Controlador en adelanto ***Lead***

Mateo Salamanca Pulido
matsalamancap@udistrital.edu.co
20211005107

Octubre, 2024

1 Introducción

En el presente documento se pretende dar solución al Ejemplo 7.1 del libro *Modern Control Engineering* de Ogata, tercera edición, en el que se realiza el diseño de un compensador de adelanto para un sistema.

2 Ejercicio

Se tiene un sistema con la siguiente función de transferencia:

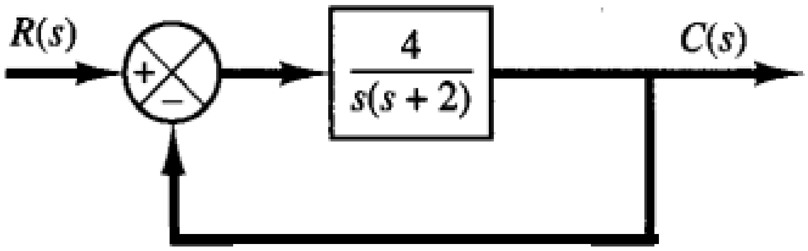

Figure 1: Sistema de control no compensado con realimentación. *Tomado del libro Modern Control Engineering de Ogata, 3ra edición*

3 Solución

Inicialmente se tiene que la función de transferencia del sistema en lazo cerrado es la siguiente:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} \tag{1}$$

De igual manera se tiene la ubicación geométrica de las raíces en la siguiente figura:

Obteniendo que los polos del sistema en lazo cerrado se encuentran ubicados en $-1 \pm j\sqrt{3}$

El factor de amortiguamiento de los polos en lazo cerrado es $\zeta = 0,5$. La frecuenia natural no amortiguada de los polos en lazo cerrado es de 2 rad/s y la constante de error estática de velocidad es de 2 seg^{-1}. Se propone modificar los polos para obtener una frecuencia natural no amortiguada $\omega_n = 4$ rad/seg sin cambiar el factor de amortiguamiento.

Teniendo en cuenta que el factor de amortiguamiento de un par de polos complejos conjugados se expresa en términos del ángulo que se mide a partir del eje imaginario, como se muestra a continuación:

Por lo tanto, se tiene la siguiente ecuación para el factor de amortiguamiento:

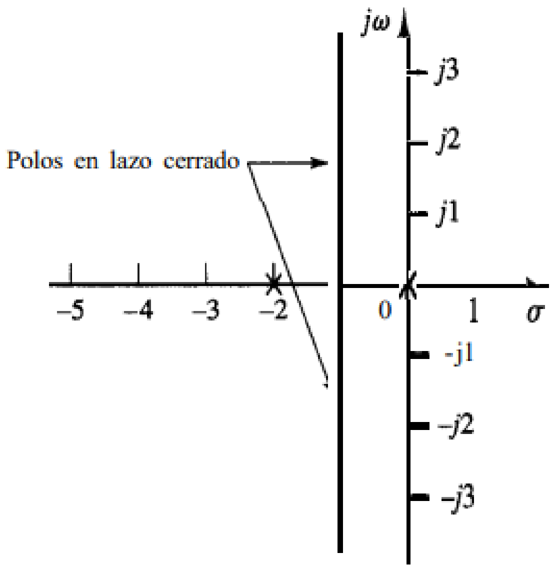

Figure 2: Ubicación geométrica de las raíces del sistema sin compensar en lazo abierto y cerrado. *Tomado del libro Modern Control Engineering de Ogata, 3ra edición*

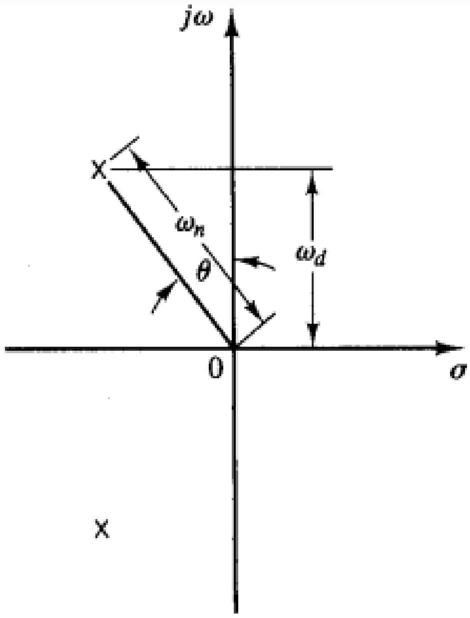

Figure 3: Factor de amortiguación en el plano complejo. *Tomado del libro Modern Control Engineering de Ogata, 3ra edición*

$$\zeta = \mathrm{sen}(\theta) \tag{2}$$

Entonces se dice que el factor de amortiguamiento determina la ubicación angular de los polos teniendo en cuenta que la distancia del origen está dada por la frecuencia natural ω_n; lo que indica que los polos deseados en lazo cerrado se encuentran ubicados en $s = -2 \pm j2\sqrt{3}$.

De manera ideal, sería posible trasladar los polos del sistema original a los requeridos con un ajuste de ganancia, sin embargo, esto no se cumple en el sistema analizado, por lo cual se optará por insertar un compensador en adelanto en la trayectoria directa; para ello, se realiza el procedmimiento general de diseño del compensador *lead*:

1. Encontrar la suma de los ángulos de uno de los polos dominantes en lazo cerrado con los polos y ceros de lazo abierto del sistema original para determinar el ángulo ϕ necesario para que la suma sea igual a $\pm 180(2k+1)$.

   Teniendo en cuenta que el sistema original en lazo abierto tiene una función de transferencia $G(s)$, al agregar el compensador en adelanto se obtendrá lo siguiente:

$$G_c(s)G(s) = \left(K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{aT}} \right) G(s) \tag{3}$$

   En donde $0 < a < 1$, por lo tanto existen diferentes combinaciones de valores de a y T que generen la contribución de ángulo necesaria.

2. Determinar las ubicaciones del cero y el polo del compensador en adelanto; para garantizar un mejor desempeño en el sistema, se debe buscar el valor más grande posible de a para obtener un valor de K_v grande. Se procederá a dibujar una línea horizontal que pase por el punto P de la siguiente figura, la cual es la ubicación deseadad de uno de los polos en lazo cerrado, seguidamente, se dibuja una línea entre el punto P y el origen, y se debe dividir de manera equitativa el ángulo formado entre las líneas PA y PO para obtener la recta PB, luego se dibujan dos líneas PC y PD que formen ángulos de $\pm\phi/2$ con la línea PB; a partir de los cortes con el eje horizontal de las dos últimas líneas, se obtienen las ubicaciones del cero y del polo de la red en adelanto, esto garantizará que el compensador haga de P un punto sobre el lugar geométrico de las raíces del sistema compensado. La ganancia en lazo abierto se determina mediante el uso de la condición de magnitud.

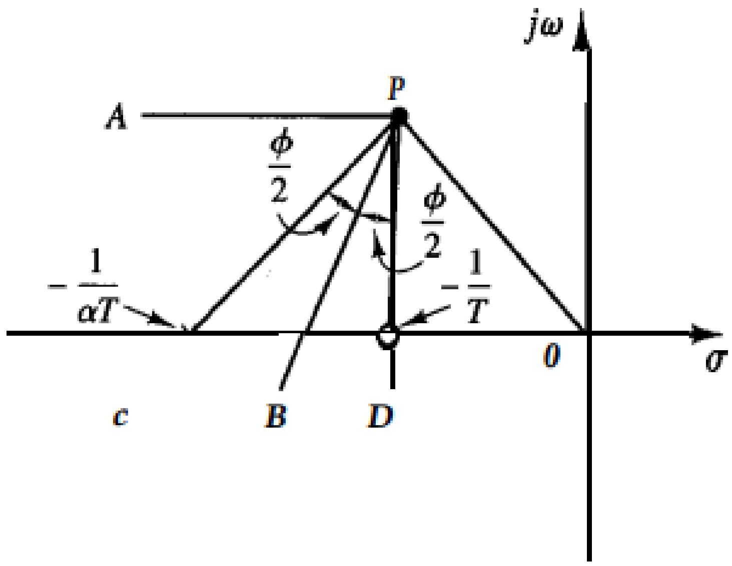

Figure 4: Tratamiento del plano complejo. *Tomado del libro Modern Control Engineering de Ogata, 3ra edición*

En el sistema actual, el ángulo de G(s) del polo en lazo cerrado deseado es:

$$\angle \frac{4}{s(s+2)}\Big|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = -210 \tag{4}$$

Lo cual indica que el lugar geométrico de las raíces a pasar por el polo en lazo cerrado deseado, el compensador debe contribuir un ángulo $\phi = 30$

3. A partir del paso anterior, se determina el cero y el polo del compensaddor con la siguiente gráfica:

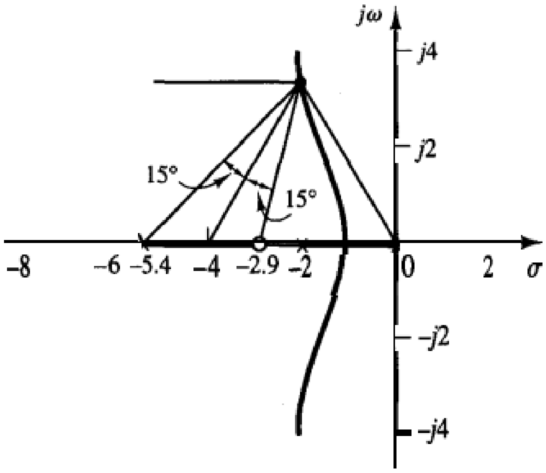

Figure 5: Ubicación geométrica de las raíces del sistema compensado. *Tomado del libro Modern Control Engineering de Ogata, 3ra edición*

Lo cual indica un cero en $s = -2,9$ y un polo en $s = -5,4$; con estos datos, es posible calcular T y a:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2,9} = 0,345 \\ aT &= \frac{1}{5,4} = 0,185 \\ a &= 0,537 \end{aligned} \tag{5}$$

Esto nos da una función de transferencia en lazo abierto del sistema compensado con la siguiente forma:

$$G_c(s)G(s) = \frac{4K_c(s+2,9)}{s(s+2)(s+5,4)} = \frac{K(s+2,9)}{s(s+2)(s+5,4)} \tag{6}$$

La ganancia se calcula a partir de la condición de magnitud con la siguiente ecuación:

$$\Big|\frac{K(s+9)}{s(s+2)(s+5,4)}\Big|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1 \tag{7}$$

Obteniendo una ganancia $K = 18,7$. Finalmente, la constante K_c del compensador en adelanto es $K_c = 18,7/4 = 4,68$, obteniendo así una función de transferencia del compensador final como se muestra a continuación:

$$G_c(s) = 4,68\frac{s+2,9}{s+5,4} \tag{8}$$

4. Por último, se obtiene que la función de transferencia del sistema compensado en lazo cerrado es:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{18,7(s+2,9)}{s(s+2)(s+5,4)+18,7(s+2,9)} \tag{9}$$

A continuación se graficará la respuesta al escalón del sistema original y el sistema compensado en lazo cerrado:

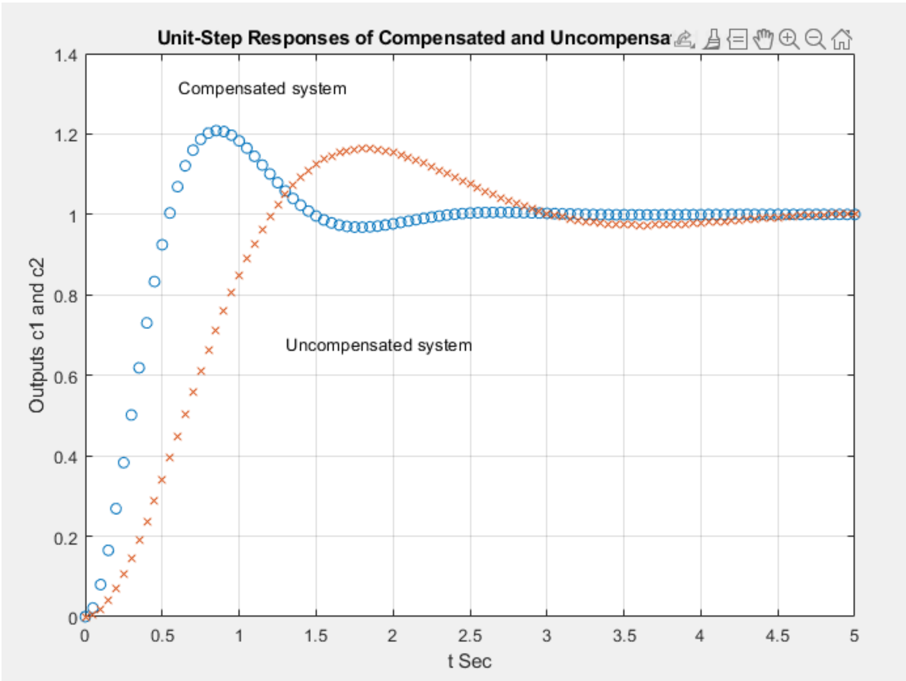

Figure 6: Comparación de la respuesta al escalón del sistema en lazo cerrado, sin y con compensador. *Autoría Propia.*