Matemática Computacional

Exercícios de Aritmética Computacional

maria irene falcão

Mestrado em Matemática e Computação

Exercícios

Exercício 1. Considere o sistema de numeração $F(2,3,-1,2)$.

a) Determine os níveis de *overflow* e *underflow* para este sistema.

b) Quantos números distintos constituem o sistema? Explicite-os e represente-os graficamente, usando a função $\mathbf{plot}$.

c) Qual a unidade de erro de arredondamento do sistema?

d) Determine $fl(0.125)$, $fl(0.25)$, $fl(4.0)$ e $fl(1.82)$.

Exercício 2.

a) Use a ajuda do Matlab para obter informação sobre as funções pré-definidas `realmax`, `realmin` e `eps`.

b) Justifique os valores obtidos quando as usa (sem especificação do argumento).

c) Que espera obter se efetuar cada uma das instruções seguintes no Matlab? Confirme a sua resposta.

(i) `>> (1+2^-52)-1`

(ii) `>> (1+2^-53)-1`

(iii) `>> isequal(2^-1074,0)`

(iv) `>> isequal(2^-1075,0)`

Exercício 3. Considere o sistema $F(10,4,-99,99)$.

a) Dados $x = 0.8348$, $y = 0.4316 \times 10^{-4}$ e $z = 0.4721 \times 10^{-4}$, calcule $(x \oplus y) \oplus z$ e $x \oplus (y \oplus z)$. Que conclui quanto à associatividade da adição num sistema de vírgula flutuante?

b) Sejam $x = 0.5411$, $y = 0.7223$ e $z = 0.6134$. Verifique que $x \otimes (y \oplus z) \neq (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$.

c) Considere a equação $3 \oplus x = 3$. Indique várias das suas soluções no sistema considerado.

Exercício 4. Justifique que num sistema de vírgula flutuante de base b, a divisão ou multiplicação por uma potência de b, se não conduzir a *overflow* ou *underflow*, é uma operação exata.

Exercício 5. Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações, considerando que está trabalhar num sistema de vírgula flutuante IEEE (com o arredondamento usual):

a) $x \leq y \Longrightarrow fl(x) \leq fl(y)$;

b) $x < y \Longrightarrow fl(x) < fl(y)$;

c) $x \leq y \Longrightarrow x \leq fl(\frac{x+y}{2}) \leq y \quad (x, y \in F)$.

d) Mostre, através de um exemplo, que a afirmação contida na alínea *c)* pode ser falsa se trabalharmos num sistema de vírgula flutuante de base 10.

Exercício 6. Determine, em cada caso, o erro absoluto, o erro relativo, o número de algarismos significativos e o número de casas decimais corretas do valor aproximado $\tilde{x}$ para x:

a) $x = 1/3, \quad \tilde{x} = 0.3333$;

b) $x = 10.375, \quad \tilde{x} = 10.373$;

c) $x = 0.000\,0234, \quad \tilde{x} = 0.000\,0272$;

d) $x = 0.721 \times 10^{-6}, \quad \tilde{x} = 0.724 \times 10^{-6}$.

Exercício 7. Escreva aproximações com 3 e 4 algarismos significativos para os números $1/6$, $1/11$, $\pi/100$, e^3 e $\log 5$.

Exercício 8. Considere a seguinte equação do segundo grau $x^2 + 800x + 1 = 0$, e suponha que pretendemos calcular as suas raízes, trabalhando numa máquina com sistema de numeração $F(10, 4, -99, 99)$.

a) Use a fórmula resolvente habitual para determinar (aproximações para) ambas as raízes.

b) Relembre que, se a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais x_1 e x_2, então $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. Calcule uma nova aproximação para a raiz de menor valor absoluto usando essa igualdade (e a raiz de maior valor absoluto calculada na alínea anterior).

c) Calcule, recorrendo à função `roots` do Matlab, as raízes da equação dada; compare com os valores obtidos em *a)* e *b)* e comente.

Exercício 9. Encontre fórmulas alternativas para calcular as expressões abaixo indicadas, de modo a evitar o efeito do cancelamento subtrativo:

a) $\sqrt{1+x} - 1, \quad x \approx 0$; *b)* $1 - \cos x;, \quad x \approx 0$;

c) $\text{sen}(x + \delta) - \text{sen}\, x, \quad |\delta| \ll |x|$; *d)* $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}; \quad x \approx 0$.

Exercício 10.

a) Calcule o número de condição das funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = x^2$ e comente sobre o condicionamento dessas funções.

b) Calcule o número de condição das funções $f(x) = \exp(x)$ e $f(x) = \log x$ e diga para que valores de x o cálculo dessas funções é um problema mal condicionado.

Exercício 11. Determine estimativas para os erros (em valor absoluto) cometidos nos cálculos dos valores abaixo indicados, quando os argumentos são arredondados para duas casas decimais:

a) $\cos(1.432)$; *b)* $\log(2.347)$; *c)* $e^{6.135}$.

Exercício 12. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} 3.021x + 2.714y + 6.913z = 12.648 \\ 1.031x - 4.273y + 1.121z = -2.121 \\ 5.084x - 5.832y + 9.155z = 8.407 \end{cases}$$

a) Determine a sua solução, usando o MATLAB.

b) Altere o coeficiente -4.273 para -4.275 e resolva o sistema resultante. Que conclusão pode tirar quanto ao sistema em causa?

Exercício 13. Represente graficamente os polinómios $p(x) = (x-1)^6$ e $q(x) = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$, para $x \in [0.999, 1.001]$. Notando que $q(x)$ é a forma expandida de $p(x)$, comente os resultados obtidos.

Trabalhos

Trabalho 1. A média de uma amostra de n valores $x_i; i = 1, \ldots, n$, é dada por

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

sendo o desvio padrão amostral dado por

$$s = \Big(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\Big)^{1/2}. \tag{1}$$

Para maior eficiência, é frequentemente sugerido o uso da seguinte fórmula alternativa para o cálculo do desvio padrão

$$s = \left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - n\overline{x}^2 \right) \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Escreva uma função, $[media, desvio1, desvio2] = \textbf{mediaDesvios}(x)$, destinada a calcular a média e o desvio padrão de uma amostra, sendo usadas as duas fórmulas (1) e (2) para o cálculo do desvio padrão.

Teste a sua função para várias amostras $\{x_i\}$. Em particular, tente encontrar uma amostra para a qual as duas fórmulas do cálculo do desvio padrão produzam valores bastante diferentes. Justifique a diferença dos resultados.

Trabalho 2. Escreva uma *script* destinada a calcular aproximações para o número de Nepper e, usando a expressão

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Esta *script* deverá produzir uma tabela com os valores das aproximações $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e dos respetivos erros, para $n = 10^k; k = 1, 2 \ldots, 20$. Comente os resultados obtidos.

Trabalho 3. Considere o desenvolvimento em série da função exponencial

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

a) Utilize este desenvolvimento, com 101 termos, para calcular uma aproximação para o valor de e^{-25}.

b) Obtenha uma aproximação para e^{25} usando a série referida e calcule, então, e^{-25} através da fórmula $e^{-25} = \frac{1}{e^{25}}$.

c) Compare os resultados obtidos nas alíneas anteriores com o valor de e^{-25} dado usando a função $\mathbf{exp}$ do MATLAB e explique-os.

Trabalho 4. Relembrando as expansões em série das funções arctan x e arcsen x

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

e

$$\text{arcsen}\, x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times 3}{2\times 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times 3\times 5}{2\times 4\times 6}\frac{x^7}{7} + \ldots,$$

obtenha duas fórmulas alternativas para o cálculo de π.

Escreva uma *script* para calcular aproximações para π usando as fórmulas referidas e considerando um número de termos em cada série sucessivamente igual a $10, 20, \ldots, 100, 200, 300, \ldots, 1000$. Comente os resultados obtidos.