Analiza i projektiranje računalom – bilješke

Sadržaj

1 Rješavanje sustava linearnih algebarskih jednadžbi

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

$\underline{A}$ – matrica sustava $(n \times m)$

$\underline{x}$ – vektor nepoznanica

$\underline{b}$ – slobodni vektor v

1.1 LU Dekompozicija

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{U}$$

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n,1} & l_{n,2} & l_{n,3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ & & u_{3,3} & \cdots & u_{3,n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & u_{n.n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{L}\,\underline{U}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Rješavanje sustava u dva koraka uz zamjenu $\underline{y} = \underline{U}\,\underline{x}$:

1. Supstitucija unaprijed

$$\underline{L}\,\underline{y} = \underline{b}$$

$$\begin{aligned} y_1 = b_1 \quad &\Rightarrow \quad y_1 = b_1 \\ l_{2,1}y_1 + y_2 = b_2 \quad &\Rightarrow \quad y_2 = b_2 - l_{2,1}y_1 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} b_{i,j}y_j \quad ; \quad i = 1, \ldots, n$$

2. Supstitucija unatrag

$$\underline{U}\,\underline{x} = \underline{y}$$

$$\begin{aligned} u_{n,n}x_n = y_n \quad &\Rightarrow \quad x_n = \frac{y_n}{u_{n,n}} \\ u_{n-1,n}x_n + u_{n-1,n-1}x_{n-1} = y_{n-1} \quad &\Rightarrow \quad x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}}(y_{n-1} - u_{n-1,n}x_n) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{1}{u_{i,i}}(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}x_j) \quad ; \quad i = n, \ldots, 1$$

$$\underline{L}|\underline{U} = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ l_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix}$$

Za izvedbu LU dekompozicije memorijski prostor matrice $\underline{A}$ može se iskoristiti za smještaj matrica $\underline{L}$ i $\underline{U}$. Memorijski prostor vektora $\underline{b}$ koristi se prvo za vektor $\underline{y}$, a potom za vektor $\underline{x}$.

LU

```
// LU
ZA i = 1 DO n − 1
    ZA j = i + 1 DO n
        A[j, i] /= A[i, i];
        ZA k = i + 1 DO n
            A[j, k] -= A[j, i] * A[i, k];

// Supstitucija unaprijed
ZA i = 1 DO n − 1
    ZA j = i + 1 DO n
        b[j] -= A[j, i] * b[i];

// Supstitucija unazad
ZA i = n DO 1
    b[i] /= A[i, i];
    ZA j = 1 DO i − 1
        b[j] -= A[j, i] * b[i];
```

Zadatak 1.1.
Rastavite matricu na $\underline{L}$ i $\underline{U}$.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & -5 & -6 \\ 12 & 12 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Rješenje
U plavom fontu su oni brojevi koji se više neće mijenjati, dok je boldani font trenutni pivot.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & -1 \\ -8 & 3 & -5 & -6 \\ 12 & 12 & 7 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 9 & -1 & -4 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & \mathbf{3} & -1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & \mathbf{2} & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \underline{L}|\underline{U}$$

Zadatak 1.2.
Riješiti sustav LU dekompozicijom.

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Rješenje

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{6} & 2 & 10 \\ 1/3 & 7/3 & -10/3 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 1/3 & \mathbf{7/3} & -10/3 \\ 0 & 12/7 & 54/7 \end{bmatrix} = \underline{L}|\underline{U}$$

$$\underline{L}\,\underline{y} = \underline{b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 12/7 & 1 \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}\,\underline{x} = \underline{y} \qquad \begin{bmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 0 & 7/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 54/7 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7/3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Krajnje rješenje zadataka u ispitu uvijek sadrži cijele brojeve.

Zadatak 1.3.
Riješite sustav LU dekompozicijom.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Rješenje

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -8 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & \mathbf{-4} & -8 \\ 1 & -1/4 & -3 \end{bmatrix} = \underline{L}|\underline{U}$$

$$\underline{L}\,\underline{y} = \underline{b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1/4 & 1 \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} 14 \\ 10 \\ 13 \end{bmatrix} \quad \to \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 14 \\ -32 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}\,\underline{x} = \underline{y} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 14 \\ -32 \\ -9 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1.2 Stožerni razvoj (pivotiranje)

Primjer 1.1.
Riješite sustav LU dekompozicijom.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{0} & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

LU dekompozicijom ne može se riješiti sustav (premda rješenje postoji) zbog problema dijeljenja s 0 u zadnjem koraku.

Elementi matrice sustava na glavnoj dijagonali nazivaju se stožerni, odnosno pivot, elementi. Što se može dogoditi tijekom dekompozicije:

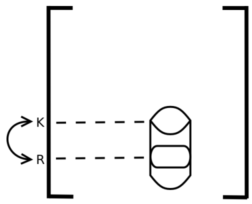
1. pivot element može postati 0 (ne znači da sustav nema rješenja)

2. ako je pivot element mali (po apsolutnoj vrijednosti) može doći do velike pogreške zbog zaokruživanja

Stožerni razvoj – zamjena stupaca ili redaka matrice sustava kako bi za pivot element dobili što veću apsolutnu vrijednost:

a) djelomično pivotiranje – zamjena ili redaka ili stupaca matrice

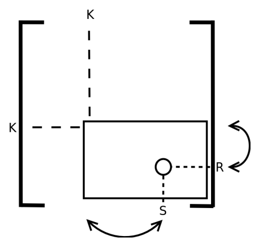
1) po stupcima – traži se $|a_{RK}| = \max |a_{iK}|$; $i = K, \ldots, n$ (zamjena redaka)



2) po retcima – traži se $|a_{RK}| = \max |a_{Ri}|$; $i = R, \ldots, n$ (zamjena stupaca)

b) potpuno pivotiranje – i po retcima i po stupcima

$$|a_{RS}| = \max |a_{ij}| \; ; \; i, j = K, \ldots, n$$



1.3 LUP dekompozicija

LUP dekompozicija je LU dekompozicija s djelomičnim pivotiranjem po stupcima (zamjena redaka).

LUP

```
INICIJALIZIRAJ P; // INDEKSI REDAKA
ZA i = 1 DO n − 1
|  ODABERI PIVOT ELEMENT: |a_Ri| = max |a_ji| ; j = i, ..., n;
|  AKO (A[R, i] == 0)
|   └ KRAJ;
|  ZAMIJENI(P[i], P[R]);
|  ZAMIJENI i-ti i R-ti redak od A[];
|  ZA j = i + 1 DO n
|  |  A[j, i] /= A[i, i];
|  |  ZA k = i + 1 DO n
|  |   └ A[j, k] -= A[i, k] * A[j, i];
|  └
└
```

Napomena!

- *P – permutacijska matrica*
- *A[R,i] == 0* $\Rightarrow$ $|A[R,\ i]| < \epsilon \approx 10^{-6}, 10^{-9}$

Sada vrijedi $\underline{L}\,\underline{U} = \underline{P}\,\underline{A}$, pa

$$\underline{L}\,\underline{y} = \underline{P}\,\underline{b} \qquad \text{(supstitucija unaprijed)}$$
$$\underline{U}\,\underline{x} = \underline{y} \qquad \text{(supstitucija unatrag)}$$

Svaka nesingularna matrica može se svesti na $\underline{L}$ i $\underline{U}$ uz barem jednu permutaciju redaka (ili stupaca).

Primjer 1.2.
Riješite sustav iz primjera 1.1 LUP dekompozicijom.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rješenje

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Bigg\| \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathbf{2} & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \underline{L}|\underline{U}$$

$$\underline{L}\,\underline{y} = \underline{P}\,\underline{b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}\,\underline{x} = \underline{y} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.4.
Rastavite matricu LUP dekompozicijom.

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 & -9 \\ -4 & 6 & 6 & 3 \\ -8 & 4 & 2 & 6 \\ -4 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Rješenje

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 5 & -9 \\ -4 & 6 & 6 & 3 \\ -8 & 4 & 2 & 6 \\ -4 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Bigg\| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 & 6 \\ -4 & 6 & 6 & 3 \\ 4 & 10 & 5 & -9 \\ -4 & 8 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Bigg\| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{-8} & 4 & 2 & 6 \\ 1/2 & 4 & 5 & 0 \\ -1/2 & 12 & 6 & -6 \\ 1/2 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 & 6 \\ -1/2 & 12 & 6 & -6 \\ 1/2 & 4 & 5 & 0 \\ 1/2 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Bigg\| \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 & 6 \\ -1/2 & \mathbf{12} & 6 & -6 \\ 1/2 & 1/3 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 & 6 \\ -1/2 & 12 & 6 & -6 \\ 1/2 & 1/3 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & -3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 & 6 \\ -1/2 & 12 & 6 & -6 \\ 1/2 & 1/3 & \mathbf{3} & 2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 & 5 \end{bmatrix} = \underline{L}|\underline{U} \qquad P = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Zadatak 1.5.

Riješite sustav LUP dekompozicijom.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 41/2 \\ 22 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Rješenje

$$\begin{bmatrix} 1 & 5/2 & 1/2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 1/2 \end{bmatrix} \Bigg\| \begin{bmatrix} 22 \\ 22 \\ 41/2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{4} & 2 & -2 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ 1/4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1/4 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Bigg\| \begin{bmatrix} 22 \\ 41/2 \\ 22 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1/4 & \mathbf{2} & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \underline{L}|\underline{U}$$

$$\underline{L}\ \underline{y} = \underline{P}\ \underline{b} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \underline{y} = \begin{bmatrix} 22 \\ 41/2 \\ 22 \end{bmatrix} \quad \to \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 22 \\ 15 \\ 7/2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{U}\ \underline{x} = \underline{y} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \underline{x} = \begin{bmatrix} 22 \\ 15 \\ 7/2 \end{bmatrix} \quad \to \quad \underline{x} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

1.4 Inverzija matrice

Inverzija uz pomoć LUP:

$$\underline{A}\ \underline{X} = \underline{I}\ ;\ \underline{X} = \underline{A}^{-1}$$
$$\underline{X} = [\underline{x}_1,\ \underline{x}_2,\ \dots,\ \underline{x}_n]$$
$$\underline{A}[\underline{x}_1,\ \underline{x}_2,\ \dots,\ \underline{x}_n] = [\underline{e}_1,\ \underline{e}_2,\ \dots,\ \underline{e}_n]$$

$$\begin{gathered} \underline{A}\ \underline{x}_1 = \underline{e}_1 \\ \underline{A}\ \underline{x}_2 = \underline{e}_2 \\ \vdots \\ \underline{A}\ \underline{x}_n = \underline{e}_n \end{gathered}$$

Rješavanje:

- $1 \times$ LUP

$$\underline{P}\ \underline{A} = \underline{L}\ \underline{U}$$

- $n \times \begin{cases} \text{supstitucija unaprijed} \\ \text{supstitucija unazad} \end{cases}$

$$n \times \begin{cases} \underline{L}\ \underline{y}_i = \underline{P}\ \underline{e}_i \\ \underline{U}\ \underline{x}_i = \underline{y}_i \end{cases}$$

Na supstituciju unaprijed šalju se stupci permutirane jedinične matrice: $\underline{L}\ \underline{U}\ \underline{X} = \underline{P}\ \underline{E} = \underline{P}$

Primjer 1.3.
Invertirajte matricu korištenjem LUP dekompozicije.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Rješenje

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Bigg|\Bigg| \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{7} & 8 & 9 \\ 4/7 & 3/7 & 6/7 \\ 1/7 & 6/7 & 12/7 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1/7 & 6/7 & 12/7 \\ 4/7 & 3/7 & 6/7 \end{bmatrix} \Bigg|\Bigg| \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 1/7 & \mathbf{6/7} & 12/7 \\ 4/7 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \underline{L}|\underline{U}$$

Matrica je singularna, ali je moguće provesti LUP dekompoziciju. Problem pri invertiranju se pojavljuje prilikom supstitucije unazad jer je $u_{3,3}x_3 = y_3$ nedefinirano jer $u_{3,3} = 0$. Prilikom implementacije $u_{3,3}$ vjerojatno neće biti 0 zbog sedmina, pa treba dodati kontrolu ϵ veličine.

2 Postupci nelinearnog optimiranja

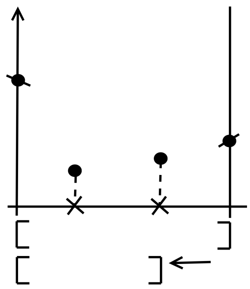
2.1 Pronalaženje minimuma funkcije jedne varijable

2.1.1 Pronalaženje intervala koji sadrži minimum unimodalne funkcije jedne varijable

Kreće se od početne točke x_0 s početnim korakom h i gleda se vrijednost funkcije u tri točke: $f(x_0 - h)$, $f(x_0)$ i $f(x_0 + h)$. Postoje tri slučaja (četvrti ne odgovara pretpostavkama) pri traženju minimuma navedena u sljedećoj tablici.

	$f(x_0 - h)$	$f(x_0)$	$f(x_0 + h)$	
1.)	$\leq$		$\leq$	$\Rightarrow f(x_0 - 2^i h)$: sve do $f(x_0 - 2^k h) > f(x_0 - 2^{k-1} h) \Rightarrow$ imamo interval $[x_0 - 2^k h, x_0 - 2^{k-2} h]$
2.)	$\geq$		$\geq$	$\Rightarrow f(x_0 + 2^i h)$: analogno kao prethodni slučaj $\Rightarrow$ imamo interval $[x_0 + 2^{k-2} h, x_0 + 2^k h]$
3.)	$\geq$		$\leq$	$\Rightarrow$ imamo interval $[x_0 - h, x_0 + h]$
4.)	$\leq$		$\geq$	$\Rightarrow$ funkcija nije unimodalna

Reduciranje intervala može se prikazati sljedećom slikom.



Zadatak 2.1.
Zadana je funkcija jedne varijable $f(x) = x^2 - 2$, početna točka je $x_0 = 100$, a početni korak je $h = 1$. Pronađite unimodalni interval.

Rješenje

$$f(x_0 + h) > f(x_0)$$
$$f(x_0 - h) < f(x_0)$$

	$x_0 - h$	$x_0 - 2h$	$x_0 - 4h$	$x_0 - 8h$	$\dots$	$x_0 - 64h$	$x_0 - 128h$	$x_0 - 256h$
x	99	98	96	92	$\dots$	36	-28	-156
$f(x)$		$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$>$	$<$

Rješenje je interval $[-156, 36]$.

Zadatak 2.2.
Nad nepoznatom unimodalnom funkcijom $g(x)$ pronađen je unimodalni interval. Uz početnu točku $x_0 = 0$ i početni korak $h = 2$, postupak je kao rješenje dao interval čija je donja granica -32. Na osnovu toga odredite istinitost sljedećih tvrdnji:

a) $g(2) < g(-2)$

b) $g(-5) > g(-10)$

c) $g(-10) > g(10)$

d) $g(0) < g(-30)$

Rješenje

x	-32	-16	-8	-4	-2	0	2
$g(x)$	[	$>$	$<$]	$<$	$<$	$<$	$<$

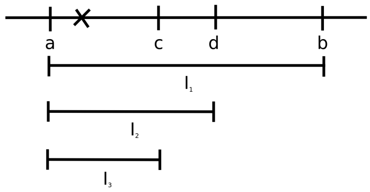
a) NE

b) $g(-5) > g(-8) > g(-10) > g(-16)$ DA

c) $g(-10) < g(-8) < g(10)$ NE

d) Ne može se utvrditi

2.1.2 Zlatni rez (golden section search)



Postavlja se jednako smanjenje intervala, bez obzira koji se interval odabere:

$$
\begin{aligned}
\frac{d-a}{b-a} &= \frac{b-c}{b-a} = k \\
\frac{I_i}{I_{i-1}} &= k,\ \frac{I_3}{I_1} = k^2 \\
I_1 &= I_2 + I_3 \\
k &= \underline{0.618}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d &= a + k(b-a) \\
c &= b - k(b-a)
\end{aligned}
$$

Zadatak 2.3.
Zadana je funkcija $f(x) = (x-4)^2$, početna točka je $x_0 = 0$ i korak $h = 1$. Pronađite unimodalni interval i reducirajte metodom zlatnog reza do preciznosti $\epsilon \leq 1$.

Rješenje
Dobiven je interval $[2, 8]$ i potrebno ga je reducirati.

	a_i	c_i	d_i	b_i	
0	2	4.292	5.708	8	$f(c_0) \leq f(d_0)$
1	2	3.416	4.292	5.708	$f(c_1) \geq f(d_1)$
2	3.416	4.292	4.832	5.708	$f(c_2) \leq f(d_2)$
3	3.416	3.957	4.292	4.832	$f(c_3) \leq f(d_3)$
4	3.416		3.957	4.292	

Konačni interval je $[3.416, 4.292]$.

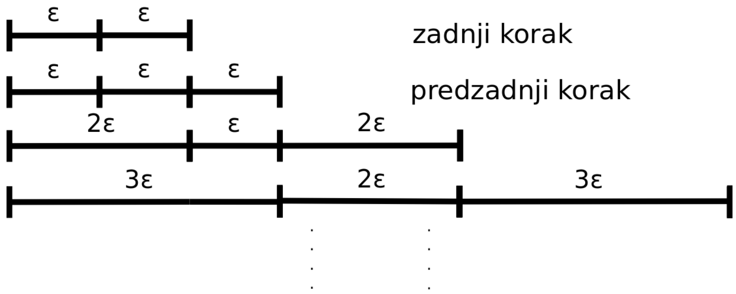
Zadatak 2.4.
Početni unimodalni interval je $x \in [-100, 100]$. Koliko je iteracija postupka zlatnog reza potrebno kako bi se interval smanjio na $\epsilon = 10^{-3}$?

Rješenje
Za veličinu intervala nakon i iteracija vrijedi izraz $k^i d$, gdje je d veličina početnog intervala. Treba izračunati:

$$
\begin{aligned}
k^i d &\leq \epsilon \\
i &= \left\lceil \frac{\ln \frac{\epsilon}{d}}{\ln k} \right\rceil
\end{aligned}
$$

Kao rezultat se dobiva da će se interval smanjiti na traženu preciznost za 26 iteracija.

2.1.3 Fibonaccijev postupak



Podjela se vrši s obzirom na omjere članova Fibonaccijeva niza. Prije provođenja podjele potrebno je vidjeti s kojim članovima Fibonaccijeva niza započinje dijeljenje. Uvjet koji treba vrijediti je:

$$\frac{b-a}{\epsilon} \leq \phi_n,$$

gdje je ϕ_n n-ti član Fibonaccijeva niza. Podjela se vrši korištenjem jednadžbi:

$$c = a + \frac{\phi_{N-1}}{\phi_N}(b-a)$$
$$d = b - \frac{\phi_{N-1}}{\phi_N}(b-a)$$

Zadatak 2.5.
Zadan je funkcija $f(x) = (x-4)^2$ i granice unimodalnog intervala $[-2, 6]$. Provesti Fibonaccijev postupak do širine intervala $\epsilon \leq 1$.

Rješenje

$$\frac{b-a}{\epsilon} = 8 \quad \Rightarrow \quad \text{Fibbonaccijev niz: 1, 1, 2, 3, 5, 8}$$

	a_i	c_i	d_i	b_i	
0	-2	1	3	6	$f(c_0) \geq f(d_0)$
1	1	3	4	6	$f(c_1) \geq f(d_1)$
2	3	4	5	6	$f(c_2) \leq f(d_2)$
3	3		4	5	

U zadnjem koraku ispituje se vrijednost funkcije u proizvoljnoj točci blizu sredine intervala.
npr. $x = 4.01 \Rightarrow$ interval je $[3, 4.01]$
U slučaju funkcije $f(x) = (x-4.2)^2$ dobiven bi bio interval $[4, 5]$.

Kvadratna interpolacija
Kvadratna interpolacija se nikad ne koristi samostalno jer može zapeti, ali se koristi u kombinaciji s drugim postupcima.

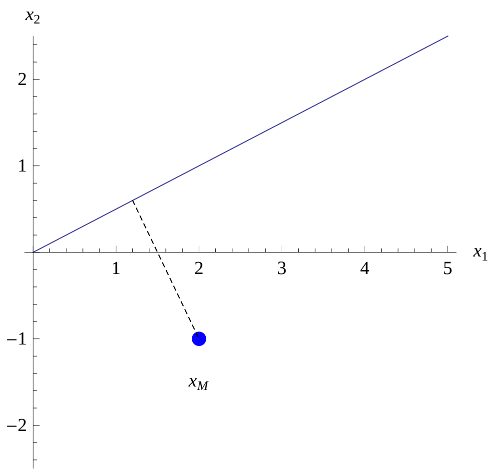
2.1.4 Određivanje minimuma pravca u višedimenzionalnom prostoru

$F(\underline{x})$
Metode za jednu varijablu mogu se iskoristiti kao potprogram u pretraživanju u višedimenzionalnom prostoru. Uz zadanu točku $\underline{x_0}$ i smjer $\underline{v_0}$ funkciju se može svesti na $f(\lambda) = F(\underline{x_0} + \lambda \underline{v_0})$ čiji se minimum onda traži. Iz pronađenog minimuma traži se novi smjer:

$$\underline{x_1}, \underline{v_1} \quad \Rightarrow \quad F(\underline{x_1} + \lambda \underline{v_1})$$

Zadatak 2.6.
Zadana je funkcija $F(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2$. Zadana je početna točka $\underline{x_0} = [0, 0]^T$ i smjer $\underline{v_0} = [2, 1]^T$. Također je zadan korak $h = 1$ i $\epsilon \leq 0.5$. Pronaći minimum funkcije na pravcu postupkom zlatnog reza (i pronalaska unimodalnog intervala).

Rješenje



$$\underline{x_\lambda} = \underline{x_0} + \lambda \underline{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$$
$$f(\lambda) = F(\underline{x_\lambda}) = (2\lambda - 2)^2 + (\lambda + 1)^2$$

λ	-1		0		1		2
$f(\lambda)$	16	$>$	5	$>$	4	$<$	13

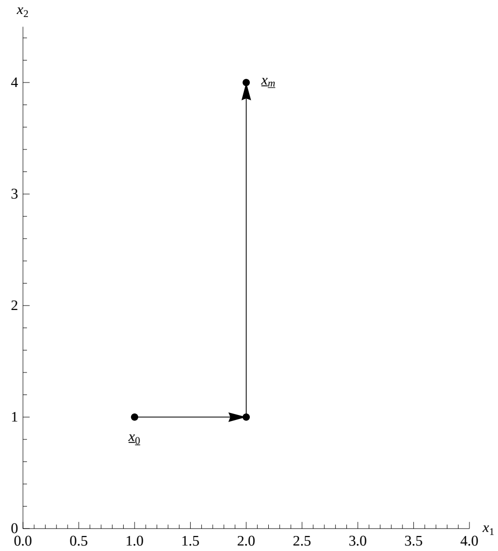
Interval je $\lambda \in [0, 2]$.

	a_i	c_i	d_i	b_i	
0	0	0.764	1.236	2	$f(c_0) \leq f(d_0)$
1	0	0.472	0.764	1.236	$f(c_1) \leq f(d_1)$
2	0	0.292	0.472	0.764	$f(c_2) \geq f(d_2)$
3	0.292	0.472		0.764	

$$\lambda \in [0.292, 0.764]$$
$$\underline{x} \in [\underline{x_0} + \lambda_1 \underline{v}, \underline{x_0} + \lambda_2 \underline{v}] = \left[\begin{bmatrix} 0.584 \\ 0.292 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1.528 \\ 0.764 \end{bmatrix} \right]$$

Primjer 2.1.
Zadana je funkcija cilja $F(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2$. Skicirati postupak pretraživanja u smjerovima koordinatne osi od točke $\underline{x_0} = (1, 1)$.

Rješenje



2.2 Pronalaženje optimuma funkcije više varijabli bez uporabe derivacije

2.2.1 Hooke-Jeeves postupak

Sastoji se od dva postupka:

1. *lokalno pretraživanje* – pomiče se iz početne točke za $\pm\Delta x$ po svakoj osi zasebno, obrađujući osi u zadanom poretku
2. *skokovi* – koriste informacije iz lokalnog pretraživanja da dodatno pomakne točke ispitivanja u smjeru u kojem je nađen lokalni minimum, odnosno centralno simetrično se preslikava početna točka s obzirom na točku minimuma

U postupku se koriste posebna strukutura koja se sastoji od točaka:

$\underline{x_B}$ – bazna točka

$\underline{x_P}$ – početna točka

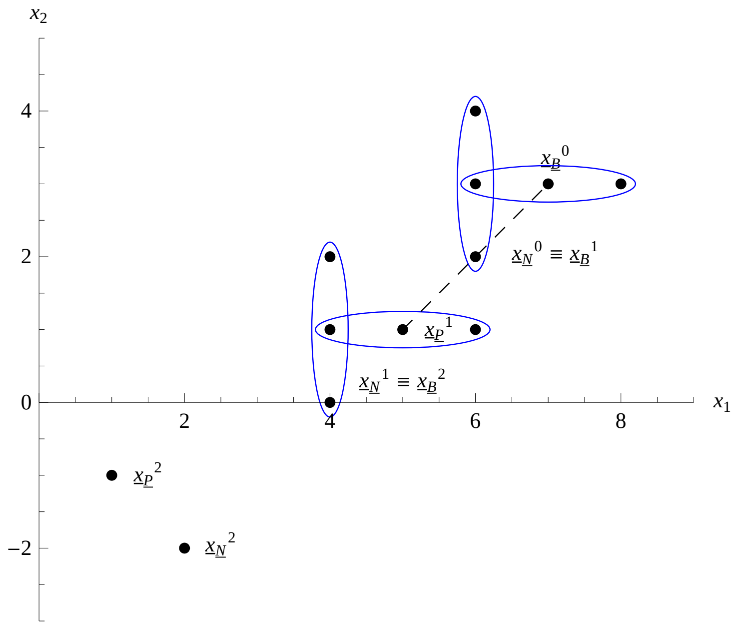
$\underline{x_N}$ – točka dobivena pretraživanjem

Rješenje postupka je bazna točka iz zadnje iteracije.

Napomena! *Ne koristiti pseudokod iz skripte, nego onaj na službenim stranicama predmeta.*

Primjer 2.2.
Zadana je funkcija $F(\underline{x}) = x_1^2 + 4x_2^2$, početna točka pretraživanja $\underline{x_0} = (7, 3)$ i početni korak postupka $\Delta x = 1$. Provesti Hooke-Jeeves postupak do preciznosti $\Delta x = 0.25$.

Rješenje



$\underline{x}_B$	$\underline{x}_P$	$\underline{x}_N$	$F(\underline{x}_B) > F(\underline{x}_N)$
(7, 3)	(7, 3)	(6, 2)	DA
(6, 2)	(5, 1)	(4, 0)	DA
(4, 0)	(2, −2)	(1, −1)	DA
(1, −1)	(−2, −2)	(−1, −1)	NE, $\Delta x = 0.5$
(1, −1)	(1, −1)	(0.5, −0.5)	DA
(0.5, −0.5)	(0, 0)	(0, 0)	DA
(0, 0)	(−0.5, 0.5)	(0, 0)	NE, $\Delta x = 0.25$
(0, 0)			

Rješenje je točka (0, 0).

Zadatak 2.7.
Zadana je funkcija $F(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, početna točka $\underline{x}_0 = (2, 3, 4)$ i početni korak $\Delta x = 1$. Provesti Hooke-Jeeves postupak do pomaka $\Delta x = 0.25$.

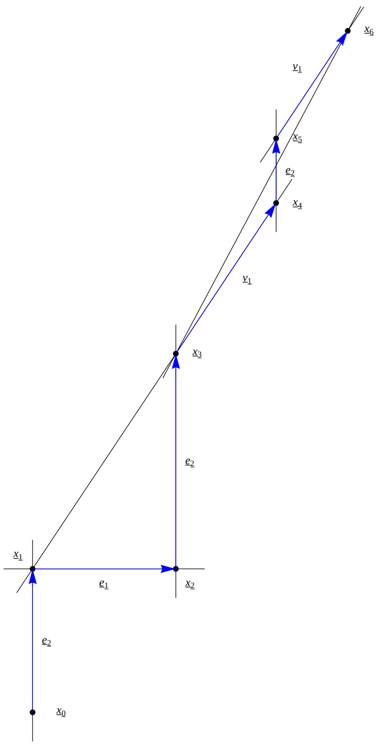
Rješenje

$\underline{x}_B$	$\underline{x}_P$	$\underline{x}_N$	$F(\underline{x}_B) > F(\underline{x}_N)$
(2, 3, 4)	(2, 3, 4)	(1, 2, 3)	DA
(1, 2, 3)	(0, 1, 2)	(0, 0, 1)	DA
(0, 0, 1)	(−1, −2, −1)	(0, −1, 0)	NE, $\Delta x = 0.5$
(0, 0, 1)	(0, 0, 1)	(0, 0, 0.5)	DA
(0, 0, 0.5)	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)	DA
(0, 0, 0)	(0, 0, −0.5)	(0, 0, 0)	NE, $\Delta x = 0.25$
(0, 0, 0)			

Rješenje je točka (0, 0, 0).

2.2.2 Postupak po Powellu

Smjerovi na početku postupka su koordinatne osi: $\underline{e_1}, \underline{e_2}$.



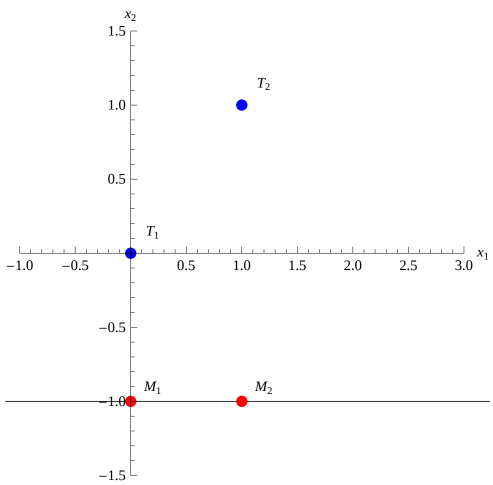
$$\begin{array}{cccc} & \underline{e_1} & \underline{e_2} & \underline{v_1} \\ \downarrow & \underline{e_2} & \underline{v_1} & \underline{v_2} \end{array}$$

$$\underline{v_1} = \underline{x_3} - \underline{x_1}$$
$$\underline{v_2} = \underline{x_6} - \underline{x_3}$$

Napomena! *Primjer u skripti nije primjer rada algoritma, nego primjer gdje se koriste dva svojstva na kojima se algoritam temelji da se pronađe minimum.*

Zadatak 2.8.
Za zadanu kvadratnu funkciju $F(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2$ odredite konjugirani smjer smjera $\underline{v} = [0, 1]^T$. Postupak provedite analitički i skicirajte.

Rješenje



Izaberu se dvije točke kroz koje se provuče pravac s vektorom smjera jednakim $\underline{v}$, npr. točke:

$$\underline{T}_1 = (0,0)$$
$$\underline{T}_2 = (1,1)$$

Traže se minimumi na pravcima kroz te točke. Prvo, kroz točku $\underline{T}_1$ prolazi pravac $\underline{T}_1 + \lambda\underline{v}$ i funkcija je:

$$f_1(\lambda) = F(\underline{T}_1 + \lambda\underline{v}) = 4 + (\lambda+1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$
$$\frac{df_1}{d\lambda} = 2\lambda + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -1$$
$$\underline{M}_1 = \underline{T}_1 + \lambda\underline{v} = (0,-1).$$

Za točku $\underline{T}_2$ dobiva se:

$$f_2(\lambda) = F(\underline{T}_2 + \lambda\underline{v}) = 1 + (\lambda+2)^2 = \lambda^2 + 4\lambda + 5$$
$$\frac{df_2}{d\lambda} = 2\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = -2$$
$$\underline{M}_2 = \underline{T}_2 + \lambda\underline{v} = (1,-1).$$

Konačno, konjugirani smjer je:

$$\underline{v}_2 = \underline{M}_2 - \underline{M}_1 = (1,0)$$

2.2.3 Simpleks postupak po Nelderu i Meadu

Podatkovna struktura:

1. $\underline{x}[0] \ldots \underline{x}[N]$ – točke simpleksa
2. $\underline{x}[l]$ – točka s najmanjom (najboljom) vrijednosti funkcije cilja
3. $\underline{x}[h]$ – točka s najvećom (najgorom) vrijednosti funkcije cilja
4. centroid $\underline{x_c}$ – aritmetička sredina svih točaka osim nalošije ($\underline{x}[h]$)

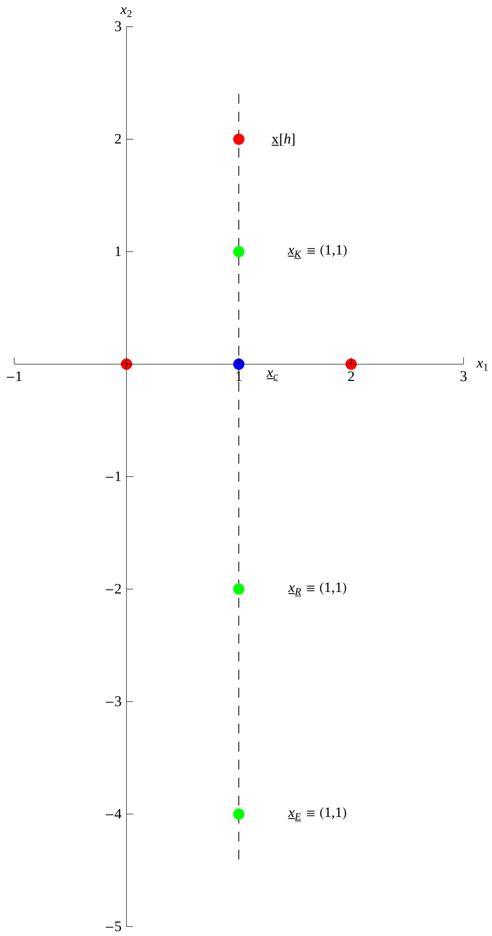
Operacije koje se koriste:

1. refleksija: $\underline{x_R} = (1+\alpha)\underline{x_c} - \alpha\underline{x}[h]$
2. ekspanzija: $\underline{x_E} = (1-\gamma)\underline{x_c} + \gamma\underline{x_R}$
3. kontrakcija: $\underline{x_K} = (1-\beta)\underline{x_c} + \beta\underline{x}[h]$

U svakoj od ove tri operacije nova točka zamjenjuje najlošiju.

Primjer 2.3.
Zadana je funkcija $F(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$. Trenutni skup točaka simpleksa je (0, 0), (2, 0) i (1, 2). Odredite centroid i provedite operacije refleksije, ekspanzije i kontrakcije.

Rješenje



$$\underline{x_c} = (1, 0)$$

Primjer 2.4.
Zadan je funkcija $F(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ i trenutni skup točaka $(1,\ 2,\ 3)$, $(0,\ 2,\ 4)$, $(-2, 0, 3)$ i $(-4, 0, 1)$. Pronaći centroid i provesti operaciju refleksije za $\alpha = 1$.

Rješenje

$$\underline{x}[h] = (0, 2, 4)$$
$$\underline{x_c} = (-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3})$$
$$\underline{x_R} = (1 + \alpha)\underline{x_c} - \alpha\underline{x}[h] = (-\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$

2.3 Pronalaženje optimuma funkcije više varijabli uz uporabu derivacija

2.3.1 Metoda najbržeg spusta

Zadatak 2.9.
Zadana je funkcija $F(\underline{x}) = (x_1 - 4)^2 + 4(x_2 - 2)^2$ i početna točka $x_0 = (0, 0)$. Provesti jednu iteraciju

metode najbržeg spusta (minimum ne pravcu pronaći analitički)!
Podpitanje: Pokazuje li korišteni smjer prema minimumu?

Rješenje

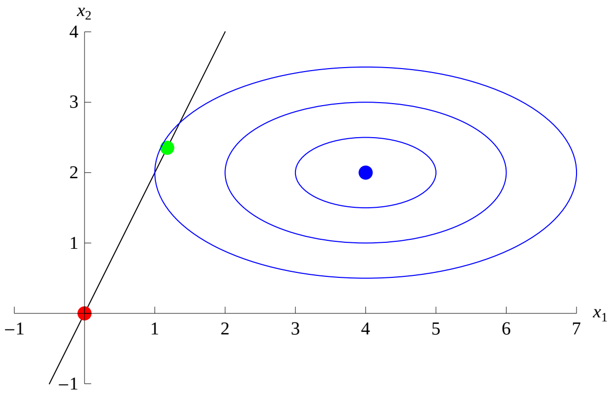
$$\nabla F \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - 4) \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 8(x_2 - 2) \end{cases} \qquad \nabla F|_{\underline{x_0}} = \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix}, \qquad \|\nabla F\| = \sqrt{320}$$

Nije nužno koristiti jedinični vektor smjera u zadatcima.

$$\underline{v_0} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} F(\underline{x_0} + \lambda_1 \underline{v_0}) &= (\lambda_1 - 4)^2 + 4(2\lambda_1 - 2)^2 \\ &= 17\lambda_1^2 - 40\lambda_1 + 32 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 34\lambda_1 - 40 = 0$$
$$\lambda_1 = \frac{20}{17} \approx 1.176$$
$$\underline{x_1} = \underline{x_0} + \lambda_1 \underline{v_0} = \begin{bmatrix} 1.176 \\ 2.352 \end{bmatrix}$$

Korišteni smjer ne pokazuje prema minimumu jer funkcija cilja ima konture eliptičnog oblika.



2.3.2 Newton-Raphsonov postupak za sustav nelinearnih jednadžbi

Primjer nelinearnog sustava

$$x_1 + x_2^2 + \sqrt{x_3} = 0$$
$$\sin x_1 - x_3^2 = 0$$

Sustav je oblika:

$$\underline{G}(\underline{x}) = \underline{0}, \ \underline{G} = \begin{bmatrix} g_1(\underline{x}) \\ g_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ g_n(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

gdje je $\underline{G}$ vektor vrijednosti funkcija.

Pristupi rješavanju sustava nelinearnih jednadžbi:

a) izgraditi jednu funkciju cilja, npr.

$$F(\underline{x}) = \sum (g_i(\underline{x}))^2$$

b) Newton-Raphsonova formula za sustav jednadžbi

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - \underline{J}^{-1}(\underline{x}_k) \cdot \underline{G}(\underline{x}_k),$$

gdje je $\underline{J}(\underline{x}_k)$ Jakobijeva matrica.

$$\underline{J}(\underline{x}_k) = \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|_{\underline{x}_k} & \cdots & \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right|_{\underline{x}_k} \\ \vdots & & \vdots \\ \left.\frac{\partial g_n}{\partial x_1}\right|_{\underline{x}_k} & \cdots & \left.\frac{\partial g_n}{\partial x_n}\right|_{\underline{x}_k} \end{bmatrix}$$

U Newton-Raphsonovoj metodi vrijedi:

$$\underline{x}_{k+1} - \underline{x}_k = \underline{\Delta x} = -\underline{J}^{-1}\underline{G},$$

što se rješava kao sustav jednadžbi

$$\underline{J}(\underline{x}_k)\underline{\Delta x} = -\underline{G}(\underline{x}_k),$$

gdje je u svakoj iteraciji

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \underline{\Delta x}.$$

Algoritam Newton-Raphsonove metode

```
POČETAK (x_k, ε)
|  x = x_0;
|  PONAVLJAJ
|  |  IZRAČUNAJ G(x);
|  |  IZRAČUNAJ J(x);
|  |  RIJEŠI J Δx = -G; // Nađi Δx
|  |  x+ = Δx;
|  DOK JE (Δx > ε) ;
|  VRATI x;
```

Modifikacija algoritma: računati s konstantnom Jakobijevom matricom izračunatom u početnoj točki.

```
POČETAK (x_k, ε)
|  x = x_0;
|  IZRAČUNAJ J(x_0), J^-1;
|  PONAVLJAJ
|  |  IZRAČUNAJ G(x);
|  |  Δx = -J^-1 · G;
|  |  x+ = Δx;
|  DOK JE (Δx > ε) ;
|  VRATI x;
```

Problem s takvom modifikacijom je moguća lošija stabilnost postupka (divergencija).

Zadatak 2.10.
Provesti tri iteracije Newton-Raphsonova postupka za zadani sustav i početnu točku $\underline{x}_0 = (1, 1)$.

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0$$
$$x_1 - 2x_2 = 0$$

Rješenje
Jakobijeva matrica glasi:

$$\underline{J}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Prva iteracija $\underline{x}_0 = (1, 1)$:

$$\underline{J}\,\underline{\Delta x} = -\underline{G} \;\Rightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{\Delta x} = \begin{bmatrix} -(1+1-1) \\ -(1-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Odnosno:

$$\begin{gathered} 2\Delta x_1 + 2\Delta x_2 = -1 \\ \Delta x_1 - 2\Delta x_2 = 1 \\ \hline \Delta x_1 = 0, \quad \Delta x_2 = -\frac{1}{2} \end{gathered}$$

Konačno, vrijedi:

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \underline{\Delta x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Druga iteracija $\underline{x}_1 = (1, 1/2)$:

$$\begin{gathered} \underline{J}\,\underline{\Delta x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{\Delta x} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \Delta x_1 = -\frac{1}{10}, \quad \Delta x_2 = -\frac{1}{20} \\ \underline{x}_2 = \underline{x}_1 + \underline{\Delta x} = (0.9, 0.45) \end{gathered}$$

Treća iteracija $\underline{x}_2 = (0.9, 0.45)$:

$$\begin{gathered} \underline{J}\,\underline{\Delta x} = \begin{bmatrix} 1.8 & 0.9 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{\Delta x} = \begin{bmatrix} -0.0125 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline \Delta x_1 = -0.00\dot{5}, \quad \Delta x_2 = -0.002\dot{7} \\ \underline{x}_3 = \underline{x}_2 + \underline{\Delta x} = (0.89\dot{4}, 0.447\dot{2}) \end{gathered}$$

Nakon treće iteracije vrijedi:

$$\underline{G}(\underline{x}_3) = \begin{bmatrix} 3 \cdot 10^{-5} \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.4 Pronalaženje optimuma funkcije više varijabli s ograničenjima

Rješavanje problema uz ograničenja:

1) matematički transformirati problem s ograničenjima u problem bez ograničenja i primijeniti neki od postojećih postupaka optimiranja

2) razviti prilagođeni postupak koji uzima ograničenja u obzir

Ograničenja koja su dana u obliku jednakosti mogu se zapisati preko ograničenja s nejednakostima:

$$h_1(\underline{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} h_1(\underline{x}) \geq 0 \\ -h_1(\underline{x}) \geq 0 \end{cases}$$

2.4.1 Transformacija u problem bez ograničenja na mješoviti način

- Transformacija u problem bez ograničenja s unutarnjom početnom točkom:

$$U(\underline{x}, r) = F(\underline{x}) - r \sum \ln g_i(\underline{x})$$

- Transformacija u problem bez ograničenja s vanjskom početnom točkom:

$$U(\underline{x}, t) = F(\underline{x}) + t \sum (g_i(\underline{x}) - |g_i(\underline{x})|)^2 \; ; \quad t = \frac{1}{r}$$

- Transformacija u problem bez ograničenja na mješoviti način:

$$U(\underline{x}, r) = F(\underline{x}) - r \sum \ln g_i(\underline{x}) + \frac{1}{r} \sum (h_j(\underline{x}))^2,$$

  pri čemu su za ograničenja funkcija g_i zadana kao $g_i(\underline{x}) \geq 0$, a ograničenja funkcija h_j zadana kao $h_j(\underline{x}) = 0$.

Primjer 2.5.
Zadana je funkcija cilja:

$$F(\underline{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$$

i ograničenja:

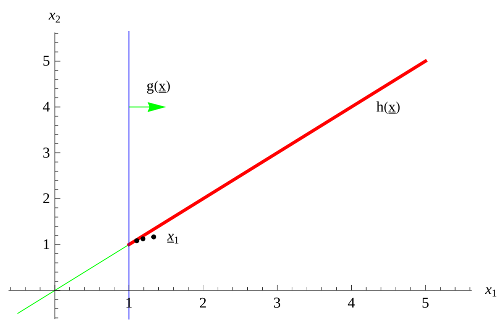
$$g(\underline{x}) = x_1 - 1 \geq 0$$
$$h(\underline{x}) = x_2 - x_1 = 0$$

Odredite pomoćnu funkciju cilja.

Rješenje
Pomoćna funkcija cilja je:

$$U(\underline{x}, r) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - r \ln(x_1 - 1) + \frac{1}{r}(x_2 - x_1)^2$$

Ta se funkcija može analitički riješiti postavljanjem $\frac{\partial U}{\partial \underline{x}} = 0$.



r	$\underline{x}$
1	$(1.\dot{3}, 1.1\dot{6})$
2^{-1}	$(1.189, 1.126)$
2^{-2}	$(1.105, 1.084)$

Zadatak 2.11.
Zadana je funkcija cilja dvije varijable $F(\underline{x})$ uz dva ograničenja:

$$a_1 x_1 + b_1 x_2 = c_1 \quad (h_1)$$
$$a_2 x_1 + b_2 x_2 = c_2 \quad (h_2)$$

Navedite uvjete postojanja rješenja i formulirajte novu funkciju cilja koja uzima ograničenja u obzir.

Rješenje
Rješenje će postojati u slučajevima da se pravci:

$$h_1: \quad x_2 = -\frac{a_1}{b_1}x_1 + \frac{c_1}{b_1}, h_2: \quad x_2 = -\frac{a_2}{b_2}x_1 + \frac{c_2}{b_2},$$

ili sijeku (nisu paralelni) ili poklapaju. Uvjet se može formulirati kao:

$$(\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}) \bigvee (\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \wedge \frac{c_1}{b_1} = \frac{c_2}{b_2})$$

Transformacija u problem bez ograničenja s vanjskom početnom točkom (ili transformacija u problem bez ograničenja na mješoviti način):

$$\begin{aligned} U(\underline{x}, t) &= F(\underline{x}) + t(h_1(\underline{x})^2 + h_2(\underline{x})^2) \\ &= F(\underline{x}) + t(a_1x_1 + b_1x_2 - c_1)^2 + t(a_2x_1 + b_2x_2 - c_2)^2 \end{aligned}$$

2.4.2 Boxov algoritam

Podaci:

- $2n$ točaka $\underline{x}[1], \dots, \underline{x}[2n]$
- $\underline{x_c}$ centroid; refleksija $\underline{x_R}$; faktor α

Rješenje postupka je centroid $\underline{x_c}$, a uvjet zaustavljanja može biti:

$$|x_i[h] - x_{ci}| < \epsilon_i \ ; \quad \forall i = 1, \dots, n \ (i \text{ su koordinate})$$

Zadatak 2.12.
Zadana je funkcija cilja:

$$F(\underline{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$$

i ograničenja:

$$\begin{aligned} x_1, x_2 \in [0, \infty\rangle, \\ x_1 - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Koristi se postupak po Boxu i trenutni skup točaka je $(1, 0), (2, 1), (2, 3), (1, 3)$ i faktor refleksije je $\alpha = 2$. Provedite dvije iteracije postupka.

Rješenje
U zadatku se ograničenje $x_1 - 1 \geq 0$ treba tretirati kao implicitno, premda se može prevesti u eksplicitno ograničenje.
Iteracije:
1.)

$\underline{x}$	(1, 0)	(2, 1)	(2, 3)	(1, 3)
$f(\underline{x})$	2	4	8	5

Najgora točka je $\underline{x}[h] = (2, 3)$, a centroid je $\underline{x_c} = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$.
Refleksija:

$$\begin{aligned} \underline{x_R} &= (1 + \alpha)\underline{x_c} - \alpha\underline{x}[h] \\ &= (4, 4) - (4, 6) \\ &= (0, -2) \end{aligned}$$

Eksplicitna ograničenja:

$$\underline{x_R}' = (0,0)$$

Implicitna ograničenja:

$$\text{NE} \Rightarrow \ \underline{x_R}'' = \frac{1}{2}(\underline{x_R}' + \underline{x_c}) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$$
$$\text{NE} \Rightarrow \ \underline{x_R}''' = \frac{1}{2}(\underline{x_R}'' + \underline{x_c}) = (1,1)$$

Provjera:

$$f(\underline{x_R}''') < f(\underline{x}[h]) \quad \text{DA}$$

2.)

$\underline{x}$	(1, 0)	(2, 1)	(1, 1)	(1, 3)
$f(\underline{x})$	2	4	1	5

Najgora točka je $\underline{x}[h] = (1,3)$, a centroid je $\underline{x_c} = (\frac{4}{3}, \frac{2}{3})$.
Refleksija:

$$\underline{x_R} = (1+\alpha)\underline{x_c} - \alpha\underline{x}[h] = (2,-4)$$

Eksplicitna ograničenja:

$$\underline{x_R}' = (2,0)$$

Implicitna ograničenja: DA
Provjera:

$$f(\underline{x_R}') < f(\underline{x}[h]) \quad \text{NE}$$
$$\underline{x_R}'' = \frac{1}{2}(\underline{x_c} + \underline{x_R}') = (\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$$

3.)

$\underline{x}$	(1, 0)	(2, 1)	(1, 1)	$(\frac{5}{3}, \frac{1}{3})$
$f(\underline{x})$	2	4	1	$\frac{29}{9}$

Zadatak 2.13.
Zadana je funkcija $F(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ uz sljedeća ograničenja:

$$x_1 \geq 1$$
$$x_2 \geq 1$$
$$x_1 + x_2 - 3 \geq 0$$

Trenutni skup točaka je $(1,4), (3,3), (1,2), (4,3)$ i faktor refleksije je $\alpha = 2$. Provedite dvije iteracije postupka po Boxu. U koju će točku algoritam konvergirati, koja točka predstavlja pravo rješenje? Promijenite jednu točku tako da se ovo ne dogodi.

Rješenje
Iteracije:
1.)

$\underline{x}$	(1, 4)	(1, 2)	(3, 3)	(4, 3)
$f(\underline{x})$	17	5	18	25

Najgora točka je $\underline{x}[h] = (4, 3)$, a centroid je $\underline{x_c} = (\frac{5}{3}, 3)$.
Refleksija:

$$\underline{x_R} = (1+\alpha)\underline{x_c} - \alpha\underline{x}[h] = (-3, 3)$$

Eksplicitna ograničenja:

$$\underline{x_R}' = (1, 3)$$

Implicitna ograničenja: DA
Provjera:

$$f(\underline{x_R}') < f(\underline{x}[h]) \quad \text{DA}$$

2.)

$\underline{x}$	(1, 4)	(1, 2)	(3, 3)	(1, 3)
$f(\underline{x})$	17	5	18	10

Najgora točka je $\underline{x}[h] = (3, 3)$, a centroid je $\underline{x_c} = (1, 3)$.
Refleksija:

$$\underline{x_R} = (1+\alpha)\underline{x_c} - \alpha\underline{x}[h] = (-3, 3)$$

Eksplicitna ograničenja:

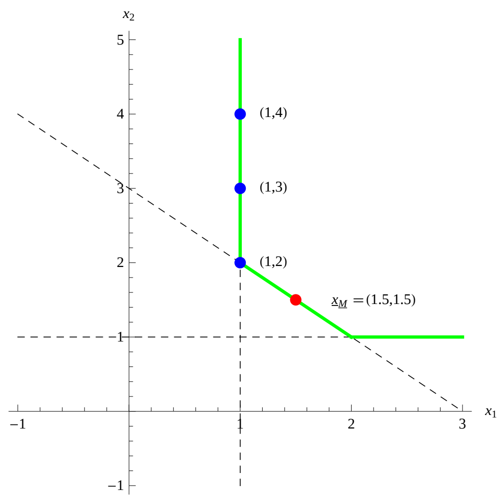
$$\underline{x_R}' = (1, 3)$$

Implicitna ograničenja: DA
Provjera:

$$f(\underline{x_R}') < f(\underline{x}[h]) \quad \text{DA}$$

3.)

$\underline{x}$	(1, 4)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 3)
$f(\underline{x})$	17	5	10	10



Točke simpleksa završile su sve na granici $x_1 = 1$ i postupak će konvergirati u točku $(1, 2)$, dok je pravo rješenje točka $\underline{x_M} = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. Postavljanjem točke $(4, 3)$ na točku $(2, 1)$ ispravlja se greška.

3 Genetski algoritmi

Primjer križanja s jednom točkom prekida.

R1:	**0**	**1**	**1**	**0**	1	0	1
R2:	0	1	0	0	**1**	**1**	**0**
D:	0	1	1	0	1	1	0

Primjer uniformnog križanja ($\mathrm{D} = \mathrm{R1} \cdot \mathrm{R2} + \mathrm{K}(\mathrm{R1} \oplus \mathrm{R2})$):

R1:	0	1	1	0	1	0	1
R2:	0	1	1	0	1	1	0
K:	1	0	1	0	1	0	1
D:	0	1	1	0	1	0	1

Zadatak 3.1.
Genetskim algoritmom traži se optimum funkcije dvije varijable. Za prvu varijablu interval je $x_1 \in [-5, 5]$, a za drugu $x_2 \in [0, 1]$. Željena preciznost je dvije decimale. Napišite jedinke koje predstavljaju točke $(-2, 0.2)$, $(0, 0.99)$. Provedite jednoliko križanje uz slučajni kromosom križanja (koji sadrži sve jedinice). Ako je vjerojatnost mutacije bita 0.01, koja je vjerojatnost da će barem jedan bit u kromosomu biti mutiran?

Rješenje
Prikaz

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 \rightarrow 1000 & \Rightarrow n_1 = 10 \\ x_2 \rightarrow 100 & \Rightarrow n_2 = 7 \end{array}\right\} n = 17$$

Točka $(-2, 0.2)$ može se prikazati kao:

$$-2 \Rightarrow b = \frac{x - \mathrm{DG}}{\mathrm{GG} - \mathrm{DG}}(2^n - 1) = \frac{-2+5}{10}(2^{10} - 1) = 306.9 \rightarrow 307$$

$$0.2 \Rightarrow b = \frac{0.2 - 0}{2}127 = 25.4 \rightarrow 25$$

Točke $(0, 0.99)$ može se prikazati kao:

$$0 \Rightarrow b = 511.5 \rightarrow 512 \quad \textbf{(!)}$$

$$0.99 \Rightarrow b = 125.73 \rightarrow 126$$

Križanje je sada oblika:

$(-2, 0.2)$:	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
$(0, 0.99)$:	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
R:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
D:	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Rješenje kad se prebaci u originalni prikaz je $\mathrm{D} \equiv (3.006, 1)$.
Uz $p_m = 0.01$, vjerojatnost mutacije kromosoma je $P_m = 1 - (1 - p_m)^n = 15.7\%$.

Zadatak 3.2.
Genetskim algoritmom optimira se funkcija $f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2$ s intervalima $x_1 \in [0, 10]$ i $x_2 \in [-1, 1]$. Željena preciznost je dvije decimale. Izaberite tri slučajne jedinke i na njima provedite 3-turnirsku eliminaciju uz stvaranje nove jedinke operacijom jednolikog križanja.

Rješenje

4 Analiza prijelaznih pojava numeričkim postupcima

Analiza prijelaznih pojava je računanje budućnosti sustava. Stanja sustava je moguće opisati varijablama stanja kao što su energija, brzina, ... Varijable stanja određuju količinu pohranjene energije u sustavu. Promjene varijable stanja u vremenu zapisuju se u obliku diferencijalnih jednadžbi koje predstavljaju zakonitosti sustava.

Osnovni pojmovi sustava su početno stanje x_0, početni trenutak t_0 te diferencijalna jednadžba koja opisuje sustav $x' = f(x,t)$. Cilj je izračunati stanje sustava u trenutku t, $x(t) = ?$. Općeniti zapis jednadžbe sustava $x' = f(x,t)$ može se u matričnom zapisu napisati kao:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\ \underline{x} + \underline{B}\ \underline{t} + \underline{C},$$

gdje je $\underline{A}$ matrica sustava.

4.1 Eulerov postupak

Za sustav $\dot{x} = f(x,t)$ traži vrijednost varijable stanja x u trenutku t, $x(t) = ?$. Za trenutak t_k znamo trenutnu vrijednost $x(t_k)$ i želimo iz toga izračunati $x(t_{k+1})$ u trenutku $t_{k+1} = t_k + T$, gdje je T period integracije. Pritom vrijedi:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}\, dt,$$

pri čemu se integral aproksimira pravokutnikom visine $\dot{(x)}(t_k)$ i širine T.

Preciznost postupka opisujemo redom postupka, gdje je Eulerov postupak prvog reda (pogreška $e_k \sim T$). Ako je lokalna pogreška d_k proporcionalna s T^{Q+1} tada vrijedi da je globalna pogreška proporcionalna s T^Q.

$$d_k \sim T^{Q+1} \rightarrow e_k \sim T^Q$$

Stabilnost postupka

S δ_k označavamo pogrešku u k-tom koraku, a uvjet stabilnosti je:

$$|\delta_{k+1}| \leq |\delta_k|.$$

Pri ispitivanju stabilnosti koristi se ispitna jednadžba:

$$\dot{x} = \lambda x.$$

Za Eulerov postupak vrijedi:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + T\dot{x_k} \\ &= x_k + T\lambda x_k \\ &= (1 + \lambda T)x_k \end{aligned}$$

Dodavanjem pogreške na jednadžbu dobiva se:

$$x_{k+1} + \delta_{k+1} = (1 + \lambda T)(x_k + \delta_k).$$

Iz te jednadžbe i jednadžbe bez pogreške dobiva se:

$$\delta_{k+1} = (1 + \lambda T)\delta_k \quad \Rightarrow \quad |\delta_{k+1}| = |1 + \lambda T||\delta_k|.$$

Uz uvjet stabilnosti slijedi uvjet:

$$|1 + \lambda T| \leq 1.$$

Prilikom određivanja stabilnosti sustava konstanta λ odgovara svojstvenim vrijednostima matrice promatranog sustava $\lambda = \sigma + j\omega$ i za uvjet stabilnosti vrijedi:

$$T < \frac{-2\sigma}{|\lambda|^2}$$

Zadatak 4.1.
Tijelo usporava u bestežinskom prostoru kretanjem kroz neku viskoznu tekućinu. Sila trenja proporcionalna je brzini:

$$m \cdot a = m \cdot v' = -F_{\mathrm{TR}} = -k \cdot v$$

Rješenje
Vrijedi:

$$v' = -\frac{k}{m} v.$$

Uz uvrštavanje npr. $-k/m = 0.1$ i $x = v$ dobiva se sustav:

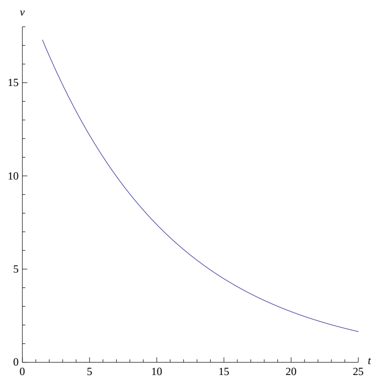
$$\dot{x} = -0.1x$$

Sustav se može riješiti:

$$\frac{dx}{dt} = -0.1x \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{x} = -0.1dt \quad \rightarrow \quad \ln x = -0.1t \quad \rightarrow \quad x = e^{-0.1t}$$

Općenito vrijedi:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-0.1(t-t_0)}$$



Eulerov postupak:

$$\dot{x} = -0.1x \quad \Rightarrow \quad \lambda = -0.1 = \sigma + j\omega$$
$$\sigma = -0.1, \ \omega = 0$$

Stabilnost:

$$T \leq \frac{-2\sigma}{|\lambda|^2} = 20$$

$$x_{k+1} = x_k + T\lambda x_k$$
$$x_{k+1} = x_k + T(-0.1x_k); \quad x(t=0) = 1$$

x_k	$T=1$	$T=15$	$T=25$	$T=20$
x_0	1	1	1	1
x_1	0.9	-0.5	-1.5	-1
x_2	0.81	0.25	2.25	1
x_3	0.729	-0.125	-3.375	-1
x_4	0.6561	0.0625	5.0625	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$T = 1$:

$$x_1 = x_0 - 0.1 \cdot T \cdot x_0 = 1 - 0.1 = 0.9$$
$$x_2(t=2) = x_1 - 0.1 \cdot T \cdot x_1 = 0.9 - 0.1 \cdot 1 \cdot 0.9 = 0.81$$

$T = 15$:

$$x_1 = 1 - 0.1 \cdot 15 \cdot 1 = -0.5$$
$$x_2 = -0.5 - 0.1 \cdot 15 \cdot (-0.5) = 0.25$$

Napomena! *Za $T = 15$ preciznost je lošija, ali postupak je stabilan.*
Za $T = 25$ sustav je nestabilan i divergira.
Za $T = 20$ preciznost je u banani, ali je stabilno.

Zadatak 4.2.
Zadan je sustav

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -5 \end{bmatrix} \underline{x}$$

i početne vrijednosti varijable stanja $\underline{x}(t = 0) = [1,\ 0]^T$. Za Eulerov postupak odrediti najveći dopušteni period integracije i vrijednost varijable u trenutku $t = 0.8$.

Rješenje
Sustav se može zapisati kao:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= -10x_1 - 5x_2 \end{aligned}$$

Računaju se svojstvene vrijednosti matrice sustava.

$$|\lambda \underline{E} - \underline{A}| = 0$$
$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 10 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$$
$$|\lambda|^2 = \frac{25}{4} + \frac{15}{4} = 10$$

Stabilnost Eulerovog postupka

$$T \le -\frac{2\sigma}{|\lambda|^2} = \frac{5}{10} = 0.5$$
$$\Rightarrow T = 0.4$$

Računanje $\underline{x}(t = 0.8)$ Eulerovim postupkom
t = 0.4

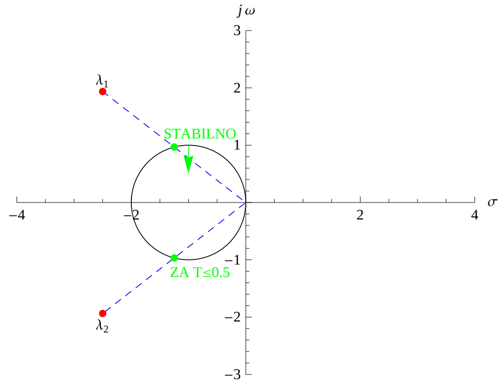
$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{x}_k + T \cdot \underline{\dot{x}}_k \\ x_{1,1} &= x_{1,0} + T(x_{2,0}) = 1 + 0.4 \cdot 0 = 1 \\ x_{2,1} &= x_{2,0} + T(-10x_{1,0} - 5x_{2,0}) = 0 + 0.4(-10) = -4 \end{aligned}$$

t = 0.8

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= x_{1,1} + T(x_{2,1}) = 1 + 0.4 \cdot (-4) = -0.6 \\ x_{2,2} &= x_{2,1} + T(-10x_{1,1} - 5x_{2,1}) = -4 + 0.4(-10 + 20) = 0 \end{aligned}$$

Rješenje je $\underline{x}(t = 0.8) = [-0.6,\ 0]^T$.

Grafički uvjet stabilnosti u λT-ravnini

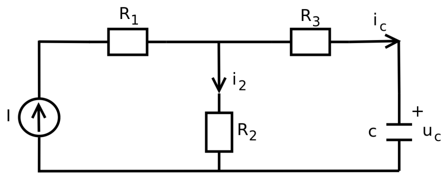


Uvjet:

$$|1 + \lambda T| \leq 1$$

Unutrašnjost kružnice predstavlja stabilno područje za Eulerov postupak u λT-ravnini.

Zadatak 4.3.



$$R_1 = R_2 = 100\ \Omega$$
$$R_3 = 50\ \Omega$$
$$c = 100\ \mu F$$
$$I = 1\ mA$$

Formulirajte sustav diferencijalnih jednadžbi za zadanu mrežu. Pronađite najveći dopušten korak integracije za Eulerov postupak i provedite prve dvije iteracije za $T = 0.01$.

Rješenje
U sustavu vrijede sljedeće jednadžbe:

$$I = i_2 + i_c$$
$$i_2 R_2 = i_c R_3 + u_c$$

Uvrštavanjem iznosa za i_2 iz prve u drugu jednadžbu te uvrštavanjem formula za povezanost napona i struje dobiva se:

$$(I - i_c) R_2 = i_c\ R_3 + u_c$$
$$I\ R_2 - R_2\ c\ u_c' = R_3\ c\ u_c' + u_c$$

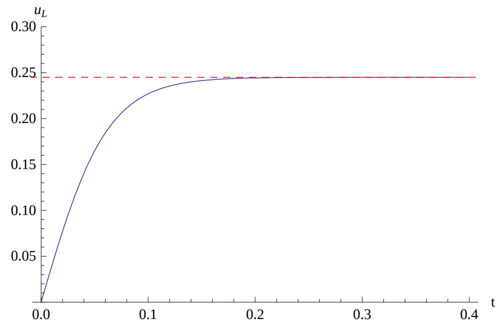
$$u_c' = \frac{1}{c(-R_2 - R_3)} u_c - \frac{I R_2}{c(-R_2 - R_3)} = f(u_{c,t})$$
$$= -\frac{u_c}{0.015} + 6.\dot{6}$$

Za svojstvenu vrijednosti vrijedi: $\lambda = \sigma = \frac{1}{c(-R_2 - R_3)} = -\frac{1}{0.015}$
Najveći dopušteni korak integracije za Eulerov postupak je: $T \leq -\frac{2\sigma}{|\lambda|^2} = 0.03$.
Računanje $\underline{u_c}(t = 0.02)$ Eulerovim postupkom uz $T = 0.01$
t = 0.01

$$u_{c,1} = u_{c,0} + T f(u_{c,0}) = 0.0\dot{6}\ V$$

t = 0.02

$$u_{c,2} = u_{c,1} + T f(u_{c,1}) = 0.0\dot{8}\ V$$



4.2 Obrnuti Eulerov postupak

Za sustav:

$$\dot{x} = 0.1x,$$

obrnuti Eulerov postupak aproksimira površinu s umnoškom perioda integracije T i vrijednosti derivacije u koraku $(k+1)$. Za primjer vrijedi:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + T\dot{x}_{k+1}, \\ &= x_k + T \cdot 0.1 \cdot x_{k+1}, \end{aligned}$$

što vodi na konačno rješenje:

$$x_{k+1}(1 - 0.1T) = x_k.$$

Obrnuti Eulerov postupak je implicitni postupak. Implicitni postupci u pravilu imaju puno bolju stabilnost od eksplicitnih.

Zadatak 4.4.
Zadan je sustav

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix} \underline{x}$$

te početne vrijednosti varijabli stanja $\underline{x}(t=0) = [1,\ -2]^T$. Pronaći vrijednost varijable stanja u trenutku 0.02 uz period integracije $T = 0.01$ po obrnutom Eulerovom postupku.

Rješenje
Sustav se može zapisati kao:

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{1,k} + T(x_{2,k+1}) \\ x_{2,k+1} &= x_{2,k} + T(-200\ x_{1,k+1} - 102\ x_{2,k+1}) \end{aligned}$$

Iz čega se dobiva:

$$x_{2,k+1} = \frac{x_{2,k} - 200\ Tx_{1,k}}{1 + 200\ T^2 + 102\ T}$$

Računanje $\underline{x}(t = 0.02)$ obrnutim Eulerovim postupkom
t = 0.01

$$\begin{aligned} x_{2,1} &= \frac{x_{2,0} - 200\ Tx_{1,0}}{1 + 200\ T^2 + 102\ T} = -196078 \\ x_{1,1} &= x_{1,0} + Tx_{2,1} = 0.98039 \end{aligned}$$

t = 0.02

$$\begin{aligned} x_{2,2} &= -1.9223 \\ x_{1,2} &= 0.96116 \end{aligned}$$

Rješenje je $\underline{x}(t = 0.02) = [-1.9223,\ 0.96116]^T$.

4.3 Trapezni postupak

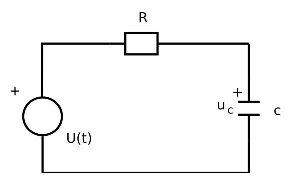
Trapezni postupak je postupak drugog reda. Površina se aproksimira s umnoškom perioda integracije T i sredine između vrijednosti derivacije u koraku k i koraku $(k+1)$.

$$x_{k+1} = x_k + T\frac{(\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1})}{2}$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}(\lambda x_k + \lambda x_{k+1})$$
$$x_{k+1}(1 - \frac{\lambda T}{2}) = x_k(1 + \frac{\lambda T}{2})$$

Uvjet stabilnosti je tada:

$$\left|\frac{1 + \frac{\lambda T}{2}}{1 - \frac{\lambda T}{2}}\right| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma \leq 0 \;\; (\lambda = \sigma + j\omega)$$

Zadatak 4.5.



$$R = 10\ k\Omega$$
$$c = 10\ \mu F$$

Zadanu mrežu opišite potrebnim brojem diferencijalnih jednadžbi. Početne vrijednosti varijable stanja jednake su 0, a naponski izvor daje pilasti napon koji se u intervalu $[0, 1]$ može izraziti:

$$U(t) = 2t\ [V].$$

Provedite dvije iteracije trapeznog postupka uz korak 0.1.

Rješenje
Sustav se može zapisati kao:

$$U(t) = i\ R + u_c = u_c'\ R\ c + u_c$$
$$u_c' = -\frac{1}{R\ c}u_c + \frac{U(t)}{R\ c} = -10u_c + 10U(t)$$

Trapezni postupak se tada može zapisati kao:

$$u_{k+1} = u_k + \frac{T}{2}(\dot{u}_k + \dot{u}_{k+1})$$
$$= u_k + \frac{T}{2}(-10u_k + 10U_k - 10u_{k+1} + 10U_{k+1})$$
$$u_{k+1}(1 + 5T) = (1 - 5T)u_k + 5T(U_k + U_{k+1})$$
$$u_{k+1} = u_k\frac{1 - 5T}{1 + 5T} + \frac{5T(U_k + U_{k+1})}{1 + 5T}$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti i koraka integracije $T = 0.1$ dobiva se:

$$u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}(U_k + U_{k+1})$$

Računanje $\underline{x}(t = 0.2)$ trapeznim postupkom
t = 0.1

$$u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{1}{3}(U_0 + U_1) = 0 + \frac{1}{3}(0 + 0.2) = 0.0\dot{6}$$

t = 0.2

$$u_2 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{1}{3}(U_1 + U_2) = 0.\dot{2}$$

4.4 Heunov postupak

Jednadžbe za računanje Heunovog postupka su:

$$\hat{x}_{k+1} = x_k + T\dot{x}_k = x_k + T \cdot \lambda \cdot x_k$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}(\dot{x}_k + \dot{\hat{x}}_{k+1}) = x_k + \frac{T}{2}[\lambda x_k + \lambda(x_k + T \cdot \lambda \cdot x_k)]$$

Zadatak 4.6.
Zadan je sustav

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix} \underline{x}$$

te početne vrijednosti varijabli stanja $\underline{x}(t=0) = [1,\ -2]^T$. Provjeriti stabilnost Heunovog postupka za $T = 0.01$ i pronaći varijable stanja za $t = 0.02$.

Rješenje
Sustav se može zapisati kao (zadatak 4.4):

$$x_{1,k+1} = x_{1,k} + T(x_{2,k+1})$$
$$x_{2,k+1} = x_{2,k} + T(-200\ x_{1,k+1} - 102\ x_{2,k+1})$$

Izračun svojstvenih vrijednosti matrice sustava

$$\begin{aligned} |\lambda \underline{E} - \underline{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 200 & \lambda + 102 \end{vmatrix} \\ &= \lambda(\lambda + 102) - (-200) \\ &= \lambda^2 + 102\lambda + 200 \end{aligned}$$

Izjednačavanjem s nulom dobiva se:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{102}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{102^2 - 4 \cdot 200} \\ &= -51 \pm 49 \\ \lambda_{1,2} &= -2, -100 \end{aligned}$$

Stabilnost Heunovog postupka uz $T = 0.01$: $|1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2}| \leq 1$

$$\lambda_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad |1 - 0.02 + \frac{(0.02)^2}{2}| = 0.9802 \leq 1$$
$$\lambda_2 = -100 \quad \Rightarrow \quad |1 - 1 + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \leq 1$$

Heunov postupak

$$\hat{x}_{k+1} = x_k + T\dot{x}_k$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}(\dot{x}_k + \dot{\hat{x}}_{k+1})$$

Računanje $\underline{x}(t = 0.02)$ Heunovim postupkom
$\mathbf{t = 0.01}$

$$\hat{x}_{1,1} = x_{1,0} + T(x_{2,0}) = 0.96$$
$$\hat{x}_{2,1} = x_{2,0} + T(-200x_{1,0} - 102x_{2,0}) = -1.96$$
$$x_{1,1} = x_{1,0} + \frac{T}{2}(x_{2,0} + \hat{x}_{2,1}) = 0.9802$$
$$x_{2,1} = x_{2,0} + \frac{T}{2}[(-200x_{1,0} - 102x_{2,0}) + (-200\hat{x}_{1,1} - 102\hat{x}_{2,1})] = -1.9404$$

t = 0.02

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{1,2} &= x_{1,1} + T(x_{2,1}) = 0.960796 \\
\hat{x}_{2,2} &= x_{2,1} + T(-200x_{1,1} - 102x_{2,1}) = -1.9216 \\
x_{1,2} &= x_{1,1} + \frac{T}{2}(x_{2,1} + \hat{x}_{2,2}) = 0.96089 \\
x_{2,2} &= x_{2,1} + \frac{T}{2}[(-200x_{1,1} - 102x_{2,1}) + (-200\hat{x}_{1,2} - 102\hat{x}_{2,2})] = -1.9118
\end{aligned}$$

Rješenje je $\underline{x}(t = 0.02) = [0.96089,\ -1.9118]^T$.

4.5 Popis postupaka i zadatci

Eulerov postupak

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}_k$$
$$|1 + \lambda T| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad T \leq -\frac{2\sigma}{|\lambda|^2}$$

Obrnuti Eulerov postupak

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}_{k+1}$$
$$|1 - \lambda T| \geq 1 \quad \Rightarrow \quad T \geq \frac{2\sigma}{|\lambda|^2}$$

Trapezni postupak

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}(\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1})$$
$$\sigma \leq 0$$

Heunov postupak

$$\hat{x}_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}_k$$
$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}(\dot{x}_k + \dot{\hat{x}}_{k+1})$$
$$|1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2}| \leq 1\ ; \quad T = ?$$

Zadatak 4.7.
Za zadani sustav

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \underline{x}$$

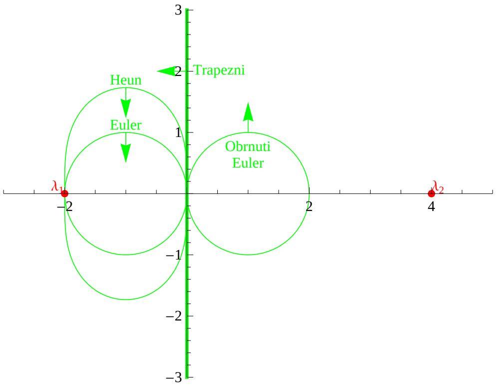
predložite odgovarajući postupak numeričke integracije i definirajte dopuštene vrijednosti perioda integracije T.

Rješenje
Računanje svojstvenih vrijednosti matrice sustava

$$\begin{aligned}
|\lambda \underline{E} - \underline{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda + 2)(\lambda - 4)
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem s nulom dobiva se:

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 4$$



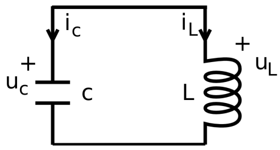
Koristi se obrnuti Eulerov postupak, jer jedino on obuhvaća obje svojstvene vrijednosti.

$$T = ?$$

$$T \geq \frac{2\sigma}{|\lambda|^2} = 0.5$$

$$T \in [0.5, \infty\rangle$$

Zadatak 4.8.



$$L = 0.1\ H$$
$$c = 1\ mF$$

Formulirajte sustav diferencijalnih jednadžbi za zadanu električnu mrežu. Provjerite može li se sustav rješavati Eulerovim postupkom, odnosno predložite postupak i period integracije.

Rješenje
Sustav predstavlja *harmonijski oscilator* $\equiv$ *matematičko njihalo.*
Pri rješavanju mreže koriste se jednadžbe:

$$i_c = c\frac{du}{dt}, \quad u_L = L\frac{di}{dt},$$

i Kirchoffovi zakoni.
Vrijede sljedeće jednadžbe za sustav:

$$i_c = -i_L$$
$$u_c = u_L$$

Uvrštavanjem prethodnih veza između napona i struje, te $u = u_c$ i $i = i_L$ slijed:

$$c\,u' = -i$$
$$u = L\,i'$$

$$\left.\begin{array}{r} u' = -\frac{1}{c}i \\ i' = \frac{1}{L}u \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} u' \\ i' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{c} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ i \end{bmatrix}$$

Napomena! *Redoslijed varijabli stanja je nebitan.*

Računanje svojstvenih vrijednosti matrice sustava

$$|\lambda \underline{E} - \underline{E}| = \begin{vmatrix} \lambda & 1000 \\ -10 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 10000$$

Izjednačavanjem s nulom dobiva se:

$$\lambda_{1,2} = \pm 100i$$

Eulerov postupak: $T \leq -\frac{2\sigma}{|\lambda|^2} = 0 \Rightarrow$ ne može se primijeniti
Obrnuti Euler: $T \geq \frac{2\sigma}{|\lambda|^2} = 0 \Rightarrow$ primijenjuje se

Zadatak 4.9.
Navedenim jednadžbama definiran je proizvoljan postupak numeričke integracije. Za zadani postupak odredite uvjet stabilnosti. Ako se zadanim postupkom rješava sustav $\dot{x} = -0.1x$, hoće li postupak biti stabilan uz $T = 1$?

$$\begin{aligned} m_1 &= x_k + Tf(x_k, t_k) \\ m_2 &= x_k + Tf(x_{k+1}, t_{k+1}) \\ x_{k+1} &= x_k + \frac{T}{2}[f(m_1, t_k) + f(m_2, t_{k+1})] \end{aligned}$$

Rješenje
Koristi se ispitna jednadžba $\dot{x} = \lambda x$:

$$\begin{aligned} m_1 &= x_k + T\ \lambda\ x_k \\ m_2 &= x_k + T\ \lambda\ x_{k+1} \\ x_{k+1} &= x_k + \frac{T}{2}[\lambda(x_k + T\ \lambda\ x_k) + \lambda(x_k + T\ \lambda\ x_{k+1})] \end{aligned}$$

Uređivanjem jednadžbe dobiva se:

$$x_{k+1}(1 - \frac{(\lambda T)^2}{2}) = x_k(1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2})$$
$$\delta_{k+1} \sim \delta_k$$

Uz uvjet stabilnosti $|\delta_{k+1}| \leq |\delta_k|$ dobiva se:

$$\left| \frac{1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2}}{1 - \frac{(\lambda T)^2}{2}} \right| \leq 1$$

Za sustav $\lambda = -0.1$ i korak $T = 1$ vrijedi:

$$\left| \frac{1 - 0.1 + 0.005}{1 - 0.005} \right| = 0.909 \leq 1,$$

i postupak je stabilan.

4.6 Linearni višekoračni postupci

4.6.1 Prediktorsko-korektorski postupak

Zadatak 4.10.
Za zadani sustav

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

provedite jednu iteraciju prediktorsko-korektorskog postupka uz početne vrijednosti varijable stanja jednake 1 i period integracije $T = 0.01$. Kao prediktor uporabiti Eulerov, a kao korektor obrnuti Eulerov postupak.

Rješenje

P: Euler $\quad (\dot{x}_{k+1} = x_k + T\,\dot{x}_k)$

$$\hat{x}_{1,1} = x_{1,0} + T(x_{2,0}) = 1.01$$
$$\hat{x}_{2,1} = x_{2,0} + T(-5x_{1,0} - 2x_{2,0}) = 0.93$$

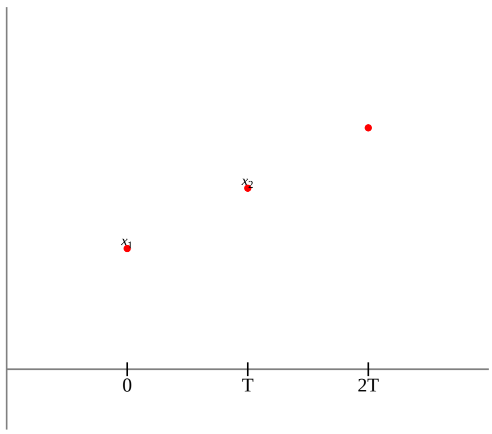
K: Obrnuti Euler $\quad (\dot{x}_{k+1} = x_k + T\,\dot{x}_{k+1})$

$$x_{1,1} = x_{1,0} + T\,\dot{\hat{x}}_{1,1} = x_{1,0} + T(\hat{x}_{2,1}) = 1.0093$$
$$x_{2,1} = x_{2,0} + T(-5\hat{x}_{1,0} - 2\hat{x}_{2,0}) = 0.9309$$

Rješenje je $x(t = 0.01) = [1.0093,\ 0.9309]^T$.

4.6.2 Lagrangeova interpolacija

Primjer 4.1.
Primjer interpoliranja Lagrangeovom interpolacijom kroz dvije točke.



Rješenje

$$L_0 = \frac{t-T}{0-T} = \frac{t-T}{-T}$$
$$L_1 = \frac{t-0}{T-0} = \frac{t}{T}$$
$$\mathbf{P}(\mathbf{t}) = \mathbf{x_0}\frac{\mathbf{t}-\mathbf{T}}{-\mathbf{T}} + \mathbf{x_1}\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{T}}$$

4.6.3 Adams-Bashforthovi postupci

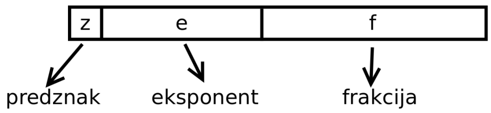
Adams-Bashforthovi postupci su linearni višekoračni postupci koji se temelje na Lagrangeovoj interpolaciji. Zbog loše stabilnosti ne koriste se sami nego kao prediktori u prediktorsko-korektorskom postupku, gdje se Adams-Moultonovi postupci koriste kao korektori.

4.6.4 Nordsieckov postupak

Nordsieckov postupak služi za izvođenje na računalu za učinkovitiju promjenu perioda integracije. U paraleli se prate dva postupka različitog reda i njihova razlika. Ako razlika raste, tada se period mijenja.

5 Pogreške u postupcima analize

IEEE 754



- k – broj bitova eksponenta
- p – broj bitova za frakciju

Eksponent je posmaknut za $a = 2^{k-1} - 1$, a signifikand je: $1.f$ ili $0.f$.

e	f	vrijednost	
0	0	$(-1)^z \cdot 0 = \pm 0$	(pozitivna i negativna 0)
0	$1 \leq f \leq 2^p - 1$	$(-1)^z \cdot 2^{1-a} \cdot (0.f)$	(denormirani signifikand)
$1 \leq e \leq 2^k - 2$	$0 \leq f \leq 2^p - 1$	$(-1)^z \cdot 2^{e-a} \cdot (1.f)$	
$2^k - 1$	0	$(-1)^z \cdot \infty$	
$2^k - 1$	$f \neq 0$	NaN	(not a number)

Apsolutna pogreška:	$\lvert \mathrm{rd}(x) - x \rvert$
Maksimalna apsolutna pogreška:	2^{a-p-1}
Relativna pogreška:	$\left\lvert \frac{\mathrm{rd}(x)-x}{x} \right\rvert$
Maksimalna relativna pogreška:	$\epsilon = 2^{-p}$

Zadatak 5.1.
Po uzoru na IEEE standard definiran je prikaz brojeva s jednim bitom za predznak, četiri bita za eksponent i četiri bita za frakciju. Ako je broj u tom zapisu zapisan kao "100001100" odredite njegovu vrijednost u domeni.

Rješenje
Vrijedi $k = 4$ i $p = 4$, te je broj podijeljen: "1|0000|1100".
Za a vrijedi $a = 2^{k-1} - 1 = 7$.
Jer je eksponent $e = 0$ signifikand je denormirani i konačna vrijednost vr se računa kao:

$$\mathrm{vr} = -2^{1-a} \cdot 0.1100_2 = -2^{-6} \cdot 0.75_{10} = -0.01171875$$

Zadatak 5.2.
Po uzoru na IEEE standard definiran je prikaz brojeva s jednim bitom za predznak i nepoznatim bitova za eksponent i frakciju. Odredite nepoznate veličine ako je broj 5.625 predstavljen kao "0100101101".

Rješenje
Broj 5.625 u binarnom zapisu je $5.625_{10} = 101.101_2 = 1.01101_2 \cdot 2^2$.
Ako se za eksponent koriste četiri bita, onda je $e = 9$, a $a = 7$, pa je eksponent jednak $e - a = 2$ što odgovara izračunu zapisa.
U broju se koristi četiri bita za eksponent, a pet bitova za frakciju.

Zadatak 5.3.
Po uzoru na IEEE standard definiran je prikaz brojeva s jednim bitom za predznak, četiri bita za eks-

ponent i pet bitova za frakciju. Predstavite brojeve -249.5 i 25.25 u tom zapisu, provedite operaciju zbrajanja i utvrdite pogrešku.

Rješenje
Broj 249.5 se u tom zapisu može zapisati u jednom od dva sljedeća oblika:

$$2^7 \cdot 1.11111_2 = 252$$
$$2^7 \cdot 1.11110_2 = \mathbf{248}$$

Bira se drugi zapis koji je bliži željenoj vrijednosti. Slično i za 25.25:

$$2^4 \cdot 1.10010 = 25$$
$$2^4 \cdot 1.10011 = \mathbf{25.5}$$

Zbroj se tada dobiva oduzimanjem većeg broja od manjeg (jer su suprotnog predznaka), pri čemu se eksponenti trebaju dovesti na istu vrijednost, a bitovi koji pređu veličinu zapisa se odbacuju (bitovi u kurzivu):

$$\begin{array}{rl} (248) & 2^7 \cdot 1.11110_2 \\ (25.5) & 2^7 \cdot 0.00110\mathit{011}_2 \\ \hline & 2^7 \cdot 1.11000_2 = 224_{10} \end{array}$$

Rezultat operacije u zapisu je tada -224, dok je stvarni rezultat $25.25 - 249.5 = -224.25$ i pogreška je 0.25.

Napomena! *Na ispitu provoditi operaciju zbrajanja kako je navedeno u zadatku, premda inače se tako operacija ne provodi u računalu. U računalu bi se prvo proveo dvojni komplement za broj s negativnim predznakom te ako je rezultat negativan onda i njegov dvojni komplement. Takva operacija prikazana je u nastavku:*

$$\begin{array}{rr} \mathit{0} & 000110 \\ \mathit{1} & 000001 \\ + & 1 \\ \hline \mathit{1} & 001000 \\ \hline & 110111 \\ + & 1 \\ \hline & 1.11000 \end{array}$$

Zadatak 5.4.
Po uzoru na IEEE standard definirajte zapis brojeva s minimalnim brojem bitova u kojem se vrijednosti 9 i -0.1875 mogu prikazati bez pogreške. Navedite brojeve u tom prikazu i provedite operaciju zbrajanja. *Dodatno:* Kako je potrebno promijeniti prikaz kako prilikom zbrajanja ne bi došlo do pogreške?

Rješenje
Prikaz brojeva u binarnom zapisu je:

$$9_{10} = 1001_2$$
$$-0.1875_{10} = -0.0011_2$$

Za eksponent su potrebna 3 bita za prikaz brojeva $e = \{1, \ldots, 6\}$, odnosno (uz $a = 3$) eksponenata $e - a = \{-2, \ldots, 3\}$ što je dovoljno za tražene brojeve. Broj 0.1875 može se prikazati korištenjem denormiranog signifikanda jer:

$$\begin{aligned} 0.1875_{10} &= 2^{-3} \cdot 1.1 \\ &= \mathbf{2^{-2} \cdot 0.11} \end{aligned}$$

Iz zapisa brojeva slijedi da je veličina frakcije zapisa jednaka: $p = \max\{3, 2\} = 3$ bita.
U tom zapisu brojevi imaju prikaz:

$$\begin{aligned} 9: &\quad 0|110|001 \\ -0.1875: &\quad 1|000|110 \end{aligned}$$

Zbrajanje tih brojeva je tada:

$$\begin{array}{rl} & 2^3 \cdot 1.001_2 \\ - & 2^3 \cdot 0.000\mathit{0011}_2 \\ \hline & 2^3 \cdot 1.001_2 = 9_{10} \end{array}$$

Dodatno: Potrebno je dodati četiri bita na frakciju tako da je veličina frakcije $p = 7$.