Matemática Computacional

Exercícios de Equações Não Lineares

maria irene falcão

Mestrado em Matemática e Computação

Exercícios

Exercício 1. Considere a equação $x^3 - 2x - 5 = 0$.

a) Mostre que a equação tem uma raiz real no intervalo $[2, 3]$.

b) Mostre que, para qualquer aproximação inicial $x_0 \in [2, 3]$, o método de Newton converge para essa raiz.

c) Efetue 5 iterações do método de Newton e estime o erro com que x_4 aproxima a raiz.

Exercício 2. Seja $f(x) = e^x + x - 7$. Prove que f tem um único zero e que o método de Newton converge para esse zero para qualquer aproximação inicial $x_0 \in \mathbb{R}$. Efetue 4 iterações do método de Newton começando a iterar em $x_0 = 0$.

Exercício 3. Utilize a função **metNewton** para obter aproximações para raízes das equações seguintes, com as aproximações iniciais indicadas, e comente os resultados obtidos.

a) $4\,\text{sen}\, x - e^x = 0; \quad x_0 = 0.5$

b) $x \ln x - 1 = 0; \quad x_0 = 2.5$

c) $x^3 - x - 1; \quad x_0 = 0$

d) $x^3 - 3.5x^2 + 4x - 1.5 = (x - 1)^2(x - 1.5) = 0$:

(i) $x_0 = 0.5$; (ii) $x_0 = 1.3333$; (iii) $x_0 = 1.4$

e) $-0.5x^3 + 2.5x = 0$:

(i) $x_0 = 1$; (ii) $x_0 = -1$; (iii) $x_0 = 2$

Exercício 4. Para cada uma das equações seguintes, determine uma função iterativa g e um intervalo I, de tal modo que se verifiquem as condições de aplicação do Teorema do Ponto Fixo. Encontre uma aproximação para a menor raiz positiva dessas equações, usando o referido teorema.

a) $x^3 - x - 1 = 0$

b) $x - 2\,\text{sen}\, x = 0$

Nota: Comece por localizar graficamente as raízes das equações dadas.

Exercício 5. Pretende-se resolver a equação $\dfrac{1}{x} - e^x = 0$, a qual admite uma raiz perto do ponto $x = 0.5$.

a) Quais das seguintes fórmulas iterativas

$$x_{k+1} = -\ln x_k\,; \qquad x_{k+1} = e^{-x_k}\,; \qquad x_{k+1} = \frac{x_k + e^{-x_k}}{2}\,,$$

poderão ser usadas? E qual deverá ser usada?

b) Calcule uma aproximação para essa raiz, usando a fórmula mais eficiente, iterando até que $|x_k - x_{k-1}| \leq 0.5 \times 10^{-3}$. Estime, então, o valor de $|\alpha - x_k|$.

c) Indique uma estimativa para o número de iterações que deveria efetuar para, usando a outra fórmula possível, garantir uma aproximação para a raiz com o mesmo número de casas decimais da aproximação obtida na alínea anterior.

Exercício 6. Considere a sucessão de números reais definida por

$$x_0 = 1, \quad x_{k+1} = 1 - \frac{4}{25x_k}; k = 0, 1, 2, \ldots$$

a) Mostre que os termos desta sucessão estão todos no intervalo $[\frac{4}{5}, 1]$ e que a sucessão converge.

b) Diga, justificando, qual o limite α dessa sucessão.

c) Mostre que se tem

$$|\alpha - x_k| \leq \tfrac{16}{75}(\tfrac{1}{4})^k.$$

Exercício 7. Considere a equação $x^2 - 5 = 0$. Use a função $\mathbf{metPontoFixo}$ para procurar uma aproximação para a raiz dessa equação, considerando como função iterativa cada uma das funções seguintes e tomando $x_0 = 2.5$ para aproximação inicial; comente os resultados obtidos.

a) $g_1(x) = x^2 + x - 5$

b) $g_2(x) = 5/x$

c) $g_3(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{5}{x})$

Exercício 8. Use a função pré-definida $\mathbf{fzero}$ ou $\mathbf{roots}$ para resolver as equações de alguns dos exercícios anteriores.

Exercício 9. Determine o número de zeros do polinómio $p(x) = x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1$ pertencentes a $[0, 2]$.

Exercício 10. Para cada um dos polinómios seguintes, diga o que pode concluir sobre a natureza dos seus zeros, usando as regras dos sinais de Descartes, e indique também uma região anelar do plano complexo que os contenha. Confirme as suas respostas recorrendo ao uso da função **roots** do Matlab. (No caso da alínea d), escolha alguns valores de n.)

a) $p_1(x) = x^6 + x^2 - 3x - 1$.

b) $p_2(x) = 4x^7 - 3x^5 - x^3 + x^2 - 5x + 1$

c) $p_3(x) = x^5 + x^4 - x + 2$

d) $p_4(x) = x^n + x - 1, \ n \geq 2$.

Exercício 11. Considere o polinómio

$$p(x) = x^3 - 3x + 3.$$

a) Sem calcular os seus zeros, mostre que p tem um único zero negativo, o qual pertence ao intervalo $[-4, -\frac{1}{2}]$.

b) Considere $x_0 = -2.25$ e efetue cinco iteração do método de Newton para aproximar esse zero.

c) Os dois outros zeros de p são complexos. Efetue cinco iterações do método de Newton com aproximação inicial $x_0 = 1 + \frac{1}{2}i$ para determinar um desses zeros e indique qual é o outro zero.

d) Calcule os zeros de p usando a função **roots** do Matlab e compare-os com as respetivas aproximações obtidas nas alíneas anteriores.

Exercício 12. Considere o seguinte sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 9 = 0 \\ 18y - 14x^2 + 45 = 0 \end{cases}.$$

a) Use a função `fimplicit` para esboçar, num mesmo gráfico, as curvas definidas implicitamente por cada uma das equações do sistema.

b) Determine uma aproximação para a solução que se encontra no primeiro quadrante, usando cinco iterações do método de Newton para sistemas, com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Determine as restantes soluções do sistema.

Nota: Faça uso da simetria para reduzir o número de soluções a procurar computacionalmente.

Exercício 13. Determine aproximações para as soluções dos seguintes sistemas não-lineares, usando o método de Newton para sistemas.

Nota: Sempre que possível, faça uso da simetria para reduzir o número de soluções a procurar computacionalmente.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 - y^2 = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2y = 2x^3 + x + 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ \text{sen}(\frac{\pi}{2} x_1) + x_2^3 = 0 \end{cases}$

Trabalhos

Trabalho 1.

a) Considere a aplicação do método de Newton para resolver a equação

$$2 - e^x = 0,$$

a qual admite $r = \ln 2$ como solução, tomando como aproximação inicial $x_0 = 1$.

(i) Calcule os quocientes

$$R_k^{(2)} = \frac{|r - x_{k+1}|}{|r - x_k|^2}$$

e verifique se $R_k^{(2)}$ tende para o valor esperado (qual?) quando $k \to \infty$.

(ii) Calcule os quocientes

$$R_k^{(p)} = \frac{|r - x_{k+1}|}{|r - x_k|^p}$$

para valores de $p \neq 2$, mas próximos de 2, por exemplo, $p = 1.9, 1.8, 2.1$. Que verifica?

b) Considere novamente a aplicação do método de Newton, agora para a equação

$$1 - xe^{1-x} = 0,$$

a qual admite $r = 1$ como raiz dupla (tome $x_0 = 0$). Determine os quocientes $R_k^{(p)}$ para $p = 2$ e $p = 1$.

c) Mostre que se $f(r) = f'(r) = \cdots = f^{(m-1)}(r) = 0$ e $f^{(m)}(r) \neq 0$, então o seguinte *método de Newton modificado*

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad (1)$$

converge quadraticamente para r (supondo x_0 suficientemente próximo de r).

d) Modifique a função **metNewton** para implementar o método de Newton modificado (1) com $m = 2$ e repita a alínea b), usando esse método.

Comente devidamente os resultados obtidos.

Trabalho 2. O método de Halley consiste no esquema iterativo

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)f'(x_k)}{2(f'(x_k))^2 - f(x_k)f''(x_k)}; \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

começando com a aproximação inicial x_0.

a) Deduza o esquema, aplicando o método de Newton à função $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{|f'(x)|}}$.

b) Prove que o método tem ordem de convergência 3 (pode assumir que f é suficientemente regular).

c) Use os métodos de Newton e de Halley para obter as raízes da equação $xe^x = -\frac{1}{2e}$, usando $x_0 = 0.25$ e $x_0 = -3$. Faça um comentário relativo à ordem de convergência dos dois métodos.

Trabalho 3. A *equação de Kepler* relativa ao movimento dos planetas tem a forma

$$\omega t = \phi - \epsilon \,\mathrm{sen}\, \phi,$$

onde t é o tempo, ω é a frequência angular, ϵ é a excentricidade da órbita do planeta (elipse) e ϕ é o ângulo. Para determinar a localização do planeta no instante t, é necessário determinar o valor de ϕ da equação de Kepler, sendo, então, as coordenadas x e y dadas por

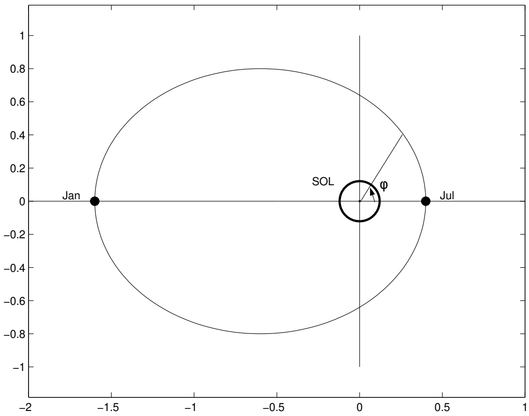
$$x = a(\cos\phi - \epsilon) \qquad \text{e} \qquad y = a\sqrt{1-\epsilon^2}\,\mathrm{sen}\,\phi,$$

onde a é o semi-eixo maior da elipse.

Considere um planeta com $a = 1$ AU[1] e excentricidade $\epsilon = 0.6$.[2] A figura abaixo mostra a órbita desse planeta e a sua posição em "Janeiro" ($\omega t = \pi \Leftrightarrow \phi = \pi$) e em "Julho" ($\omega t = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$).

[1]AU (unidade astronómica)

[2]Este valor de ϵ é, na realidade, muito maior do que a excentricidade da órbita da Terra ...



O objetivo deste exercício é determinar a posição do planeta nos restantes dez meses do ano, assumindo que cada mês tem a duração de 1/12 do ano. Para isso, deverá resolver a equação de Kepler para $\omega t = \frac{k\pi}{6}; k = 1, \ldots, 11$, calculando depois, para cada um dos valores de ϕ obtidos, as correspondentes coordenadas x e y. Deverá, assim, acabar de preencher a tabela seguinte e esboçar a figura correspondente com as posições do planeta (semelhante à figura apresentada, mas mais completa).

ωt	ϕ	x	y
0	0.000000	0.400000	0.000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
π	0.3141593	-1.600000	0.000000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$