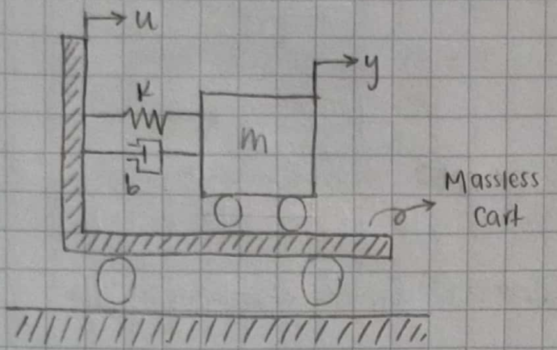
Nombre: Mateo Salamanca Pulido. Código: 20211005107. Sistemas Dinámicos Gr. 005-1 27/05/24

Ejercicios Preparcial Segundo corte

1. Ejemplo 3.3 Ogata: Considerar el siguiente sistema, obtener el diagrama de bloques, diagrama de flujo de señal y espacio de estados



- $u(t)$ es el desplazamiento del carro sin masa entrada del sistema
- $y(t)$ es el desplazamiento de la masa de interes: salida del sistema
- Considerando $u \gg y$

- $\sum F = ma = m\ddot{y}$

$$m\ddot{y} = b(\dot{u}-\dot{y}) + k(u-y)$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = b\dot{u} + ku$$

$$Y(s)[ms^2+bs+k] = U(s)[bs+k]$$

$$\hookrightarrow \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{bs+k}{ms^2+bs+k}$$

- Forma estándar de la ecuación diferencial.

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2 y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2 u$$

$$\hookrightarrow a_1 = \frac{b}{m} \; ; \; a_2 = \frac{k}{m} \; ; \; b_0 = 0 \; ; \; b_1 = \frac{b}{m} \; ; \; b_2 = \frac{k}{m}.$$

- Teorema: $\beta_0 = b_0 = 0$

$$\beta_1 = b_1 - a_1\beta_0 = b/m$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1\beta_1 - a_2\beta_0 = k/m - (b/m)^2.$$

$\therefore$ $\dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u = x_2 + \frac{b}{m}u$

$$\dot{x}_2 = -a_2x_1 - a_1x_2 + \beta_2 u = \frac{-k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \left[\frac{k}{m} - \frac{b^2}{m^2}\right]u.$$

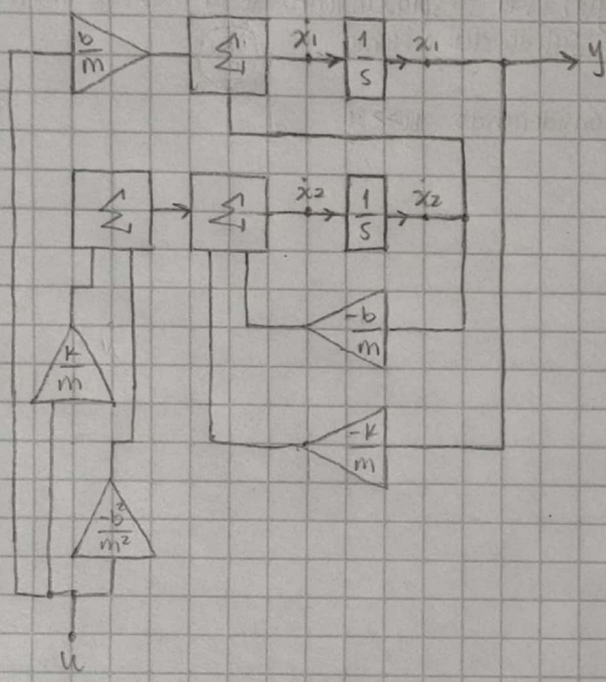
$$y = x_1$$

• Espacio de estados

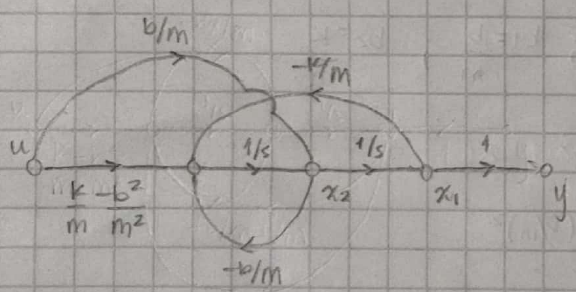
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & -b/m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b/m \\ k/m - b^2/m^2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

• Diagrama de bloques:



• Diagrama de flujo de señal.



2. Ejercicio A-3-9 Libro Ogata. Considere el siguiente sistema de servomotor, obtener FE, DB y DFS

- Voltaje de armadura $e_a = K_1 e_v$ es la entrada del sistema

$$e_a = K_1 e_v = L\frac{di_a}{dt} + R_a i_a + K_3 \frac{d\theta}{dt}$$

- Ecuación de equilibrio del torque

$$K_2 i_a = J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} + b_0 \frac{d\theta}{dt} = T$$

- Función de Transferencia $G(s) = \frac{\theta(s)}{E_v(s)} = \frac{K_1 K_2}{s(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3 s}$

- Se asume que la relación de tren de engranajes es $C(s) = n\theta(s)$; $E_v(s) = K_0 E(s)$

- $G(s) = \frac{C(s)}{\theta(s)} \cdot \frac{\theta(s)}{E_v(s)} \cdot \frac{E_v(s)}{E(s)} = \frac{K_0 K_1 K_2 n}{s[(L_a s + R_a)(J_0 s + b_0) + K_2 K_3]} = \frac{C(s)}{E(s)}$

↳ De la anterior función de transferencia es posible despreciar el término La y referenciar las demás magnitudes respecto al eje de salida de la siguiente manera:

$$J = \frac{J_0}{n^2} \quad ; \quad B = \frac{b_0 + \frac{K_2 K_3}{R_a}}{n^2} \quad ; \quad K = \frac{K_0 K_1 K_2}{n R_a}$$

- $G(s) = \frac{K}{Js^2 + Bs} = \frac{C(s)}{E(s)}$

$$E(s)K = C(s)[Js^2 + Bs]$$

$$Ke = J\ddot{c} + B\dot{c}$$

$$\hookrightarrow \ddot{c} = \frac{Ke}{J} - \frac{B}{J}\dot{c}$$

- Variables de estado

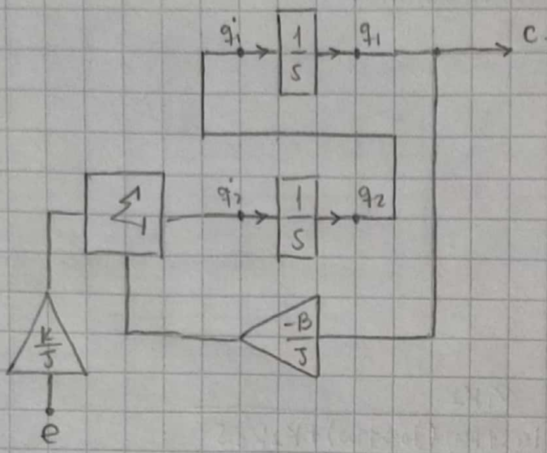
$$q_1 = c$$
$$q_2 = \dot{q}_1 = \dot{c}$$
$$\dot{q}_2 = \ddot{q}_1 = \ddot{c}$$

- Espacio de estados

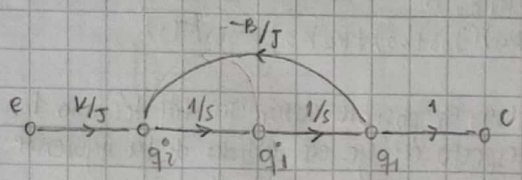
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -B/J & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K/J \end{bmatrix} e$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} e$$

• Diagrama de bloques:



• Diagrama de flujo de señal:



3. Ejemplo 2.23 Libro Norman Nise: Obtener espacio de estados, diagrama de bloques y diagrama de flujo de señal del siguiente sistema.

- $\dfrac{\theta_L(s)}{E_a(s)} = \dfrac{0{,}0417}{s(s+1{,}667)}$

$$\ddot{\theta} + 1{,}667\dot{\theta} = 0{,}0417 e_a$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} = 0{,}0417 e_a - 1{,}667\dot{\theta}$$

- Variables de estado

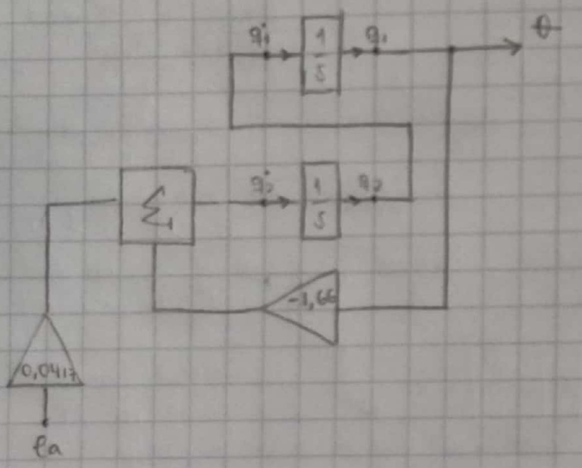
$$q_1 = \theta$$
$$q_2 = \dot{q}_1 = \dot{\theta}$$
$$\dot{q}_2 = \ddot{q}_1 = \ddot{\theta}$$

- Espacio de estados

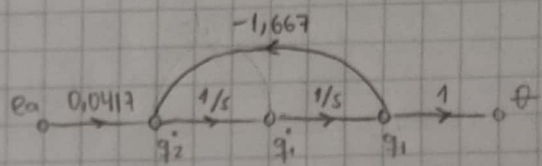
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1{,}667 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0{,}0417 \end{bmatrix} e_a$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} e_a$$

- Diagrama de bloques



- Diagrama de flujo de señal



Día	Mes	Año	Hora	Institución
28	05	24		Universidad Distrital Francisco José de Caldas

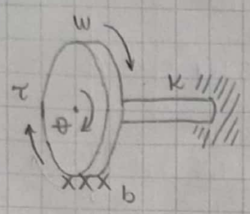
Alumno	Código	Materia
Mateo Salamanca Pulido - 20211005107		Sistemas Dinámicos

Curso	Bimestre	Semestre	Salón	Hoja No ... de ...	CALIFICACIÓN
Gr. 005-1					

Profesor: Henry Borrero Guerrero

Parcial Segundo Corte.

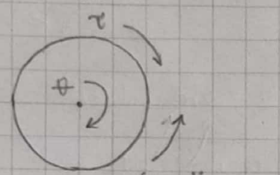
1. Para el siguiente sistema rotacional, determinar



a) la representación en el espacio de estados, diagrama de bloques, diagrama de flujo de señal

b) Función de transferencia

*



$b\dot{\theta} + J\ddot{\theta} + K\theta$

$\Sigma F = \tau$

$\tau = J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + K\theta$

$\hookrightarrow \ddot{\theta} = \frac{\tau}{J} - \frac{K}{J}\theta - \frac{b}{J}\dot{\theta}$

Variables de estado

$q_1 = \theta$

$q_2 = \dot{q}_1 = \dot{\theta}$

$\dot{q}_2 = \ddot{q}_1 = \ddot{\theta}$

a) Espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/J & -b/J \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \end{bmatrix} \tau$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + 0\,\tau$$

b) Función de Transferencia Transformada de laplace

$\tau(s) = s^2 J\theta(s) + sb\theta(s) + K\theta(s)$

$\tau(s) = \theta(s)\left[Js^2 + bs + K\right]$

$\hookrightarrow \frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{Js^2 + bs + K}$

Diagrama de bloques:

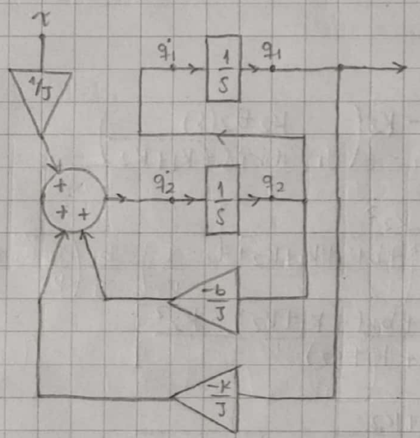
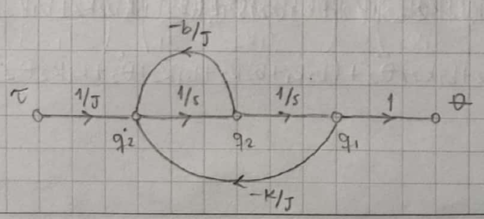
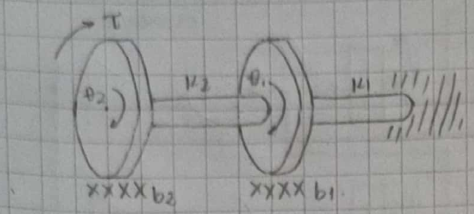


Diagrama de flujo de señal



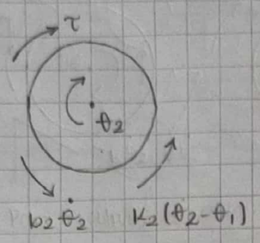
2. Para el siguiente sistema rotacional considere $\theta_2 > \theta_1$, determinar:



a) la función de transferencia relacionando θ_2 y τ.

b) la representación en espacio de estados, diagrama de bloques y el diagrama de flujo de señal, todo en términos de θ_2

* Para el disco 2:



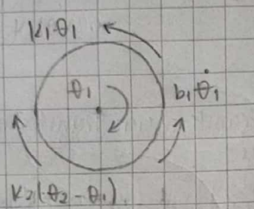
$$\sum F = J_2\ddot{\theta}_2$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 = \tau - b_2\dot{\theta}_2 - K_2(\theta_2-\theta_1) \qquad \text{(eq 1)}$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta}_2 = \frac{\tau}{J_2} - \frac{b_2\dot{\theta}_2}{J_2} - \frac{K_2\theta_2}{J_2} + \frac{K_2\theta_1}{J_2}$$

$$\hookrightarrow s^2 J_2\theta_2(s) = \tau(s) - sb_2\theta_2(s) - K_2\theta_2(s) + K_2\theta_1(s)$$

* Para el disco 1:



$$J_1\ddot{\theta}_1 = K_2(\theta_2-\theta_1) - K_1\theta_1 - b_1\dot{\theta}_1$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta}_1 = \frac{K_2\theta_2}{J_1} - \left(\frac{K_2+K_1}{J_1}\right)\theta_1 - \frac{b_1\dot{\theta}_1}{J_1}$$

$$\hookrightarrow s^2 J_1\theta_1(s) = K_2\theta_2(s) - K_2\theta_1(s) - K_1\theta_1(s) - sb_1\theta_1(s) \qquad \text{(eq 2)}$$

* Despejando $\theta_1(s)$ de la ecuación 2:

$$s^2 J_1\theta_1(s) + K_2\theta_1(s) + K_1\theta_1(s) + sb_1\theta_1(s) = K_2\theta_2(s)$$

$$\hookrightarrow \theta_1(s) = \frac{K_2\theta_2(s)}{J_1s^2 + b_1s + K_1 + K_2}$$

* Reemplazando $\theta_1(s)$ en ecuación 1:

$$\tau(s) = s^2 J_2\theta_2(s) + sb_2\theta_2(s) + K_2\theta_2(s) - K_2\left(\frac{K_2\theta_2(s)}{J_1s^2+b_1s+K_1+K_2}\right)$$

$$\tau(s) = \theta_2(s)\left[s^2J_2 + sb_2 + K_2 - \frac{K_2^2}{J_1s^2+b_1s+K_1+K_2}\right]$$

$$\tau(s) = \theta_2(s)\left[\frac{(J_2s^2+b_2s+K_2)(J_1s^2+b_1s+K_1+K_2) - K_2^2}{(J_1s^2+b_1s+K_1+K_2)}\right]$$

$$\hookrightarrow \frac{\theta_2(s)}{\tau(s)} = \frac{J_1s^2+b_1s+K_1+K_2}{(J_2s^2+b_2s+K_2)(J_1s^2+b_1s+K_1+K_2) - K_2^2}$$

$$\frac{\theta_2(s)}{\tau(s)} = \frac{J_1s^2+b_1s+K_1+K_2}{J_1J_2s^4 + (J_2b_1+J_1b_2)s^3 + (J_2K_1+J_2K_2+J_1K_2+b_1b_2)s^2 + (b_2K_1+b_2K_2+b_1K_2)s + K_1K_2}$$

$$\blacktriangleright\ J_1J_2\ddddot{\theta}_2 + (J_2b_1+J_1b_2)\dddot{\theta}_2 + (J_2K_1+J_2K_2+J_1K_2+b_1b_2)\ddot{\theta}_2 + (b_2K_1+b_2K_2+b_1K_2)\dot{\theta}_2 + K_1K_2\theta_2$$

$$= J_1\ddot{\tau} + b_1\dot{\tau} + (K_1+K_2)\tau$$

* $\ddddot{\theta}_2+\left(\frac{b_1}{J_1}+\frac{b_2}{J_2}\right)\dddot{\theta}_2+\left(\frac{K_1}{J_1}+\frac{K_2}{J_1}+\frac{K_2}{J_2}+\frac{b_1b_2}{J_1J_2}\right)\ddot{\theta}_2+\left(\frac{b_2K_1}{J_1J_2}+\frac{b_2K_2}{J_1J_2}+\frac{b_1K_2}{J_1J_2}\right)\dot{\theta}_2+\left(\frac{K_1K_2}{J_1J_2}\right)\theta_2$

$$=\frac{\ddot{\tau}}{J_2}+\frac{b_1}{J_1J_2}\dot{\tau}+\frac{(K_1+K_2)}{J_1J_2}\tau$$

$\hookrightarrow a_1=\frac{b_1}{J_1}+\frac{b_2}{J_2}$

$a_2=\frac{K_1+K_2}{J_1}+\frac{K_2}{J_2}+\frac{b_1b_2}{J_1J_2}$

$a_3=\frac{b_2K_1}{J_1J_2}+\frac{b_2K_2}{J_1J_2}+\frac{b_1K_2}{J_1J_2}$

$a_4=\frac{K_1K_2}{J_1J_2}$

$\hookrightarrow b_0=0$

$b_1=0$

$b_2=\frac{1}{J_2}$

$b_3=\frac{b_1}{J_1J_2}$

$b_4=\frac{(K_1+K_2)}{J_1J_2}$

$\rightarrow \beta_0=b_0=0$

$\beta_1=b_1-a_1\beta_0=0$

$\beta_2=b_2-a_1\beta_1-a_2\beta_0=1/J_2$

$\beta_3=b_3-a_1\beta_2-a_2\beta_1-a_3\beta_0=\frac{b_1}{J_1J_2}-\left(\frac{b_1}{J_1}+\frac{b_2}{J_2}\right)\frac{1}{J_2}=\frac{b_2}{J_2^2}$

$\beta_4=b_4-a_1\beta_3-a_2\beta_2=\frac{K_1+K_2}{J_1J_2}-\left[\frac{b_1}{J_1}+\frac{b_2}{J_2}\right]\left[\frac{b_1}{J_1J_2}-\frac{1}{J_2}\left(\frac{b_1}{J_1}+\frac{b_2}{J_2}\right)\right]-\frac{1}{J_2}\left[\frac{K_1+K_2}{J_1}+\frac{K_2}{J_2}+\frac{b_1b_2}{J_1J_2}\right]$

* Variables de estado:

$q_1=\theta_2$
$q_2=\dot{q}_1=\dot{\theta}_2$
$q_3=\dot{q}_2=\ddot{q}_1=\ddot{\theta}_2$
$q_4=\dot{q}_3=\ddot{q}_2=\dddot{q}_1=\dddot{\theta}_2$
$\dot{q}_4=\ddddot{\theta}_2$

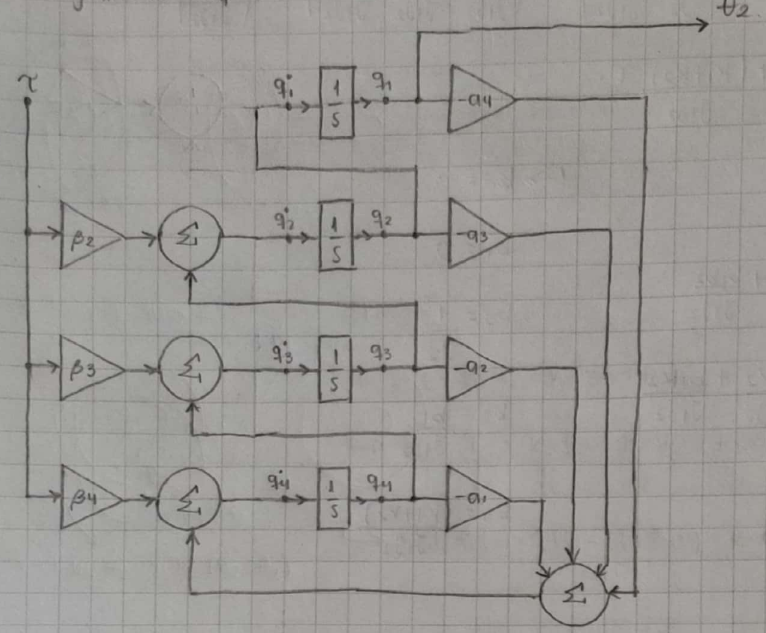
$\dot{q}_1=q_2+\beta_1\tau$
$\dot{q}_2=q_3+\beta_2\tau$
$\dot{q}_3=q_4+\beta_3\tau$
$\dot{q}_4=-a_4q_1-a_3q_2-a_2q_3-a_1q_4+\beta_4\tau$

* Espacio de estados:

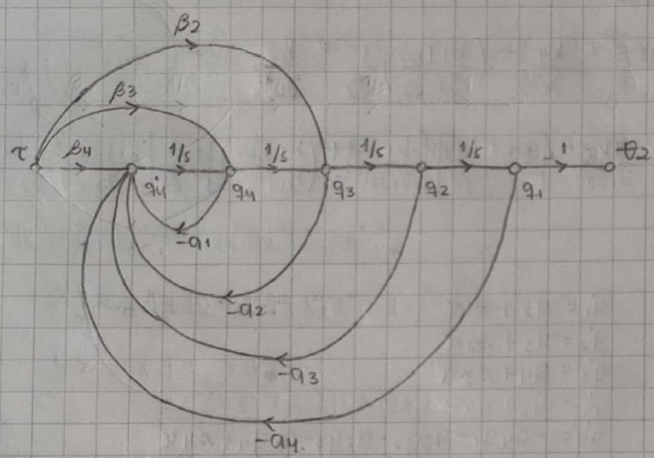
$$\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\\dot{q}_2\\\dot{q}_3\\\dot{q}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-a_4&-a_3&-a_2&-a_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{bmatrix}\tau$$

$$\theta_2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}q_1\\q_2\\q_3\\q_4\end{bmatrix}+0\,\tau$$

* Diagrama de bloques:



* Diagrama de flujo de señal



Observaciones

Día	Mes	Año	Hora	Institución		
Alumno					Código	Materia
Curso	Bimestre	Semestre	Salón	Hoja No ... de ...		CALIFICACIÓN
Profesor						

3. Para el sistema del punto anterior, realizar el mismo procedimiento considerando $K_1 = 0$.

* Para el disco 2:

$$\sum F = J_2 \ddot{\theta}_2$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{\tau}{J_2} - \frac{b_2}{J_2}\dot{\theta}_2 - \frac{K_2}{J_2}\theta_2 + \frac{K_2}{J_2}\theta_1$$

* Para el disco 1:

$$\sum F = J_1 \ddot{\theta}_1$$

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{K_2}{J_1}\theta_2 - \frac{K_2}{J_2}\theta_1 - \frac{b_1}{J_1}\dot{\theta}_1$$

* Función de transferencia:

$$\frac{\theta_2(s)}{\tau(s)} = \frac{J_1 s^2 + b_1 s + K_2}{(J_2 s^2 + b_2 s + K_2)(J_1 s^2 + b_1 s + K_2)^2 - K_2^2}$$

$\hookrightarrow$ $C_1 = \frac{b_1}{J_1} + \frac{b_2}{J_2}$

$C_2 = \frac{K_2}{J_1} + \frac{K_2}{J_2} + \frac{b_1 b_2}{J_1 J_2}$

$C_3 = \frac{b_2 K_2}{J_1 J_2} + \frac{b_1 K_2}{J_1 J_2}$

$C_4 = 0.$

$\hookrightarrow$ $d_0 = 0$

$d_1 = 0$

$d_2 = \frac{1}{J_2}$

$d_3 = \frac{b_1}{J_1 J_2}$

$d_4 = \frac{K_2}{J_1 J_2}$

$\rightarrow$ $\delta_0 = 0$

$\delta_1 = 0$

$\delta_2 = 1/J_2$

$\delta_3 = \frac{b_2}{J_2^2}$

$$\delta_4 = \frac{K_2}{J_1 J_2} - \left(\frac{b_1}{J_1} + \frac{b_2}{J_2}\right)\left(\frac{b_1}{J_1 J_2} - \frac{1}{J_2}\left(\frac{b_1}{J_1} + \frac{b_2}{J_2}\right)\right) - \frac{1}{J_2}\left(\frac{K_2}{J_1} + \frac{K_2}{J_2} + \frac{b_1 b_2}{J_1 J_2}\right)$$

* Variables de estado:

$q_1 = \theta_2$

$q_2 = \dot{\theta}_2$

$q_3 = \ddot{\theta}_2$

$q_4 = \dddot{\theta}_2$

$\dot{q}_4 = \ddddot{\theta}_2$

$\dot{q}_1 = q_2 + \delta_1 \tau$

$\dot{q}_2 = q_3 + \delta_2 \tau$

$\dot{q}_3 = q_4 = \delta_3 \tau$

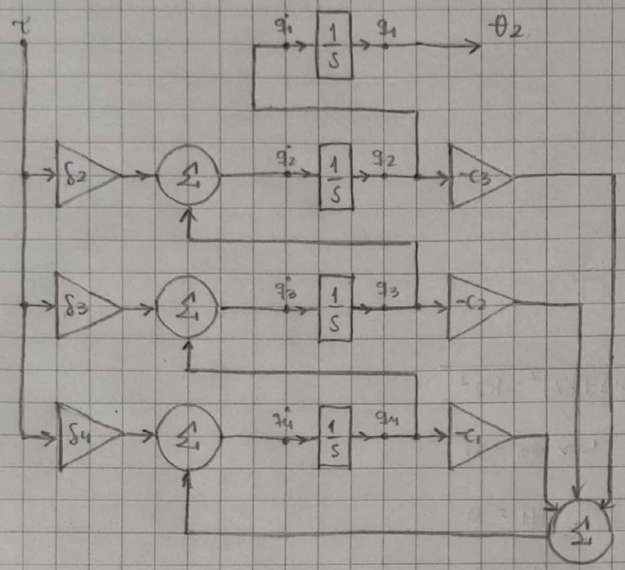
$\dot{q}_4 = -C_4 q_1 - C_3 q_2 - C_2 q_3 - C_1 q_4 + \delta_4 \tau$

* Espacio de estados

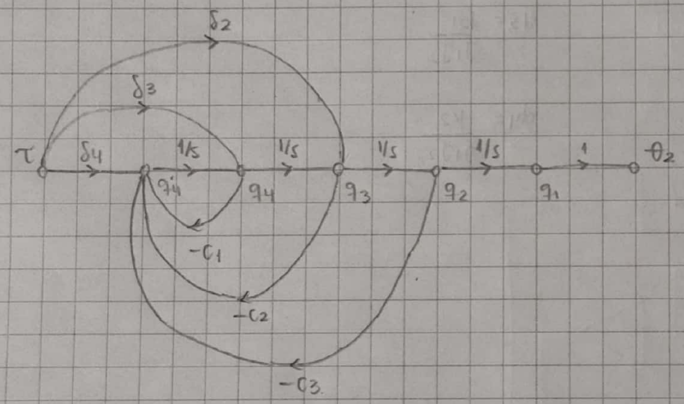
$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_3 & -c_2 & -c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \tau$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{bmatrix} + 0\,\tau$$

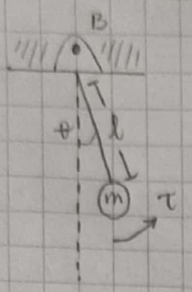
* Diagrama de bloques



* Diagrama de flujo de señal



4. Para el sistema rotacional, determinar: función de tranferencia, diagrama de bloques y de flujo de señal y espacio de estados



* $\sum F = I\ddot{\theta} = ml^2\ddot{\theta}$

$$\tau - mgl\,sen(\theta) - b\dot{\theta} = ml^2\ddot{\theta}$$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} = \frac{\tau}{ml^2} - \frac{g\,sen(\theta)}{l} - \frac{b\dot{\theta}}{ml^2}$$

* Linealización del sistema: Si $\theta << 1$ radian, $sen(\theta) \cong \theta$

$$\hookrightarrow \ddot{\theta} = \frac{\tau}{ml^2} - \frac{g\theta}{l} - \frac{b\dot{\theta}}{ml^2}$$

* Variables de estado:

$q_1 = \theta$

$q_2 = \dot{\theta} = \dot{q}_1$

$\dot{q}_2 = \ddot{\theta}$

* Espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & -b/ml^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/ml^2 \end{bmatrix} \tau$$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + 0\tau$$

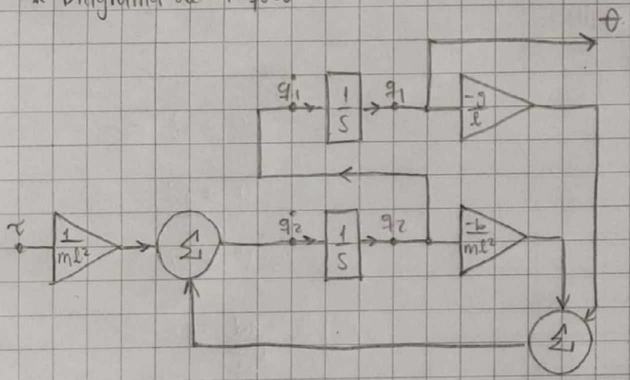
* Función de transferencia:

$$\tau(s) = ml^2 s^2 \theta(s) + mgl\,\theta(s) + bs\theta(s)$$

$$\tau(s) = \theta(s)\left[ml^2 s^2 + bs + mgl\right]$$

$$\hookrightarrow \frac{\theta(s)}{\tau(s)} = \frac{1}{ml^2 s^2 + bs + mgl}$$

* Diagrama de bloques:



* Diagrama de flujo de señal: