

	INSTITUTO TECNOLÓGICO METROPOLITANO Facultad de Artes y Humanidades Cálculo Diferencial	Taller 4
	PREPARADO POR: <i>Sergio Alberto Alarcón Vasco. DTC</i> <i>María Cristina González Mazuelo. DTC.</i>	Derivadas y aplicaciones

OBJETIVO

Comprender y aplicar el concepto de derivada de funciones reales, para modelar y dar solución a problemas en distintos contextos.

I. DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1. Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a. $y = \tan^{-1}(3x^2 - 4x)$

e. $y = (\tan^{-1}x)(\cot^{-1}x)$

b. $f(x) = 2\sin^{-1}x + x\cos^{-1}x$

f. $y = 4\sec^{-1}\frac{x}{2}$

c. $y = \frac{\sec^{-1}x}{x}$

g. $f(t) = \frac{\sin^{-1}(2t+4)}{\sec^{-1}(t^2+t)}$

d. $h(x) = \frac{\sin^{-1}x}{\sin x}$

II. DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

2. Encontrar la derivada de las siguientes funciones:

a. $f(x) = \frac{5^x}{\csc x}$

f. $f(x) = \frac{e^{\tan x + x^3}}{\ln(3x^4 - 4x + 6)}$

b. $y = x(\ln x)^2$

g. $y = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

c. $y = x^3e^{4x}$

h. $y = (e^x + e^{x+e^{-x}})^2$

d. $y = x - \ln|5x + 1|$

i. $g(x) = \sqrt{\ln\sqrt{x}}$

e. $g(x) = \ln\sqrt{\sec x - \tan x}$

j. $y = 3^{\sec(4x^2) \cdot \ln(5x)}$

III. DERIVACIÓN IMPLÍCITA

3. Utilizar derivación implícita para determinar $\frac{dy}{dx}$ en los ejercicios que se presentan a continuación:

a. $4x^2 + 9y^2 = 36$

b. $y^2 - 2y = x$

c. $x^3 - x^2y + 4y^2 = 6$

d. $y^2 - \frac{2x^3}{y^4} = x$

e. $x^2y^3 = 1 - \frac{x}{y}$

f. $x = \sec y$

g. $(y - 1)^2 = 4(x + 2)$

h. $\frac{2x-y}{x+3y} = x^3$

i. $\sqrt{xy} + x = y$

j. $3y + \cos y = x^2$

k. $x + \tan(xy) = 0$

l. $e^{x/y} = x - y$

m. $xy = \sin(x + y)$

n. $ye^x - xe^y = 1$

o. $x \cos(2x + 3y) = y \sin x$

p. $\sin(x + y^2) = \cos(x^2 + y)$

4. En los siguientes ejercicios determinar una ecuación de la recta tangente en el punto indicado, o en los valores dados para x o para y .

a. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0$ en $P(-2,1)$

b. $6x^2 - 2xy + y^3 = 9$ en $P(2,-3)$

c. $\tan y = x$ en $y = \frac{\pi}{4}$

d. $x^2y^2 = 9$ en $P(-1,3)$

e. $xy + y^2 = 1$ en $P(0,-1)$

f. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ en $x = 3$

g. $3y + \cos y = x^2$ en $P(1,0)$

h. $2xy + \pi \sin y = 2\pi$ en $P\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

i. $x \sin(2y) = y \cos(2x)$ en $P\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$

j. $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0$ en $P(0,\pi)$

5. Para las siguientes expresiones algebraicas, encontrar los puntos sobre la gráfica para los cuales la recta tangente es horizontal:

a. $16x^2 + 25y^2 = 36$

b. $x^2 - y^2 = 2x + 4y$

IV. DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

6. Utilice la derivación logarítmica para determinar la derivada de:

a. $y = \frac{\operatorname{sen}^2 x \tan^4 x}{(x^2+1)^2}$

b. $y = \sqrt{x} e^{x^2} (x^2 + 1)^{10}$

c. $y = \frac{(2x-3)^2}{\sqrt{x+1} (7x+2)^3}$

d. $y = x^{\operatorname{sen} x}$

e. $y = (\operatorname{sen} x)^x$

f. $y = x^{e^x}$

g. $y = (\ln x)^x$

h. $x^y = y^x$

i. $y = \sqrt[x]{x+2}$

j. $x^{\operatorname{sen} x} = y \cos x$

k. $y = \sqrt[x]{e^{2x} + \operatorname{sen}^{-1} x}$

l. $xy = x^{2x-y}$

m. $y = (4e^x)^{3x}$

n. $y = \frac{x\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x-1}}$

o. $y = (\ln x)^{\ln x}$

p. $y = x^{\ln x}$

V. REGLA DE L'HOPITAL

7. Calcular los siguientes límites:

a. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/3} - x^{1/2}}{x-1}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x}}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}$

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 e^{-x^2}$

e. $\lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x \operatorname{sen} 6x$

f. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x^2+1}$

g. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{x^2-9} - \frac{2}{x^2-9} \right)$

h. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sen} x \ln x$

i. $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^{1/(1-x)}$

j. $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x)$

k. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$

l. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{\ln 2}{1+\ln x}}$

m. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$

n. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$

o. $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln x)$

p. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$

q. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)$	cc. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2 \sin^2 \left(\frac{2}{x} \right)}$
r. $\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^2}$	dd. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \ln x}{x + \ln x}$
s. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{1/x}$	ee. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 2} \right)^{\frac{1}{x}}$
t. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{\ln(x+1)}$	ff. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x \ln(\sin x)$
u. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{5}{x^2 + 3x - 4} \right)$	gg. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\pi/2 - x}$
v. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$	hh. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{(e^{x^2} - 1)^2}$
w. $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)^x$	ii. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2x - \pi) \sec x$
x. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{\cos 3x}{x^2}$	jj. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \ln x$
y. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec^3 x - \tan^3 x)$	kk. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$
z. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{\ln x}$	ll. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 3^x}{3^x + 4^x}$
aa. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x}$	mm. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{-1/x}}$
bb. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$	

VI. RAZONES DE CAMBIO

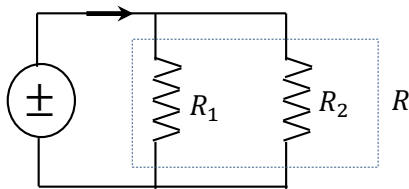
8. Un conductor viaja por una carretera interestatal y observa que el tráfico adelante está detenido, por lo que aplica los frenos. La distancia recorrida por el vehículo durante el frenado está dado por $s(t) = -\frac{4}{3}t^3 - 2t^2 + 80t$ donde $s(t)$ está dada en pies y t en segundos.
- Encontrar una expresión general para la velocidad de frenado del vehículo en un tiempo t .
 - ¿Cuál es la velocidad del auto después de 1 segundo?
 - ¿Cuánto se demora el vehículo en detenerse?
 - ¿Cuál era la velocidad del vehículo cuando pisó el freno?
 - Encontrar una expresión general para la aceleración del vehículo en un tiempo t

- f. ¿Cuál fue la aceleración del auto a los 2 y a los 3 segundos de haber pisado el freno?
9. Después de t horas de un viaje de 8 horas, un automóvil ha recorrido una distancia representada por $d(t) = 64t + \frac{10}{3}t^2 - \frac{2}{9}t^3$ donde $d(t)$ está dada en kilómetros y t en horas.
- Encontrar una expresión general para la velocidad del auto en un tiempo t .
 - ¿Cuál es la velocidad del auto en la séptima hora?
 - Deduzca una expresión para la aceleración del auto como una función del tiempo
 - ¿A qué razón cambia la velocidad del automóvil con respecto al tiempo al cabo de 6 horas? ¿Aumenta o disminuye la velocidad en ese momento?
10. De acuerdo con la ley de Boyle para los gases $PV = c$, donde P es la presión, V el volumen y c es una constante. Suponga que en un tiempo t (en minutos) la presión está dada por $P(t) = 20 + 2t$ (en gm/cm^2) y que el volumen en $t = 0$ es de 60 cm^3 . Encontrar la razón de cambio del volumen con respecto al tiempo t , en $t = 5$ minutos.
11. El desplazamiento de una cuerda que vibra en un tiempo dado t (en segundos) está representado por la función $s(t) = 10 + \frac{1}{4}\text{sen}(10\pi t)$, donde $s(t)$ se mide en centímetros.
- Encontrar una expresión para la velocidad de la cuerda después de t segundos.
 - ¿Cuál es la velocidad de la cuerda a los 2 segundos de iniciada la vibración de la cuerda?
 - Encontrar una expresión para la aceleración de la cuerda después de t segundos
 - ¿Cuál es la aceleración de la cuerda a los 2 segundos de iniciada la vibración de la cuerda?

VII. RAZONES DE CAMBIO DE VARIABLES RELACIONADAS

23. Una escalera de 10 pies de largo está apoyada contra una pared vertical. Si el extremo inferior de la escalera resbala alejándose de la pared a razón de $1 \frac{pie}{s}$, ¿con qué rapidez resbala hacia abajo su extremo superior, cuando su extremo inferior está a 6 pies de la pared?
24. Si dos resistores R_1 y R_2 ohm están conectados en paralelo en un circuito eléctrico para formar una resistencia de R ohm, el valor de R se puede encontrar a partir de la ecuación:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$



- Si R_1 decrece a una tasa de $1 \frac{Ohm}{seg}$ y R_2 aumenta a una tasa de $0.5 \frac{Ohm}{seg}$, ¿a qué tasa cambia R cuando $R_1 = 75$ Ohms y $R_2 = 50$ Ohms?
25. La impedancia Z (en Ohms) en un circuito en serie está relacionada con la resistencia R (en Ohms) y la reactancia x (en Ohms), mediante la ecuación $Z = \sqrt{R^2 + x^2}$. Si R aumenta a una razón de $3 \frac{Ohm}{seg}$ y x disminuye a una razón de $2 \frac{Ohm}{seg}$, ¿a qué razón cambia Z cuando $R = 10$ Ohms y $x = 20$ Ohms?
26. El voltaje v (en voltios), la corriente I (en Amperios) y la resistencia R (en Ohms) de un circuito eléctrico están relacionados mediante la ecuación $v = IR$. Suponga que v aumenta a razón de $1 \frac{voltio}{seg}$, mientras que I disminuye a razón de $\frac{1}{3} \frac{Amp}{seg}$. Determinar la razón a la cual cambia R cuando $v = 12$ voltios e $I = 2$ Amp. ¿ R aumenta o disminuye?

27. La Ley de Ohm para cierto circuito eléctrico establece que $v = IR$, donde v es el voltaje (en voltios), I la corriente (en Amperios) y R la resistencia (en Ohms). Si el circuito se recalienta y el voltaje se mantiene constante a 10 voltios, la resistencia aumenta a razón de $0.5 \frac{Ohm}{seg}$. Hallar la velocidad con que decrece la corriente cuando $I = 2$ Amp. Rta/: $\frac{dI}{dt} = -0,2 \frac{Amp}{seg}$
28. Una persona situada en el extremo de un muelle a 8 pies del agua hala una cuerda atada a una boya en el agua. Si la cuerda se jala a una velocidad de 2 pies/min, ¿con qué rapidez se acerca la boya al muelle cuando esta se encuentra a 6 pies de éste?
29. Un niño que vuela una cometa suelta el hilo a razón de 2 pies por segundo, mientras la cometa se mueve horizontalmente a una altura de 100 pies. Suponiendo que el hilo no se pandea, encuentre la velocidad con la que se mueve la cometa en el momento en que se han soltado 125 pies de hilo. Rta/: $\frac{10}{3} \frac{pies}{seg}$
30. Se bombea gas a un globo esférico a razón de $5 \text{ m}^3/\text{min}$. ¿si la presión se mantiene constante, cuál es la razón de cambio del radio cuando el diámetro mide 180 cm?
31. Un vehículo que viaja hacia el norte a 60 km/h y un camión que viaja al este a 45 km/h se alejan de una intersección al mismo tiempo. ¿A qué velocidad cambia la distancia entre ellos 2 horas más tarde?
32. Una barra de metal tiene la forma de un cilindro circular recto. A medida que se calienta, su longitud y su diámetro aumenta a razón de 0.005 cm/min y 0.002 cm/min respectivamente. ¿a razón de cuantos cm^3/min aumenta el volumen de la barra en el momento de que esta mide 40 cm de largo y 3 cm de diámetro?
33. Un faro giratorio que se encuentra a 200 metros del punto más cercano P sobre una playa recta, da vueltas cada 15 segundos. Calcule la velocidad con que el rayo de luz se mueve a lo largo de la playa en un punto a 400 metros de P . (**Nota:** como el faro da cuatro vueltas cada minuto, entonces el ángulo que se forma entre el rayo

de luz y recta trazada del faro a P , cambia a razón de 8π por minuto). Rta: $8000\pi \frac{m}{min}$

34. Un avión vuela con una velocidad constante a una altura de 3000 metros a lo largo de una trayectoria que lo hará pasar exactamente arriba de un observador que está en el suelo. En un instante dado el observador nota que el ángulo de elevación al avión es de 60 grados y que este aumenta a razón de 1 grado por segundo. ¿Cuál es la velocidad del avión en ese instante? Rta: $\frac{200\pi}{9} \frac{m}{seg}$
35. Un tanque de agua tiene la forma de cono circular erecto invertido con radio de la base 2 metros y altura 4 metros. Si se bombea agua hacia el tanque a razón de $2 \frac{m^3}{min}$, encontrar la rapidez a la que el nivel del agua está subiendo cuando el agua tiene 3 metros de profundidad. Rta: $\frac{8}{9\pi} \frac{m}{min}$

VIII. GRÁFICOS DE FUNCIONES

36. Para cada una de las siguientes funciones que se presentan a continuación:
- Encuentre las asíntotas verticales y/o horizontales si las tiene.
 - Determine las coordenadas de los intersección con los ejes.
 - Determine las coordenadas de los puntos críticos.
 - Halle los intervalos donde la función es creciente y decreciente.
 - Determine las coordenadas de los puntos de inflexión.
 - Halle los intervalos donde la función es cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo.
 - De acuerdo con la información obtenida en los numerales anteriores, realice la gráfica de y .
 - Determine el dominio y el rango de la función.

a. $y = x^2 + 5x - 14$

b. $y = 6 - 2x - x^2$

c. $y = x^3 - 3x + 3$

d. $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

e. $y = 1 - (x + 1)^3$

f. $y = x^4 - 2x^2$

g. $y = 4x^3 - 4x^4$

h. $y = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$

i. $y = \frac{x^2}{x+1}$	p. $y = 2x - 3x^{2/3}$
j. $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$	q. $y = x^{4/3} + 4x^{1/3}$
k. $y = \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-3}$	r. $y = x + \operatorname{sen} x$
l. $y = \sqrt{16 - x^2}$	s. $y = 4\cos^2 x - 1$
m. $y = \sqrt{9x^2+10x+1}$	t. $y = xe^{2x}$
n. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x+7}}$	u. $y = x^2 \ln x$
o. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+1}$	v. $y = e^x \operatorname{sen} x$

IX. OPTIMIZACIÓN

37. En una central de abastos, el precio del fríjol por Kg varia durante el año de acuerdo con el siguiente modelo.

$$P(t) = 37,5t^2 - 300t + 3800$$

Donde t está expresada en meses a partir del primero de enero y $P(t)$ en pesos.

- ¿En qué mes el precio del fríjol registros su mínimo valor?
 - ¿Cuál es el precio mínimo registrado?
38. La altura con respecto al suelo de una pelota que se desplaza verticalmente está dada por:

$$h(t) = -16t^2 + 96t + 112$$

con $h(t)$ en pies y t en segundos. De acuerdo con esta información determine:

- El momento en que la pelota alcanza su altura máxima
 - ¿Cuál es la altura máxima?
39. En una finca se pretende destinar un área rectangular de 2250 m^2 para un potrero. Si al potrero hay que colocarle un cerramiento compuesto por 3 líneas de alambre de púas:

- a. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del potrero para que la cantidad de alambre de púas necesarias para el cerramiento sea mínima?
 - b. ¿Cuántos metros de alambre de púas se necesita para el cerramiento?
40. Un granjero tiene 100 metros de valla con los que planea cercar los tres lados de su jardín rectangular, ya que el otro lado se encuentra cubierto por un muro.
- a. ¿De qué manera encerrará el máximo área posible con la valla?
 - b. ¿Cuál es el área máxima?
41. Se desea construir una caja sin tapa, con base rectangular, a partir de una pieza de cartón rectangular de 16 cm de ancho y 21 cm de largo, recortando un cuadrado de cada esquina y doblando los lados.
- a. Encontrar el lado del cuadrado para el cual se obtiene una caja de volumen máximo.
 - b. ¿Cuál es el máximo volumen obtenido?
42. Se va a diseñar una lata con la forma de un cilindro circular recto con una capacidad de 2610 cm^3 para envasar un alimento en conserva.
- a. ¿Cuáles son las dimensiones que debe tener la lata para que la cantidad de metal utilizada en su fabricación sea mínima?
 - b. ¿Cuál es el área de metal necesaria para la fabricación de la lata?
43. Encontrar las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo que puede inscribirse en un cono circular recto de radio 20 cm y altura 40 cm.
44. Se va a construir un tanque rectangular abierto de base cuadrada y un volumen de 32 m^3 . Si el costo por metro cuadrado de la base es de \$150.000 y para los lados es de \$100.000 encontrar las dimensiones del tanque para que el costo de construcción sea mínimo.

45. Un alambre de 60 cm de largo se va a partir en dos trozos. Una de las partes va a doblarse en forma de circunferencia y la otra en forma de triángulo equilátero. ¿Cómo se debe cortar el alambre para que la suma de las áreas del círculo y del triángulo que se forman sea mínima?

Nota: La mayoría de los ejercicios propuestos en este taller fueron tomados de los textos referenciados en la bibliografía.

Bibliografía de referencia

ALARCÓN Sergio, GONZÁLEZ Cristina, QUINTANA Hernando, *Cálculo Diferencial. Límites y derivadas*. Medellín, Colombia: ITM, 2008.

LEITHOLD, Louis. *El Cálculo con geometría analítica*. 7ª edición. México: Oxford University, 2003.

PURCELL, Edwin J. y DALE, Varberg. *Cálculo con geometría analítica*. Sexta edición. México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1992.

STEIN, Sherman K. y BARCELLOS, Anthony. *Cálculo y geometría analítica*. Quinta edición. Bogotá: Mc. Graw Hill, 1994.

STEWART, James. *Cálculo de una variable: Conceptos y contextos*. Cuarta edición. México D.F.: Cengage Learning Editores, 2010.

STEWART, James. *Cálculo diferencial e integral*. Segunda edición. Bogotá: Thompson editores, 2007.

SWOKOWSKI, E. *Cálculo con geometría analítica*. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1982.

THOMAS, George B. *Cálculo de una variable*. Decimosegunda edición. México: Addison-Wesley, 2010.

WARNER Stefan, CASTENOBLE Steven R. *Cálculo Aplicado*. 2ª edición. México: Thomsom Learning, 2002.

ZILL G., Dennis. *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo editorial Iberoamérica, 1987.