1) Coordonnés cartesiennes : $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ Rappel

- $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z$
- $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y + \dot{z}(t)\vec{u}_z$
- $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y + \ddot{z}(t)\vec{u}_z$

2) Coordonnées polaires :

- Variable : $\begin{cases} \rho = \vec{OM} \\ \theta = (O_x, \vec{OM}) \end{cases}$ → (θ orienté sens trigo)

- Base polaire :

$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ avec $\begin{cases} \vec{u}_\rho : \text{vecteur unitaire radial (colineaire à } \vec{OM}\text{) vers l'exterieur} \\ \vec{u}_\theta : \text{vecteur unitaire tangentiel} \end{cases}$

- Equations de passage :

1. base cartesienne vers base polaire :

$$\begin{cases} \rho(t) = \sqrt{x(t) + y(t)} \\ \theta(t) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y(t)}{x(t)}\right) \end{cases}$$

2. base polaire vers base cartesienne :

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

- **Vecteur position :**

$$\overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{OM}\| \, \vec{u}_\rho$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho(t) \, \vec{u}_\rho$$

- **Vecteur vitesse :**

Voir fin cours pour demons.

$$\left(\begin{array}{l} \dot{\vec{u}}_\rho = \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta \\ \dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta} \, \vec{u}_\rho \end{array} \right)$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}(t) \, \vec{u}_\rho + \rho(t) \, \dot{\vec{u}}_\rho$$

$$\vec{v} = \underbrace{\dot{\rho}(t) \, \vec{u}_\rho}_{\vec{v}_\rho} + \underbrace{\rho(t) \, \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta}_{\vec{v}_\theta}$$

- **Norme de $\vec{v}$:**

$$V = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2}$$

avec $\left(\begin{array}{l} v_\rho : \text{vitesse radiale} \\ v_\theta : \text{vitesse tangentielle.} \end{array} \right.$

- **Vecteur acceleration :**

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}(t) \, \vec{u}_\rho + \dot{\rho}(t) \, \dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\rho}(t) \, \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta + \rho(t) \, \ddot{\theta} \, \vec{u}_\theta + \rho(t) \, \dot{\theta} \, \dot{\vec{u}}_\theta$$

$$\vec{a} = \ddot{\rho}(t) \, \vec{u}_\rho + \dot{\rho}(t) \, \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta + \dot{\rho}(t) \, \dot{\theta} \, \vec{u}_\theta + \rho(t) \, \ddot{\theta} \, \vec{u}_\theta - \rho(t) (\dot{\theta})^2 \, \vec{u}_\rho$$

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\ddot{\rho}(t) - \rho(t) \, \dot{\theta}^2 \right)}_{\vec{a}_\rho} \vec{u}_\rho + \underbrace{\left(2 \, \dot{\rho}(t) \, \dot{\theta} + \rho \, \ddot{\theta} \right)}_{\vec{a}_\theta} \vec{u}_\theta$$

- **Norme de $\vec{a}$**

$$a = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2}$$

3) Coordonnées cylindrique

- Variables :

$$\begin{cases} \rho = \text{rayon} \\ z = OH \\ \theta = (\vec{O}_x, \vec{O}_B) \end{cases} \rightarrow \text{sens trigo}$$

- base cylindrique :

$$(\vec{U}_\rho, \vec{U}_\theta, \vec{U}_z)$$

- Equation de passage

1. Cartesien vers cylindrique

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right. \\ z_{\text{cylindrique}} = z_{\text{cartésien}} \end{cases}$$

2. cylindrique vers cartesien

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z_{cyl.} = z_{cart.} \end{cases}$$

- Vecteur position :

$$\vec{OM} = \rho(t)\vec{U}_\rho + z(t)\vec{U}_z$$

• Vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho}(t)\,\vec{u}_\rho + \rho(t)\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

• Vecteur accelaration :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_{polaire} + \ddot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho}(t) - \dot{\rho}(t)\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}(t)\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}(t)\,\vec{u}_z$$

Remarques :

$$\vec{u}_\rho = (\cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y) \text{ et } \vec{u}_\theta = (-\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y)$$

$$\dot{\vec{u}}_\rho = (-\sin\theta \times \dot{\theta} \times \vec{u}_x + \cos\theta \times \dot{\theta}\,\vec{u}_y) = \dot{\theta}(-\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y) = \dot{\theta}\,\vec{u}_\theta$$

$$\dot{\vec{u}}_\theta = (-\cos\theta \times \dot{\theta}\,\vec{u}_x - \sin\theta \times \dot{\theta}\,\vec{u}_y = -\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{u}_x + \sin\theta\,\vec{u}_y) = -\dot{\theta}\,\vec{u}_\rho$$