EPITA-S1
2018/2019

Série n°2

Cinématique du point matériel

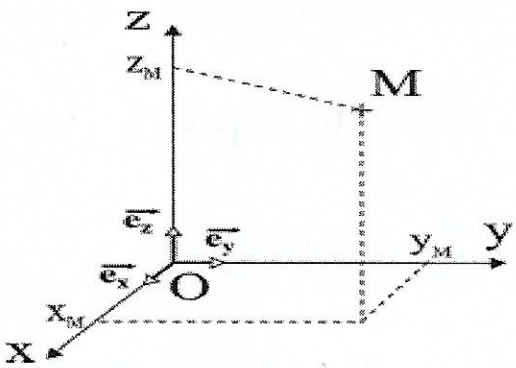
Exercice 1 **(Cinématique en coordonnées cartésiennes et cylindriques)**
Exprimer les vecteurs **position**, **vitesse et accélération** pour chaque type de coordonnées.

I. Coordonnées cartésiennes

$\vec{OM}(t) = x(t)\,\vec{u}_x + y(t)\,\vec{u}_y + z(t)\,\vec{u}_z$

$\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}(t)\,\vec{u}_x + \dot{y}(t)\,\vec{u}_y + \dot{z}(t)\,\vec{u}_z$

$\vec{a}(t) = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{OM}}{dt} = \ddot{x}(t)\,\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\,\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\,\vec{u}_z$



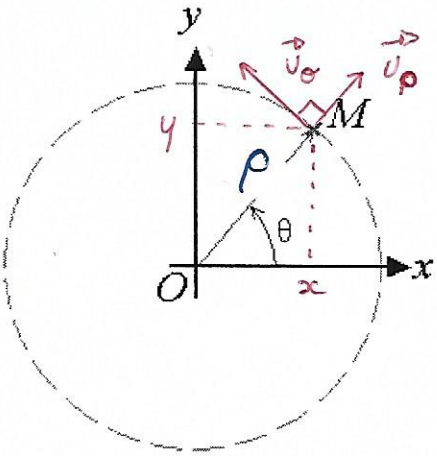
II. Coordonnées polaires et équations de passage

$\vec{OM} = \rho(t)\,\vec{u}_\rho$

$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\,\vec{u}_\rho + \rho(t)\,\dot{\vec{u}}_\rho$

or $\dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$ (voir cours)

Ainsi $\vec{v} = \dot{\rho}(t)\,\vec{u}_\rho + \rho(t)\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$



A. Zellagui

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} = (\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\theta}\,\rho(t) + \rho(t)\,\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta$$

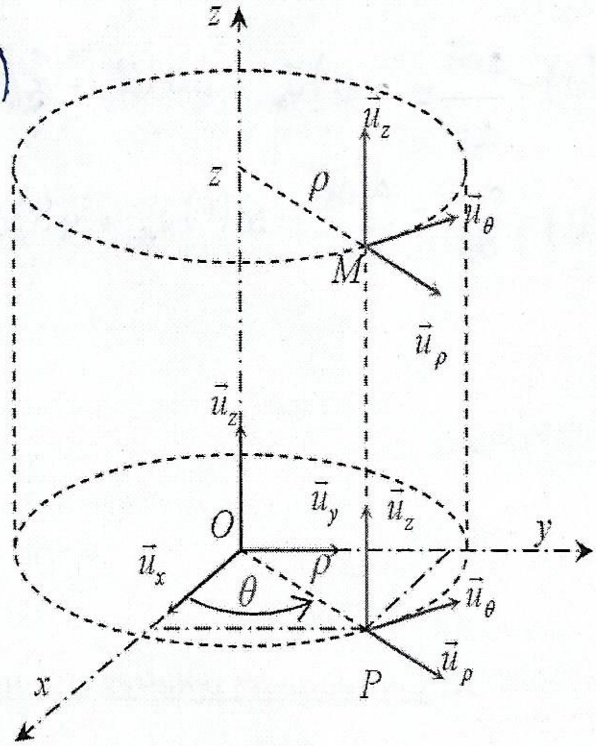
avec $\dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$

et $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\,\vec{u}_\rho$

(voir cours pour + de details)

III. <u>Coordonnées cylindriques</u>

(même chose qu'en polaire avec $\vec{u}_z$ en plus)



$$\vec{OM} = \rho(t)\,\vec{u}_\rho + z(t)\,\vec{u}_z$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}(t)\,\vec{u}_\rho + \rho(t)\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \dot{\rho}(t)\,\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}(t)\dot{\theta} + \rho\,\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

Application

Calcul des dérivées des vecteurs unitaires $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho$ et $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$

1) Exprimer les coordonnées des vecteurs unitaires : $\vec{u}_\rho$ et $\vec{u}_\theta$ dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$

2) En déduire les expressions des dérivées des vecteurs unitaires de la base polaire.

Exercice 2

On donne le vecteur position : $\vec{OM} = 10t.\vec{u}_x + (-5t^2 + 10t)\vec{u}_y$

1- Donner l'équation de la trajectoire du point M. Tracer cette trajectoire.
2- Donner les composantes des vecteurs vitesse et accélération. Préciser la valeur de la vitesse à t = 2s.
3- Donner les composantes de la vitesse instantanée à t = 0. Préciser l'angle que fait le vecteur vitesse $\vec{V}_0$ avec l'axe Ox.

Exercice 3

Une particule M se déplace dans le plan (Oxy). Sa position en fonction du temps est

$\vec{OM} = R\cos(\omega.t)\vec{u}_x + R\sin(\omega.t)\vec{u}_y$; Où ω et R sont deux constantes positives.

1- Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération en fonction du temps.
2- Donner les normes des vecteurs vitesse et accélération.
3- Pour quelle(s) valeur(s) de t la vitesse est-elle perpendiculaire à l'accélération ?
4- Quelle est la trajectoire de la particule dans le plan (Oxy) ?
5- Refaire la question (1) en coordonnées polaires de base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$.

Exercice 4

Partie A

Un point matériel M de masse m est repéré dans un référentiel fixe (Ox,Oy, Oz) par ses coordonnées cartésiennes tel que x(t) = A cos (ωt) ; y(t) = B sin (ωt) ; z(t) = Hωt. Où A, B, ω et H sont des constantes positives.

1- Exprimer le vecteur vitesse du point M dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
2- Exprimer le vecteur accélération du point M dans la base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$
3- Déterminer le module des vecteurs vitesse et accélération

4-a) Quel est le mouvement du point M dans le plan (xoy) ?
b) Quel est le mouvement du point M suivant la direction de l'axe (oz)?
c) Quel est le mouvement résultant du point M ?

Partie B

On prend A = B = R dans les équations de la partie A

Exprimer les vecteurs position, vitesse et accélération dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.