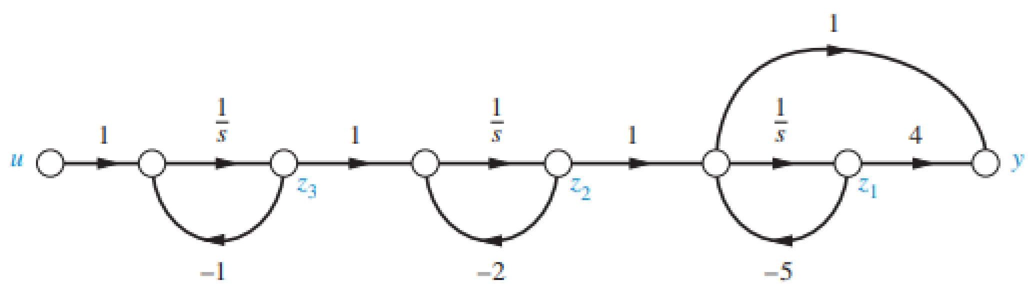
Nombre: Mateo Salamanca Pulido | Control 1: Grupo 005-1
Código: 20211005107 | Docente: Henry Borrero

TAREA N3 TERCER CORTE CONTROL 1- EJERCICIO 12.4 DE NORMAN NISE, 7MA EDICIÓN

Diseñar un controlador con realimentación de variables de estado para lograr un 20.8% de overshoot y un tiempo de establecimiento de 4 segundo para la siguiente planta:

$$G(s) = \frac{(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

Cuya representación gráfica de espacios de estado es:



Inicialmente, es necesario encontrar la ecuación de estados y la matriz de controlabilidad, las cuales son:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A_z z} + \mathbf{B_z} u = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \mathbf{C_z z} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}$$

$$\mathbf{C_{Mz}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_z} & \mathbf{A_z B_z} & \mathbf{A_z^2 B_z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que el determinante de Cmz es -1, se dice que el sistema es controlable.

Ahora bien, se convierte el sistema a variables de fase encontrando la ecuación característica y usando la ecuación para escribirla en la forma de variables de fase. La ecuación característica det(sI-Az) es:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A_z}) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10 = 0$$

Con los coeficientes calculados antes, y la forma de las variables de fase, se reescribe la representación del sistema de la siguiente manera:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A_x x} + \mathbf{B_x} u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [4 \quad 1 \quad 0]\,\mathbf{x}$$

La ecuación de salida fue escrita usando los coeficientes del numerador de la ecuación de la planta, sabiendo que la función de transferencia debe ser igual para ambas representaciones. La matriz de controlabilidad, Cmx, para el sistema de variables de fase es:

$$\mathbf{C_{Mx}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B_x} & \mathbf{A_x B_x} & \mathbf{A_x^2 B_x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -8 \\ 1 & -8 & 47 \end{bmatrix}$$

Usando la ecuación $P = C_{MZ} C_{MX}^{-1}$, es posible calcular la matriz de transformación entre dos sistemas como:

$$\mathbf{P} = \mathbf{C_{Mz} C_{Mx}^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Ahora bien, se diseña el controlador usando la representación de variables de fase y la ecuación de P para transformar el diseño en su representación original. Para lograr un overshoot del 20.8% y un tiempo de establecimiento de 4 segundos, un factor de la ecuación característica del sistema diseñado en lazo cerrado es $s^2 + 2s + 5$. Sabiendo que el cero en lazo cerrado está en s=-4, se elige el tercer polo en lazo cerrado para cancelar el cero de polo cerrado; por lo tanto, la ecuación característica total del sistema en lazo cerrado deseado es:

$$D(s) = (s+4)(s^2 + 2s + 5) = s^3 + 6s^2 + 13s + 20 = 0$$

Nombre: Mateo Salamanca Pulido
Código: 20211005107

Control 1: Grupo 005-1
Docente: Henry Borrero

Las ecuaciones de estados para la forma de variables de fase con la realimentación de variables de estado son:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A_x} - \mathbf{B_x K_x})\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(10+k_{1_x}) & -(17+k_{2_x}) & -(8+k_{3_x}) \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$y = [\,4 \quad 1 \quad 0\,]\,\mathbf{x}$$

La ecuación característica de los estados de *X* es:

$$\det(s\mathbf{I} - (\mathbf{A_x} - \mathbf{B_x K_x})) = s^3 + (8+k_{3_x})s^2 + (17+k_{2_x})s + (10+k_{1_x}) = 0$$

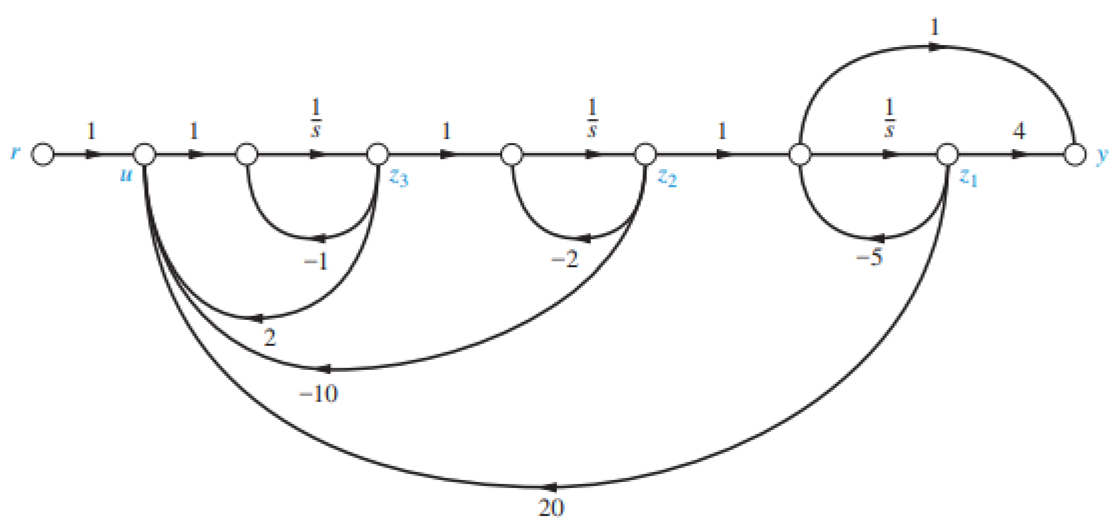
Al comparar la anterior ecuación con la del sistema en lazo cerrado deseado, se observa que:

$$\mathbf{K_x} = [\,k_{1_x} \quad k_{2_x} \quad k_{3_x}\,] = [\,10 \quad -4 \quad -2\,]$$

Haciendo uso de las ecuaciones de P y $K_Z = K_X P^{-1}$, es posible transformar el controlador al sistema original de la siguiente manera:

$$\mathbf{K_z} = \mathbf{K_x P^{-1}} = [\,-20 \quad 10 \quad -2\,]$$

El sistema en lazo cerrado final con realimentación de variables de estado se muestra a continuación, con una entrada aplicada *r*:



Para verificar el diseño, las ecuaciones de estado para el sistema diseñado son:

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{A_z} - \mathbf{B_z}\mathbf{K_z})\mathbf{z} + \mathbf{B_z}r = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 20 & -10 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}r$$

$$y = \mathbf{C_z}\mathbf{z} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{z}$$

Finalmente, al encontrar la función de transferencia en lazo cerrado, se obtiene:

$$T(s) = \frac{(s+4)}{s^3 + 6s^2 + 13s + 20} = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

Indicando así, que los requerimientos del diseño han sido cumplidos.