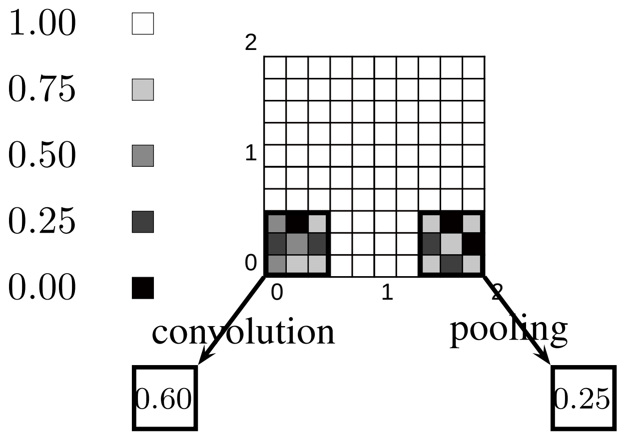
Universidade do Minho (DMA)
julho 2019

Machine Learning:: Fundamental and Application
Epoca Especial

Nome ______________________________

Número ____________________ Curso ____________________

Consideramos uma imagem $X = (X_1, \cdots, X_I)$ constituida de $I = I_1 \times I_2$ pixels $X_i \in [0, 1]$. Os métodos de ”convolution” ou de ”pooling” consiste em utilizar uma pequena porção x de imagem constituida de $b_1 \times b_2$ pixels a quem aplicamos uma operação de filtro. No caso da ”convolution”, usamos uma combinação lineare entre os valores do pixels enquanto o ”pooling” calcula o valor máximo entre os pixels. Por exemplo, na figura apresentamos os dois mecanismos.



- A esquerda (convolution), o valor obtido é uma combinação linear entre a imagem de pixels $x = (x_1, \cdots, x_9)$ e o filtro de convolução $c = (c_0, c_1, c_2, \cdots, c_9)$ com c_0 o bias. Para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^9$, a convolução é dada pela formula

$$c(x) = c_0 + \sum_{i=1}^{9} c_i x_i$$

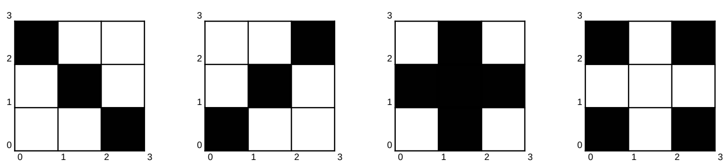
  Os valores de convolução são deteminadas em função do objetivo do filtro como vamos ver a seguir.

- A direita (pooling), o valor obtido é o máximo dos valores dos pixels, seja

$$p(x) = \max_{i=1}^{9} x_i$$

O objetivo deste estudo é analizar diferente filtros de convoluções para identificar formas geometricas elementares. Cuidado com as notações: X representa toda a imagem enquanto x representa uma porção da imagem.

Parte A.
Nesta parte, consideramos porção de imagem x de dimensção 3×3 e simplificamos a descripção usando apenas pixel $x_i \in \{0, 1\}$ (0 preto e 1 branco). Quatro figuras geometricas são definidas no grafico seguintes: Por exemplo, a figura a é



Shape a Shape b Shape c Shape d

definida pelo vetor $a = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1)$ de componentes a_i.
1) Quais são os vetores b, c, d?

2) Notamos por $c^a = (c_0^a, c_1^a, \cdots, c_9^a)$ o vetor de convolução que aplicamos a qualquer x

$$c^a(x) = c_0^a + \sum_{i=1}^{9} c_i^a x_i,$$

tal como $c^a(a) = 1$ e $c^a(x) = 0$ para $x = b, c, d$, ou seja a convolução filtra a imagem para x identificar a figura a.Verificar que $c^a = (-1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ é uma solução.

3) Escrever as quatro equações que devem respectar o vetor de convolução c^a.

4) Mostra que o sistema linear se reduz a

$$\begin{cases} c_0^a + 2c_5^a = 1 \\ c_3^a - c_5^a + c_7^a = -1 \\ c_1^a - c_5^a + c_9^a = 0 \\ c_2^a + c_4^a + c_6^a + c_8^a = c_5^a - 1 \end{cases}$$

5) Propor uma solução para c^a diferente da solução do ponto 1.

6) Do mesmo modo, determinar as equações do filtro c^b e mostrar que simplificamos os sistema para chegar a

$$\begin{cases} c_0^b + 2c_5^b = 1 \\ c_1^b - c_5^b + c_9^b = -1 \\ c_3^b - c_5^b + c_7^b = 0 \\ c_2^b + c_4^b + c_6^b + c_8^b = c_5^b - 1 \end{cases}$$

Deduzir uma solução c^b para o segundo filtro.

Parte B. *Cuidado!!! Pensar em usar python para realizar os cálculos.*

Para determinar os vetores de convolução para c e d, vamos usar uma tecnica dual. Procuramos c^c como uma combinação das quatro figuras, seja

$$c^c = \alpha_a^c\, \widetilde{a} + \alpha_b^c\, \widetilde{b} + \alpha_c^c\, \widetilde{c} + \alpha_d^c\, \widetilde{d}$$

onde $\widetilde{x}$ é a extensão de x com a componente adicional $x_0 = 1$.

1) Escrevendo $c^c(c) = 1$ e $c^c(x) = 0$, se $x = a, b, d$, mostrar que os coefficientes do vetor α^c satisfazem

$$\begin{cases} \alpha_a^c\, \widetilde{a}\cdot\widetilde{a} + \alpha_b^c\, \widetilde{b}\cdot\widetilde{a} + \alpha_c^c\, \widetilde{c}\cdot\widetilde{a} + \alpha_d^c\, \widetilde{d}\cdot\widetilde{a} = 0 \\ \alpha_a^c\, \widetilde{a}\cdot\widetilde{b} + \alpha_b^c\, \widetilde{b}\cdot\widetilde{b} + \alpha_c^c\, \widetilde{c}\cdot\widetilde{b} + \alpha_d^c\, \widetilde{d}\cdot\widetilde{b} = 0 \\ \alpha_a^c\, \widetilde{a}\cdot\widetilde{c} + \alpha_b^c\, \widetilde{b}\cdot\widetilde{c} + \alpha_c^c\, \widetilde{c}\cdot\widetilde{c} + \alpha_d^c\, \widetilde{d}\cdot\widetilde{c} = 1 \\ \alpha_a^c\, \widetilde{a}\cdot\widetilde{d} + \alpha_b^c\, \widetilde{b}\cdot\widetilde{d} + \alpha_c^c\, \widetilde{c}\cdot\widetilde{d} + \alpha_d^c\, \widetilde{d}\cdot\widetilde{d} = 0 \end{cases}$$

com $\widetilde{a}\cdot\widetilde{b}$ o produto interno entre os dois vetores.

2) Determinar os coeficientes do sistema lineare. Calcular o vetor α^c.

3) Deduzir a matriz de convolução c^c.

4) Aplicar o mesmo método para determinar α^d e finalmente c^d.

Parte C.

O objetivo é de determinar os filtros c^a, c^b, c^c and c^d por aprendizagem usando um classificador logistico

$$\widetilde{y}(x; w) = \sigma(w^T \widetilde{x}) = \sigma(w \cdot \widetilde{x})$$

onde σ é a função logistica.

1) Seja a base de dados $D(a) = (x^n, y^n)$ tal como $y^n = 0$ se $x^n \neq a$ e $y^n = 1$ se $x^n = a$. Propor uma função custo $E(w; D(a))$ que permite treinar o classificador logistico.

2) Apresentar um algoritmo para treinar o classificador.

3) Supomos o treino perfeito tal que:

- existe w^a que realizar $E(w^a, D(a)) = 0$;
- a, b, c, d são elementos da base de dados $D(a)$.

Determinar as quatro equações que o classificador logistico deve satisfazer.

4) Mostrar que se o shape $e = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ está presente na base de dados, não podemos encontrar w^a tal como $E(w^a, D(a)) = 0$.