# DENOMBREMENT / PROBABILITÉS

## Definition:

FACTORIEL : $\forall n \in \mathbb{N} \quad n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$

et $0! = 1$

Exemple:

- $5! = 120$
- $\frac{8!}{6!} = 56$
- $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = n \times (n+1)$
- $\frac{n!}{(n-1)!} = n$

LES COMBINAISONS:

## Definition:

. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0; n]\!]$

$\binom{n}{k} = C_n^k$ se lit « k parmis n » ou « CNK »

. C'est le nombre de façon de tirer k parmis n elements

CAS PARTICULIERS:

- $C_n^0 = 1$
- $C_n^n = 1$
- $C_n^1 = n$
- $C_n^{n-1} = n$

PROPOSITION :

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Exemple ( 8 élèves parmis 41) :

$$C_{41}^8 = \frac{41!}{8!\;33!} = \frac{34 \times 35 \times 36 \times 37 \times 38 \times 39 \times 40 \times 41}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$$

$$C_{41}^8 = 95\ 548\ 245$$

$$(a+b)^0 = 1$$
$$(a+b)^1 = 1a^1b^0 + 1a^0b^1$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1a^2b^0 + 2a^1b^1 + 1a^0b^2$$
$$(a+b)^3 = 1a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + 1a^0b^3$$
$$(a+b)^5 = 1a^5b^0 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + 1a^0b^5$$

PROPOSITION :

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$$

DEMONSTRATION :

$$C_{n+1}^k = \frac{n! \times (n-k+1)}{k!\,(n-k)!\,(n-k+1)} + \frac{n! \times k}{(k-1)!\,(n-k+1)! \times k}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,k}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!\,(n-k+1+k)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\,(n+1)}{k!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = C_{n+1}^k$$

$\Omega$ univers $= \{$issues possibles de l'experience$\}$

$A, B$ evenements sur $\Omega$

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- Si $A$ et $B$ sont disjoints (on dit aussi incompatible cad $A \cap B = \emptyset$
  alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

Equiprobabilités des evenement :

$$P(A) = \frac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb total d'issues}} = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

Rappels : $A, B$ independant si $p(A \cap B) = P(A) \times P(S)$

Remarques :

$$P(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A)\,p(B)}{p(B)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A|B) = P(A)$$

# PROBABILITES CONDITIONNELLES

Soient $(\Omega, P)$ un univers probabilisé

$A$ et $B$ 2 evenement sur $\Omega$

## Definition :

· Probabilité de « $B$ sachant $A$ » :

Si $P \neq 0$ $\quad P(B) = P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$

proposition : Formule de Bayces

$$p(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{p(A|B)\, p(B)}{p(A)}$$

· Systeme complet d'evenement :

Soient $A_1, A_2, \dots A_n$ $n$ evenements sur $\Omega$ $(n \geqslant 2)$

Si
- $\forall i \in [\![1 ; n]\!]$ $\quad A_i \neq 0$
- $A_1, \dots A_n$ 2 à 2 incompatible $(\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset)$
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

On dit que $(A_1, \dots A_n)$ est un systeme complet d'evenement.

(H) $\begin{cases} A_1, \dots A_n & \text{systeme complet} \\ B & \text{evenement sur } \Omega \end{cases}$

je cherche $B$

$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$

$\quad = B \cap A_1 \cup B \cap A_2 \cup \dots \cup B \cap A_3$

$$\Rightarrow p(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$$

$$= P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)\,p(A_2) + \dots + p(B|A_n)\,p(A_n)$$

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i)}$$ formule des proba totale.