Controlador Proporcional Derivativo Ideal

Mateo Salamanca Pulido
matsalamancap@udistrital.edu.co
20211005107

Octubre, 2024

1 Introducción

En el presente documento se pretende dar solución al Ejercicio 9.3 del libro *Control Systems Engineering* de Norman Nise, séptima edición, en el que se realiza el diseño de un compensador ideal derivativo para un sistema.

2 Ejercicio

Dado el siguiente sistema, diseñar un compensador ideal derivativo para producir un *overshoot* del 16% con una reducción de tres veces el tiempo de establecimiento

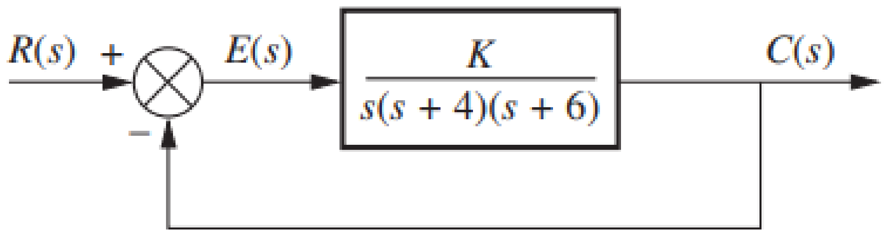

Figure 1: Sistema de control con realimentación. *Tomado de Control Engineering System, Norman Nise, séptima edición.*

3 Solución

Inicialmente, se calcula el coeficiente de amortiguamiento ζ para un porcentaje de *overshoot* dado mediante la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
\zeta &= \sqrt{\frac{\ln(OS)^2}{\pi^2 + \ln(OS)^2}} \\
\zeta &= \sqrt{\frac{\ln(0.16)^2}{\pi^2 + \ln(0.16)^2}} \\
\zeta &\approx 0,5039
\end{aligned} \tag{1}$$

Seguidamente, se procedió a encontrar la ubicación del polo dominante que cumple con la condición del *overshoot* dado desde MATLAB:

Obteniendo así, que el par de polos dominantes son $s \approx -1,2 \pm j2,07$ y que la ganancia es $K \approx 43.6$; ahora, se calcula el tiempo de establecimiento del sistema sin compensación de la siguiente manera:

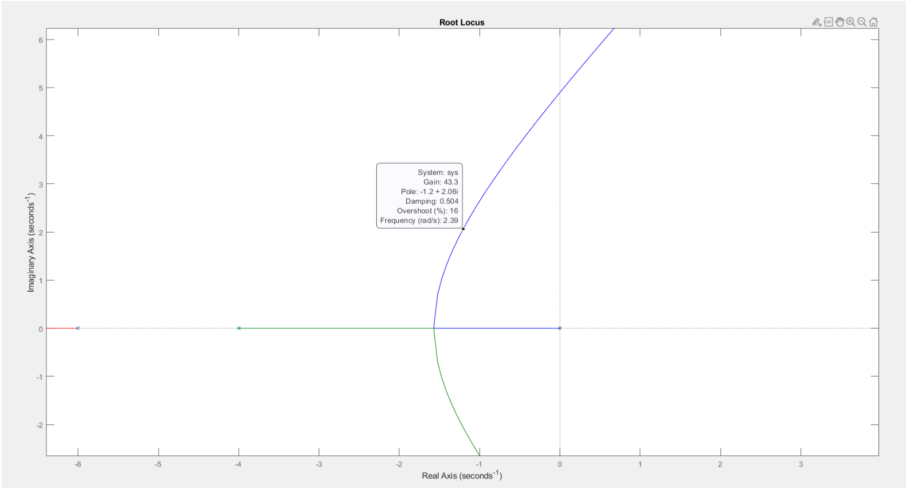

Figure 2: Ubicación del polo con *overshoot* del 16%. *Autoría Propia.*

$$T_{s1} = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{1,2} \approx 3,33 \tag{2}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que se debe agregar una compensación al sistema, que reduzca tres veces el tiempo de establecimiento del original, se procede a calcular el nuevo tiempo de establecimiento:

$$T_{s2} = \frac{T_{s1}}{3} = \frac{3,33}{3} = 1,11 \tag{3}$$

Posteriormente, se calcula la parte real del polo del sistema compensado con la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{4}{T_{s2}} = \frac{4}{1,11} = 3,6036 \tag{4}$$

Una vez obtenida la parte real del polo, y conociendo el factor de amortiguamiento deseado en el sistema compensado, se calcula el ángulo del nuevo polo así:

$$\begin{aligned} &\zeta = cos(\phi) \\ &\phi = cos^{-1}(\zeta) = cos^{-1}(0,5039) = 59,7416 \end{aligned} \tag{5}$$

Luego, se calcula la parte imaginaria del polo mediante trigonometría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \tan(\phi) &= \frac{\omega_d}{\sigma} \\ \omega_d &= \sigma \cdot \tan(\phi) = 3,6036 \cdot \tan(59,7416) = 6,1771 \end{aligned} \tag{6}$$

Seguidamente, se grafica la ubicación de los polos de la planta y el deseado del sistema compensado en el plano complejo:

Luego, se procede a calcular la sumatoria de los ángulos trazados en la gráfica anterior:

$$\begin{aligned} &\alpha = \tan^{-1}(\frac{6,1771}{0-3,6036}) = -59,7415 \to 180 - 59,7415 = 120,2585 \\ &\beta = \tan^{-1}(\frac{6,1771}{4-3,6036}) = 86,3282 \\ &\gamma = \tan^{-1}(\frac{6,1771}{6-3,6036}) = 68,7963 \\ &\sum \angle = 275,383 \end{aligned} \tag{7}$$

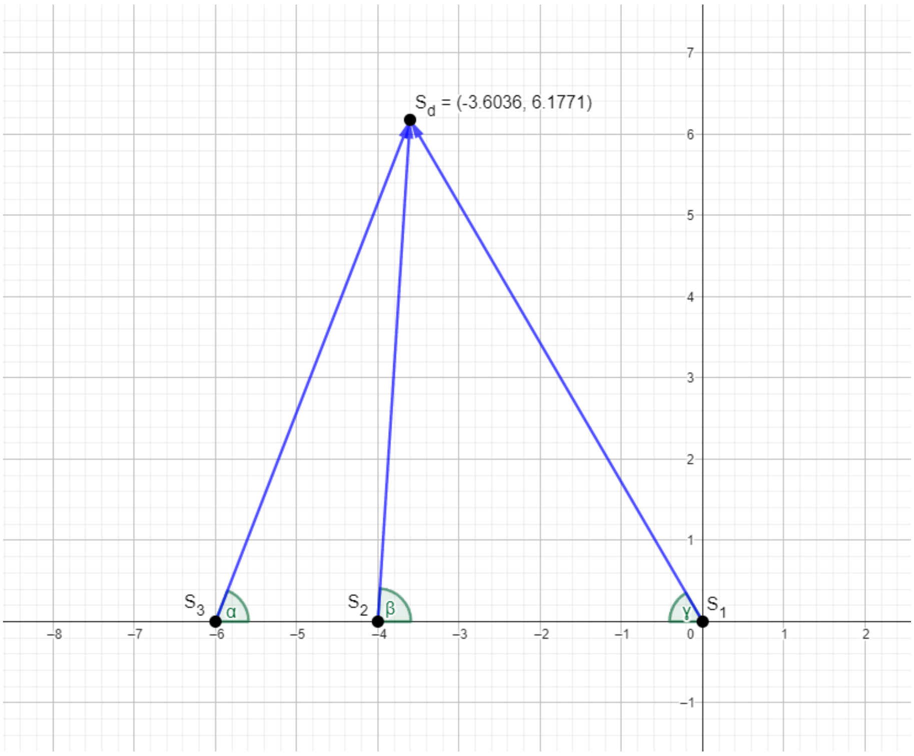

Figure 3: Ubicación geométrica de los polos de la planta y el polo deseado. *Autoría Propia.*

Ahora bien, la contribución angular que debe poseer el compensador debe ser de $275,383 - 180 = 95,383$, por lo tanto, se calcula la parte real de un nuevo polo que cumpla con dicha condición de la siguiente manera:

$$\tan(180 - 95,383) = \frac{6,1771}{3,6036 - \sigma_1} \qquad (8)$$
$$\sigma \approx 3,0215$$

Obteniendo así, una nueva gráfica con la ubicación geométrica de los polos del sistema compensado:

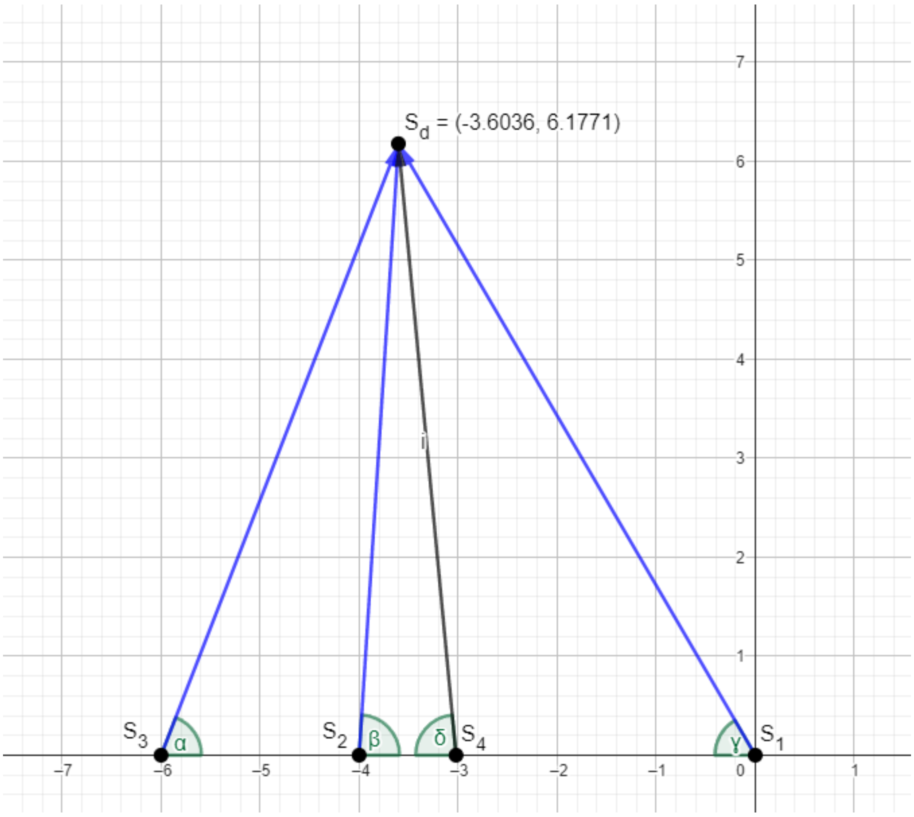

Figure 4: Ubicación geométrica de los polos del sistema compensado. *Autoría Propia.*

Finalmente, se grafica la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado para comparar los resultados del compensador:

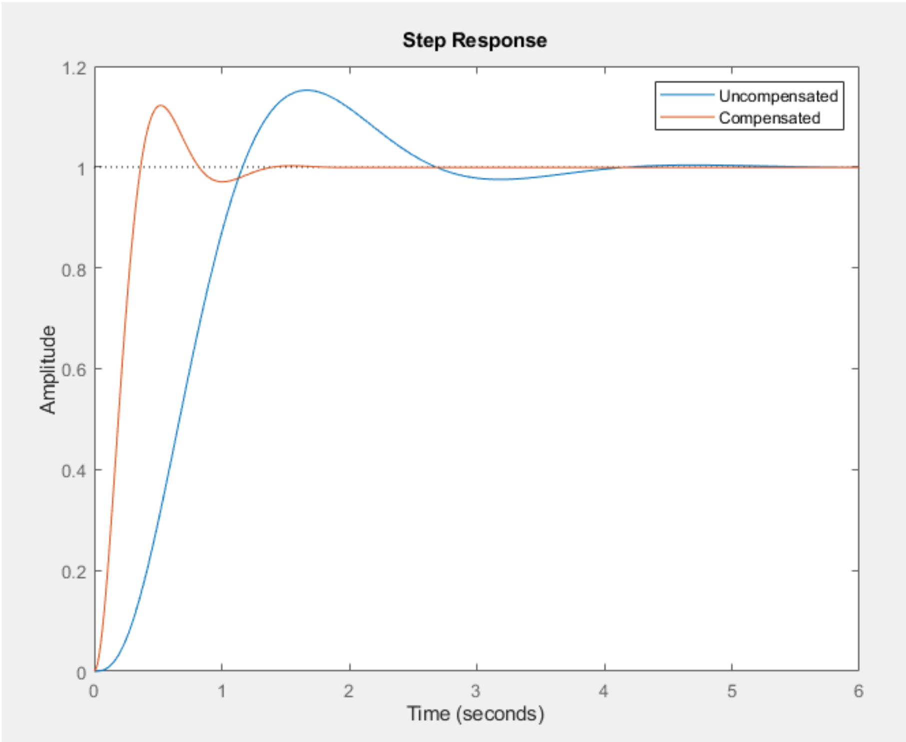

Figure 5: Contraste de la respuesta al escalón de los sistemas compensado y no compensado. *Autoría Propia.*

4 Conclusiones

Al contrastar la respuesta al escalón de los sistemas no compensado y compensado, como lo muestra la figura 5, es posible observar que se cumplió con el objetivo de reducir el tiempo de establecimiento a una tercera parte del sistema en lazo cerrado sin compensación; sin embargo, el porcentaje de *overshoot* también disminuyó, lo cual se buscaba mantener constante. De igual forma, el libro enfatiza que el proceso realizado busca convertir la función de transferencia del sistema en una de segundo orden, sin embargo, esto no se logró debido a que la ubicación geométrica entre el tercer polo del sistema y el cero del compensador no son lo suficientemente cercanas para cancelarse, por lo tanto el sistema sigue siendo de mayor orden al esperado.