Matemática Computacional

Exercícios de Interpolação

maria irene falcão

Mestrado em Matemática e Computação

Exercícios

Exercício 1. Considere os pontos $x_1 = 0, x_2 = 0.4$ e $x_3 = 0.6$ e suponha que se pretende obter uma aproximação para o valor de uma dada função f no ponto $x = 0.25$, usando:

(i) interpolação linear; (ii) interpolação quadrática.

Determine essa aproximação, recorrendo à forma de Lagrange do polinómio interpolador, obtenha um majorante para o erro e compare-o com o erro efetivamente cometido, quando:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$; *b)* $f(x) = \sqrt{x+2}$; *c)* $f(x) = \log(x+1)$.

Exercício 2. Forme uma tabela dos valores da função $y(x) = \operatorname{sen} x$ nos pontos $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 0.55$, $x_5 = 0.6$, $x_6 = 0.63$ e $x_7 = 0.67$.

a) Recorrendo à função **tabDifDiv**, determine a tabela das diferenças divididas da função tabelada.

b) Usando valores adequados da tabela anterior, obtenha, por interpolação cúbica, uma estimativa para $\operatorname{sen} 0.32$.

c) Obtenha uma estimativa para o erro cometido na alínea anterior. Compare com o erro efetivamente cometido.

Exercício 3. Considere a seguinte tabela de valores de uma determinada função y:

x	0.2	0.25	0.4	0.55	0.6	0.7
y	0.3624	0.3153	0.1700	0.0208	-0.0292	-0.1288

a) Forme a tabela de diferenças divididas dos valores tabelados.

b) Estime, por interpolação por um polinómio de grau 3, o valor de $y(0.3)$.

c) Obtenha uma estimativa para o erro cometido na alínea anterior.

d) Esboce o gráfico do polinómio interpolador dos pontos da tabela dada.

Exercício 4. Pretende-se construir uma tabela de valores da função $f(x) = \cos x$, em pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$, de modo que, ao usar interpolação por um polinómio do segundo grau usando pontos dessa tabela para estimar o valor de $\cos x$ para qualquer

$x \in [0,1]$, se obtenha uma aproximação com precisão de três casas decimais. Qual deverá ser o número mínimo de entradas da tabela?

Quantas entradas deveria ter a tabela se pretendêssemos usar interpolação cúbica?

Exercício 5. Considere o seguinte extrato de uma tabela de diferenças divididas de uma função y:

x	y	$y[\cdot,\cdot]$	$y[\cdot,\cdot,\cdot]$
1	0.6		
		-0.4	
1.25	A		0.2
		B	
1.75	0.375		

a) Determine os valores de A e B.

b) Indique a expressão do polinómio P_2 que interpola a função y nos pontos $1, 1.25, 1.75$.

c) Calcule $P_2(1.2)$.

d) Sabendo que $y^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{3 \times 4^n\, n!}{(4x+1)^{n+1}}$, determine:

(i) um majorante para $|y(1.2) - P_2(1.2)|$;

(ii) um majorante para o valor absoluto da diferença dividida $y[1, 1.25, 1.75, 2]$.

Exercício 6. A *função gama* $\mathbf{\Gamma}$ é uma função especial com muitas aplicações em diversas áreas de matemática, e é definida por

$$\mathbf{\Gamma}(x) = \int_0^x t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0.$$

Para valores inteiros do argumento, pode provar-se que $\mathbf{\Gamma}(n) = (n-1)!,\ n \in \mathbb{N}$. A tabela seguinte contém valores da função $\mathbf{\Gamma}$ em 6 pontos igualmente espaçados no intervalo $[1,2]$.

x	$\mathbf{\Gamma}(x)$
1.0	1.0000000000
1.2	0.9181687424
1.4	0.8872638175
1.6	0.8935153493
1.8	0.9313837710
2.0	1.0000000000

a) Determine o polinómio de grau 5 interpolador nos pontos dessa tabela e use-o para estimar o valor de $\mathbf{\Gamma}(x)$ para $x = 1.1, 1.3, 1.5, 1.7$ e 1.9.

b) Obtenha informação sobre a função pré-definida $\mathbf{gamma}$ e use-a para calcular o erro das aproximações obtidas na alínea anterior.

c) Esboce o gráfico do polinómio obtido na alínea *a)* e da função $\mathbf{\Gamma}$, no intervalo $[1, 2]$.

Nota: Para esboçar o gráfico da função $\mathbf{\Gamma}$, use a função pré-definida $\mathbf{gamma}$.

Exercício 7. Obtenha ajuda sobre as funções pré-definidas `polyfit` e `polyval`; em particular, veja como poderá usar a função `polyfit` para construir o polinómio interpolador de um determinado conjunto de pontos. Use essas funções na resolução de alguns dos execícios anteriores.

Exercício 8. Determine k de modo que a seguinte função seja uma função *spline* cúbica:

$$s(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 + 3x + 1, & 0 \le x \le 1, \\ -x^3 + kx^2 - 3x + 3, & 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Exercício 9.

a) Obtenha informação sobre a função pré-definida $\mathbf{spline}$. Sendo $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e $z = (u_1, \ldots, u_m)$, qual é o resultado de invocar o comando $valspl = \mathbf{spline}(x, y, z)$, no MATLAB? E qual será o resultado de $spl = \mathbf{spline}(x, y)$?

b) O que acontece no caso em que o vetor y tem mais duas componentes do que o vetor x, isto é, $y = (y_1, \ldots, y_{n+2})$?

c) Obtenha ajuda sobre as funções $\mathbf{unmkpp}$ e $\mathbf{ppval}$.

Exercício 10. Considere a seguinte tabela de pontos:

x	0	1	2	3
y	0.0	0.5	2.0	1.5

a) Seja S_c a função *spline* cúbica interpoladora dos pontos dessa tabela, satisfazendo as condições finais: $S_c'(0) = 0.2$ e $S_c'(3) = -1$.

(i) Determine, usando a função $\mathbf{spline}$, os valores $S_c(0.5)$, $S_c(1.2)$ e $S_c(2.8)$.

(ii) Esboce o gráfico de S_c e assinale, sobre esse gráfico, os pontos da tabela.

(iii) Usando a função $\mathbf{unmkpp}$, determine a expressão de cada uma das cúbicas que formam S_c.

b) Repita a alínea anterior, mas construindo S_{sn}, a função *spline* sem-nó interpoladora dos pontos da tabela.

c) Seja P_3 o polinómio cúbico interpolador dos pontos da tabela dada. Sobreponha ao gráfico de S_{sn} o gráfico de P_3. Que conclui? Como justifica tal resultado?

Exercício 11. Seja S_n a função *spline* cúbica completa interpoladora da função $f(x) = \exp(x)$ em $n + 1$ pontos igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$.

a) Obtenha os valores da função *spline* com 11 nós, S_{10}, nos pontos 0.21, 0.33, 0.75 e 0.99 e compare-os com o valores de f nesses pontos.

b) Esboce os gráficos da função f e da função *spline* S_{10}, no intervalo $[0, 1]$, e marque também os pontos de interpolação.

Exercício 12. Considere a *função de Runge*

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad x \in [-1, 1].$$

a) Para $n \in \mathbb{N}$, seja P_{n-1} o polinómio interpolador de f em n pontos igualmente espaçados no intervalo $[-1, 1]$. Escreva uma *script* que esboce o gráfico de f, P_2, P_4, P_{10} e P_{20}.

b) Seja S_n a função *spline* cúbica completa interpoladora de f nos $n + 1$ nós igualmente espaçados

$$x_k = -1 + (k - 1)h,\ k = 1, \ldots, n + 1;\ h = 2/n.$$

Esboce o gráfico de f e de cada uma das funções *spline* S_4, S_{10} e S_{20}.

c) Comente os resultados obtidos.

Trabalhos

Trabalho 1. Considere a seguinte tabela:

x	y	x	y
10.0	0.42	12.16	3.40
10.6	0.52	12.44	4.62
11.0	0.55	12.5	4.64
11.6	0.65	13.0	4.64
12.0	1.52	13.2	4.64
12.04	1.87	13.5	4.64
12.08	2.35	14.0	4.64

a) Represente graficamente os 14 pontos dessa tabela.

b) Escolha 6 pontos da tabela e construa o polinómio P_5 e a função *spline* cúbica sem-nó interpoladores desses pontos. Represente-os graficamente, marcando os pontos da tabela.

c) Repita a alínea anterior escolhendo 9 pontos de interpolação (e construindo o polinómio P_8 e a função spline sem-nó); finalmente, use todos os pontos da tabela para construir P_{13} e a função *spline* sem-nó interpoladores desses pontos.

d) Comente os resultados obtidos.

Trabalho 2. Considere a seguinte tabela de pontos

x	0	1/4	1/2	3/4	1
y	1	2	1	0	1

e a função

$$S_N(x) = \begin{cases} 1 + 6x - 32x^3, & 0 \leq x < \frac{1}{4} \\ 2 - 24(x - \frac{1}{4})^2 + 32(x - \frac{1}{4})^3, & \frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 - 6(x - \frac{1}{2}) + 32(x - \frac{1}{2})^3, & \frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4} \\ 24(x - \frac{3}{4})^2 - 32(x - \frac{3}{4})^3, & \frac{3}{4} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a) Mostre que S_N é a spline cúbica natural interpoladora dos pontos da tabela apresentada acima.

b) Sejam S_C e S_{SN} as splines cúbicas completa e sem nó, respetivamente, interpoladoras dos mesmos pontos.

i) Indique a expressão de S_C e S_{SN} em $[0, 1/4]$.

ii) Indique a expressão de S_C e S_{SN} em $[3/4, 1]$.

iii) Represente graficamente S_N, S_C e S_{SN}.

Trabalho 3. **Interpolação inversa**

Se tivermos uma tabela de pontos (x_i, y_i) *com* $y_i = f(x_i)$ *valores de uma função* $y = f(x)$ *nos nós* x_i, *e se soubermos que a função* f *é invertível, podemos trocar o papel das abcissas* $x_1, \ldots, x_n$ *e das ordenadas* $y_1, \ldots, y_n$ *e construir o polinómio interpolador dos valores* $x_1, \ldots, x_n$ *nos nós* $y_1, \ldots, y_n$, *ou seja, construir o polinómio interpolador da função inversa* $x = f^{-1}(y)$. *Diz-se, neste caso, que se trata de interpolação inversa.*

a) Justifique por que razão este processo não funciona se f não for monótona no intervalo de interpolação.

b) Use interpolação inversa para determinar uma estimativa para:

i) a raíz real da equação $x^3 - x - 1 = 0$.

ii) $\sqrt[3]{8.1232}$, supondo que a sua "máquina" não calcula valores de raízes cúbicas.

Trabalho 4. **Interpolação nos nós de Chebyshev**

Chamam-se nós de Chebyshev (de grau n) os pontos definidos por

$$z_k^{(n)} = \cos\left(\tfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right); k = 1, \ldots, n.$$

Estes pontos são os zeros do chamado polinómio de Chebyshev de grau n, definido por

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),\ \ x \in [-1, 1].$$

Os polinómios de Chebyshev constituem uma importante família de polinómios ortogonais, com muitas aplicações em diversas áreas da matemática.

a) Usando a função **plot**, represente graficamente, no intervalo $[-1, 1]$, os nós de Chebyshev de grau 11.

b) Considere o produto

$$\pi(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_{11})$$

com as duas escolhas de pontos seguintes:

(i) $x_k = -1 + (k-1)/5; k = 1, \ldots, 11;$

(ii) $x_k = z_k^{(11)}; k = 1, \ldots, 11.$

Esboce os gráficos de $|\pi(x)|$ para cada uma dessas escolhas de nós. Que observa?

Nota: De facto, pode mostrar-se que a escolha $x_k = z_k^{(n)}$ minimiza

$$\max_{x \in [-1,1]} |(x - x_1) \ldots (x - x_n)|\,.$$

c) Considere novamente a *função de Runge*

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2},\ \ x \in [-1, 1]$$

e, para $n \in \mathbb{N}$, seja P_{n-1} o polinómio de grau $\leq n-1$ interpolador de f nos nós de Chebyshev de grau n, isto é, nos pontos $x_k = z_k^{(n)}; k = 1, \ldots, n$. Construa os polinómios P_2, P_4 e P_{10} e P_{20} e esboce o gráficos de f e de cada um desses polinómios.

d) Relembrando os resultados do Exercício 12, faça um pequeno comentário aos resultados obtidos.