Controlador en atraso *Lag*

Mateo Salamanca Pulido
matsalamancap@udistrital.edu.co
20211005107

Octubre, 2024

1 Introducción

En el presente documento se pretende dar solución al Ejemplo 7.2 del libro *Modern Control Engineering* de Ogata, tercera edición, en el que se realiza el diseño de un compensador de atraso para un sistema.

2 Ejercicio

Se tiene un sistema con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} \tag{1}$$

3 Solución

Inicialmente, se tiene la siguiente gráfica de la ubicación geométrica de las raíces del sistema:

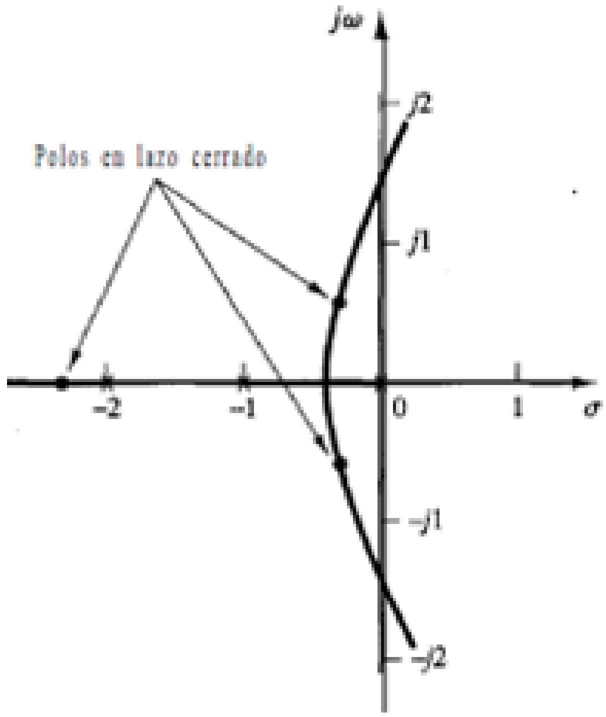

Figure 1: Ubicación geométrica de las raíces del sistema

Los polos dominantes del sistema en lazo cerrado son $s = -0,3307 \pm j0,5864$.

El factor de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado es $\zeta = 0.49$, y su frecuencia natural no amortiguada es $\omega_n = 0.673\,\mathrm{rad/s}$. La constante de error estático de velocidad es $K_v = 0.53\,\mathrm{s}^{-1}$.

Se busca aumentar la constante de error estático de velocidad K_v a aproximadamente $5\,\mathrm{s}^{-1}$, procurando no alterar significativamente la posición de los polos dominantes en lazo cerrado. Para lograr este objetivo, se introduce un compensador de atraso en cascada con la función de transferencia de la trayectoria directa ya establecida.

Para incrementar la constante de error estático de velocidad en un factor de alrededor de 10, seleccionamos $p = 10$ y colocamos el cero y el polo del compensador de atraso en $s = -0.05$ y $s = -0.005$, respectivamente. La función de transferencia del compensador de atraso se convierte en:

$$G(s) = K_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \tag{2}$$

La red de atraso aporta una contribución de ángulo de aproximadamente 4° cerca de un polo dominante en lazo cerrado. Dado que esta contribución angular es relativamente pequeña, el cambio en el nuevo lugar geométrico de las raíces cerca de los polos dominantes deseados es mínimo.

$$G(s) = K_c \frac{s + 0.05}{s + 0.005} \cdot \frac{1.06}{s(s+1)(s+2)} = K \frac{(s + 0.05)}{s(s + 0.005)(s+1)(s+2)} \tag{3}$$

Donde $K = 1.06 \cdot K_c$

El diagrama de bloques del sistema compensado es el siguiente:

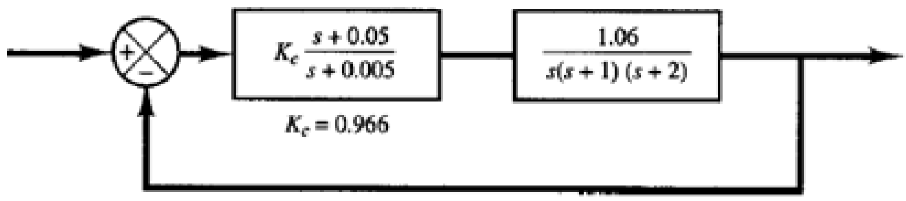

Figure 2: Caption

Seguidamente, se graficó la ubicación geométrica de las raíces del sistema compensado en lazo cerrado:

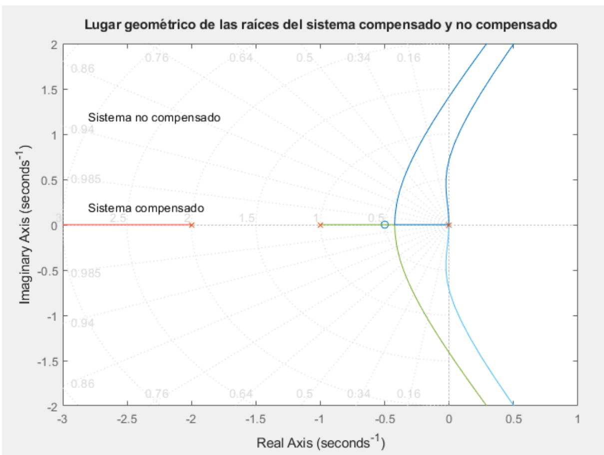

Figure 3: Comparación de la ubicación geométrica de las raíces del sistema original y con compensación.

La ganancia en lazo abierto es:

$$K = \frac{s(s + 0.005)(s+1)(s+2)}{s + 0.05},\ s = -0.31 \pm j0.55 \tag{4}$$

$$K = 1.0235$$

Por tanto, la ganancia del compensador de atraso K_c se determina como:

$$K_c = 0.9656$$

La función de transferencia del compensador de atraso diseñado se expresa como:

$$G_c(s) = \frac{0.9656(20s+1)}{200s+1}$$

Por lo tanto, el sistema compensado tiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$G_c(s) = \frac{1.0235(s+0.05)}{s(s+0.005)(s+1)(s+2)} = \frac{5.12(20s+1)}{s(200s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

La constante de error estático de velocidad K_v se calcula como:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s) = 5.12\,\text{seg}^{-1}$$

En el sistema compensado, el valor de K_v ha aumentado a $5.12\,\text{seg}^{-1}$, lo cual es aproximadamente 9.66 veces mayor que su valor original de $0.53\,\text{seg}^{-1}$. Esto implica que el error en estado estable ante entradas rampa ha disminuido a aproximadamente el 10% del valor del sistema no compensado. De esta manera, se cumple con el objetivo de diseño de incrementar K_v hasta un valor cercano a $5\,\text{seg}^{-1}$.

Dado que el polo y el cero del compensador de atraso están muy cercanos entre sí y cerca del origen, su impacto en la forma del lugar geométrico de las raíces originales es mínimo. Salvo por la aparición de un pequeño lugar geométrico cerrado cerca del origen, las trayectorias de los polos de los sistemas compensado y no compensado son muy similares. Sin embargo, la constante de error estático del sistema compensado es 9.66 veces mayor que la del sistema no compensado.

Los otros dos polos en lazo cerrado para el sistema compensado son:

$$s_3 = -2.326, \quad s_4 = -0.0549$$

La adición del compensador de atraso incrementa el orden del sistema de 3 a 4, añadiendo un nuevo polo en lazo cerrado cerca del cero del compensador. Este nuevo polo, ubicado en $s = -0.0549$, está cerca del cero en $s = -0.05$. Este par (cero y polo) genera una cola pequeña en la respuesta transitoria. Por otro lado, el polo en $s = -2.326$, al estar alejado del eje jw respecto a los polos dominantes, tiene un efecto despreciable sobre la respuesta transitoria. Por ello, los polos dominantes en lazo cerrado se consideran en $s = -0.312 \pm j0.55$.

La frecuencia natural no amortiguada de los polos dominantes del sistema compensado es de $\omega_n = 0.631\,\text{rad/s}$, aproximadamente un 6% menor que la del sistema original ($0.673\,\text{rad/s}$). Esto indica que la respuesta transitoria del sistema compensado será ligeramente más lenta, requiriendo más tiempo para asentarse. Además, el sobrepaso máximo de la respuesta al escalón unitario será mayor. Si estos efectos son aceptables, el diseño del compensador de atraso representa una solución adecuada para el problema planteado.

A continuación, se comparan las respuestas rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado, verificando que el desempeño en estado estable del sistema compensado sea significativamente superior.

Para calcular la respuesta rampa unitaria con MATLAB, se utiliza el comando 'step' aplicado al sistema $\frac{C(s)}{sR(s)}$. Para el sistema compensado, esta función es:

$$C(s) = \frac{1.0235(s+0.05)}{s[s(s+0.005)(s+1)(s+2)+1.0235(s+0.05)]}$$

Simplificando, se obtiene:

$$C(s) = \frac{1.0235s+0.0512}{s^5+3.005s^4+2.015s^3+1.0335s^2+0.0512s}$$

De manera similar, la función $\frac{C(s)}{sR(s)}$ para el sistema no compensado es:

$$\frac{C(s)}{sR(s)} = \frac{1.06}{s[s(s+1)(s+2)+1.06]} = \frac{1.06}{s^4+3s^3+2s^2+1.06s}$$

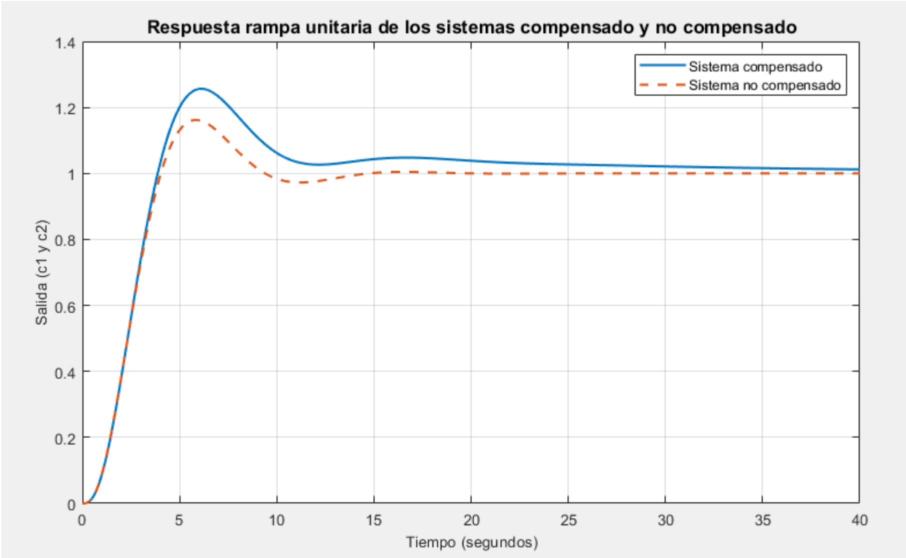

Figure 4: Comparación de la respuesta al escalón del sistema original y con compensación.

```
close all;
numc = [0 0 0 1.0235 0.0512]; % Numerador del sistema compensado
denc = [1 3.005 2.015 1.0335 0.0512]; % Denominador del sistema compensado
num = [0 0 0 1.06]; % Numerador del sistema no compensado
den = [1 3 2 1.06]; % Denominador del sistema no compensado

t = 0:0.1:40;

[c1, x1, t] = step(numc, denc, t); % Sistema compensado
[c2, x2, t] = step(num, den, t);   % Sistema no compensado

plot(t, c1, '-', 'LineWidth', 1.5); % Sistema compensado
hold on;
plot(t, c2, '--', 'LineWidth', 1.5); % Sistema no compensado
grid on;

title('Respuesta rampa unitaria de los sistemas compensado y no compensado', '
    FontSize', 12);
xlabel('Tiempo (segundos)', 'FontSize', 10);
ylabel('Salida (c1 y c2)', 'FontSize', 10);

legend('Sistema compensado', 'Sistema no compensado');

hold off;
```