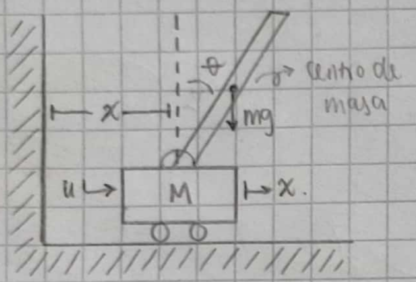
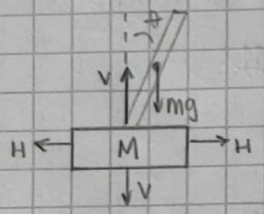
Nombre: Mateo Salamanca Pulido. Código: 20211005107. Sistemas Dinámicos Gr. 005-1

Tarea: Sistema del péndulo invertido.

Encontrar la representación en espacio de estados del siguiente sistema.



* Diagrama de cuerpo libre:



→ Coordenadas del punto de masa de la varilla:

$$X_g = x + \ell\, sen(\theta)$$
$$Y_g = \ell \cos(\theta)$$

* Para la varilla: $I\ddot{\theta} = V\ell\, sen(\theta) - H\ell\cos(\theta)$ ①

↳ Movimiento horizontal del péndulo

$$m\frac{d^2[x+\ell\, sen(\theta)]}{dt^2} = H$$

$$H = m\ddot{x} + m\ell\frac{d[\dot{\theta}\cos(\theta)]}{dt}$$

② $H = m\ddot{x} + m\ell\left\{\ddot{\theta}\cos(\theta) - \dot{\theta}^2 sen(\theta)\right\}$

↳ Movimiento vertical del péndulo

③ $m\frac{d^2[\ell\cos(\theta)]}{dt^2} = V - mg$

$$V - mg = m\ell\frac{d[-\dot{\theta}sen(\theta)]}{dt} = -m\ell\frac{d[\dot{\theta}sen(\theta)]}{dt}$$

$$V - mg = -m\ell\left\{\ddot{\theta}\, sen(\theta) + \dot{\theta}^2\cos(\theta)\right\}$$

* Para el carro: $Ma = M\ddot{x} = u - H$ ④

* Linealización: Si $\theta \ll 1$ radián $= \begin{cases} sen\,\theta = \theta \\ \cos\theta = 1 \\ \theta\,\dot{\theta}^2 = 0 \end{cases}$

* Reescribiendo las ecuaciones ①, ② y ③

⑤ $I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl$

⑥ $H = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$

⑦ $V = mg$

* Haciendo uso de las ecuaciones ④ y ⑥ se obtiene:

$$M\ddot{x} = u - H = u - m\ddot{x} - ml\ddot{\theta}$$

⑧ $u = \ddot{x}(M+m) + ml\ddot{\theta}$

* Haciendo uso de las ecuaciones ⑤, ⑥ y ⑦ se obtiene:

$$I\ddot{\theta} = Vl\theta - Hl$$

$$I\ddot{\theta} = mlg\theta - l(m\ddot{x} + ml\ddot{\theta})$$

⑨ $mlg\theta = \ddot{\theta}(I + ml^2) + ml\ddot{x}$

* Ecuaciones de interes:

- $(M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \;\rightarrow\; M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \;\rightarrow\; m\ddot{x} = u - M\ddot{x} - ml\ddot{\theta}$

  $mlg\theta = \ddot{\theta}ml^2 + ml\ddot{x} \;\rightarrow\; mg\theta = \ddot{\theta}ml + m\ddot{x} \;\rightarrow\; m\ddot{x} = mg\theta - \ddot{\theta}ml$

- $u - M\ddot{x} - \cancel{ml\ddot{\theta}} = mg\theta - \cancel{\ddot{\theta}ml}$

  $\hookrightarrow M\ddot{x} = u - mg\theta$

- $\hookrightarrow Ml\ddot{\theta} = (M+m)g\theta - u$

* Variables de estado:

$x_1 = x$ $\quad$ $x_3 = \theta$

$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$ $\quad$ $x_4 = \dot{x}_3 = \theta$

$\dot{x}_2 = \ddot{x}_1 = \ddot{x}$ $\quad$ $\dot{x}_4 = \ddot{x}_3 = \ddot{\theta}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mg/M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \\ \\ -1/Ml \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$