

Controlador Proporcional Integral Derivativo

Mateo Salamanca Pulido
matsalamancap@udistrital.edu.co
20211005107

Octubre, 2024

1 Introducción

En el presente documento se pretende dar solución al Ejercicio 9.5 del libro *Control Systems Engineering* de Norman Nise, séptima edición, en el que se realiza el diseño de un compensador ideal derivativo para un sistema.

2 Ejercicio

Dado el sistema mostrado en la siguiente figura, diseñar un controlador PID para que el sistema opere con un tiempo pico de $\frac{2}{3}$ del sistema no compensado, con un *overshoot* del 20% y error de estado estacionario igual a 0 para una señal escalón a la entrada.

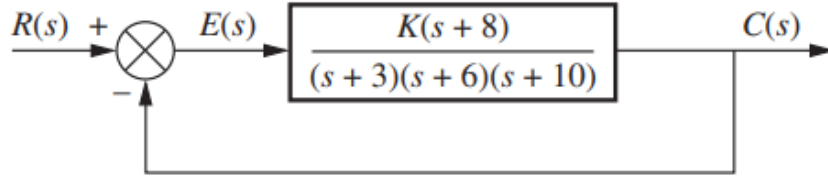


Figure 1: Sistema de control no compensado con realimentación. Tomado del libro *Control System Engineering* de Norman Nise, 7ma edición

3 Solución

Inicialmente, se calcula el coeficiente de amortiguamiento ζ para un porcentaje de *overshoot* dado mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\zeta &= \sqrt{\frac{\ln(OS)^2}{\pi^2 + \ln(OS)^2}} \\ \zeta &= \sqrt{\frac{\ln(0.2)^2}{\pi^2 + \ln(0.2)^2}} \\ \zeta &\approx 0,456\end{aligned}\tag{1}$$

Seguidamente, se procedió a encontrar la ubicación del polo dominante que cumple con la condición del *overshoot* dado:

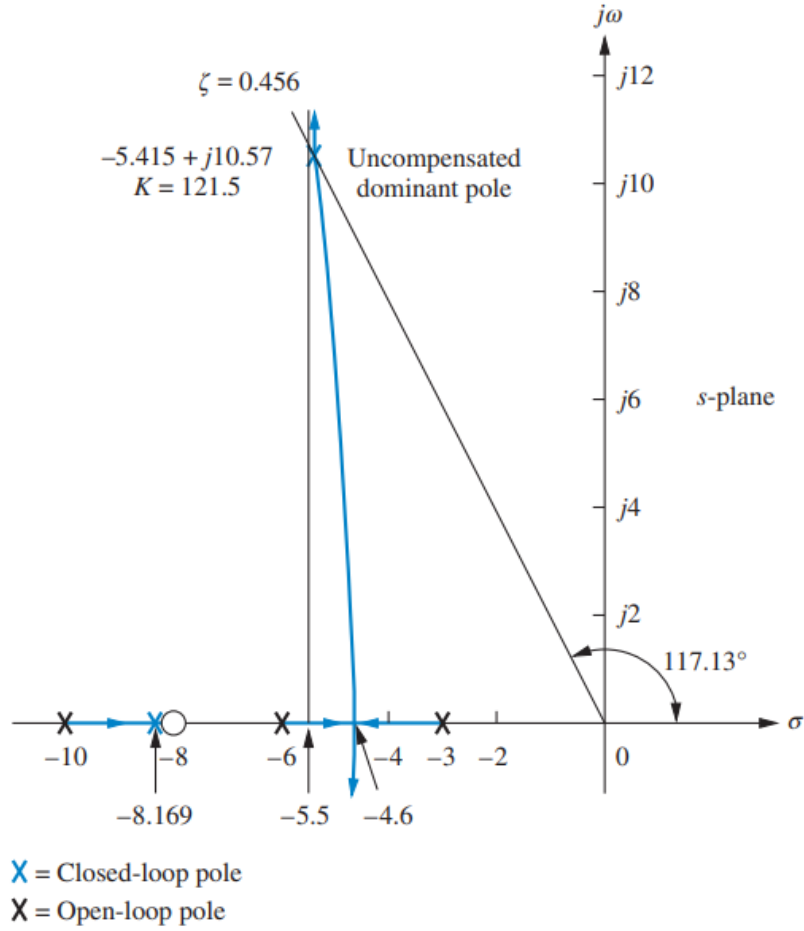


Figure 2: Ubicación geométrica de las raíces del sistema sin compensar en lazo abierto y cerrado. Tomado del libro *Control System Engineering* de Norman Nise, 7ma edición

Obteniendo que los polos dominantes se encuentran en $-5.415 \pm j10.57$ con una ganancia proporcional de 121.5. Ahora bien, se calcula la parte imaginaria del polo dominante del compensador que cumpla con la condición de la reducción del tiempo pico con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\omega_d &= \frac{\pi}{T_p} \\ \omega_d &= \frac{\pi}{\frac{2}{3} \cdot 0.297} \\ \omega_d &= 15.87\end{aligned}\tag{2}$$

De igual forma, se calcula la parte real del polo dominante con la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{\omega_d}{\tan(\angle_{pole})} \\ \sigma &= \frac{15.87}{\tan(117.13)} \\ \sigma &= -8.13\end{aligned}\tag{3}$$

Luego, para el diseño del controlador, se debe usar la geometría de la siguiente figura para calcular la ubicación del cero:

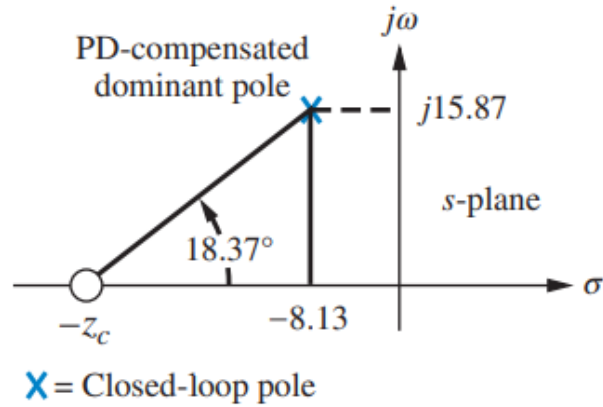


Figure 3: Polo dominante requerido en lazo cerrado. Tomado del libro *Control System Engineering de Norman Nise, 7ma edición*

Realizando la suma de ángulos de la ubicación geométrica de las raíces de los polos del sistema sin compensar, y el cero requerido, se obtiene $\sum \angle = -198,37$, lo cual indica que la contribución del cero del compensador debe ser de $18,37$; entonces se calcula la ubicación del cero a partir de la geometría de la figura 3 mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{15,87}{z_c - 8,13} = \tan(18,37) \quad (4)$$

$$z_c = 55,92$$

De manera que la función de transferencia del controlador PD es $G_{PD}(s) = (s + 55,92)$. Siguiendo el procedimiento, se grafica la ubicación geométrica del sistema compensado con el controlador PD:

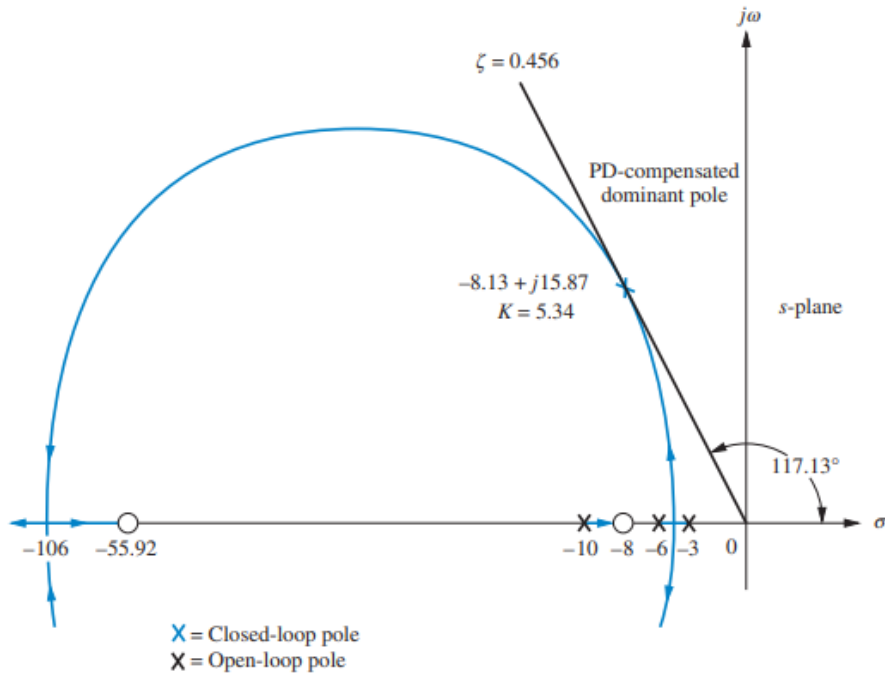


Figure 4: Ubicación geométrica de las raíces del sistema con compensador PD. Tomado del libro *Control System Engineering* de Norman Nise, 7ma edición

De allí se determina que la ganancia en el punto que garantiza los parámetros de diseño es de $K = 5,34$. Ahora se debe diseñar el compensador integral ideal para reducir el error de estado estable estacionario para que sea igual a cero, para ello se requiere agregar al sistema un cero cercano al origen y un polo en cero, por lo tanto la función de transferencia del controlador PI es:

$$G_{PI}(s) = \frac{s + 0,5}{s} \quad (5)$$

Seguidamente, se grafica la ubicación geométrica del sistema en lazo cerrado con los controladores diseñados:

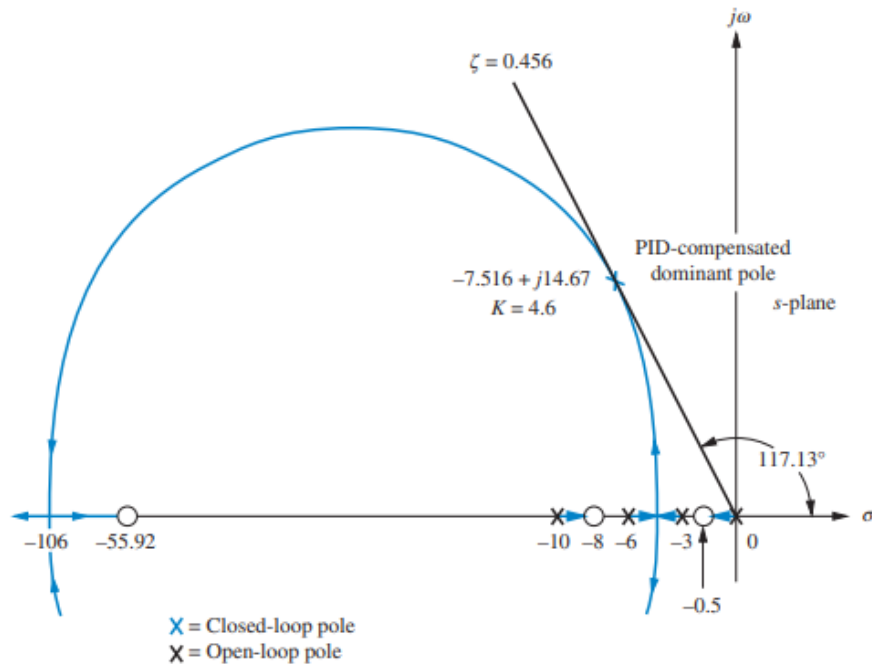


Figure 5: Ubicación geométrica de las raíces del sistema con compensador PID en lazo cerrado. Tomado del libro *Control System Engineering* de Norman Nise, 7ma edición

Finalmente, se determina la ganancia que garantiza el *overshoot* de diseño siguiendo la recta de ζ , en el punto en el que los polos sean más cercanos al del sistema con controlador PD; de donde se obtiene $K = 4, 6$.

Esto indica que la función de transferencia del controlador PID completo es:

$$G_{PID}(s) = \frac{4, 6(s + 55, 92)(s + 0, 5)}{s} \quad (6)$$

De tal manera que se obtienen los siguientes resultados:

| | Uncompensated | PD-compensated | PID-compensated |
|-----------------------|-----------------------------------|--------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Plant and compensator | $\frac{K(s+8)}{(s+3)(s+6)(s+10)}$ | $\frac{K(s+8)(s+55.92)}{(s+3)(s+6)(s+10)}$ | $\frac{K(s+8)(s+55.92)(s+0.5)}{(s+3)(s+6)(s+10)s}$ |
| Dominant poles | $-5.415 \pm j10.57$ | $-8.13 \pm j15.87$ | $-7.516 \pm j14.67$ |
| K | 121.5 | 5.34 | 4.6 |
| ζ | 0.456 | 0.456 | 0.456 |
| ω_n | 11.88 | 17.83 | 16.49 |
| %OS | 20 | 20 | 20 |
| T_s | 0.739 | 0.492 | 0.532 |
| T_p | 0.297 | 0.198 | 0.214 |
| K_p | 5.4 | 13.27 | ∞ |
| $e(\infty)$ | 0.156 | 0.070 | 0 |
| Other poles | -8.169 | -8.079 | -8.099, -0.468 |
| Zeros | -8 | -8, -55.92 | -8, -55.92, -0.5 |
| Comments | Second-order approx. OK | Second-order approx. OK | Zeros at -55.92 and -0.5 not canceled |

Figure 6: Resultados del proceso de diseño del controlador PID del sistema. Tomado del libro *Control System Engineering* de Norman Nise, 7ma edición