

## TAREA N1 TERCER CORTE CONTROL 1- EJERCICIO 9.2 DE OGATA, 5TA EDICIÓN

Considere la siguiente representación del espacio de estados de un sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones de matrices anteriores se pueden reescribir en su forma canónica de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$
$$y = \mathbf{Cx}$$

Donde se cumplen las siguientes igualdades:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0]$$

Los valores propios de la matriz A son  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -3$ , por lo tanto, tres valores propios son distintos. Si se define un conjunto de nuevas variables de estado Z con la siguiente transformación:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Pz}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Entonces, es posible sustituir en la ecuación canónica de la representación de espacio de estados anteriormente mencionada, de la siguiente forma:

$$\mathbf{P}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{B}u$$

Multiplicando previamente ambos lados de la ecuación por  $\mathbf{P}^{-1}$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{z} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 3 & 2.5 & 0.5 \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

La anterior ecuación también es una ecuación de estados que describe el mismo sistema definido en el enunciado del ejercicio, donde la ecuación de salida se debe modificar de la siguiente manera:

$$y = \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{z}$$

$$\begin{aligned} y &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ &= [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es importante observar que la transformación de matriz  $\mathbf{P}$ , modifica los coeficientes de la matriz  $\mathbf{X}$  en una diagonal. Como se observa en la ecuación de los estados  $\mathbf{z}$ , las tres ecuaciones de estados escalares están desacopladas, de igual manera, es importante que los elementos de la matriz  $\mathbf{P}^{-1} * \mathbf{A}\mathbf{P}$  son iguales a los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ . Es de vital importancia notar que los valores propios de  $\mathbf{A}$  y los de  $\mathbf{P}^{-1} * \mathbf{A}\mathbf{P}$  son iguales.