Control proporcional de un sistema

Mateo Salamanca Pulido
matsalamancap@udistrital.edu.co
20211005107

Septiembre 3, 2024

1 Introducción

Los sistemas dinámicos permiten modelar y analizar el comportamiento de cualquier sistema físico o eléctrico en el dominio del tiempo, haciendo uso de variables que determinan el estado futuro a partir de un estado actual. Estos sistemas poseen diversas representaciones, en este documento se estudiarán las funciones de transferencia y la información que ella misma otorga respecto al comportamiento del sistema, y su respuesta a distintos valores de ganancia.

2 Metodología

Se realizará un análisis matemático de la siguiente función de transferencia, la cual corresponde a un sistema de tercer orden en lazo cerrado, para determinar las coordenadas de los polos en el plano complejo, y su respuesta en el tiempo para cinco valores diferentes de ganancia k:

$$G(s) = \frac{k}{s^3 + 9s^2 + 18s + k} \tag{1}$$

3 Desarrollo

1. Ganancia $k = 0,1$:

$$G(s) = \frac{0,1}{s^3 + 9s^2 + 18s + 0,1} \tag{2}$$

Mediante MATLAB, se obtienen las raíces del denominador de la ecuación 2, las cuales corresponden a los polos del sistema:

$$\begin{aligned} s_1 &= -6,0055 \\ s_2 &= -2,9889 \\ s_3 &= -0,0056 \end{aligned} \tag{3}$$

Seguidamente, se encuentra la expresión de la función de transferencia de la ecuación 2 en funciones parciales:

$$G(s) = \frac{0,1}{s^3 + 9s^2 + 18s + 0,1} = \frac{A}{s + 6,0055} + \frac{B}{s + 2,9889} + \frac{C}{s + 0,0056} \tag{4}$$

Mediante el método *heaviside*, se calcula el valor de las constantes A, B, C:

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{0.1}{(s + 2,9889)(s + 0,0056)}\right|_{s=-6,0055} = 0,0055 \\ B &= \left.\frac{0.1}{(s + 6.0055)(s + 0.0056)}\right|_{s=-2,9889} = -0,0111 \\ C &= \left.\frac{0.1}{(s + 6,0055)(s + 2,9889)}\right|_{s=-0,0056} = 0,0056 \end{aligned} \tag{5}$$

Obteniendo así, la siguiente expresión de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{0,0055}{s + 6,0055} - \frac{0,0111}{s + 2,9889} + \frac{0,0056}{s + 0,0056} \tag{6}$$

Seguidamente, se aplica transformada inversa de Laplace a la ecuación 6:

$$g(t) = 0,0055 \cdot e^{-6,0055 \cdot t} - 0,0111 \cdot e^{-2,9889 \cdot t} + 0,0056 \cdot e^{0,0056 \cdot t} \tag{7}$$

Finalmente, se obtiene la gráfica de la ubicación de los polos, la respuesta al impulso y al escalón de la función de transferencia mostrada en la ecuación 2:

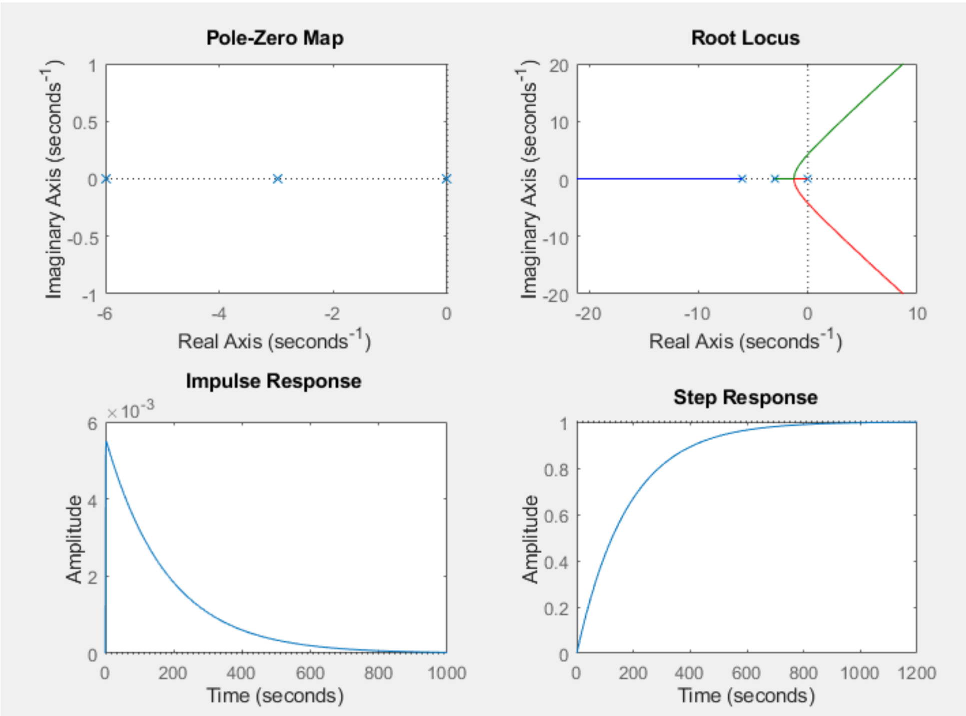

Figure 1: Gráficas de interés de la función de transferencia 2. *Autoría Propia.*

2. Ganancia $k = 10,39$:

$$G(s) = \frac{10,39}{s^3 + 9s^2 + 18s + 10,39} \tag{8}$$

Mediante MATLAB, se obtienen las raíces del denominador de la ecuación 8, las cuales corresponden a los polos del sistema:

$$\begin{aligned} s_1 &= -6,4641 \\ s_2 &= -1,2679 \\ s_3 &= -1,2679 \end{aligned} \tag{9}$$

Seguidamente, se encuentra la expresión de la función de transferencia de la ecuación 8 en funciones parciales:

$$G(s) = \frac{10,39}{s^3 + 9s^2 + 18s + 10,39} = \frac{A}{s + 6,4641} + \frac{B}{(s + 1,2679)^2} + \frac{C}{(s + 1,2679)} \tag{10}$$

Mediante el método *heaviside*, se calcula el valor de las constantes A, B, C:

$$\begin{aligned} A &= \left.\frac{10,39}{(s+1,2679)^2}\right|_{s=-6,4641} = 0,3849 \\ B &= \left.\frac{10,39}{s+6,4641}\right|_{s=-1,2679} = 2 \\ C &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{ds}}\left[\frac{10,39}{s+6,4641}\right]\right|_{s=-0,0056} = -0,3849 \end{aligned} \tag{11}$$

Obteniendo así, la siguiente expresión de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{0,3849}{s+6,4641} + \frac{2}{(s+1,2679)^2} - \frac{0,3849}{s+1,2679} \tag{12}$$

Seguidamente, se aplica transformada inversa de Laplace a la ecuación 29:

$$g(t) = 0,3849 \cdot e^{-6,4641 \cdot t} + 2t \cdot e^{-1,2679 \cdot t} - 0,3849 \cdot e^{-1,2679 \cdot t} \tag{13}$$

Finalmente, se obtiene la gráfica de la ubicación de los polos, la respuesta al impulso y al escalón de la función de transferencia mostrada en la ecuación 8:

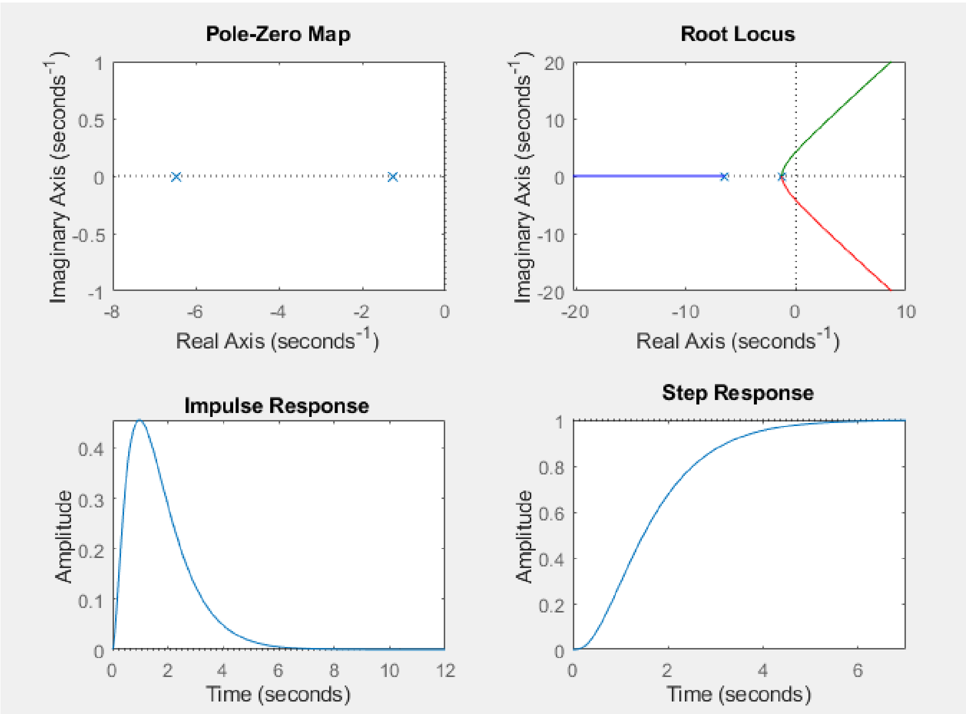

Figure 2: Gráficas de interés de la función de transferencia 8. *Autoría Propia.*

3. Ganancia $k = 35$

$$G(s) = \frac{35}{s^3 + 9s^2 + 18s + 35} \tag{14}$$

Mediante MATLAB, se obtienen las raíces del denominador de la ecuación 14, las cuales corresponden a los polos del sistema:

$$\begin{aligned} s_1 &= -7,1704 \\ s_2 &= -0,9148 + j2,0111 \\ s_3 &= -0,9148 - j2,0111 \end{aligned} \tag{15}$$

Seguidamente, se encuentra la expresión de la función de transferencia de la ecuación 14 en funciones parciales:

$$G(s) = \frac{A}{s+7,1704} + \frac{B}{s+0,9148-j2,0111} + \frac{C}{s+0,9148+j2,0111} \tag{16}$$

Mediante el método *heaviside*, se calcula el valor de las constantes A, B, C:

$$\begin{aligned} A &= \frac{35}{(s+0,9148-j2,0111)(s+0,9148+j2,0111)}\bigg|_{s=-7,1704} = 0,8106 \\ B &= \frac{35}{(s+7,1704)(s+0,9148+j2,0111)}\bigg|_{s=-0,9148+j2,0111} = -0,4053-j1,2607 \\ C &= \frac{35}{(s+7,1704)(s+0,9148-j2,0111)}\bigg|_{s=-0,9148-j2,0111} = -0,4053+j1,2607 \end{aligned} \tag{17}$$

Obteniendo así, la siguiente expresión de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{0,8106}{s+7,1704} - \frac{0,4053+j1,2607}{s+0,9148-j2,0111} - \frac{0,4053-j1,2607}{s+0,9148+j2,0111} \tag{18}$$

Finalmente, se obtiene la gráfica de la ubicación de los polos, la respuesta al impulso y al escalón de la función de transferencia mostrada en la ecuación 14:

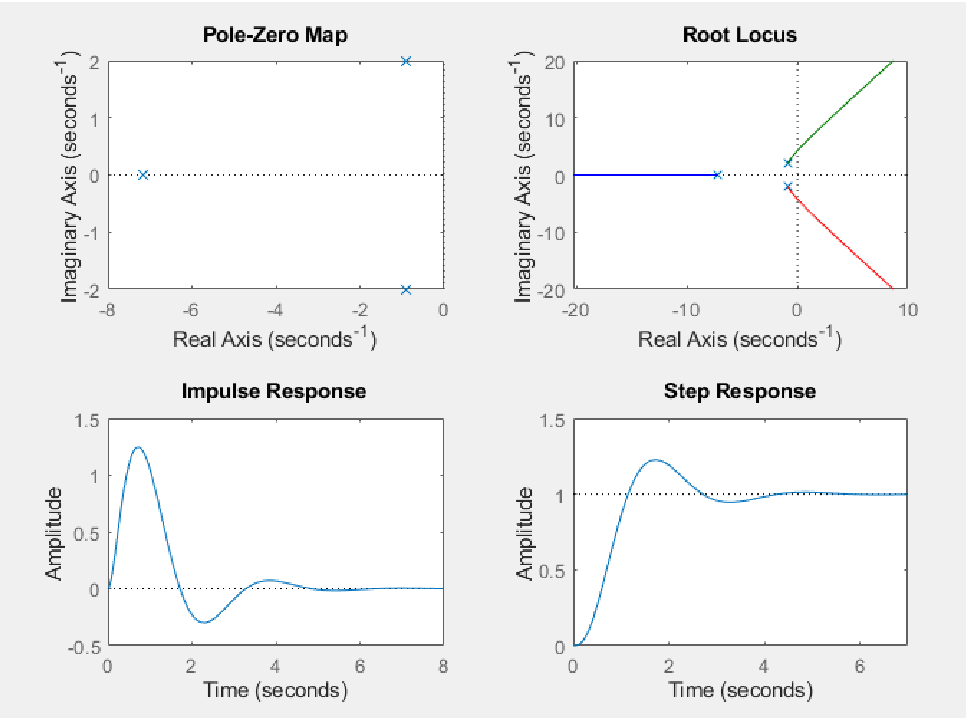

Figure 3: Gráficas de interés de la función de transferencia 14. *Autoría Propia.*

4. Ganancia $k = 162$

$$G(s) = \frac{162}{s^3+9s^2+18s+162} \tag{19}$$

Mediante MATLAB, se obtienen las raíces del denominador de la ecuación 19, las cuales corresponden a los polos del sistema:

$$\begin{aligned} s_1 &= -9 \\ s_2 &= j4,2426 \\ s_3 &= -j4,2426 \end{aligned} \tag{20}$$

Seguidamente, se encuentra la expresión de la función de transferencia de la ecuación 19 en funciones parciales:

$$G(s) = \frac{A}{s+9} + \frac{B}{s - j4,2426} + \frac{C}{s + j4,2426} \tag{21}$$

Mediante el método *heaviside*, se calcula el valor de las constantes A, B, C:

$$\begin{aligned} A &= \frac{162}{(s - j4,2426)(s + j4,2426)}\Big|_{s=-9} = 1,6364 \\ B &= \frac{162}{(s+9)(s + j4,2426)}\Big|_{s=j4,2426} = -0,8182 - j1,7356 \\ C &= \frac{162}{(s+9)(s - j4,2426)}\Big|_{s=-j4,2426} = -0,8182 + j1,7356 \end{aligned} \tag{22}$$

Obteniendo así, la siguiente expresión de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1,6364}{s+9} - \frac{0,8182 + j1,7356}{s - j4,2426} - \frac{0,8182 - j1,7356}{s + j4,2426} \tag{23}$$

Seguidamente, se aplica transformada inversa de Laplace a la ecuación **??**:

$$g(t) = 0,3849 \cdot e^{-6,4641 \cdot t} + 2t \cdot e^{-1,2679 \cdot t} - 0,3849 \cdot e^{-1,2679 \cdot t} \tag{24}$$

Finalmente, se obtiene la gráfica de la ubicación de los polos, la respuesta al impulso y al escalón de la función de transferencia mostrada en la ecuación 19:

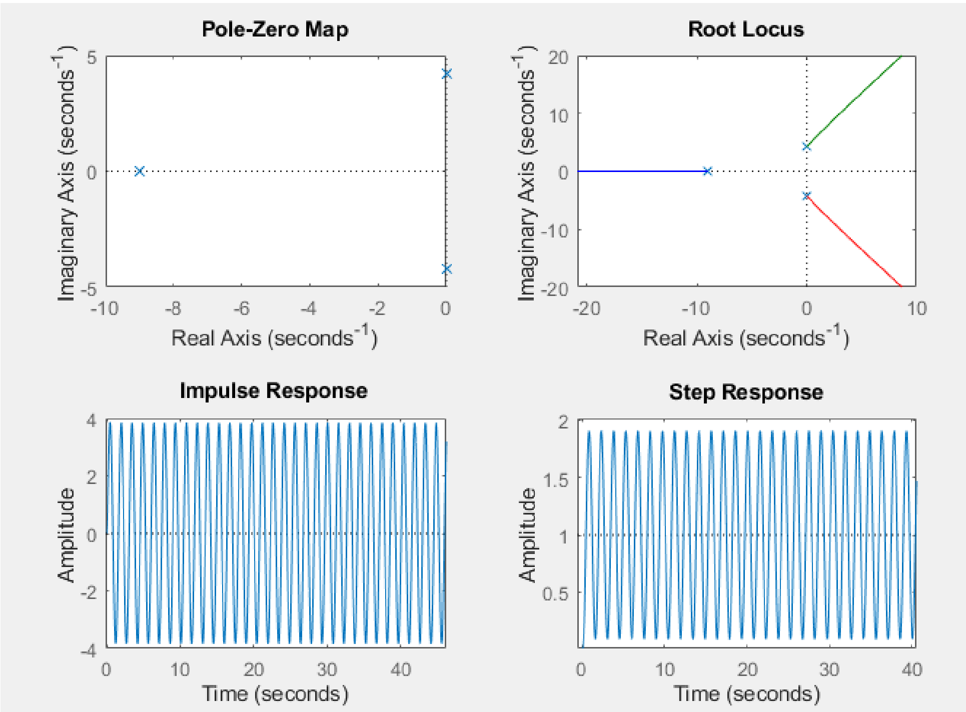

Figure 4: Gráficas de interés de la función de transferencia 19. *Autoría Propia.*

5. Ganancia $k = 1350$

$$G(s) = \frac{1350}{s^3 + 9s^2 + 18s + 1350} \tag{25}$$

Mediante MATLAB, se obtienen las raíces del denominador de la ecuación 25, las cuales corresponden a los polos del sistema:

$$\begin{aligned} s_1 &= -14,3235 \\ s_2 &= 2,6617 + j9,3363 \\ s_3 &= 2,6617 - j9,3363 \end{aligned} \tag{26}$$

Seguidamente, se encuentra la expresión de la función de transferencia de la ecuación 25 en funciones parciales:

$$G(s) = \frac{A}{s + 14,3235} + \frac{B}{s - 2,6617 - j9,3363} + \frac{C}{s - 2,6617 + j9,3363} \tag{27}$$

Mediante el método *heaviside*, se calcula el valor de las constantes A, B, C:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1350}{(s - 2,6617 - j9,3363)(s - 2,6617 + j9,3363)}\Big|_{s=-14,3235} = 3,5936 \\ B &= \frac{1350}{(s + 14,3235)(s - 2,6617 + j9,3363)}\Big|_{s=2,6617+j9,3363} = -1,7968 - j3,2689 \\ C &= \frac{1350}{(s + 14,3235)(s - 2,6617 - j9,3363)}\Big|_{s=2,6617-j9,3363} = 1,7968 + j3,2689 \end{aligned} \tag{28}$$

Obteniendo así, la siguiente expresión de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{3,5936}{s + 14,3235} + \frac{-1,7968 - j3,2689}{s - 2,6617 - j9,3363} + \frac{1,7968 + j3,2689}{s - 2,6617 + j9,3363} \tag{29}$$

Seguidamente, se aplica transformada inversa de Laplace a la ecuación **??**:

$$g(t) = 0,3849 \cdot e^{-6,4641 \cdot t} + 2t \cdot e^{-1,2679 \cdot t} - 0,3849 \cdot e^{-1,2679 \cdot t} \tag{30}$$

Finalmente, se obtiene la gráfica de la ubicación de los polos, la respuesta al impulso y al escalón de la función de transferencia mostrada en la ecuación 19:

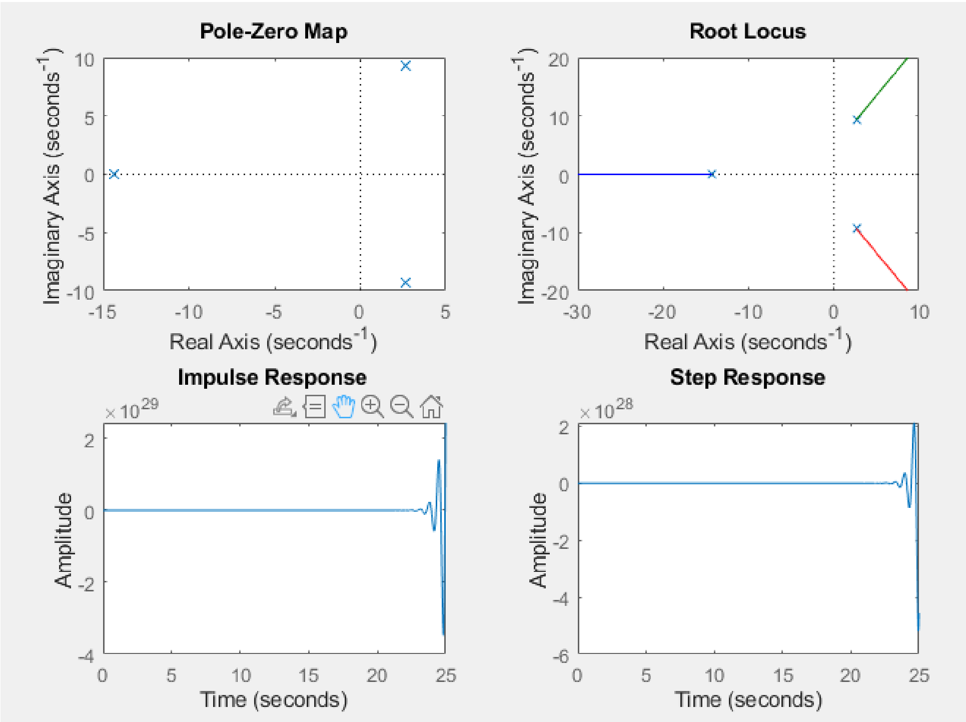

Figure 5: Gráficas de interés de la función de transferencia 19. *Autoría Propia.*

4 Análisis de simulación

Para el sistema dado, cuya función de transferencia es mostrada en la ecuación 1, se observa que, al aumentar la ganancia, la cual representa el control proporcional del sistema, se obtienen distintas soluciones para el polinomio del denominador de la función, lo cual significa que la ubicación de los polos en el plano complejo va cambiando con cada valor asignado; a mayor ganancia se observa que la parte real e imaginaria de los polos comienza a variar, de manera que:

- Cuando el sistema posee dos polos reales e iguales, posee una respuesta considerablemente rápida: en la figura 1 se observa que cuando la ganancia es 0.1, el tiempo de establecimiento es aproximadamente 800 segundos, mientras que en la figura 2 se observa que cuando la ganancia es 10.39, el tiempo de establecimiento es de aproximadamente 6 segundos.
- Cuando el sistema posee polos complejos conjugados, presenta un *overshoot* o sobrepasamiento, como se observa en la figura 3.
- Cuando el sistema posee polos complejos conjugados con parte real igual a 0, el sistema es oscila, como se observa en la figura 4
- Cuando el sistema posee polos con parte real positiva, se considera inestable y oscila con gran amplitud, como se observa en la figura 5