- Faktorizacijom smanjen red zatvorenog sustava
- Za jedinstveno rješenje Diophantove jednadžbe mora biti
 $\deg(AR + BS) > \deg(AR' + B^-S) \geq \deg(A_m)$
- Ako je $\deg(AR' + B^-S) > \deg(A_m)$ tad nedostaje observer polinom A_0

$$\frac{T}{AR' + B^-S} = \frac{B'_m A_0}{A_m A_0}$$

- Konačna Diophantova jednadžba

$$AR' + B^-S = A_m A_0$$



Nule zatvorenog kruga

$$T = B'_m A_0$$

Ako želimo sistem robustan na niskofrekventne poremećaje mora se uključiti integrator u polinom regulatora R

$$R(q) = (q-1)^v R_1(q)$$

Adaptivno i robusno upravljanje

10

Izvod algoritma

Uz polinom R oblika
 $R(q) = (q-1)^v R_1(q)$

Diophantova jednadžba
 $AR' + B^- S = A_m A_0$

Poprima oblik
 $A(q)(q-1)^v R_1(q) + B^-(q)S(q) = A_m(q)A_0(q)$

Uvjet kauzalnosti $\deg R \geq \deg T$

$\deg R \geq \deg S$ $\deg A_0 \geq 2\deg A - \deg A_m - \deg B^+ + v - 1$

zadovoljen uz
 $\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B$

Odnosno

Adaptivno i robusno upravljanje 11

Algoritam metode postavljanja polova

- Algoritam
- Početni podaci
 - prijenosna funkcija procesa $B(q)/A(q)$
 - poznat polinom obzervera $A_0(q)$
 - određeno željeno ponašanje sustava $B_m(q)/A_m(q)$
 - Stabilno područje Ω definirano (od korisnika)
- Uvjeti koji se moraju zadovoljiti

$$B_m(q) = B^-(q)B'_m(q)$$

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B$$

$$\deg A_0 \geq 2\deg A - \deg A_m - \deg B^+ + v - 1$$
- Koraci algoritma
 - 1. Faktoriziraj B tako da B^+ ima korjene u stabilnom području Ω i B^- izvan stabilnog područja

$$B = B^- B^+$$
 - 2. Faktoriziraj B_m

$$B_m = B^- B'_m$$

3. Riješi Diophantovu jednadžbu po R'_1 i S

$$A(q-1)^v R'_1 + B^- S = A_m A_0$$

Odaberi rješenje za koje vrijedi
 $\deg S < \deg A + v$

$\deg R'_1 = \deg A_0 + \deg A_m - \deg A - v$

4. Zakon upravljanja

$$R(q)u(k) = T(q)u_r(k) - S(q)y(k)$$

Uz
 $R = B^+ R'$ $R' = (q-1)^v R'_1$
 $\deg R \geq \deg S$

$$T = B'_m A_0$$

$\deg T \leq \deg R$

Polinomi R' i R imaju korjene u stabilnom području

Adaptivno i robusno upravljanje 12



Stohastički sustav

Algoritam metode postavljanja polova

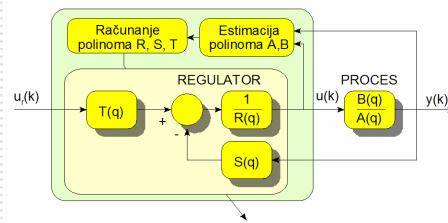


- Stohastički sustav opisan ARMAX modelom
 - Optimalni observerski polinom A_0 jednak je polinomu C
 - Polinom C mora imati kojene u stabilnom području
- Diophantova jednadžba za adaptivni stohastički sustav

$$\hat{A}(q-1)^v R'_1 + \hat{B}^- S = A_m \hat{C}$$

- Polinomske jednadžbe za nule i polove postaju

$$\begin{aligned}\hat{B} &= \hat{B}^+ \hat{B}^+ \\ B_m &= \hat{B}^- B_m \\ \hat{A}(q-1)^v R'_1 + \hat{B}^- S &= A_m \hat{C} \\ R &= \hat{B}^+ R' \\ R' &= (q-1)^v R'_1\end{aligned}$$



Adaptivno i robusno upravljanje

13



Numerički problemi

metode zasnovane na postavljanju polova



- Numeričko rješavanje jednadžbi
 - Faktorizacija polinoma B
 - Rješenje Diophantove jednadžbe
 - Egzaktno u svakom koraku
 - Jezekov algoritam
 - Euklidski algoritam
 - Upotreba linearnih jednadžbi
 - Iterativne metode koje konvergiraju egzaktnom rješenju
 - Iterativna metoda
 - korekcija rezidua
 - upotreba RLS metode (*metode najmanjih kvadrata*)

Adaptivno i robusno upravljanje

14

Adaptivno upravljanje

Samopodesivi regulator s upravljanjem po minimumu varijance

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: zeljko.ban@fer.hr

1

Podjela adaptivnog upravljanja



Adaptivno i robusno upravljanje

2



Adaptivno upravljanje na osnovi minimuma varijance



- Zasniva se na minimizaciji varijance izlaznog signala

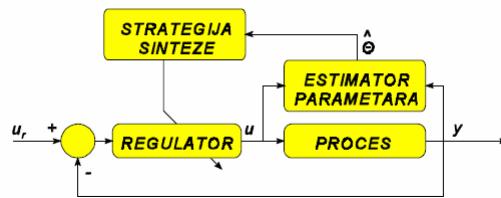
- Primjena

- Stohastički sustavi
 - Poremećaji tipa bijelog šuma

- Karakteristike

- veliki signali upravljanja
 - ovisnost o frekvenciji diskretizacije
 - velika frekvencija – velika varijanca $u(k)$

$$J_{MV} = E\{y^2(k)\}$$



Adaptivno i robusno upravljanje

3



Adaptivno upravljanje na osnovi minimuma varijance



- Ideja

- Poništavanje d koračne predikcije izlaznog signala procesa u trenutku k
 - d – kašnjenje procesa

- Regulator će dobro raditi uz

- dobru predikciju
 - spori poremećaji na proces
 - mali horizont predikcije

- Algoritam regulatora se zasniva na

- optimalnom d -koračnom prediktoru
 - u koraku k daje predikciju izlaza procesa za trenutak $k+d$
 - minimalnoj pogrešci predikcije
 - minimizacija varijance pogreške predikcije
 - (jer se radi o stohastičkom sustavu)

Adaptivno i robusno upravljanje

4



Adaptivno upravljanje na osnovi minimuma varijance



Pogreška predikcije

$$\tilde{y}(k+d|k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d|k)$$

gdje je:

$y(k+d)$ izlazni signal procesa u trenutku $k+d$

$\hat{y}(k+d|k)$ estimirani izlazni signal procesa u trenutku k
za trenutak $k+d$ na osnovi poznatih signala do k -tog trenutka

$\tilde{y}(k+d|k)$ greška predikcije za trenutak $k+d$ na osnovi poznatih signala do k -tog trenutka

Traži se

$$E\{\tilde{y}^2(k+d|k)\} = \min$$

gdje je E matematičko očekivanje



Adaptivno upravljanje na osnovi minimuma varijance



Matematički model procesa

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$$

gdje je:

$e(k)$ bijeli šum sa $E\{e(k)\} = 0$ i $E\{e^2(k)\} = \sigma_e^2$

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k+d)$$

Moving Average dio odziva

Uz ulazni signal $u(k)=0$ (ARMA model)
izlazni signal ima oblik:

$$y_{MA}(k+d) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k+d) = \Gamma(q^{-1})e(k+d)$$

gdje je

$$\Gamma(q^{-1}) = 1 + \gamma_1 q^{-1} + \gamma_2 q^{-2} + \dots$$

Polinom beskonačnog reda nastao

dijeljenjem polinoma C i A
(konvergira uz C je Hurwitzov polinom)



Adaptivno upravljanje na osnovi minimuma varijance



$e(k)$ se određuje iz prethodne realizacije izlaznog signala

$$e(k) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) = [\Gamma(q^{-1})]^{-1} y(k)$$

$e(k)$ – bijeli šum
ne može se predvidjeti signal na osnovi prethodnog

Dijeljenje jednadžbe na dio do trenutka k (poznati dio) i nepredvidivi dio u trenutku k

$$y_{MA}(k+d) = \underbrace{e(k+d) + \gamma_1 e(k+d-1) + \dots + \gamma_{d-1} e(k+1)}_{\text{Nepredvidivo u trenutku } k} + \underbrace{\gamma_d e(k) + \gamma_{d+1} e(k-1) + \gamma_{d+2} e(k-2) + \dots}_{\text{Poznato u trenutku } k}$$

U trenutku k predikcija se može raditi temeljem poznatog dijela

$$\hat{y}_{MA}(k+d|k) = \underbrace{\gamma_d e(k) + \gamma_{d+1} e(k-1) + \gamma_{d+2} e(k-2) + \dots}_{\text{Poznato u trenutku } k}$$



Adaptivno upravljanje na osnovi minimuma varijance



Pogreška predikcije MA procesa određena je nepredvidivim dijelom u trenutku k

$$\tilde{y}_{MA}(k+d|k) = y(k+d) - \hat{y}_{MA}(k+d|k)$$

$$\tilde{y}_{MA}(k+d|k) = \underbrace{e(k+d) + \gamma_1 e(k+d-1) + \dots + \gamma_{d-1} e(k+1)}_{\text{Nepredvidivo u trenutku } k}$$

Faktorizacija polinoma

$$\begin{aligned} y_{MA}(k+d) &= \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) = \Gamma(q^{-1}) e(k+d) \\ &= R'(q^{-1}) e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \end{aligned}$$

gdje su

$$R'(q^{-1}) = 1 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{d-1} q^{-(d-1)} \quad \text{Nepredvidivi dio}$$

$$S(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} + \dots + s_{n-1} q^{-(n-1)}$$

Adaptivno upravljanje na osnovi minimuma varijance

$$\begin{aligned} y_{MA}(k+d) &= \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) = R'(q^{-1})e(k+d) \\ &= R'(q^{-1})e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k) \end{aligned}$$

Diophantova jednadžba

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})R'(q^{-1}) + q^{-d}S(q^{-1})$$

odnosno

$$q^{d-1}C(q) = A(q)R'(q) + S(q)$$

Polinomi R i S su kvocijent i ostatak dijeljenja $q^{d-1}C(q)$ s polinomom $A(q)$

Optimalni prediktor

Optimalni prediktor dobije se minimizacijom varijance pogreške predikcije

$$E\{\tilde{y}_{MA}^2(k+d|k)\} = E\left\{[y_{MA}(k+d) - \hat{y}_{MA}(k+d|k)]^2\right\} = \min$$

$$y_{MA}(k+d) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k+d) = R'(q^{-1})e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k)$$

$$y_{MA}(k) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})} e(k)$$

$$E\{\tilde{y}_{MA}^2(k+d|k)\} = E\left\{\left[R'(q^{-1})e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d|k)\right]^2\right\} = \min$$

$$\begin{aligned} E\{\tilde{y}_{MA}^2(k+d|k)\} &= E\left\{[R'(q^{-1})e(k+d)]^2\right\} + E\left\{\left[\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d|k)\right]^2\right\} + \\ &+ 2E\left\{[R'(q^{-1})e(k+d)]\left[\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})} y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d|k)\right]\right\} \end{aligned}$$



Optimalni prediktor

Optimalni prediktor dobije se minimizacijom varijance pogreške predikcije

$$\begin{aligned} E\{\tilde{y}_{MA}^2(k+d|k)\} &= E\left[\left[R'(q^{-1})e(k+d)\right]^2\right] + E\left[\left(\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d|k)\right)^2\right] + \\ &+ 2E\left[R'(q^{-1})e(k+d)\left(\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d|k)\right)\right] \xrightarrow{=} 0 \end{aligned}$$

$e(k+d), e(k+d-1), \dots, e(k+1)$ $y_{MA}(k), y_{MA}(k-1), \dots$

Sekvenca signala e je nezavisna od varijable y (vremenski različiti trenuci)
 e – bijeli šum (srednja vrijednost 0)

Treći član sume je 0
 Minimizacija – izjednačenje 2. člana sume s nulom

$$\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k) - \hat{y}_{MA}(k+d|k) = 0$$

$$\hat{y}_{MA}(k+d|k) = \frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k)$$

Adaptivno i robusno upravljanje

11



Optimalni prediktor

Uz prediktor oblika

$$\hat{y}_{MA}(k+d|k) = \frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y_{MA}(k)$$

Varijanca pogreške predikcije ima oblik

$$E\{\tilde{y}_{MA}^2(k+d|k)\} = E\left[\left[R'(q^{-1})e(k+d)\right]^2\right] = \left(1 + r_1^l + \dots + r_{d-1}^l\right)\sigma_e^2$$

Adaptivno i robusno upravljanje

12



Optimalni prediktor ARMAX modela

Uzimajući u obzir ARMAX model procesa

$$y(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k+d) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + y_{MA}(k+d)$$

Predikcijska forma ARMAX modela procesa ima oblik

$$y(k+d) = R'(q^{-1})e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k) + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)$$

Izražavajući $y(k)$ za ARMAX model u obliku

$$y(k) = q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k) + \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}e(k)$$

pogreška $e(k)$ se može izraziti sa

$$e(k) = \frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) - q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k)$$

Predikcijska forma ARMAX modela procesa ima oblik

$$y(k+d) = R'(q^{-1})e(k+d) + \frac{S(q^{-1})}{A(q^{-1})} \left[\frac{A(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) - q^{-d} \frac{B(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) \right] + \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(k)$$



Optimalni prediktor ARMAX modela

Predikcijska forma ARMAX modela procesa ređenjem poprima oblik

$$\begin{aligned} y(k+d) &= R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{B(C - q^{-d}S)}{AC}u(k) = \\ &= R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k) \end{aligned}$$

Optimalni prediktor se dobije iz minimuma varijance predikcijske pogreške

$$E\{\hat{y}^2(k+d|k)\} = E\{[y(k+d) - \hat{y}(k+d|k)]^2\} = \min$$

$$\begin{aligned} E\{\hat{y}^2(k+d|k)\} &= E\{[R'e(k+d)]^2\} + E\left\{\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k) - \hat{y}(k+d|k)\right]^2\right\} + \\ &+ 2E\left\{[R'e(k+d)]\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k) - \hat{y}(k+d|k)\right]\right\} \end{aligned}$$



Optimalni prediktor ARMAX modela

$$\begin{aligned} E\{\tilde{y}^2(k+d|k)\} &= E\left\{[R'e(k+d)]^2\right\} + E\left\{\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k) - \hat{y}(k+d|k)\right]^2\right\} + \\ &+ 2E\left\{[R'e(k+d)]\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k) - \hat{y}(k+d|k)\right]\right\} \end{aligned}$$

Zbog nekoreliranosti signala 3. član je nula,
a minimum se postiže izjednačenjem s nulom 2. člana

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)$$

Uz tako odabrani prediktor pogreška predikcije ima oblik

$$\tilde{y}(k+d|k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d|k) = R'e(k+d)$$

a njena varijanca

$$E\{\tilde{y}_{MA}^2(k+d|k)\} = E\left\{[R'(\mathbf{q}^{-1})e(k+d)]^2\right\} = (1+r_1^2 + \dots + r_{d-1}^2)\sigma_e^2$$



Optimalni prediktor ARMAX modela

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k) \quad y(k+d) = \tilde{y}(k+d|k) + \hat{y}(k+d|k)$$

Optimalni prediktor se može prikazati kao deterministički sustav s 2 ulaza $u(k)$ i $y(k)$
te greškom predikcije koja je MA proces

Izlaz procesa u prediktivnoj formi ima oblik

$$\tilde{y}(k+d|k) = y(k+d) - \hat{y}(k+d|k) = R'e(k+d)$$

Ove dvije komponente su ortogonalne, jer predikcija ovisi o slučajnim poremećajima do trenutka k , a pogreška o slučajnim poremećajima nakon trenutka k . Kriterij optimalnosti se može rastaviti u 2 dijela.

Za optimalni prediktor vrijedi

$$E\{\tilde{y}(k+d|k)\} = 0$$

$$E\{\tilde{y}^2(k+d|k)\} = \text{minimalna}$$

Optimalni prediktor je i minimum varijanci estimator



Regulator po minimumu varijance

- Upravljanje stohastičkim sustavima
- Signal upravljanja poništava d-koračnu predikciju izlaznog signala procesa $y(k+d|k)$
- Prepostavka kauzalnog upravljanja
 - $u(k)$ ovisi o
 - $y(k), y(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots$
 - ne ovisi o budućim signalima y i u .
 - Varijanca izlaznog signala prethođenog za d koraka

$$y(k+d) = R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{B(C - q^{-d}S)}{AC}u(k) = R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)$$

- ima oblik

$$\begin{aligned} E\{y^2(k+d)\} &= E\left\{\left[R'e(k+d)\right]^2\right\} + E\left\{\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)\right]^2\right\} \\ &+ 2E\left\{\left[R'e(k+d)\right]\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)\right]\right\} \end{aligned}$$

Adaptivno i robusno upravljanje

17



Regulator po minimumu varijance

$$E\{y^2(k+d)\} = E\left\{\left[R'e(k+d)\right]^2\right\} + E\left\{\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)\right]^2\right\} + 2E\left\{\left[R'e(k+d)\right]\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k)\right]\right\}$$

- Zadnji sumand je nula zbog različitih vremena uzoraka $e(k+d)$ u odnosu na $y(k)$ i $u(k)$
 - e – je bijeli šum koji se ne može predvidjeti iz prošlih koraka y i u
 - očekivanje 0
- Minimum varijance se postiže uz izjednačavanje 2. sumanda s nulom
- Upravljanje po minimumu varijance bit će ostvareno uz

$$\frac{S(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})R'(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k) = 0$$

- Odnosno

$$B(q^{-1})R'(q^{-1})u(k) = -S(q^{-1})y(k)$$

Adaptivno i robusno upravljanje

18



Regulator po minimumu varijance

$$B(q^{-1})R'(q^{-1})u(k) = -S(q^{-1})y(k)$$

- Zakon upravljanja po minimumu varijance ima oblik

$$u(k) = \frac{-S(q^{-1})}{B(q^{-1})R'(q^{-1})}y(k) = -\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y(k)$$

- gdje je

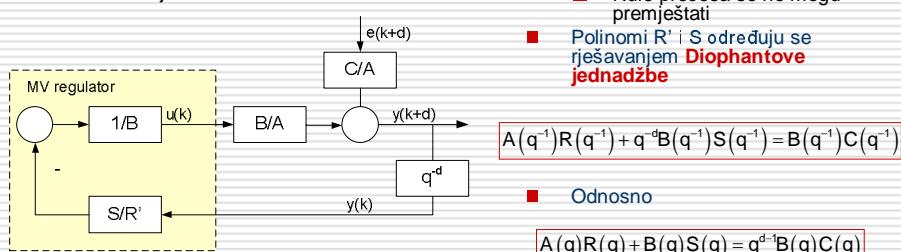
$$R(q^{-1}) = B(q^{-1})R'(q^{-1})$$



Regulator po minimumu varijance

$$u(k) = \frac{-S(q^{-1})}{B(q^{-1})R'(q^{-1})}y(k) = -\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y(k)$$

Blok shema sustava s regulatorom po minimumu varijance



Svojstva

- Regulator s jednim stupnjem slobode
- nema unaprijednog djelovanja
- Regulatorom se djeluje na polove sustava
- Nule procesa se ne mogu premještati
- Polinomi R' i S određuju se rješavanjem **Diophantove jednadžbe**

Odnosno



Regulator po minimumu varijance

Potreba postavljanja polova i nula procesa

Uvrštenjem upravljačkog signala

$$u(k) = \frac{-S(q^{-1})}{B(q^{-1})R'(q^{-1})}y(k) = -\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y(k)$$

u ARMAX model procesa

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$$

može se odrediti utjecaj poremećaja $e(k)$
na odziv $y(k)$

$$\left[A(q^{-1}) + q^{-d} \frac{B(q^{-1})S(q^{-1})}{B(q^{-1})R'(q^{-1})} \right] y(k) = C(q^{-1})e(k)$$

Odnosno

$$y(k) = \frac{B(q^{-1})R'(q^{-1})C(q^{-1})}{B(q^{-1})[A(q^{-1})R'(q^{-1}) + q^{-d}S(q^{-1})]} e(k) = \\ = \frac{R(q^{-1})C(q^{-1})}{A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}SB(q^{-1})(q^{-1})} e(k)$$

Korištenjem izraza Diophantove jednadžbe

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B(q^{-1})S(q^{-1}) = B(q^{-1})C(q^{-1})$$

dobije se

$$y(k) = \frac{BR'C}{BC} e(k) \quad \text{Za stabilan polinom } C$$

Uz stabilan polinom B, tj. minimalno fazni proces B/A – greška regulacije jednaka je greški predikcije

$$y(k) = R'(q^{-1})e(k)$$



Regulator po minimumu varijance

□ Korištenjem algoritma upravljanja

$$u(k) = \frac{-S(q^{-1})}{B(q^{-1})R'(q^{-1})}y(k) = -\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y(k)$$

□ signal na izlazu iz procesa zadovoljava jednadžbu

$$y(k) = \frac{BR'C}{BC} e(k)$$

□ $y(k)$ će biti MA proces d-1 reda

■ (polinom R je d-1 reda)

□ s varijancom

$$E\{\hat{y}_{MA}^2(k+d|k)\} = E\left\{ [R'(q^{-1})e(k+d)]^2 \right\} = \left(1 + r_1^2 + \dots + r_{d-1}^2 \right) \sigma_e^2$$

□ d se može interpretirati kao

■ broj perioda diskretizacije potrebnih da se promjena s ulaza prenese na izlaz



MV regulator

s praćenjem determinističkog referentnog signala



izraz za $y(k+d)$

$$y(k+d) = R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{B(C - q^{-d}S)}{AC}u(k)$$

oduzme se s lijeve i desne strane referentni signal $u_r(k+d)$

$$y(k+d) - u_r(k+d) = R'e(k+d) + \frac{S}{C}y(k) + \frac{B(C - q^{-d}S)}{AC}u(k) - u_r(k+d)$$

Odredi se varijanca dobivenog izraza

$$\begin{aligned} E\left[\left[y(k+d) - u_r(k+d)\right]^2\right] &= E\left[\left[R'e(k+d)\right]^2\right] + E\left[\left(\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k) - u_r(k+d)\right)^2\right] + \\ &+ 2E\left[R'e(k+d)\right]\left[\frac{S}{C}y(k) + \frac{BR'}{C}u(k) - u_r(k+d)\right] \end{aligned}$$

Regulator po minimumu varijance određen sa

Oblik regulatora

$$B(q^{-1})R'(q^{-1})u(k) = C(q^{-1})u_r(k+d) - S(q^{-1})y(k)$$

$$u(k) = \frac{1}{B(q^{-1})R'(q^{-1})} [C(q^{-1})u_r(k+d) - S(q^{-1})y(k)]$$

$$R(q^{-1})u(k) = C(q^{-1})u_r(k+d) - S(q^{-1})y(k)$$

Adaptivno i robusno upravljanje

23



MV regulator

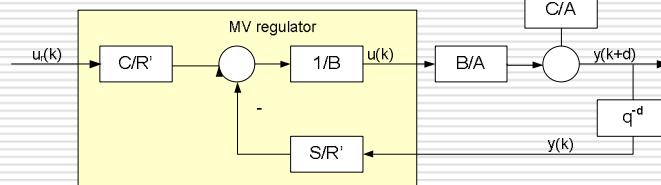
s praćenjem determinističkog referentnog signala



Oblik regulatora

Ovaj regulator obično se koristi uz
 $u_r(k)=\text{const.}$

$$u(k) = \frac{1}{B(q^{-1})R'(q^{-1})} [C(q^{-1})u_r(k+d) - S(q^{-1})y(k)]$$



Izlazni signal

$$y(k+d) = \frac{BC}{B(Aq^d + q^{-d}S)} u_r(k) = \frac{BC}{BC} u_r(k)$$

Karakteristični polinom zatvorenog kruga je BC

Uz pretpostavku da je C stabilan polinom

stabilan sustav upravljanja se postiže uz B/A minimalno fazni proces

Tada će biti $y(k+d) = u_r(k)$

Adaptivno i robusno upravljanje

24



MV regulator

s praćenjem determinističkog referentnog signala



- MV regulator krati sve nule procesa
- mogu se očekivati problemi kod neminimalnofaznih sustava
 - (nule procesa izvan jedinične kružnice)
 - signal upravljanja se raspiruje
- Potrebno faktorizirati polinom B
 - $B=B^-B^+$
 - B^- - polinom sa svim nulama izvan jediničnog kruga
 - Dobije se MA upravljenje (*Moving Average*)
 - suboptimalno MV upravljanje

Adaptivno i robustno upravljanje

25



Adaptivno i robustno upravljanje

26



MA upravljanje (Moving Average)



Faktorizacija polinoma B

$$B = B^- B^+$$

gdje je:

- B^- - polinom čije su sve nule izvan jediničnog kruga (ili loše prigušene)
 B^+ - polinom sa svim nulama unutar jediničnog kruga (dobro prigušenje)

MV algoritmu se dozvoli kraćenje nula procesa unutar jedinične kružnice
dobije se MA algoritam

$$u(k) = \frac{-S(q^{-1})}{B^-(q^{-1})R'(q^{-1})}y(k) = -\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y(k)$$

gdje je: $R=R' B^+$

Uzimajući u obzir ARMAX model uz rastavljanje polinoma B na stabilni i nestabilni dio
 $A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B^-(q^{-1})B^+(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$

Dobije se Diophantova jednadžba oblika:

(postupak isti kao na slideu 21)

$$A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B^+(q^{-1})S(q^{-1}) = B^+(q^{-1})C(q^{-1})$$

Polinomi R i S dobiju se rješavanjem Diophantove jednadžbe

Adaptivno i robusno upravljanje

27



MA upravljanje (Moving Average)



Svojstva MA upravljanja

- Red polinoma R' je $d+nb^+-1$
- MA proces većeg reda od MV procesa
 - red MA proces $d+nb^+-1$
 - red MV procesa $d-1$

Adaptivno i robusno upravljanje

28



Algoritam MA upravljanja (Moving Average)



Indirektni oblik

- Početni podaci:
 - poznati red polinoma na, nb i nc te period diskretizacije
 - Rekurzivni algoritam
 - estimacija parametara sustava
 - mjerjenje signala $u(k), y(k)$
 - određivanje koeficijenata polinoma A, B, C
 - proračun koeficijenata polinoma R, S rješenjem Diophantove jednadžbe
 - Proračun algoritma upravljanja
- $A(q^{-1})R(q^{-1}) + q^{-d}B^+(q^{-1})S(q^{-1}) = B^+(q^{-1})C(q^{-1})$
- $$u(k) = \frac{-S(q^{-1})}{B^+(q^{-1})R^+(q^{-1})}, \quad y(k) = -\frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})}y(k)$$

Adaptivno i robusno upravljanje

29



MA upravljanje (Moving Average)



- Direktna implicitna forma MA upravljanja
 - zaobilazi prvi korak algoritma
 - koeficijenti R i S rekurzivno se proračunavaju u bloku za identifikaciju parametara procesa
 - Reparametrizacija modela procesa
 - parametri regulatora se direktno pojavljuju u jednadžbi dinamike procesa
 - do izraza se dolazi djelovanjem Diophantove jednadžbe na signal y_k
- $$\begin{aligned} Cy(k) &= AR'y(k) + Sy(k-d) \\ &= R'[Bu(k-d) + Ce(k)]y(k) + Sy(k-d) \\ &= Ru(k-d) + Sy(k-d) + R'Ce(k) \end{aligned}$$

$$y(k+d) = \frac{1}{C} [Ru(k) + Sy(k) + R'e(k+d)]$$

Adaptivno i robusno upravljanje

30

 **Algoritam MA upravljanja**
(Direktna metoda) 

- Početni podaci:
 - poznati red polinoma
R i S te horizont
predikcije d
- Rekurzivni algoritam
 - estimacija
koeficijenata polinoma
R i S
- Proračun algoritma
upravljanja

Adaptivno i robusno upravljanje 31

 **Algoritam MA upravljanja** 

- Karakteristike MA algoritma
 - razlika prema MV algoritmu u broju nula koje krati
 - uz $d=na-nb$
 - krate se sve nule procesa
 - uz $d=na$
 - ne krati se niti jedna nula procesa
 - velik signal upravljanja
 - smanjenje signala – uvođenjem u funkciju cilja dodatnih težinskih koeficijenata

Adaptivno i robusno upravljanje 32

Adaptivno upravljanje

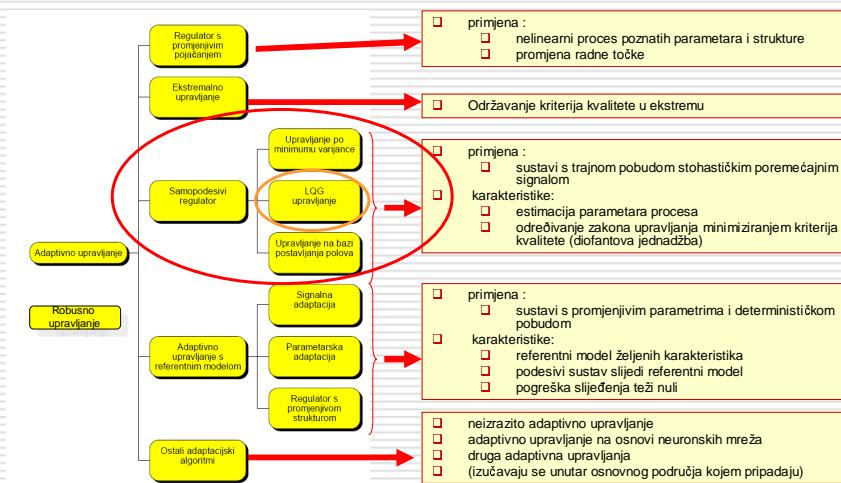
Samopodesivi regulator s LQG upravljanjem

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: zeljko.ban@fer.hr

1

Podjela adaptivnog upravljanja



Adaptivno i robustno upravljanje

2

1



Adaptivno upravljanje na osnovi linearnog kvadratičnog optimalnog upravljanja (LQG)



- LQG upravljanje
 - Linear Quadratic Gaussian

- Zasniva se na minimizaciji matematičkog očekivanja funkcije cilja

$$I_k = E[J_k]$$

- Funkcija cilja

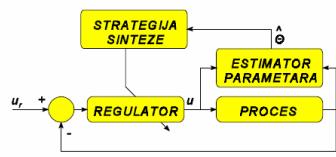
$$J_k = [Py(k+d) - Ku_r(k)]^2 + [Qu(k)]^2$$

- gdje su

$$P(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + \dots + p_{np} q^{-np}$$

$$Q(q^{-1}) = q_0 + q_1 q^{-1} + \dots + q_{nq} q^{-nq}$$

$$K(q^{-1}) = k_0 + k_1 q^{-1} + \dots + k_{nk} q^{-nk}$$



Adaptivno i robusno upravljanje

3



Adaptivno upravljanje na osnovi linearnog kvadratičnog optimalnog upravljanja



Funkcija cilja

$$J_k = [Py(k+d) - ku_r(k)]^2 + [Qu(k)]^2$$

- Željeno ponašanje sustava ostvaruje se odabirom težinskih polinoma

- Mali izlazni signal

- Parametri: $P = 1; K = 0; Q = q_0 = \sqrt{\lambda} \Rightarrow J_k = y^2(k+d) + \lambda u^2(k)$

- Male promjene upravljačkog signala

- Parametri $P = 1; K = 0; Q = q_0(1 - q^{-1}) \Rightarrow J_k = y^2(k+d) + q_0 [u(k) - u(k-1)]^2$

- Slijedni sustav

- Parametri $P = K = 1; Q = q_0 = \sqrt{\lambda} \Rightarrow J_k = [y(k+d) - u_r(k)]^2 + \lambda u^2(k)$
 - izlazni signal prati zakašnjeli referentni signal

- Sustav za slijedenje modela (model following system)

- Parametri $Q=0$

- K i P su polinomi brojnika i nazivnika referentnog (željenog) modela

- Sustav po minimumu varijance

- Parametri: $P=1; Q=0; K=0 \Rightarrow J_k = y^2(k+d)$

Adaptivno i robusno upravljanje

4



LQG problem

Postupak

- uz poznate $P, Q, K, u_r(k)$ i ARMAX model
 - (koeficijenti polinoma A, B, C i kašnjenje d)
 - traži se kauzalan algoritam
 - $u(k) = f[y(k), y(k-1), \dots, u(k-1), u(k-2), \dots]$
- Određivanje algoritma
 - nije dozvoljeno diferencirati I_k po $u(k)$ kod traženja optimuma
 - jer $y(k+d)$ ovisi o $u(k)$



LQG problem

Predikcija izlazne varijable rastavlja se na dvije ortogonalne komponente procjenu predikcije i pogrešku predikcije – (*definirane u različitim vremenskim trenucima*)

$$y(k+d) = \hat{y}(k+d|k) + \tilde{y}(k+d|k)$$

gdje je optimalni d -koračni prediktor dan izrazom:

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{S_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})R_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k)$$

greška predikcije:

$$\tilde{y}(k+d|k) = R_d(q^{-1}) e(k+d)$$

Polinomi R'_d i S_d dobiveni su dijeljenjem polinoma C s polinomom A u d koraka,
tj. dok se u ostatku dijeljenja ne dobije q^{-d} faktor.
Određeni su Diophantovom jednadžbom

$$A(q^{-1})R'_d(q^{-1}) + q^{-d}S(q^{-1}) = C(q^{-1})$$

Optimalni prediktor za $y(k+j)$, $j < d$

izražavanje signala $y(k+j)$ pomoću predikcije

$$y(k+j) = \hat{y}(k+j|k) + \tilde{y}(k+j|k)$$



LQG problem

Za $j < 0$ $y(k+j)$ je dio skupa poznatih podataka do trenutka k i vrijedi

$$y(k+j) = \hat{y}(k+j|k) \quad \forall j < 0$$

za $j=d$ vrijedi:

$$\hat{y}(k+d|k) = \frac{S_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})R_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) \quad \hat{y}(k+d|k) = R_d(q^{-1})e(k+d)$$

za $j < d$ se ne može generalizirati

$$\hat{y}(k+j|k) = \frac{S_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k-d+j) + \frac{B(q^{-1})R_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-d+j)$$

zbog zanemarivanja dostupnih podataka $y(k-d+j+1), \dots, y(k)$

Nije optimalna predikcija.

Potrebno podijeliti polinome $C(q^{-1})$ i $A(q^{-1})$ u j koraka da se dobije kvocijent $R_j(q^{-1})$ i ostatak $S_j(q^{-1})$

$$AR_j + q^{-1}S_j = C$$

$$\text{gdje su: } R_j(q^{-1}) = 1 + r_1 q^{-1} + \dots + r_{j-1} q^{-(j-1)}$$

$$S_j(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} + \dots + s_{n-1} q^{-(n-1)}$$

Polinomi R i S određuju se za svaki j
u rasponu $d-np < j < d$

Adaptivno i robusno upravljanje

7



LQG problem

Množenjem j koračne prediktivne forma modela (ARMAX)

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-1}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)$$

polinomom R'_j dobije se: $AR'_j y(k+j) = BR'_j u(k-d+j) + R'_j C e(k+j)$

uz Diophantovu jednadžbu: $AR'_j + q^{-1}S_j = C$

dobije se:

$$y(k+j) = \underbrace{\frac{S_j}{C} y(k)}_{\text{e}(k), \text{e}(k-1), \dots} + \underbrace{\frac{BR'_j}{C} u(k-d+j)}_{\text{e}(k+1), \text{e}(k+2), \dots} + \underbrace{R'_j e(k+j)}_{\text{e}(k+1), \text{e}(k+2), \dots}$$

Slično kao kod MV upravljanja dobije se:

$$\hat{y}(k+j|k) = \frac{S_j}{C} y(k) + \frac{BR'_j}{C} u(k-d+j), \quad 0 < j < d$$

Greška predikcije je:

$$\tilde{y}(k+j|k) = R'_j(q^{-1})e(k+j)$$

Ortogonalne komponente

Adaptivno i robusno upravljanje

8



LQG problem

Prediktor j koračni $\hat{y}(k+j|k) = \frac{S_j}{C} y(k) + \frac{BR_j}{C} u(k-d+j), \quad 0 < j < d$

Greška predikcije je: $\tilde{y}(k+j|k) = R_j(q^{-1}) e(k+j)$

Varijanca greške predikcije $E(\tilde{y}^2(k+j|k)) = (1 + r_1^2 + \dots + r_{j-1}^2) \sigma^2$

Optimalni prediktor koristi sve dostupne signale

Uzimajući kriterijsku funkciju $J_k = [Py(k+d) - Ku_r(k)]^2 + [Qu(k)]^2$

i ortogonalnu dekompoziciju $y(k+j) = \hat{y}(k+j|k) + \tilde{y}(k+j|k)$

dobije se funkcija cilja $I_k = E[(P\hat{y}(k+d|k) - P\tilde{y}(k+d|k) - Ku_r(k))^2 + [Qu(k)]^2]$

Svaka greška $\tilde{y}(k+j|k)$ ovisi o $e(k+1), e(k+2), \dots$ pa je $P(q^{-1})\tilde{y}(k+j|k)$ ortogonalan na sve ostale komponente (koje su determinističke), pa funkcija cilja poprima oblik:

$$I_k = [P\hat{y}(k+d|k) - Ku_r(k)]^2 + [Qu(k)]^2 + E[P\tilde{y}(k+d|k)]^2$$

Adaptivno i robusno upravljanje

9



LQG problem

Ortogonalnost prediktivne forme $y(k+d)$ omogućila je rastavljanje funkcije cilja na stohastičku komponentu nezavisnu od $u(k)$ i determinističku komponentu

Funkcija cilja $I_k = [P\hat{y}(k+d|k) - Ku_r(k)]^2 + [Qu(k)]^2 + E[P\tilde{y}(k+d|k)]^2$

Deterministička komponenta

Stohastička komponenta

Komponenta $\hat{y}(k+d|k)$ ovisi o $u(k)$

Komponenta $\hat{y}(k+j|k)$ za $j < d$ ne ovisi o $u(k)$
(ovisi samo o ranijim signalima upravljanja)

Vrijedi $\frac{\partial y(k+d|k)}{\partial u(k)} = \frac{B(0)R_d(0)}{C(0)} = b_0$

$$\frac{\partial}{\partial u(k)} [Qu(k)]^2 = \frac{\partial}{\partial u(k)} [q_0 u(k) + q_1 u(k-1) + \dots + q_n u(k-n)]^2 = 2q_0 Qu(k)$$

Adaptivno i robusno upravljanje

10



LQG regulator



Derivacija funkcije cilja ima oblik

$$\frac{\partial J_k}{\partial u(k)} = 2b_0 [P\hat{y}(k+d|k) - Ku_r(k)] + 2q_0 Qu(k) = 0$$

Optimalni zakon upravljanja određen je sa

$$P(q^{-1})y(k+d|k) + \frac{q_0}{b_0} Q(q^{-1})u(k) - K(q^{-1})u_r(k) = 0$$

Uz polinom P oblika

$$P(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + \dots + p_{np} q^{-np}$$

zakon upravljanja poprima obliku

$$\sum_{j=0}^{np} p_j y(k+d-j|k) + \frac{q_0}{b_0} Q(q^{-1})u(k) - K(q^{-1})u_r(k) = 0$$



LQG regulator



uzimajući u obzir da je $\hat{y}(k+j|k) = \frac{S_j}{C} y(k) + \frac{BR_j}{C} u(k-d+j)$, $0 < j < d$

$$\text{zakon upravljanja } \sum_{j=0}^{np} p_j y(k+d-j|k) + \frac{q_0}{b_0} Q(q^{-1})u(k) - K(q^{-1})u_r(k) = 0$$

poprima obliku

$$\sum_{j=0}^{np} p_j S_{d-j} y(k) + \sum_{j=0}^{np} p_j BR_{d-j} u(k-j) + \frac{q_0}{b_0} C Q(q^{-1}) u(k) - C K(q^{-1}) u_r(k) = 0$$

Definiranjem da je

$$S(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j S_{d-j}(q^{-1})$$

$$R(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j B(q^{-1}) R_{d-j}(q^{-1}) q^{-j} u(k-j) + \frac{1}{b_0} q_0 C(q^{-1}) Q(q^{-1}) u(k)$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) K(q^{-1}) u_r(k) = t_0 + t_1 q^{-1} + \dots + t_n q^{-nt}$$



LQG regulator

$$S(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j S_{d-j}(q^{-1})$$

$$R(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j B(q^{-1}) R_{d-j}(q^{-1}) q^{-j} u(k-j) + \frac{1}{b_0} q_0 C(q^{-1}) Q(q^{-1}) u(k)$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) K(q^{-1}) u_r(k) = t_0 + t_1 q^{-1} + \dots + t_n q^{-nt}$$

Zakon upravljanja

$$R(q^{-1}) u(k) = T(q^{-1}) u_r(k) - S(q^{-1}) y(k)$$

Upravljački signal LQG regulatora ima oblik

$$u(k) = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} u_r(k) - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y(k)$$

Adaptivno i robustno upravljanje

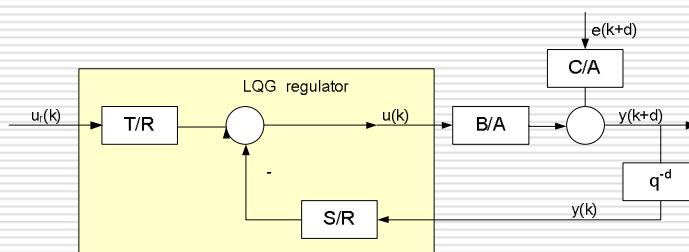
13



LQG regulator

$$u(k) = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} u_r(k) - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y(k)$$

Blok shema sustava s regulatorom po minimumu varijance



Adaptivno i robustno upravljanje

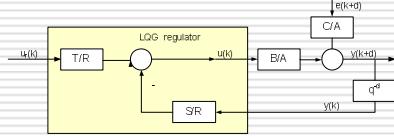
14



Algoritam LQG regulatora



- Početni podaci
 - izbor polinoma P, K, Q
 - poznati red polinoma na, nb, nc.
- Algoritam
 - Estimacija polinoma A, B, C i kašnjenja procesa d
 - Proračun R_j i S_j polinoma
 - rješavanje Diophantove jednadžbe za $d-np < j < d$
 - Proračun S, R i T polinoma
 - Proračun upravljačkog signala $u(k)$



Diophantova jednadžba

$$AR_j + q^{-j}S_j = C$$

$$S(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{np} p_i S_{d-i}(q^{-1})$$

$$R(q^{-1}) = \sum_{i=0}^{np} p_i B(q^{-1}) R_{d-i}(q^{-1}) q^{-i} u(k-i) + \frac{1}{b_0} q^{-i} C(q^{-1}) Q(q^{-1}) u(k)$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) K(q^{-1}) u_r(k) = t_0 + t_1 q^{-1} + \dots + t_m q^{-m}$$

$$u(k) = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} u_r(k) - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y(k)$$



Svojstva LQG regulatora



- LQG optimalni regulator
 - dva stupnja slobode
 - Razlika prema MV regulatoru
 - uz komponentu u povratnoj vezi postoji i komponenta u unaprijednoj grani
 - moguće pomicati polove i nule procesa
 - MV regulator se može dobiti LQG postupkom uz
 - $P=1; Q=K=0$
 - $I_k = E[Py^2(k+d)]$
 - $S(q^{-1}) = S_d(q^{-1}); R(q^{-1}) = B(q^{-1})R_d(q^{-1})$
 - zakon upravljanja
 - $B(q^{-1})R_d(q^{-1})u(k) = -S_d(q^{-1})y(k) \Rightarrow \text{MV regulator}$



Svojstva LQG regulatora



LQG optimalni regulator

- dobije se rješavanjem Diophantove jednadžbe

$$AR_j + q^{-j}S_j = C$$

$$R_i(q^{-1}) = 1 + r_1q^{-1} + \dots + r_{i-1}q^{-(i-1)}$$

$$S_i(q^{-1}) = s_0 + s_1q^{-1} + \dots + s_{n-1}q^{-(n-1)}$$

- dinamika LQG regulatora sadrži implicitni estimator (optimalni prediktor) za dio unutrašnjeg stanja koje se ne pojavljuje direktno na izlazu

□ Diophantovu jednadžbu treba izračunati za j u intervalu $d-np < j < d$

Usporedba s MV

- za LQG regulator – postupak određivanja Diophantove jednadžbe složeniji

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga

$$\frac{y(k+d)}{u_r(k)} = \frac{BT}{AR + q^{-d}BS}$$

□ LQG regulator ovisi o izlaznom signalu $y(k)$, referentnom signalu $u_r(k)$ i

prethodnim signalima upravljanja $u(k-1), u(k-2), \dots$

□ LQG regulator ne ovisi o unutarnjim stanjima procesa



Svojstva LQG regulatora



LQG upravljanje

prednosti pred MV upravljanjem uz $Q > 0$

□ troši manje energije za upravljanje

□ varijanca izlaznog signala neznatno veća nego kod MV upravljanja



Svojstva adaptivnog upravljanja



- Kompleksno u usporedbi s ostalim sustavima
- osjetljivo na matematički model procesa
 - (posebno vrijedi za samopodešavajuće regulatorе)
- osjetljivo na nemodeliranu dinamiku
- osjetljivo na dobar izbor pobude
- osjetljivo na period diskretizacije
- teže za puštanje u pogon (na postrojenju)



Adaptivni regulator

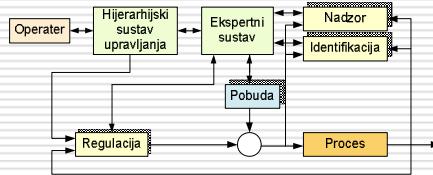


- Adaptivni regulator sadrži
 - Upravljački zakon s podešivim
 - parametrima ili signalima
 - strukturom regulatora
 - Određenje odziva zatvorenog kruga pomoću
 - referentnog modela
 - specifikacijama u određivanju regulatora
 - Proceduru proračuna pogodnu za računanje u realnom vremenu
 - Osvježavanje parametara (signala) ili strukture zasnovano na mjerenjima
 - Ugrađen zakon upravljanja



Adaptivni regulator

- Prije projektiranja i izvedbe adaptivnog regulatora
 - studija izvodljivosti
 - usporedba adaptivnog regulatora s ostalim regulatorima
- Adaptivni regulator se podešava prema specifičnoj primjeni (postrojenju)
- Upravljački sustav postrojenja
 - Složen sustav upravljanja
 - više regulacijskih petlji
 - međudjelovanje petlji
 - različite vrste upravljanja
 - hijerarhijsko upravljanje
 - sekvenčno upravljanje vođeno događajima
 - Adaptivni regulator je jedan od upravljačkih algoritama



Adaptivno i robusno upravljanje

21



Kad koristiti adaptivno upravljanje na osnovi samopodešavajućih regulatora?



- Adaptivno upravljanje opravdano je koristiti:
 - kad se proces mijenja nepredvidivo
 - kad su granice promjene parametara procesa nepoznate
 - kad se kašnjenje u procesu ne mijenja
 - kad je matematički model procesa poznatog reda
 - kad matematički model procesa može opisati različite dinamike procesa u normalnom radu

Adaptivno i robusno upravljanje

22



Nepogodnost primjene samopodesivih adaptivnih regulatora



- Adaptivni samopodesivi regulatori (*self tuning adaptive control*) nisu pogodni
 - kad ne može biti osigurana perzistencija pobude
 - kad je perzistentna pobuda opasna za proces
 - kad je upravljački algoritam previše aktivan
 - trošenje aktuatora
 - kad procedura identifikacije nije pouzdana
 - kad može biti narušena stabilnost sustava upravljanja
- Alternativa može biti Robusno upravljanje

Robusno upravljanje

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: zeljko.ban@fer.hr



Sustavi s promjenjivim parametrima



- Parametri sustava automatskog upravljanja
 - Vremenske konstante
 - Pojačanja
- Promjena parametara
 - promjena karakterističnih jednadžbi, nula i polova
 - promjena stabilnosti sustava



Sustavi s promjenjivim parametrima



- Analiza stabilnosti sustava
 - Određivanja područja parametara u kojem je sustav stabilan
- Sustav sa k promjenjivih parametara
 - k – dimenzionalno područje stabilnosti
 - svaka točka prostora – karakteristična jednadžba s jedinstvenim parametrima



Robusna stabilnost

- Klasičan pristup projektiranju regulatora
 - Prepostavke
 - Točan opis realnog sustava matematičkim modelom
 - Matematički model ima konstantne parametre
 - Zadatak – projektirati regulator za postizanje
 - stabilnosti zatvorenog kruga
 - ostvariti tražene performanse zatvorenog kruga sustava
- Problem
 - Neizvjesnost u poznavanju dinamike sustava
 - Vremenska promjena parametara sustava
- Uzroci promjena
 - Promjena parametara uslijed starenja
 - Promjena uvjeta rada (radne točke nelinearnog sustava)
 - Kvar komponente
 - Iznos parametra koji eksplicitno ovisi o vremenu



Analiza stabilnosti sustava s promjenjivim parametrima



- Krivulja mesta korjena
 - analiza promjene položaja korjena karakteristične jednadžbe zatvorenog kruga sustava
 - primjena kod promjene pojačanja prijenosne funkcije otvorenog kruga (*jedan parametar*)
- D – rastavljanje
 - određivanje područja stabilnosti u prostoru parametara sustava (*ili koeficijenata karakteristične jednadžbe*)
 - *dva parametra*
- Teorem malog pojačanja
 - (*jedan parametar*)
- Polinomski pristup Karitonova
 - (*bilo koji broj parametara*)



Postupak analize
robusne stabilosti

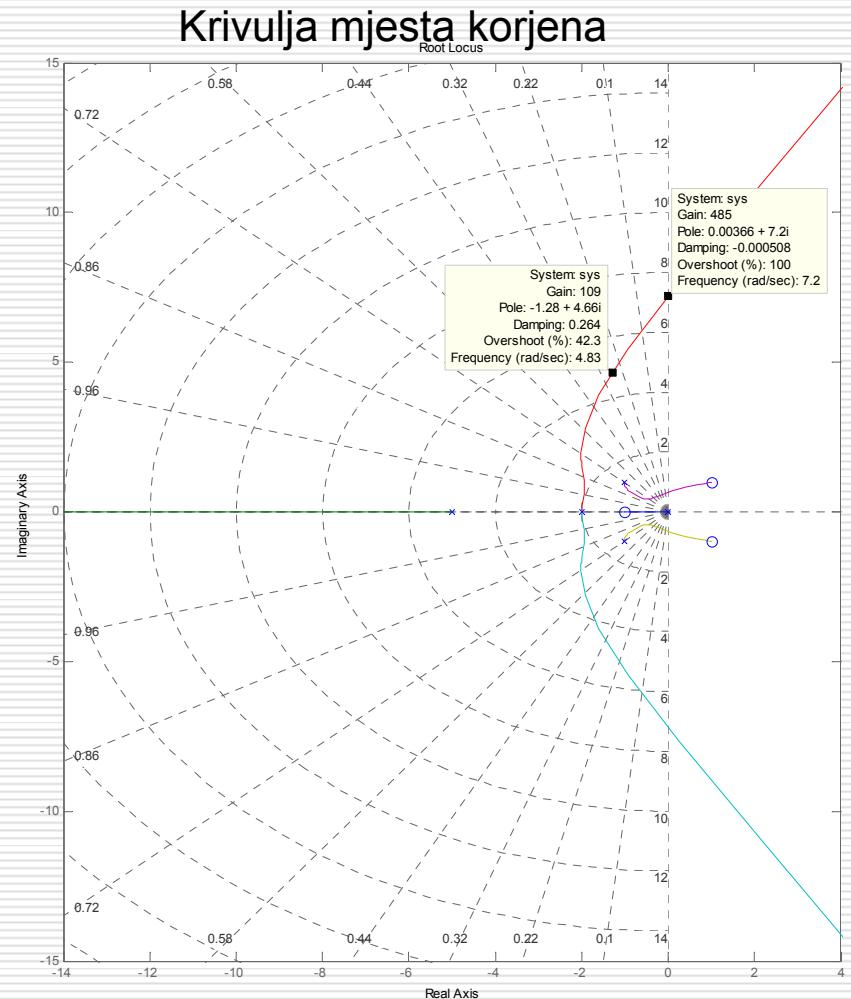
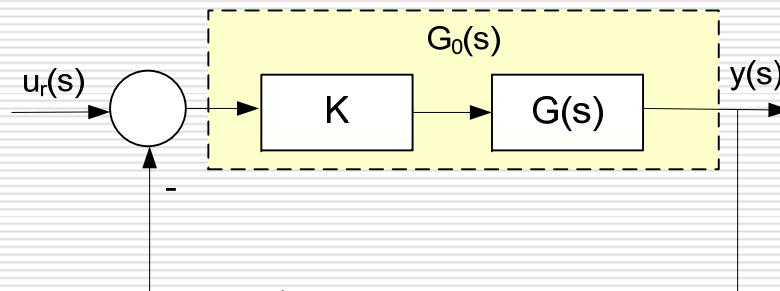
Krivulja mjesta korjena

Primjer

- Proces zadan prijenosnom funkcijom otvorenog kruga

$$G_0(s) = K \frac{(s+1)(s-1+j)(s-1-j)}{s(s+5)(s+2)^2(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$G_0(s) = K \frac{s^3 - s^2 + 2}{s^6 + 11s^5 + 44s^4 + 86s^3 + 88s^2 + 40s}$$





D- rastavljanje

- Određivanje stabilnog i nestabilnog područja n-dimenzionalnog prostora parametara sustava
- Područje nestabilnog režima rada
 - korjeni karakteristične jednadžbe s pozitivnim realnim dijelom
- Područje stabilnog režima rada
 - korjeni karakteristične jednadžbe s negativnim realnim dijelom
- D-rastavljanje
 - Određivanje ruba stabilnosti pomoću krivulje Mihajlova

Kriterij stabilnosti Mihajlova

Prijenosna funkcija **zatvorenog** kruga

$$G_z(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Karakteristični polinom **zatvorenog** kruga

$$D(s) = \sum_{i=0}^n \alpha_i s^i$$

$$D(j\omega) = \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i = X(\omega) + jY(\omega)$$

$$X(\omega) = a_0 - \omega^2 a_2 + \omega^4 a_4 - \omega^6 a_6 + \dots$$

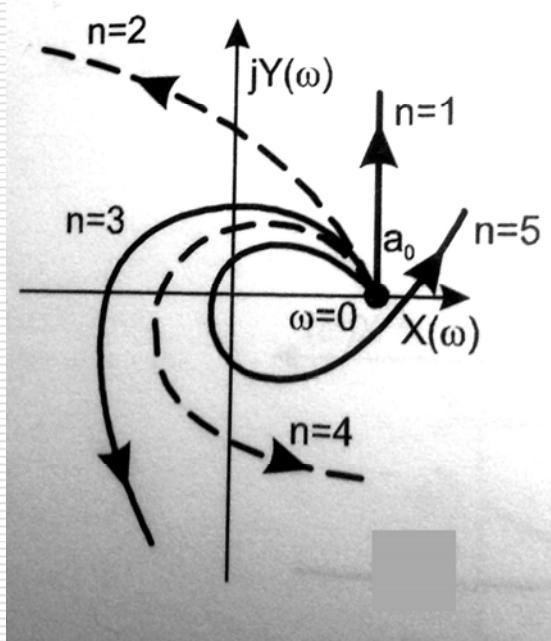
$$Y(\omega) = \omega a_1 - \omega^3 a_3 + \omega^5 a_5 - \omega^7 a_7 + \dots$$



Kriterij Mihajlova

$$X(\omega) = a_0 - \omega^2 a_2 + \omega^4 a_4 - \omega^6 a_6 + \dots$$

$$Y(\omega) = \omega a_1 - \omega^3 a_3 + \omega^5 a_5 - \omega^7 a_7 + \dots$$



Za stabilnost sustava n-tog reda nužno je i dovoljno da frekvencijska karakteristika karakterističnog vektora zatvorenog kruga pri promjeni frekvencije $0 < \omega < \infty$

započne na pozitivnom dijelu realne osi i da, ne prolazeći ishodištem (ne poprimi iznos 0) prođe po redu kroz n kvadrantata u pozitivnom smislu.

$$\Delta \arg[D(j\omega)] = n \frac{\pi}{2} \quad \forall \omega = 0 \text{ do } \infty$$

Rub stabilnosti

$$X(\omega) = 0$$

$$Y(\omega) = 0$$



D- rastavljanje

Određivanje ruba stabilnosti pomoću kriterija stabilnosti Mihajlova

$$D(j\omega) = \sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^i = X(\omega) + jY(\omega) = 0$$

Jednadžba može biti zadovoljena uz jedan nulti realni korjen ili

par imaginarnih korjena
(konjugirano kompleksnih)

Uz dva promjenjiva parametra u sustavu α i β jednadžba ima oblik

$$D(j\omega, \alpha, \beta) = X(\omega, \alpha, \beta) + jY(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

$$X(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

$$Y(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

Uvjet ruba stabilnosti može se zapisati u parametarskom obliku:

$$\alpha = f_1(\omega),$$

$$\beta = f_2(\omega)$$

Karakteristična jednadžba – linearna ovisnost o parametrima:

$$D(j\omega, \alpha, \beta) = \alpha G(j\omega) + \beta H(j\omega) + L(j\omega) = 0$$

$$X(\omega, \alpha, \beta) = \alpha G_1(\omega) + \beta H_1(\omega) + L_1(\omega) = 0$$

$$Y(\omega, \alpha, \beta) = \alpha G_2(\omega) + \beta H_2(\omega) + L_2(\omega) = 0$$



D- rastavljanje

karakteristična jednadžba linearno ovisna o parametrima



$$D(j\omega, \alpha, \beta) = \alpha G(j\omega) + \beta H(j\omega) + L(j\omega) = 0$$

$$X(\omega, \alpha, \beta) = \alpha G_1(\omega) + \beta H_1(\omega) + L_1(\omega) = 0$$

$$Y(\omega, \alpha, \beta) = \alpha G_2(\omega) + \beta H_2(\omega) + L_2(\omega) = 0$$

Rješenjem jednadžbi dobiju se parametri:

$$\alpha = \frac{H_1 L_2 - H_2 L_1}{G_1 H_2 - G_2 H_1} = \frac{\Delta \alpha}{\Delta},$$

$$\beta = \frac{G_2 L_1 - G_1 L_2}{G_1 H_2 - G_2 H_1} = \frac{\Delta \beta}{\Delta},$$

gdje su:

$$\Delta = G_1 H_2 - G_2 H_1$$

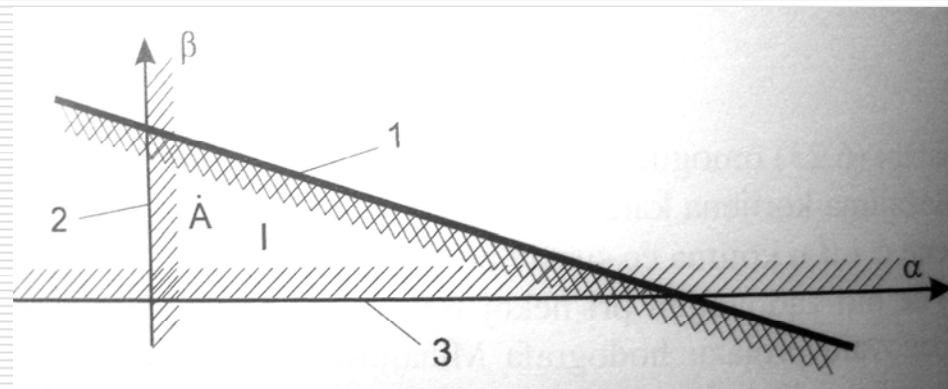
$$\Delta \alpha = H_1 L_2 - H_2 L_1$$

$$\Delta \beta = G_2 L_1 - G_1 L_2$$

Pri $\omega=0$, $\omega=\infty$, $\omega=\omega_{gr}$, α i β mogu poprimiti neodređeni oblik tipa $0/0$ i ∞/∞

U tom slučaju se umjesto linearne ovisnosti dobivaju singularni pravci

Singularni pravci i linarna krivulja D dijele prostor na područja.
Jedno područje stabilno.



Područje stabilnosti – područje bez ijednog korjena s realnim dijelom

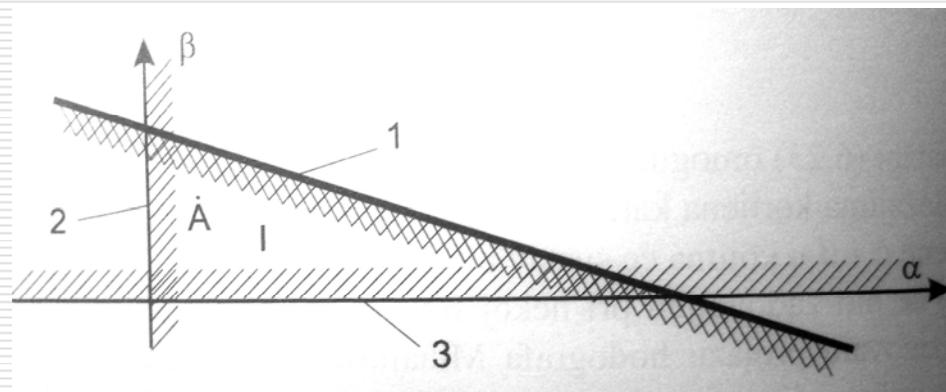


D- rastavljanje

karakteristična jednadžba linearno ovisna o parametrima



Određivanje stabilnog područja metodom
šrafiranja



$$\Delta = G_1 H_2 - G_2 H_1$$

Ako pri porastu frekvencije
 $-\infty < \omega < 0$ i $0 < \omega < \infty$
bude determinanta sustava $\Delta > 0$
šrafira se lijeva strana D krivulje

Ako pri porastu frekvencije
 $-\infty < \omega < 0$ i $0 < \omega < \infty$
bude determinanta sustava $\Delta < 0$
šrafira se desna strana D krivulje

U točkama $\omega=0$ i $\omega=\infty$
šrafirane strane D-krivulje i singularnih
pravaca moraju biti
okrenute jedna prema drugoj

Provjera područja stabilnosti
Za točku iz područja (α, β)
određuje se stabilnost jednim od kriterija
stabilnosti (npr. Hurwitz)

Jedna stabilna točka
↑
cijelo stabilno područje



D- rastavljanje

karakteristična jednadžba **NELINEARNO** ovisna o parametrima



Postupak analogan uz
Nelinearan sustav jednadžbi

$$X(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

$$Y(\omega, \alpha, \beta) = 0$$

Kod šrafiranja gleda se predznak Jakobijane

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \beta} \\ \frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial y}{\partial \beta} \end{vmatrix}$$

Ako pri porastu frekvencije
 $-\infty < \omega < 0$ i $0 < \omega < \infty$
bude determinanta sustava $J > 0$
šrafira se lijeva strana D krivulje

Ako pri porastu frekvencije
 $-\infty < \omega < 0$ i $0 < \omega < \infty$
bude determinanta sustava $J < 0$
šrafira se desna strana D krivulje

U točkama $\omega=0$ i $\omega=\infty$
šrafirane strane D-krivulje i singularnih
pravaca moraju biti
okrenute jedna prema drugoj

Provjera područja stabilnosti
Za točku iz područja (α, β)
određuje se stabilnost jednim od kriterija
stabilnosti (npr. Hurwitz)

Jedna stabilna točka
↑
cijelo stabilno područje

D- rastavljanje

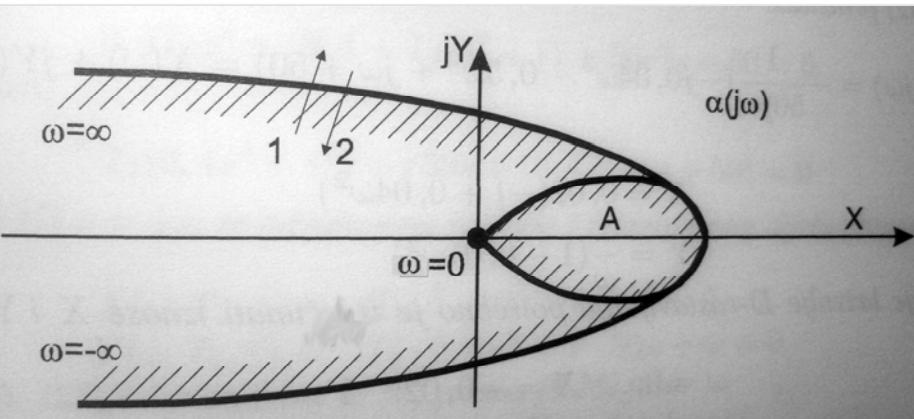
karakteristična jednadžba ovisna o **jednom parametru**

Za sustav s jednim promjenjivim parametrom krivulja rastavljanja ima oblik

$$D(j\omega) = Q(j\omega) + \alpha R(j\omega)$$

$$\alpha(j\omega) = -\frac{Q(j\omega)}{R(j\omega)} = X(\omega) + jY(\omega)$$

Krivulja ima oblik



D-krivulja je transformirana kompleksna ravnina korjena karakteristične jednadžbe

Područje parametra
lijevo od krivulje D-rastavljanja
 u smjeru porasta frekvencije
 odgovara
lijeva poluravnina kompleksne
 ravnine korjena

U realnim sustavima parametri su
 realni
 (pojačanja, vremenske konstante)
 pa je od interesa samo realna os.



D-rastavljanje

Primjer 1



Sustav s jediničnom negativnom povratnom vezom određen je prijenosnom funkcijom otvorenog kruga

$$G_0(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$K = 50;$$

$$T_1 = 0.4s$$

$$T_2 = 0.1s$$

Potrebno je odrediti utjecaj vremenske konstante derivacijskog člana na stabilnost zatvorenog sustava

Karakteristična jednadžba zatvorenog sustava

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0$$

Uvrštenjem vrijednosti se dobije

$$0.04s^3 + 0.5s^2 + (1 + 50\tau)s + 50 = 0$$

$$\tau = -\frac{1}{50s} (0.04s^3 + 0.5s^2 + s + 50)$$

Zamjenom s sa $j\omega$ dobije se

$$\begin{aligned}\tau &= -\frac{1}{50j\omega} (-j0.04\omega^3 - 0.5\omega^2 + j\omega + 50) \\ &= X(\omega) + jY(\omega)\end{aligned}$$

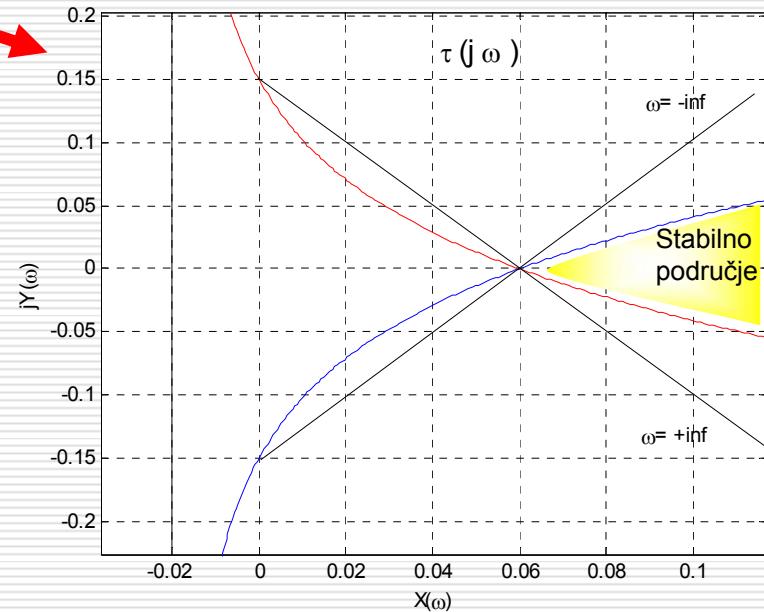
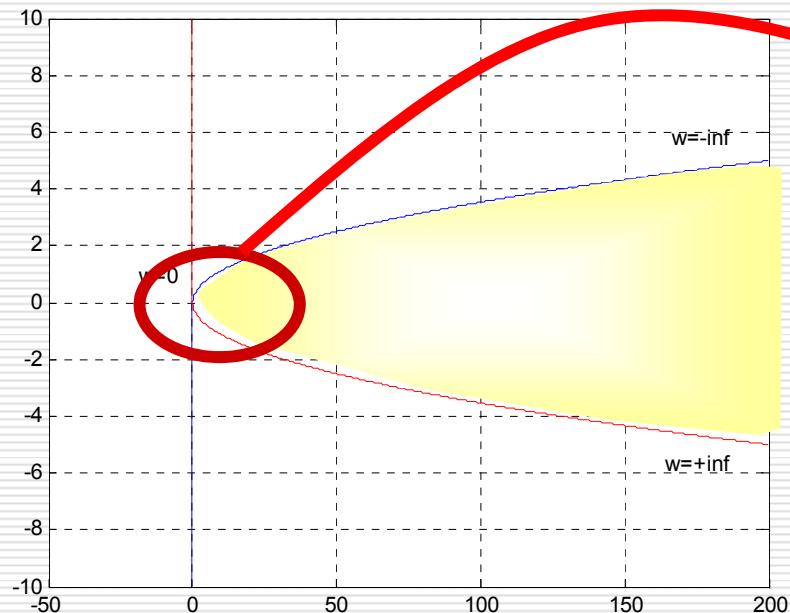
$$X(\omega) = \frac{1}{50} (0.04\omega^2 - 1)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\omega} (1 - 0.01\omega^2)$$



D-rastavljanje

Primjer 1



$$X(\omega) = \frac{1}{50} (0.04\omega^2 - 1)$$
$$Y(\omega) = \frac{1}{\omega} (1 - 0.01\omega^2)$$

Određenje pravaca:

$$\omega=0 \rightarrow X=-0.02; Y=\pm\infty$$

$$\omega=+\infty \rightarrow X=+\infty; Y=-\infty$$

$$\omega=-\infty \rightarrow X=+\infty; Y=+\infty$$

Sjecište s realnom i imaginarnom osi

$$X(\omega_1) = 0 \rightarrow \omega_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{0.04}} = \pm 5 \quad Y = \pm 0.15$$

$$Y(\omega_2) = 0 \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{0.01}} = 10 \quad X = 0.06$$



D-rastavljanje

Primjer 2



Sustav s jediničnom negativnom povratnom vezom određen je prijenosnom funkcijom otvorenog kruga

$$G_0(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$K = 50;$$

$$T_1 = 0.4s$$

Potrebno je odrediti utjecaj vremenskih konstanti T_2 i τ na stabilnost zatvorenog sustava

Karakteristična jednadžba zatvorenog sustava

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0$$

Uvrštenjem vrijednosti se dobije

$$0.4T_2 s^3 + (0.4 + T_2)s^2 + (1 + 50\tau)s + 50 = 0$$

$$T_2(0.4s^3 + s^2) + \tau 50s + (0.4s^2 + s + 50) = 0$$

Zamjenom s sa $j\omega$ dobije se

$$X(\omega, T_2, \tau) = -T_2\omega^2 + 50 - 0.4\omega^2 = 0$$

$$Y(\omega, T_2, \tau) = -T_2 \cdot 0.4 \cdot \omega^3 + \tau 50\omega + \omega = 0$$



D-rastavljanje

Primjer 2



$$X(\omega, T_2, \tau) = -T_2\omega^2 + 50 - 0.4\omega^2 = 0$$

$$Y(\omega, T_2, \tau) = -T_2 \cdot 0.4 \cdot \omega^3 + \tau 50\omega + \omega = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\omega^2 & 0 \\ -0,4\omega^3 & 50\omega \end{vmatrix} = -50\omega^3$$

$$\Delta T_2 = \begin{vmatrix} -(50 + 0,4\omega^2) & 0 \\ -\omega & 50\omega \end{vmatrix} = -(50 - 0,4\omega^2)\omega \cdot 50$$

$$\Delta \tau = \begin{vmatrix} -\omega^2 & -(50 - 0,4\omega^2) \\ -0,4\omega^3 & -\omega \end{vmatrix} = \omega^3 - 0,4\omega^3(50 - 0,4\omega^2)$$

Primjenom (6.27) dobivamo:

$$T_2 = \frac{\Delta T_2}{\Delta} = \frac{50}{\omega^2} - 0,4 \quad (6.39)$$

$$\tau = \frac{\Delta \tau}{\Delta} = 0,02(19 - 0,16\omega^2) \quad (6.40)$$

Za različite iznose ω , iz (6.39) i (6.40) proizlaze iznosi promjenljivih parametara T_2 i τ kojima je određena krivulja D-rastavljanja (tabela 6.1).

Tabela 6.1.

ω	0	5	6	7	8	9	10	$\sqrt{\frac{19}{0,16}}$	$\sqrt{\frac{50}{0,4}}$	15	$\pm\infty$
T_2	∞	1.6	0.99	0.62	0.38	0.22	0.1	0.02	0	-0.18	-0.4
τ	0.38	0.3	0.27	0.22	0.18	0.12	0.06	0	-0.02	-0.34	$-\infty$



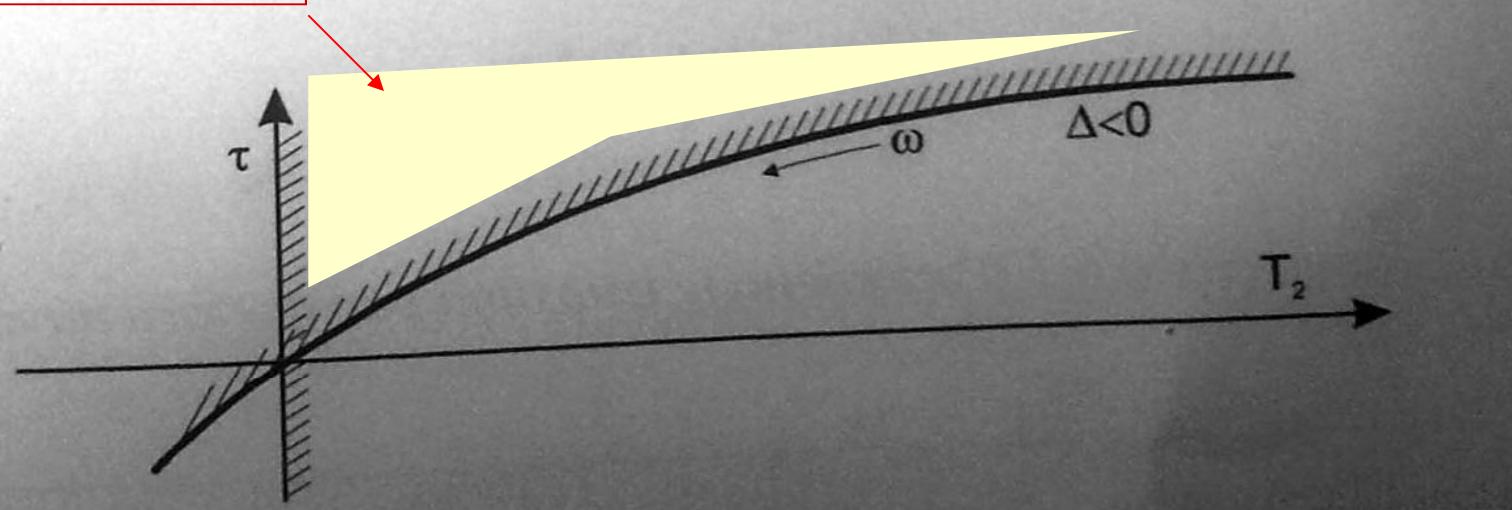
D-rastavljanje

Primjer 2



ω	0	5	6	7	8	9	10	$\sqrt{\frac{19}{0.16}}$	$\sqrt{\frac{50}{0.4}}$	15	$\pm\infty$
T_2	∞	1.6	0.99	0.62	0.38	0.22	0.1	0.02	0	-0.18	-0.4
τ	0.38	0.3	0.27	0.22	0.18	0.12	0.06	0	-0.02	-0.34	$-\infty$

Područje stabilnosti



Provjera područja za $T_2 = \tau = 0.2s$

Karakteristična jednadžba

$$0.08s^3 + 0.6s^2 + 11s + 50 = 0$$

$$s = \begin{bmatrix} -1.2500 + 11.1102i \\ -1.2500 - 11.1102i \\ -5.0000 \end{bmatrix}$$



D-rastavljanje

Primjer 3



Primjer 6.9 Potrebno je odrediti utjecaj parametara K i τ na stabilnost sustava iz prethodnog primjera za $T_1 = 0,4[s]$ i $T_2 = 0,1[s]$. Karakteristična jednadžba zatvorenog sustava je:

$$T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0$$

odnosno:

$$0,4s^3 + 0,5s^2 + (1 + K\tau)s + K = 0 \quad (6.42)$$

Uvrštenjem u (6.42) $K\tau = \alpha$ i $K = \beta$, sustav jednadžbi (6.26) poprima oblik:

$$\begin{aligned} X(\omega, \alpha, \beta) &= -0,5\omega^2 + \beta \\ Y(\omega, \alpha, \beta) &= -0,04\omega^3 + \omega + \alpha \end{aligned} \quad (6.43)$$

Iz (6.43) proizlazi:

$$\beta = 0,5\omega^2$$

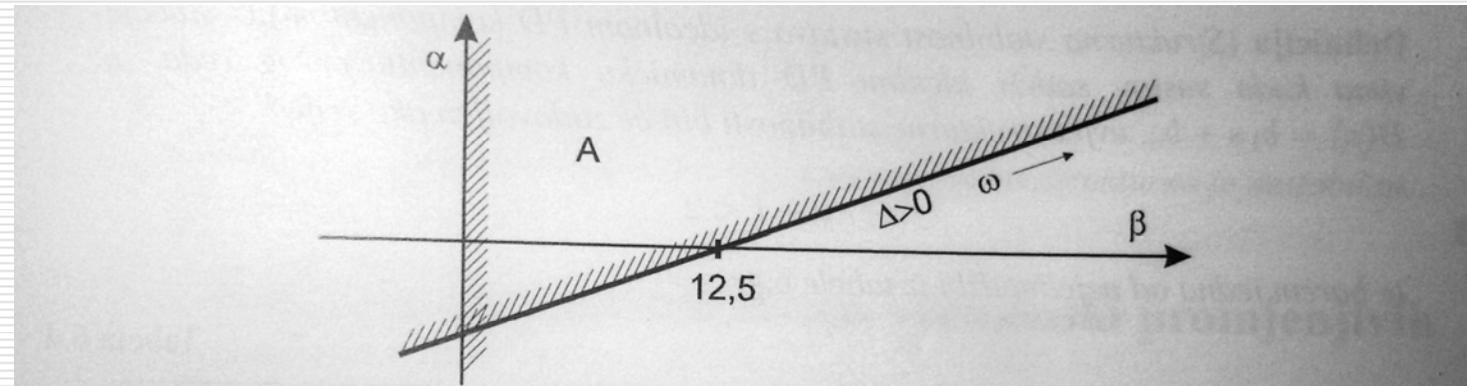
$$\alpha = -1 + 0,4\omega^2$$

$$\Delta = \omega$$

D-rastavljanje

Primjer 3

ω	0	$\sqrt{\frac{1}{0.04}}$	6	7	8	9	10	11	12	14	$\pm\infty$
α	-1	0	0.4	0.96	1.6	2.24	3	3.84	4.76	6.84	$+\infty$
β	0	12.5	18	24.5	32	40.5	50	60.5	72	98	$+\infty$



Slika 6.22: Krivulja D-rastavljanja

Iz primjene Hurwitzova kriterija za $\beta = 20$ i $\alpha = 2$ proizlazi da je pretendentno područje A stabilno područje. Budući da je $\alpha = K\tau$ pozitivna veličina, područje stabilnosti je dio područja A, koji se nalazi u prvom kvadrantu.



Robusna stabilnost

- Opis dinamičkog sustava
 - Nominalni matematički model
 - Neizvjesnost
 - Matematički model točno ne opisuje sustav
 - Model sustava se mijenja s vremenom
 - Robusni regulator
 - Regulator koji interno stabilizira svaki model u familiji
 - konačan broj specifičnih modela sustava
 - nominalni model sustava i opis neizvjesnosti u modelu
 - strukturni model sustava i opis neizvjesnosti u iznosu parametara modela

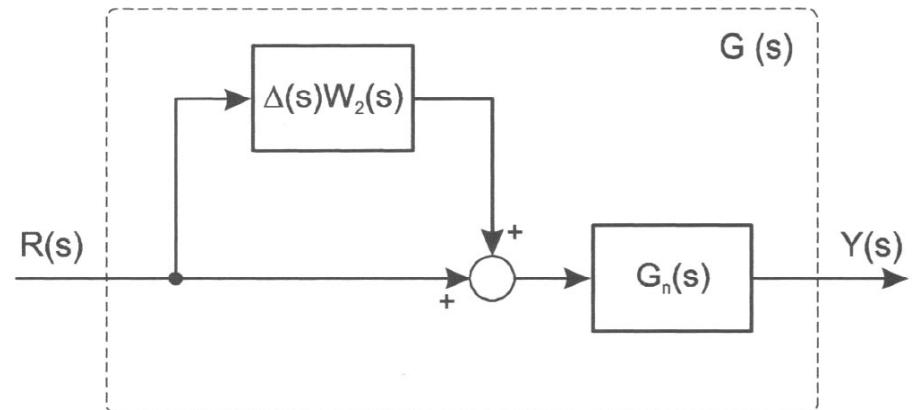
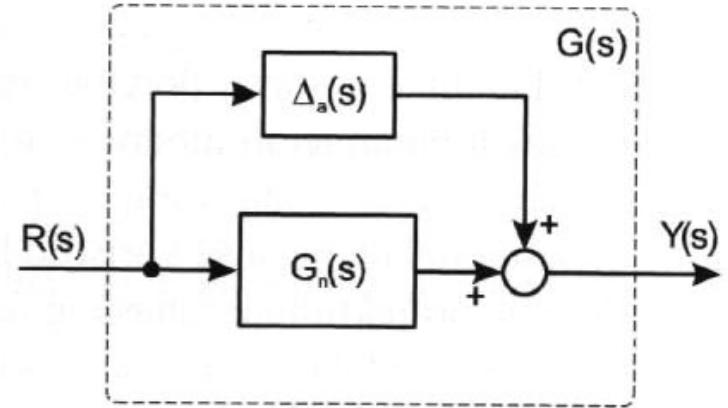


Neizvjesnost

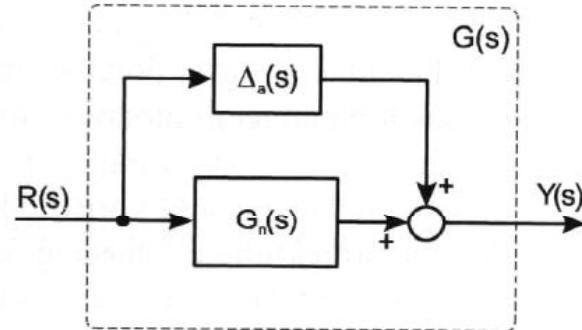
- Odstupanje nominalnog modela od stvarnog modela porcesa
- Vrste
 - Strukturirana neizvjesnost
 - neizvjesnost se može modelirati
 - poznaju se granice promjene neizvjesnih parametara
 - (*polova, nula, pojačanja, koeficijenata polinoma prijenosne funkcije*)
 - Nestrukturirana neizvjesnost
 - Manje znanje o procesu
 - Npr. zna se da frekvencijska karakteristika leži unutar nekih granica

Nestrukturirana neizvjesnost

- Vrste opisa nestruktuirane neizvjesnosti
 - Aditivna neizvjesnost
 - model neizvjesnosti dodaje se nominalnom modelu
 - Multiplikativna neizvjesnost
 - Model neizvjesnosti u seriji s nominalnim modelom



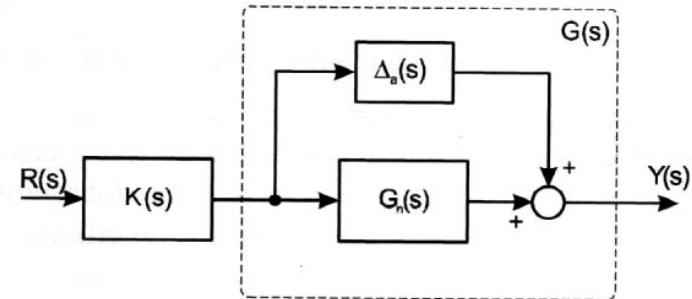
Aditivna nestrukturirana neizvjesnost



$$\Delta_a(s) = G(s) - G_n(s)$$

$G_n(s)$ – nominalni model sustava
 $G(s)$ – potpuni model realnog sustava
 Δ_a – model aditivne neizvjesnosti

Dodavanje serijskog kompenzatora



Problem što pogreška u $G_n(s)$ ne predstavlja pogrešku otvorenog sustava
 $G_o(s) = K(s)G(s)$

$$[G_n(s) + \Delta_a(s)]K(s) \neq G_n(s)K(s) + \Delta_a(s)$$

Teško je odrediti učinak aditivne perturbacije $\Delta_a(s)$ na model $G_n(s)K(s)$
 Taj problem rješiv multiplikativnom perturbacijom



Multiplikativna nestrukturirana neizvjesnost



- Svojstva
 - mala na niskim frekvencijama
 - (dobro poznat nominalni model)
 - velika na visokim frekvenicjama
 - slabo poznat nominalni model
- Oblik opisa neizvjesnosti u relativnom odnosno multiplikativnom obliku

$$G(s) = [1 + \Delta_m(s)] G_n(s)$$

Prikaz nestrukturirane neizvjesnosti relativnom pogreškom u odnosu na nominalni model

$$\Delta_m(s) = \left[\frac{G(s)}{G_n(s)} - 1 \right]$$

Prikaz nestrukturirane neizvjesnosti relativnom pogreškom u odnosu na stvarni model procesa

$$\Delta_M(s) = \left[\frac{G_n(s)}{G(s)} - 1 \right]$$

Izražavanje relativne pogreke u odnosu na nominalni model pomoću stabilne nepromjenjive prijenosne funkcije (*Težinske funkcije*)

$$\Delta_m(s) = \Delta(s) W_2(s)$$

$W_2(s)$ - stabilna nepromjenjiva prijenosna funkcija (*Težina neizvjesnosti*)

$\Delta(s)$ – promjenjiva stabilna funkcija prijenosa sa svojstvom

$$\|\Delta\|_{\infty} < 1$$



Objašnjenje ∞ -norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{1/p} \text{ resp. } \|f\|_{p,X} = \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

Two norms $\|\cdot\|_\alpha$ and $\|\cdot\|_\beta$ on a vector space V are called *equivalent* if there exist positive real numbers C and D such that

$$C\|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq D\|x\|_\alpha$$

for all x in V . For instance, on \mathbb{C}^n :

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty.$$

Maximum norm (special case of: infinity norm, uniform norm, or supremum norm)

Main article: [Maximum norm](#)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

The set of vectors whose infinity norm is a given constant, c , forms the surface of a [hypercube](#) with edge length $2c$.

H₂ Norm

The H₂ norm of a stable continuous system with transfer function $H(s)$, is the root-mean-square of its impulse response, or equivalently

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Trace}(H(j\omega)^H H(j\omega)) d\omega}$$

This norm measures the steady-state covariance (or power) of the output response

$y = Hw$ to unit white noise inputs w .

$$\|H\|_2^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} E\{y(t)^T y(t)\}, \quad E(w(t)w(\tau)^T) = \delta(t - \tau)I$$

Infinity Norm

The infinity norm is the peak gain of the frequency response, that is,

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega} |H(j\omega)| \quad (\text{SISO case})$$

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{\max}(H(j\omega)) \quad (\text{MIMO case})$$

where $\sigma_{\max}(\cdot)$ denotes the largest singular value of a matrix.



Objašnjenje ∞ -norme

H2 Norm

The H_2 norm of a stable continuous system with transfer function $H(s)$, is the root-mean-square of its impulse response, or equivalently

$$\|H\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Trace}(H(j\omega)^H H(j\omega)) d\omega}$$

This norm measures the steady-state covariance (or power) of the output response

$y = Hw$ to unit white noise inputs w .

$$\|H\|_2^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} E\{y(t)^T y(t)\}, \quad E(w(t)w(\tau)^T) = \delta(t-\tau)I$$

Infinity Norm

The infinity norm is the peak gain of the frequency response, that is,

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega} |H(j\omega)| \quad (\text{SISO case})$$

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega} \sigma_{\max}(H(j\omega)) \quad (\text{MIMO case})$$

where $\sigma_{\max}(\cdot)$ denotes the largest singular value of a matrix.



Multiplikativna nestrukturirana neizvjesnost

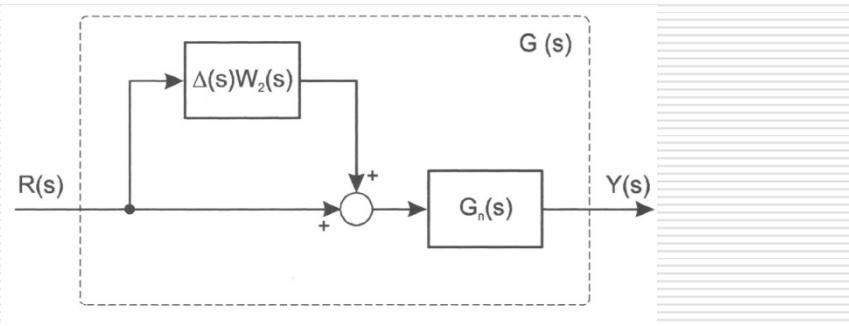


$$G(s) = [1 + \Delta_m(s)] G_n(s)$$

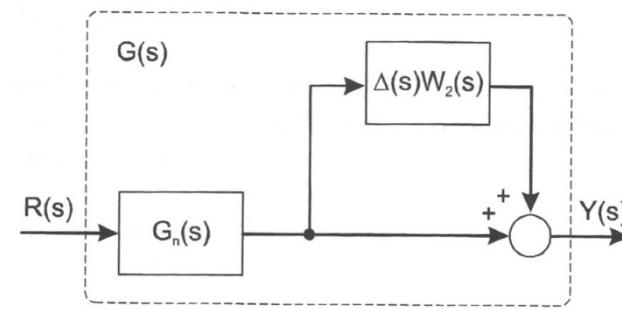
$$\Delta_m(s) = \left[\frac{G(s)}{G_n(s)} - 1 \right]$$

$$\Delta_m(s) = \Delta(s) W_2(s)$$

Multiplikativna neizvjesnost na ulazu u proces



Multiplikativna neizvjesnost na izlazu iz procesa





Nestrukturirana neizvjesnost

- Prepostavka
 - nestabilni polovi nominalnog modela se nisu pokratili
 - isti broj polova u desnoj poluravnini kod nominalnog modela i pravog procesa
 - promjenjiva stabilna funkcija $\Delta(s)$ je dozvoljena
- Kvantifikacija pogreške modeliranja
 - pogreške nije moguće precizno matematički opisati
 - kvantifikacija pomoću granica odnosno težina neizvjesnosti
 - svojstva
 - nisu dane preko parametara
 - nestrukturirane pogreške modeliranja → nestrukturirane neizvjesnosti
 - uzimanje u obzir visokofrekvenčkih fenomena nemodeliranih u nominalnom modelu
 - neizvjesnost parametara
 - opis preko nestrukturirane neizvjesnosti – konzervativni odgovori



Opis nestrukturirane neizvjesnosti

Neizvjesnost za aditivni oblik pogreške

$$|\Delta_a(j\omega)| < |W(j\omega)| \quad \forall \omega$$

Apsolutna vrijednost neizvjesnosti mora biti manja od težinske funkcije

Uz prijenosnu funkciju modela tipa niskoporpusnog filtera
uz određenje gornje granice norme na niskim frekvencijama

$$\|G(j\omega)\|_{\infty} < \|W(j\omega)\|_{\infty} \quad \forall \omega$$

$$\|W^{-1}(j\omega)G(j\omega)\|_{\infty} < 1 \quad \forall \omega$$

Uz

$$\Delta(s)W_2(s) = \frac{G(s)}{G_n(s)} - 1$$

U tom slučaju se može

$$\Delta(s)W_2(s)$$

interpretirati kao normirana promjena realnog procesa od jedinice.

Uz

$$\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$$

vrijedi

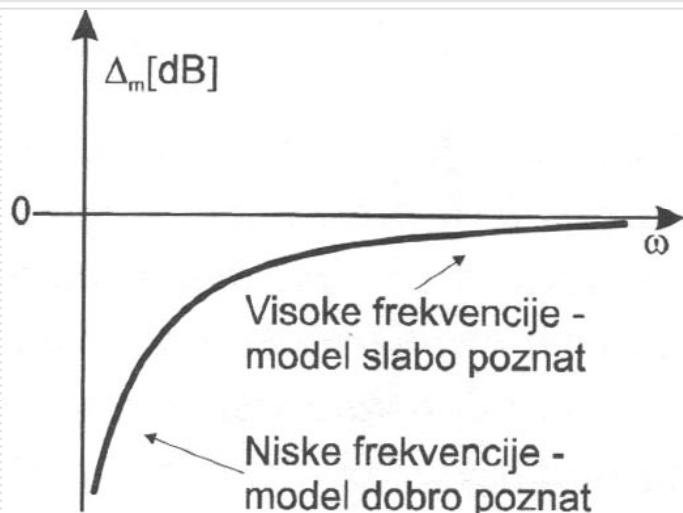
$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_n(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)| \quad \forall \omega$$

Težine neizvjesnosti $w(j\omega)$ i $w_2(j\omega)$ određuju granicu neizvjesnosti

Opis nestrukturirane neizvjesnosti

$W_2(j\omega)$ rastuća funkcija s frekvencijom

Tipičan oblik funkcije $\Delta_m(s) = \Delta(s)W_2(s)$

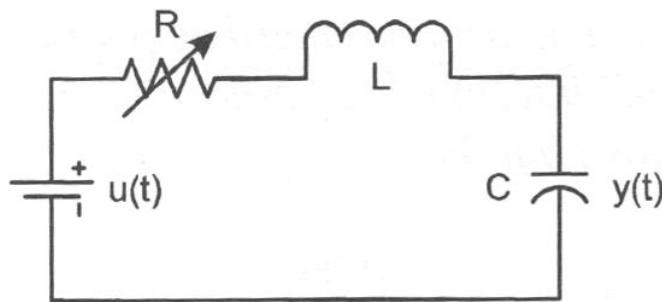


Uz poznati $G_n(s)$ i $W(s)$ ili $W_2(s)$
za projektiranje robusnog regulatora treba koristiti par $\{G_n(s) \text{ i } W(s)\}$
Neizvjesni parametri na ovaj način se pretvaraju u neizvjesnu dinamiku

Primjer

Idealizirani serijski RLC krug s pobudom pomoću naponskog izvora,
te naponom na kondenzatoru kao odzivom
Neizvjesni parametri R,L,C prema nominalnim parametrima

*Neizvjesnost parametara
moguće je prikazati kao
neizvjesnost dinamike*



Prijenosna funkcija kruga

Nominalni model

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

$$G_n(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{L_n C_n s^2 + R_n C_n s + 1}$$

R_n, L_n, C_n su nominalne vrijednosti parametara R, L, C

Neizvjesnost poznavanja parametara

=

neizvjesnost koeficijenata funkcije prijenosa pravog procesa



Primjer

Neizvjestan samo otpor i L i C konstantni i poznati.
Frekvencija neprigušenih oscilacija poznata i konstantna

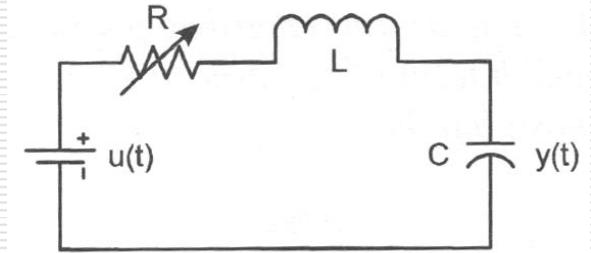
$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Faktor prigušenja se mijenja

$$2\zeta\omega_n = \frac{R}{L}$$

Funkcija prijenosa RLC kruga uz
neizvjestan faktor prigušenja

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$



Nominalni model uz
 $\omega_n = 1\text{s}^{-1}$, $\zeta_n = 0.2$
ima oblik:

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta_n s + 1}$$

Model pravog RLC kruga uz
faktor neizvjesnosti
 $\zeta_n \in [0.1, 0.2]$
ima oblik:

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}; \quad \zeta \in [0.1, 0.2]$$



Primjer

Težina neizvjesnosti $W(s)$
može se odrediti iz grafičkog prikaza

$$|\Delta_a(j\omega)| = |G(j\omega) - G_n(j\omega)|$$

Uz faktor prigušenja u granicama

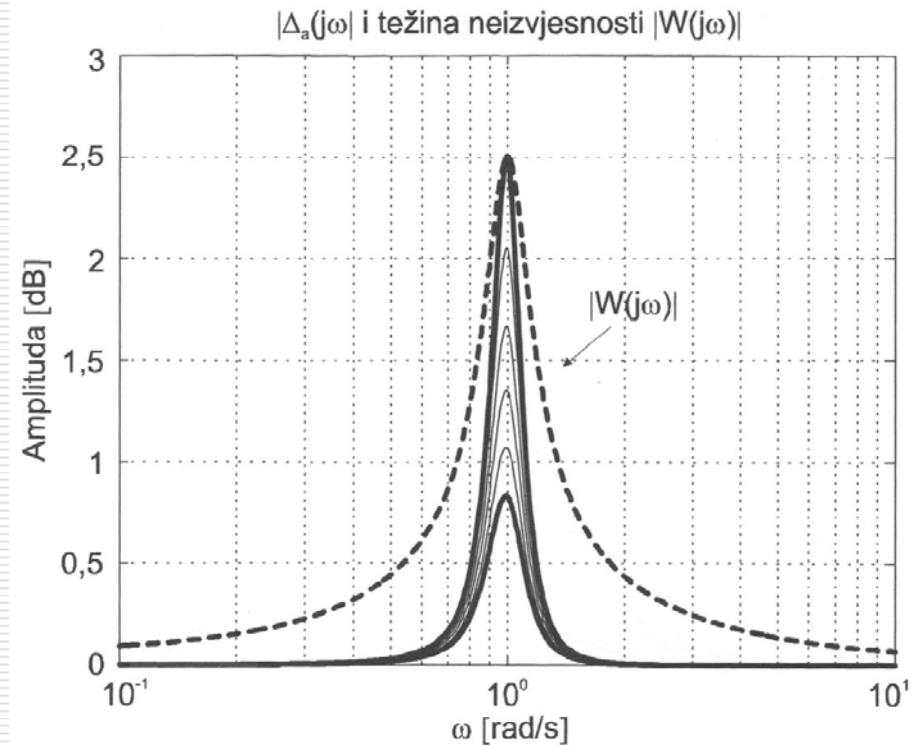
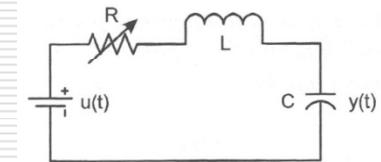
$$\zeta \in [0.1, 0.2]$$

Težina neizvjesnosti $W(s)$ treba
zadovoljavati nejednadžbu

$$|W(j\omega)| > |\Delta_a(j\omega)| \quad \forall G$$

Slika prikazuje različite neizvjesnosti
 $|\Delta_a(j\omega)|$ za različite faktore prigušenja
u rasponu $\zeta \in [0.1, 0.2]$ i $\omega \in [0.1, 10]$

Moguće je odrediti neizvjesnost W
čija je apsolutna vrijednost veća od svih
stvarnih apsolutnih vrijednosti neizvjesnosti





Primjer

Moguća neizvjesnost sa svojstvom

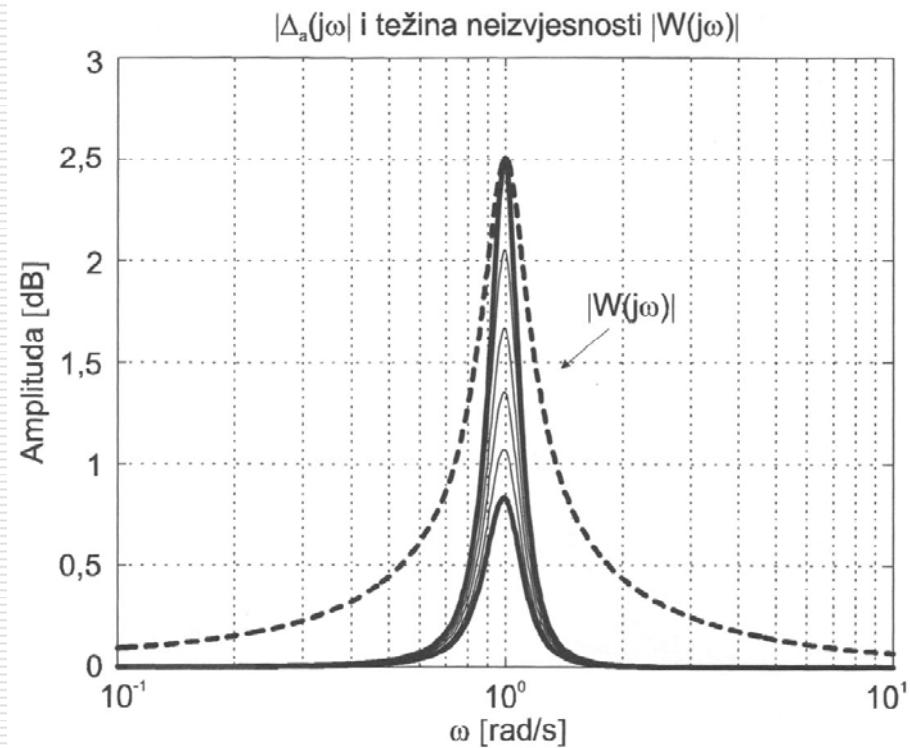
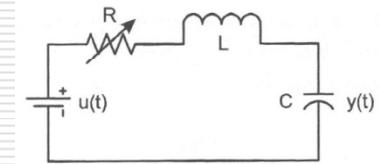
$$|W(j\omega)| > |G(j\omega) - G_n(j\omega)| \quad \forall G$$

$$\text{Uz } \zeta \in [0.1, 0.2] \quad \omega \in [0.1, 10]$$

može biti opisana prijenosnom funkcijom

$$W(s) = \frac{0.06(1+80s)}{1.7s^2 + 0.40s + 1.7}$$

Predložena težinska neizvjesnost
W(s) je ostvariva zbog
- konačnog reda
- opisa kauzalnom racionalnom funkcijom



Primjer 2

Neizvjesno vrijeme kašnjenja

Stvarni proces opisan je modelom uz neodređenost vremena kašnjenja

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s+1}; \quad \tau \in [0 \quad 0.2]$$

Nominalni model određen je uz zanemarenje vremena kašnjenja u obliku

$$G_n(s) = \frac{1}{s+1};$$

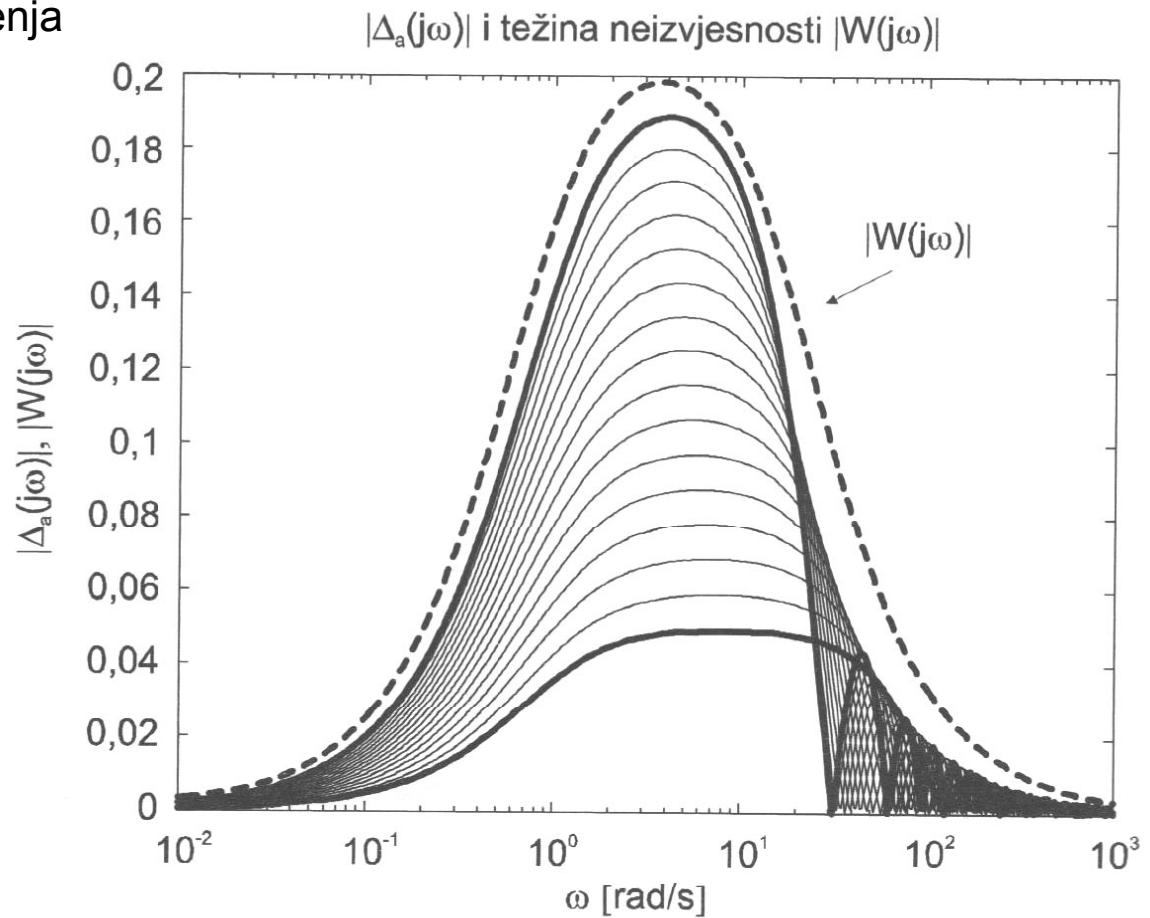
Neizvjesnost je određena razlikom stvarnog i nominalnog modela

$$|G(s) - G_n(s)|$$

Krivulje neizvjesnosti

$$|\Delta_a(j\omega)| = |G(j\omega) - G_n(j\omega)|$$

za različita vremena kašnjenja u intervalu $\tau \in [0 \quad 0.2]$ dane su slikom





Primjer 2

Neizvjesno vrijeme kašnjenja



Za iscrtane krivulje neizvjesnosti

$$|\Delta_a(j\omega)| = |G(j\omega) - G_n(j\omega)|$$

Za proces s neizvjesnim vremenom kašnjenja

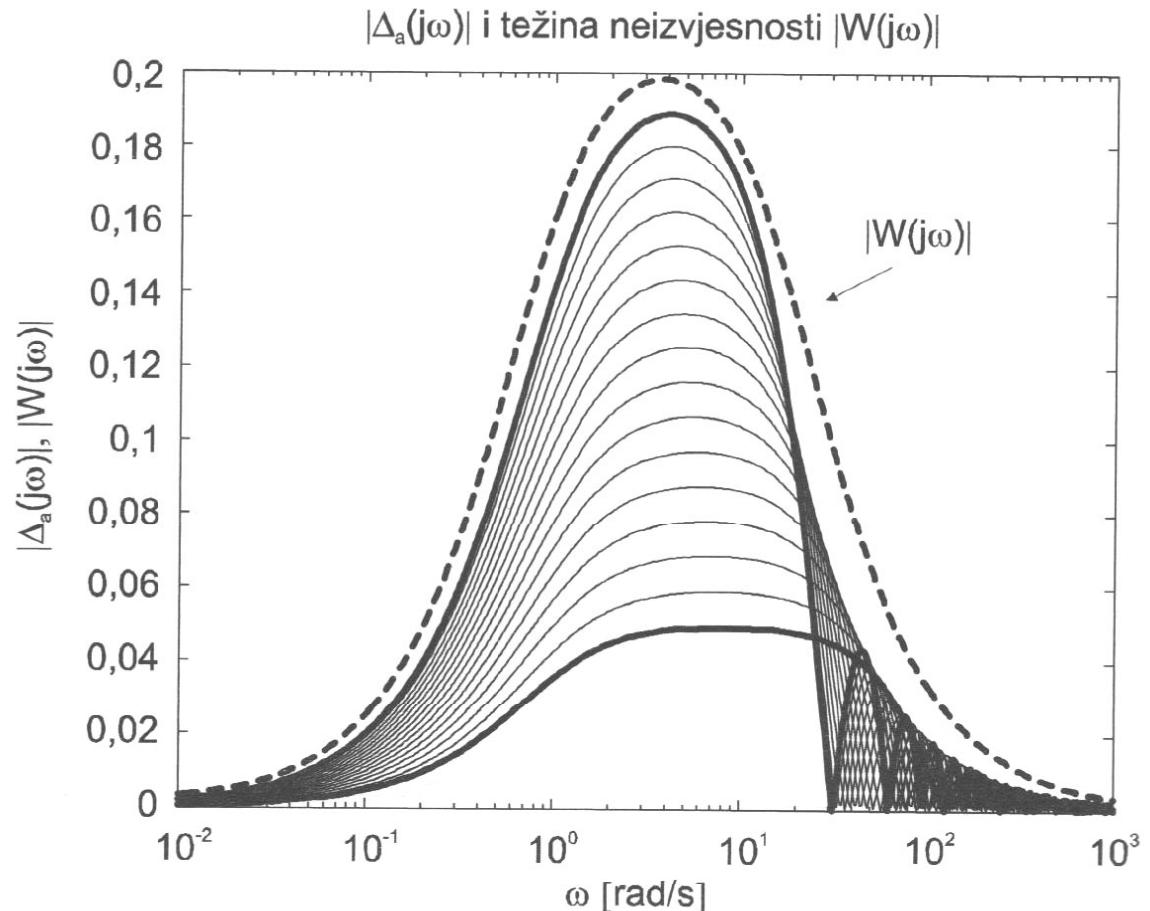
$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s+1}; \quad \tau \in [0 \quad 0.2]$$

određena je težina neizvjesnosti koja zadovoljava uvjet

$$|W(j\omega)| > |\Delta_a(j\omega)|$$

oblika

$$W(s) = \frac{0.0025(1+100s)}{(1+1.2s)(1+0.06s)};$$





Primjer 3

Neizvjesno vrijeme kašnjenja – multiplikativna neizvjesnost



Stvarni proces opisan je modelom uz neodređenost vremena kašnjenja

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{s^2}; \quad \tau \in [0.03 \quad 0.15]$$

Nominalni model određen je uz zanemarenje vremena kašnjenja u obliku

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2};$$

Ovo kašnjenje moguće je tretirati kao multiplikativnu perturbaciju (nesigurnost) nominalnog modela uz ugrađivanje $G(s)$ u familiju:

$$\{(1 + \Delta W_2) G_n : \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$$

Da bi se to ostvarilo, nužno je da težinska funkcija W_2 zadovoljava nejednadžbu

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_n(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)|; \quad \forall \omega, \tau$$

Uvrštenjem funkcija nominalnog i stavnog modela, uvjet poprima oblik

$$|e^{-\tau j\omega} - 1| \leq |W_2(j\omega)|; \quad \forall \omega, \tau$$

Jedna od mnogo mogućih težina neizvjesnosti koja zadovoljava nejednadžbu je

$$W_2(s) = \frac{0.21s}{0.095s + 0.9}$$

Primjer 3

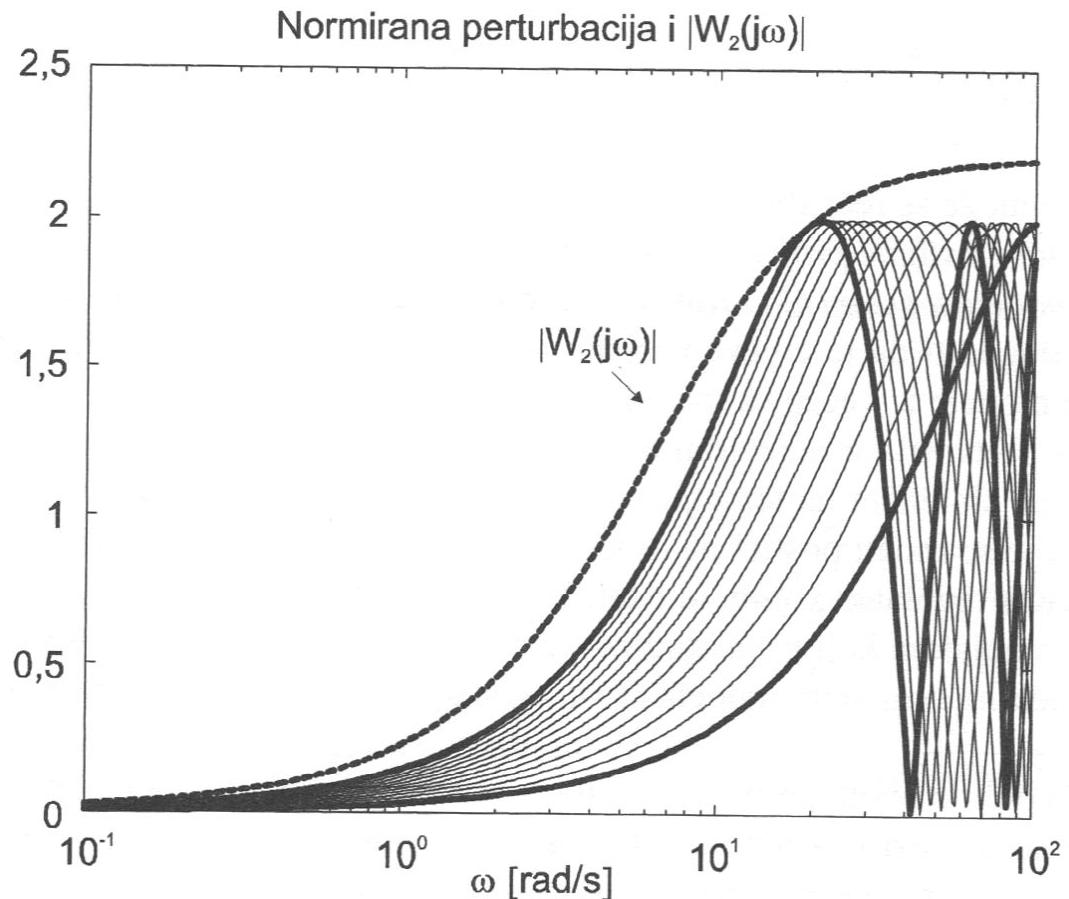
Prikaz normalizirane perturbacije

$$\left| \frac{G(j\omega)}{G_h(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)|; \quad \forall \omega, \tau$$

i težine neizvjesnosti

$$W_2(s) = \frac{0.21s}{0.095s + 0.9}$$

Iz slike se vidi da težina prekonzervativno aproksimira normaliziranu perturbaciju za zadanu neizvjesnost kašnjenja





Svojstva modela strukturne neizvjesnosti



- Perturbacijski model (multiplikativni ili aditivni)
 - Gruba aproksimacija skupa neizvjesnosti.
 - Stvarni skup neizvjesnosti je podskup aproksimiranog skupa
- Ako regulator zadovoljava projektne zahtjeve za aproksimirani skup
 - regulator zadovoljava i sve modele u skupu neizvjesnosti
 - Aproksimirani skup je veći od stvarnog skupa
- Projektiranje regulatora
 - teže postići tražene zahtjeve (performanse zatvorenog kruga) za modele iz većeg skupa
 - Regulator projektiran za modele iz većeg skupa
 - konzervativan je za modele iz manjeg skupa
- Neizvjsnost
 - aditivna → absolutna pogreška
 - multiplikativna → relativna pogreška



Primjer 5

Neizvjesnost u povratnoj vezi



Familija procesa s neizvjesnim parametrom ζ određena je prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\zeta s + 1}; \quad \zeta \in [0.1 \quad 0.2]$$

Promjenjivi parametar može se izraziti kao

$$\zeta = 0.15 + 0.05\Delta, \quad \text{uz} \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

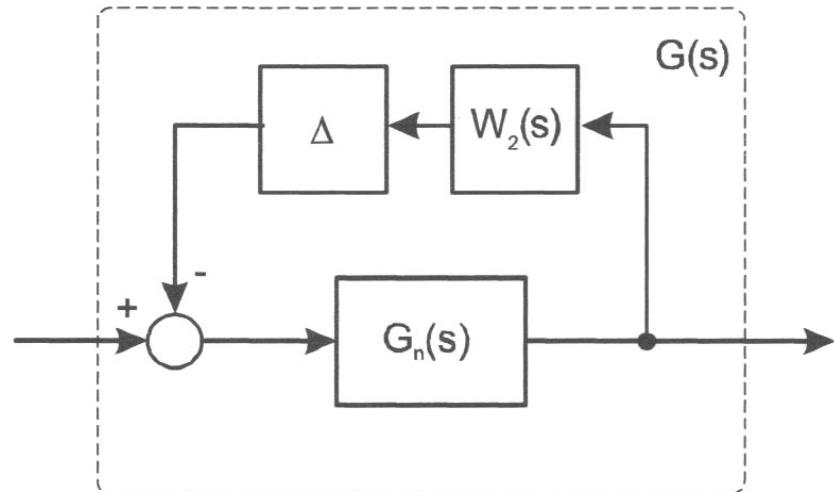
Familija procesa može se izraziti prijenosnom funkcijom

$$G(s) = \frac{G_n(s)}{1 + \Delta W_2(s)G_n(s)}; \quad -1 \leq \Delta \leq 1$$

uz

$$G_n(s) = \frac{1}{s^2 + 0.3s + 1}, \quad \text{uz} \quad W_2(s) = 0.05s$$

Blok shema definiranog prikaza familije modela neizvjesnosti definirana je kao sustav s povratnom vezom





Najčešće korišteni modeli neizvjesnosti



- Multiplikativni model perturbacije

$$G(s) = [1 + \Delta(s)W_2(s)]G_n(s)$$

- aditivni model perturbacije

$$\begin{aligned} G(s) &= [G_n(s) + \Delta_G(s)] = \\ &= [G_n(s) + \Delta(s)W_2(s)] \end{aligned}$$

- model perturbacije kao sustav s povratnom vezom

$$G(s) = \frac{G_n(s)}{1 + \Delta W_2(s)G_n(s)}$$

- model perturbacije

$$G(s) = \frac{G_n(s)}{1 + \Delta W_2(s)}$$



Analiza robusne stabilnosti

Teorem malog pojačanja



- Robusna stabilnost podrazumijeva
 - regulator stabilizira sve matematičke modele procesa iz skupa određenog neizvjesnošću
 - robusna stabilnost
 - postiže se željeno ponašanje zatvorenog sustava za sve matematičke modele procesa
 - robusnost performansi
 - Izvođenje uvjeta stabilnosti (jedan od kriterija)
 - Nyquistov kriterij
 - Kriterij Mihajlova (varijacija Nyquistova kriterija)
 - Teorem malog pojačanja

Teorem malog pojačanja

□ Teorem

- Zatvoren krug procesa sa stabilnim dijelovima $K(s)$, $G_n(s)$, $H(s)$
- bit će stabilan ako vrijedi

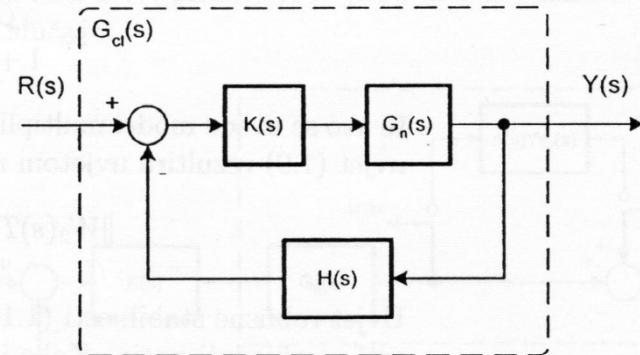
$$G_0(s) = |K(s)G_n(s)H(s)| < 1$$

Budući da je

$$|K(s)G_n(s)H(s)| \leq |K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)|$$

Stabilnost zatvorenog kruga zagaranuirana je ako vrijedi

$$|K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)| < 1$$



Teorem malog pojačanja određuje da je za stabilnost zatvorenog kruga nužno da pojačanje otvorenog kruga bude malo



Teorem malog pojačanja

- Teorem vrijedi za linearne i nelinearne sustave
- Garantira totalnu stabilnost
 - Sustav će biti totalno stabilan (*sve prijenosne funkcije zatvorenog kruga su stabilne*) ako
 - su svi signali u sustavu ograničeni
 - su sve pobude na sustav ograničene
 - Teorem daje dovoljne uvjete za stabilnost
 - moguće je imati stabilan sustav koji ne zadovoljava teorem malog pojačanja



Teorem malog pojačanja

dovoljan uvjet stabilnosti



Moguće da uvjet stabilnosti teorema malog pojačanja

$$|K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)| < 1$$

ne bude zadovoljen i da sustav bude stabilan

Uz $H(s)=1$ bit će

$$|K(s)G_n(s)| < 1$$

Ako stabilni kompenzator $K(s)$ i stabilni nominalni proces ($\Delta=0$) zadovoljavaju gornji uvjet stabilnosti \rightarrow sustav je stabilan

Uz $G_0(s)$ stabilan i $\|G_0(s)\|_\infty < 1$

i izraz $(1+G_0(s))^{-1}$ je stabilan

Moguće je definirati komplementarnu funkciju osjetljivosti oblika

$$\begin{aligned} T(s) &\triangleq 1 - S(s) = 1 - \frac{1}{1 + G_0(s)} = \\ &= \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{K(s)G_n(s)}{1 + K(s)G_n(s)} \end{aligned}$$

Uvođenjem uvjeta množstvene neizvjesnosti u obliku

$$G(s) = [1 + \Delta_m(s)]G_n(s)$$

Uvjet stabilnosti $|K(s)G_n(s)| \cdot |H(s)| < 1$
postaje uvjet robusne stabilnosti

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty < 1$$



Teorem malog pojačanja

dovoljan uvjet stabilnosti



Iz izraza $T(s) \triangleq 1 - S(s) = 1 - \frac{1}{1 + G_0(s)}$

je vidljivo da je $S(s) + T(s) = 1$

Uz $S(s) \triangleq \frac{1}{1 + G_0(s)}$

S je osjetljivost sustava

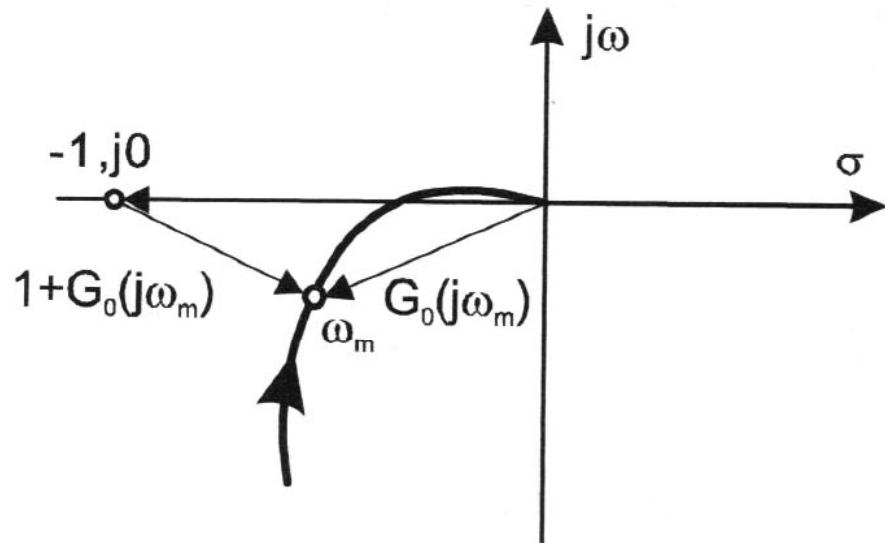
Ako je pojačanje otvorenog kruga veliko $|G_0| \gg 1$ Komplementarna osjetljivost će biti $|T| \approx 1$

Osjetljivost mora biti $|S| \ll 1$

Mala osjetljivost znači da sustav ima dobra svojstva eliminiranja poremećaja i praćenja postavne veličine

Nužne informacije o relativnoj stabilnosti i osjetljivosti sustava mogu se dobiti iz Nyquistove karakteristike otvorenog kruga

Najmanja udaljenost od kritične točke $(-1, j0)$ do Nyquistove karakteristike (*na frekvenciji* ω_m) jednaka je $1/\|S\|_\infty$





Teorem malog pojačanja

dovoljan uvjet stabilnosti

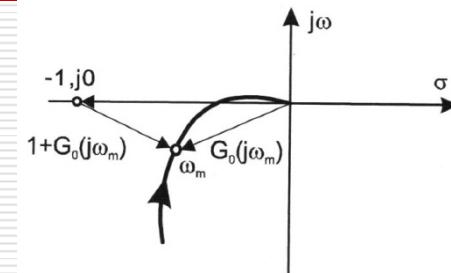
Najmanja udaljenost točke $(-1, j0)$ i
Nyquistove krivulje je

$$\inf_{\omega} |-1 - L(j\omega)| = \inf_{\omega} |1 + L(j\omega)| = \\ = \left[\sup_{\omega} \frac{1}{|1 + L(j\omega)|} \right]^{-1}$$

L je povratna razlika ili pojačanje petlje
 $L(s) = -G_0(s)$

Osjetljivost izražena
pomoću povratne
razlike

$$S(s) \triangleq \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 - L(s)} = 1 - T(s)$$



Uvjet robusne stabilnosti $\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1$

poprima oblik

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{W_2(j\omega)G_0(j\omega)}{1 + G_0(j\omega)} \right| < 1 \quad \forall \omega$$

Odnosno

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow |W_2(j\omega)G_0(j\omega)| < |1 + G_0(j\omega)| \quad \forall \omega$$



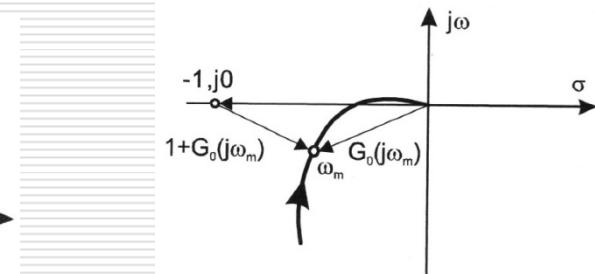
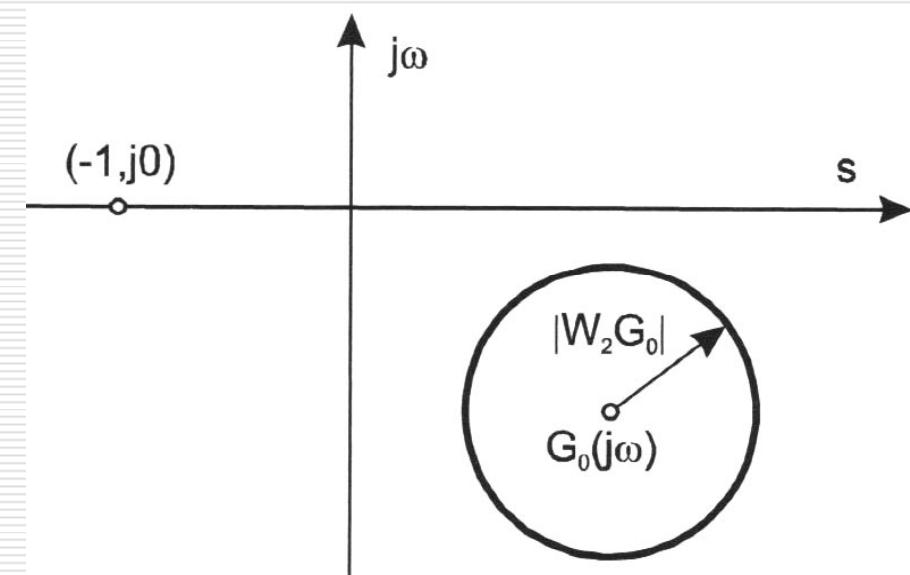
Teorem malog pojačanja dovoljan) uvjet stabilnosti



Uvjet robusne stabilnosti

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \Leftrightarrow |W_2(j\omega)G_0(j\omega)| < |1 + G_0(j\omega)| \quad \forall \omega$$

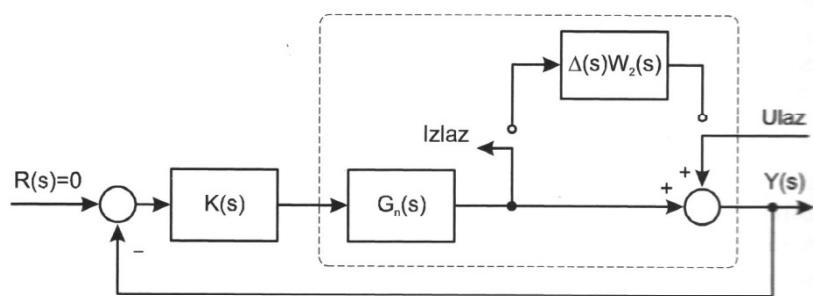
traži da za svaku frekvenciju ω , kritična točka $(-1, j0)$ bude izvan kružnice sa središtem $G_0(j\omega)$ i radijusom $|W_2(j\omega) G_0(j\omega)|$



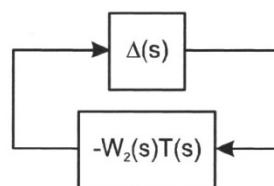
Sustav je globalno stabilan ako kritična točka $(-1, j0)$ ne uđe niti u jednu kružnicu sa središtem na $G_0(j\omega)$ i radijusom $W_2(j\omega) G_0(j\omega)$.

Robusna stabilnost

Zatvoren sustav s multiplikativnom neizvjesnošću na izlazu



Zatvoren sustav sa stajališta neizvjesnosti ima oblik



Maksimalno pojačanje otvorenog kruga na slici iznosi:

$$\|-\Delta(s)W_2(s)T(s)\|_{\infty}$$

Maksimalno pojačanje otvorenog kruga je manje od 1

$$\|-\Delta(s)W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1$$

ako i samo ako vrijedi uvjet teorema malog pojačanja

$$\|W_2(s)T(s)\|_{\infty} < 1$$

Prema tome iz uvjeta stabilnosti po teoremu malog pojačanja,
za robusnu stabilnost mora biti

$$|\Delta_m(s)| = |\Delta(s)W_2(s)| < \frac{1}{|T(s)|}$$



Robusna stabilnost

Uvjet robusne stabilnosti

$$|\Delta_m(s)| = |\Delta(s)W_2(s)| < \frac{1}{|T(s)|}$$

može se umjesto u Laplaceovom izraziti u frekvencijskom području

$$|\Delta_m(j\omega)| = |\Delta(j\omega)W_2(j\omega)| < \frac{1}{|T(j\omega)|}, \quad \forall \omega$$

Ako je multiplikativna pogreška modeliranja (neizvjesnost)
ograničena i stabilna

$$|\Delta(s)| < W_2(s)$$

Zatvoreni krug će biti **robusno stabilan**
ako je zadovoljeno

$$|T(s)| < \frac{1}{|W_2(s)|}, \quad \text{odnosno} \quad |W_2(s)T(s)| < 1$$



Robusna stabilnost

Multiplikativno osiguranje stabilnosti



Određivanje najmanje neizvjesnosti koja će destabilizirati sustav.

Multiplikativna neizvjesnost mora biti manja od $1/T \rightarrow$ mora biti manja od minimalnog iznosa $1/T$

Minimizacija desne strane jednadžbe uvjeta robusne stabilnosti

$$|\Delta_m(s)| = |\Delta(s) W_2(s)| < \frac{1}{|T(s)|}$$

znači da treba MAKSIMIZIRATI $|T(s)|$

Ako sustav ima rezonanciju

(npr. sustav 2. reda sa $\zeta < 0.7$)

tad će maksimalni iznos $|T(j\omega)|$ za $0 < \omega < \infty$ biti na rezonantnoj frekvenciji ω_n .

Najmanji iznos destabilizirajuće neizvjesnosti naziva se **MULTIPLIKATIVNO OSIGURANJE STABILNOSTI** dan je sa

$$\text{MSM} \triangleq \frac{1}{M_m}, \quad \text{gdje je} \quad M_m = \sup_{\omega} |T(j\omega)|$$

sup \rightarrow supremum funkcije (*najmanja gornja granica*)



Robusna stabilnost

Multiplikativno osiguranje stabilnosti

$$\text{MSM} \triangleq \frac{1}{M_m}, \quad \text{gdje je } M_m = \sup_{\omega} |T(j\omega)|$$

$\sup \rightarrow$ supremum funkcije (najmanja gornja granica)

Supremum funkcije je najveća vrijednost funkcije iako je funkcija ne postigne.

Primjer.

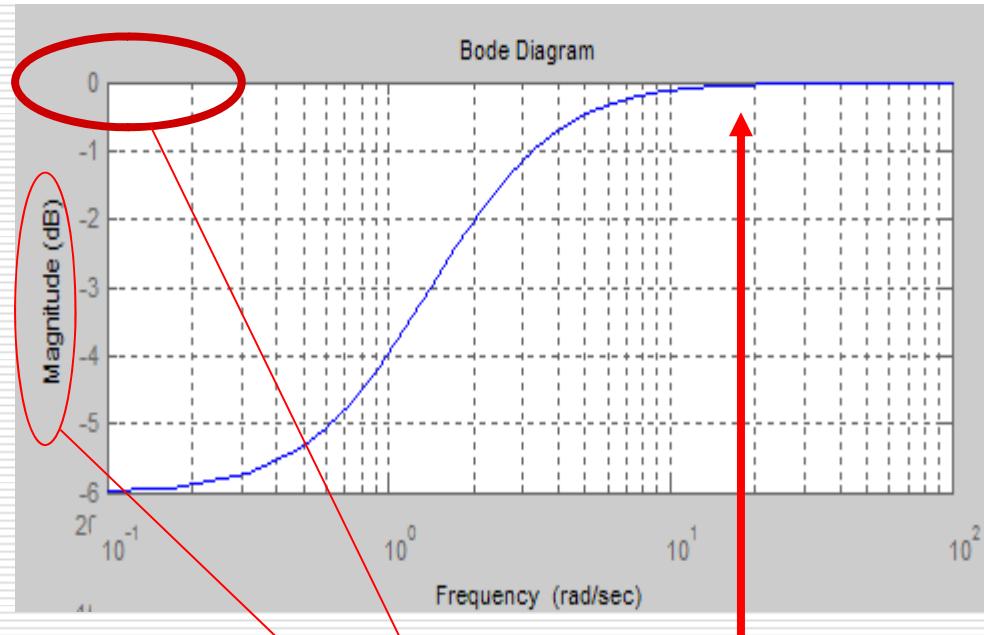
Funkcija $T(s) = \frac{s+1}{s+2}$ nema rezonantni

maksimum nego se asimptotski približava vrijednosti 1 kako $\omega \rightarrow \infty$

$$\sup_{\omega} \left(\frac{|j\omega + 1|}{|j\omega + 2|} \right) = 1$$

Sustav je **robusno stabilan** u odnosu na **nemodeliranu multiplikativnu neizvjesnost** ako je njezina amplitudna frekvencijska karakteristika manja od **MSM** tj.

$$(|\Delta_m|) < \text{MSM}$$





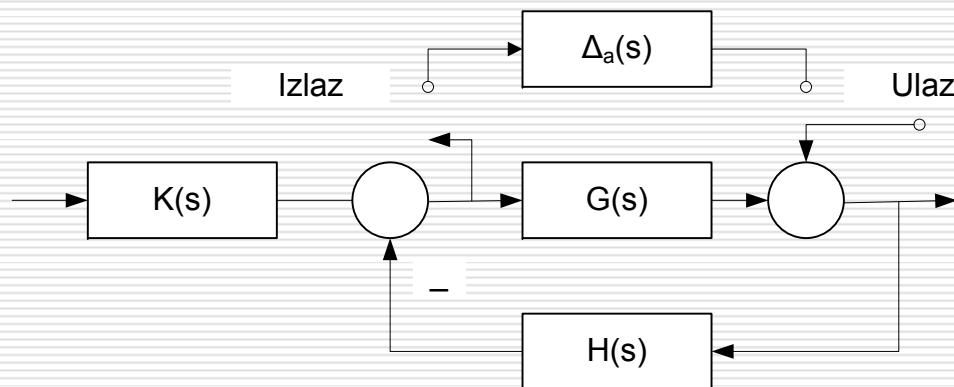
Robusna stabilnost

Aditivno osiguranje stabilnosti



Aditivna neizvjesnost

Sa stajališta neizvjesnosti proces ima oblik



Aditivna neizvjesnost vidi slijedeću prijenosnu funkciju procesa

$$\frac{-H(s)}{1+G(s)H(s)}$$

Zatvoreni krug će biti robusno stabilan ako vrijedi

$$|\Delta_a(s)| < \left| \frac{H(s)}{1+G(s)H(s)} \right|^{-1} = \frac{1}{|H(s)S(s)|}$$

gdje je $S(s) = \frac{1}{|1+G(s)H(s)|}$

Ako je neizvjesnost stabilna i ograničena

$$|\Delta_a(j\omega)| < |W(j\omega)|; \quad \forall \omega$$

zatvoreni sustav će biti robusno stabilan ako je:

$$|H(s)S(s)| < \frac{1}{W(s)};$$

odnosno

$$|W(s)H(s)S(s)| < 1$$

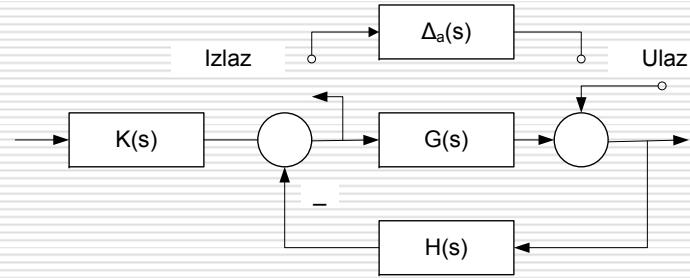


Robusna stabilnost

Aditivno osiguranje stabilnosti



Aditivna neizvjesnost



$$|H(s)S(s)| < \frac{1}{W(s)}; \quad \text{odnosno} \quad |W(s)H(s)S(s)| < 1$$

Aditivno osiguranje stabilnosti je:

$$\text{ASM} \triangleq \frac{1}{\sup_{\omega} |H(j\omega)S(j\omega)|}$$



Robusna stabilnost

Svojstva



- Usporedba robuse stabilnosti s amplitudnim i faznim osiguranjem
- Amplitudno i fazno osiguranje
 - mora biti zadovoljeno na srednjim frekvencijama ω_c, ω_{π}
 - Fazno osiguranje
 - dozvoljeno pojačanje do ruba stabilnosti
 - uvjet da ne dođe do promjena u fazi
 - mjera tolerancije faze bez promjene pojačanja
 - Amplitudno osiguranje
 - mjera tolerancije neizvjesnosti pojačanja bez promjeni faze
- MSM i ASM – općenitija mjera stabilnosti
 - (Naziv: pojačanje-faza osiguranje)
 - MSM omogućuje istovremenu promjenu pojačanja i faze u blizini frekvencija ω_c, ω_{π}
- Robusna stabilnost
 - mora biti zadovoljena na svim frekvencijama
- Svojstva
 - Multiplikativna neizvjesnost može biti **bilo koja stabilna funkcija prijenosa** uz uvjet da je njena amplituda **ispod granice MSM**
 - Teorem malog pojačanja
 - daje dovoljne uvjete stabilnosti (ne i nužne)
 - Postoje stabilni sustavi kod kojih teorem malog pojačanja nije zadovoljen
 - MSM i ASM su često konzervativne mjere
 - sustavi mogu tolerirati neizvjesnosti koje ne zadovoljavaju ove mjere



Uvjeti robusne stabilnosti

Oblici uvjeta stabilnosti za različite modele neizvjesnosti
(uz jediničnu povratnu vezu)

Model neizvjesnosti (perturbacija)	Uvjet robusne stabilnosti
$[1 + \Delta(s)W_2(s)]G_n(s)$	$\ W_2(s)T(s)\ _{\infty} < 1$
$G_n(s) + \Delta(s)W_2(s)$	$\ W_2(s)K(s)S(s)\ _{\infty} < 1$
$\frac{G_n(s)}{1 + \Delta(s)W_2(s)G_n(s)}$	$\ W_2(s)G_n(s)S(s)\ _{\infty} < 1$
$\frac{G_n(s)}{1 + \Delta(s)W_2(s)}$	$\ W_2(s)S(s)\ _{\infty} < 1$



Primjer

Robusna stabilnost



Potrebito je analizirati robusnu stabilnost sustava danog nominalnom prijenosnom funkcijom

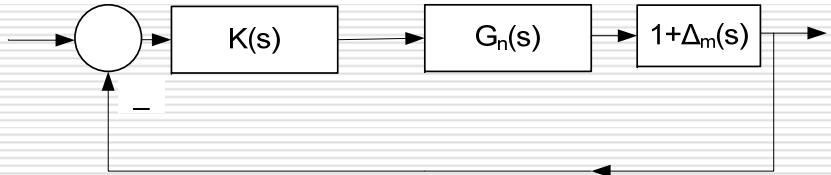
$$G_n(s) = \frac{17 \cdot 10^4 \cdot (s + 0.1)}{s(s + 3)(s^2 + 10s + 10^4)}$$

Zatvoreni sustav s jediničnom povratnom vezom bit će nestabilan, no smanjenjem pojačanja moguće ga je stabilizirati.

Ako se serijskim kompenzatorom $K(s)=0.5$ stabilizira sustav, hoće li takav sustav biti robusno stabilan s obzirom na nemodelirani pol na 50 rad/s

Rješenje

Shema sustava



Upotreba multiplikativne perturbacije u svrhu opisa neizvjesnosti uzrokovane nemodeliranom dinamikom

$$1 + \Delta_m(s) = \frac{50}{(s + 50)}$$

Odnosno

$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{(j\omega + 50)} \right|$$



Primjer

Robusna stabilnost

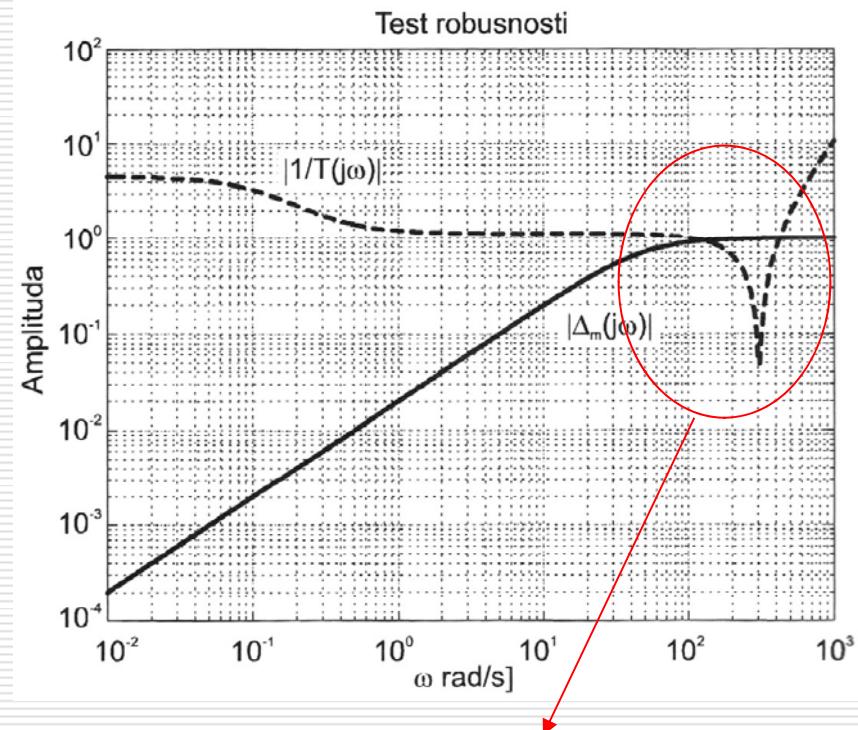


$$G_n(s) = \frac{17 \cdot 10^4 \cdot (s + 0.1)}{s(s + 3)(s^2 + 10s + 10^4)}$$

$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{(j\omega + 50)} \right|$$

Test robusne stabilnosti

- crtanje amplitudne frekvencijske karakteristike multiplikativne neizvjesnosti $|\Delta_m(j\omega)|$
- Provjera da li je na svim frekvencijama ispod recipročne amplitudne frekvencijske karakteristike komplementarne funkcije osjetljivosti $|1/T(j\omega)|$ uz upotrebljeni kompenzator $K=0.5$



Kompenzator stabilizira nominalni sustav no ne zadovoljava robusnu stabilnost jer ne zadovoljava uvjet

$$|\Delta_m(j\omega)| < \left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega$$



Primjer

Robusna stabilnost

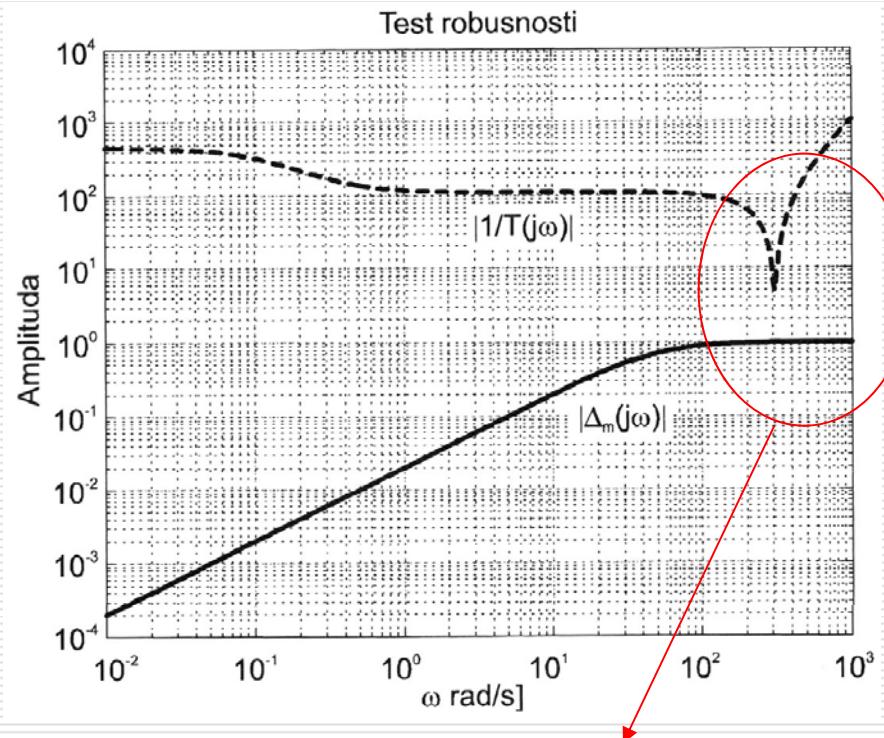


$$G_n(s) = \frac{17 \cdot 10^4 \cdot (s + 0.1)}{s(s+3)(s^2 + 10s + 10^4)}$$
$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{(j\omega + 50)} \right|$$

Ako se umjesto kompenzatora $K(s)=0.5$ upotrijebi kompenzator $K_1=5 \cdot 10^{-3}$
dobije se svojstvo robusne stabilnosti

Robusna stabilnost se može postići i kompenzatorom

$$K_2(s) = \frac{0.15(s + 25)}{s + 2.5}$$



Kompenzator stabilizira nominalni sustav i **zadovoljava robusnu stabilnost** jer zadovoljava uvjet

$$|\Delta_m(j\omega)| < \left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega$$



Primjer

Robusna stabilnost



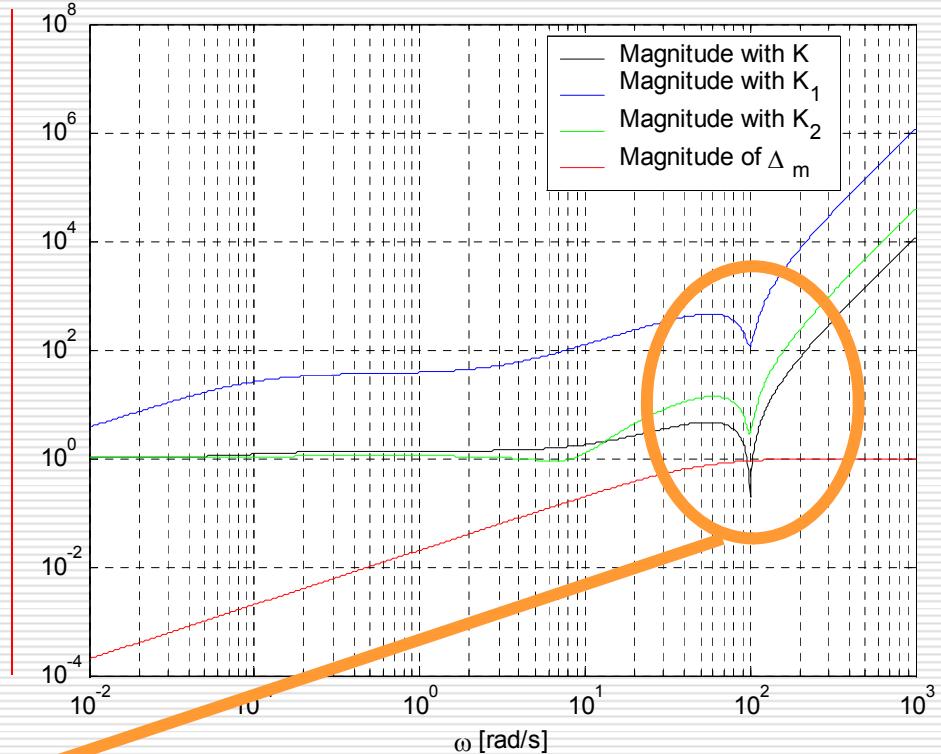
$$G_n(s) = \frac{17 \cdot 10^4 \cdot (s + 0.1)}{s(s + 3)(s^2 + 10s + 10^4)}$$
$$|\Delta_m(j\omega)| = \left| \frac{-j\omega}{(j\omega + 50)} \right|$$

Rezultati ako se umjesto kompenzatora $K(s)=0.5$ upotrijebe kompenzatori:

$$K_1 = 5 \cdot 10^{-3}$$

$$K_2(s) = \frac{0.15(s + 25)}{s + 2.5}$$

Kompenzatori K_1 i K_2 stabiliziraju nominalni sustav i **zadovoljavaju robusnu stabilnost jer zadovoljavaju uvjet**



$$|\Delta_m(j\omega)| < \left| \frac{1}{T(j\omega)} \right|, \quad \forall \omega$$

Robusna stabilnost

Strukturna neizvjesnost sustava

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: zeljko.ban@fer.hr



Robusna stabilnost

- Opis dinamičkog sustava
 - Nominalni matematički model
 - Neizvjesnost
 - Uzrok neizvjesnosti
 - Matematički model točno ne opisuje sustav
 - Model sustava se mijenja s vremenom
 - Vrste
 - Strukturirana neizvjesnost
 - Nestrukturirana neizvjesnost
 - Robusni regulator
 - Regulator koji interno stabilizira svaki model u familiji
 - konačan broj specifičnih modela sustava
 - nominalni model sustava i opis neizvjesnosti u modelu
 - strukturni model sustava i opis neizvjesnosti u iznosu parametara modela



Strukturirana neizvjesnost

- Polinomska struktura neizvjesnosti
 - Neizvjesnost parametara poznate prijenosne funkcije sustava
- Opis sustava
 - Umjesto uobičanjenih prijenosnih funkcija $G(s)$, i polinoma $p(s)$, $\alpha(s)$
 - gdje je s Laplaceova varijabla
 - Uvodi se opis prijenosnim funkcijama $G(s,q)$, i polinomima $p(s,q)$, $\alpha(s,q)$
 - gdje je q **vektor**
 - neizvjesnih realnih parametara sustava
 - neizvjesnih koeficijenata polinoma



Skup ograničenja neizvjesnosti

- Vektor neizvjesnih parametara i koeficijenata q
 - uključuje se kao 2. argument prijenosne funkcije ili polinoma
 - Definiranje
 - Skupom
 - članovi skupa ograničenja neizvjesnosti ne moraju biti nužno međusobno povezani
 - Područjem
 - elementi vektora q se opisuju donjim i gornjim granicama
 - kontinuirana promjena parametra unutar područja



Skup ograničenja neizvjesnosti

- Skup ograničenja neizvjesnosti Q je skup

$$Q = \{ q \in \mathbb{R}^\ell \mid q_i \in \mathbb{R} \forall i = 1, 2, \dots, \ell \}$$

- q_i – ne moraju biti međusobno povezani



Skup ograničenja neizvjesnosti

uz opis vektora Q granicama

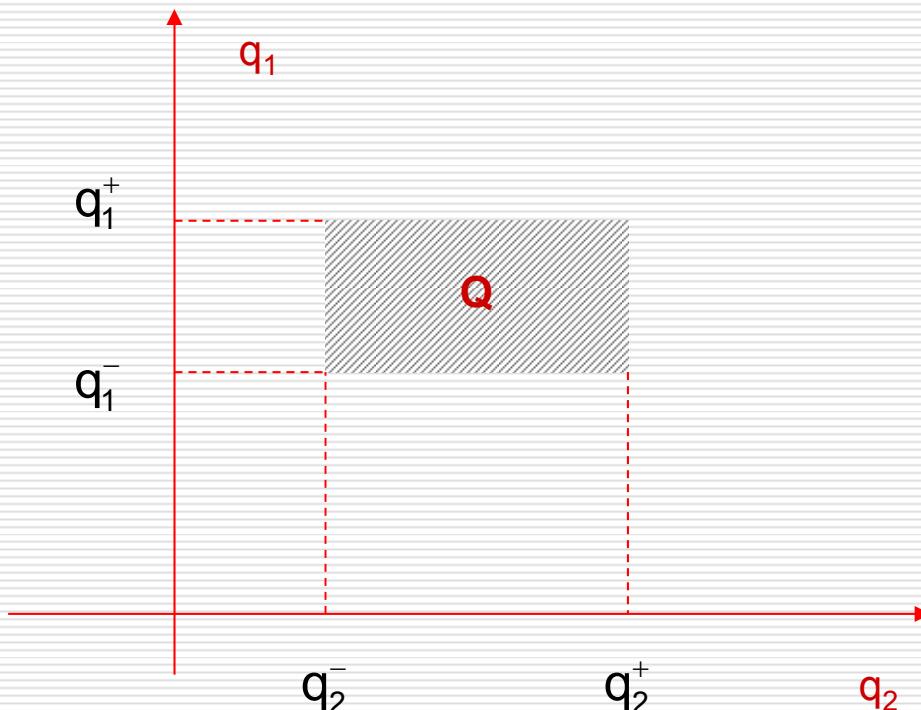


- Skup ograničenja neizvjesnosti Q opisan granicama elemenata q_i

$$Q = \left\{ q \in \mathbb{R}^\ell \mid q_i^- < q_i < q_i^+ \forall i = 1, 2, \dots, \ell \right\}$$

- parametri koji tvore vektor neizvjesnosti mijenjaju se kontinuirano unutar ograničenog intervala na realnoj liniji

Primjer područja za 2 neizvjesna parametra određena područjem





Familija neizvjesnosti

- Familija neizvjesnosti
 - Funkcija neizvjesnosti zajedno sa njenim skupom ograničenja neizvjesnosti
$$\mathbb{F}(\cdot, Q) = \{f(\cdot, q) \mid q \in Q\}$$
 - Objedinjuje sve matematičke modelle procesa kojem se parametri mijenjaju unutar poznatih ograničenja
- Razlika neizvjesnog sustava i familije sustava
 - Neizvjestan sustav
 - Ograničenja parametara nisu poznata
 - Familija sustava
 - Neizvjestan sustav s poznatim ograničenjima (skupom ograničenja)

Primjer:

Neizvjestan proces $G(s, q)$ sa skupom ograničenja neizvjesnosti Q tvori familiju procesa

$$\mathbb{G}(s, Q) = \{G(s, q) \mid q \in Q\}$$

Familije brojnika i nazivnika prijenosnih funkcija određene su sa:

$$\mathbb{N}(s, Q) = \{N(s, q) \mid q \in Q\}$$

$$\mathbb{D}(s, Q) = \{D(s, q) \mid q \in Q\}$$

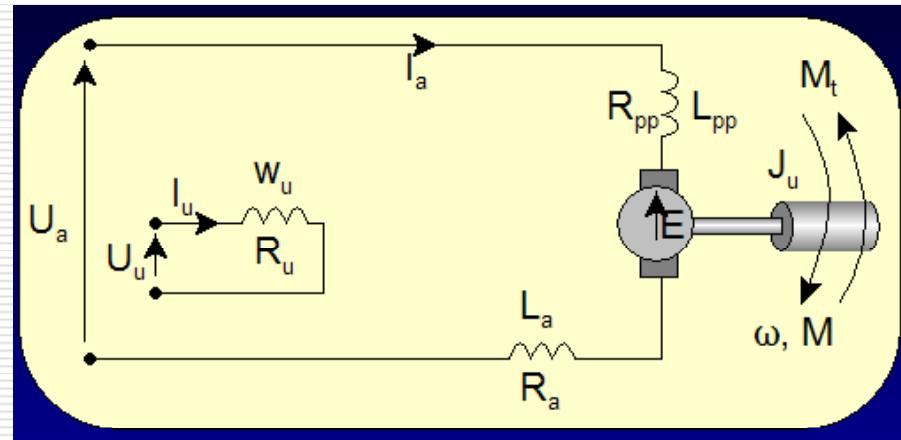
Primjer

DC motor s nezavisnom i konstantnom uzbudom
i neizvjesnim parametrima

Istosmjerni elektro motorni pogon s nezavisnom i konstantnom uzbudom upravljan armaturnim naponom prikazan je nadomjesnom shemom na slici.

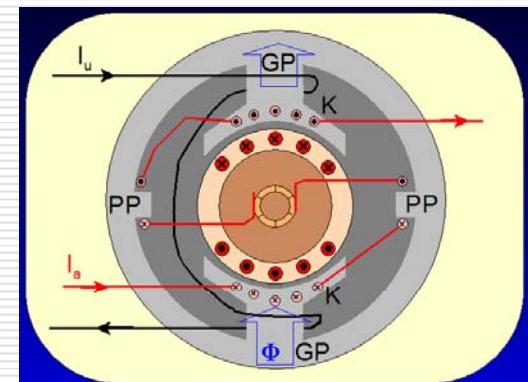
Pogon ima dva neizvjesna parametra:

- J_t – moment inercije tereta
- K – konstanta motora



Parametri elektromotornog pogona su

- $b_m = 2 \cdot 10^{-5}$ [Nms] – koeficijent viskoznog trenja motora
- $b_t = 2 \cdot 10^{-5}$ [Nms] – koeficijent viskoznog trenja tereta
- $J_m = 0.0002$ [kgm²] – moment inercije motora na osovini
- $L_a = 0.02$ [H] – induktivitet armaturnog kruga
- $R_a = 1$ [Ω] – otpor armaturnog kruga



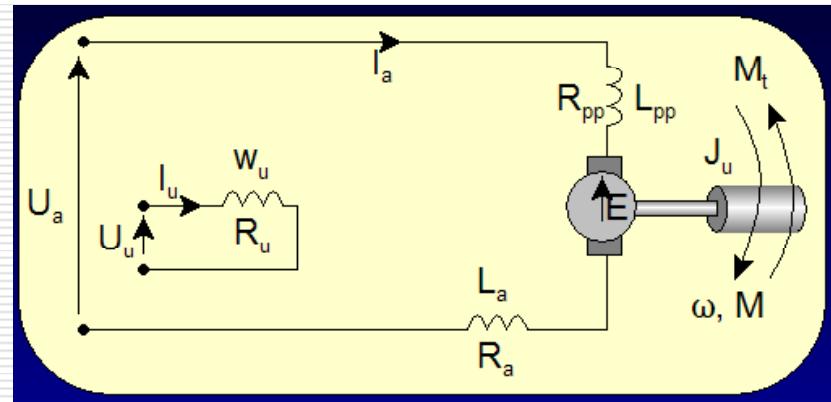
Izvori neizvjesnosti

- 10⁻⁵ ≤ J_t ≤ 3 · 10⁻⁵ [kgm²] - moment inercije tereta na osovini
- 0.2 ≤ K ≤ 0.6 [Vs] – konstanta motora

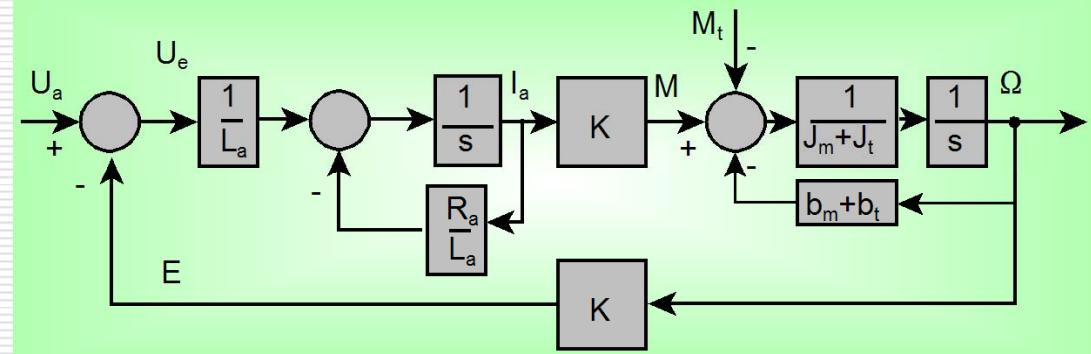
Primjer

DC motor s nezavisnom i konstantnom uzbudom
i neizvjesnim parametrima

Iz nadomjesne sheme elektromotornog pogona dobije se blokovska shema kod koje je
 U_a – napon armature – ulazni signal
 Ω - brzina vrtnje – izlazni signal



Prijenosna funkcija sustava
ima oblik



$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K}{(R_a + L_a s)[(J_m + J_t)s + b_m + b_t] + K^2} =$$

$$\frac{K}{L_a (J_m + J_t) s^2 + [R_a (J_m + J_t) + L_a (b_m + b_t)] s + R_a (b_m + b_t) + K^2}$$



Primjer

DC motor s nezavisnom i konstantnom uzbudom
i neizvjesnim parametrima



$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K}{(R_a + L_a s)[(J_m + J_t)s + b_m + b_t] + K^2} = \frac{K}{L_a (J_m + J_t)s^2 + [R_a (J_m + J_t) + L_a (b_m + b_t)]s + R_a (b_m + b_t) + K^2}$$

Uvrštenjem konstantnih prametara
prijenosna funkcija poprima oblik

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K}{(0.02J_t + 4 \cdot 10^{-6})s^2 + [J_t + 2 \cdot 10^{-4}]s + 4 \cdot 10^{-5} + K^2}$$

Označavanjem neizvjesnih parametara sa

$$q_1 = K$$

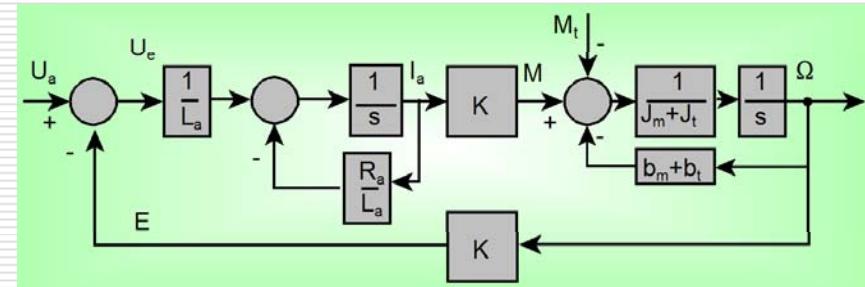
$$q_2 = J_t$$

familija funkcija prijenosa

$$\mathcal{G}(s, Q) = \{G(s, q) \mid q \in Q\}$$

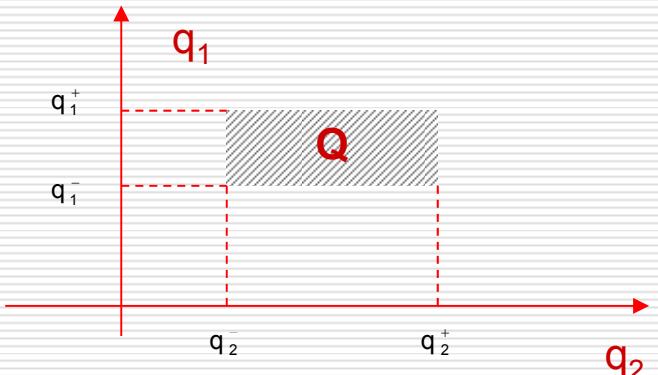
određena je sa

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U_a(s)} = \frac{q_1}{(0.02q_2 + 4 \cdot 10^{-6})s^2 + [q_2 + 2 \cdot 10^{-4}]s + 4 \cdot 10^{-5} + q_1^2}$$



Skup ograničenja neizvjesnosti Q
je tipa pravokutnika

$$\begin{aligned} q_1^- &= 0.2 & q_1^+ &= 0.6 \\ q_2^- &= 10^{-5} & q_2^+ &= 3 \cdot 10^{-5} \end{aligned}$$





Polinomi

Opći slučaj – strukture neizvjesnosti



Familija polinoma

$$p(s, \underline{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\underline{q}) s^i$$

gdje su:

$a_i(\underline{q})$ – koeficijenti familije polinoma

$$a_i(\underline{q}) = f_i(\underline{q})$$

\underline{q} – vektor neizvjesnih parametara

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_l \end{bmatrix}$$

Q – skup ograničenja neizvjesnosti
svih neizvjesnih parametara

Strukture neizvjesnosti

- Nezavisna struktura neizvjesnosti
- Intervalska struktura neizvjesnosti
- Povezana linearna struktura neizvjesnosti
- Višelinearna struktura neizvjesnosti
- Polinomska struktura neizvjesnosti



Nezavisna struktura neizvjesnosti

Familija polinoma

$$p(s, \underline{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\underline{q}) s^i$$

gdje su:

$a_i(\underline{q})$ – koeficijenti familije polinoma

$$a_i(\underline{q}) = f_i(\underline{q})$$

\underline{q} – vektor neizvjesnih parametara

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_l \end{bmatrix}$$

Q – skup ograničenja neizvjesnosti svih neizvjesnih parametara

Nezavisna struktura neizvjesnosti

Neizvjestan polinom

$$p(s, \underline{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\underline{q}) s^i$$

Nezavisna struktura neizvjesnosti



svaka komponenta q_i vektora \underline{q} ulazi u samo jedan koeficijent

Primjer:

$$p(s, \underline{q}) = (3q_3 + 2)s^3 + (q_2 + 1)s^2 + (q_1 - 1)s + (2q_0 + 3)$$

Nezavisna struktura neizvjesnosti je idealizirana stvarnost

U stvarnosti neizvjesni parametri sustava ulaze u više od jednog koeficijenta neizvjesnog polinoma (nelinearne funkcije)



Polinomi

Opći slučaj – Intervalska familija polinoma



Intervalska familija polinoma

$$\mathbb{P}(s, Q) = \left\{ p(s, \underline{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\underline{q}) s^i \mid \underline{q} \in Q \right\}$$

Familija polinoma je intervalska familija polinoma ako

- neizvjesni polinom $p(s, \underline{q})$ ima nezavisnu strukturu neizvjesnosti
- svaki koeficijent ovisi kontinuirano o vektoru \underline{q} i ako je
- skup njegovih ograničenja neizvjesnosti Q tipa n -dimenzionalne kocke

Intervalska familija polinoma $P(s, Q)$ zove se **intervalski polinom**

Familija neizvjesnih procesa

$$\mathbb{G}(s, Q) = \left\{ G(s, \underline{q}) = N(s, \underline{q}) / D(s, \underline{q}) \mid \underline{q} \in Q \right\}$$

je familija intervalskih polinoma ako su **polinom brojnika** i **polinom nazivnika intervalski polinomi**



Primjer

Intervalska familija polinoma



Primjer:

Karakteristični polinom 3. reda

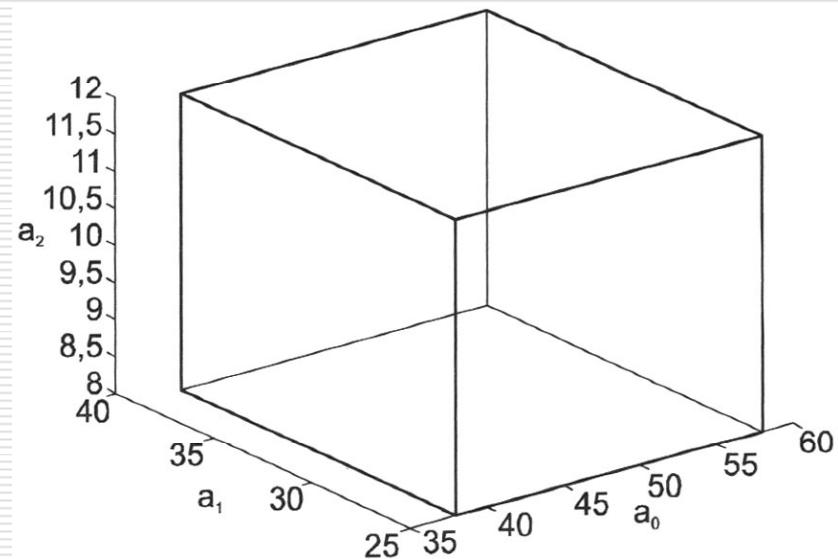
$$\alpha_{cl}(s) = s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

sa ograničenjima

$$\alpha_0 \in [38, 58] \quad \alpha_1 \in [25, 39] \quad \alpha_2 \in [8, 12] \quad \alpha_3 = 1$$

Bilo koja točka unutar kocke ili na njenom plaštu predstavlja valjan skup koeficijenata za ovaj karakteristični polinom

(trostruko beskonačan skup karakterističnih polonoma)





Povezana linearna struktura neizvjesnosti

(Affine linear uncertainty structure)



Povezana linearna struktura neizvjesnosti

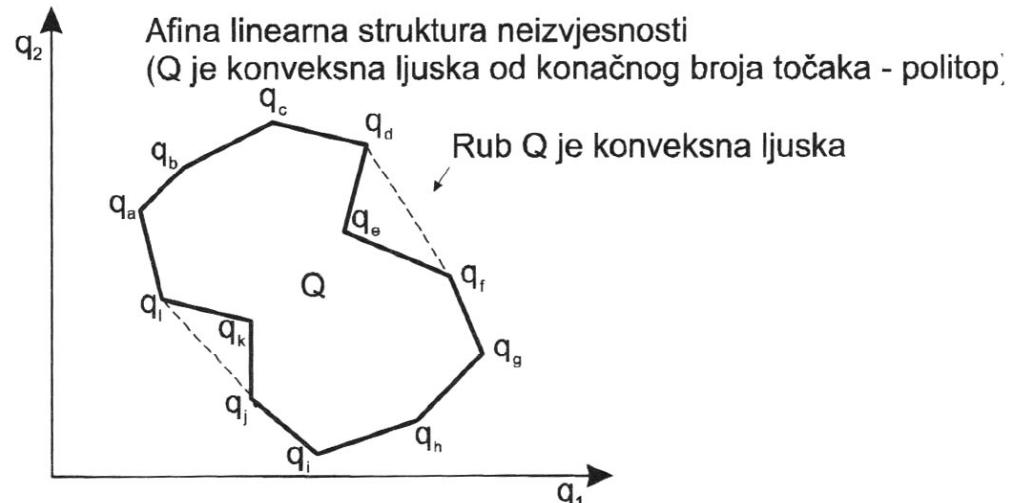


Svi koeficijenti $\alpha_i(\underline{q})$ familije polinoma $p(s, \underline{q})$ su oblika:

$$\alpha_i(\underline{q}) = \beta_i^T \underline{q} + \gamma_i$$

β_i – stupčani vektor
 γ_i - skalar

Za povezane linearne strukture neizvjesnosti skup ograničenja je **konveksna ljska od konačnog broja točaka** (politop a ne kocka)



Primjer

$$p(s, \underline{q}) = (3q_1 + 4q_2 + 6)s^3 + (2q_1 - 3q_2)s^2 + (q_1 + q_2)s + (q_2 - 5)$$



Primjer

Sustav se sastoji od regulatora i procesa.
Prijenosna funkcija **regulatora** ima oblik:

$$G_r(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2}$$

Prijenosna funkcija **procesa** ima oblik:

$$G_p(s) = \frac{B(s, b)}{A(s, b)} = \frac{b_0}{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Poznate su granice parametara

$$b_0 \in [3, 5] \quad a_3 \in [1, 1.1]$$

$$a_2 \in [4, 4.2] \quad a_1 \in [6, 8] \quad a_0 \in [10, 20]$$

Karakteristični polinom zatvorenog kruga
(s jediničnom negativnom povratnom vezom)
ima oblik:

$$\begin{aligned} \alpha_{cl} &= (a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)(s^2 + 2s + 2) + b_0(s + 2) \\ &= \alpha_5 s^5 + \alpha_4 s^4 + \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 \end{aligned}$$

gdje su:

$$\begin{aligned} \alpha_5 &= a_3, \\ \alpha_4 &= a_2 + 2a_3, \\ \alpha_3 &= a_1 + 2a_2 + 2a_3, \\ \alpha_2 &= a_0 + 2a_1 + 2a_2, \\ \alpha_1 &= 2a_0 + 2a_1 + b_0, \\ \alpha_0 &= 2a_0 + 2b_0 \end{aligned}$$

Koeficijenti karakterističnog polinoma se mijenjaju u granicama

$$\alpha_5 \in [1, 1.1] \quad \alpha_4 \in [6, 6.4]$$

$$\alpha_3 \in [16, 18.6] \quad \alpha_2 \in [30, 40.4]$$

$$\alpha_1 \in [35, 61] \quad \alpha_0 \in [26, 50]$$

Vektor neizvjesnih parametara

$$\underline{\alpha} = [\alpha_5 \quad \alpha_4 \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0]^T$$

Može poprimiti bilo koju vrijednost iz \mathbb{R}^6 unutar granica



Struktura neizvjesnosti

- Višelinearna struktura neizvjesnosti
 - koeficijenti $a_i(\underline{q})$ neizvjesnog polinoma $p(s,\underline{q})$
 - višelinearne funkcije po komponentama vektora \underline{q}
 - ako se svi osim jednog neizvjesnog parametra drže konstantnim
 - koeficijenti familije polinoma $a_i(\underline{q})$
 - povezani linearno po preostalim komponentama vektora \underline{q}
- Polinomska struktura neizvjesnosti
 - svi koeficijenti $a_i(\underline{q})$ familije polinoma $p(s,\underline{q})$
 - tvore multivarijablinski polinom po komponentama \underline{q}



Koncepti analize robusne stabilnosti



- Nepromjenjivost reda
- Prolazak kroz granicu
- Isključenje nule
- Skup iznosa



Nepromjenjivost reda

Pretpostavka

- Postoji karakteristični polinom zatvorenog kruga n-tog reda s $a_n=1$
- Nezavisne promjene koeficijenata
 - $A=\{a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\}$

Posljedica

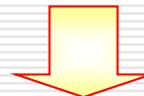
- Kako koeficijent uz najvišu potenciju a_n nikad nije nula
- → svi polinomi familije su n-tog reda



Prolazak kroz granicu

- Prepostavka
 - postoji jedan skup koeficijenata
$$A^a = \{a_{n-1}^a, \dots, a_1^a, a_0^a\}$$
 - zatvoren krug stabilan
 - polovi karakterističnog polinoma u lijevoj poluravnini
 - postoji drugi skup koeficijanata
$$A^b = \{a_{n-1}^b, \dots, a_1^b, a_0^b\}$$
 - barem jedan pol zatvorenog kruga u desnoj poluravnini
- Tada posoji
 - skup koeficijenata
$$A^c = \{a_{n-1}^c, \dots, a_1^c, a_0^c\}$$
 - karakteristični polinom zatvorenog kruga
 - nema polova u desnoj poluravnini
 - ima barem jedan pol na imaginarnoj osi

- Sabilian sustav
 - ima sve polove u stabilnom području (lijeva poluravnina)
- da bi postao nestabilan
 - barem jedan pol mora prijeći u nestabilno područje (desnu poluravninu)
- tijekom prijelaza
 - mora prijeći kroz stanje u kojem je barem jedan pol na granici stabilnosti (imaginarna os)



- Fenomen prolaska kroz granicu



Primjer 1

prolazak kroz granicu



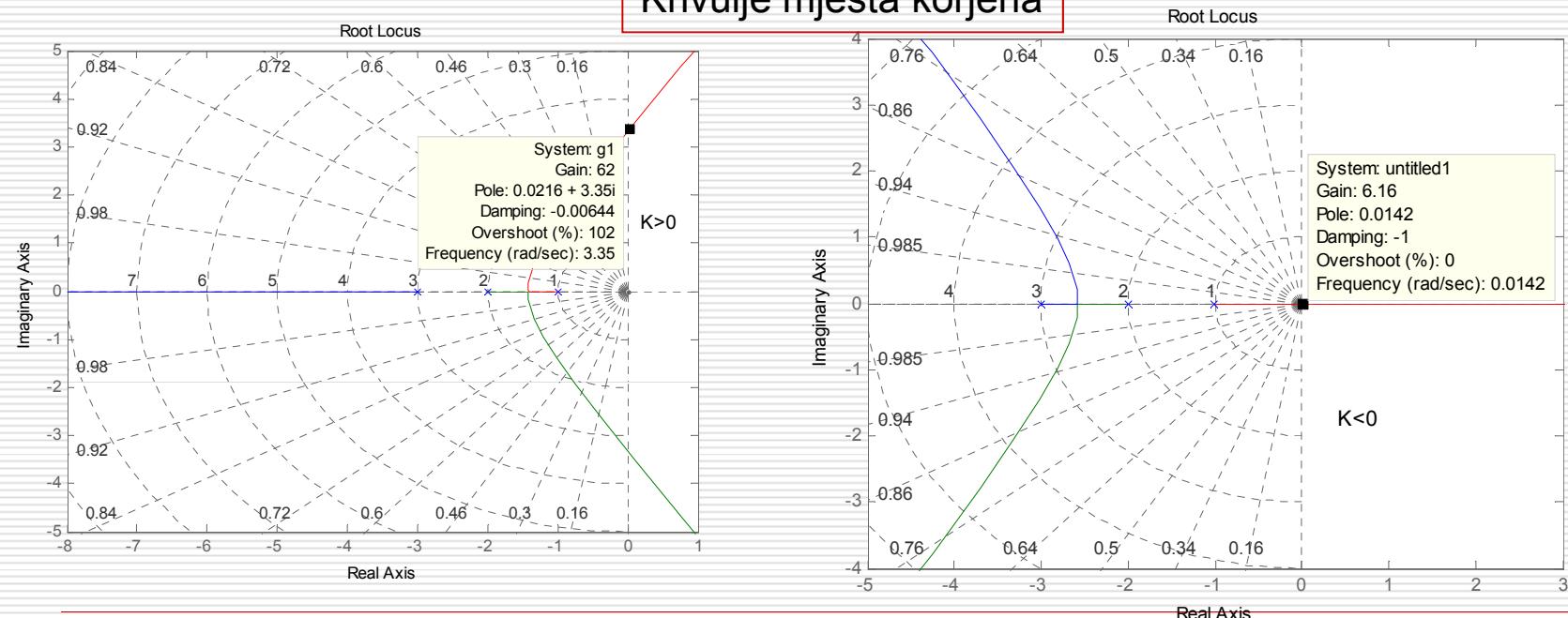
Sustav s neizvjesnim parametrom pojačanja $q = K$ određen je prijenosnom funkcijom otvorenog kruga:

$$G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Karakteristični polinom zatvorenog kruga (*uz jediničnu povratnu vezu*)

$$p(s, q) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 + q$$

KMK se giba i za $K>0$ i za $K<0$ iz stabilnog u nestabilno područje





Primjer 2

prolazak kroz granicu



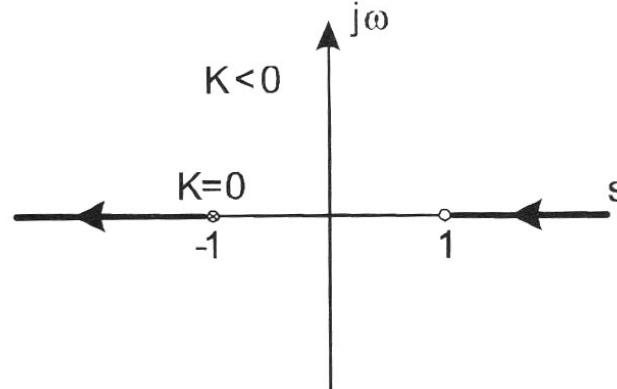
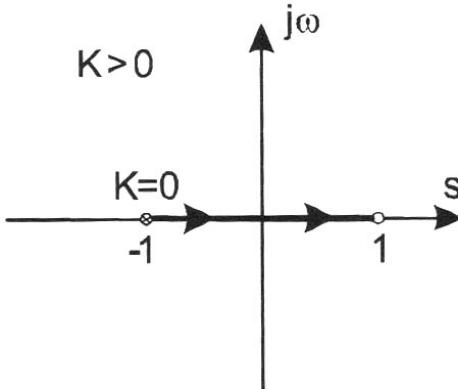
Sustav s neizvjesnim parametrom
pojačanja $q = K$
određen je prijenosnom funkcijom
otvorenog kruga:

$$G(s) = \frac{K(s-1)}{(s+1)}$$

Karakteristični polinom zatvorenog
kruga (*uz jediničnu povratnu vezu*)

$$p(s, q) = (1+q)s + 1 - q$$

Krivulje mesta korjena



KMK se giba za $K > 0$
iz stabilnog u nestabilno
područje i prelazi preko
imaginarnе osi.

KMK se giba za $K < 0$
iz stabilnog u nestabilno
ne prelazeći preko
imaginarnе osi.

Za $K < 0 \rightarrow$ mijenja se red
sustava ($K=-1$)



Isključenje nule

- Ako postoji barem jedan stabilan polinom u familiji $\alpha_{cl}(s)$
 - detektiranje gubitka robusne stabilnosti
 - proračun svih polinoma iz familije duž $j\omega$ osi
 - polinom s iznosom 0 na frekvenciji $\omega = \omega_1$
 - ako je $\alpha_{cl}(j\omega_1) = 0$ za neki skup koeficijenata A^c
 - taj polinom ima jedan ili više korjena na $j\omega$ osi
 - sustav nije robusno stabilan
- Test robusne stabilnosti je
 - proračun svakog polinoma familije duž granice stabilnosti
 - provjera jednakosti polinoma s 0
 - ako 0 nije prisutna ni u kojem od proračuna (*nula isključena*)
 - →familija polinoma je robusno stabilna



Skup iznosa

- Prepostavka
 - Svaki polinom familije je n-tog reda
 - svaki polinom familije moguće je proračunati duž granice stabilnosti
 - U svakoj točki na granici svaki izračun polinoma daje kompleksan broj
 - na frekvenciji $\omega=\omega_1$, polinom s koeficijentima A^a dat će rezultat

$$\alpha_{cl}(j\omega_1) = x_1^a + jy_1^a$$

- Promjena frekvencije
 - promjena koeficijenata polinoma
 - promjena kompleksnog broja
- Prikaz skupa kompleksnih brojeva u kompleksnoj ravnini (nije s ravnina)
 - Skup iznosa → skup svih kompleksnih brojeva generiranih na frekvenciji $\omega=\omega_1$ od familije polinoma $\alpha_{cl}(j\omega_1)$ kad se koeficijenti polinoma mijenjaju unutar dozvoljenih granica



Skup iznosa

Definicija

- Skup iznosa je podskup kompleksne ravnine koja sadrži sve moguće iznose neizvjesnog polinoma $p(j\omega, q)$ kad se q mijenja unutar skupa ograničenja neizvjesnosti Q (frekvencija ω je konstantna)
- Moguć prikaz skupa iznosa → poligonom u kompleksnoj ravnini
 - skup iznosa se giba kompleksnom ravninom promjenom frekvencije

Svojstvo

- Skup iznosa preslikao analizu stabilnosti familije polinoma n-tog reda u kompleksnu ravninu (dvodimenzionalnu)
 - preslikan 1-dimenzijski skup parametara u dvodimenzijski skup iznosa
 - mogućnost grafičkog prikaza u ravnini



Skup iznosa

- Teorem uvjeta isključenja nule
 - Familija polinoma sa svojstvima
 - polinomi nepromjenjivog (konstantnog) reda
 - pridruženi skup ograničenja neizvjesnosti Q
 - po rubovima povezankontinuiranim funkcijama po koeficijentima familije polinoma $a_i(\underline{q})$, za $i=1,2,\dots,n$
 - najmanje jedanstabilni član $p(s,q)$
 - je robusno stabilna ako i samo ako je
 - ishodište kompleksne ravnine isključeno iz skupa iznosa za sve nenegativne frekvencije

$$0 \notin p(j\omega, \underline{q}) \quad \forall \omega < 0 \wedge \underline{q} \in Q$$

- Teorem upotrebljiv za testiranje stabilnosti neizvjesnih polinoma
 - ako postoji alat za generiranje skupa iznosa

Robusna stabilnost

Definicija

Neizvjestan sustav s karakterističnim polinomom $p(s,q)$ je robusno stabilan ako i samo ako je $p(s,q)$ stabilan za sve

$$q \in Q$$

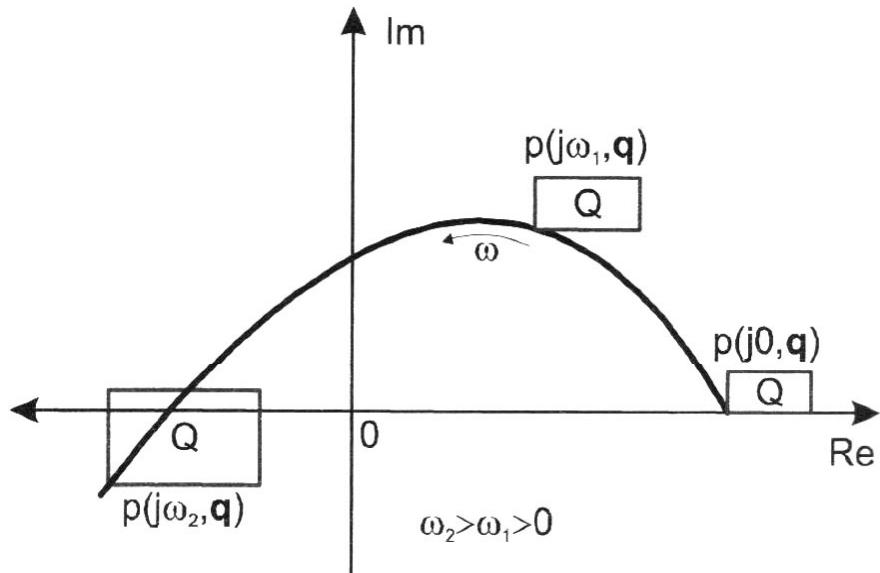
gdje je Q skup ograničenja neizvjesnosti

Ako je familija polinoma n -tog reda robusno stabilna

- skupovi iznosa će se gibati obrnuto od kazaljke na satu kroz n kvadrata kompleksne ravnine
- pri tom nikad neće dirati ishodište ravnine niti proći kroz njega

Provjera robusne stabilnosti svodi se na provjeru kriterija:

- prolazak kroz granicu
- promjena reda
- provjera da li je nula isključena iz svih skupova iznosa dobivenih proračunom svih polinoma familije na iznosima frekvencije duž granice stabilnosti





Analiza robusne stabilnosti

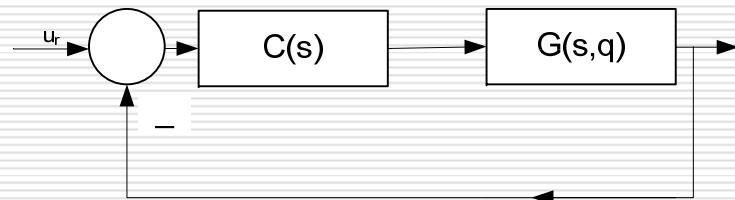
- Metode analize robusne stabilnosti
 - Teorem Karitonova
 - Primjenjiv za intervalske strukture neizvjesnosti
 - Teorem brida
 - primjena na:
 - intervalske strukture neizvjesnosti
 - povezane linearne strukture neizvjesnosti
 - Područje neizvjesnosti Q
 - kvadar za intervalske strukture
 - konveksna ljska od konačnog broja točaka (POLITOP) za povezane linearne strukture
- Krivulja Cipkin-Poljaka
 - grafički postupak za analizu robusne BIBO stabilnosti
 - Određivanje relativne stabilnosti familije polinoma



Opis sustava s intervalskom strukturom neizvjesnosti (za potrebe analize robusnosti)



Sustav se sastoji od regulatora $C(s)$ s nepromjenjivim parametrima i procesa $G(s,q)$ s neizvjesnim parametrima s intervalskom strukturom neizvjesnosti



Vremenski nepromjenjivi regulator

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Neizvjestan proces s intervalskom strukturom neizvjesnosti parametara

$$G(s,\underline{q}) = \frac{B(s,\underline{b})}{A(s,\underline{a})} = \frac{\left[b_m^-, b_m^+ \right] s^m + \dots + \left[b_1^-, b_1^+ \right] s + \left[b_0^-, b_0^+ \right]}{\left[a_n^-, a_n^+ \right] s^n + \dots + \left[a_1^-, a_1^+ \right] s + \left[a_0^-, a_0^+ \right]}$$

$n \geq m$

Skup svih mogućih funkcija prijenosa procesa

$$G(s,\underline{q}) = G_{\underline{b},\underline{a}} = \frac{B(s,\underline{b})}{A(s,\underline{a})} = \begin{cases} b_m^- s^m + \dots + b_1^- s + b_0^-; & b_i \in [b_i^-, b_i^+] \\ a_n^- s^n + \dots + a_1^- s + a_0^-; & a_i \in [a_i^-, a_i^+] \end{cases}$$

Granice donjih i gornjih parametara određene vektorom \underline{q}^T

$$\underline{q}^T = [b_0^-, b_0^+, \dots, b_m^-, b_m^+, a_0^-, a_0^+, \dots, a_n^-, a_n^+]$$

Zatvoreni sustav prema slici bit će robusno stabilan ako su svi korjeni karakterističnog polinoma zatvorenog kruga

$$\alpha_{cl}(s, \underline{q}) = A(s, \underline{a})D(s) + B(s, \underline{b})N(s)$$

u lijevoj poluravnini s ravnine za sve G iz $G_{\underline{b},\underline{a}}$

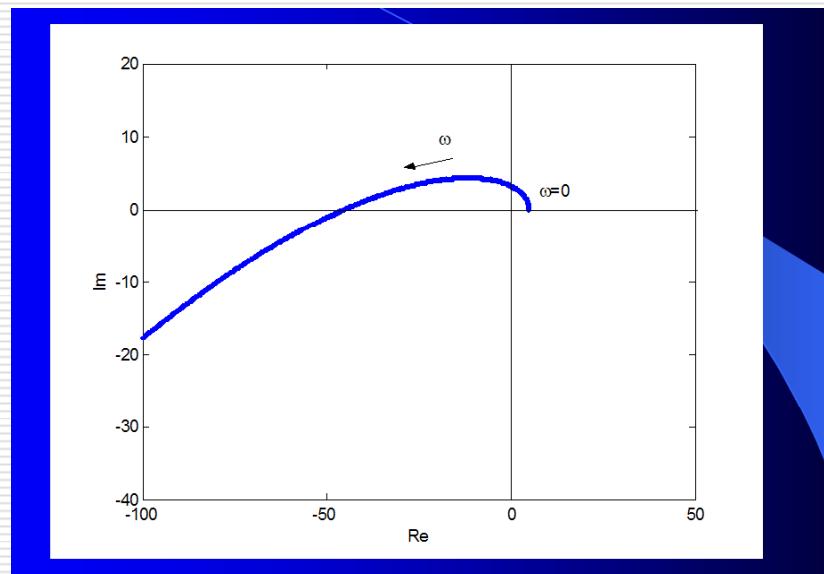


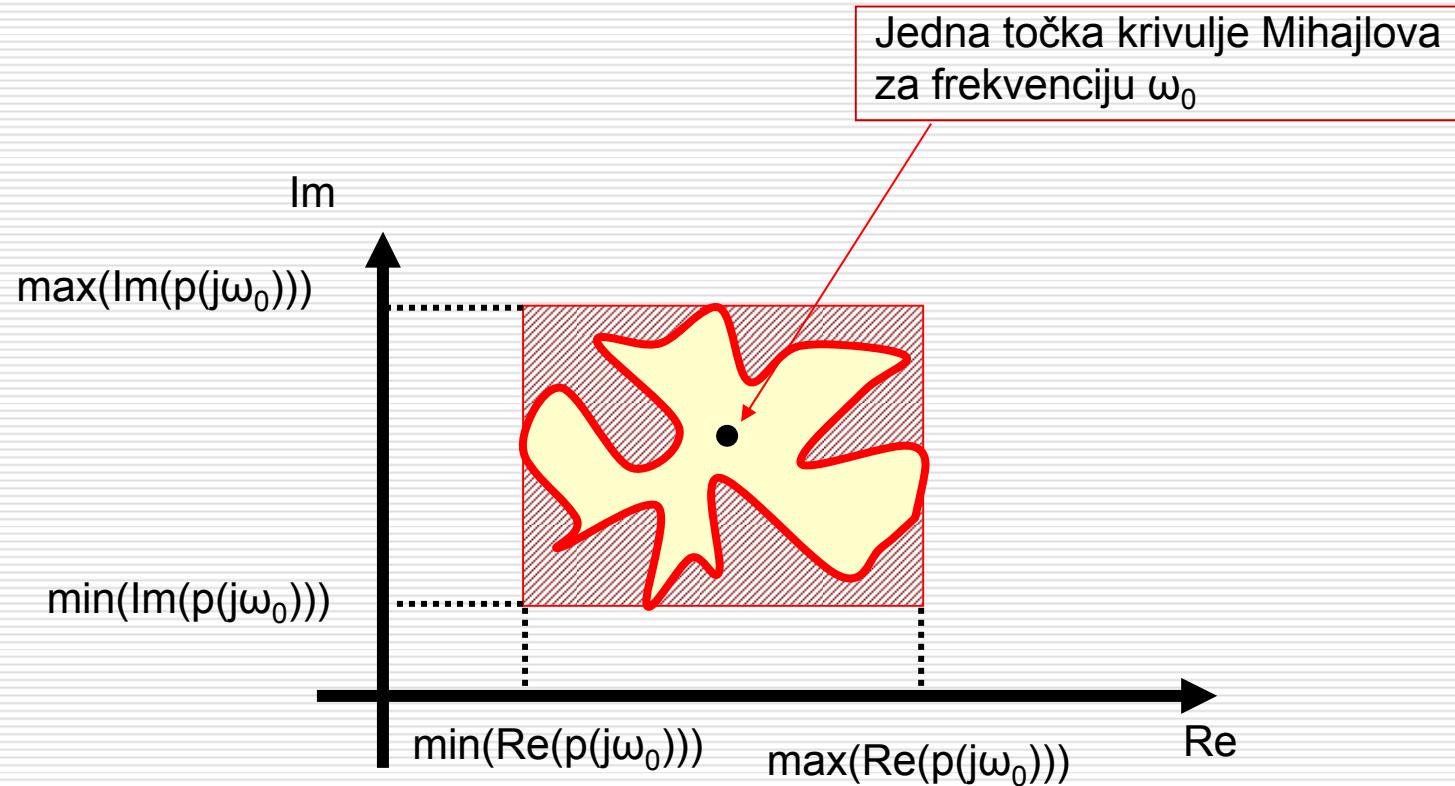
Krivulja stabilnosti Mihajlova

Objašnjenje teorema Karitonova



- Sustav bez neodređenosti stabilan ako
 - krivulja prolazi oko ishodišta bez diranja ishodišta
 - giba se u smjeru obrnutom od kazaljke na satu
 - prolazi kroz onoliko kvadrantata koliki je red zatvorenog sustava
- Krivulja se dobije
 - računanjem karakterističnog polinoma zatvorenog kruga duž imaginarne osi ($s=j\omega$)
- Što sa sustavom s intervalskom neizvjesnosti parametara?
- U što se pretvara točka krivulje?





Teorem Karitonova

- Određuju se 4 polinoma za 4 vrha pravokutnika
 - K_1 – minimum realnog i minimu imaginarnog dijela
 - K_2 – maksimum realnog i maksimum imaginarnog dijela
 - K_3 – maksimum realnog i minimum imaginarnog dijela
 - K_4 – minimum realnog i maksimum imaginarnog dijela

- Za familiju polinoma s intervalskom neodređenošću

$$\mathbb{P}(s, Q) = \left\{ p(s, \underline{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\underline{q}) s^i \mid \underline{q} \in Q \right\}$$

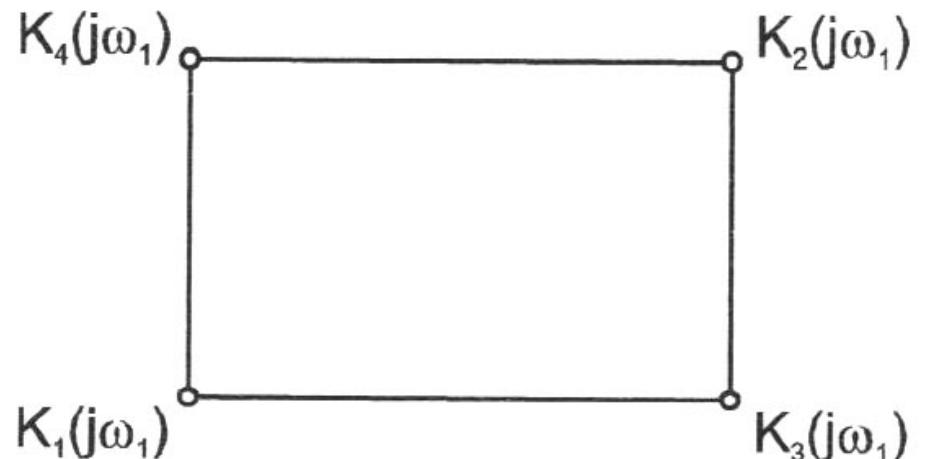
- Kako odrediti

$$\min_{q \in Q} (\operatorname{Re}(p(j\omega_0, q)))$$

$$\max_{q \in Q} (\operatorname{Re}(p(j\omega_0, q)))$$

$$\min_{q \in Q} (\operatorname{Im}(p(j\omega_0, q)))$$

$$\max_{q \in Q} (\operatorname{Im}(p(j\omega_0, q)))$$





Uvjet Karitonova četverokuta

- Četiri vrha Karitonova četverokuta određena su izrazima.

$$\min_{q \in Q} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) = \underline{q}_0 - \bar{q}_2 \omega_0^2 + \underline{q}_4 \omega_0^4 + \dots = \operatorname{Re} K_1(j\omega_0)$$

$$\max_{q \in Q} \operatorname{Re} p(j\omega_0, q) = \bar{q}_0 - \underline{q}_2 \omega_0^2 + \bar{q}_4 \omega_0^4 + \dots = \operatorname{Re} K_2(j\omega_0)$$

$$\min_{q \in Q} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = \underline{q}_1 \omega_0 - \bar{q}_3 \omega_0^3 + \underline{q}_5 \omega_0^5 + \dots = \operatorname{Im} K_3(j\omega_0)$$

$$\max_{q \in Q} \operatorname{Im} p(j\omega_0, q) = \bar{q}_1 \omega_0 - \underline{q}_3 \omega_0^3 + \bar{q}_5 \omega_0^5 + \dots = \operatorname{Im} K_4(j\omega_0)$$



Teorem Karitonova

Umjesto **beskonačno polinoma** (koliko se može dobiti promjenom pojedinog parametra u intervalu) na isključenje nule se testiraju **samo 4 polinoma**.

Za intervalsku familiju polinoma

$$\mathbb{P}(s, Q) = \left\{ p(s, \underline{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\underline{q}) s^i \mid \underline{q} \in Q \right\}$$

Postoje 4 fiksna K polinoma

$$K_1(s) = \underbrace{a_0^- + a_1^- s}_{+} + \underbrace{a_2^+ s^2 + a_3^+ s^3}_{+} + \underbrace{a_4^- s^4 + a_5^- s^5}_{+} + \dots$$

$$K_2(s) = \underbrace{a_0^+ + a_1^+ s}_{+} + \underbrace{a_2^- s^2 + a_3^- s^3}_{+} + \underbrace{a_4^+ s^4 + a_5^+ s^5}_{+} + \dots$$

$$K_3(s) = a_0^+ + \underbrace{a_1^- s + a_2^- s^2}_{+} + \underbrace{a_3^+ s^3 + a_4^+ s^4}_{+} + a_5^- s^5 + \dots$$

$$K_4(s) = a_0^- + \underbrace{a_1^+ s + a_2^+ s^2}_{+} + \underbrace{a_3^- s^3 + a_4^- s^4}_{+} + a_5^+ s^5 + \dots$$

Koeficijenti K polinoma ovise samo o **donjim i gornjim** granicama koeficijenata familije polinoma

Neophodan i dovoljan uvjet stabilnosti

Familija polinoma

$$\mathbb{P}(s, Q) = \left\{ p(s, \underline{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\underline{q}) s^i \mid \underline{q} \in Q \right\}$$

je **stabilna** ako je **svaki od polinoma Karitonova (K_1, K_2, K_3 i K_4) stabilan** tj. korjeni tih polinoma leže u lijevoj poluravnini (realni dijelovi korjena su negativni)



Određivanje robusne stabilnosti

intervalske familije polinoma



□ Postupak

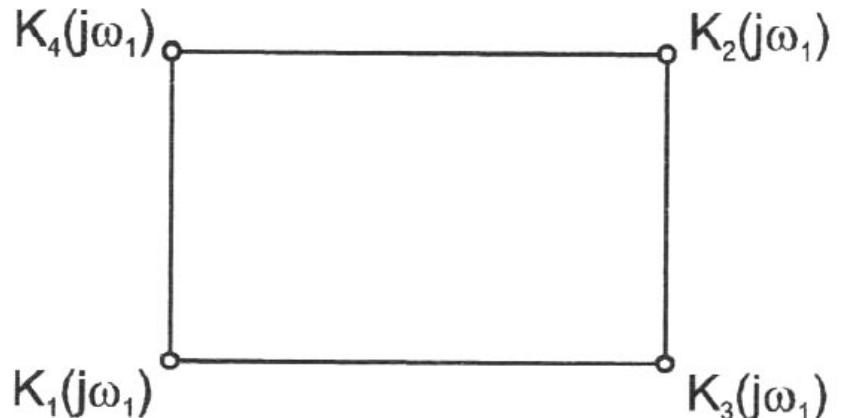
- Formiranje 4 polinoma Karitonova, K_1 , K_2 , K_3 i K_4
- Faktorizacija polinoma (traženje korijena polinoma)
- Ispitivanje položaja korijena polinoma

□ Rezultat

- Ako su **svi korijeni** polinoma u **lijevoj poluravnini** → intervalska familija polinoma je **robusno stabilna**
- Ako je bilo koji od korijena na **imaginarnoj ($j\omega$) osi ili u desnoj poluravnini** → intervalska familija polinoma nije stabilna

□ Proačun K polinoma duž $j\omega$ osi

- Vrijednosti polinomi Karitonova, K_1 , K_2 , K_3 i K_4 na istoj frekvenciji $j\omega$ čine četverokut u kompleksnoj ravnini
 - $K_1(j\omega)$ – donji lijevi kut
 - $K_2(j\omega)$ – gornji desni kut
 - $K_3(j\omega)$ – donji desni kut
 - $K_4(j\omega)$ – gornji lijevi kut





Primjer

Određivanje robusne stabilnosti polinomima Karitonova



Zatvoren sustav opisan je karakterističnim polinomom 3. reda

$$\alpha_{cl} = s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Intervali neizvjesnosti koeficijenata određeni su izrazima:

$$\alpha_0 \in [38, 58], \alpha_1 \in [25, 39],$$

$$\alpha_2 \in [8, 12], \alpha_3 = 1$$

K polinomi imaju oblik

$$K_1(s) = 38 + 25s + 12s^2 + s^3$$

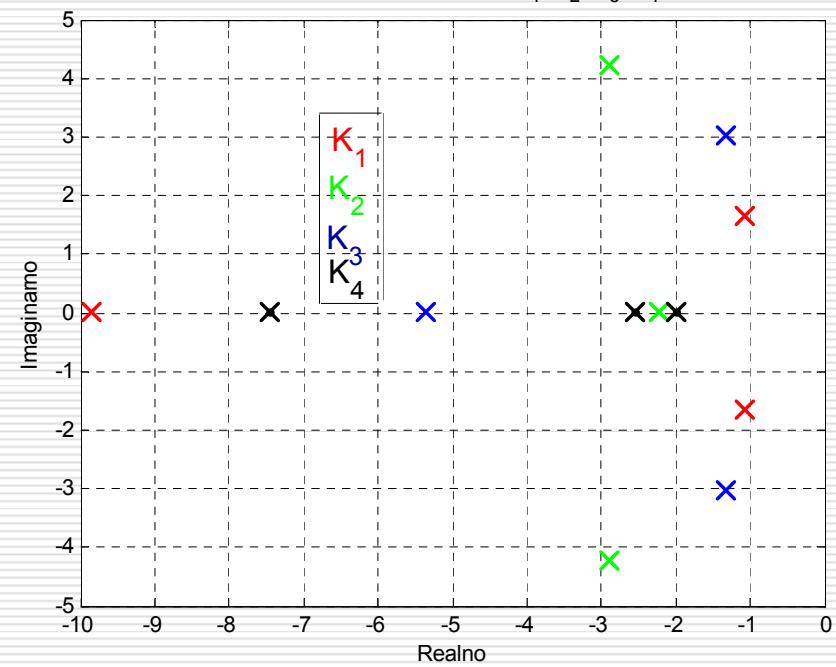
$$K_2(s) = 58 + 39s + 8s^2 + s^3$$

$$K_3(s) = 58 + 25s + 8s^2 + s^3$$

$$K_4(s) = 38 + 39s + 12s^2 + s^3$$

	s_1	$S_{2.3}$
K_1	-9.8544	-1.0728 + 1.6448i
K_2	-2.2149	-2.8926 + 4.2213i
K_3	-5.3539	-1.3230 + 3.0138i
K_4	-7.4495	-2.5505 - 2.0000

Polovi polinoma Karitonova K_1, K_2, K_3, K_4





Primjer

Određivanje robusne stabilnosti polinomima Karitonova



Crtanjem četverokuta određenih vrijednostima polinoma Karitonova

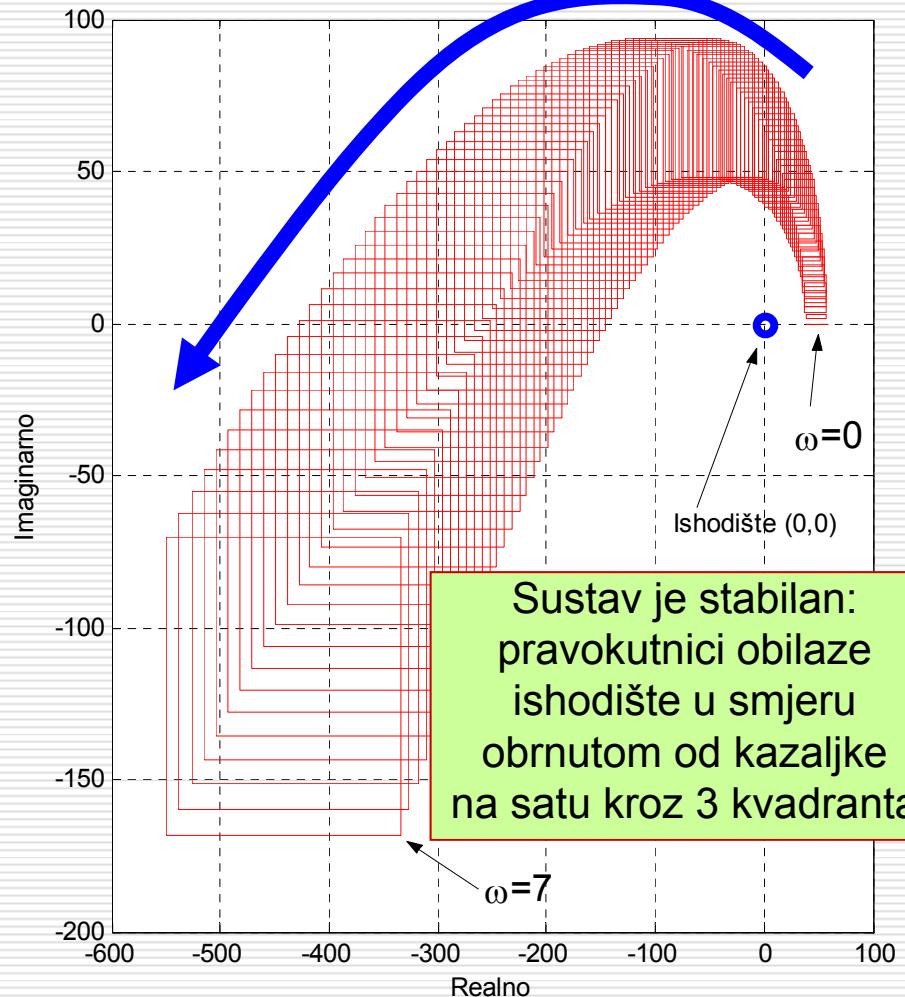
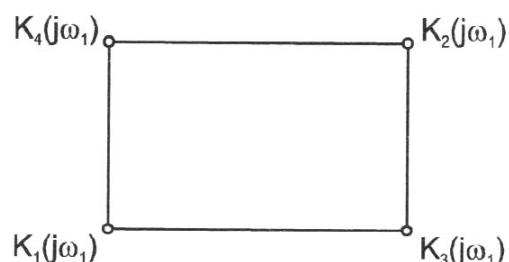
$$K_1(s) = 38 + 25s + 12s^2 + s^3$$

$$K_2(s) = 58 + 39s + 8s^2 + s^3$$

$$K_3(s) = 58 + 25s + 8s^2 + s^3$$

$$K_4(s) = 38 + 39s + 12s^2 + s^3$$

za iznose polinoma na imaginarnoj osi u rasponu frekvencija $\omega \in [0, 7]$





Primjer 2

Određivanje robusne stabilnosti polinomima Karitonova



Potrebno je odrediti stabilnost karakterističnog polinoma oblika

$$p(s, \underline{q}) = q_3 s^3 + q_2 s^2 + q_1 s + q_0$$

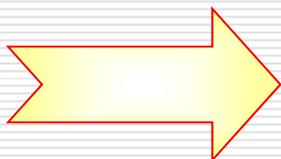
čiji su parametri određeni skupom ograničenja neizvjesnosti

$$Q = \{q \mid q_0 \in [46, 50], q_1 \in [50, 54], q_2 \in [18, 20], q_3 \in [1, 2]\}$$

Familija intervalskih polinoma može se prikazati u formi:

$$p(s, \underline{q}) = [1, 2]s^3 + [18, 20]s^2 + [50, 54]s + [46, 50]$$

K polinomi imaju oblik



$$\begin{aligned} K_1(s) &= 2s^3 + 20s^2 + 50s + 46 \\ K_2(s) &= s^3 + 18s^2 + 54s + 50 \\ K_3(s) &= 2s^3 + 18s^2 + 50s + 50 \\ K_4(s) &= s^3 + 20s^2 + 54s + 46 \end{aligned}$$

'Korijeni K1'	'Korijeni K2'	'Korijeni K3'	'Korijeni K4'
[-6.8345]	[-14.5176]	[-5.0000]	[-16.9792]
[-1.5828+ 0.9274i]	[-1.7412+ 0.6421i]	[-2.0000+ 1.0000i]	[-1.5104+ 0.6541i]
[-1.5828- 0.9274i]	[-1.7412- 0.6421i]	[-2.0000- 1.0000i]	[-1.5104- 0.6541i]

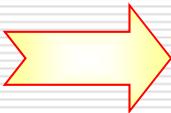
Primjer 2

Određivanje robusne stabilnosti polinomima Karitonova

Za familiju intervalskih polinoma

$$p(s, \underline{q}) = [1, 2]s^3 + [18, 20]s^2 + [50, 54]s + [46, 50]$$

i pripadnih K polinoma



$$K_1(s) = 2s^3 + 20s^2 + 50s + 46$$

$$K_2(s) = s^3 + 18s^2 + 54s + 50$$

$$K_3(s) = 2s^3 + 18s^2 + 50s + 50$$

$$K_4(s) = s^3 + 20s^2 + 54s + 46$$

'Korijeni K1'

$$\begin{bmatrix} -6.8345 \\ [-1.5828+ 0.9274i] \\ [-1.5828- 0.9274i] \end{bmatrix}$$

'Korijeni K2'

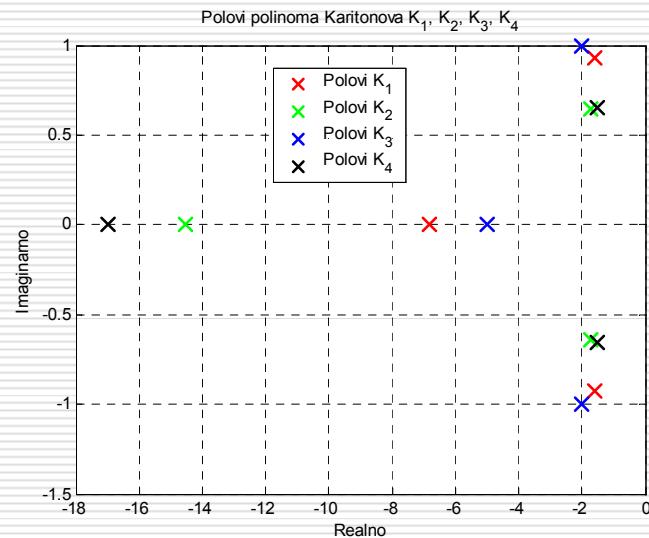
$$\begin{bmatrix} -14.5176 \\ [-1.7412+ 0.6421i] \\ [-1.7412- 0.6421i] \end{bmatrix}$$

'Korijeni K3'

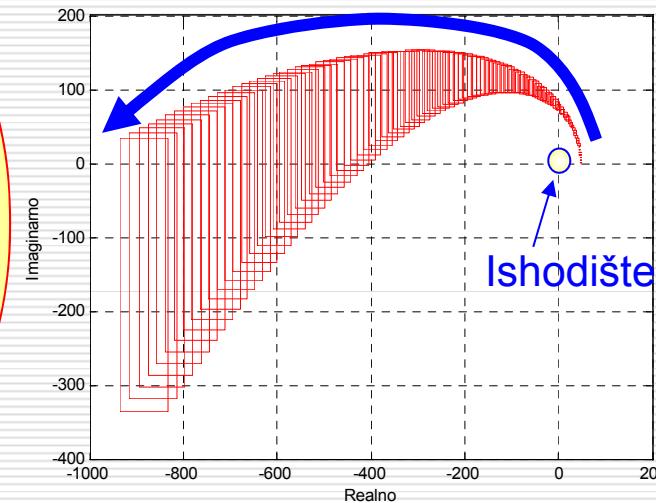
$$\begin{bmatrix} -5.0000 \\ [-2.0000+ 1.0000i] \\ [-2.0000- 1.0000i] \end{bmatrix}$$

'Korijeni K4'

$$\begin{bmatrix} -16.9792 \\ [-1.5104+ 0.6541i] \\ [-1.5104- 0.6541i] \end{bmatrix}$$



Sustav je
robusno stabilan





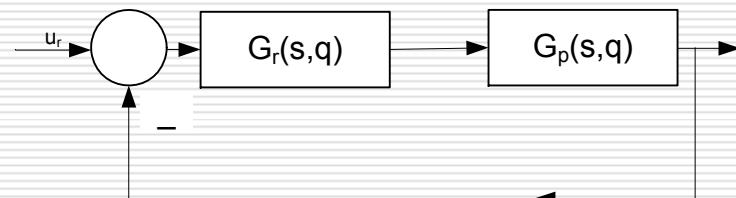
Primjer 3

Određivanje robusne stabilnosti polinomima Karitonova



Dinamički sustav s jediničnom povratnom vezom prema slici određen je prijenosnim funkcijama regulatora i procesa

$$G_r(s,q) = \frac{4(s+3)}{s+8}, \quad G_p(s,q) = \frac{4}{s(s+2)}$$



Sustav je projektiran kao sustav s poznatim parametrima, no u eksploataciji može postojati

neizvjesnost i parametara regulatora i parametara procesa izražena u postotku od nominalne vrijednosti.

Treba razmotriti neizvjesnost parametara karakterističnog polinoma u iznosu od $\pm 10\%$, $\pm 20\%$, $\pm 50\%$, $\pm 60\%$ u odnosu na nominalni iznos te odrediti robusnu stabilnost.

Prijenosna funkcija zatvorenog kruga sustava s nominalnim parametrima

$$G_z(s) = \frac{16(s+3)}{(s+6)(s^2 + 4s + 8)}$$

Karakteristični polinom

$$\alpha_{cl}(s) = s^3 + 10s^2 + 32s + 48$$

Polovi zatvorenog nominalnog sustava

$$s_1 = -6.0000$$

$$s_2 = -2.0000 + 2.0000i$$

$$s_3 = -2.0000 - 2.0000i$$

Polovi nominalnog zatvorenog sustava su u lijevoj poluravnini **→ sustav je stabilan**



Primjer 3

Određivanje robusne stabilnosti polinomima Karitonova



Karakteristični polinom nominalnog zatvorenog sustava

$$\alpha_{cl}(s) = s^3 + 10s^2 + 32s + 48$$

Granice neizvjesnosti parametara u odnosu na nominalni iznos
±10%, ±20%, ±50%, ±60%

Familija intervalskih polinoma ima oblik

$$\alpha_{cl}(s) = s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

Intervali neizvjesnosti za pojedine koeficijente određeni su izrazima

- a) $a_i = a_{in} \pm 10\% a_{in}$ $a_0 \in [43.2, 52.8]$ $a_1 \in [28.8, 35.2]$ $a_2 \in [9, 11]$
- b) $a_i = a_{in} \pm 20\% a_{in}$ $a_0 \in [38.4, 57.6]$ $a_1 \in [25.6, 38.4]$ $a_2 \in [8, 12]$
- c) $a_i = a_{in} \pm 50\% a_{in}$ $a_0 \in [24.0, 72.0]$ $a_1 \in [16.0, 48.0]$ $a_2 \in [5, 15]$
- d) $a_i = a_{in} \pm 60\% a_{in}$ $a_0 \in [19.2, 76.8]$ $a_1 \in [12.8, 51.2]$ $a_2 \in [4, 16]$

Polinomi Karitonova

a

$$K_{1a}(s) = s^3 + 11s^2 + 28.8s + 43.2$$

$$K_{2a}(s) = s^3 + 9s^2 + 35.2s + 52.8$$

$$K_{3a}(s) = s^3 + 9s^2 + 28.8s + 52.8$$

$$K_{4a}(s) = s^3 + 11s^2 + 35.2s + 43.2$$

b

$$K_{1b}(s) = s^3 + 12s^2 + 25.6s + 38.4$$

$$K_{2b}(s) = s^3 + 8s^2 + 38.4s + 57.6$$

$$K_{3b}(s) = s^3 + 8s^2 + 25.6s + 57.6$$

$$K_{4b}(s) = s^3 + 12s^2 + 38.4s + 38.4$$

c

$$K_{1c}(s) = s^3 + 15s^2 + 16s + 24$$

$$K_{2c}(s) = s^3 + 5s^2 + 48s + 72$$

$$K_{3c}(s) = s^3 + 5s^2 + 16s + 72$$

$$K_{4c}(s) = s^3 + 15s^2 + 48s + 72$$

d

$$K_{1d}(s) = s^3 + 16s^2 + 12.8s + 19.2$$

$$K_{2d}(s) = s^3 + 4s^2 + 51.2s + 76.8$$

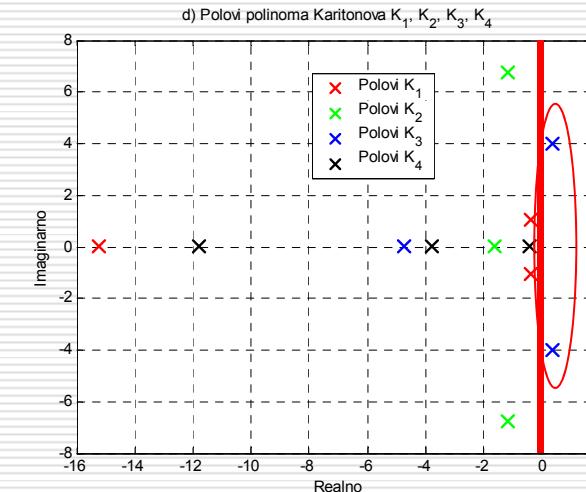
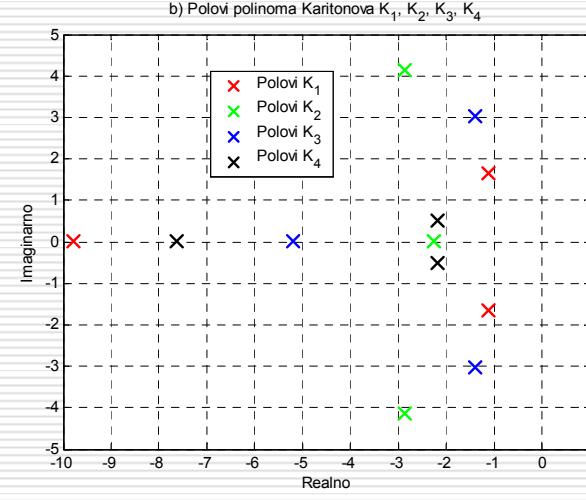
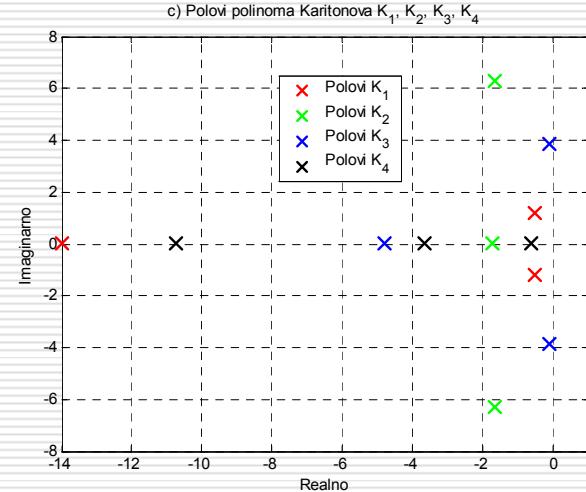
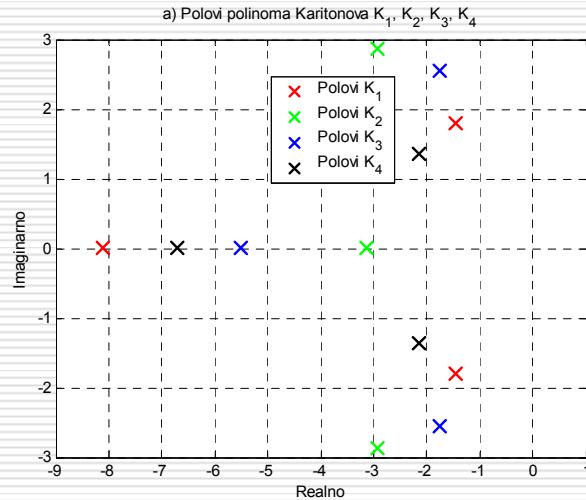
$$K_{3d}(s) = s^3 + 4s^2 + 12.8s + 76.8$$

$$K_{4d}(s) = s^3 + 16s^2 + 51.2s + 19.2$$



Primjer 3

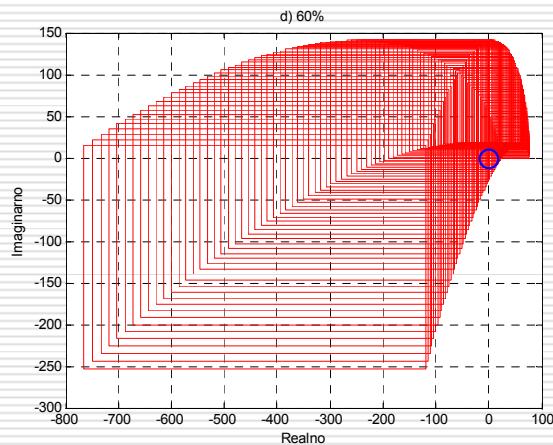
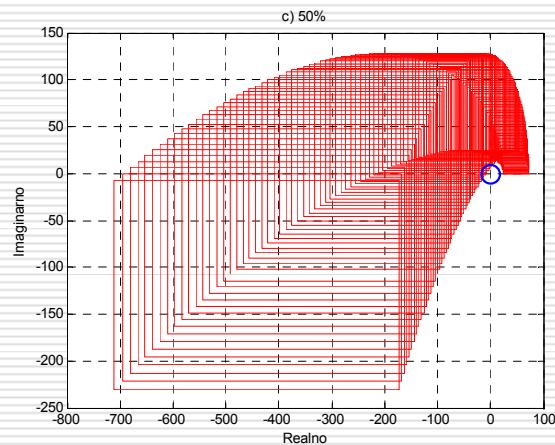
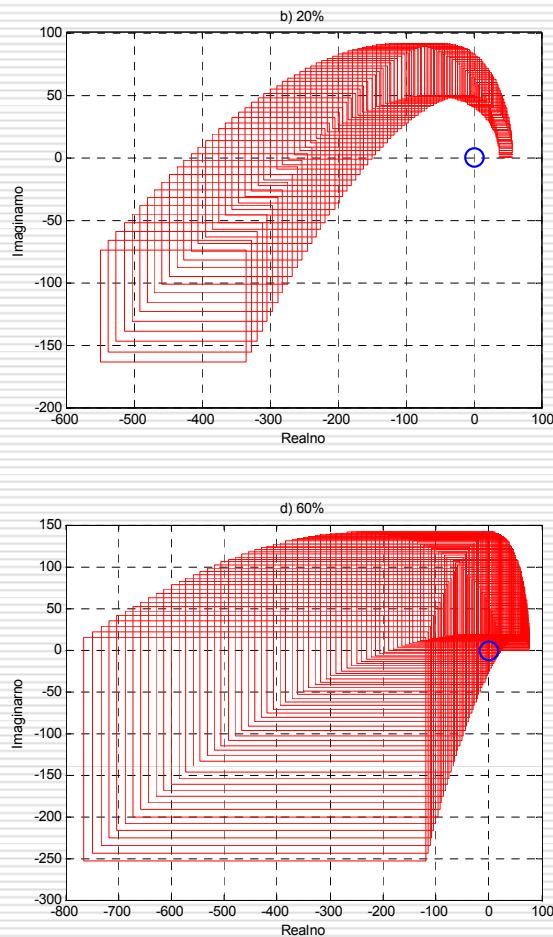
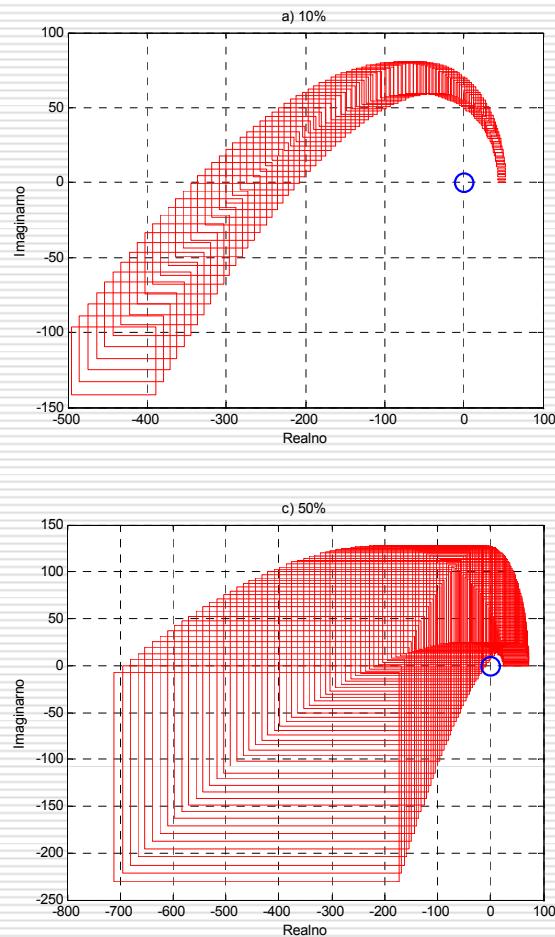
Polovi polinoma Karitonova za 4 slučaja





Primjer 3

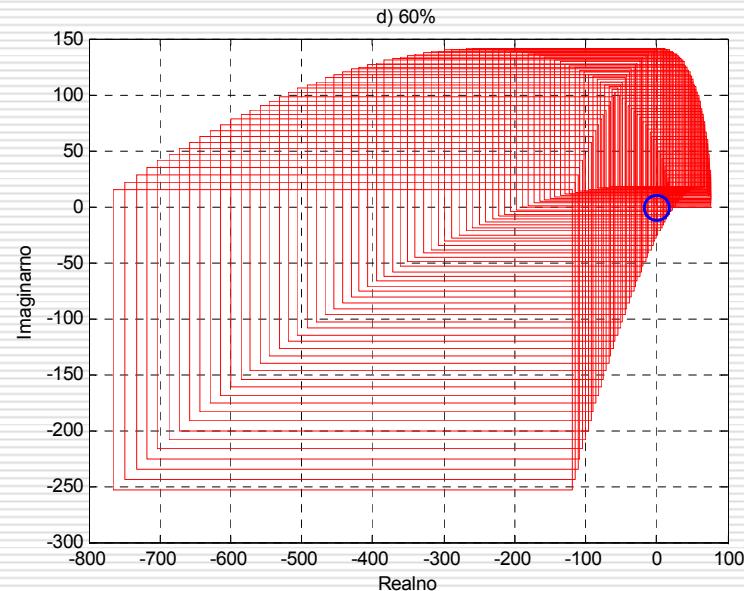
Polovi polinoma Karitonova za 4 slučaja



Primjer 3

Polovi polinoma Karitonova za 4 slučaja

- Za neizvjesnost promjene parametara od 60%
 - krivulja se giba u smjeru suprotnom od kazaljke na satu
 - neke krivulje od 1. do 3. kvadranta mogu proći kroz ishodište ili 4. kvadrant
 - kvadrati obuhvaćaju ishodište i 4. kvadrant.
- Nema robusne stabilnosti za ovu neizvjesnost parametara





Važnost analize robusne stabilnosti



- Niti jedan model ne daje pravu sliku stvarnog sustava
- Regulator mora dati tražene performanse realnog sustava, a ne samo njegovog matematičkog modela
- Ne bi trebalo koristiti regulator koji nije u stanju osigurati stabilnost uz malu promjenu parametara sustava
 - analizom robusne stabilnosti mogu se odrediti maksimalne dozvoljene promjene parametara da bi sustav ostao stabilan



Problem numeričke nestabilnosti

- Analizom robusnosti se analizira utjecaj neizvjesnosti parametara procesa i regulatora na stabilnost procesa
- Realizacija regulatora na digitalnom računalu
 - Problem
 - Točnost računanja (cjelobrojna aritmetika)
 - Stabilnost algoritama
 - nije dozvoljeno upotrebljavati degeneričke i skoro degeneričke vektore i matrice
 - Različita točnost sa različitim realizacijama prijnosne funkcije u diskretnom obliku (serijski paralelni, ...)
 - Imati na umu broj bitova kod računanja i potrebu za cjelobrojnim računanjem
 - Primjer računanje korijena polinoma u Matlabu i faktorizacija korištenjem simboličkih varijabli

$$\alpha_{cl}(s) = s^6 - 12s^5 + 59s^4 - 152s^3 + 216s^2 - 160s + 48$$