Matemática Computacional

Exercícios de Quadratura

maria irene falcão

Mestrado em Matemática e Computação

Exercícios

Exercício 1. Considere o integral

$$I = \int_0^1 \left(1 + e^{-x}\text{sen}\, 4x\right)\, dx.$$

a) Determine uma aproximação para I, usando: (*i*) a regra do trapézio; (*ii*) a regra de Simpson.

b) Sabendo que $I = 1.3082506046$ (10 c.d.), comente os resultados obtidos.

c) Esboce o gráfico da função $f(x) = 1 + e^{-x}\text{sen}\, 4x$ no intervalo $[0, 1]$ e sobreponha--lhe o gráfico de P_1 (polinómio linear interpolador de f em $x = 0$ e $x = 1$). Repita o exercício considerando o polinómio P_2 interpolador nos três pontos $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$. Tendo em conta os gráficos obtidos, justifique os resultados das alíneas anteriores.

Exercício 2.

a) Deduza a chamada *Regra do Ponto Médio*,

$$\int_a^b f(x)\, dx = h\, f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \frac{h^3}{24}\, f''(\xi)\,, \quad \xi \in (a, b)\,, \tag{1}$$

onde $h = b - a$ e se supõe $f \in C^2[a, b]$.

b) Interprete geometricamente a regra anterior.

c) A partir da regra (1), deduza a *Regra do Ponto Médio Composta*

$$\int_a^b f(x)dx = h \sum_{i=1}^{N} f_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{24}(b - a)f''(\eta),$$

onde $x_{i+\frac{1}{2}} = a + (2i - 1)\frac{h}{2}, i = 1, \ldots, N, h = \frac{b-a}{N}, f_{i+\frac{1}{2}} := f(x_{i+\frac{1}{2}})$ e $\eta \in (a, b)$.

d) Use a regra definida na alínea anterior, com $N = 10$, para estimar novamente o valor do integral do Exercício 1.

Exercício 3. Determine o número N de subintervalos que é necessário considerar para, usando a regra do trapézio composta, encontrar uma aproximação para o valor do integral

$$I = \int_2^7 \frac{1}{x}\, dx$$

com 6 casas decimais de precisão.

Nota: Ignore a contribuição dos erros de arredondamento.

Exercício 4. Considere o integral

$$I = \int_1^6 \left(2 + \text{sen}\,(2\sqrt{x})\right)\,dx.$$

a) Obtenha aproximações para I, usando a regra do trapézio composta com N subintervalos, T_N, para os seguintes valores sucessivos de N: $10, 20, 40, 80$ e 160.

b) Sabendo que o valor do integral (com 10 c.d.) é $I = 8.1834792077$, calcule $|E_{T_N}|$ para os sucessivos valores de N e diga se os resultados confirmam a ordem de aproximação $\mathcal{O}(h^2)$ $(h = (b-a)/N)$ da regra do trapézio composta.

Exercício 5.

a) Estabeleça a seguinte estimativa para o erro da regra do trapézio com N subintervalos (N par):

$$|E_{T_N}(f)| \approx \left|\frac{T_N(f) - T_{N/2}(f)}{3}\right|.$$

b) Considere o integral

$$I = \int_{-0.1}^{0.1} \cos x dx.$$

Estime o valor de I usando T_4 e T_8 e obtenha, então, uma estimativa para $|E_{T_8}|$. Compare essa estimativa com o erro efetivamente cometido.

Exercício 6. Repita o Exercício 4, mas trabalhando com a regra de Simpson composta.

Exercício 7.

a) Seja S_N um valor aproximado para o integral $I = \int_a^b f(x)dx$ obtido usando a regra de Simpson composta com N subintervalos (N múltiplo de 4) e seja $E_{S_N}(f)$ o respetivo erro de truncatura. Estabeleça a seguinte estimativa para o erro:

$$|E_{S_N}(f)| \approx \left|\frac{S_N(f) - S_{N/2}(f)}{15}\right|.$$

b) Considere novamente o integral $I = \int_{-0.1}^{0.1} \cos x\, dx$. Calcule uma estimativa para I, usando $N = 8$ subintervalos, e estime o respetivo erro. Compare essa estimativa com o erro efetivamente cometido.

Exercício 8. Utilize a função **regSimpson** para estimar o valor dos seguintes integrais, usando diferentes valores de n:

$$a)\ \int_0^2 \text{sen}\, t dt \qquad b)\ \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(0.6\ \text{sen}\, t)dt \qquad c)\ \int_0^1 te^{-t^2}dt$$

Exercício 9. Obtenha informação sobre a função **integral** e utilize-a para estimar os integrais cujo cálculo é requerido nas alíneas seguintes.

a) A função *erro*, erf, é definida por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt\,.$$

Determine uma estimativa para erf(0.5).

Use a função pré-definida **erf** para estimar novamente o valor erf(0.5), comparando com o valor obtido por integração.

b) Tendo em conta que a área do círculo unitário é $A = \pi$, deduza que

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx\,.$$

Obtenha uma estimativa para π, usando o integral anterior.

Exercício 10. Mostre que a precisão de uma regra de quadratura do tipo

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

é, no máximo, $2n - 1$.

Exercício 11. Determine o valor das constantes w_1 e w_2 de modo que a seguinte fórmula de quadratura

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(-1) + w_2 f(-\tfrac{1}{3}) + w_2 f(\tfrac{1}{3}) + w_1 f(1)$$

tenha a maior precisão possível e indique qual é essa precisão.

Trabalhos

Trabalho 1. **Regra do Trapézio Corrigida**

Pode estabelecer-se a seguinte regra de quadratura, conhecida por *Regra do Trapézio Corrigida*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \frac{h^2}{12}\left(f'(a)-f'(b)\right) + \frac{h^5}{720}f^{(4)}(\xi), \tag{2}$$

onde $h = b - a$, $\xi \in (a, b)$ e, naturalmente, se supõe que $f \in C^4[a, b]$.

a) Deduza, a partir da regra (2), a chamada *Regra do Trapézio Corrigida Composta*:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_1 + 2\left(f_2 + \cdots + f_N\right) + f_{N+1}\right] + \frac{h^2}{12}\left(f'(a)-f'(b)\right) + \frac{(b-a)h^4}{720}f^{(4)}(\eta),$$

onde $x_i = a + (i-1)h; i = 1, \ldots, N+1; h = \frac{b-a}{N}, f_i := f(x_i)$ e $\eta \in (a, b)$.

b) Mostre que, se f é periódica de período $b - a$ e $f \in C^4[a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f_1 + 2\left(f_2 + \ldots + f_N\right) + f_{N+1}\right] + \frac{(b-a)h^4}{720}f^{(4)}(\eta)$$

e deduza que a regra do trapézio composta é especialmente adaptada à integração, entre a e b, deste tipo de funções.

c) Se $TC_N(f)$ designa o valor dado pela regra do trapézio corrigida composta, com N subintervalos (N par), e $E_{TC_N}(f)$ o respetivo erro, estabeleça a seguinte estimativa

$$|E_{TC_N}(f)| \approx \left|\frac{TC_N(f) - TC_{N/2}(f)}{15}\right|. \tag{3}$$

d) Escreva uma função $[integral, erro] = \mathbf{regTrapezioCorr}(f, df, a, b, N)$ para calcular uma aproximação para o valor de um integral $I = \int_a^b f(x)dx$, usando a regra do trapézio corrigida composta com N subintervalos (N par) e estimar o respetivo erro pelo uso da fórmula (3).

e) Considere o integral

$$I = \int_0^1 e^{-x}dx.$$

Calcule

$$\log_2 \frac{|E_{TC_N}(f)|}{|E_{TC_{N/2}}(f)|}$$

para $N = 10, 20, 40, 80$ e diga se os resultados confirmam a ordem de convergência da regra do trapézio composta corrigida.

Trabalho 2. Pretende-se aproximar

$$I = \int_{-1}^{1} f(x)\, dx$$

através de uma regra de quadratura do tipo

$$Q(f) = A_0 f(0) + A_1 \left[f(-\alpha) + f(\alpha) \right], \quad \text{com } \alpha \in [-1, 1] \quad \text{e} \quad \alpha \neq 0.$$

a) Determine, em função de α, o valor de A_0 e A_1 de forma a que a regra tenha, pelo menos, grau de exatidão 2.

b) Existe algum valor de α para o qual a referida regra tem grau de exatidão superior a 2? Em caso afirmativo, determine o grau de exatidão da regra.