Dénombrement-Probabilités

(trois semaines)

(du lundi 24 septembre 2018 au vendredi 12 octobre 2018)

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de factorielles les produits suivants :

1. $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$.
2. $1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$.

Exercice 2

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$.

Exercice 3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k C_n^k$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que, pour tout $p \in [\![1, n]\!]$, $C_n^p = \dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$.
2. En déduire $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p\, C_n^p$.

Exercice 5

Soit $(n, p, k) \in \mathbb{N}^3$ tel que $k \leqslant p \leqslant n$.

Montrer que $C_n^k\, C_{n-k}^{p-k} = C_p^k\, C_n^p$.

Exercice 6

Dans une jeu de 32 cartes, on tire une main de 5 cartes. Déterminer la probabilité qu'une main contienne

- exactement un As
- au moins un As (de deux façons différentes)
- 4 trèfles dont la dame

Exercice 7

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 8 cartes. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement un coeur et un roi.

Exercice 8

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 4 cartes. Déterminer la probabilité qu'une main contienne

- 4 cartes de même couleur
- une carte de chaque couleur
- un carré (4 cartes de même hauteur)

Exercice 9

Le jeu du loto simplifié consiste à cocher 6 numéros dans une grille en contenant 49.

1. Déterminer le nombre de façons de remplir une grille du loto simplifié ?
2. Déterminer la probabilité, une fois le tirage effectué, d'obtenir
    - une grille gagnante du premier rang (6 bons numéros)
    - une grille gagnante du deuxième rang (5 bons numéros)
    - une grille gagnante du troisième rang (4 bons numéros)

Exercice 10

1. Soient E et F deux ensembles finis tels que $p = \text{Card}(E) \leqslant n = \text{Card}(F)$. Déterminer le nombre d'injections de E dans F.
2. Soit E un ensemble fini. On appelle permutation de E toute bijection de E sur lui-même. En particulier, remarquons qu'une injection de E dans E est une permutation.

    Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = [\![1, n]\!]$. Déterminer le nombre de permutations de E.

    Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « voiture », « tableau » et « biologie ».

3. Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. On appelle liste de longueur p d'éléments de E ou encore p-liste, le choix ordonné d'éléments de E avec possibilité de répétitions de ceux-ci. Remarquons qu'une p-liste s'identifie à un multiplet $(x_1, \dots, x_p)$ de E^p.

   Déterminer le nombre de p-listes de E.

   Un sac contient n balles de tennis de table numérotées de 1 à n. On tire successivement p balles du sac en remettant chaque fois dans ce dernier la balle qu'on vient de sélectionner. Quel est le nombre de tirages possibles ?

   Même question si à chaque tirage, on ne remet pas la balle sélectionnée dans le sac.

Exercice 11

Combien d'habitants doit comporter un village afin que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ? (on ne prend pas en compte les prénoms et noms composés).

Exercice 12

En région parisienne, 60% des personnes âgées de plus de 65 ans sont vaccinés contre la grippe. La proportion de malades est de 0,1% parmi les vaccinés et de 10% parmi les non vaccinés.

1. Déterminer le pourcentage de personnes âgées de plus de 65 ans atteintes par la grippe dans cette région.
2. On sélectionne une personne âgée de plus de 65 ans en région parisienne et on constate qu'elle a contracté la grippe. Quelle est la probabilité qu'elle ait été vaccinée ?

Exercice 13

Dans une imprimerie de labeur de la région parisienne, la proportion d'affiches présentant un léger défaut au niveau des couleurs est de $0,05$. Le chef de fabrication a mis en place le contrôle suivant : si l'impression de l'affiche est parfaite, elle est acceptée avec la probabilité $0,96$ et si elle présente ce léger défaut de couleurs, elle est refusée avec la probabilité $0,98$.

Le PDG de l'imprimerie, très attaché au contrôle qualité, a alors calculé d'une part la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle et d'autre part qu'une affiche acceptée présente ce léger défaut. Qu'a-t-il trouvé comme résultats ?

Exercice 14

Soient deux dés A et B contenant pour A, 4 faces rouges et 2 faces blanches et pour B, 2 faces rouges et 4 faces blanches. On lance une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'obtenir pile est de $1/3$. Dans le cas d'un pile (respectivement face), on joue uniquement avec le dé A (respectivement B).

1. Déterminer la probabilité d'obtenir une face rouge au premier jet.

2. Supposons que l'on obtienne une face rouge aux deux premiers jets. Déterminer la probabilité d'obtenir une face rouge au troisième jet.

3. Supposons que l'on obtienne une face rouge aux n premiers jets où $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité d'avoir utilisé le dé A.

Exercice 15

La compagnie d'assurance TOPAUTO a classé ses assurés automobilistes en trois classes : moins de 25 ans (25%) , de 25 à 50 ans (53%) et plus de 50 ans (22%). La probabilité qu'un assuré de moins de 25 ans déclare au moins un sinistre en cours d'année de sa cotisation annuelle est de $0,12$, de $0,06$ pour un assuré de 25 à 50 ans et $0,09$ pour un assuré de plus de 50 ans.

1. On examine au hasard le dossier d'un assuré de TOPAUTO. Déterminer la probabilité qu'il ait déclaré au moins un sinistre en cours d'année ?

2. Déterminer la probabilité qu'un assuré de TOPAUTO ayant déclaré au moins un sinistre en cours d'année soit âgé de moins de 25 ans.

3. Déterminer la probabilité qu'un assuré de TOPAUTO âgé d'au moins 25 ans ait déclaré au moins un sinistre en cours d'année.

4. Déterminer la probabilité qu'un assuré de TOPAUTO n'ayant pas déclaré de sinistre en cours d'année ne soit pas âgé de 25 à 50 ans.

Exercice 16

L'usine TELIN fabrique des microprocesseurs présentant parfois un défaut du CPU (9% des microprocesseurs produits) ou un défaut de sécurité (6% des microprocesseurs produits). De plus 3% des microprocesseurs présentent les deux défauts.

1. Les événements C : « le microprocesseur présente un défaut du CPU » et S : « le microprocesseur présente un défaut de sécurité » sont-ils indépendants ?

2. Déterminer la probabilité qu'un microprocesseur présente uniquement un défaut du CPU.

3. Déterminer la probabilité qu'un microprocesseur ne présente aucun défaut.

Exercice 17

On lance deux dés non truqués. Les événements A : « la somme obtenue est un nombre pair » et B : « la somme obtenue est inférieure ou égale à 10 » sont-ils indépendants ?

Exercice 18

On lance deux fois un dé non truqué. Soit X le nombre de 6 obtenus.
Déterminer la loi (de probabilité) de X.

Exercice 19

Dans un jeu de 32 cartes, on tire une main de 5 cartes. Soit X le nombre de cœurs obtenus. Déterminer la loi de X.

Exercice 20

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi connue. On rappelle que la fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$.

1. Déterminer $F_X(2,3)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x)$.
3. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X = k)$ en fonction de $F_X(k)$ et $F_X(k-1)$.
4. Déterminer, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $P(a < X \leqslant b)$ en fonction de $F_X(b)$ et $F_X(a)$.

Exercice 21

On lance trois fois de suite un dé non truqué. Soient X le nombre de 1 obtenus au premier jet et Y le nombre de 1 obtenus au deuxième et troisième jets. Montrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Exercice 22

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans E.

1. Montrer que $E(aX+b) = aE(X) + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Que vaut $E\big(X - E(X)\big)$?
2. On rappelle que $V(X) = E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big)$. Montrer que
   - $V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.
   - $V(X) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) - \big(E(X)\big)^2$.
   - $V(aX+b) = a^2 V(X)$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 23 (loi binomiale)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $X \leadsto B(n,p)$ c'est-à-dire X à valeurs dans $[\![0,n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,
$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$
   Via la formule du binôme de Newton, montrer que $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
2. Sachant que la probabilité d'avoir un garçon est de 46% en région parisienne, déterminer, pour une famille de 5 enfants, d'avoir 2 garçons et 3 filles.

parisienne

Exercice 24 (loi de Poisson)

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ c'est-à-dire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Via l'égalité $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

2. La sécurité routière a constaté sur une année deux accidents corporels en moyenne par quart d'heure. On suppose que les nombres d'accidents corporels durant deux tranches d'un quart d'heure disjointes sont indépendants. De plus, à chaque instant t, la probabilité d'avoir un accident après t est indépendante du nombre d'accidents observés avant t.

Déterminer la probabilité de constater

- aucun accident corporel en un quart d'heure
- aucun accident corporel en une heure
- quatre accidents corporels en une heure
- plus de 3 accidents corporels en un quart d'heure

Exercice 25 (loi géométrique)

1. Soient $p \in]0, 1[$ et $X \rightsquigarrow G(p)$ c'est-à-dire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Via les égalités $\sum_{k=0}^{+\infty} p^k = \frac{1}{1-p}$; $\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} = \frac{1}{(1-p)^2}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)p^{k-2} = \frac{2}{(1-p)^3}$, valables pour tout $p \in]0, 1[$, montrer que $E(X) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

2. On lance une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'obtenir pile est $1/3$. Déterminer la probabilité qu'il faille 4 lancers afin d'obtenir (le premier) pile.

Exercice 26 (loi de Pascal)

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On dit que $X \rightsquigarrow P(r, p)$ si X à valeurs dans $[\![r, +\infty[\![$ et, pour tout $k \in [\![r, +\infty[\![$,

$$P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}$$

Voici un exemple simple d'utilisation : on lance une pièce de monnaie truquée dont la probabilité d'obtenir pile est $1/3$. Déterminer la probabilité qu'il faille 4 lancers pour obtenir 2 piles.

Exercice 27

Le nombre d'appels téléphoniques au standard de l'EPITA entre 10h et 11h suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Supposons que, pour chaque appel, on ait une probabilité p que le correspondant demande le bureau du directeur.

1. Déterminer la probabilité qu'il y ait k appels pour le directeur sachant qu'il y a n appels au standard.
2. Déterminer la probabilité qu'il y ait n appels au standard et k appels pour le directeur.
3. Montrer que le nombre d'appels pour le directeur suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 28

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Considérons $U = \mathrm{Min}(X,Y)$.

Déterminer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(U \geqslant k)$ et en déduire la loi de U.