3.12.2009.

Analiza i projektiranje računalom
2. međuispit

1. (2) Odredite istinitost sljedećih tvrdnji:
   a. Fibonaccijev postupak postiže jednaku redukciju unimodalnog intervala u svakom koraku.
   b. Pronalaženje minimuma na pravcu u trodimenzijskom prostoru nije moguće postupkom zlatnog reza.
   c. U Powellovom postupku ne koristi se gradijent funkcije cilja.
   d. Sva eksplicitna ograničenja mogu se odstraniti uvođenjem pomoćnih varijabli.
2. (2) Unimodalni interval funkcije jedne varijable je [0,10]. Koliko je iteracija postupka zlatnog reza potrebno kako bi se interval smanjio na manje od 0.001 (k = 0.618)?
3. (2) Funkcija cilja $f(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+(z+2)^2$ optimira se simpleks postupkom po Nelderu i Meadu. Tvori li skup točaka (1,2,1), (2,1,1), (3,2,1) i (-1,0,1) simpleks? Ako je potrebno, promijenite točke tako da tvore simpleks te odredite centroid dobivenog skupa točaka.
4. (2) Zadana je funkcija cilja $F(\underline{x})=(x_1+3)^2+(x_2-2)^2$. U koordinatnoj ravnini x_1/x_2 skicirati postupak pronalaženja minimuma zadane funkcije postupkom traženja u smjerovima koordinatnih osi od početne točke (1,1). U koliko iteracija se dolazi do rješenja?
5. (2) Navedite barem dvije transformacije parametara kojima se mogu izbjeći eksplicitna ograničenja oblika $x_i \leq 0$.
6. (3) Zadana je funkcija cilja $F(x,y)=\left|(x-y)\cdot(x+y)\right|+\sqrt{(x^2+y^2)}$ kojoj se traži minimum. Provedite Hooke-Jeeves postupak uz početni pomak Δ=1 po svakoj koordinati i uz početnu točku (3,3) dok vrijednost pomaka ne padne na 0.25. Komentirajte dobiveno rješenje (odgovara li minimumu funkcije)!
7. (3) Zadana je funkcija dvije varijable $F(\underline{x})=x_1{}^2+(x_2-1)^2$ uz sljedeća ograničenja: $x_1,x_2\in[0,\infty)$, $x_1-x_2\geq 0$, $x_1+2x_2^2=0$. Transformirajte zadani problem u problem bez ograničenja na mješoviti način.
8. (4) Odredite početni smjer traženja minimuma za funkciju $F(\underline{x})=a\cdot(x_1-1)^2+b\cdot(x_2+3)^2$ postupkom najbržeg spusta iz početne točke (2,0). U kakvom odnosu moraju biti parametri a i b kako bi postupak najbržeg spusta pronašao minimum u jednoj iteraciji?
9. (5) Zadana je funkcija cilja dvije varijable $F(\underline{x})=x_1{}^2+(x_2-1)^2$ kojoj se traži minimum, uz implicitno ograničenje $\left|x_1x_2\right|-8\leq 0$ te eksplicitna ograničenja $x_1,x_2\in[-10,10]$. Uz trenutni skup točaka (2,4), (1,0), (4,2), (0,2) te faktor refleksije α = 2 provedite dvije iteracije postupka po Box-u. Na početku svake iteracije napišite trenutni skup točaka i njihov centroid.

APR 2.MI 2009.

1. a) NE
?b) DA
c) NE
d) DA

2. $[0, 10]$ ZLATNI REZ $k = 0{,}618$

$\underline{I_0 = 10}$ $(10-0)$ $I_f = 0.001$ $\boxed{I_0 \cdot k^n < \varepsilon}$ $10 \cdot 0{,}618^n < 0.001 \; / \log$

$\overset{1}{\log} 10 \cdot N \cdot \overset{-0{,}209}{\log} 0{,}618 < \overset{-3}{\log} 0{,}001$ $N \cdot (-0.209) < -3$ $N > 14.354$ $\underline{N = 15}$ ITERACIJA

3. $f(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2$ SIMPLEKS POSTUPAK PO NELDERU I MEADU

SKUP TOČAKA $(1,2,1)$ $(2,1,1)$ $(3,2,1)$ $(-1,0,1)$ NE TVORI SIMPLEKS

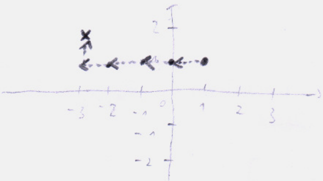
x	$\overset{1}{(1,2,1)}$,	$\overset{2}{(3,1,-1)}$,	$\overset{3}{(4,5,0)}$,	$\overset{4}{(-1,0,-2)}$
f(x)	13	6	38	4

$X(4) = X_3$

$$x_c = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1+3-1 \\ 2+1+0 \\ 1-1-2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}}$$

4. $F(\underline{x}) = (x_1+3)^2 + (x_2-2)^2$ x_1 / x_2 POSTUPAK PO KOORDINATNIM OSIMA. U KOLIKO ITERACIJA SE DOLAZI DO RJEŠENJA

$-3, 2$ $\underline{x}_0 = [1, 1]^T$



1,1
0

1,0 ili 1,2 ili 2,1 ili $\boxed{0,1 \atop 10}$
20 16 26

0,0 ili 0,2 ili ~~X~~ ili $\boxed{-1,1 \atop 5}$
13 9

$\boxed{-2,1 \atop 2}$ ili -1,0 ili -1,2 ili ~~X~~
8 4

$\boxed{-3,1 \atop 1}$ ili -2,0 ili -2,2 ili ~~X~~
5 1

$\boxed{-3,2 \atop 0}$ ili -3,0 ili -4,1 ili ~~X~~
4 2

<u>5 ITERACIJA</u>

5. IZBJEGAVANJE EKSPLICITNIH OGRANIČENJA $X_i \leq 0$
UVOĐENJE NOVIH VARIJABLI ZA ODSTRANJIVANJE EKSPLICITNIH OGRANIČENJA
i) UVOĐENJE NOVIH VARIJABLI
ii) TRANSFORMACIJA U PROBLEM BEZ OGRANIČENJA NA MIJEŠANI NAČIN
iii) S VANJSKOM POČETNOM TOČKOM
iiii) S UNUTARNJOM POČETNOM TOČKOM

6. $F(x,y) = |(x-y)\cdot(x+y)| + \sqrt{x^2+y^2}$ MINIMUM HOOKE-JEEVES POSTUPAK $\Delta_0 = 1$ $\Delta_c = 0.25$
$x_0 \; (3,3)$

X_B	X_P	X_N	$f(X_N)$	$<$	$f(X_B)$
3,3	3,3	2,2	$\sqrt{8}$	DA	$\sqrt{18}$
	1,1	0,0	0	DA	$\sqrt{8}$
2,2	-2,-2	-1,-1	$\sqrt{2}$	NE, $\Delta = 0.5$	0
0,0	-1,-1	-0.5,-0.5	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	DA	$\sqrt{2}$
-1,-1	0,0	0,0	0	DA	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
-0.5,-0.5	0.5,0.5	0,0	0	NE $\Delta x = 0.25$ STOP	0
0,0					

ODGOVARA MINIMUMU FUNKCIJE

$$\underline{x_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

APR 2. MI 2009.

---

7. $F(\underline{x}) = x_1^2 + (x_2-1)^2$ ograničenja $x_1, x_2 \in [0, \infty>$

$x_1 - x_2 \geq 0$

$x_1 + 2x_2^2 = 0$

TRANSFORMIRAJTE U PROBLEM BEZ OGRANIČENJA NA MJEŠOVITI NAČIN

$$U(\underline{x}, r) = F(\underline{x}) - r \sum_{i=1}^{l} \ln g_i(\underline{x}) + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{k} h_j^2(\underline{x})$$

$g_1: x_1 \geq 0$

$g_2: x_2 \geq 0$

$g_3: x_1 - x_2 \geq 0$

$h_1: x_1 + 2x_2^2 = 0$

$$U(\underline{x}, r) = x_1^2 + (x_2-1)^2 - r \cdot \left[\ln x_1 + \ln x_2 + \ln(x_1 - x_2)\right] + \frac{1}{r} \cdot \left(x_1 + 2x_2^2\right)^2$$

$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \ldots = 0$

$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \ldots = 0$

IZJEDNAČI / DOBIJ $x_1(r)$ i $x_2(r)$

---

8. $F(\underline{x}) = a \cdot (x_1 - 1)^2 + b \cdot (x_2 + 3)^2$ $\quad X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

METODA NAJBRŽEG SPUSTA

U KAKVOM ODNOSU MORAJU BITI a i b KAKO BI POSTUPAK NAJBRŽEG SPUSTA DAO MINIMUM U JEDNOJ ITERACIJI.

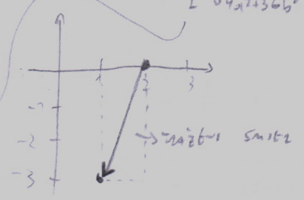
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2a \cdot (x_1 - 1) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 2b \cdot (x_2 + 3) \end{aligned}\right\} \nabla f \Rightarrow \nabla f|_{x_0} = \begin{bmatrix} 2a \\ 6b \end{bmatrix} \Rightarrow \|\nabla f\| = \sqrt{4a^2 + 36b^2} \Rightarrow v = \begin{bmatrix} \frac{2a}{\sqrt{4a^2+36b^2}} \\ \frac{6b}{\sqrt{4a^2+36b^2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ -3\lambda \end{bmatrix}$$

$x_1 = -\lambda$

$x_2 = -3\lambda$

NIJE VAŽNO ZA ZADATAK

$$\cancel{f(x_0 + \lambda \cdot v)} = a \cdot \left(2 + \lambda \cdot \frac{2a}{\sqrt{4a^2+36b^2}}\right)^2 + b \cdot \left(\lambda \cdot \frac{6b}{\sqrt{4a^2+36b^2}}\right)$$



$$-\frac{2a}{\sqrt{4a^2+36b^2}} = -\frac{6b}{\sqrt{4a^2+36b^2}} \cdot \frac{1}{3} \qquad 2a = \frac{6b}{3} \qquad 2a = 2b \qquad \boxed{a = b}$$

$\Rightarrow$ MORAJU BITI JEDNAKI

---

9. $F(\underline{x}) = x_1^2 + (x_2-1)^2$ MIN. IMPLICITNO: $|x_1 \cdot x_2| - 8 \leq 0$ EKSPLICITNA: $x_1, x_2 \in [-10, 10]$

POSTUPAK PO BOXU, $\alpha = 2$, 2 ITERACIJE

i)

x	2,4	1,0	4,2	0,2
$f(x)$	13	2	17	1

$\uparrow$ $x(h)$ (pod stupcem 4,2)

$$\underline{x}_c = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2+1+0 \\ 4+0+2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_r = (1+\alpha) \cdot \underline{x}_c - \alpha \cdot \underline{x}(h) = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

EKSPLICITNA: ok IMPLICITNA: $\underline{x}_2' = \frac{1}{2}(\underline{x}_c + \underline{x}_2) = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ok $f(\underline{x}_2') = 5$ ok, NIJE NAJLOŠIJE

ii)

x	2,4	1,0	0,2	-2,2
$f(x)$	13	2	1	5

$\uparrow$ $x(h)$ (pod stupcem 2,4)

$$\underline{x}_c = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1+0-2 \\ 0+2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_2 = (1+\alpha) \cdot \underline{x}_c - \alpha \cdot x(h) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \end{bmatrix}$$

EKSPLICITNA: OK

IMPLICITNA

$$\underline{x}_2' = \frac{1}{2}(\underline{x}_c + \underline{x}_2) = \begin{bmatrix} -8/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

ok

PROVJERA $f(\underline{x}_2') = 7,\dot{1} + 5,\dot{4} = 12,\dot{5}$ DAKLE JE I DALJE NAJLOŠIJE

o.o

$\underline{x}_2'' = \frac{1}{2}(\underline{x}_c + \underline{x}_2') = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

iii)

$(1,0), (0,2),$

$(-2,2), (-\frac{3}{2}, 0)$

✓