Nombre: Mateo Salamanca Pulido   Código: 20211005107

Control 1 Grupo 005-1

Ejemplo 6-2 Libro Ogata

En este ejemplo se observa como dibujar el mapa de las raíces de un sistema con polos abiertos complejos conjugados. Se considera la realimentación negativa que se observa en la siguiente imagen para el sistema.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+2s+3}, \qquad H(s) = 1$$

Donde K≥0. Se puede observar que los polos del sistema son

$$s = -1 + j\sqrt{2}, \quad s = -1 - j\sqrt{2}$$

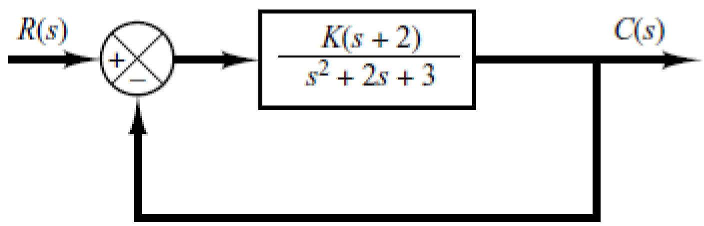

Imagen 1: Realimentación negativa del sistema

El procedimiento típico para dibujar el mapa de las raíces es como se muestra a continuación

1. ***Se determinan los lugares de las raíces en el eje real.*** Para cualquier punto de prueba s en el eje real, la suma de las contribuciones angulares de los polos complejo-conjugados es 360°, como se observa en la figura 2. Por lo tanto, el efecto neto de los polos complejos conjugados es cero en el eje real. La ubicación del lugar de las raíces en el eje real se determina a partir del cero de bucle abierto en el eje real negativo. Una prueba revela que una sección del eje real negativa, la comprendida entre -2 y -q, es una parte del lugar de las raíces. Se observa que, dado que este lugar geométrico se encuentra entre dos ceros (en s=–2 y s=–q), en realidad es parte de dos lugares de raíces, cada uno de los cuales comienza en uno de los dos polos complejos conjugados. En otras palabras, dos lugares de raíces se dividen en la parte del eje real negativo entre –2 y –q. Como hay dos polos de lazo abierto y un cero, hay una asíntota que coincide con el eje real negativo.

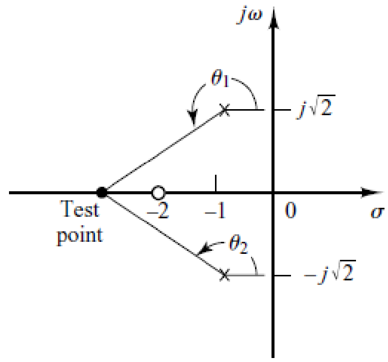

Imagen 2: Determinación del lugar de las raíces en el eje real

2. ***Se determina el ángulo de salida de los polos complejos conjugados de lazo abierto***. La presencia de un par de polos complejos conjugados de lazo abierto requiere la determinación del ángulo de salida de estos polos. El conocimiento de este ángulo es importante, ya que el lugar de las raíces cerca de un polo complejo proporciona información sobre si el lugar que se origina en el polo complejo migra hacia el eje real o se extiende hacia la asíntota.
   Hablando sobre la imagen 3, si escogemos un punto de prueba y lo movemos en la misma proximidad del polo complejo de lazo abierto en s = -p1, encontramos que la suma de las contribuciones angulares del polo en s = p2 y cero en s = -z1 al punto de prueba puede considerarse que permanece igual. Si el punto de prueba debe estar en el lugar de las raíces, entonces la suma de $\phi'1$, -$\theta'1$ y -$\theta'2$ debe ser $\pm 180°(2k+1)$, donde k=0, 1, 2, p. Por lo tanto, en este ejemplo

$$\phi_1' - (\theta_1 + \theta_2') = \pm 180°(2k+1)$$
$$\theta_1 = 180° - \theta_2' + \phi_1' = 180° - \theta_2 + \phi_1$$

   El ángulo de salida es entonces

$$\theta_1 = 180° - \theta_2 + \phi_1 = 180° - 90° + 55° = 145°$$

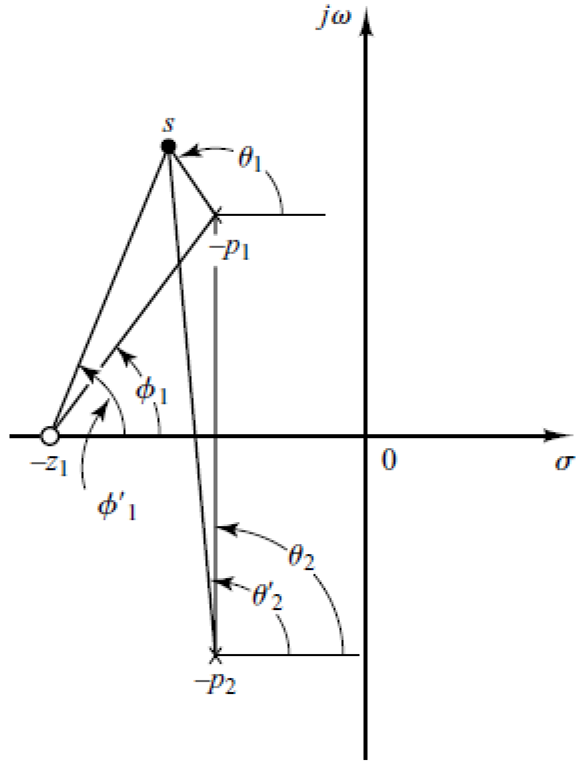

Imagen 3. Determinación del ángulo de partida

Como la ubicación de las raíces es simétrica con respecto al eje real, el ángulo de partida del polo s=-p2 es -145°

3. ***Determinar el punto de ruptura***. Un punto de ruptura existe cuando un par de ramas del lugar de las raíces se fusionan a medida que aumenta K. Para este problema, el punto de ruptura se puede encontrar de la siguiente manera:

$$K = -\frac{s^2 + 2s + 3}{s + 2}$$

$$\frac{d}{ds}K = -\frac{(2s + 2)(s + 2) - (s^2 + 2s + 3)}{(s + 2)^2} = 0$$

$$s^2 + 4s + 1 = 0$$

$$s = -3.7320 \qquad s = -0.2680$$

Se puede observar que el punto s=-3,7320 esta en el lugar de las raíces. Por lo tanto, este punto es un punto de entrada real. (Tenga en cuenta que en el punto s=–3,7320 el valor de ganancia correspondiente es K=5,4641). Dado que el punto s= -0,2680 no está en el lugar de las raíces, no puede ser un punto de entrada. (Para el punto s= -0,2680, el valor de ganancia correspondiente es K=–1,4641).

4. ***Dibujar el mapa de las raíces basado en la información de los pasos anteriores.*** Para
determinar con precisión los lugares de las raíces, se deben encontrar varios puntos por ensayo y error entre el punto de ruptura y los polos complejos de lazo abierto. (Para facilitar el esbozo del gráfico del lugar de las raíces, debemos encontrar la dirección en la que se debe mover el punto de prueba, sumando mentalmente los cambios en los ángulos de los polos y los ceros). La imagen 4 muestra un gráfico completo del lugar de las raíces para el sistema considerado.

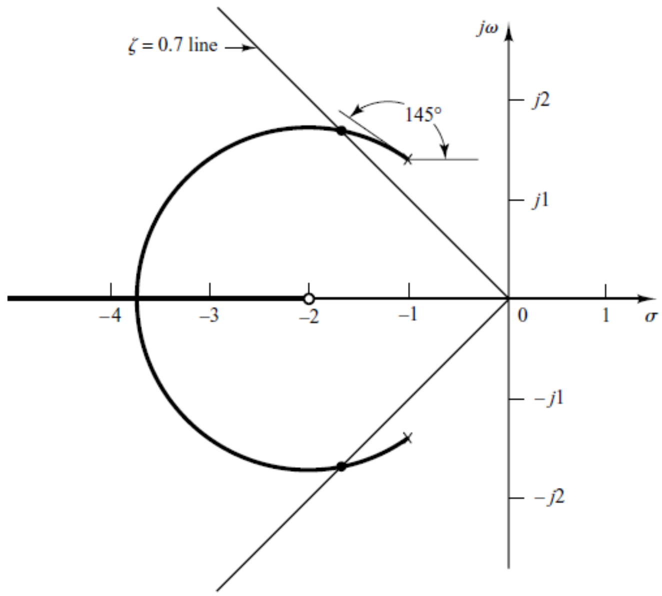

Imagen 4. Mapa de las raíces.

El valor de la ganancia K en cualquier punto del mapa de las raíces puede ser encontrando, usando la condición de magnitud o con MATLAB. Por ejemplo, el valor de K en el cual polos de lazo cerrado complejos conjugados tienen un amortiguamiento $\xi = 0.7$ se puede encontrar localizando las raíces, como se muestra en la imagen 4 y computando el valor de K como se muestra a continuación

$$K = \left| \frac{(s+1-j\sqrt{2})(s+1+j\sqrt{2})}{s+2} \right|_{s=-1.67+j1.70} = 1.34$$

Se observa que en este sistema el lugar de las raíces en el plano complejo es una parte de un círculo. Un lugar de raíces circular de este tipo no se dará en la mayoría de los sistemas. Los lugares de raíces circulares pueden darse en sistemas que involucran dos polos y un cero, dos polos y dos ceros, o un polo y dos ceros. Incluso en tales sistemas, la aparición de lugares de raíces circulares depende de las ubicaciones de los polos y ceros involucrados.
Para mostrar la ocurrencia de un lugar de raíces circular en el sistema actual, necesitamos derivar la ecuación para el lugar de raíces. Para el sistema actual, la condición del ángulo es

$$\underline{/s+2} - \underline{/s+1-j\sqrt{2}} - \underline{/s+1+j\sqrt{2}} = \pm 180°(2k+1)$$

Sustituyendo $s = \sigma + jw$

$$\underline{/\sigma+2+j\omega} - \underline{/\sigma+1+j\omega-j\sqrt{2}} - \underline{/\sigma+1+j\omega+j\sqrt{2}} = \pm 180°(2k+1)$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{w-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{w+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{w}{\sigma+2}\right) \pm 180°(2k+1)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \pm \tan x \tan y}$$

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{w-\sqrt{2}}{\sigma+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{w+\sqrt{2}}{\sigma+1}\right)\right] = \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{w}{\sigma+2}\right) \pm 180°(2k+1)\right]$$

$$\frac{\frac{w-\sqrt{2}}{\sigma+1} + \frac{w+\sqrt{2}}{\sigma+1}}{1 - (\frac{w+\sqrt{2}}{\sigma+1})(\frac{w-\sqrt{2}}{\sigma+1})} = \frac{\frac{w}{\sigma+2} \pm 0}{1 \mp \frac{w}{\sigma+2} * 0}$$

$$\frac{2w(\sigma+1)}{(\sigma+1)^2 - (w^2-2)} = \frac{w}{\sigma+2}$$

$$w[(\sigma+2)^2 + w^2 - 3] = 0$$

Con esta ecuación obtenemos

W=0 o $(\sigma+2)^2 + w^2 = 3$

Estas dos ecuaciones son las ecuaciones para los lugares de las raíces del sistema actual. Nótese que la primera ecuación, w=0, es la ecuación para el eje real. El eje real desde s=-2 hasta s=-q corresponde a un lugar de las raíces para K≥0. La parte restante del eje real corresponde a un lugar de las raíces cuando K es negativo. (En el sistema actual, K no es negativo). (Nótese que K < 0 corresponde al caso de retroalimentación positiva). La segunda ecuación para el lugar de las raíces es una ecuación de un círculo con centro en σ =-2, w=0 y el radio igual a $\sqrt{3}$. La parte del círculo a la izquierda de los polos complejos conjugados corresponde a un lugar de las raíces para K≥0. La parte restante del círculo
corresponde a un lugar de las raíces cuando K es negativo.