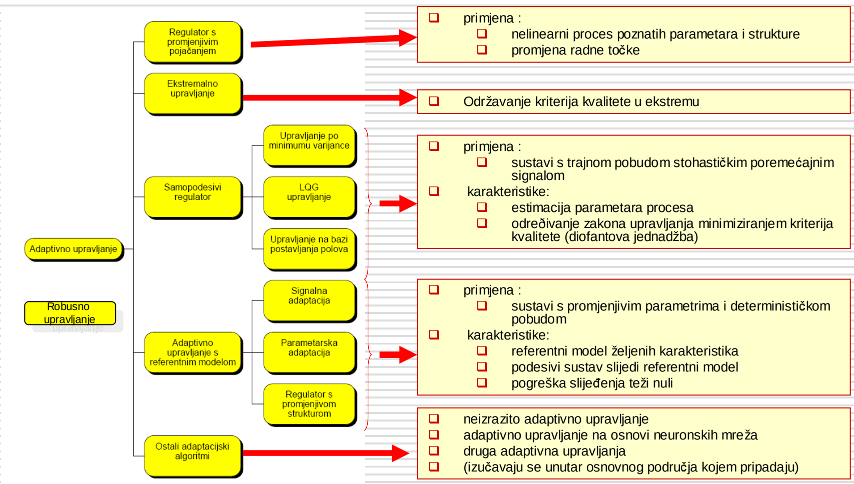
Identifikacija parametara modela

http://www.fer.hr/predmet/aru_a

prof. dr. sc. Željko Ban

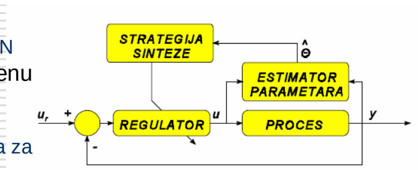
e-mail: *zeljko.ban@fer.hr*

Podjela adaptivnog upravljanja



Adaptivno upravljanje na osnovi samopodesivih regulatora

- Svojstva
  - Osigurava traženu kvalitetu regulacije bez obzira na promjene parametara sustava
  - Parametri regulatora se određuju u realnom vremenu iz parametara estimiranog modela procesa
  - Estimirani model procesa LINEARAN
- Koraci tijekom rada u realnom vremenu
  - Estimacija parematara modela
  - Sinteza regulatora
  - Proračun signala izlaza iz regulatora za slijedeći korak diskretizacije
- Vrsta modela
  - Linearni
  - Jedan ulaz jedan izlaz (SISO)
  - S konstantnim parametrima
  - Diskretni



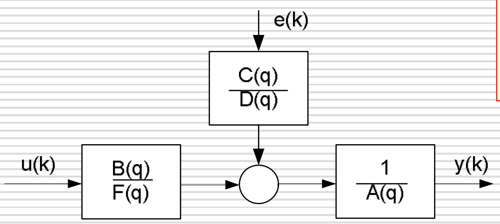
Vrste modela sustava

Opći oblik diskretnog linearnog SISO modela s konstantnim parametrima

q^{-1} – operator kašnjenja za jedan korak diskretizacije
$q^{-1}f(k)=f(k-1)$

$$A(q)\cdot y(k)=\frac{B(q)}{F(q)}u(k)+\frac{C(q)}{D(q)}e(k)$$

y – izlazna varijaba
u – ulazna varijabla
e – nezavisna nekorelirana slučajna poremećajna varijabla sa srednjom vrijednosti 0 i standardnom devijacijom σ



$$A(q)=1+a_1q^{-1}+a_2q^{-2}+\ldots+a_{na}q^{-na}$$
$$B(q)=1+b_1q^{-1}+b_2q^{-2}+\ldots+b_{nb}q^{-nb}$$
$$C(q)=1+c_1q^{-1}+c_2q^{-2}+\ldots+c_{nc}q^{-nc}$$
$$D(q)=1+d_1q^{-1}+d_2q^{-2}+\ldots+d_{nd}q^{-nd}$$
$$F(q)=1+f_1q^{-1}+f_2q^{-2}+\ldots+f_{nf}q^{-nf}$$

Vrste modela sustava

Specijalizirani modeli su podskupovi općeg modela

Opći model $A(q)\cdot y(k)=\frac{B(q)}{F(q)}u(k)+\frac{C(q)}{D(q)}e(k)$

ARMAX

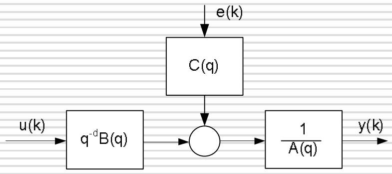
Auto Regresive Moving Average eXogenous

$$A(q)\cdot y(k)=q^{-d}\cdot B(q)\cdot u(k)+C(q)\cdot e(k)$$

Ay – Auto regresion

Bu – extra input

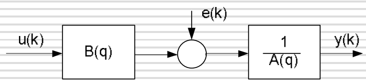
Ce – Moving avarage of the white noise



ARX

Auto Regresive eXtra input

$$A(q)\cdot y(k)=B(q)\cdot u(k)+e(k)$$



Vrste modela sustava

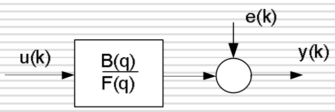
Specijalizirani modeli su podskupovi općeg modela

Opći model $A(q)\cdot y(k)=\frac{B(q)}{F(q)}u(k)+\frac{C(q)}{D(q)}e(k)$

OE

Output error

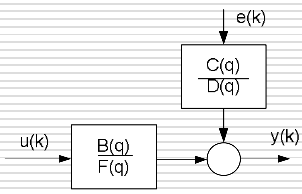
$$y(k)=\frac{B(q)}{F(q)}u(k)+e(k)$$



BJ

Box-Jenkins

$$y(k)=\frac{B(q)}{F(q)}u(k)+\frac{C(q)}{D(q)}e(k)$$

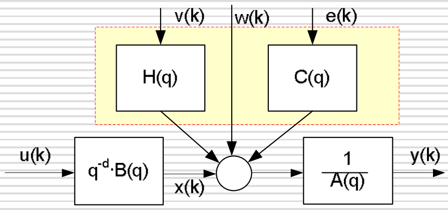


Vrste modela sustava

Model sustava s mjerljivom smetnjom i driftom

$$\boxed{A(q)\cdot y(k) = q^{-d}\cdot B(q)\cdot u(k) + H(q)\cdot v(k) + w(k) + C(q)\cdot e(k)}$$

u(k) – upravljački ulaz
v(k) – mjerljivi poremećaj
w(k) – drift
e(k) - slučajni poremećaj



$$A(q) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + \ldots + a_{na}q^{-na}$$
$$B(q) = b_0 + b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + \ldots + b_{nb}q^{-nb}$$
$$C(q) = 1 + c_1q^{-1} + c_2q^{-2} + \ldots + c_{nc}q^{-nc}$$
$$H(q) = h_0 + h_1q^{-1} + h_2q^{-2} + \ldots + h_{nh}q^{-nh}$$

$$w(k) = w_0 + w_1k + w_2k^2 + \ldots + w_{nw}q^{nw}$$

w(k) – drift je modeliran pomoću polinomske funkcije vremena

Većina slučajeva drifta se može prikazati s $w(k)=w_0$

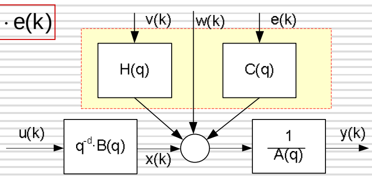
Odabir karakteristika modela

- Odabrani model mora
  - dobro opisivati sustav
  - imati najjednostavniju strukturu koja dobro opisuje sustav
  - biti najnižeg mogućeg reda za dobar opis sustava
- Za potrebe adaptivnog upravljanja
  - estimacija u realnom vremenu
  - fiksira se struktura modela (kod definiranja algoritma)
  - fiksira se red modela
  - fiksira se korak uzorkovanja
- Metode identifikacije
  - Metoda najmanjih kvadrata *(Least Squares – LS)*
  - Metoda pomoćnih varijabli *(Instrumental Variable – IV)*
  - Metoda najveće sličnosti (*Maximum – Likelihood –ML)*

Regresijski oblik modela

pogodan za identifikaciju metodom najmanjih kvadrata

$$\boxed{A(q)\cdot y(k) = q^{-d}\cdot B(q)\cdot u(k) + H(q)\cdot v(k) + w(k) + C(q)\cdot e(k)}$$



$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_{na} q^{-na}$$
$$B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \ldots + b_{nb} q^{-nb}$$
$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \ldots + c_{nc} q^{-nc}$$
$$H(q) = h_0 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \ldots + h_{nh} q^{-nh}$$
$$w(k) = w_0 + w_1 k + w_2 k^2 + \ldots + w_{nw} q^{nw}$$

$$\boxed{y_k = \Theta^T \cdot \varphi_k + e_k = \varphi_k^T \Theta \cdot + e_k}$$

Vektor parametara

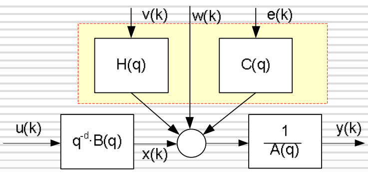
$$\Theta^T = \left[\underbrace{-a_1 \quad -a_2 \quad \cdots \quad -a_{na}}_{na} \; \underbrace{b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{nb}}_{nb+1} \; \underbrace{h_0 \quad h_1 \quad \cdots \quad h_{nh}}_{nh+1} \; \underbrace{w_0 \quad w_1 \quad \cdots \quad w_{nw}}_{nw+1} \; \underbrace{c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_{nc}}_{nc}\right]$$

$$\varphi^T = \left[\underbrace{y_{k-1} \quad y_{k-2} \quad \cdots \quad y_{k-na}}_{na} \; \underbrace{u_{k-d} \quad u_{k-d-1} \quad \cdots \quad u_{k-d-nb}}_{nb+1} \; \underbrace{v_k \quad v_{k-1} \quad \cdots \quad v_{k-nh}}_{nh+1} \right.$$
$$\left. \underbrace{1 \quad k \quad \cdots \quad k^{nw}}_{nw+1} \; \underbrace{e_{k-1} \quad e_{k-2} \quad \cdots \quad e_{k-nc}}_{nc}\right]$$

Vektor regresije

Regresijski oblik modela - primjer

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_{na} q^{-na}$$
$$B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \ldots + b_{nb} q^{-nb}$$
$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \ldots + c_{nc} q^{-nc}$$
$$H(q) = h_0 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \ldots + h_{nh} q^{-nh}$$
$$w(k) = w_0 + w_1 k + w_2 k^2 + \ldots + w_{nw} q^{nw}$$



Primjer:
k=6
na=3, nb=2, d=1, nh=1, nw=1, nc=1

$$\begin{aligned} \Theta^T &= [-a_1 \quad -a_2 \quad -a_3 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad h_0 \quad h_1 \quad w_0 \quad w_1 \quad c_1] \\ \varphi^T(6) &= [y_5 \quad y_4 \quad y_3 \quad u_5 \quad u_4 \quad u_3 \quad v_6 \quad v_5 \quad 1 \quad 6 \quad e_5] \end{aligned}$$

$$\boxed{y_6 = \Theta^T \cdot \varphi_6 + e_6 = \varphi_6^T \Theta \cdot + e_6}$$

Algoritam najmanjih kvadrata

Početna jednadžba

$$\boxed{y_k = \Theta^T \cdot \varphi_k + e_k = \varphi_k^T \Theta \cdot + e_k}$$

Predikcija izlazne varijable uz vektor parametara Θ iz prošlog koraka

$$\boxed{\hat{y}(k \mid \Theta) = \Theta^T (k-1) \cdot \varphi(k)}$$

uz e(k) nekorelirani bijeli šum očekivanje iznosi

$$E\{e(k)\} = 0$$

Pogerška predikcije

$$\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k \mid \Theta)$$

Uz poznatu strukturu modela i mjerene podatke iz vektora φ izlazna varijabla sustava se opisuje sa

$$y(k) = \varphi^T(k)\hat{\Theta} + \hat{\varepsilon}(k)$$

$\hat{\Theta}$ – estimirani vektor parametara modela

$\hat{\varepsilon}(k)$ – pogreška estimacije u trenutku k

Cilj je odrediti $\hat{\Theta}$ sa svojstvom da pogreška estimacije $\hat{\varepsilon}$ bude minimalna

$$\hat{\varepsilon}(k) = e(k) + \varphi^T(k)\left[\Theta - \hat{\Theta}\right]$$

Ako se postigne $\Theta = \hat{\Theta}$ vrijedi:

$$\hat{\varepsilon}(k) \approx e(k) \quad \text{za} \quad \Theta \approx \hat{\Theta}$$

Algoritam najmanjih kvadrata

Vektor parametara u općem obliku

$$\Theta^T = \left[\underbrace{-a_1 \ -a_2 \ \cdots \ -a_{na}}_{na} \ \underbrace{b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{nb}}_{nb+1} \ \underbrace{h_0 \ h_1 \ \cdots \ h_{nh}}_{nh+1} \ \underbrace{w_0 \ w_1 \ \cdots \ w_{nw}}_{nw+1} \ \underbrace{c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_{nc}}_{nc}\right]$$

ima ***npar*** parametara:

npar=na+nb+1+nh+1+nw+1+nc

Za uspješnu estimaciju, sustav mora raditi dovoljno dugo da se formira N vektora podataka, gdje je:

N>npar

Vektori imaju oblik

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix} \hat{\Theta} + \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}(1) \\ \hat{\varepsilon}(2) \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}(N) \end{bmatrix}$$

$$Y = \Phi\hat{\Theta} + \hat{E}$$

gdje su:

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{bmatrix}; \quad \hat{E} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}(1) \\ \hat{\varepsilon}(2) \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}(N) \end{bmatrix}$$

$$\hat{E} = Y - \Phi\hat{\Theta}$$

Princip najmanjih kvadrata

Suma kvadrata razlike mjerenog vektora Y i estimiranog izlaznog vektora mora biti minimalna.

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\hat{\varepsilon}_i^2(k) = \frac{1}{2}\hat{E}^T\hat{E} = \frac{1}{2}\left\|\hat{E}\right\|^2$$

Otežana suma kvadrata razlike mjerenog vektora Y i estimiranog izlaznog vektora (težinski faktori – mjera preciznosti)

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}q_i\hat{\varepsilon}_i^2(k) = \frac{1}{2}\hat{E}^TQ\hat{E}$$

Kriterij najmanjih kvadrata

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2}\hat{E}^T\hat{E} = (Y - \Phi\hat{\Theta})^T(Y - \Phi\hat{\Theta})$$

$$J(\hat{\Theta}) = Y^TY - Y^T\Phi\hat{\Theta} - \hat{\Theta}^T\Phi^TY + \hat{\Theta}^T\Phi^T\Phi\hat{\Theta}$$

Traženje ekstrema
-derivacija kriterija po parametrima = 0
-(Jacobian matrica)

$$\frac{\partial J(\hat{\Theta})}{\partial\hat{\Theta}} = \Phi^T\Phi\hat{\Theta} - Y^T\Phi$$

Minimum se postiže uz pozitivnu 2. derivaciju kriterija po parametrima (Hessian)

$$\left[\frac{\partial^2 J(\hat{\Theta})}{\partial^2\hat{\Theta}}\right] = \Phi^T\Phi \geq 0$$

Princip najmanjih kvadrata

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\hat{\varepsilon}_i^2(k) = \frac{1}{2}\hat{E}^T\hat{E} = \frac{1}{2}\left\|\hat{E}\right\|^2$$

Izjednačavanjem gradijenta s nulom dobije se izraz za estimirane parametre:

$$\frac{\partial J(\hat{\Theta})}{\partial\hat{\Theta}} = \Phi^T\Phi\hat{\Theta} - Y^T\Phi = 0$$

$$\hat{\Theta}_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TY = \Phi^{\dagger}Y$$

gdje je

$\Phi^{\dagger}$ – pseudoinverz od Φ

Pseudoinverzna matrica matrice Φ postoji ako matrica Φ ima puni rang (zadovoljeno uz stalnu pobudu sustava test signalom)

Pogreška estimacije (rezidui – ostaci)

$$\hat{E} = R^T = [\eta(1) \quad \eta(1) \quad \cdots \quad \eta(N)]$$

Iz jednadžbe

$$\hat{E} = R^T = Y - \Phi\hat{\Theta}_{LS}$$

proizlazi

$$\Phi^TY = \Phi^T\Phi\hat{\Theta}_{LS} + \Phi^TR$$

$$\Phi^TR = 0$$

Princip najmanjih kvadrata

Iz definicije rezidua

$$R = \left(y - \Phi\hat{\Theta}_{LS}\right)$$

i uvjeta

$$\Phi^T R = 0$$

$$\left[\varphi(1) \quad \varphi(2) \quad \cdots \quad \varphi(N)\right] R = 0$$

proizlazi

$$\sum_{k=1}^{N} y(k-i)\eta(k) = 0 \, \forall \quad i = 1,2,\ldots na$$

$$\sum_{k=1}^{N} u(k-i)\eta(k) = 0 \, \forall \quad i = 1,2,\ldots nb+1$$

Za velik broj N, uvjeti poprimaju oblik

$$E\left\{y(k-i)\eta(k)\right\} = 0 \qquad \forall \quad i = 1,2,\ldots,na$$

$$E\left\{u(k-i)\eta(k)\right\} = 0 \qquad \forall \quad i = 1,2,\ldots,nb+1$$

Svojstva estimatora
na osnovi najmanjih kvadrata

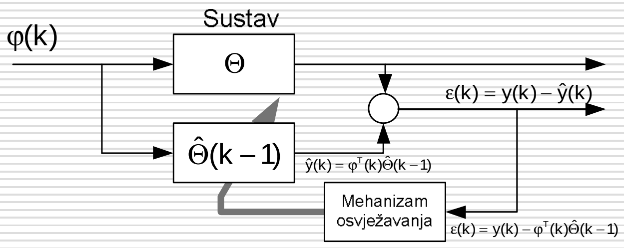
- RLS - Recursive Least Square
- Svojstva
  - $\hat{\Theta}_{LS}$ je slučajna varijabla
    - može se analizirati pomoću jednadžbe
      $y(k) = \varphi^T(k)\hat{\Theta} + \hat{\varepsilon}(k)$
    - karakteriziraju je
      - bias
        - sistemska pogreška estimiranih parametara
      - kovarijanca
        - raspršenje estimiranih parametara uzrokovanih slučajnom pogreškom

Svojstva RLS estimatora

- Bias
  - Uzimajući jednadžbu
    $$y(k)=\varphi^T(k)\hat{\Theta}+\hat{\varepsilon}(k)$$
    - za k=1,2, ..., N
  - Dobije se
    $$Y=\Phi\hat{\Theta}+\hat{E}$$
  - Uvrštenjem u jednadžbu estimiranih parametara
    $$\hat{\Theta}_{LS}=\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T Y$$
  - Dobije se
    $$\hat{\Theta}_{LS}=\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\left[\Phi^T\Phi\Theta+\Phi^T\hat{E}\right]=$$
    $$=\Theta\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\hat{E}$$
  - Srednja devijacija estimiranih parametara od stvarne vrijednosti određena je sa
    $$\hat{\Theta}_{LS}-\Theta=\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\hat{E}$$
  - Uz determinističke podatke u Φ i srednju vrijednost e(k) jednaku 0, očekivanje pogreške parametara ima oblik
    $$E\left\{\hat{\Theta}_{LS}-\Theta\right\}=\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T E_E\left\{\hat{E}\right\}=0$$
  - Uz slučajne ali nezavisne elemente matrice Φ dobije se očekivanje
    $$E\left\{\hat{\Theta}_{LS}-\Theta\right\}=E_\Phi\left\{\left(\Phi^T\Phi\right)^{-1}\Phi^T\right\}E_E\left\{\hat{E}\right\}=0$$
    - indeks Φ i E označavaju očekivanje s obzirom na Φ i E objekte
- Zaključak
  - Potrebna asimptotska nekoreliranost šuma e i podataka Φ za estimaciju bez pogreške

RLS estimator

- Ne osvježavaju se svi podaci u svakom koraku k
  - ne računa se cijeli
    $$\hat{\Theta}_{LS}(k)$$
  - dodaje se samo jedan novi podatak i računa se
    $$\hat{\Theta}_{LS}(k+1)$$
  - Rekurzivni proces prikazan slikom



RLS estimator

Za $\hat{\Theta}_{LS}$ uzimajući podatke od 1 do k estimimrani parametri imaju oblik

$$\hat{\Theta}_{LS} = \left(\Phi^T(k)\Phi(k)\right)^{-1}\Phi^T(k)Y(k) \qquad \hat{\Theta}_{LS}(k+1) = \left(\Phi^T(k+1)\Phi(k+1)\right)^{-1}\Phi^T(k+1$$

$\Phi(k)$ je vremenska funkcija i zasnovan je na podacima u vremenskim koracima od 1 do t

$$Y(k) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \end{bmatrix}; \quad \Phi(k) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(k) \end{bmatrix}$$

$$\Phi^T(k+1)\Phi(k+1) = \begin{bmatrix} \Phi^T(k) & \varphi(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(k) \\ \varphi^T(k+1) \end{bmatrix}$$
$$= \Phi^T(k)\Phi(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

U trenutku k+1 određuje se novo mjerenje iz procesa tako da se dobije

$$Y(k+1) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix}; \quad \Phi(k+1) = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(k) \\ \varphi^T(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi(k) \\ \varphi^T(k+1) \end{bmatrix}$$

RLS estimator

Estimirani parametri u trenutku k+1 imaju oblik

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = \left(\Phi^T(k+1)\Phi(k+1)\right)^{-1}\Phi^T(k+1)Y(k+1)$$

Prema tome je

$$\Phi^T(k+1)\Phi(k+1) = \begin{bmatrix} \Phi^T(k) & \varphi(k+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi(k) \\ \varphi^T(k+1) \end{bmatrix}$$
$$= \Phi^T(k)\Phi(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

Na taj način se lako odrede nove vrijednosti za $\Phi^T(k+1)\Phi(k+1)$ no problem je odrediti njihovu inverznu matricu direktno (rekurzivnom metodom) bez potrebe za treženjem kompletne inverzne matrice u svakom koraku.

Osim toga potrebno je izračunati $\Phi^T(k+1)Y(k+1)$

RLS estimator

Uvrštenjem vrijednosti za

$$\Phi^T(k+1) \quad i \quad Y(k+1)$$

Dobije se

$$\Phi^T(k+1)Y(k+1) = \left[\Phi^T(k) \quad \varphi(k+1)\right]\begin{bmatrix} Y(k) \\ y(k+1) \end{bmatrix}$$

$$= \Phi^T(k)Y(k) + \varphi(k+1)y(k+1)$$

Uvođenjem oznaka

$$P(k) = \left[\Phi^T(k)\Phi(k)\right]^{-1}$$

$$B(k) = \Phi^T(k)Y(k)$$

Jednadžbe estimiranih parametara u k i k+1 koraku imaju oblik

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = P(k+1)B(k+1)$$

$$\hat{\Theta}_{LS}(k) = P(k)B(k)$$

Uz

$$\Phi^T(k+1)\Phi(k+1) = \Phi^T(k)\Phi(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

Slijedi

$$P^{-1}(k+1) = P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

Uz

$$\Phi^T(k+1)Y(k+1) = \Phi^T(k)Y(k) + \varphi(k+1)y(k+1)$$

Slijedi

$$B(k+1) = B(k) + \varphi(k+1)y(k+1)$$

Rekurzivno računanje novih vrijednosti

RLS estimator

Lema inverzije matrica
Neka su:

$$A = P^{-1}(k) \quad B = \varphi(k+1) \quad C = 1 \quad D = \varphi^T(k+1)$$

Matrice kompatibilnih dimenzija tako da postoji produkt i suma oblika

$$A + BCD = P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)$$

Tada vrijedi

$$\left[A + BCD\right]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B\left[C^{-1} + DA^{-1}B\right]^{-1}DA^{-1}$$

Uzimajući vrijednosti matrica prema polinomima estimacije dobije se

$$\left[P^{-1}(k) + \varphi(k+1)\varphi^T(k+1)\right]^{-1} = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1 + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

Temeljem ove leme riješen je problem inverzije matrice u svakom koraku
(dijeljenje sa skalarom u svakom koraku)

RLS estimator

Prema lemi inverzije

$$\left[P^{-1}(k)+\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)\right]^{-1}$$

$$=P(k)-\frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1+\varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

P(k) je pozitivno definitna matrica jednaka kovarijancnoj matrici od $\Theta(k)$

s očekivanjem $\hat{\Theta}_{LS}(k)$

dobije se

$$\boxed{P(k+1)=P(k)-\frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1+\varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}}$$

Zamjenom $y(k+1)$ iz jednadžbe $\varepsilon(k+1)=y(k+1)-\varphi^T(k+1)\hat{\Theta}_{LS}(k)$

$$=y(k+1)-\hat{y}(k+1)$$

U jednadžbu

$$B(k+1)=B(k)+\varphi(k+1)y(k+1)$$

dobije se

$$\boxed{B(k+1)=B(k)+\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)\hat{\Theta}_{LS}(k)+\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)}$$

RLS estimator

Iz jednadžbe

$$P^{-1}(k+1)\hat{\Theta}_{LS}(k+1)=\left[\underbrace{P^{-1}(k)+\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}_{P^{-1}(k+1)}\right]\hat{\Theta}_{LS}(k)+\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$

množenjem sa P(k+1) dobije se

$$\boxed{\hat{\Theta}_{LS}(k+1)=\hat{\Theta}_{LS}(k)+\underbrace{P(k+1)\varphi(k+1)}_{L(k+1)}\varepsilon(k+1)}$$

RLS algoritam

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = \hat{\Theta}_{LS}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$

$$\varepsilon(k+1) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\Theta}_{LS}(k)$$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1+\varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

Za ARMAX model s d=1 i C(q)=1 regresijski vektor ima oblik

$$\varphi^T(k) = \begin{bmatrix} -y_{k-1} & \cdots & -y_{k-na} & u_{k-1} & \cdots & u_{k-nb-1} \end{bmatrix}$$

Vektor estimiranih parametara

$$\hat{\Theta}_{LS} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \cdots & \hat{a}_{na} & \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \cdots & \hat{b}_{nb} \end{bmatrix}$$

Pseudokod RLS algoritma

Inicijaliziraj algoritam sa P(0), $\hat{\Theta}(0)$

Formiraj $\varphi(k+1)$ iz novih mjerenih podataka

Formiraj $\varepsilon(k+1)$ iz novih mjerenih podataka

$$\varepsilon(k+1) = y(k+1) - \varphi^T(k+1)\hat{\Theta}(k)$$

Izračunaj $P(k+1)$

$$P(k+1) = P(k) - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)P(k)}{1+\varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}$$

Izračunaj $\hat{\Theta}(k+1)$

$$\hat{\Theta}(k+1) = \hat{\Theta}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$

Čekaj slijedeći korak diskretizacije

Svojstva RLS algoritma

- RLS algoritam estimira samo koeficiente polinoma A i B
- RLS ne daje dobre rezultate uz obojeni šum
- Ukoliko se kao pogreška uzme $C(q)\hat{e}(k)$
  - dobiva se pogreška (bias) kod estimacije polinoma A i B

Inicijalizacija estimatora

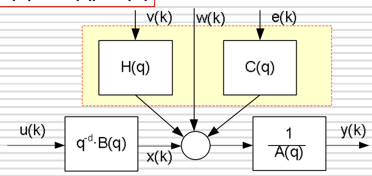
- Inicijalizacija početnih parametara estimatora
  - Vektor regresije $\varphi(0)$
  - Početni vektor parametara $\hat{\Theta}_{LS}(0)$
  - Početna matrica kovarijance $P(0)$

Inicijalizacija vektora regresije φ(0)

- Sakupljanje podataka prije pokretanja algoritma rekurzivne estimacije
  - broj potrebnih koraka za skupljanje podataka
    - ovisi o modelu

$$\boxed{A(q)\cdot y(k) = q^{-d}\cdot B(q)\cdot u(k) + H(q)\cdot v(k) + w(k) + C(q)\cdot e(k)}$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \ldots + a_{na} q^{-na}$$
$$B(q) = b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \ldots + b_{nb} q^{-nb}$$
$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \ldots + c_{nc} q^{-nc}$$
$$H(q) = h_0 + h_1 q^{-1} + h_2 q^{-2} + \ldots + h_{nh} q^{-nh}$$
$$w(k) = w_0 + w_1 k + w_2 k^2 + \ldots + w_{nw} q^{nw}$$



$$\boxed{\kappa = \max\{na,\quad nb+1,\quad nh+1,\quad nw+1,\quad nc\}}$$

Inicijalizacija vektora regresije φ(0) *Primjer*

Primjer

Proces opisan sa:

$$y(k) = \varphi^T(k)\hat{\Theta}$$

gdje su:

$$\hat{\Theta}^T = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{b}_0 & \hat{b}_1 & \hat{b}_2 \end{bmatrix}$$
$$\varphi^T(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) & u(k-2) & u(k-3) \end{bmatrix}$$

- vektor regresije treba
  - 3 koraka da sakupi dovoljno prošlih vrijednosti u(k)
- u četvrtom koraku
  - startanje rekurzivnog estimatora

Inicijalizacija vektora parametara $\hat{\Theta}_{LS}(0)$

- Početna vrijednost vektora parametara
  - nije ključna za konvergenciju postupka estimacije
  - prednost
    - djelomično poznavanje parametara procesa
  - nepoznati parametri
    - Pretpostavka
      - Sustav je jedan integrator s jediničnim pojačanjem $G(z) = \frac{h}{z-1}$

$$\begin{bmatrix} \text{Parametri} \\ a_i \quad b_i \end{bmatrix} = \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_i = 0 \quad \forall \quad i \neq 1 \\ b_0 = h \\ b_i = 0 \quad \forall \quad i \neq 0 \end{cases}$$

Inicijalizacija matrice kovarijance P(0)

- Početna vrijednost P(0) ovisi o
  - nesigurnosti nepoznatih parametara
    - parametri polinoma A,B,C mogu imati različite početne nesigurnosti
- Standardni odabir
  - $P(0)=r\, I_{npar}$
    - r – skalar
    - I_{npar} – jedinična matrica dimenzije npar
    - npar – broj parametara za estimaciju
- Odabir r:

$$r = \begin{cases} \text{velik} & 100 < r < 1000 \\ \text{mali} & 1 < r < 10 \end{cases}$$

- Svojstva odabira
  - velik
    - brži odziv algoritma estimacije
    - veće fluktuacije parametara (i upravljačkog signala)
  - mali
    - spor odziv algoritma
    - sporije promjene parametara
    - glađi upravljački signal

Inicijalizacija matrice kovarijance P(0)

Primjer

Primjer

Proces opisan sa:

$$y(k) = \varphi^T(k)\hat{\Theta}$$

gdje su:

$$\hat{\Theta}^T = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 & \hat{a}_2 & \hat{b}_0 & \hat{b}_1 \end{bmatrix}$$

Pretpostavka boljeg poznavanja koeficijenata a1 i a2 i slabijeg poznavanja koeficijenata b0 i b1

$$P(0) = \begin{bmatrix} r_{a1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_{a2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{b0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{b1} \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} r_{a1} = r_{a2} \approx 100 \\ r_{b0} = r_{b1} \approx 1 \end{matrix}$$

Matrica kovarijance u trenutku k

$$P(k) = \left[P^{-1}(0) + \sum_{i=1}^{k} \varphi(i)\varphi^T(i) \right]^{-1}$$

- Velik P(0)
  - manji utjecaj od regresijskog vektora
    - (zbog recipročne vrijednosti P(0)
- Mali P(0)
  - velik utjecaj na P(k)
- Početno ponašanje rekurzivnog estimatora ovisi o
  - Odabiru $\varphi(0), \hat{\Theta}_{LS}(0)$ i P(0)
  - tipu sustava
  - obliku pobudnog signala

Primjer identifikacije

Proces je opisan jednadžbom

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1)$$

s parametrima

$$a = -0.8\ ;\ \ b(k) = 0.5 \quad \forall k > 0\ \ ;\ c = 0$$

e(k) je bijeli šum sa $E\{e(k)\}=0$ i $E\{e^2(k)\}=0.25$

Inicijalizacija parametara estimatora

$$P(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}\ ;\ \hat{\Theta}(0) = \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(k-1) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

za k=0

Pobudni signal
pravokutni signal perioda 100s
jedinične amplitude

Primjer identifikacije

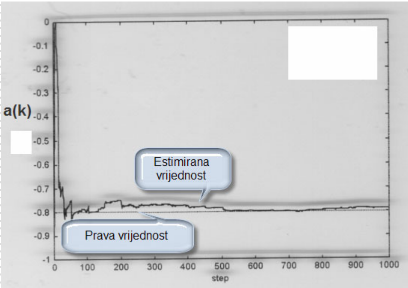
$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1)$$

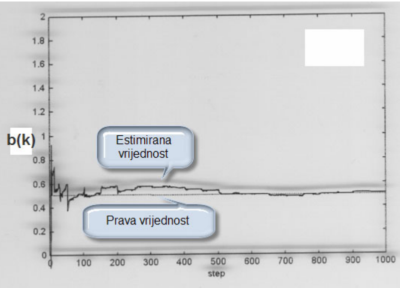
$$a = -0.8\ ;\quad b(k) = 0.5 \quad \forall k > 0\ \ ;\ c = 0$$

e(k) je bijeli šum sa E{e(k)}=0 i E{e^2(k)}=0.25

$$P(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}\ ;\ \hat{\Theta}(0) = \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(k-1) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$





Primjer identifikacije

proces s promjenjivim parametrima

Proces je opisan jednadžbom

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1)$$

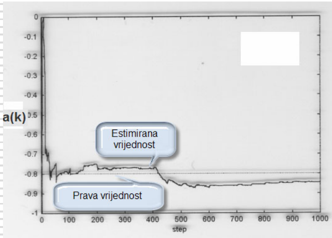
s parametrima

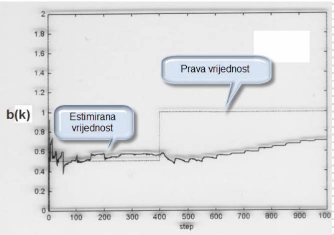
$$a = -0.8\ ; \qquad \forall k > 0\ \ ;\ c = 0 \qquad b(k) = \begin{cases} 0.5 \text{ for } 0 < k < 400 \\ 1 \text{ for } 400 \le k < \infty \end{cases}$$

e(k) je bijeli šum sa E{e(k)}=0 i E{e^2(k)}=0.25

Inicijalizacija parametara estimatora $P(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}\ ;\ \hat{\Theta}(0) = \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$

$\varphi(k-1) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$ za k=0





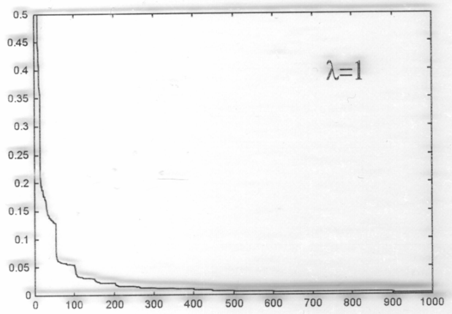
Primjer identifikacije

proces s promjenjivim parametrima

- Razlog loše estimacije
  - tijekom estimacije trag matrice kovarijance teži nuli

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{tr}\left[P(k)\right] \to 0$$

  - nakon toga algoritam ne reagira na promjenu parametara sustava



Nova vrijednost parametara je zasnovana na staroj

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1) = \hat{\Theta}_{LS}(k) + P(k+1)\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$

Novo mjerenje nije uzeto u obzir

Algoritam se "ugasio"

Algoritam za sustave s promjenjivim parametrima

- Poboljšanje algoritma upotrebom
  - Eksponencijalnog otežavanja podataka
  - Automatska promjena eksponencijalnog faktora zaboravljanja
  - Resetiranje matrice kovarijance
  - Modificiranje matrice kovarijance

Eksponencijalno otežavanje podataka

- Kriterij za izvod algoritma prelazi iz

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i \hat{\varepsilon}_i^2(k) = \frac{1}{2}\hat{E}^T Q \hat{E}$$

- u algoritam

$$J(\hat{\Theta}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \lambda^{k-i} q_i \hat{\varepsilon}_i^2(k)$$

- Odabir λ određen
  - brzom adaptacijom
  - dobom estimacijom
    - za $\lambda \approx 1$
      - greška predikcije starija od T_m iznosi
      - $e^{-1} \approx 36\%$ prema novijim podacima
      - $T_m = 1/(1-\lambda)$

Algoritam matrice kovarijance

$$P(k+1) = \left[I - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}{\lambda(k+1) + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \right] \frac{P(k)}{\lambda(k+1)}$$

$\lambda(k)$ – eksponencijalni faktor zaboravljanja

$0<\lambda<1$

Prema iskustvu najbolje je uzeti

$0.95<\lambda<0.99$

Preporučeni izbor: **λ=0.98**

Primjer identifikacije

proces s promjenjivim parametrima

Za proces opisan jednadžbom

$$y(k) + ay(k-1) = bu(k-1) + e(k) + ce(k-1)$$

$$b(k) = \begin{cases} 0.5 \text{ for } 0 < k < 400 \\ 1 \text{ for } 400 \leq k < \infty \end{cases}$$

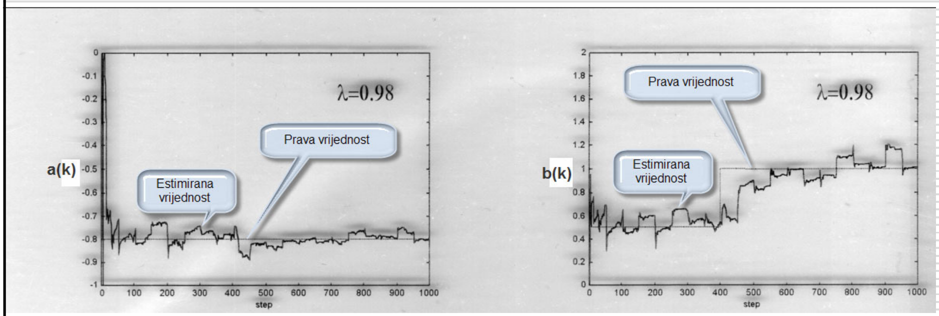
$a = -0.8$; $\forall k > 0$; $c = 0$

e(k) je bijeli šum sa E{e(k)}=0 i E{e^2(k)}=0.25

Inicijalizacija parametara estimatora

$$P(0) = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} ; \hat{\Theta}(0) = \begin{bmatrix} \hat{a}(0) \\ \hat{b}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(k-1) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & u(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$ za k=0



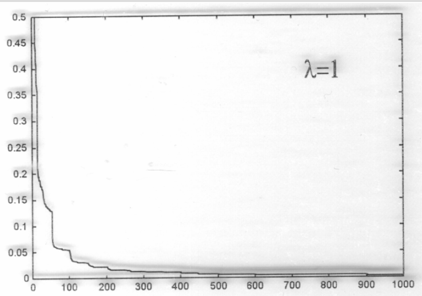
Primjer identifikacije

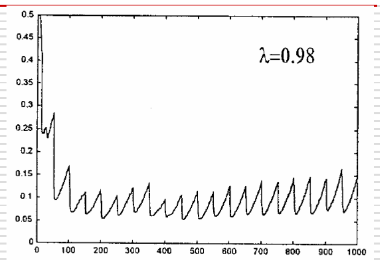
proces s promjenjivim parametrima

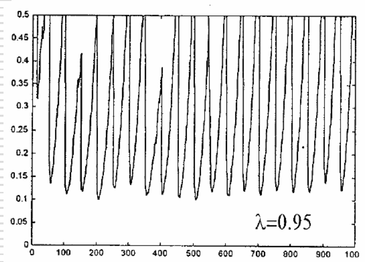
- Trag kovarijancne matrice

Nova vrijednost parametara je zasnovana na staroj

$$\hat{\Theta}_{LS}(k+1)=\hat{\Theta}_{LS}(k)+P(k+1)\varphi(k+1)\varepsilon(k+1)$$







Vremenski promjenjivi

eksponencijalni faktor zaboravljanja

- Vremenska promjena parametra λ

$$\boxed{\begin{aligned}&\lambda(k)=\lambda_0\lambda(k-1)+(1-\lambda_0)\\&\text{uz}\\&\lambda_0=0.99\\&\lambda(0)=0.95\end{aligned}}$$

- u algoritam

$$\boxed{P(k+1)=\left[I-\frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}{\lambda(k+1)+\varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)}\right]\frac{P(k)}{\lambda(k+1)}}$$

- Svojstva
  - λ se mijenja od 0.95 do 0.99
  - veća brzina algoritma estimacije u početku
- Optimalni izbor faktora zaboravljanja uzima u obzir
  - brzo praćenje promjene parametara
    - veća osjetljivost na šum
  - što manje oscilacija estimiranih parametara
    - veća inercija estimatora
- Preporuka odabira
  - brze promjene parametara procesa
    - brzo zaboravljanje mjerenih signala
  - spore promjene parametara ili ako nema perzistentne pobude
    - sporo zaboravljanje

Resetiranje matrice kovarijance

- Resetiranje matrice kovarijance P(k)
  - osiguranje da trag matrice ne postane premali
  - svakih k_i koraka matrica se resetira na vrijednost koja sprečava gašenje algoritma
- Prim.: nakon k_i koraka:

$$\boxed{P(k_i) = \beta_i I_{npar}} \qquad r = \begin{cases} \text{velik} & 100 < r < 1000 \\ \text{mali} & 1 < r < 10 \end{cases}$$

  - β_i – skalar β_i <r
- Nepogodnost
  - izgubljena eksponencijalna konvergencija
  - aktuator stalno aktivan

Svojstva RLS algoritma

- Matrica P(k) mora biti pozitivno definitna
  - računa se oduzimanjem dviju pozitivno definitnih matrica

$$\boxed{P(k+1) = \left[I - \frac{P(k)\varphi(k+1)\varphi^T(k+1)}{\lambda(k+1) + \varphi^T(k+1)P(k)\varphi(k+1)} \right] \frac{P(k)}{\lambda(k+1)}}$$

  - Numerička greška računanja
    - P(k) može prestati biti pozitivno definitna
      - divergencija algoritma estimacije
  - U adaptivnom upravljanju
    - mora se definirati rezervni plan spašavanja sustava u slučaju divergencije algoritma estimacije.

Svojstva RLS algoritma

- RLS algoritam
  - brza konvergencija
  - pouzdan
  - jednostavan za implementaciju
- Opasnost
  - divergencija algoritma zbog negativno definitne P(k) zbog akumulacije numeričke pogreške računanja

Uzrok divergencije

- Konstantan faktor zaboravljanja $\lambda<1$
- Nestabilan numerički algoritam za računanje matrice kovarijance P(k)
- Upotreba neperzistentnog pobudnog signala
- Nemjerljivi poremećaji u sustavu
  - opasnost kad referentni signal nije perzistentno pobuđen
- Nemodelirana dinamika procesa