



Sveučilište u Zagrebu
Fakultet strojarstva i brodogradnje



Zavod za robotiku i automatizaciju proizvodnih sustava
Katedra za strojarsku automatiku

OPĆA TEORIJA SUSTAVA

Robusno upravljanje: MDS sustav

SEMINARSKI RAD

Danijel Matešić

Zagreb, 2008.

Sadržaj

Sadržaj	ii
Popis slika	iv
Popis tablica	vi
Popis oznaka	1
1. Uvod	1
1.1. Prijenosne funkcije sustava u zatvorenoj sprezi	6
1.2. LFT: Linearna transformacija razlomka	8
1.3. Pojam robusnosti i greška modeliranja	10
1.4. Robusna stabilnost	12
1.5. Robusna performansa	15
1.6. Pregled zakona za stabilnost i performansu	16
1.7. Povezanost stabilnosti i performanse SISO sustava	17
1.8. Strukturirana singularna vrijednost	18
1.9. Analiza robsne performanse korištenjem SSV	20
1.10. H_∞ upravljanje	22
2. Formulacija problema	25
2.1. Objekt upravljanja	25
3. Frekvencijska analiza	33
3.1. Sinteza regulacijskog kruga	33

3.1.1.	Nominalna stabilnost i performanse	34
3.1.2.	Robusna stabilnost	35
3.1.3.	Povezanost modela	37
4.	Suboptimalni H_∞ regulator	39
5.	Analiza zatvorenog sustava sa regulatorom	42
6.	Zaključak	50
7.	Matlab kodovi	52
7.1.	Prilog A - Matlab kodovi	52
7.1.1.	Prilog A-1	53
7.1.2.	Prilog: Frekvencijska karakteristika	54
7.1.3.	Prilog: Težinske funkcije	54
7.1.4.	Prilog: Otvoreni sustav	55
7.2.	Prilog B -(Sub)Optimalni H_∞ regulator	57
7.3.	Prilog B -(Sub)Optimalni H_∞ regulator	57
7.4.	Prilog C Analiza robusnosti	58
7.5.	Prilog D Analiza nominalne i robusne performanse	59
7.6.	Prilog E Analiza robusnosti MDS sustava na referencu i poremećaj	60
	Literatura	61

Popis slika

1.1	Struktura regulacijskog kruga.	2
1.2	Interna stabilnost regulacijskog kruga.	5
1.3	Sustav sa povratnom spregom	8
1.4	Tipičan izgled težinske funkcije ω_P (gore), moduli težinske i funkcije osjetljivosti (sredina) i krive performanse (dolje)	9
1.5	Prijenosne funkcije kao linearne transformacije razlomka - LFT	9
1.6	Multiplikativna (lijevo) i aditivna (desno) skupna greška modeliranja	10
1.7	Sustav u zatvorenoj petlji sa multiplikativnom greškom modeliranja	13
1.8	Krivulja prijenosne funkcije L_p	13
1.9	Strukture MIMO sustava za: (a)-sintezu regulatora, (b)- analizu robusne performanse, (c)-analizu robusne stabilnosti	13
1.10	Prikaz robusne performanse RP	16
1.11	Prikaz prevođenja analize robusne performanse na analizu robusne stabilnosti	17
1.12	Prikaz skaliranja matricom D	19
1.13	Struktura sustava za analizu robusne performanse	20
1.14	Izjednačavanje zakona za robusnu stabilnost i performansu	21
1.15	Struktura modela H_∞ optimalnog upravljanja	22
2.1	MDS sustav	25
2.2	Blok dijagram MDS sustava	26
2.3	Reprezentacija nepoznatih parametara kroz Linearne transformacije	28
2.4	Blok dijagram MDS sustava sa nepoznatim parametrima	28

2.5	Ulazno izlazni blok dijagram MDS sustava	30
2.6	Rješenje G_{mds}	31
2.7	Linearna reprezentacija MDS sustava sa uključenom Δ matricom .	32
3.1	Frekvencijska karakteristika perturbiranih modela	34
3.2	Struktura zatvorenog kruga	35
3.3	Singularne vrijednosti $1/w_p$	36
3.4	Struktura otvorene petlje	38
3.5	Prikaz poopćenog otvorenog sustava	38
3.6	Struktura zatvorene petlje	38
4.1	Struktura zatvorene petlje H_∞ regulatora	39
4.2	Dobiveni rezultati (sub)optimalnog kontrolera	41
5.1	Singularne vrijednosti regulacijskog kruga sa K_{hin}	43
5.2	Osjetna funkcija sa K_{hin}	44
5.3	Robusna analiza stabilnosti regulatora K_{hin}	45
5.4	Robusna i nominalna performansa K_{hin}	47
5.5	Odziv sustava na Step pobudu K_{hin}	48
5.6	Odziv sustava na poremećaj K_{hin}	49

Popis tablica

1.1	Prikaz zakona za stabilnost i performansu	16
-----	---	----

Poglavlje 1.

Uvod

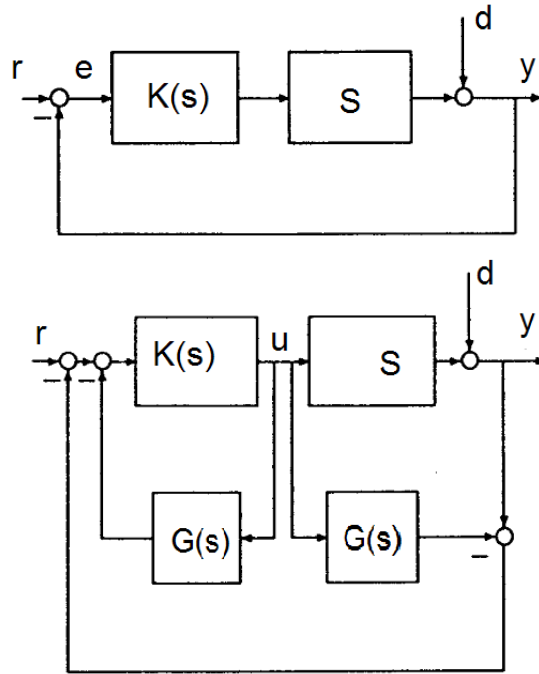
Tema ovog seminarskog rada je analiza stabilnosti mehaničkog MDS sustava primjenom robusnog upravljanja. Mnogi problemi koji se javljaju u teoriji upravljanja mehaničkim sustavima, upravljivi su u smislu poznavanja matematičkog modela sustava iz kojega se izvodi zakon upravljanja za zadani tip objekta upravljanja. Suvremene metode upravljanja zasnivaju se na prevodenju izrazito nelinearnih modela u ekvivalentne linearne modele metodom eksterne linearizacije. Nakon navedene transformacije primjenjuju se standardne metode sinteze linearnih sustava. Nasuprot tome robusno upravljanje, uz poremećajnu veličinu i nepoznavanje modela sustava predstavlja samu srž teorije upravljanja. Robusno upravljanje se počelo proučavati intenzivno od 1970 godine kada se ustanovilo da mnoge od popularnih metoda upravljanja, kao što su optimalno LQR upravljanje, kontrolno upravljanje observerom stanja vode do velike osjetljivosti takvih sustava na poremećajne veličine. Možemo reći da je nemodelirani dio sustava kritičniji od npr. poznavanja poremećajne veličine, zato jer utječe na stabilnost zatvorenog regulacijskog sustava dok poremećaj utječe samo na performanse regulacijskog kruga kojem je već ustanovljena stabilnost.

Ako govorimo o pravom robusnom upravljanju prvi počeci počinju 1980 -ih godina prema Zamesu [5] i Francisu [6] i njihovoj, sada dobro poznatoj H_∞ optimalnoj teoriji [7],[2],[8],[14],[15],[1],[9], [10].

Svaki postupak projektiranja regulatora kreće od nekog modela procesa kojim se

upravlja. Najčešće su to jednostavni linearni stacionarni modeli, relativno niskog reda, koji samo približno opisuju ponašanje realnog sustava. Ponašanje sustava može biti opisivano za zadani režim, za određene vanjske uvjete i za željeni frekvencijski opseg. Zakon upravljanja treba da bude robustan, odnosno da daje zadovoljavajuće rezultate i u slučaju kad postoje razlike između modela i realnog procesa, a to je ono što se u praksi javlja najčešće.

Na slici 1.1 je prikazana regulacijska petlja procesa (gore) prema [14] i proces i matematički model u regulacijskoj petlji (dolje).



Slika 1.1: Struktura regulacijskog kruga.

Ako sa S označimo proces koji kontroliramo, sa $K(s)$ matematički model linearnog regulatora, sa d vanjski poremećaj, a sa $G(s)$ linearni matematički model procesa u cilju da povratna sprega ostane nepromjenjena, možemo pisati:

$$C(s) = K(s) [I + G(s)K(s)]^{-1} \quad (1.1)$$

gdje je $f(s) = d(s) + \underbrace{[S - G(s)]}_{\Delta} u(s)$

Sa Δ je označena nepoznati dio sustava ili nemodelirani dio. On nam govori da matematički model nije egzaktna kopija procesa. Glavna razlika između klasičnog/modernog upravljanja i robusnog upravljanja leži u činjenici da je nemodeliranost eksplicitno uključena u hipotezu problema. Samim time, ako govorimo o robusnom upravljanju, riječ model nije jednaka riječi sustav. Najlakše je to objasniti ovako. Sustav se sastoji od skupa modela koji su vođeni glavnim (nominalnim modelom) i ograničenom (limitiranom) Δ . Δ uvijek treba biti ograničena jer ako bilo koji regulator spojimo na potpuno nepoznati sustav uvijek postoji mogućnost da je u zatvorenoj petlji on nestabilan. Bolje rečeno, sa sigurnošću je moguće garantirati stabilnost na modelu sa ograničenom (limitiranom) Δ . Glavni cilj robusne kontrole je odrediti potreban broj konzervativnih uvjeta koji sa sigurnošću određuju stabilnost kruga kao i performanse nepoznatog modela (limitirani skup modela) koji objašnjavaju ponašanje procesa. Kada se ta svojstva (stabilnost i performansa) odnose na nominalni model nazivaju se nominalna stabilnost i performansa. Kada se prethodno navedena svojstva odnose na cijeli skup modela ili nepoznati model nazivaju se robusna stabilnost i performansa.

U klasičnim SISO sustavima robusnost se postiže osiguranjem dobrog pojačanje ograničenih faznih karakteristika (phase margins). Sinteza regulatora koji rezultira stabilnim ali ograničenim faznim karakteristikama obično ima za posljedicu dobivanje dobro prigušenog sustava, a samim time i performansi. Kada su 1960-ih razvijani multivarijabilni sustavi težnja se stavljala na dobre performanse preko LQR kriterija isključujući robusnost sustava. U srži postoje dvije kategorije kontrolnih sustava. To su sustavi otvorene i sustavi zatvorene petlje (feedback). Većina industrijskih sustava su multivarijabilni sustavi (MIMO) sa snažnom spregom (*coupling*) između "kanala" sustava.

Dinamika sustava je često prikazana skupom diferencijalnih jednadžbi za otvoreni ili zatvoreni sustav. Za vremenski invarijantne sustave, koji će u ovom seminaru biti obrazloženi diferencijalne jednadžbe poprimaju linearnu osnovu u čemu leži i bit, a to je da se nelinearni sustavi opisani nelinearnim jednadžbama preveslaju u adekvatni linearni sustav na kojem se provodi sinteza. Svaki sustav se može opisati

nizom jednadžbi:

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.3)$$

gdje je $x(t) \in \mathbb{R}^n$ vektor stanja, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ vektor upravljanja, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ izlazni (mjereni) vektor, a A , B , C , D su karakteristične matrice.

Ako pretpostavimo vremenski invarijantni sustav i početna stanja jednaka 0, $u(t)=0$ te korištenjem Laplaceove transformacije jednadžbu (1.2) možemo pisati kao prijenosnu funkciju:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.4)$$

koja zapisana u kraćoj formi kao matrica izgleda:

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & : & B \\ \dots & & \dots \\ C & : & D \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

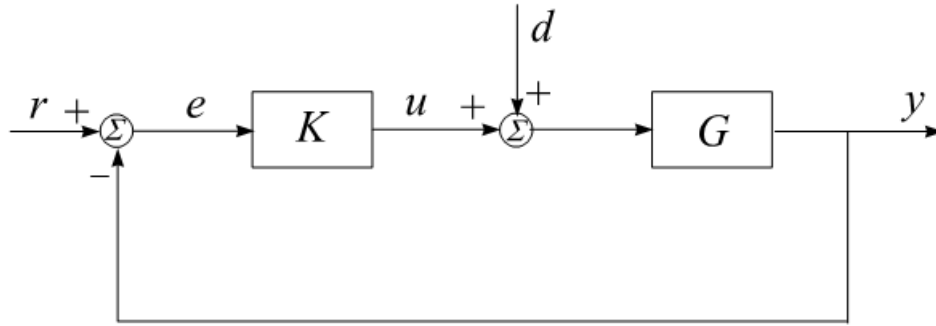
Bitno je znati da je H_∞ pristup fazno frekvencijska metoda (*FFK*), a za sustav opisan jednadžbama (1.2) se podrazumijeva da je potpuno kontrolabilan i obser-
vabilan. Ako gledamo sa stanovišta stabilnosti, povratna petlja će ublažiti utjecaj poremećaja uslijed nemodeliranog modela i osigurati željene performanse.

Isto tako neprimjeren regulator može djelovati destabilizirajuće u zatvorenom regulacijskom krugu iako je za otvorenu petlju primjeren. Za sustav opisan prijenosnom funkcijom kažemo da je stabilan ako za ograničenu vrijednost upravljačke varijable daje ograničeni izlaz. Poznat je pod nazivom *BIBO system* (Bounded input Bounded output). Ograničenja su obično dana npr. iznosima napona, hodom cilindra, kutom zakreta itd. Za naš sustav opisan jednadžbom (1.2) kažemo da je stabilan ako su polovi karakteristične jednadžbe u lijevoj polovici kompleksne ravnine sa negativnim realnim dijelovima.

Isto tako za naš model možemo definirati i asimptotsku stabilnost ako za bilo koja inicijalna stanja i $u(t) = 0$ sustav konvergira vrijednosti 0. Za vremenski invarijantni sustav opisan (1.2) sustav je asimptotski stabilan ako i samo ako su svojstvene vrijednosti matrice A u lijevoj polovici kompleksne ravnine sa pozitivnim realnim dijelovima.

Asimptotska stabilnost implicira i BIBO stabilnost ali ne i obrnuto. Ako je provedena minimalna realizacija A, B, C, D matrica onda BIBO stabilnost implicira asimptotsku stabilnost. Gore opisane stabilnosti su uvjetovane za zatvorene i otvorene regulacijske krugove.

Ako gledamo samo zatvoreni regulacijski krug mnogo je važnija unutrašnja (interna) stabilnost (*internal stability*) koja je predstavljena asimptotskom stabilnošću svih ulazno - izlaznih parova. Na slici 1.2 je prikazana struktura kao i zakon unutarnje stabilnosti.



Slika 1.2: Interna stabilnost regulacijskog kruga.

Ako pišemo prijenosne funkcije:

$$T_{yd} = G(I + KG)^{-1} \quad (1.6)$$

$$T_{ur} = K(I + GK)^{-1} \quad (1.7)$$

$$T_{ud} =_K G(I + KG)^{-1} \quad (1.8)$$

$$(1.9)$$

možemo reći da je prijenosna funkcija u matričnoj formi M interno stabilna od

$\begin{bmatrix} r \\ d \end{bmatrix}$ do $\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}$ prema [14] kako slijedi:

$$M = \begin{bmatrix} GK(I + GK)^{-1} & G(I + KG)^{-1} \\ K(I + GK)^{-1} & -KG(I + KG)^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Ako navedenu jednadžbu (1.10) napišemo kroz oblik svojstvenih vrijednosti dobivamo funkciju za internu stabinost sustava prema jednadžbi (1.12)

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} I - GK(I + GK)^{-1} & G(I + KG)^{-1} \\ K(I + GK)^{-1} & I - KG(I + KG)^{-1} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} I & -G \\ -K & I \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.12)$$

Isto tako prema [3] ako nema kraćenja nestabilnih nula polova između G i K , tada bilo koja od 4 prijenosne funkcije koja je *BIBO* stabilna garantira internu stabilnost cjelokupnog sustava.

1.1. Prijenosne funkcije sustava u zatvorenoj sprezi

Prema slici 1.3 možemo pisati sljedeće:

$$y = \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_{T} \cdot r + \underbrace{(I + GK)^{-1}G_d}_{S} \cdot d - \underbrace{(I + GK)^{-1}GK}_{T} \cdot n \quad (1.13)$$

U gornjoj jednadžbi $L = GK$ predstavlja prijenosnu povratnu funkciju prema [14], [13].

$S = (I + GK)^{-1} = (I + L)^{-1}$ je tzv. funkcija osjetljivosti, dok je

$T = (I + GK)^{-1}GK = (I + L)^{-1}L$ komplementarna funkcija osjetljivosti. Greška upravljanja je dana sa:

$$e = y - r = -S \cdot r + SG_d \cdot d - T \cdot n \quad (1.14)$$

U slučaju kada imamo opis sustava bez povratne sprege imamo:

$$y = GK \cdot r + G_d \cdot d + 0 \cdot n \quad (1.15)$$

Ako usporedimo jednadžbe (1.13) i (1.15) vidimo da se odziv na referencu i poremećaj razlikuje za faktor S u odnosu na sustav s povratnom spregom, pa možemo reći da ova funkcija predstavlja mjeru smanjenja osjetljivosti izlaza sustava nakon zatvaranja povratne sprege. Iz jednadžbe (1.14) se vidi da S predstavlja funkciju

prijenosa od r do e ili od $-d$ do e za slučaj kada je $G_d = 1$ odnosno osjetljivost sustava na promjenu reference ili djelovanje poremećaja na izlazu. S obzirom da je:

$$S + T = I \quad (1.16)$$

dobili smo *komplementarnu funkciju osjetljivosti*.

Funkcija osjetljivosti dobar je pokazatelj ponašanja sustava u zatvorenoj sprezi. Tipičan izgled amplitudne karakteristike povratne sprege je da ona ima visoke vrijednosti na niskim frekvencijama i da opada s porastom frekvencije. S obzirom da je $S = (I + L)^{-1}$, $|S(j\omega)|$ ima VF amplitudnu karakteristiku. Vrijednost funkcije osjetljivosti na vrijednosti $\omega = 0$ karakterizira ponašanje u stacionarnom stanju, jer je greška praćenja reference $S(0)r_0$, a greška u odbacivanju poremećaja $S(0)G_d(0)d_0$, gdje je $r_0 = r(s = 0)$ i $d_0 = d(s = 0)$. Frekvencija pri kojoj funkcija osjetljivosti dostiže vrijednost 0.7 može se smatrati kao indikator frekvencijskog opsega u kojem je sustav u stanju da uspješno prati referentni signal i odbacuje poremećaje. Maksimalna vrijednost $S(j\omega)$ po frekvencijama se označava sa M_s i predstavlja recipročnu vrijednost najmanje udaljenosti grafa funkcije spregnutog prijenosa $L(j\omega)$ od kritične točke -1 .

Prema tome, M_s je mjera robusnosti sustava. Bolje rečeno, sustav je robusniji ukoliko je ova vrijednost manja. U skladu sa gore navedenim, željene karakteristike sustava u zatvorenoj sprezi mogu se specificirati preko oblika amplitudne karakteristike funkcije osjetljivosti. To npr. radimo tako ako definiramo funkciju za željenu performansu sustava kao:

$$w_p(s) = \frac{\frac{s}{M_s} + w_B}{s + w_B A}, \quad (1.17)$$

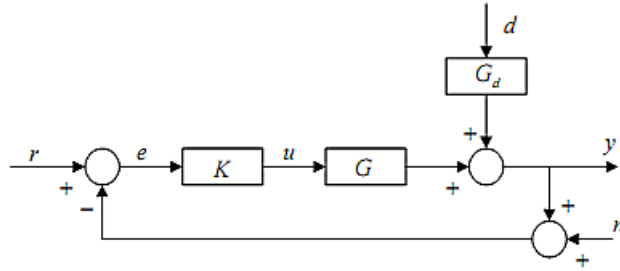
prema jednadžbi (1.17) zakon glasi:

$$|S(j\omega)| < 1/|w_p(j\omega)|, \quad \forall \omega \iff \|w_p S\|_\infty < 1 \quad (1.18)$$

i ekvivalentan je zahtjevu da vrijednost amplitudne funkcije osjetljivosti bude manja od A na niskim odnosno od M_s na visokim frekvencijama i da ne dostigne vrijednost veću od 1 bar do vrijednosti određene sa w_B . Na ovaj način definira se željeno ponašanje sustava u stacionarnom stanju, njegova robusnost i propusni

opseg.

Na slici 1.4 je prikazan tipičan izgled amplitudne karakteristike težinske funkcije za performansu, i jedan primjer u kojem $|S|$ ne zadovoljava postavljene zahtjeve, odnosno prelazi postavljenu gornju granicu, što se vidi i iz krive performanse (amplituda proizvoda težinske i funkcije osjetljivosti) čiji je maksimum veći od 1



Slika 1.3: Sustav sa povratnom spregom

1.2. LFT: Linearna transformacija razlomka

Linearna transformacija razlomka se provodi prema [13], kao i prema [4]. Neka je matrica P , dimenzija $(n_1 + n_2) \times (m_1 + m_2)$ dana sa

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

i neka su matrice Δ i K dimenzija $m_1 \times n_1$ i $m_2 \times n_2$. Donja i gornja linearna transformacija razlomka (*LFT*) dane su sljedećim izrazima:

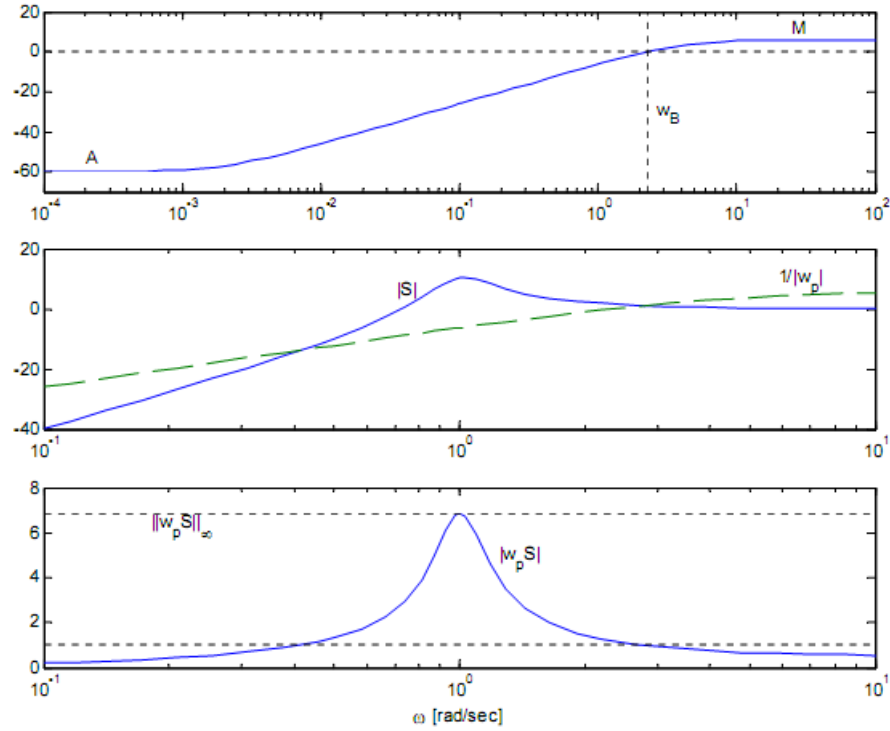
$$F_l(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21} \quad (1.20)$$

$$F_u(P, \Delta) = P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12} \quad (1.21)$$

pri čemu se indeksi l i p odnose na donju (eng. lower) i gornju (eng. upper) LFT. Duža procedura dobivanja LFT objašnjena je u [4].

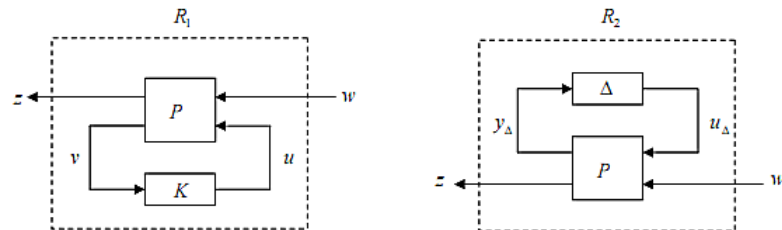
Na slici 1.5 se vidi smisao ovakve LFT.

$R_1 = F_l(P, K)$ je prijenosna funkcija koja se dobije zatvaranjem pozitivne povratne



Slika 1.4: Tipičan izgled težinske funkcije ω_P (gore), moduli težinske i funkcije osjetljivosti (sredina) i krive performanse (dolje)

sprege sa regulatorom K oko donjeg dijela matrice P (od posljednjih m_2 izlaza do posljednjih n_2 ulaza), dok je $R_2 = F_u(P, \Delta)$ rezultat zatvaranja pozitivne povratne sprege preko Δ oko gornjeg dijela P

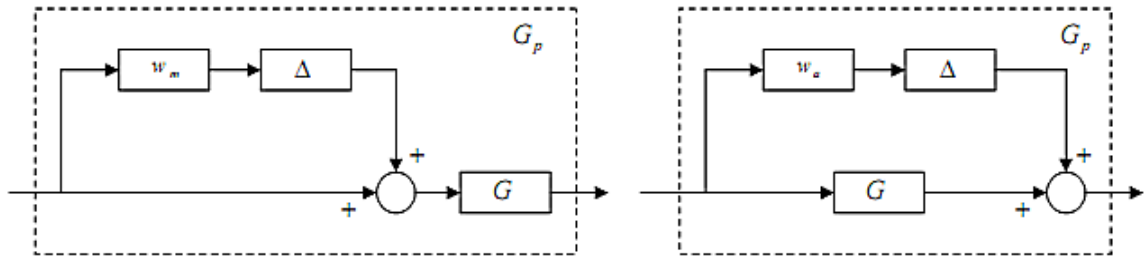


Slika 1.5: Prijenosne funkcije kao linearne transformacije razlomka - LFT

1.3. Pojam robusnosti i greška modeliranja

Dinamičko ponašanje realnog procesa teško je predstaviti jedinstvenim linearnim modelom. Zbog toga se uvodi skup perturbiranih modela Π pri čemu se smatra da se ponašanje procesa u bilo kojem trenutku može kvalitetno aproksimirati nekom funkcijom G_p iz tog skupa. Greške mogu biti parametarske, uslijed nemodelirane ili zanemarene dinamike i skupne.

Najčešće se koristi skupna metoda predstavljanja greške modeliranja u multiplikativnoj ili aditivnoj varijanti, prikazanoj na slici 1.6.



Slika 1.6: Multiplikativna (lijevo) i aditivna (desno) skupna greška modeliranja

Na gornjoj slici 1.6 G predstavlja tzv. nominalni model. On se bira tako da odstupanje funkcija iz skupa Π od tog modela bude što manje. Kao mjera odstupanja uzima se modulo razlike frekvencijskih odziva $|G(j\omega)| - G_p(j\omega)|$. Tipičan način za određivanje nominalnog modela je pronalaženje srednjih vrijednosti parametara perturbiranih modela. Perturbirane prijenosne funkcije za multiplikativnu, odnosno aditivnu grešku modeliranja dane su sljedećim izrazima:

$$\begin{aligned} G_p(s) &= G(s)(1 + w_m(s) \cdot \Delta(s)), & |\Delta(j\omega)| &\leq 1 \\ G_p(s) &= G(s) + w_a(s) \cdot \Delta(s), & |\Delta(j\omega)| &\leq 1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

U izrazu 1.22 $\Delta(s)$ predstavlja bilo koju stabilnu prijenosnu funkciju čija je amplitudna frekvencijska karakteristika za svaku vrijednost manja od 1. U kompleksnoj ravnini ona se može predstaviti jediničnim krugom, tako da se skup perturbiranih prijenosnih funkcija za nekoj frekvenciji ω može predstaviti krugom

radijusa $G(j\omega) \cdot w_m(j\omega)$ za multiplikativnu, odnosno $w_a(j\omega)$ za aditivnu grešku modeliranja, sa centrom u točki $G(j\omega)$. Ovaj način predstavljanja greške modeliranja je očigledno nestrukturiran, s obzirom da ne postoje nikakva ograničenja u pogledu strukture funkcije $\Delta(s)$.

Težinske funkcije $w_a(s)$ i $w_m(s)$ biraju se tako da budu obuhvaćeni svi modeli iz skupa Π .

Pri tome su bitni samo moduli ovih težinskih funkcija, jer su varijacije u funkciji pokrivenne funkcijom $\Delta(s)$. Stoga se bez gubitka opstojnosti može reći da su one stabilne i minimalne faze. Isto tako prema jednadžbi (1.23)

$$w_a(s) = G(s)w_m(s) \quad (1.23)$$

vidimo da su aditivna i multiplikativna greška modeliranja ekvivalentne, jer je uvijek moguće svesti jedan oblik na drugi.

Iz tog razloga, daljnje razmatranje će biti ograničeno na multiplikativnu varijantu skupne greške modeliranja.

Polazeći od skupa perturbiranih modela Π i nominalnog modela $G(s)$ težinska funkcija $w_m(s)$ može se dobiti tako da se na svakoj frekvenciji pronađe maksimalno odstupanje perturbiranih modela od nominalnog

$$l(\omega) = \max_{G_P \in \Pi} \left| \frac{G_P(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right|, \quad (1.24)$$

a zatim se ova gornja granica aproksimira racionalnom kompleksnom funkcijom $w_m(s)$ tako da se zadovolji:

$$|w_m(j\omega)| \geq l(\omega), \quad \forall \omega \quad (1.25)$$

Zbog jednostavnosti se najčešće usvaja da je funkcija $w_m(s)$ prvog reda, u obliku

$$w_m(s) = \frac{\tau \cdot s + r_0}{\frac{\tau \cdot s}{r_\infty} + 1} \quad (1.26)$$

gdje su r_0 i r_∞ vrijednosti greške modeliranja na niskim i na visokim frekvencijama, a $1/\tau$ je frekvencija na kojoj greška modeliranja dostiže 100%

1.4. Robusna stabilnost

Sustav u povratnoj sprezi je robusno stabilan ako je s datim regulatorom stabilan svaki od perturbiranih modela. Ako se greška modeliranja predstavi u multiplikativnoj formi, sustav u zatvorenoj sprezi ima izgled kao na slici 1.7. Prijenosna funkcija sustava izgleda

$$L_p = G_p K = GK(1 + w_m \Delta) = L + w_m L \Delta, \quad |\Delta(j\omega)| \leq 1, \forall \omega. \quad (1.27)$$

Uz pretpostavku da je nominalni sustav stabilan i da je svako L_p stabilno, robusna stabilnost svodi se na to da je sustav stabilan za svako L_p . Prema Nyquistovom kriteriju, ovo će biti zadovoljeno ako nijedno L_p ne obuhvati točku -1 u kompleksnoj ravnini.

Prema slici 1.8 $|-1 - L| = |1 + L|$ je udaljenost od točke -1 do centra kruga koji predstavlja L_p , a $|w_m L|$ je radijus ovog kruga.

Kako L_p ne smije obuhvatiti točku -1 , najmanja udaljenost od granice kruga do ove točke mora biti pozitivna, što je ekvivalentno sa:

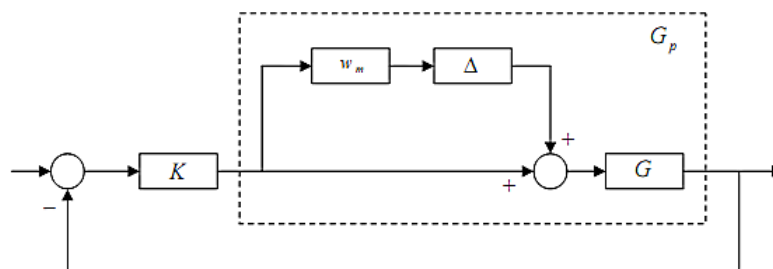
$$|w_m L| < |1 + L|, \quad \forall \omega \iff \left| \frac{w_m L}{1 + w_m L} \right| < 1, \quad \forall \omega \quad (1.28)$$

$$\iff |w_m T| < 1, \quad \forall \omega, \iff \|w_m T\|_\infty < 1, \quad \forall \omega \quad (1.29)$$

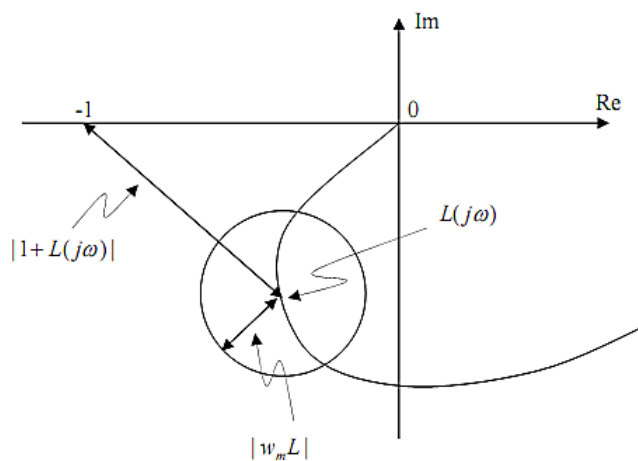
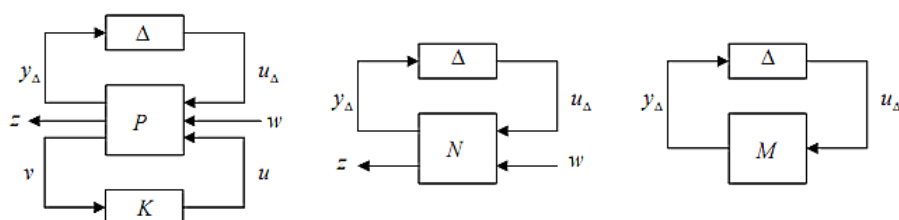
Prema tome, da bi sustav bio robusno stabilan, modulo komplementarne funkcije osjetljivosti mora se učiniti malim na frekvencijama na kojima je greška modeliranja velika. Prethodni zakon je dovoljan i potreban samo u slučaju kada su na svakoj frekvenciji zaista mogući svi perturbirani modeli za koje je $|\Delta(j\omega)| < 1$. Ukoliko je opis greške modeliranja konzervativan, u smislu da uključuje i neke perturbirane funkcije prijenosa koje se neće javiti u realnom procesu, samo zakon (1.28) je dovoljan.

Pri analizi *MIMO* sustava često se koristi neka od struktura prikazanih na slici 1.9.

Schema (a) na slici 1.9 je pogodna za analizu regulatora K . Ovdje v predstavlja mjerenja koje se koriste za generiranje upravljanja u . y_Δ i u_Δ su ulaz i izlaz iz



Slika 1.7: Sustav u zatvorenoj petlji sa multiplikativnom greškom modeliranja

Slika 1.8: Krivulja prijenosne funkcije L_p 

Slika 1.9: Strukture MIMO sustava za: (a)-sintezu regulatora, (b)- analizu robusne performanse, (c)-analizu robusne stabilnosti

bloka perturbacije Δ .

Usljed djelovanja reference i poremećaja, predstavljenih signalom w , javlja se greška z koju treba minimizirati.

P je tzv. poopćeni proces. U njega su uključene težinske funkcije za grešku modeliranja i željenu performansu, pa se shodno tome uzima da H_∞ norma perturbacione matrice nije veća od 1. Pretpostavimo da je sistem sa slike 1.9 (b) nominalno stabilan, što je ekvivalentno internoj stabilnosti sistema N , i da je perturbacija Δ također stabilna. Kako je:

$$F_u(N, \Delta) = N_{22} + N_{21}\Delta(I - N_{11}\Delta)^{-1}N_{12} \quad (1.30)$$

i s obzirom da su N_{22} , N_{12} , N_{21} i Δ po pretpostavci stabilni, jedini izvor eventualne nestabilnosti funkcije $F_u(N, \Delta)$ je član $(I - N_{11}\Delta)^{-1}$. Prema tome, pod pretpostavkom nominalne stabilnosti, zakoni stabilnosti sa slike (b) i (c) na prikazu 1.9 su isti, pri čemu je $M = N_{11}$. Shema sa slike 1.9(c) se naziva $M\Delta$ strukturom.

Može se pokazati da zakon stabilnosti $M\Delta$ strukture zavisi od osobina matrice Δ . Iako je matrica Δ puna, odnosno ako ne postoje nikakva ograničenja u pogledu njene strukture, onda je sistem sa slike stabilan ako i samo ako $\bar{\sigma}(M) < 1$.

Ako promatramo stabilnost, najnepovoljniji je slučaj kada se Δ izabere tako da bude $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$ (najveća perturbacija), a da vektor y_Δ ima pravac maksimalnog pojačanja matrice M , a koje se može postići jer pri izboru Δ nema nikakvih ograničenja. Kada bi signal y_Δ bio pojačan pri prolasku kroz M , odnosno kada bi $\bar{\sigma}(M) > 1$, moduli oba signala bi rasli i dostigli proizvoljno velike vrijednosti, pa sustav očigledno ne bi bio stabilan. To znači da mora biti $\bar{\sigma}(M) < 1$. Sa druge strane ako je δ kompleksni skalar i ako je $\Delta = \delta I$ onda se zakon stabilnosti svodi na $\rho(M) < 1$ pri čemu je ρ spektralni radijus, odnosno maksimalna karakteristična vrijednost matrice M .

Kao i maloprije, najnepovoljniji slučaj je kada je $\bar{\sigma}(\Delta) = 1$ odnosno $|\delta| = 1$, s obzirom da je Δ dijagonalna matrica.

$M\Delta$ struktura se sada svodi na sustav s jediničnom povratnom spregom. Zakon stabilnosti iz Nyquiatovog kriterija za slučaj *MIMO* sustava koji kaže da je sustav stabilan ako i samo ako karakteristične vrijednosti ne obuhvaćaju kritičnu točku. U ovom slučaju ta je točka 1, s obzirom da je povratna sprega pozitivna (minus je

uključen u funkciju M).

Prema tome, zakon stabilnosti je $\rho(M) < 1$.

1.5. Robusna performansa

Za **SISO** slučaj zakon nominalne performanse glasi:

$$|w_p S| < 1, \quad \forall \omega \iff |w_p| < (1 + L), \quad \forall \omega. \quad (1.31)$$

Ako znamo da je $|1 + L|$ na danoj frekvenciji ω udaljenost od $L(j\omega)$ do točke -1 u kompleksnoj ravnini, nominalna performansa se postiže ako je udaljenost od $L(j\omega)$ do -1 veća od $|w_p(j\omega)|$, odnosno ako se $L(j\omega)$ na svim frekvencijama nalazi izvan kruga radijusa $|w_p(j\omega)|$ sa centrom u -1 .

U slučaju robusne performanse, gornji zakon mora biti zadovoljen za svaki od perturbiranih modela:

$$\text{RP} \iff |w_p S_p| < 1, \quad \forall S_p, \forall \omega \quad (1.32)$$

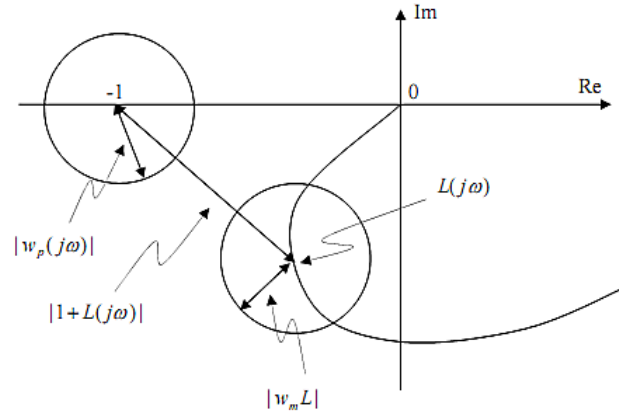
Drugim riječima, svako $L_p(j\omega)$ se na svojim frekvencijama mora nalaziti izvan kruga radijusa $|w_p(j\omega)|$ sa centrom u -1 . Prema slici 1.10 ovaj zakon se svodi na:

$$\text{RP} \iff |w_p| + |w_m L| < |1 + L|, \quad \forall \omega, \quad (1.33)$$

$$\iff |w_p(1 + L)^{-1}| + |w_m L(1 + L)^{-1}| < 1, \quad \forall \omega, \quad (1.34)$$

$$\iff \max_{\omega} (|w_p S| + |w_m T|) < 1. \quad (1.35)$$

Za **MIMO** slučaj za dani regulator K , analiza robusne performanse se izvodi na osnovu strukturne sheme na slici 1.9 (b). Ovdje je $N = F_l(P, K)$, a zakon za robusnom performansom je da je prijenosna funkcija od w do z manja od 1, odnosno $\|F_u(N, \Delta)\|_{\infty} < 1$. Naime, prijenosna funkcija od ulaza w (poremećaj ili referenca) do signala greške z je zapravo normalizirana funkcija osjetljivosti $w_p S$, gdje je w_p težinska funkcija kojom se specificira željena performansa (\hat{e} i d odgovaraju signalima z i w).



Slika 1.10: Prikaz robusne performanse RP

	SISO	MIMO
NS	G stabilno	N interno stabilno
NP	$ w_p S(j\omega) < 1, \quad \forall \omega, \text{ za } \Delta = 0$	$\ N_{22}\ _\infty < 1, \quad \text{i NS}$
RS	$ w_m T(j\omega) < 1, \quad \forall \omega$	$F = F_u(N, \Delta)$ stabilno, $\forall \Delta, \ \Delta\ _\infty \leq 1, \text{ i NS}$
RP	$ w_p S_p(j\omega) < 1, \quad \forall \omega, \forall \Delta, \ \Delta\ _\infty < 1$	$\ F\ _\infty < 1, \quad \forall \Delta, \ \Delta\ _\infty \leq 1, \text{ i NS}$

Tablica 1.1: Prikaz zakona za stabilnost i performansu

Ako je $\bar{\sigma}(w_p S_p) < 1$ za svaku perturbaciju Δ čija H_∞ norma nije veća od 1, sustav ima robusnu performansu.

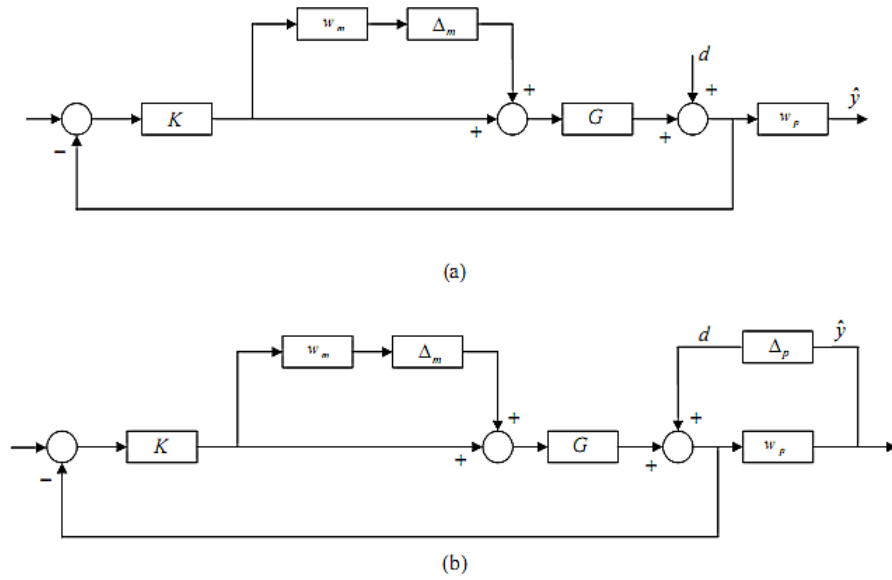
Međutim, može se pokazati da je prethodni zakon moguće zadovoljiti i za nestabilni sustav, pa se mora uvesti pretpostavka o nominalnoj stabilnosti. Dakle, sustav ima robusnu performansu ako je nominalno stabilan i ako je $\bar{\sigma}(w_p S_p) < 1$ za svako $\|\Delta\|_\infty \leq 1$

1.6. Pregled zakona za stabilnost i performansu

U tablici 1.6. je dan prikaz zakona robusnosti i performanse za SISO i MIMO sustave izvedenih prema slikama 1.7 i 1.9.

1.7. Povezanost stabilnosti i performanse SISO sustava

Analiza robusne performanse **SISO** sustava može se povezati sa analizom robusne stabilnosti. Prikaz na slici 1.11 daje objašnjenje prethodno navedene tvrdnje.



Slika 1.11: Prikaz prevođenja analize robusne performanse na analizu robusne stabilnosti

Ako znamo da funkcija osjetljivosti S predstavlja prijenosnu funkciju od poremećaja na izlazu do greške koja je jednaka izlazu, s obzirom da je referenca nula. Za sustav sa slike 1.11 (a) zakonitost robusne performanse je $|w_p S| < 1$, odnosno $|\hat{y}|/|d| < 1$. Ako je sustav sa slike 1.11 (b) robusno stabilan za svako $|\Delta_m| < 1$ i $|\Delta_p| < 1$, onda je odnos amplituda signala \hat{y} i d sigurno manji od 1, jer je $|d| = |\Delta_p \hat{y}| < |\hat{y}|$.

Prema tome, sustav sa slike 1.11 (a) zadovoljava zakon robusne performanse ako i samo ako je sustav sa slike 1.11 (b) robusno stabilan.

1.8. Strukturirana singularna vrijednost

SSV je detljno obrađena u [14]. U poglavlju 1.4. je pokazano da stabilnost $M\Delta$ sa slike 1.9 (c) zavisi od oblika matrice Δ i izvedeni su odgovarajući zakoni stabilnosti kada je ona puna, odnosno dijagonalna. U oba slučaja je taj zakon dan kao gornja granica, u prvom maksimalne singularne vrijednosti, a u drugom spektralnog radijusa. Karakteristične vrijednosti predstavljaju pojačanja sustava u pravcu karakterističnih vektora, pa spektralni radijus sigurno nije veći od maksimalne singularne vrijednosti koja predstavlja najveće moguće pojačanje sustava. Teorijski, odnos između ove dvije vrijednosti može biti proizvoljno veliki, pa je očigledno da struktura matrice Δ igra važnu ulogu u stabilnosti sustava koji je predstavljen $M\Delta$ strukturom. Kada ona nije dijagonalna ni puna, već ima blok dijagonalnu strukturu, ni jedan od gornjih uvjeta nije primjenjiv. $\rho(M) < 1$ je suviše slab, a $\bar{\sigma}(M) < 1$ je proizvoljno konzervativan. Zbog toga se uvodi pojam *strukturirane singularne vrijednosti*.

Neka je M kompleksna matrica i neka $\Delta = \text{diag}\{\Delta_i\}$ označava skup kompleksnih matrica date dijagonalne blok strukture, pri čemu je $\bar{\sigma}(\Delta) < 1$. Strukturirana singularna vrijednost $\mu_\Delta(M)$ je relativna nenegativna funkcija definirana sa:

$$\mu_\Delta(M) = \frac{1}{\min\{k_m | \det(I - k_m M \Delta) = 0\}} \quad (1.36)$$

Ako ne postoji ni jedna matrica iz skupa Δ takva da je moguće pronaći k_m iz gornje relacije, usvaja se $\mu_\Delta(M) = 0$.

Ako se za veličinu perturbacije Δ primjeni njena maksimalna singularna vrijednost, onda se SSV zapravo odnosi na najmanju perturbaciju koja sustav dovodi na granicu nestabilnosti.

Drugim riječima, $\mu_\Delta(M) = 1/\bar{\sigma}(\Delta_{\min})$, gdje je Δ_{\min} najmanja perturbacija koja zadovoljava zakon $\det(I - M\Delta_{\min}) = 0$. Sustav koji nije robustan postati će nestabilan pri malim perturbacijama, pa je SSV ovog sustava velika. Prema tome, veličina SSV je obrnuto proporcionalna stupnju robusnosti sustava. U postavci problema stabilnosti $M\Delta$ je pretpostavljeno da iznosi $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$.

Ako se sustav može destabilizirati jedino perturbacijama koje su veće od 1, onda je on očigledno robusno stabilan, jer se takve perturbacije neće javiti na realnom

procesu. Prema tome, pod pretpostavkom stabilnosti nominalnog sustava M i perturbacije Δ , zakon robusne stabilnosti se svodi na:

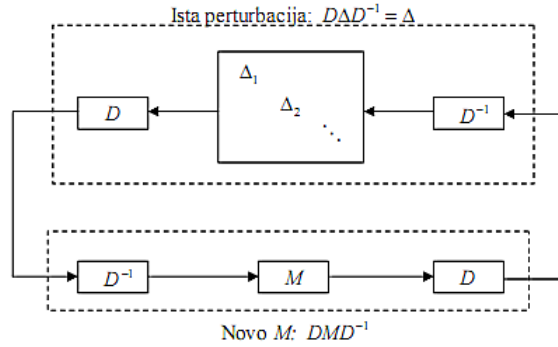
$$\mu_{\Delta}(M(j\omega)) < 1, \quad \forall \omega, \quad (1.37)$$

pri čemu je struktura perturbacija fiksirana i unaprijed određena, a njena maksimalna singularna vrijednost nije veća od 1.

Iz definicije SSV slijedi da je:

$$\rho(M) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \bar{\sigma}(M), \quad (1.38)$$

pri čemu je $\rho(M) = \mu_{\Delta}(M)$ za dijagonalnu matricu perturbacije, a $\mu_{\Delta}(M) = \bar{\sigma}(M)$ kada je ona puna. Bolje rečeno, SSV uzima u obzir i strukturu bloka Δ , što je istaknuto indeksom u njenoj oznaci. Korisno je imati neku procjenu za njenu gornju granicu. Jedna je granica maksimalna singularna vrijednost. Kako izračunati tijesnu granicu prikazano je na slici 1.12



Slika 1.12: Prikaz skaliranja matricom D

Ideja je da se iskoristi blok dijagonalna struktura matrice Δ . Naime, skaliranje matricom D ne može utjecati na stabilnost sustava, pa je sustav sa slike 1.12 stabilan ako i samo ako je stabilan sustav sa slike 1.9 (c). Ako bi se uz to i struktura matrice D odabrala tako da bude $D\Delta D^{-1} = \Delta$, onda bi i odgovarajuće SSV za dva sustava bile jednake, odnosno bilo bi $\mu_{\Delta}(M) = \mu_{\Delta}(DMD^{-1})$.

Ovo se može postići ako se za D usvoji blok dijagonalna struktura:

$$D = \text{diag}\{d_i I_i\} \quad (1.39)$$

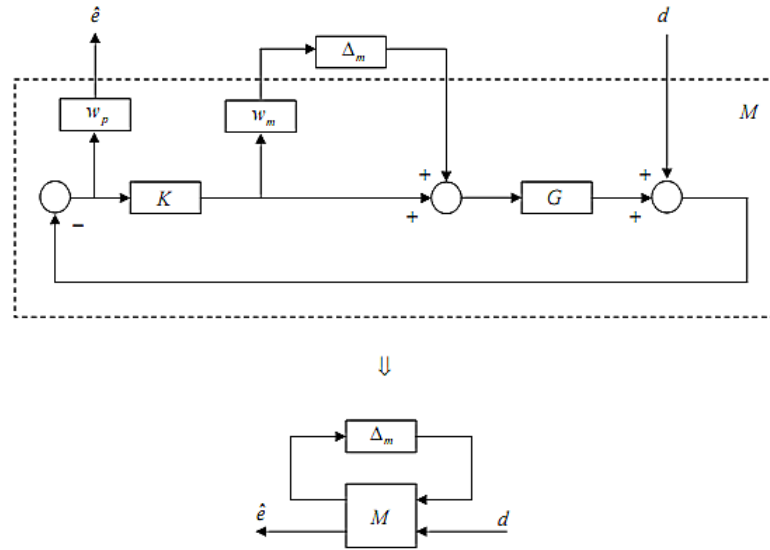
pri čemu I_i ima iste dimenzije kao i i -ti blok u perturbaciji Δ , a d_i je proizvoljan kompleksni skalar. Kako je $\mu_\Delta(DMD^{-1}) \leq \bar{\sigma}(DMD^{-1})$, slijedi

$$\mu_\Delta(M) \leq \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (1.40)$$

Pogodnim izborom koeficijenata d_i matrice D može se postići da gornja nejednakost bude tijesna, odnosno da $\bar{\sigma}(DMD^{-1})$ bude znatno manje od $\bar{\sigma}(M)$. Može se prikazati da minimizacija vrijednosti $\bar{\sigma}(DMD^{-1})$ konveksna po elementima matrice D , odnosno da ima samo jedan, globalni minimum, što znatno olakšava njenu softversku implementaciju.

1.9. Analiza robsne performanse korištenjem SSV

Povezanost robusne performanse i stabilnosti MIMO sustava kao u poglavlju 1.7. za SISO sustave može biti objašnjena slikom 1.13.

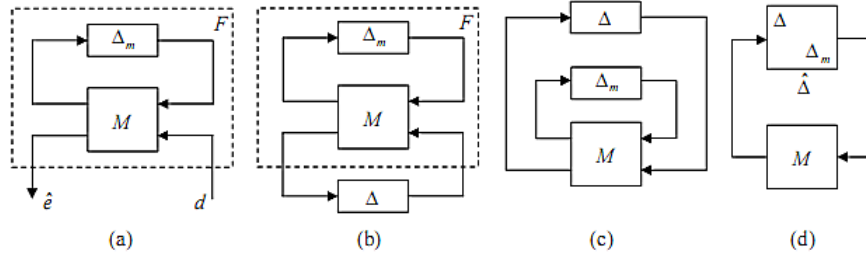


Slika 1.13: Struktura sustava za analizu robusne performanse

Za robusnu performansu treba zadovoljiti uvjet $\bar{\sigma}(w_p S_p) = \bar{\sigma}(\hat{e}/d) < 1$, na svim frekvencijama i pri svim perturbacijama Δ_m takvim da je $\bar{\sigma}(\Delta_m) \leq 1$. S druge

strane, poznato je da za stabilnost klasične $M\Delta$ strukture sa slike 1.9 (c), u slučaju kada je perturbacijska matrica Δ puna, treba biti zadovoljeno $\overline{\sigma(M)} < 1$. Ako bi u taj sustav uveli fiktivnu perturbaciju u obliku pune kompleksne matrice Δ , onda bi zakon stabilnosti ovakvog sustava bio ekvivalentan zakonu za robusnom performansom početnog sustava.

Ovo je ilustrirano na slici 1.14.



Slika 1.14: Izjednačavanje zakona za robusnu stabilnost i performansu

Sustav na slici 1.14 (a) ima robusnu performansu ako i samo ako je $\|F\|_\infty < 1$ za svaku perturbaciju Δ_m koja zadovoljava $\|\Delta_m\|_\infty \leq 1$.

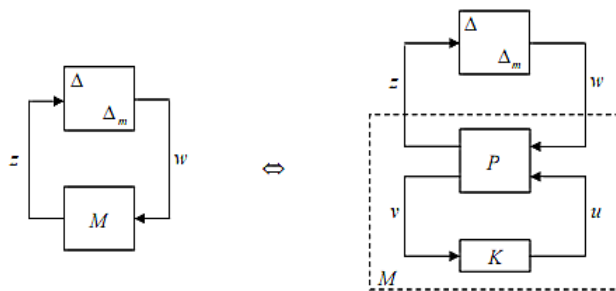
Sustav sa slike 1.14 (b) je robusno stabilan ako i samo ako je $\|F\|_\infty < 1$ za sve perturbacije Δ_m i Δ pod zakonom da njihove H_∞ norme nisu veće od 1. Pri tome matrica Δ_m može, ali ne mora biti puna (ovo zavisi od načina predstavljanja greške modeliranja), ali fiktivni blok Δ mora biti nestrukturiran, odnosno pun, jer je samo tada zakon za RS dan sa $\mu_\Delta(F) = \overline{\sigma}(F) = \|F\|_\infty < 1$. Prema tome, sustav sa slike 1.14 (a) ima robusnu performansu ako i samo ako je sustav sa slike 1.14 (b) robusno stabilan. Sustavi na slikama 1.14 (c) i (d) su očigledno ekvivalentni onom sa slike (b), pa se zakon za robusnom performansom sustava na slici (a) svodi na:

$$\mu_\Delta(M) < 1 \quad (1.41)$$

Treba primjetiti da blok $\hat{\Delta}$ ima blok dijagonalnu strukturu i da je zbog toga SSV matrice M uvijek manja od njene H_∞ norme.

1.10. H_∞ upravljanje

Pri sintezi H_∞ regulatora polazi se od strukture na slici 1.15 prema [14],[4],[13]. Ona je opisana sljedećim jednadžbama:



Slika 1.15: Struktura modela H_∞ optimalnog upravljanja

$$\begin{bmatrix} z \\ v \end{bmatrix} = P(s) \cdot \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, \quad u = K(s) \cdot v \quad (1.42)$$

U blok P su uključene nominalna matrična prijenosna funkcija procesa i težinske funkcije koje opisuju grešku modeliranja i željenu performansu (slično kao slučajju matrice M sa slike 1.13).

Algoritam za sintezu H_∞ regulatora polazi od modela ove strukture u prostoru stanja, u sljedećem obliku:

$$P = \begin{bmatrix} A & \vdots & B_1 & B_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_1 & \vdots & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & \vdots & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Signal v je skup mjerenja koja reglator K koristi pri generiranju upravljanja u . Ulazni signali, u koje spada poremećaj, referenca i izlaz iz perturbacijskog bloka, predstavljeni su vektorom w , a signal greške i ulaz u perturbacijski blok čine komponente signala z .

Zadatak sinteze H_∞ optimalnog kontrolera je da se minimizira H_∞ norma matrice M odnosno da pronađemo ono K koje minimizira:

$$\|M(P, K)\|_\infty = \max_\omega \bar{\sigma}(M(P, K)(j\omega)) \quad (1.44)$$

Pri tome se uzimaju sljedeće pretpostavke:

1. Uređeni skup (A, B_2, C_2) je stabilizirajući i detektabilan
2. D_{12} i D_{21} imaju pun rang
3. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}$ ima pun rang za svaku ω
4. $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$ ima pun rang za svaku ω
5. $D_{11} = 0$ i $D_{22} = 0$

Pretpostavka (1) mora biti ispunjena zbog egzistencije regulatora koji stabilizira proces, a (2) je dovoljan zakon da bi regulator bio svojstven, odnosno da ga je moguće realizirati. (3) i (4) sprečavaju skraćivanje nula i polova procesa i regulatora na imaginarnoj osi, što bi dovelo do nestabilnosti u zatvorenoj sprezi. Pretpostavka (5) nije neophodna, ali garantira svojstvenost funkcija $P_{11}(s)$ i $P_{22}(s)$ što znatno pojednostavljuje algoritam sinteze.

Ako sa γ_{min} označimo najmanju vrijednost izraza $\|M\|_\infty$ po svim regulatorima K koji daju stabilnu funkciju spregnutog prijenosa. Zadatak sinteze suboptimalnog H_∞ zakona upravljanja za dato $\gamma > \gamma_{min}$ je da se nađe skup svih regulatora K , takvih da je:

$$\|M(P, K)\|_\infty < \gamma \quad (1.45)$$

i da sustav u zatvorenoj sprezi bude stabilan. Ovakav kontroler postoji ako i samo ako su točne sljedeće zakonitosti:

1. $X_\infty \geq 0$ je Riccatijeva algebarska jednadžba prema [14].

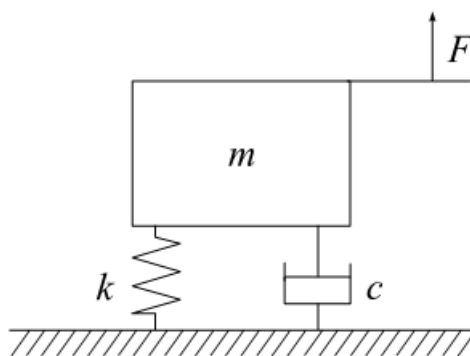
$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 + X_\infty (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X_\infty = 0, \quad (1.46)$$

Poglavlje 2.

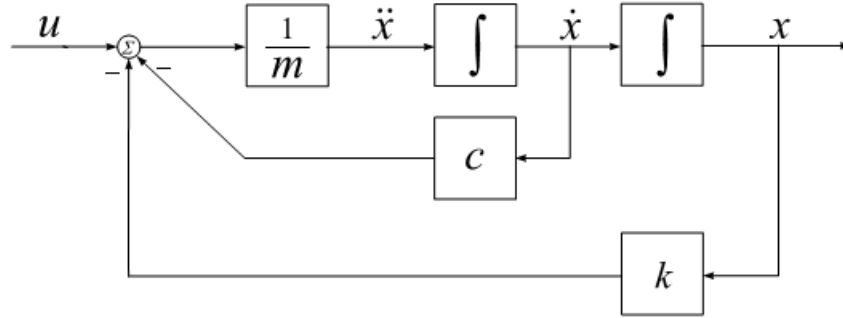
Formulacija problema

2.1. Objekt upravljanja

U ovom poglavlju biti će izveden dinamički model objekta upravljanja drugog reda poznat pod nazivom MDS sustav (*mass- damper-spring*) prema [13], [4],[14]. Da bi osigurali jednostavnost modela u obzir ćemo uzeti samo strukturirane perturbacije koeficijenata modela objašnjene u 1.3.. Sintezu regulatora ćemo provoditi pomoću **Robust Control Toolboxa** iz programskog paketa **MATLAB 7.6**. Na slici 2.1 je prikazan MDS sustav, a na slici 2.2 blok dijagram istog sustava.



Slika 2.1: MDS sustav



Slika 2.2: Blok dijagram MDS sustava

Dinamički model MDS sustava se izvodi iz drugog Newtonovog zakona pri čemu dobivamo:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = u \quad (2.1)$$

gdje je x udaljenost bloka definiranog masom m od centra ravnoteže, $u = F$ sila koja djeluje na dotični blok, c je konstanta prigušnice i k je konstanta opruge. Ako ovaj isti model usporedimo sa stvarnim modelom možemo reći da tri fizička parametra m , c i k mi ne poznamo. Ono što mi znamo je da se vrijednosti tih parametara kreću u određenim granicama. Svaku vrijednost parametra možemo prikazati nominalnom vrijednošću kojoj dodajemo perturbacijsku mogućnost prema [13], [4]. Prema tome možemo pisati

$$m = \bar{m}(1 + p_m\delta_m); \quad c = \bar{c}(1 + p_c\delta_c); \quad k = \bar{k}(1 + p_k\delta_k) \quad (2.2)$$

gdje su $\bar{m} = 3$, $\bar{c} = 1$, $\bar{k} = 2$ tzv. nominalne vrijednosti m , c i k .

p_m , p_c , p_k kao i δ_m , δ_c i δ_k reprezentiraju moguće perturbacije tih triju parametara. Za vrijednost $p < 1$ pretpostavljamo određeni postotak nepoznatog parametra. Tako ćemo i pretpostaviti 40% mogućih perturbacija mase, 20% perturbacija koeficijenta prigušnice i 30% perturbacija čvrstoće opruge.

Prema tome možemo pisati:

$$p_m = 0.4, \quad p_c = 0.2, \quad p_k = 0.3 \quad (2.3)$$

Isto tako možemo pisati:

$$-1 \leq \delta_m, \delta_c, \delta_k \leq 1 \quad (2.4)$$

Tri bloka na slici 2.2 mogu biti zamijenjena sa \bar{m} , p_m δ_m jedinstvenim unificiranim pristupom. To radimo tako da postojeći blok prikažemo u funkciji upravljačke varijable.

Ako bi prema tome raspisali blok $\frac{1}{m}$ sa slike 2.2 kao reprezentaciju preko Linearne transformacije razlomka objašnjene u 1.2., kao i prema [13],[4] dobili bi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} &= \frac{1}{\bar{m}(1 + p_m \delta_m)} = \frac{1}{\bar{m}} - \frac{p_m}{\bar{m}} \delta_m (1 + p_m \delta_m)^{-1} \\ &= F_U(M_{mi}, \delta_m) \end{aligned} \quad (2.5)$$

pri čemu je:

$$M_{mi} = \begin{bmatrix} -p_m & \frac{1}{\bar{m}} \\ -p_m & \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Parametar $c = \bar{c}(1 + p_c \delta_c)$ se može prikazati kao:

$$c = F_U(M_c, \delta_c), \quad M_c = \begin{bmatrix} 0 & \bar{c} \\ p_c & \bar{c} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

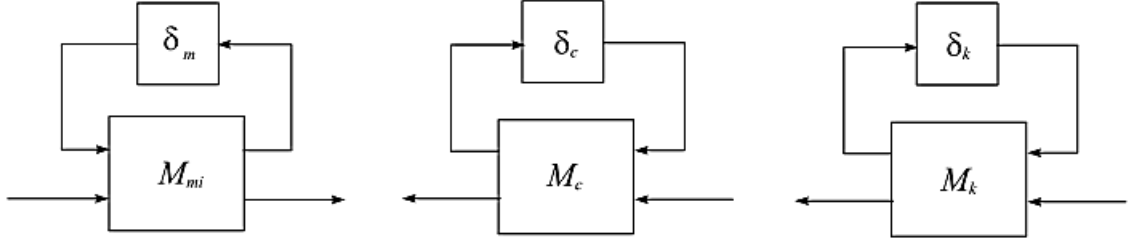
Parametar k prikazan kao $k = \bar{k}(1 + p_k \delta_k)$ se može prikazati kao:

$$k = F_U(M_k, \delta_k), \quad M_k = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k} \\ p_k & \bar{k} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

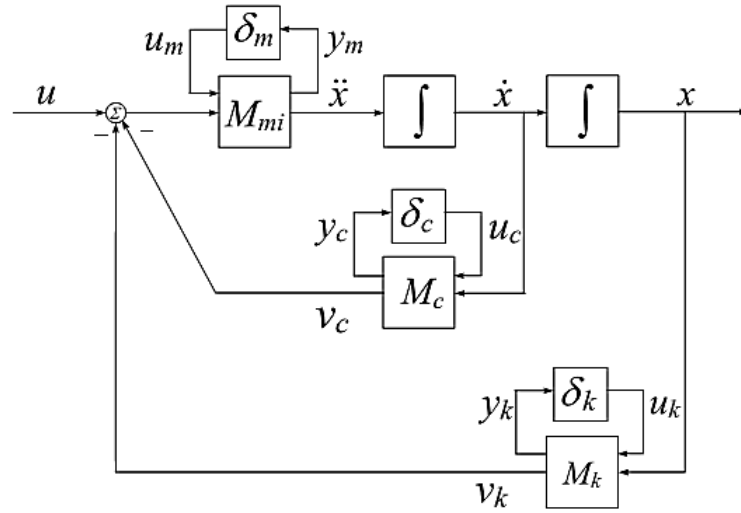
Prema jednadžbama (2.6),(2.7) i (2.8) Linearne transformacije se mogu prikazati blokovski prema slici 2.3.

Da bi detaljnije reprezentirali model kao linearnu transformaciju nepoznatih, realnih perturbacija δ_m , δ_c i δ_k , prema slici 2.3 postavljamo ulazne i izlazne varijable na dotične blokove δ_m , δ_c i δ_k kao y_m , y_c , y_k , u_m , u_c i u_k prikazano na slici 2.4.

Preko gore navedenih jednadžbi povezujući ulaze i izlaze možemo pisati:



Slika 2.3: Reprezentacija nepoznatih parametara kroz Linearne transformacije



Slika 2.4: Blok dijagram MDS sustava sa nepoznatim parametrima

$$\begin{bmatrix} y_m \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_m & \frac{1}{m} \\ -p_m & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_m \\ u - v_c - v_k \end{bmatrix} \quad (2.9a)$$

$$\begin{bmatrix} y_c \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{c} \\ p_c & \bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ \dot{x} \end{bmatrix} \quad (2.9b)$$

$$\begin{bmatrix} y_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k} \\ p_k & \bar{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ x \end{bmatrix} \quad (2.9c)$$

$$u_m = \delta_m y_m \quad (2.9d)$$

$$u_c = \delta_c y_c \quad (2.9e)$$

$$u_k = \delta_k y_k \quad (2.9f)$$

Ako pišemo:

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1, \quad y = x_1 \quad (2.10)$$

takav da je:

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = \ddot{x}_1 \quad (2.11)$$

kao rezultat dobivamo sljedeće jednačbe:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.12a)$$

$$\dot{x}_2 = -p_m u_m + \frac{1}{m}(u - v_c - v_k) \quad (2.12b)$$

$$y_m = -p_m u_m + \frac{1}{m}(u - v_c - v_k) \quad (2.12c)$$

$$y_c = \bar{c}x_2 \quad (2.12d)$$

$$y_k = \bar{k}x_1 \quad (2.12e)$$

$$v_c = p_c u_c + \bar{c}x_2 \quad (2.12f)$$

$$v_k = p_k u_k + \bar{k}x_1 \quad (2.12g)$$

$$y = x_1 \quad (2.12h)$$

$$u_m = \delta_m y_m \quad (2.12i)$$

$$u_c = \delta_c y_c \quad (2.12j)$$

$$u_k = \delta_k y_k \quad (2.12k)$$

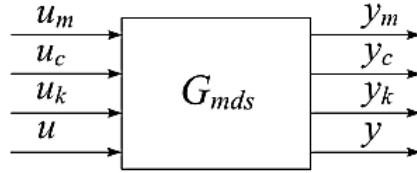
Eliminirajući varijable v_c i v_k jednačbe koje pokrivaju dinamičko ponašanje modela su prikazane kao:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dots \\ y_m \\ y_c \\ y_k \\ \dots \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ -\frac{\bar{k}}{m} & -\frac{\bar{c}}{m} & \vdots & -p_m & -\frac{p_c}{m} & -\frac{p_k}{m} & \vdots & \frac{1}{m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\bar{k}}{m} & \frac{\bar{c}}{m} & \vdots & -p_m & -\frac{p_c}{m} & -\frac{p_k}{m} & \vdots & \frac{1}{m} \\ 0 & \bar{c} & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \bar{k} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ u_m \\ u_c \\ u_k \\ \dots \\ u \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\begin{bmatrix} u_m \\ u_c \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_m & 0 & 0 \\ 0 & \delta_c & 0 \\ 0 & 0 & \delta_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_m \\ y_c \\ y_k \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Ako sa G_{mds} označimo ulazno izlaznu dinamiku **MDS** sustava koja uzima u obzir nepoznatost parametara kako je prikazano slikom 2.5 možemo reći da G_{mds} ima četiri ulaza (u_m, u_c, u_k, u), četiri izlaza (y_m, y_c, y_k, y) i dva stanja (x_1 i x_2).

State Space prikaz G_{mds} izgleda:



Slika 2.5: Ulazno izlazni blok dijagram MDS sustava

$$G_{mds} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B_1 & B_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1 & \vdots & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & \vdots & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

gdje je:

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \end{bmatrix} & B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} \end{bmatrix} & B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\bar{m}} \end{bmatrix} \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{\bar{k}}{\bar{m}} & -\frac{\bar{c}}{\bar{m}} \\ 0 & \bar{c} \\ \bar{k} & 0 \end{bmatrix}, & D_{11} &= \begin{bmatrix} -p_m & -\frac{p_c}{\bar{m}} & -\frac{p_k}{\bar{m}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_{12} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{m}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 C_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, & D_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & D_{22} &= 0
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Iz jednadžbe (2.15) vidimo da G_{mds} djeluje na \bar{m} , \bar{c} , \bar{k} , p_m , p_c i p_k kao i na originalnu diferencijalnu jednadžbu koja povezuje y i u prema [13] Nasuprot tome ista G_{mds} je poznata i ne sadrži nepoznate parametre.

U M-fileu **prijenosna.m** u prilogu 7.1. je dan kod za izračunavanje G_{mds} . Rješenje za G_{mds} je prikazano na slici 2.6

$$\begin{array}{r}
 \mathbf{G} = \\
 \begin{array}{ccccccc}
 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.0000 \\
 -0.6667 & -0.3333 & -0.4000 & -0.0667 & -0.1000 & 0.3333 & 0 \\
 -0.6667 & -0.3333 & -0.4000 & -0.0667 & -0.1000 & 0.3333 & 0 \\
 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 2.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{Inf}
 \end{array}
 \end{array}$$

Slika 2.6: Rješenje G_{mds}

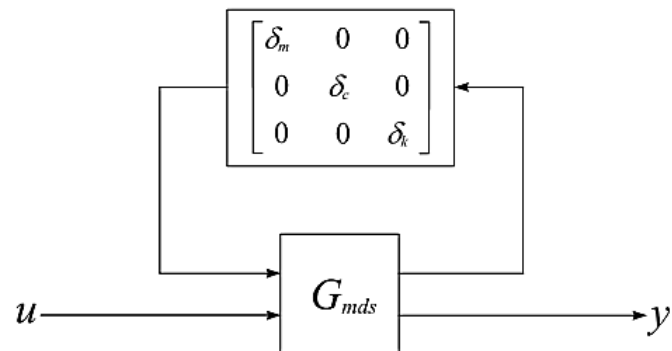
Prema jednadžbama (2.6), (2.7) i (2.8) te uzimajući obzir linearnu transformaciju primjenjenu na dotične jednadžbe istu transformaciju možemo provesti na originalnom sustavu te ćemo na taj način prikazati nepoznato ponašanje originalnog sustava. Pri tome možemo pisati:

$$y = F_U(G_{mds}, \Delta)u \tag{2.17}$$

sa dijagonalnom nepoznatom matricom $\Delta = \text{diag}(\delta_m, \delta_c, \delta_k)$ kako je prikazano na slici 2.7. Važno je naglasiti da matrica Δ ima fiksnu strukturu i nazivamo ju nepoznata matrica ili matrica nemodeliranog modela. Ona je dijagonalna pa

se često naziva i strukturirana nemodelirana dijagonalna matrica ili perturbirana matrica.

Jasno je predstavljena prema [14], [4]. Našu matricu G_{mds} možemo dobiti i pomoću MATLAB-ove funkcije **sysic** dane u prilogu 7.1.1. u fileu **prijenosna2.m**.



Slika 2.7: Linearna reprezentacija MDS sustava sa uključenom Δ matricom

Poglavlje 3.

Frekvencijska analiza nemodeliranog modela

Frekvencijska analiza koja se provodi za perturbacije otvorenog sustava da bi se vidjelo ponašanje u uvjetima otvorene petlje se vrši pomoću naredbe **starp** iz **Robust Toolbox-a**.

Analiza se provodi za nekoliko različitih vrijednosti perturbacijskih parametara δ_m , δ_c i δ_k . U Matlab fileu **pfr mds.m** tri vrijednosti u svakoj perturbaciji su izabrane pri čemu su na izlazu dobiveni frekvencijski odzivi danog modela koji su prikazani na slici 3.1 za $-1 \leq \delta_m, \delta_c, \delta_k \leq 1$.

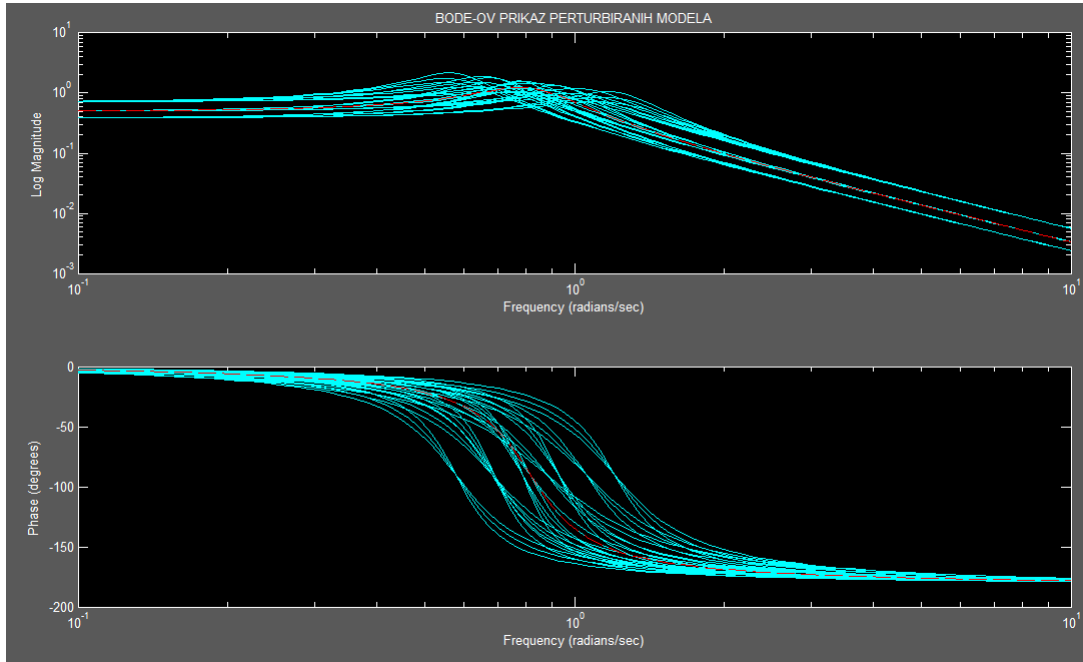
Matlab kod za frekvencijsku karakteristiku je dan u prilogu 7.1.2.

3.1. Sinteza regulacijskog kruga

Nakon provedene frekvencijske analize otvorenog kruga treba pronaći zahtjeve za stabilnošću zatvorenog kruga. Zahtjevi se prvenstveno odnose na traženje linearne *feedback* kontrole, a koja je predstavljena kroz upravljačku varijablu:

$$u(s) = K(s)y(s) \tag{3.1}$$

koja zadovoljava svojstva zatvorenog regulacijskog kruga.



Slika 3.1: Frekvencijska karakteristika perturbiranih modela

3.1.1. Nominalna stabilnost i performanse

Kada govorimo o regulatoru njegov prvi zadatak je osigurati internu stabilnost regulacijskog kruga. Performanse zatvorenog kruga bi trebale biti zadovoljene za nominalni model G_{mds} koji je prethodno opisan jednažbom (2.15). Kriterij performanse za zatvoreni sustav se još naziva *S over KS* procedura ili S preko KS koji je opisan prema [14] kao:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p S(G_{mds}) \\ W_u K S(G_{mds}) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad (3.2)$$

gdje je $S(G_{mds}) = (I + G_{mds}K)^{-1}$ izlazna osjetilna funkcija nominalnog sustava, a W_p , W_u su težinske funkcije koje reprezentiraju frekvencijske karakteristike vanjskog poremećaja d i zahtjeva performansi sa kontrolom sustava. Zadovoljavanje gornje navedene norme dobro potiskuje efekt poremećaja, kao što i ostvaruje dobre performanse. Ako pogledamo S vidimo da ona označava prijenosnu funkciju greške slijeđenja trajektorije.

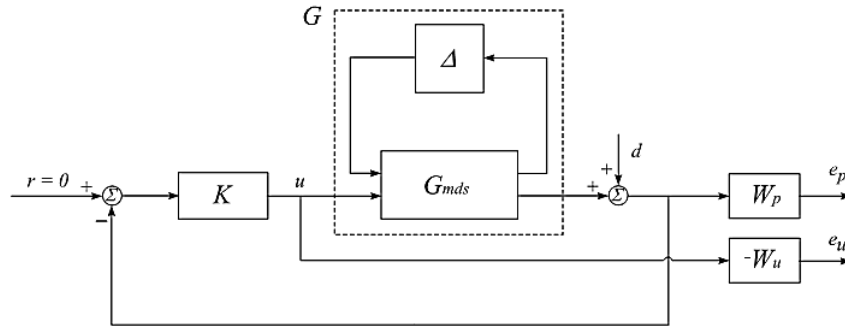
3.1.2. Robusna stabilnost

Zatvoreni krug je robustan ako je interno stabilan za sve moguće modele sustava $G = F_U(G_{mds}, \Delta)$. Da bi to bolje pojasnili to znači da sustav mora biti stabilan za bilo koji $1.8 \leq m \leq 4.2$, $0.8 \leq c \leq 1.2$, $1.4 \leq k \leq 2.6$.

Unatoč robusnoj stabilnosti robusna performansa zatvorenog sustava za sve $G = F_U(G_{mds}, \Delta)$ mora zadovoljiti:

$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(I + GK)^{-1} \\ W_u K(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad (3.3)$$

Isto tako kompleksnost regulatora mora biti prihvatljiva. To znači da je dovoljno niskog reda. Na slici 3.2 je prikazan blok dijagram zatvorenog sustava koji uključuje modele koji se odnose na nemodelirani dio i zahtjeve performansi. Na prikazanoj



Slika 3.2: Struktura zatvorenog kruga

slici 3.2 crtani kvadrat predstavlja prijenosnu funkciju G .

Unutar njega nalaze se nominalni model G_{mds} MDS sustava i strukturirana nepoznata matrica Δ koja uključuje nemodelirani dio. Općenito govoreći, matrica Δ može biti matrica prijenosne funkcije i pretpostavlja se da je stabilna. Matrica Δ je nepoznata, ali zadovoljava uvjet norme $\|\Delta\|_{\infty} < 1$.

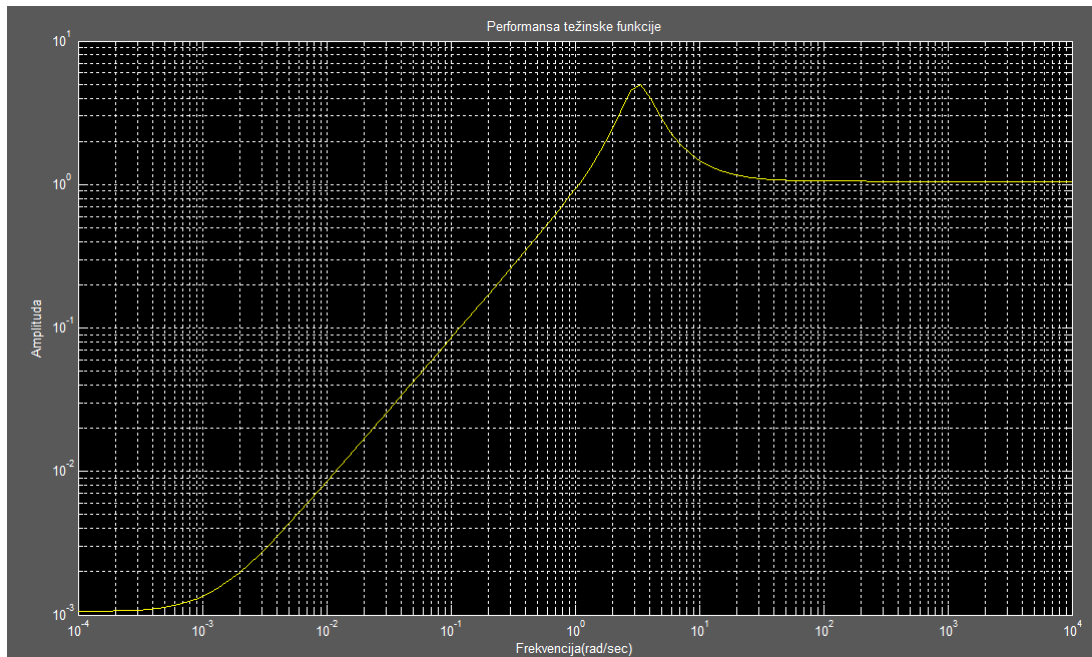
Varijabla d je poremećaj sustava na izlazu sustava. Lako je dokazati da je:

$$\begin{bmatrix} e_p \\ e_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_p(I + GK)^{-1} \\ W_u K(I + GK)^{-1} \end{bmatrix} d \quad (3.4)$$

Kriterij performanse je takav da je prijenosna funkcija od d do e_p i e_u mala u području $\|\cdot\|_\infty$ za sve nepoznate prijenosne matrice Δ . Težinske funkcije W_p i W_u se koriste da reflektiraju relativnu značajku zahtijeva za performansom preko različitih frekvencijskih raspona. U danom slučaju težinska funkcija performanse je skalarna funkcija $W_p(s) = \omega_p(s)$ i izabrana je kao:

$$\omega_p(s) = 0.95 \frac{s^2 + 1.8s + 10}{s^2 + 8.0s + 0.01} \quad (3.5)$$

koja osigurava uz dobar osjećaj poremećaja kao dobar tranzijent odziva (manje od 10s) i prekoračenje manje od 20% u odnosu na nominalni model. Kontrolna težinska funkcija W_u je izabrana kao skalar $\omega_u = 10^{-2}$. Ako pogledamo ovo vidimo da je traženje odgovarajuće težinske funkcije jako važan korak u robusnoj sintezi regulatora i obično traži nekoliko pokušaja. Težinske funkcije su određene u fileu **wts mds.m** dane u prilogu 7.1.3..



Slika 3.3: Singularne vrijednosti $1/w_p$

Da bi ostvarili željene performanse uslijed poremećaja i greške slijeđenja po-

trebno je zadovoljiti jednadžbu:

$$\|W_p(I + GK)^{-1}\|_{\infty} < 1. \quad (3.6)$$

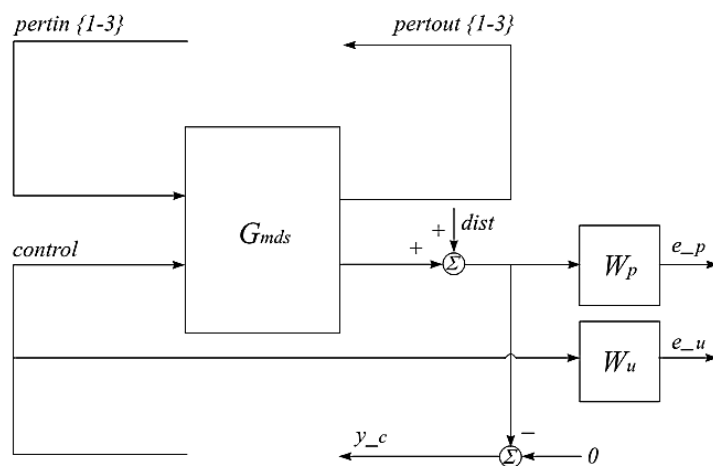
Pošto znamo da je W_p sklarna funkcija, singularne vrijednosti osjetilne funkcije $(I + GK)^{-1}$ preko frekvencijskog raspona moraju ležati ispod onog raspona koji je određen sa $1/\omega_p$. Ovo indicira $\|W_p(I + GK)^{-1}\|_{\infty} < 1$ ako i samo ako sve frekvencije $\sigma[(I + GK)^{-1}(j\omega)] < |1/\omega_p(j\omega)|$. Inverzna težinska funkcija $\frac{1}{\omega_p}$ se izračunava preko filea **wts mds.m** danog u prilogu 7.1.3.. Singularne vrijednosti $1/\omega_p$ preko frekvencijskog raspona $[10^{-4}, 10^4]$ su prikazane na slici 3.3. Težinska funkcija nam pokazuje da se za niske frekvencije zatvoreni sustav (nominalni i perturbirani) mora smanjiti izlazni poremećaj u rasponu od 10 do 0.01. Drugim riječima djelovanje na poremećaj u stanju mirovanja bi trebalo biti 10^{-3} ili manje. Isto vrijedi i za slijeđenje referentne trajektorije odnosno grešku jer prijenosna funkcija je u korelaciji sa osjetilnom prijenosnom funkcijom. Ovaj zahtjev performanse postaje manje obavezan sa povećanjem frekvencije.

3.1.3. Povezanost modela

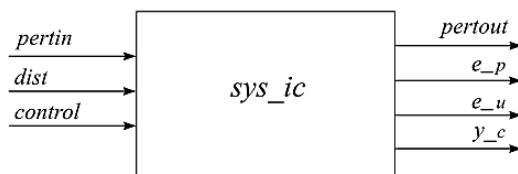
Struktura otvorene petlje je prikazna na slici 3.4.

Varijabla y_c ulaza regulatora je uzeta kao negativna jer **Robust Toolbox** vrši sintezu regulatora pretpostavljajući pozitivnu povratn vezu. Varijable **pertin** i **pertout** imaju tri elementa, a varijable **control**, **dist**, **ep**, **eu**, **yc** imaju jedan element. Za stvaranje strukture otvorene petlje možemo koristiti naredbu **sysic**. Otvoreni sustav je spremljen pod nazivom **sys ic**, a koji je prikazan na slici 3.5. Isti sustav posjeduje 5 ulaznih i 6 izlaznih veličina. Za kreiranje varijable **sys_ic** koristimo MATLAB file **olp_mds.m** dan u prilogu 7.1.4..

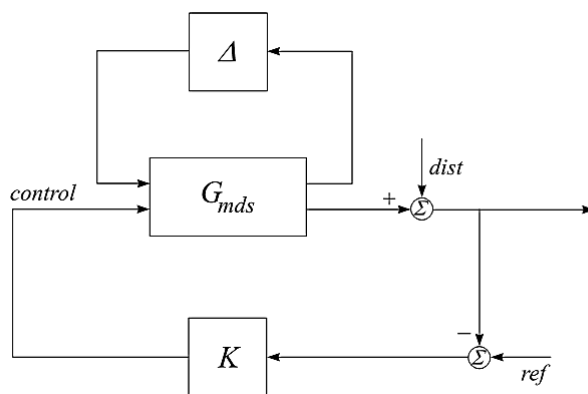
Simulacija zatvorenog sustava sa dizajniranim regulatorom se oslanja na prikaz na slici 3.6. Struktura otvorenog modela je objašnjena u fileu **sim_mds.m** danom u prilogu 7.1.4.



Slika 3.4: Struktura otvorene petlje



Slika 3.5: Prikaz poopćenog otvorenog sustava



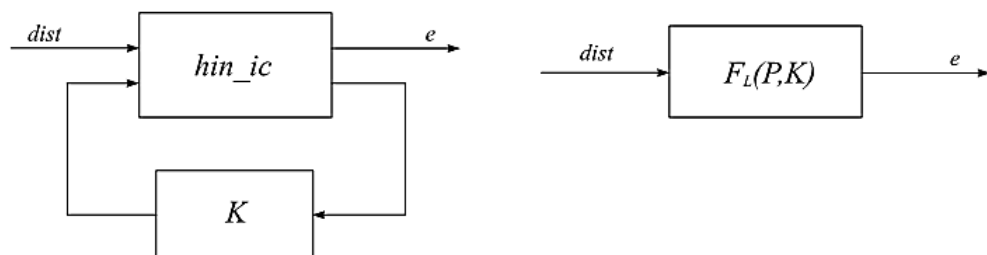
Slika 3.6: Struktura zatvorene petlje

Poglavlje 4.

Suboptimalni H_∞ regulator

Prvi tip regulatora koji će ovdje biti prikazan je H_∞ (sub) optimalni regulator. Njegov glavni zadatak je da prema slici 3.6 minimizira normu $F_L(P, K)$ preko svih stabilizirajućih regulatora (Kontrolera) K . Ako se podsjetimo znamo da je $F_L(P, K)$ matrična prijenosna funkcija nominalnog zatvorenog sustava od poremećaja (varijable **dist**) do greške **e** prema prikazu na slici 4.1, gdje je $e = \begin{bmatrix} e_p \\ e_u \end{bmatrix}$. Prvo što radimo je da izvučemo iz **sys_ic** odgovarajuću matričnu prijenosnu funkciju P korištenjem dolje navedene komande i spremimo je u varijablu **hin_ic**.

```
hin_ic=sel(sys_ic,[4:6],[4:5])
```



Slika 4.1: Struktura zatvorene petlje H_∞ regulatora

Pri Projektiranju regulatora koristimo komandu **hinsyn** koja izračunava suboptimalni H_∞ regulator baziran na strukturi otvorene petlje. Sintaksa pisanja je dana

sljedećim kodom:

```
[k, clp]=hinsyn(p,nmeas,ncon,glow,ghigh,tol)
```

Argumenti posjeduju sljedeća značenja: Povezanost otvorene petlje je prikazana sa **p**, **nmeas** je broj mjerenja, **ncons** broj izvršenih kontrola. **glow** i **ghigh** su granice presjecišta (limiti), **tol** je apsolutna vrijednost tolerancije. Izlazni argumenti su: **k** koji se odnosi na kontroler, **clp** zatvorena petlja (closed loop system)

U prethodnom primjeru struktura otvorenog modela je prikazana fileom **hin_ic**. Sastoji se od jednog mjerenja (senzor), dvije pogreške signala, dva inputa, jednog poremećaja i četiri stanja (dva stanja od sustava i dva stanja od težinskih funkcija W_p). Isto tako znamo da za danu strukturu, otvoreni sustav čija norma mora biti minimizirana ima jedan ulaz i dva izlaza.

Interval za γ iteraciju je izabran između 0.1 i 10 sa tolerancijom $tol = 0.001$. Nakon svake iteracije program prikazuje trenutnu vrijednost γ kao i rezultat koji se sastoji od 5 rezultata postojanosti suboptimalnog kontrolera.

Na kraju svake iteracije simbol p ili f je prikazan, a koji označava vrijednost trenutne γ ovisno da li je prihvaćena ili odbačena. Simbol $\#$ se koristi da pokaže koji se od 5 uvjeta za postojanost H_∞ (sub)optimalnog kontrolera odnosi na izabranu vrijednost γ .

Kada procedura iteriranja uspije postignuta vrijednost γ je minimalna. Matrična prijenosna funkcija zatvorenog sustava od $dist$ do e se sprema u varijablu clp .

Za projektiranje (sub)optimalnog H_∞ regulatora K_{hin} je dan u fileu **hin_mds.m** u prilogu 7.2., a dobivena rješenja su dana na slici 4.2.

Dobiveni regulator je regulator četvrtog reda. Provjera postignute i zadovoljene H_∞ norme zatvorenog sustava za koju je ustanovljeno da iznosi 0.95 u iteraciji, može se provjeriti preko linije:

```
hinfnorm(clp)
```

```

Resetting value of Gamma min based on D_11, D_12, D_21 terms

Test bounds:      0.9500 < gamma <=      10.0000

gamma    hamx_eig  xinf_eig  hamy_eig  yinf_eig  nrho_xy  p/f
10.000   8.9e-001   6.2e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
5.475    8.9e-001   6.2e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
3.212    8.9e-001   6.3e-003   1.3e-003   -1.1e-020   0.0000   p
2.081    8.8e-001   6.3e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
1.516    8.8e-001   6.4e-003   1.3e-003   -2.2e-014   0.0000   p
1.233    8.8e-001   6.5e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
1.091    8.8e-001   6.7e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
1.021    8.8e-001   6.8e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
0.985    8.8e-001   6.9e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
0.968    8.8e-001   7.0e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
0.959    8.8e-001   7.1e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
0.954    8.8e-001   7.2e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
0.952    8.8e-001   7.2e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
0.951    8.8e-001   7.2e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p
0.951    8.8e-001   7.2e-003   1.3e-003   0.0e+000   0.0000   p

Gamma value achieved:      0.9506

```

Slika 4.2: Dobiveni rezultati (sub)optimalnog kontrolera

Poglavlje 5.

Analiza zatvorenog sustava sa regulatorom

Iz prethodnog poglavlja [3.1.1.](#) prema jednadžbi ([3.2](#)) jasno je da je:

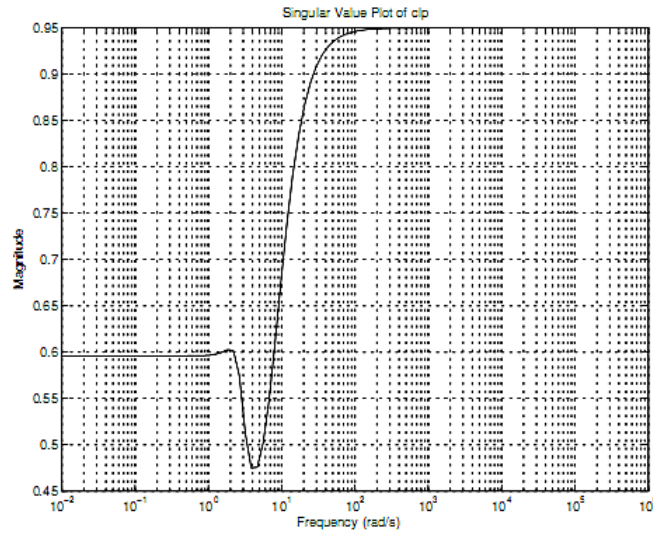
$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(I + G_{mds}K)^{-1} \\ W_uK(I + G_{mds}K)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1 \quad (5.1)$$

zadovoljena i da zatvorena petlja osigurava performanse sustava za nominalne zahtjeve. Isto tako, sljedećim kodom formiramo prijenosnu funkciju za prikaz na slici [4.1](#) sa projektiranim (sub)optimalnim H_{∞} regulatorom K_{hin} u svrhu da analiziramo ponašanje zatvorene petlje.

```
minfo(K_hin)
spoles(K_hin)
omega = logspace(-2,6,100);
clp_g=frsp(clp,omega);
vplot('liv,lm',vsvd(clp_g))
title('Singular Value Plot of clp')
xlabel('')
ylabel('')
```

Slika [5.1](#) pokazuje singularne vrijednosti zatvorene petlje `clp`. Ako znamo da je `clp` dimenzija 2×1 postoji samo jedna singularna vrijednost (ne nula) na svakoj

frekvenciji. Isto tako $\|W_p(I + G_{mds}K)^{-1}\|_\infty < 1$ jer je H_∞ norma zatvorene petlje manja od 1. Provjera se može vršiti na taj način da se izračuna osjetna funkcija zatvorene petlje i usporedi sa inverzom performansi težinske funkcije. U tu namjenu se koristi file `sen_mds.m` dan u prilogu 7.3..



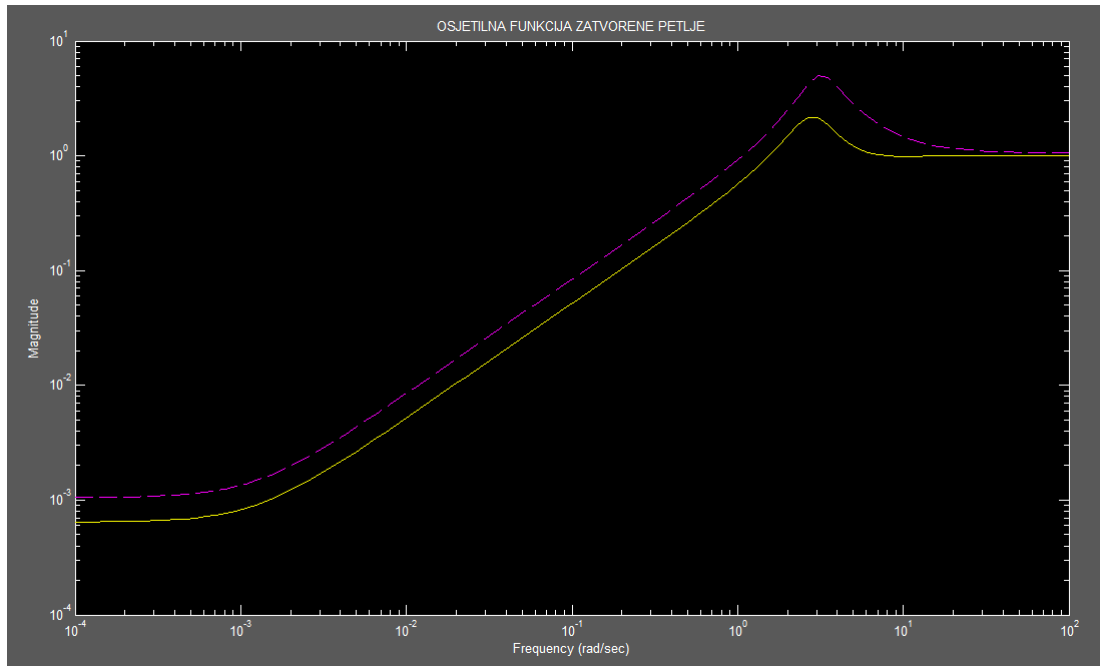
Slika 5.1: Singularne vrijednosti regulacijskog kruga sa K_{hin}

Rezultat usporedbe je dan na slici 5.2 na kojoj je vidljivo da u nisko frekvencijskom području osjetna funkcija leži ispod vrijednosti $\frac{1}{w_p}$. Sa punom linijom je označena nominalna težinska funkcija, a sa isprekidanom inverzna težinska funkcija,

Testiranje stabilnosti robusnog sustava se svodi na vodeći 3×3 dijagonalni blok matrice `clp` prijenosne funkcije, a test nominalnih performansi na donjem-desnom dijelu (element 4-4), prijenosne funkcije 2×1 .

Ove prijenosne funkcije mogu biti zadržane korištenjem naredbe `sel` od `clp` i njihov frekvencijski odziv može biti izračunat naknadno.

Isto tako, moguće je prvo izračunati frekvencijski odziv `clp_g` cijelog sustava `clp` i nakon toga koristiti `sel` za zadržavanje odgovarajućih frekvencijskih odziva. Matrica prijenosne funkcije `clp_ic` je postojana od otvorene veze `sys_ic` sa

Slika 5.2: Osjetna funkcija sa K_{hin}

kontrolerom K implementiranjem funkcije **starp**. Iako je nepoznatost nemodeliranog strukturirana, verifikacija robusne stabilnosti i robusne performanse zahtijeva frekvencijski odziv u terminima μ vrijednosti. Sintaksa pisanja komande **mu** glasi:

```
[bnds,dvec,sens,pvec]=mu(matin,deltaset)
```

Funkcija **mu** za μ analizu izračunava gornju i donju granicu za strukturirane singularne vrijednosti matrice **matin** sa oslanjanjem na strukturu bloka **deltaset**.

Matrica **matin** može biti matrica tipa konstante ili promjenjiva kao što i odziv zatvorenog kruga može biti takav. Komanda **mu** pronalazi gornju i donju granicu za μ vrijednosti u 1×2 matrici **bnds** koja je promjenjiva, frekventno ovisnim D-skilirajućim matricama u **dvec**, frekventno ovisnoj perturbaciji o donjoj granici u **pvec** kao i osjetnosti gornje granice prilikom djelovanja D-skilirajuće u **sens**. Da bi osigurali robusnu stabilnost vrlo je važno da je gornja granica μ vrijednosti manja od 1 u frekventnom rasponu.

Frekventni odziv u području μ vrijednosti se označava sa **rob_stab** i blok struktura

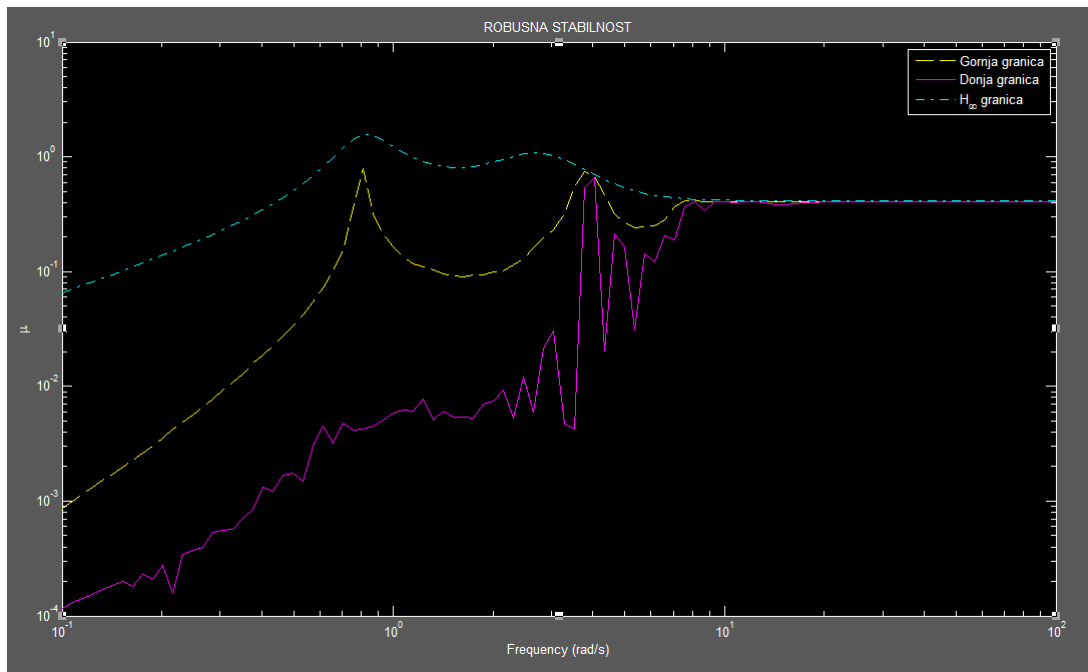
je u tom slučaju prikazana kao:

```
blksR=[-1 1;-1 1;-1 1]
```

To znači da se u analizi robusne stabilnosti pretpostavlja da su perturbacije parametara realne. Za bolju konvergenciju algoritma koji izračunava donju granicu μ mi uključujemo 1% kompleksne perturbacije. To naravno utječe na konzervativnost sustava. U slijedećim linijama koda koje su dane u prilogu 7.4. u datoteci `rob_mds.m` analiziramo robusnu stabilnost projektiranog sustava u kojima je:

```
K=K_hin;
```

Frekvencijski odzivi gornje i donje granice su prikazani na slici 5.3.



Slika 5.3: Robusna analiza stabilnosti regulatora K_{hin}

Vrlo je jasno sa slike da zatvoreni sustav sa regulatorom K_{hin} osigurava robusnu stabilnost. Maksimalna vrijednost μ iznosi 0.764 koja pokazuje strukturirane perturbacije sa normom manjom od $\frac{1}{0.764}$ su primjerene, stabilnost ostaje za

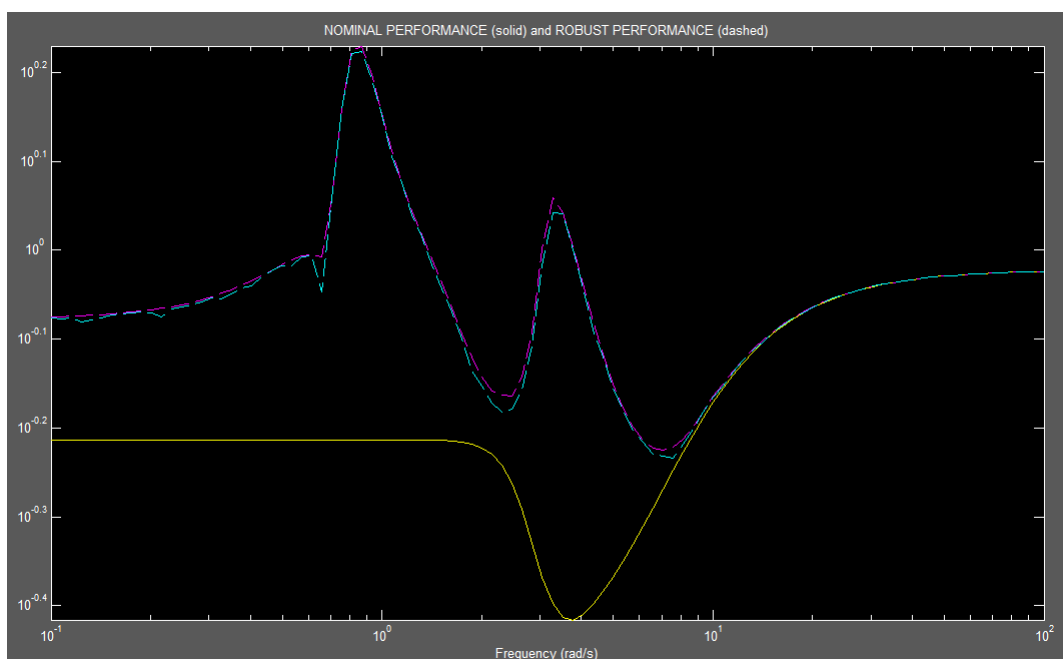
$\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{0.764}$. U istom smo dijagramu prikazali frekvencijski odziv maksimalne singularne vrijednosti vodeće 3×3 matrice prijenosne funkcije, koja karakterizira robusnu stabilnost u odnosu na nestrukturirane perturbacije. Robusna stabilnost nije zadržana ako je nemodeliranost sustava takva da je ono što je nepoznato nestrukturirano, što pokazuje da μ vrijednosti daju manje konzervativne rezultate ako je dodatna informacija o nepoznatosti modela dostupna. Nominalna performansa zatvorenog sustava (u skladu sa težinskom funkcijom performansi) se analizira frekventnim odzivom donjeg desnog dijela (prijenosna funkcija 2×1) bloka `clp`. Nominalna performansa je postignuta ako i samo ako je u frekvencijskom rasponu odziva magnituda manja od 1. Robusne performanse zatvorenog regulacijskog kruga sa K_{hin} se mogu testirati primjenom μ analize. Prijenosna funkcija zatvorenog kruga `clp` ima 4 ulaza i 5 izlaza. Prva tri ulazno izlazna para odgovaraju trima kanalima perturbacija Δ , dok četvrti ulazno izlazni i peti izlazni odgovaraju pomješanoj težinskoj osjetnoj funkciji. Isto tako za μ analizu robusne performanse blok struktura se mora sastojati od 3×3 nemodeliranog bloka (nepoznatog) i 1×2 bloka performanse kako slijedi:

$$\Delta_P := \left\{ \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_F \end{bmatrix} : \Delta \in R^{3 \times 3}, \quad \Delta_F \in C^{1 \times 2} \right\} \quad (5.2)$$

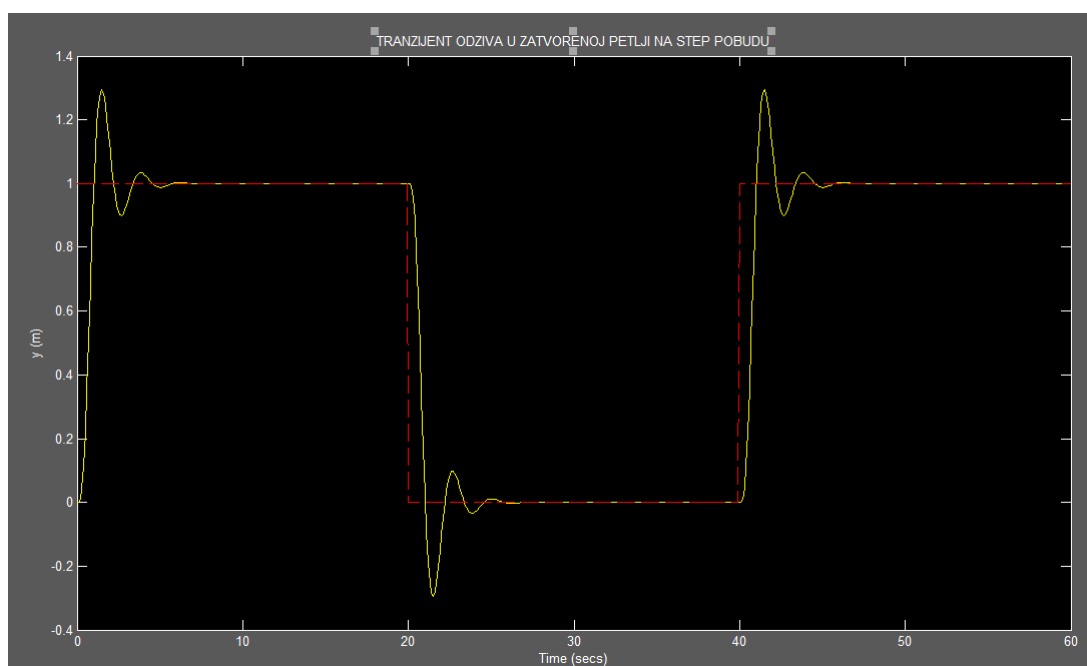
Robusna performansa projektiranog sustava je zadovoljena ako i samo ako $\mu_{\Delta_P}(\cdot)$ je manja od 1 za svaku frekvenciju.

Nominalna i robusna performansa zatvorenog regulacijskog kruga sa regulatorom K_{hin} se analizira korištenjem datoteke `nrp_mds.m` dane u prilogu 7.5.. Frekvencijski odzivi koji pokazuju nominalnu i robusnu performansu su prikazani na slici 5.4. Sa slike je vidljivo da će sustav sa K_{hin} postići nominalnu performansu ali će zatajiti u pogledu kriterija robusne performanse. Ova činjenica proizlazi iz toga da frekvencijski odziv nominalne performanse ima maksimum koji iznosi 0.95, dok μ krivulja za robusnu performansu ima maksimum na 1.67. Sa poštovanjem robusne performanse, to znači da će se vrijednost perturbacijske matrice morati ograničiti na $\|\Delta\|_\infty \leq \frac{1}{1.67}$ da bi se zadovoljila perturbacijska performansna funkcija:

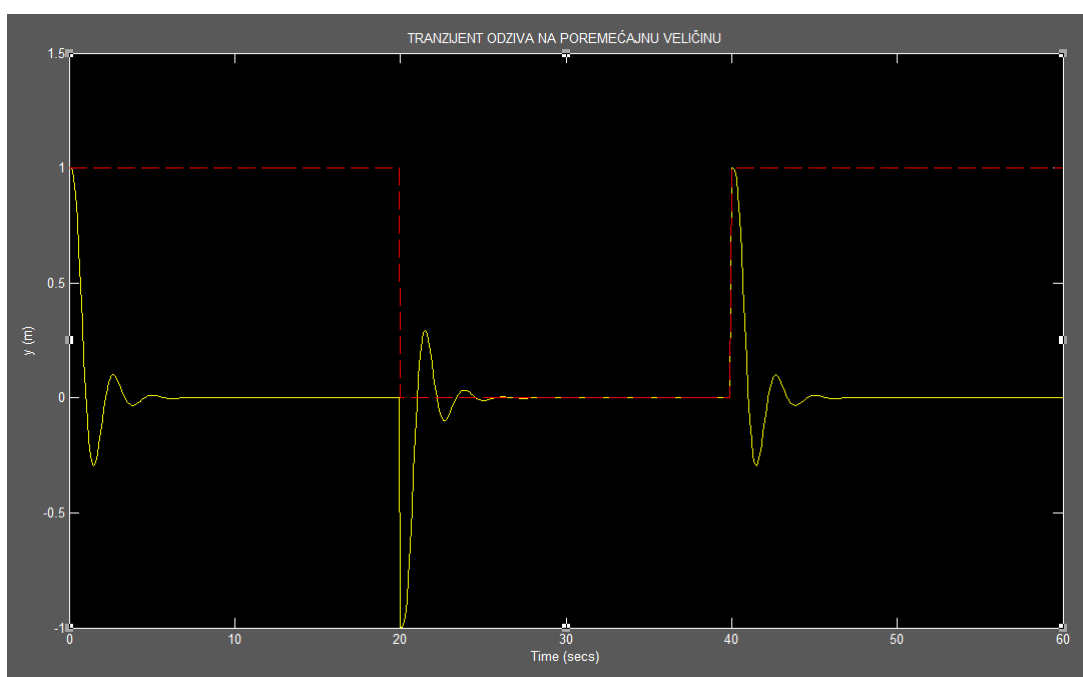
$$\left\| \begin{bmatrix} W_p(I + F_U(G_{mds}, \Delta_G)K)^{-1} \\ W_u K(I + F_U(G_{mds}, \Delta_G)K)^{-1} \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1 \quad (5.3)$$

Slika 5.4: Robusna i nominalna performansa K_{hin}

Simulacija zatvorenog kruga sa datotekom `clp_mds.m` danom u prilogu 7.6. uključuje određivanje tranzijenta odziva na referencu i poremećaj u kojoj se koristi naredba `trsp`. Tranzijenti odziva na step referencu ulaza referencu poremećaja su prikazani na slici 5.5 i 5.6.



Slika 5.5: Odziv sustava na Step pobudu K_{hin}



Slika 5.6: Odziv sustava na poremećaj K_{hin}

Poglavlje 6.

Zaključak

U ovom seminarskom radu objašnjena je sinteza suboptimalnog regulatora za slučaj robusnog upravljanja **MDS** sustava. Mnogi sustavi u prirodi pa tako i *MDS*, daleko se više razlikuju po svojoj prirodi od onakvih modela kakve mi stvaramo. Za jedan tipičan *MDS* lako se utvrdi dinamički model sustava samo je pitanje koliko je taj model točan. Ako bi netko rekao da je to model drugog reda, pitanje je da li je vikožnost fluida prigušnice uvrštena kao i promjena viskoziteta sa promjenom temperature uslijed rada prigušnice. Sve su to dodatni faktori koji naš model udaljavaju od stvarnog procesa, a koje sa inženjerskog gledišta ne uvrštavamo u model zbog zahtjeva za sintezom regulatora. Kada govorimo o robusnom upravljanju onda govorimo o skupu modela. Svaki od modela će opisati naš proces u jednom svom malom dijelu, a regulator koji objedinjuje sve modele zajedno je robustan. Suboptimalni kontroler je samo početak nove ere izučavanja robusne stabilnosti sustava kao i sinteze regulatora kroz stabilnost i performansu. H_∞ i H_2 problemi se rješavaju matričnim pristupom Youla parametrizacijom i prevođenjem u aproksimacijsku formu te rješavanjem projekcijom (H_2) ili Nehari's teoremom (H_∞) prema [14]. Problem strukturiranih singularnih vrijednosti se rješava postupkom *DK* iteracija koji se koristi za poopćene tipove nepoznatih sustava. Novi tip sinteze regulatora se naziva optimalna ℓ^1 teorija upravljanja. Ona se zasniva na kontekstu H_∞ teorije za definiranje stabilnosti i performanse sa ciljem traženja zakona stabilnosti vremenski varijantnog sustava.

U ovom seminarskom radu mnoge formule su dosta pojednostavljene, i preuzete iz strane literature. Naglasak je dan na rješavanje problema robusnog upravljanja na konkretnom primjeru. Za detaljnije shvaćanje potrebna je stručna literatura.

Poglavlje 7.

Matlab kodovi

7.1. Prilog A - Matlab kodovi

prijenosna.m

```
clc;
clear all;
m = 3;
c = 1;
k = 2;
pm = 0.4;
pc = 0.2;
pk = 0.3;
%
A = [ 0      1
      -k/m  -c/m];
B1 = [ 0      0      0
      -pm  -pc/m  -pk/m];
B2 = [ 0
      1/m];
C1 = [-k/m  -c/m
      0      c
```

```

        k    0];
C2 = [ 1    0];
D11 = [-pm -pc/m -pk/m
        0    0    0
        0    0    0];
D12 = [1/m
        0
        0 ];
D21 = [0 0 0];
D22 = 0;
G = pck(A, [B1,B2], [C1;C2], [D11 D12;D21 D22]);

```

7.1.1. Prilog A-1

prijenosna2.m

```

m_nom = 3; c_nom = 1; k_nom = 2;
p_m = 0.4; p_c = 0.2; p_k = 0.3;
mat_mi = [-p_m 1/m_nom; -p_m 1/m_nom];
mat_c = [0 c_nom; p_c c_nom];
mat_k = [0 k_nom; p_k k_nom];
int1 = nd2sys([1],[1 0]);
int2 = nd2sys([1],[1 0]);
systemnames = 'mat_mi mat_c mat_k int1 int2';
sysoutname = 'G';
inputvar = '[um;uc;uk;u]';
input_to_mat_mi = '[um;u-mat_c(2)-mat_k(2)]';
input_to_mat_c = '[uc;int1]';
input_to_mat_k = '[uk;int2]';
input_to_int1 = '[mat_mi(2)]';
input_to_int2 = '[int1]';
outputvar = '[mat_mi(1);mat_c(1);mat_k(1);int2]';
sysic;

```

7.1.2. Prilog: Frekvencijska karakteristika

pfr mds.m

```
%Frekvencijski odziv perturbiranog sustava
omega = logspace(-1,1,100);
[delta1,delta2,delta3] = ndgrid([-1 0 1],[-1 0 1],[-1 0 1]);
for j = 1:27
    delta =diag([delta1(j),delta2(j),delta3(j)]);
    olp = starp(delta,G);
    olp_ic = sel(olp,1,1);
    olp_g = frsp(olp_ic,omega);
    figure(1)
    vplot('bode',olp_g,'c-')
    subplot(2,1,1)
    hold on
    subplot(2,1,2)
    hold on
end
subplot(2,1,1)
olp_ic = sel(G,4,4);
olp_g =frsp(olp_ic,omega);
vplot('bode',olp_g,'r--')
subplot(2,1,1)
title('Bode_ov prikaz perturbiranih modela')
hold off
subplot(2,1,2)
hold off
```

7.1.3. Prilog: Težinske funkcije

wts mds.m

```
nuWp = [1 1.8 10];
```

```

dnWp = [1 8 0.01];
gainWp = 0.95;
Wp =nd2sys(nuWp,dnWp,gainWp);
nuWu = 1; dnWu = 1;
gainWu = 10^(-2);
Wu= nd2sys(nuWu,dnWu,gainWu);
omega = logspace(-4,4,100);
Wp_g =frsp(Wp,omega);
Wpi_g = minv(Wp_g);
vplot('liv,lm',Wpi_g)
title('Performansa te\{v\{z\}inske funkcije')
xlabel('Frekvencija(rad/sec)')
ylabel('Amplituda')

grid on

```

7.1.4. Prilog: Otvoreni sustav

olp mds.m

```

systemnames = ' G Wp Wu ';
inputvar = '[ pert{3}; dist; control]';
outputvar = '[ G(1:3); Wp; -Wu; -G(4)-dist ]';
input_to_G = '[pert; control ]';
input_to_Wp = '[ G(4)+dist ]';
input_to_Wu = '[control ]';
sysoutname = 'sys_ic';
cleanupsysic = 'yes';
sysic
%-----
%Za analizu otvorenih sustava koristimo ove funkcije
%minfo(sys_ic)

```

```
%spoles(sys_ic)
%spoles(Wp)
```

sim mds.m

```
systemnames = ' G ';
inputvar = '[ pert{3}; ref; dist; control ]';
outputvar = '[ G(1:3); G(4)+dist; ref - G(4) - dist ]';
input_to_G= '[ pert; control ]';
sysoutname = 'sim_ic';
cleanup_sysic ='yes';
sysic hin_ic = sel(sys_ic,[4:6],[4:5])
[k,clp] =hinfsyn(hin_ic,1,1,0.1,10,0.001)
%-----
%[k,clp] = hinfsyn(p,nmeas,ncon,glow,ghigh,tol)
%zamjeni p=hin_ic
%(matrix of type SYSTEM)
%number of measurements nmeas =1
%number of controls ncons=1
%lower bound of bisection glow
%upper bound of bisection ghigh
%absolute tolerance for the bisection method tol
```

7.2. Prilog B-(Sub)Optimalni H_∞ regulator

hin mds.m

```
nmeas = 1;
ncon = 1;
gmin = 1;
gmax = 10;
tol = 0.001;
hin_ic = sel(sys_ic,4:6,4:5);
[K_hin,clp] = hinfsyn(hin_ic,nmeas,ncon,gmin,gmax,tol);
hinfnorm(clp)

minfo(K_hin)
spoles(K_hin)
omega = logspace(-2,6,100);
clp_g=frsp(clp,omega);
vplot('liv,lm',vsvd(clp_g))
title('')
xlabel('')
ylabel('')
```

7.3. Prilog B-(Sub)Optimalni H_∞ regulator

sen mds.m

```
sim_mds
K = K_hin;
clp = starp(sim_ic,K);
wts_mds
omega = logspace(-4,2,100);
Wp_g = frsp(Wp,omega);
Wpi_g=minv(Wp_g);
```



```

sen_loop = sel(clp,4,5);
sen_g = frsp(sen_loop,omega);
vplot('liv,lm',Wpi_g,'m--',vnorm(sen_g),'y-')
title('')
xlabel('')
ylabel('')

```

```

[bnds,dvec,sens,pvec] = mu(matin,deltaset)
blksR = [-1 1;-1 1;-1 1]

```

7.4. Prilog C Analiza robusnosti

rob mds.m

```

K = K_hin;
clp_ic = starp(sys_ic,K);
omega = logspace(-1,2,100);
clp_g = frsp(clp_ic,omega);
blkrsR = [-1 1;-1 1;-1 1];
rob_stab = sel(clp_g,[1:3],[1:3]);
pdim = ynum(rob_stab);
fixl = [eye(pdim); 0.1*eye(pdim)]; % 1% Complex
fixr = fixl'; blkrs = [blkrsR; abs(blkrsR)]; clp_mix
=mmult(fixl,rob_stab,fixr); [rbnds,rowd,sens,rowp,rowg]
=mu(clp_mix,blkrs); disp(' ') disp(['mu-robust stability: ' ...
num2str(pkvnorm(sel(rbnds,1,1)))]) disp(' ')
vplot('liv,lm',sel(rbnds,1,1),'y--',sel(rbnds,1,2),'m-', ...
vnorm(rob_stab),'c-.')
title('ROBUST STABILITY')
xlabel('Frequency (rad/s)')
ylabel('mu')

```

7.5. Prilog D Analiza nominalne i robusne performanse

n timer mds.m

```

clp_ic = starp(sys_ic,K);;
omega = logspace(-1,2,100);
clp_g =frsp(clp_ic,omega);
blkrsR = [-1 1;-1 1;-1 1];
%
% nominal performance
nom_perf = sel(clp_g,4,4);
%
% robust performance
rob_perf = clp_g;
blkrp = [blkrsR;[1 2]];
bndsrp=mu(rob_perf,blkrp);
vplot('liv,lm',vnorm(nom_perf),'y-',sel(bndsrp,1,1),'m--',...
      sel(bndsrp,1,2),'c--')
tmp1 = 'NOMINAL PERFORMANCE (solid) and';
tmp2 = ' ROBUST PERFORMANCE (dashed)';
title([tmp1 tmp2])
xlabel('Frequency (rad/s)')
disp(' ')
disp(['mu-robust performance: ' ...
num2str(pkvnorm(sel(bndsrp,1,1)))])
disp(' ')

```

7.6. Prilog E Analiza robusnosti MDS sustava na referencu i poremećaj

clp mds.m

```
% response to the reference
sim_mds
clp = starp(sim_ic,K);
timedata = [0 20 40];
stepdata = [10 1];
dist = 0;
ref = step_tr(timedata,stepdata,0.1,60);
u =abv(0,0,0,ref,dist);
y = trsp(clp,u,60,0.1);
figure(1)
vplot(sel(y,4,1),'y-',ref,'r--')
title('CLOSED-LOOP TRANSIENT RESPONSE')
xlabel('Time (secs)')
ylabel('y (m)')
%
% response to the disturbance
timedata = [0 20 40];
stepdata = [1 0 1];
dist =step_tr(timedata,stepdata,0.1,60);
ref = 0;
u =abv(0,0,0,ref,dist);
y = trsp(clp,u,60,0.1);
figure(2)
vplot(sel(y,4,1),'y-',dist,'r--')
title('TRANSIENT RESPONSE TO THE DISTURBANCE')
xlabel('Time (secs)')
ylabel('y (m)')
```


Literatura

- [1] A.A.Stoorvogel. *The H_∞ Control Problem: A State Space Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1992.
- [2] B.A.Francis. *A Course in H^∞ Control Theory*, volume 88. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer- Verlag, 1987.
- [3] W. C.A.Desoer. *The feedback nterconnection of lumped linear time-invariant systems*. Journal of Franklin Institute 300:335-351, 1975.
- [4] M. D.W.Gu, P.Hr.Petkov. *Robust Control with Matlab*. Springer-Verlag London Limited, Novembar 2005.
- [5] G.Zames. *Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses*. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26:301-320, 1981.
- [6] B. G.Zames. *Feedback, minimax sensitivity, and optimal robustness*. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-28:585-600, 1983.
- [7] A. J.C.Doyle, B.A.Francis. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co., New York, 1992.
- [8] O. J.W.Helton. *Classical Control Using H^∞ Methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1998.
- [9] J. K.Zhou. *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1998.

- [10] K. K.Zhou, J.C.Doyle. *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1995.
- [11] B. Novaković. *Metode vođenja tehničkih sistema: primjena u robotici, fleksibilnim sistemima i procesima*. Školska knjiga, 1990.
- [12] B. Novaković. *Regulacijski sistemi*. Sveučilišna naklada, Zagreb d.o.o, 1990.
- [13] T. Petrović. *Predavanja i vježbe Robusni sistemi upravljanja*. Elektrotehnički fakultet Beograd, <http://www.etf.bg.ac.yu/>, 2007.
- [14] M. R.S.Sánchez-Peña. *Robust Systems. Theory and Applications*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1998.
- [15] I. S. Skogestad. *Multivariable Feedback Control*. John Wiley and Sons Ltd, Chichester, UK, 1996.