Controlador de adelanto-atraso de fase *Lead-Lag*

Mateo Salamanca Pulido
matsalamancap@udistrital.edu.co
20211005107

Octubre, 2024

1 Introducción

En el presente documento se pretende dar solución al Ejemplo 7.3 del libro *Modern Control Engineering* de Ogata, tercera edición, en el que se realiza el diseño de un compensador de adelanto-atraso para un sistema.

2 Ejercicio

Se tiene un sistema con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+0,5)} \tag{1}$$

Se requiere que el factor de amortiguamiento de los polos dominantes en lazo cerrado sea de 0.5, que la frecuencia natural sea de 5 rad/s y que la constante de error estático sea de 80 s^{-1}

3 Solución

El compensador de atraso-adelanto posee una función de transferencia de la siguiente forma:

$$G_c(s) = K_c \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{T_1}} \right) \left(\frac{s + \frac{1}{T_1}}{s + \frac{\gamma}{\beta T_1}} \right) \tag{2}$$

Es importante tener en cuenta que γ y β poseen valores diferentes; entonces, cumpliendo con la ecuación de ángulos, es posible determinar los polos dominantes para el lazo cerrado deben ser:

$$\angle \frac{4}{s(s+0,5)} = -235 \tag{3}$$

$$s = -2,5 \pm j4,33 \tag{4}$$

La etapa de adelanto de pase del compensador debe proporcionar una contribución de 5,5° para que la ubicación geométrica de las raíces tenga el lugar deseado para los polos dominantes del sistema en lazo cerrado, para ello, es necesario determinar la ubicación del cero y del polo que generen dicho aporte; se colocará un cero en $s = -0,5$, con el fin de cancelar el polo original del sistema, y mediante la geometría del triangulo formado, se determina que el polo debe estár ubicado en $s = -5,021$, por lo tanto se obtiene la siguiente función de transferencia de la etapa de adelanto:

$$K_c \frac{s+0,5}{s+5,021} \tag{5}$$

De tal manera que se obtienen los valores de $T_1 = 2$ y $\gamma = 10,04$. Ahora bien, se calcula el valor de la ganancia proporcional mediante la condición de magnitud:

$$\begin{aligned}\left|K_c\frac{s+0,5}{s+5,021}\cdot\frac{4}{s+0,5}\right| = 1 \\ K_c = \left|\frac{s(s+5,021)}{4}\right|_{s=-2,5+j4,33} = 6,26\end{aligned} \tag{6}$$

La parte de atraso de fase del compensador de diseña determinando el valor de β que cumpla con el parámetro de diseño de la constante de error estátivo de velocidad:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_c(s)G(s) = \lim_{s\to 0} sK_c\frac{\beta}{\gamma} \tag{7}$$

Solucionando para beta, se obtiene un valor de $\beta = 16,04$. Ahora, se elige un valor para T_2 lo sifucientemente grande que cumpla la siguiente condición:

$$\begin{aligned}\left|\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{16,04\cdot T_2}}\right|_{s=-2,5+j4,33} = 1 \\ -5 < \angle\frac{s+\frac{1}{T_2}}{s+\frac{1}{16,04\cdot T_2}} < 0\end{aligned} \tag{8}$$

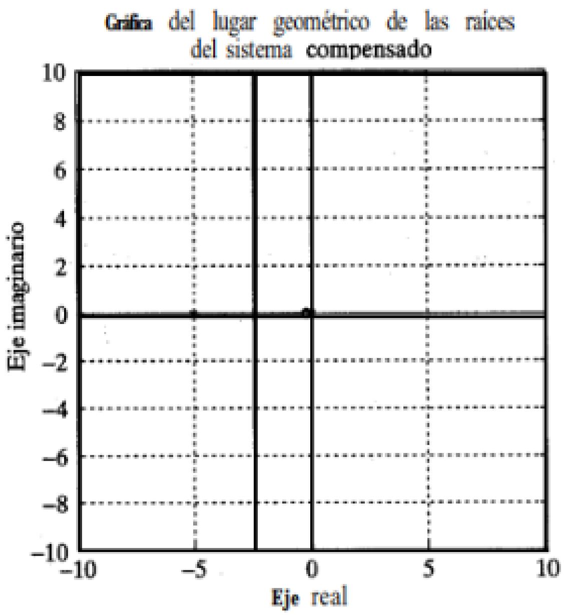
Se elige $T_2 = 5$ debido a que satisface las ecuaciones anteriores; entonces, la función de transferencia del compensador *lead-lag* es:

$$G_c(s) = \frac{10(2s+1)(5s+1)}{(0,1992s+1)(80,19s+1)} \tag{9}$$

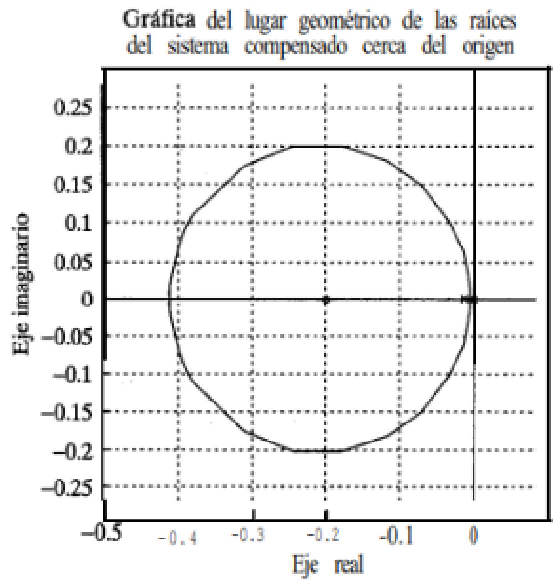
Finalmente, la función de transferencia incluyendo la planta será:

$$G_c(s)G(s) = \frac{25,04(s+0,2)}{s(s+5,02)(s+0,01247)} \tag{10}$$

Gracias a la cancelación del polo en $s = -0,5$, el sistema compensado resulta ser de tercer orden, sin embargo, el desarrollo práctico del análisis anterior no cumple que estos terminos se cancelen debido a que al obtener el modelo matemátivo de un sistema, se requiere un proceso de aproximación, lo que resulta en una desviación en las constantes de tiempo. A continuación se muestra la gráfica de la ubicación geomeétrica de las raíces del sistema compensado:



Dada la ubicación deseada s=-2.5j4.33. ahora bien los nuevos polos del lazo cerrado se ubican en s=-2.4123j4.2756.(Obteniendo el nuevo factor de amortiguamiento =0.491).De este modo, el sistema



compensado cumple con todas las especificaciones de desempeño requeridas. El tercer polo en lazo cerrado del sistema compensado se ubica en s=-0.2078. Dado que este polo se encuentra muy cerca del cero en s = -0.2 , su efecto sobre la respuesta es pequeño. (Cabe destacar que, en general, cuando un polo y un cero están muy cercanos entre sí sobre el eje real negativo cerca del origen, su combinación genera una larga cola de pequeña amplitud en la respuesta transitoria).

Las curvas de respuesta a un escalón unitario y las curvas de respuesta a una rampa unitaria, antes y después de la compensación, se muestran a continuación: