

TAREA N2 TERCER CORTE CONTROL 1- EJERCICIO 9.5 DE OGATA, 5TA EDICIÓN

Obtener la matriz de transición de estados $\varphi(t)$ del siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Y obtener la inversa de la matriz de transición de estados $\varphi^{-1}(t)$.

Para el sistema dado, se tiene una matriz A:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

La matriz de transición de estados está dada por la siguiente ecuación:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}]$$

Conociendo la siguiente igualdad:

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

La inversa de $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que la matriz de transición de estados es:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Y notando que $\varphi^{-1}(t) = \varphi(-t)$, se obtiene la inversa de la matriz de transición de estados de la siguiente manera:

$$\Phi^{-1}(t) = e^{-\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^t - e^{2t} & e^t - e^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} & -e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix}$$