FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y DE ADMINISTRACIÓN
DEPARTAMENTO DE MÉTODOS CUANTITATIVOS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

Cálculo I: Funciones y más...

Docentes: Andrés Sosa – Sofia Domingorena

Primer semestre de 2024

Curso: Cálculo 1

Objetivo: Introducir al estudiante en el estudio de funciones de variable real.

EVA: `https://eva.fcea.udelar.edu.uy/course/` (MC10)

Materiales:

- Libro
- Fe de Erratas
- Fichas
- Revisiones y exámenes anteriores

Evaluaciones del curso: 2 revisiones (40 y 60 puntos)

- Primera revisión: ejercicios en formato de opción múltiple.
- Segunda revisión: ejercicios de opción múltiple y ejercicios que tendrán que desarrollar y entregar para su corrección.

El curso se exonera con 50 puntos en total habiendo alcanzado los mínimos establecidos en las dos revisiones (8 y 22 puntos respectivamente).

Cálculo 1 vs Cálculo 1A

Cálculo 1 = Cálculo 1A + Cálculo 1B

Cálculo 1

- Unidad curricular 10 créditos
- Recomendado a estudiantes que hayan cursado el bachillerato social-ecónomico o físico-matemático

Cálculo 1A

- Unidad curricular de 5 créditos
- Se debe realizar Cálculo 1B (que es previa de Cálculo 1A)
- Recomendado a otras orientaciones de bachillerato, bajo desempeño en la prueba diagnóstica, no finalizaron la educación media recientemente, entre otras.

- (creo) Tienen tiempo para cambiarse hasta el domingo 10 de marzo a las 23.59hs
- Existe el curso **ReCalculando** disponible en la web *https://www.youtube.com/channel/UCgvB7jhKnne_iJbK2KOErNQ* para quien se encuentre interesado en profundizar temas relacionados a los cursos básicos de matemática de Enseñanza Media

Curso de Cálculo 1

Curso de Cálculo 1

Primera pregunta del curso: ¿Ven “matemática” en esta bienvenida?

Curso de Cálculo 1

Primera pregunta del curso: ¿Ven “matemática” en esta bienvenida?

En general, existen muchísimas aplicaciones donde se combina matemática, estadística y programación (machine learning) que son muy usuales pero no logramos verlas como una aplicación directa de esta ciencia natural.

Arrancamos: Conjuntos (en matemática)

Definición: Un **conjunto** es una colección de objetos con características similares considerada como una sola identidad.

Ejemplos:

- Estudiantes de la clase
- Equipos participantes en una competición
- ...
- **NÚMEROS**

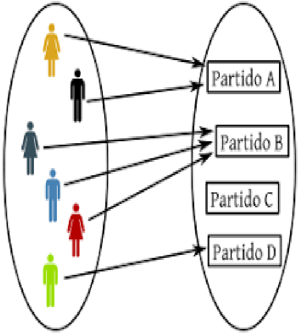
Ejemplos de conjuntos de números:

- Naturales
- Enteros
- Racionales
- Irracionales
- **REALES**

Funciones

Definición: Sean dos conjuntos A y B no vacíos.

Una **función** f de A en B es una correspondencia tal que cada elemento de A le hace corresponder uno y solo un elemento de B.

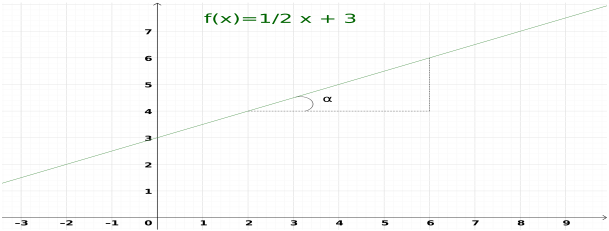


Función Lineal

Definición: Una función f se dice **lineal** cuando su dominio y codominio es el conjunto $\mathbb{R}$ y existen constantes $m, n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f(x) = mx + n, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo:



Observación: Una función lineal es una función constante o polinómica de primer grado.

Observaciones de las Función Lineal

Obervación 1: La gráfica de una función lineal es una recta. Por lo cual, queda determinada por dos puntos diferentes. Para graficar una función lineal alcanza solamente con encontrar dos puntos de su gráfica.

Obervación 2: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = mx + n$. Como $f(0) = n$ entonces el punto de coordenadas $(0, n)$ pertenece a la gráfica de f. El valor n tiene entonces una interpretación simple: es donde corta la recta al eje $\overrightarrow{Oy}$.

Obervación 3: Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ f(x) = mx + n$. Si $m \neq 0$ la función tiene una única raíz que es $x = -\frac{n}{m}$. Entonces el punto de coordenadas $(-\frac{n}{m}, 0)$ pertenece a la gráfica de f.

Observación 4: En el caso en que $m = 0$ queda $f(x) = n$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Todos los puntos del dominio tienen el mismo correspondiente y la función es entonces constante. Su gráfica es una recta paralela al eje $\overrightarrow{Ox}$, es decir, al eje horizontal.

Observación 5: Las rectas paralelas al eje $\overrightarrow{Oy}$ no constituyen la gráfica de función alguna.

Determinación de una recta – pendiente y punto –

Por punto y pendiente: La función lineal que tiene pendiente m y pase por el punto (x_0, y_0) cumple

$$y = m(x - x_0) + y_0.$$

Ejemplo: Recta que pasa por el punto $(1, 4)$ y tiene pendiente -5.

Resolución:

$$y = -5(x - 1) + 4 \Rightarrow y = -5x + 9$$

Ejercicio Halle las siguientes rectas. Grafique.

- Pasa por $A = (3, 4)$ y tiene pendiente 2.
- Pasa por $A = (1, -1)$ y tiene pendiente -3.

Determinación de una recta – dos puntos –

Dos puntos: La función lineal que pasa por el punto (x_0, y_0) y por el punto (x_1, y_1) cumple

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0.$$

Ejemplo: Recta que pasa por el punto $(2, 1)$ y el punto $(5, 10)$.

Resolución:

$$y = \frac{10 - 1}{5 - 2}(x - 2) + 1 \Rightarrow y = 3(x - 2) + 1 \Rightarrow y = 3x - 5$$

Ejercicio Halle las siguientes rectas. Grafique.

- Pasa por $A = (0, 4)$ y $B = (2, 5)$.
- Pasa por $A = (0, 2)$ y $B = (2, 2)$.

Costo, ingreso, utilidad – en función de las cantidades –

A las empresas les interesa **conocer** su estructura financiera con el **objetivo** de planificar y maximizar su utilidad.

Un **modelo económico** es una **representación simplificada** de la relación entre distintas variables que explican cómo opera la economía o un fenómeno en particular de ella.

Es posible definir de manera simplificada los costos, ingresos y utilidad.

Costo total = Costo Fijo + Costo Variable

Ingreso total

Utilidad = Ingresos totales - Costos Totales

Haciendo varias suposiciones, la manera más simple de modelar estos conceptos es mediante **funciones lineales** sobre la cantidad de artículos (incógnita de este problema).

Ejemplo: Una fábrica vende un sólo tipo de producto a $25 cada uno. Los costos variables por unidad son de $2 por concepto de materiales y de $6 por concepto de mano de obra. Los costos fijos ascienden a $34000.

1. Encuentra la función de utilidad y su gráfica.
2. ¿Cuántos artículos tiene que vender para que no haya pérdidas?

Ejercicio 1.1.2.

Una empresa discográfica está a punto de producir un nuevo disco compacto de su artista estelar J.R.

Los costos fijos (debidos al diseño de la carátula, pagar "músicos de sesión", grabación, matrizado digital, etc.) ascienden a 5000 dólares. El costo de fabricación es de 1 dólar por unidad y a J.R. se le pagará 1 dólar por cada disco vendido. El precio al que la empresa vende sus discos a los distribuidores es de 12 dólares por unidad.

1. Halla la función de utilidad de la empresa para este emprendimiento.
2. ¿Cuál es la cantidad mínima de discos que deben venderse para que este emprendimiento no de pérdidas?
3. Si esta producción llega a "disco de oro" (5000 discos vendidos), ¿cuál es la ganancia de la discográfica? ¿Y la de J.R.?

Ejercicio 1.1.5.

Una empresa debe adquirir una máquina para producir un nuevo producto.

Se le presentan dos posibilidades:

A Comprar una máquina vieja a un costo de 500 dólares. Con esta máquina podrá producir a un costo de 2 dólares la unidad.

B Comprar una máquina nueva a un costo de 1200 dólares. Con ésta el costo de producción es de 1 dólar por unidad.

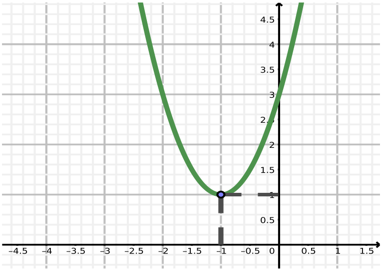
Discute, según el número de unidades producidas, cual de las dos opciones es más conveniente.

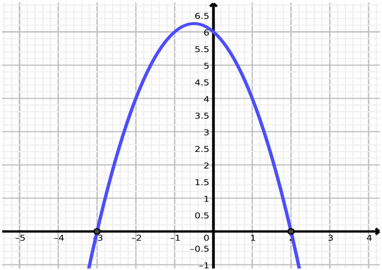
Función Cuadrática

Definición: Una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es una función cuadrática si se expresa mediante la expresión

$$f(x)=ax^2+bx+c \qquad a,b,c\in\mathbb{R}\ \ (a\neq 0).$$

Ejemplos: $f(x)=2x^2+4x+3$ $\qquad f(x)=-x^2-x+6$





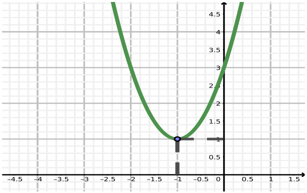
Vértice de una parábola

Definición: Si la función cuadrática se expresa mediante la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R} \ (a \neq 0)$ el vértice V se encuentra en

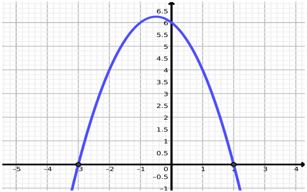
$$x_V = \frac{-b}{2a} \qquad\qquad y_V = f\left(\frac{-b}{2a}\right).$$

Ejercicios:

Demostrar que el vértice de la parábola $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ es $V = (-1, 1)$ según se observa en la figura



Encontrar el vértice de la parábola
$f(x) = -x^2 - x + 6$ y relacionarlo a la figura.



Raíces de una función cuadrática

Se cumple que

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{si y solo si} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La existencia de raíces depende del signo del *discriminante* que es definido como $\Delta = b^2 - 4ac$. Puede suceder los siguientes casos

$\Delta > 0 \rightarrow$ La función tiene dos raíces reales distintas.

$\Delta = 0 \rightarrow$ La función tiene una única raíz real *doble*.

$\Delta < 0 \rightarrow$ La función no tiene raíz real.

Aplicación de las raíces: Descomposición Factorial

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ tiene raíces α y β se cumple que

$$f(x) = a(x - \alpha)(x - \beta).$$

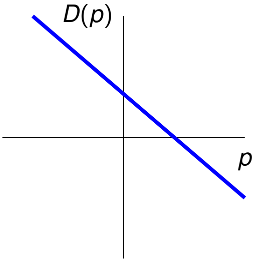
Ejercicio: Encontrar (en caso de que existan) las raíces de las funciones cuadráticas de la diapositiva anterior. Comparar los resultados con cada gráfica. Si es posible encontrar su descomposición factorial.

Demanda e ingreso y utilidad – en función del precio –

Una empresa **modela** que la función de demanda D de un artículo solamente depende del precio.

Como hipótesis más simple, es posible **suponer** que la demanda $D(p)$ es una función lineal decreciente: “cuanto más barato el producto, más se demanda".

Observar que en esta función lineal su dominio no son todos los reales porque los valores p y $D(p)$ tienen que ser positivos (función en el primer cuadrante).



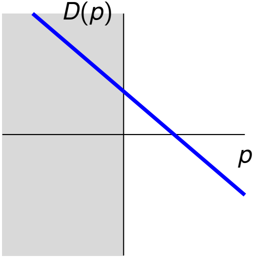
- Ejemplo: función demanda lineal $D(p) = 1500 - 50p$

Demanda e ingreso y utilidad – en función del precio –

Una empresa **modela** que la función de demanda D de un artículo solamente depende del precio.

Como hipótesis más simple, es posible **suponer** que la demanda $D(p)$ es una función lineal decreciente: “cuanto más barato el producto, más se demanda".

Observar que en esta función lineal su dominio no son todos los reales porque los valores p y $D(p)$ tienen que ser positivos (función en el primer cuadrante).



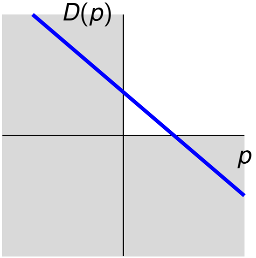
- Ejemplo: función demanda lineal $D(p) = 1500 - 50p$
- Solo nos interesa trabajar con los valores de p positivos $p \geq 0$.
- A su vez, sólo tiene sentido pensar en valores de la demanda $D(p)$ también positivos. $0 \leq 1500 - 50p \Rightarrow p \leq 30$.

Demanda e ingreso y utilidad – en función del precio –

Una empresa **modela** que la función de demanda D de un artículo solamente depende del precio.

Como hipótesis más simple, es posible **suponer** que la demanda $D(p)$ es una función lineal decreciente: "cuanto más barato el producto, más se demanda".

Observar que en esta función lineal su dominio no son todos los reales porque los valores p y $D(p)$ tienen que ser positivos (función en el primer cuadrante).



- Ejemplo: función demanda lineal $D(p) = 1500 - 50p$
- Solo nos interesa trabajar con los valores de p positivos $p \geq 0$.
- A su vez, sólo tiene sentido pensar en valores de la demanda $D(p)$ también positivos. $0 \leq 1500 - 50p \Rightarrow p \leq 30$.
- Entonces en este caso el **dominio restringido** serán los precios comprendidos en $0 \leq p \leq 30$

Demanda e ingreso – en función del precio –

¿Cómo obtenemos **la función de ingreso**, ahora que tenemos una función de demanda dependiente del precio?

El ingreso será igual a la cantidad demandada para un precio dado $D(p)$ multiplicado por el precio p.

Demanda e ingreso – en función del precio –

¿Cómo obtenemos **la función de ingreso**, ahora que tenemos una función de demanda dependiente del precio?

El ingreso será igual a la cantidad demandada para un precio dado $D(p)$ multiplicado por el precio p.

Es decir, **I(p)=p*D(p)** es nuestra función de ingreso, que depende ahora del precio. En general podemos ver que si $D(p)$ es una función lineal, $I(p)$ será una función cuadrática.

Una pregunta interesante de responder es: ¿cuál es el precio que maximiza el ingreso?

Demanda e ingreso – en función del precio –

¿Cómo obtenemos **la función de ingreso**, ahora que tenemos una función de demanda dependiente del precio?

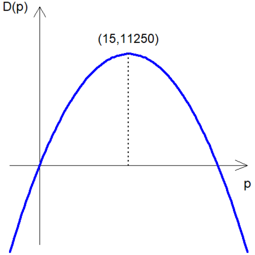
El ingreso será igual a la cantidad demandada para un precio dado $D(p)$ multiplicado por el precio p.

Es decir, **I(p)=p*D(p)** es nuestra función de ingreso, que depende ahora del precio. En general podemos ver que si $D(p)$ es una función lineal, $I(p)$ será una función cuadrática.

Una pregunta interesante de responder es: ¿cuál es el precio que maximiza el ingreso?

$$I(p) = p(-50p + 1500)$$

$$I(p) = -50p^2 + 1500 * p$$



Costos y utilidad – en función del precio –

Al problema anterior, **le agregamos la función de costos** que tiene la empresa por producir x unidades del artículo. Se supone que la función de costos $C(x)$ es lineal y que se conoce la función de demanda que depende del precio.

Por ejemplo: $C(x) = 3750 + 2x \quad ; \qquad D(p) = 1500 - 50p$

Costos y utilidad – en función del precio –

Al problema anterior, **le agregamos la función de costos** que tiene la empresa por producir x unidades del artículo. Se supone que la función de costos $C(x)$ es lineal y que se conoce la función de demanda que depende del precio.

$$\text{Por ejemplo: } C(x) = 3750 + 2x \quad ; \qquad D(p) = 1500 - 50p$$

Si sustituye en x que son las unidades de artículo a fabricar, la función de demanda del artículo. Matemáticamente: $\mathbf{C\big(D(p)\big)}$. Se obtiene

$$C(D(p)) = 3750 + 2 * (D(p))$$

Costos y utilidad – en función del precio –

Al problema anterior, **le agregamos la función de costos** que tiene la empresa por producir x unidades del artículo. Se supone que la función de costos $C(x)$ es lineal y que se conoce la función de demanda que depende del precio.

$$\text{Por ejemplo: } C(x) = 3750 + 2x \quad ; \qquad D(p) = 1500 - 50p$$

Si sustituye en x que son las unidades de artículo a fabricar, la función de demanda del artículo. Matemáticamente: $\mathbf{C}\big(\mathbf{D(p)}\big)$. Se obtiene

$$C(D(p)) = 3750 + 2 * (D(p))$$

$$C(p) = 3750 + 2 * (1500 - 50p)$$

$$C(p) = 6750 - 100p$$

Se obtiene que la función de costos **no depende más de unidades sino que depende del precio**, es decir $C(p)$.

A su vez, la función de utilidad quedará **U(p) = I(p) - C(p)**

Ejercicio 1.1.7.

La función de demanda de determinado artículo es $D(p) = 3000 - 3p$ en donde p es el precio por unidad (medido en pesos).

1. Halla la función de ingreso y graficarla.
2. ¿Cuál debe ser el precio para que el ingreso sea máximo? Halla dicho ingreso máximo.
3. La empresa tiene un costo fijo de 100000 pesos y un costo variable de 4 pesos por cada artículo que produce. Encuentra el precio que se le debe asignar al artículo para que la utilidad sea máxima. Calcula dicha utilidad.

Tasa de Interés y número e

Suponemos: Existe un capital inicial C que es colocado a una **tasa anual** r.

Tasa de Interés y número e

Suponemos: Existe un capital inicial C que es colocado a una **tasa anual** r.

Capitalizar: Agregar a un capital los intereses que este ha producido.

Tasa de Interés y número e

Suponemos: Existe un capital inicial C que es colocado a una **tasa anual** r.

Capitalizar: Agregar a un capital los intereses que este ha producido.

Si se capitaliza anualmente:

- Primer año: $s_1 = C + r\,C = C(1 + r)$

Tasa de Interés y número e

Suponemos: Existe un capital inicial C que es colocado a una **tasa anual** r.

Capitalizar: Agregar a un capital los intereses que este ha producido.

Si se capitaliza anualmente:

- Primer año: $s_1 = C + r\,C = C(1+r)$
- Segundo año: $s_2 = s_1 + r\,s_1 = s_1(1+r) = C(1+r)(1+r) = C(1+r)^2$

Tasa de Interés y número e

Suponemos: Existe un capital inicial C que es colocado a una **tasa anual** r.

Capitalizar: Agregar a un capital los intereses que este ha producido.

Si se capitaliza anualmente:

- Primer año: $s_1 = C + r\,C = C(1+r)$
- Segundo año: $s_2 = s_1 + r\,s_1 = s_1(1+r) = C(1+r)(1+r) = C(1+r)^2$
- Tercer año: $s_3 = s_2 + r\,s_2 = s_2(1+r) = ... = C(1+r)^3$

Tasa de Interés y número e

Suponemos: Existe un capital inicial C que es colocado a una **tasa anual** r.

Capitalizar: Agregar a un capital los intereses que este ha producido.

Si se capitaliza anualmente:

- Primer año: $s_1 = C + r\,C = C(1 + r)$
- Segundo año: $s_2 = s_1 + r\,s_1 = s_1(1 + r) = C(1 + r)(1 + r) = C(1 + r)^2$
- Tercer año: $s_3 = s_2 + r\,s_2 = s_2(1 + r) = ... = C(1 + r)^3$
- ...
- n-ésimo año: $s_n = s_{n-1}(1 + r) = ... = C(1 + r)^n$

Tasa de Interés y número e

Suponemos: Existe un capital inicial C que es colocado a una **tasa anual** r.

Capitalizar: Agregar a un capital los intereses que este ha producido.

Si se capitaliza anualmente:

- Primer año: $s_1 = C + r\, C = C(1+r)$
- Segundo año: $s_2 = s_1 + r\, s_1 = s_1(1+r) = C(1+r)(1+r) = C(1+r)^2$
- Tercer año: $s_3 = s_2 + r\, s_2 = s_2(1+r) = ... = C(1+r)^3$
- ...
- n-ésimo año: $s_n = s_{n-1}(1+r) = ... = C(1+r)^n$

Si se capitaliza semestralmente:

- Primer semestre: $s_{\frac{1}{2}} = C + C\,\frac{r}{2} = C(1+\frac{r}{2})$

Tasa de Interés y número e

Suponemos: Existe un capital inicial C que es colocado a una **tasa anual** r.

Capitalizar: Agregar a un capital los intereses que este ha producido.

Si se capitaliza anualmente:

- Primer año: $s_1 = C + r\,C = C(1+r)$
- Segundo año: $s_2 = s_1 + r\,s_1 = s_1(1+r) = C(1+r)(1+r) = C(1+r)^2$
- Tercer año: $s_3 = s_2 + r\,s_2 = s_2(1+r) = ... = C(1+r)^3$
- ...
- n-ésimo año: $s_n = s_{n-1}(1+r) = ... = C(1+r)^n$

Si se capitaliza semestralmente:

- Primer semestre: $s_{\frac{1}{2}} = C + C\,\frac{r}{2} = C(1+\frac{r}{2})$
- Primer año: $s_1 = s_{\frac{1}{2}}(1+\frac{r}{2}) = C(1+\frac{r}{2})^2$

Tasa de Interés y número e

Suponemos: Existe un capital inicial C que es colocado a una **tasa anual** r.

Capitalizar: Agregar a un capital los intereses que este ha producido.

Si se capitaliza anualmente:

- Primer año: $s_1 = C + r\,C = C(1+r)$
- Segundo año: $s_2 = s_1 + r\,s_1 = s_1(1+r) = C(1+r)(1+r) = C(1+r)^2$
- Tercer año: $s_3 = s_2 + r\,s_2 = s_2(1+r) = ... = C(1+r)^3$
- ...
- n-ésimo año: $s_n = s_{n-1}(1+r) = ... = C(1+r)^n$

Si se capitaliza semestralmente:

- Primer semestre: $s_{\frac{1}{2}} = C + C\,\frac{r}{2} = C(1+\frac{r}{2})$
- Primer año: $s_1 = s_{\frac{1}{2}}(1+\frac{r}{2}) = C(1+\frac{r}{2})^2$
- Segundo año: $s_2 = s_1(1+\frac{r}{2})^2 = C(1+\frac{r}{2})^{2*2}$
- Tercer año: $s_3 = s_2(1+\frac{r}{2})^2 = C(1+\frac{r}{2})^{2*3}$
- ...
- n-ésimo año: $s_n = s_{n-1}(1+\frac{r}{2})^2 = ... = C(1+\frac{r}{2})^{2n}$

Tasa de Interés y número e

Si se capitaliza mensualmente:

- Primer mes: $s_{\frac{1}{12}} = C + C\,\frac{r}{12} = C(1 + \frac{r}{12})$

Tasa de Interés y número e

Si se capitaliza mensualmente:

- Primer mes: $s_{\frac{1}{12}} = C + C\,\frac{r}{12} = C(1 + \frac{r}{12})$
- Primer año: $s_1 = s_{\frac{1}{12}}(1 + \frac{r}{12})^{11} = C(1 + \frac{r}{12})^{12}$
- Segundo año: $s_2 = s_1(1 + \frac{r}{12})^{12} = C(1 + \frac{r}{12})^{12*2}$
- Tercer año: $s_3 = s_2(1 + \frac{r}{12})^{12} = C(1 + \frac{r}{12})^{12*3}$
- ...
- *n*-ésimo año: $s_n = s_{n-1}(1 + \frac{r}{12})^{12} = ... = C(1 + \frac{r}{12})^{12n}$

Tasa de Interés y número e

Si se capitaliza mensualmente:

- Primer mes: $s_{\frac{1}{12}} = C + C\,\frac{r}{12} = C(1 + \frac{r}{12})$
- Primer año: $s_1 = s_{\frac{1}{12}}(1 + \frac{r}{12})^{11} = C(1 + \frac{r}{12})^{12}$
- Segundo año: $s_2 = s_1(1 + \frac{r}{12})^{12} = C(1 + \frac{r}{12})^{12*2}$
- Tercer año: $s_3 = s_2(1 + \frac{r}{12})^{12} = C(1 + \frac{r}{12})^{12*3}$
- ...
- n-ésimo año: $s_n = s_{n-1}(1 + \frac{r}{12})^{12} = ... = C(1 + \frac{r}{12})^{12n}$

Si se capitaliza x veces al año:

- Primera capitalización: $s_{\frac{1}{x}} = C + C\,\frac{r}{x} = C(1 + \frac{r}{x})$

Tasa de Interés y número e

Si se capitaliza mensualmente:

- Primer mes: $s_{\frac{1}{12}} = C + C\,\frac{r}{12} = C(1+\frac{r}{12})$
- Primer año: $s_1 = s_{\frac{1}{12}}(1+\frac{r}{12})^{11} = C(1+\frac{r}{12})^{12}$
- Segundo año: $s_2 = s_1(1+\frac{r}{12})^{12} = C(1+\frac{r}{12})^{12*2}$
- Tercer año: $s_3 = s_2(1+\frac{r}{12})^{12} = C(1+\frac{r}{12})^{12*3}$
- ...
- n-ésimo año: $s_n = s_{n-1}(1+\frac{r}{12})^{12} = ... = C(1+\frac{r}{12})^{12n}$

Si se capitaliza x veces al año:

- Primera capitalización: $s_{\frac{1}{x}} = C + C\,\frac{r}{x} = C(1+\frac{r}{x})$
- Primer año: $s_1 = s_{\frac{1}{x}}(1+\frac{r}{x})^{x-1} = C(1+\frac{r}{x})^{x}$
- Segundo año: $s_2 = s_1(1+\frac{r}{x})^{x} = C(1+\frac{r}{x})^{2x}$
- Tercer año: $s_3 = s_2(1+\frac{r}{x})^{x} = C(1+\frac{r}{x})^{3x}$
- ...
- n-ésimo año: $s_n = s_{n-1}(1+\frac{r}{x})^{x} = ... = C(1+\frac{r}{x})^{xn}$

Interés compuesto con capitalización continua

Desde el conocido número de Euler deducimos que

$$lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \Rightarrow \quad lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{r}{x}\right)^x = e^r.$$

Entonces, de un capital inicial C a una tasa anual r, si la **capitaliza de manera continua** se cumple que

- Primer año: $s_1 = C\ e^r$
- ...
- n-ésimo año: $s_n = C\ e^{rn}$

Ejercicio 1.1.9

Se invierten 7000 dólares a una tasa de interés anual de 2 % .

Calcula el saldo de la inversión luego de diez años en cada uno de los siguientes casos:

1. El interés se capitaliza anualmente.
2. El interés se capitaliza mensualmente.
3. El interés se capitaliza diariamente (considerar 365 días).
4. El interés se capitaliza continuamente.

Expresiones exponenciales: Potenciación

Definición: La potencia de **base real** $a \in \mathbb{R}$ y de **exponente** $n \in \mathbb{Z}$ (que se denota como a^n) es el producto de n factores iguales a. Es decir

$$a^n := \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n}$$

Propiedades potenciación

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

Expresiones exponenciales: Potenciación

Definición: La potencia de **base real** $a \in \mathbb{R}$ y de **exponente** $n \in \mathbb{Z}$ (que se denota como a^n) es el producto de n factores iguales a. Es decir

$$a^n := \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n}$$

Propiedades potenciación

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

Ejemplos potenciación

- $x^4 \times x^2 = x^6$
- $\frac{x^8}{x^5} = x^3$
- $(x^6)^{10} = x^{60}$
- $x^3 \times y^3 = (xy)^3$
- $\frac{x^7}{y^7} = (\frac{x}{y})^7$

Vale la pena destacar que $(a)^{-1} = \frac{1}{a}$ por lo tanto se cumple

$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \underbrace{\frac{1}{a} \times \frac{1}{a} \times \cdots \times \frac{1}{a}}_{n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n}} = \frac{1}{a^n}$$

Expresiones exponenciales: Radicación

Observar: En la diapositiva anterior hablamos de potenciación siendo $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$. La intención es generalizar al caso de $n \in \mathbb{Q}$. Particularmente, cuando el exponente sea de la forma $\frac{1}{n}$ se denomina Radicación.

Definición: La **radicación** es el proceso de hallar raíces de orden n de un número a.

Propiedades radicación

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
  - si n par: $a \in \mathbb{R}^+$
  - si n impar: $a \in \mathbb{R}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
  - si n par: $a \in \mathbb{R}^+$
  - si n impar: $a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
  - si n par: $a, b \in \mathbb{R}^+$.
  - si n impar: $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
  - si n par: $a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 0$
  - si n impar: $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

Expresiones exponenciales: Radicación

Observar: En la diapositiva anterior hablamos de potenciación siendo $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$. La intención es generalizar al caso de $n \in \mathbb{Q}$. Particularmente, cuando el exponente sea de la forma $\frac{1}{n}$ se denomina Radicación.

Definición: La **radicación** es el proceso de hallar raíces de orden n de un número a.

Propiedades radicación

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
  - si n par: $a \in \mathbb{R}^+$
  - si n impar: $a \in \mathbb{R}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
  - si n par: $a \in \mathbb{R}^+$
  - si n impar: $a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
  - si n par: $a, b \in \mathbb{R}^+$.
  - si n impar: $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
  - si n par: $a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 0$
  - si n impar: $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

Ejemplos radicación

- $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $(\sqrt[3]{x})^2 = x^{(\frac{2}{3})}$
- $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$

Expresiones exponenciales: Radicación

Observar: En la diapositiva anterior hablamos de potenciación siendo $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$. La intención es generalizar al caso de $n \in \mathbb{Q}$. Particularmente, cuando el exponente sea de la forma $\frac{1}{n}$ se denomina Radicación.

Definición: La **radicación** es el proceso de hallar raíces de orden n de un número a.

Propiedades radicación

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
  - si n par: $a \in \mathbb{R}^+$
  - si n impar: $a \in \mathbb{R}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
  - si n par: $a \in \mathbb{R}^+$
  - si n impar: $a \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$
  - si n par: $a, b \in \mathbb{R}^+$.
  - si n impar: $a, b \in \mathbb{R}$.
- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
  - si n par: $a, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 0$
  - si n impar: $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$

Ejemplos radicación

- $\sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $(\sqrt[3]{x})^2 = x^{(\frac{2}{3})}$
- $\sqrt[3]{xy} = \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}$

¿Matemáticamente que restaría?

Extender el concepto al caso que el exponente sea cualquier número real (es decir $n \in \mathbb{R}$)

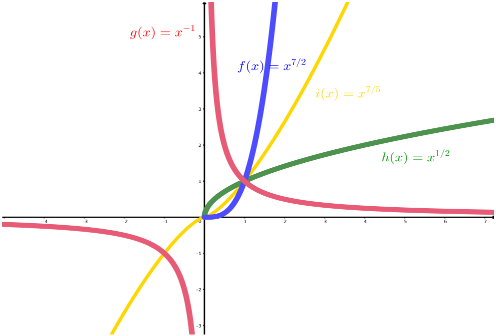
Función Potencial

Definición: Una función $f : A \to \mathbb{R}$ es una función potencial si se expresa

$$f(x) = x^{\alpha} \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Observación: El conjunto A y la estructura de la gráfica **depende fuertemente** del valor de α considerado.

Ejemplos: Varias funciones potenciales con diferentes comportamientos

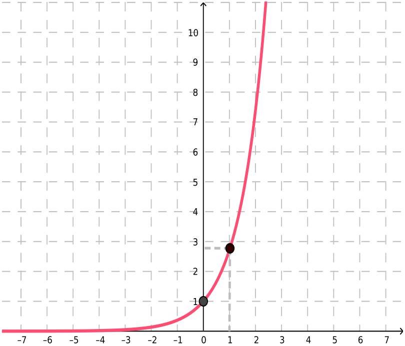


Función Exponencial

Definición: Una función $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ es una función exponencial (en base b positiva) si se expresa

$$f(x) = b^x \quad \text{con} \;\; b \in \mathbb{R}^+.$$

Ejemplo: Función Exponencial (en base e): $\quad f(x) = e^x$



Propiedades

- $f(0) = e^0 = 1$
- $f(1) = e^1 = e$
- f es estrictamente creciente
- $lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- $lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
- $e^{a+b} = e^a e^b \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad (e^a)^b = e^{ab}$

Logaritmo de un número en una base dada

Definición: Si $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq 1$ entonces existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que se cumple $b^c = a$.

NOTACIÓN: Al valor c se le denomina logaritmo de a en base b y se representa $c = \log_b(a)$.

Logaritmo de un número en una base dada

Definición: Si $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}^+$ y $b \neq 1$ entonces existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que se cumple $b^c = a$.

NOTACIÓN: Al valor c se le denomina logaritmo de a en base b y se representa $c = \log_b(a)$.

Ejemplo 4.3.1 Calcular el $\log_2(8)$.

Entonces tengo que encontrar aquel valor c que al elevar 2 a la c obtengamos 8.

Como se cumple que $2^3 = 8$ entonces $\log_2(8) = 3$.

Propiedades del logaritmo

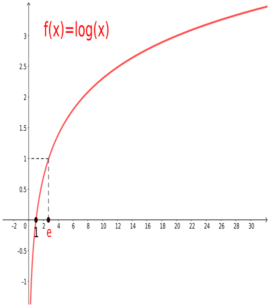
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(pq) = \log_a(p) + \log_a(q)$
- $\log_a(\frac{p}{q}) = \log_a(p) - \log_a(q)$
- $\log_a(p^n) = n \log_a(p)$
- $\log_a(\sqrt[n]{p}) = \frac{1}{n} \log_a(p)$

Función Logarítmica

Definición: Una función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función logarítmica (en base b) si se expresa

$$f(x) = \log_b(x) \qquad \text{con } \; b \; \text{ positivo y distinto de 1.}$$

Ejemplo: Ejemplo: Función Logarítmo (en base e): $\quad f(x) = \log(x)$



Propiedades

- $f(1) = 0$
- $f(e) = 1$
- f es estrictamente creciente
- $lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$
- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$

Ejercicio 1.1.12. – Ejercicio 1.1.16

Ejercicio 1.1.12. Durante los años 1990 y 2000 la utilidad anual de la empresa X tuvo un crecimiento exponencial dado por $U(t) = Ae^{kt}$ en donde $U(t)$ es la utilidad en miles de dólares y t se mide en años.

En $t = 0$ (que corresponde al final del ejercicio del año 1990) la ganancia fue de 200 mil dólares. La ganancia anual de 1992 fue de 400 mil dólares.

Encuentra el año al final del cual la ganancia supera por primera vez los dos millones de dólares.

Ejercicio 1.1.12. – Ejercicio 1.1.16

Ejercicio 1.1.12. Durante los años 1990 y 2000 la utilidad anual de la empresa X tuvo un crecimiento exponencial dado por $U(t) = Ae^{kt}$ en donde $U(t)$ es la utilidad en miles de dólares y t se mide en años.

En $t = 0$ (que corresponde al final del ejercicio del año 1990) la ganancia fue de 200 mil dólares. La ganancia anual de 1992 fue de 400 mil dólares.

Encuentra el año al final del cual la ganancia supera por primera vez los dos millones de dólares.

Ejercicio 1.1.16. Un cultivo de bacterias Streptococcus A recién inoculadas (un grupo común de microorganismos que causa infección séptica en la garganta) contiene 100 células.

Al chequear el cultivo 60 minutos después se observa que hay 450 células. Suponiendo que dicha población tiene un crecimiento exponencial del tipo $P(t) = ae^{kt}$, determina el número de células presentes en cualquier tiempo t (medido en minutos). ¿Cuál es el tiempo requerido para que el número de células se duplique?