

Definition:

FACTORIEL: $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

et $0! = 1$

Exemple:

$$\bullet 5! = 120$$

$$\bullet \frac{8!}{6!} = 56$$

$$\bullet \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n \times (n+1)$$

$$\bullet \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

LES COMBINAISONS:

Definition:

• Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [0; n]$

$$\binom{n}{k} = C_n^k \text{ se lit « k parmi n » ou « } C_{n,k} \text{ »}$$

• C'est le nombre de façon de tirer k parmi n éléments.

CAS PARTICULIERS:

$$\bullet C_n^0 = 1$$

$$\bullet C_n^n = 1$$

$$\bullet C_n^1 = n$$

$$\bullet C_n^{n-1} = n$$

PROPOSITION:

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!}$$

Exemple (8 élèves parmi 41):

$$C_{41}^8 = \frac{41!}{8! 33!} = \frac{34 \times 35 \times 36 \times 37 \times 38 \times 39 \times 40 \times 41}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$$

$$C_{41}^8 = 95\ 548\ 245$$

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$

$$(a+b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

PROPOSITION:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

DEMONSTRATION:

$$\begin{aligned} C_{n+1}^k &= \frac{n! \times (n-k+1)}{k! (n-k)! (n-k+1)!} + \frac{n! \times k}{(k-1)! (n-k+1)! \times k} \\ &= \frac{n! (n-k+1)}{k! (n-k+1)!} + \frac{n! k}{k! (n-k+1)!} \\ &= \frac{n! (n-k+1+k)}{k! (n-k+1)!} = \frac{n! (n+1)}{k! (n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{k! (n-k+1)!} = C_{n+1}^k \end{aligned}$$

Ω univers = { issues possibles de l'expérience }

A, B événements sur Ω

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

• Si A et B sont disjoints (on dit aussi incompatible) c-à-d $A \cap B = \emptyset$
alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

• $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

• $0 \leq P(A) \leq 1$

Equiprobabilités des événements:

$$P(A) = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb total d'issues}} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Rappels: A, B indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Remarques:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A|B) = P(A)$$

PROBABILITES CONDITIONNELLES

Soient (Ω, P) un univers probabilisé.

A et B 2 evenement sur Ω

Definition:

• Probabilité de « B sachant A »:

$$\text{Si } P \neq 0 \quad P(B) = P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

proposition: Formule de Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B) P(B)}{P(A)}$$

• Système complet d'événement:

Soient A_1, A_2, \dots, A_n n événements sur Ω ($n \geq 2$)

Si • $\forall i \in [1; n] \quad A_i \neq \emptyset$

• A_1, \dots, A_n 2 à 2 incompatible ($\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$)

• $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

On dit que (A_1, \dots, A_n) est un système complet d'événement.

④ $\left\{ \begin{array}{l} A_1, \dots, A_n \text{ système complet} \\ B \text{ événement sur } \Omega \end{array} \right.$

je cherche B

$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$$

$$= B \cap A_1 \cup B \cap A_2 \cup \dots \cup B \cap A_n$$

$$\Rightarrow P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + \dots + P(B|A_n)P(A_n)$$

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i) P(A_i)$$

formule des proba totale.