Analiza i projektiranje računalom

1. (5) Korištenjem LUP dekompozicije odredite rješenje danog sustava. (napomena: iz postupka moraju biti vidljivi svi koraci kako se došlo do rješenja).
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$
2. (5) Zadana je funkcija $f(\underline{x}) = a * (x_1 - 3)^2 + b * (x_2 + 5)^2 + c * x_1 * x_2$, gdje su a, b i c proizvoljne realne konstante. Odredite sve vrijednosti konstanti za koje će sljedeći postupci u jednom koraku iz bilo koje početne točke doći do minimuma funkcije: gradijentni spust (s određivanjem optimalnog pomaka), Newton-Raphson, pretraživanje po koordinatnim osima, Powellow postupak (s početnim smjerovima $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{7}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$). Napomena: za svaki postupak objasnite odabir koeficijenata.
3. (5) Genetskim algoritmom pronalazi se minimum funkcije $f(x) = (x-2)^2$ u intervalu $x \in [-8.45, 12]$ i preciznošću od dvije decimale uz korištenje binarnog prikaza. Odredite dva susjedna realna broja (s obzirom na željenu preciznost) koji će u binarnom prikazu imati najveću Hammingovu udaljenost (najveći broj različitih bitova) i prikažite ih binarno. Ako se navedene dvije jedinke križaju pomoću križanja s jednom točkom prekida, odredite koliko se različitih rješenja može dobiti. Ako je vjerojatnost mutacije jednog bita jednaka 0.03, odredite vjerojatnost da se jedna od jedinki s početka zadatka promijeni u drugu jedinku. Odredite može li se križanjem s jednom točkom prekida navedenih jedinki dobiti optimalno rješenje.
4. (5) Po uzoru na IEEE 754 standard definiran je prikaz brojeva s jednim bitom za predznak, 4 bita za eksponent i 5 bitova za frakciju. Odredite koja je maksimalna apsolutna pogreška koja se može dobiti oduzimanjem dva broja u ovom prikazu i pokažite na primjeru gdje se ona događa. Odredite koja je minimalna apsolutna greška (veća od 0) koja se može dobiti oduzimanjem 2 broja u ovom prikazu i pokažite na primjeru. Odredite koja je maksimalna relativna greška koja se može dogoditi oduzimanjem dva broja u ovom prikazu i pokažite na primjeru. Napomena: u svim slučajevima vrijednosti NaN, $+\infty$ i $-\infty$ se ne uzimaju u obzir.
5. (5) Zadana je diferencijalna jednadžba:
$$\dot{x} = -3.3x + t$$
Koristeći obrnuti Eulerov i Eulerov postupak, provedite dvije iteracije prediktorsko-korektorskog postupka oblika P(EC)^{2}E uz T=0.1 i $x(t=0) = 1$ (bez obzira na stabilnost). Odredite stabilnost postupka za zadanu diferencijalnu jednadžbu uz zadani period integracije (zanemarivši pri tome vremenski ovisni član sustava).
6. (5) Zadana je funkcija $f(\underline{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 3)^2$ i početna točka $x_0 = (-10,10)$. Minimum funkcije se traži u smjeru vektora $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Korištenjem Fibonnacijevog postupka odredite optimalni iznos pomaka na pravcu u smjeru danog vektora, ako je početni unimodalni interval za udaljenost na pravcu jednak [-8, 13] i željena preciznost 1.
7. (5) Zadana je funkcija cilja $f(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 2)^2$ kojoj se traži minimum, uz ograničenja $x_1 - x_2 \leq 2$ te $x_1 \in [0,4]$, $x_2 \in [-2,7]$. Skicirajte dopušteno područje i označite minimum uz ograničenja. Uz početni skup točaka (0,3), (1,3), (3,3), (2,0) te faktor refleksije α = 2, provedite dvije iteracije postupka po Boxu. Na početku svake iteracije napišite trenutni skup točaka i njihov centroid. Odredite skup točaka za koji postupak neće pronaći minimum problema s ograničenjima (sve točke moraju biti međusobno različite i zadovoljavati sva ograničenja).
8. (5) Zadan je sustav nelinearnih jednadžbi:
$$x^2 = 3$$
$$x^3 = 7$$
Provedite dvije iteracije rješavanja sustava korištenjem prikladne metode, uz početnu vrijednost varijable x=1.