Processamento de Sinal e Ôndulas

Mestrado em Matemática e Computação

Colectânea de Exercícios

(com a utilizaçao do *Mathematica*)

Maria Joana Soares

introdução

Exercício 1. Seja H um espaço de Hilbert (complexo) com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma associada $\| \cdot \|$.

a) Mostre que é válida a chamada *regra do paralelogramo*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\Big(\|u\|^2 + \|v\|^2\Big), \quad u, v, \in H.$$

b) Estabeleça a seguinte identidade (conhecida como *identidade de polarização*):

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2\Big), \quad u, v \in H.$$

Exercício 2. Considere o espaço $\ell^p(\mathbb{Z})$ das sucessões complexas $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tais que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p < \infty$ com norma $\|x\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^p\Big)^{1/p}$. Mostre que, se $p \neq 2$, então a norma $\| \cdot \|_p$ não deriva de nenhum produto interno.

Exercício 3. Mostre que as sequências $\{\delta_k, k \in \mathbb{Z}\}$ onde $\delta_k = ((\delta_k)_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ é definida por

$$(\delta_k)_n = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases}$$

formam uma base o.n. do espaço $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Exercício 4. Mostre que o conjunto das funções $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ onde

$$e_n(t) = e^{2\pi i n t}$$

é um conjunto o.n. de $L^2[0,1]$.

sinais e sistemas digitais

Exercício 1. Esboce o gráfico dos seguintes sinais, usando o *Mathematica*:

a) $x(n) = 2\delta(n+2) - \delta(n-4)$

b) $x(n) = n[u(n) - u(n-10)] + 10e^{-0.3(n-10)}[u(n-10) - u(n-20)]$

c) $x(n) = \cos(0.04\pi n) + 0.2\xi(n)$ onde $\xi(n)$ é um "ruído" aleatório baseado na distribuição normal com média nula e desvio padrão 1.

Exercício 2. Considere o sinal $x(n) = \cos(0.3\pi n)$.

a) O sinal é periódico? Qual é o seu período fundamental?

b) Esboce o gráfico de $x(n)$ para $-20 \leq n \leq 20$.

Exercício 3. Considere o sinal $x(n) = \cos(0.3n)$.

a) O sinal é periódico?

b) Esboce o gráfico de $x(n)$ para $-20 \leq n \leq 20$.

Exercício 4. Considere o seguinte sinal complexo

$$x(n) = e^{(-0.1+i0.3)n}.$$

Apresente, em figuras distintas, os gráficos da sua parte real, da sua parte imaginária, da sua amplitude (módulo) e da sua fase (argumento).

Exercício 5. Mostre que o produto de convolução (discreto) é comutativo e linear.

Exercício 6. Seja $x(n) = 2\delta(n-2) - \delta(n-1) + 3\delta(n) + 4\delta(n+3)$ e $y(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n+1)$.

a) Represente $x(n)$ e $y(n)$ geometricamente. Calcule $x*y$ e faça também a sua representação gráfica.

Nota: Observe que, dadas duas sequências finitas $x(n)$ e $y(n)$ tais que $x(n) = 0$ para todo o n, excepto para $m_x \leq n \leq M_x$, e $y(n) = 0$ para todo o n, excepto para $m_y \leq n \leq M_y$, então o produto de convolução é também uma sequência finita tendo-se $y(n) = 0$ para todo o n, excepto para $m_x + m_y \leq n \leq M_x + M_y$.

b) Use a função `ListConvolve` do *Mathematica* (com escolha adequada de parâmetros) para obter o produto de convolução da alínea anterior.

Exercício 7. Sejam $h(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n u(n)$ e $x(n) = u(n) - u(n-10)$.

a) Esboce $h(n)$ e $x(n)$. Determine $y(n) = (x * h)(n)$ e esboce o seu gráfico.
Nota: Para calcular $y(n)$ estude, separadamente, os casos, $n < 0$, $0 \le n < 9$ e $n \ge 9$ e recorde que
$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1-\alpha^N}{1-\alpha}.$$

b) Use a função `DiscreteConvolve` para obter o produto de convolução anterior. Que observa?

Exercício 8. Relativamente a cada um dos sistemas abaixo, diga se ele é: (i) linear; (ii) invariante no tempo; (iii) estável; (iv) causal.

a) $T(x(n)) = x(n^2)$
b) $T(x(n)) = x(n) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$
c) $T(x(n)) = x(n) + 3u(n+1)$

Exercício 9. Considere os três sistemas seguintes:
$$T_1(x(n)) = 2^{x(n)}, \quad T_2(x(n)) = 3x(n) + 4, \quad T_3(x(n)) = x(-n).$$

a) Indique quais são lineares.

b) Teste a sua afirmação computacionalmente. Para tal, gere uma sequência aleatória $x_1(n)$ baseada na distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$, para $0 \le n \le 100$ e uma sequência aleatória $x_2(n)$ baseada na distribuição Gaussiana com média zero e variância 10, para $0 \le n \le 100$. Calcule $T(a_1x_1 + a_2x_2)$ e $a_1T(x_1) + a_2T(x_2)$ para quaisquer duas constantes por si escolhidas e compare. Efectue várias realizações desta experiência para "confirmar" a sua resposta à alínea anterior.
Nota: Para o sistema T_3 considere que as sequências x_1 e x_2 (que têm 101 elementos) correspondem a sinais com entradas não nulas para $n = -50, -49, \ldots, 49, 50$ (e as restantes entradas nulas).

Exercício 10. Mostre que um sistema LIT com resposta impulsional $h(n)$ é estável se e só se $\sum_n |h(n)| < \infty$ (i.e. se e só se $h \in \ell^1(\mathbb{Z})$).

Exercício 11. Mostre que um sistema LIT com resposta impulsional $h(n)$ é causal se e só se $h(n) = 0$ para $n < 0$.

Exercício 12. Seja T um sistema LIT com resposta impulsional $h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n+1)$. Determine a resposta do sistema à entrada $x(n) = u(n) - u(n-4)$. Esboce os gráficos de $x(n)$, $h(n)$ e $y(n)$.

Exercício 13. Considere o sistema definido por $y(n) = x(n) - x(n-1)$. Determine a resposta do sistema a cada uma das entradas seguinte e esboce os gráficos correspondentes.

a) $x(n) = 5\big(u(n) - u(n-20)\big)$
b) $x(n) = n\big(u(n) - u(n-10)\big) + (20-n)\big(u(n-10) - u(n-20)\big)$

Transformada de Fourier em Tempo Discreto

Exercício 1. Determine a TFTD dos seguintes sinais, sem recurso ao Mathematica:

a) $x(n) = \delta(n-k),\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x(n) = u(n) - u(n-N), \quad N \in \mathbb{N}$

c) $x(n) = (\frac{1}{2})^{-n} u(-n-1)$

d) $x(n) = (\frac{1}{3})^{|n|} u(-n-2)$

Exercício 2. Repita o exercício anterior, fazendo uso da função `FourierSequenceTransform`.

Exercício 3. Considere o sistema discreto

$$y(n) = 0.25x(n) + 0.5x(n-3) + 0.25x(n-6).$$

a) Determine a sua resposta impulsional $h(n)$.

b) Determine a sua resposta em frequência $\hat{h}(\omega)$ e represente graficamente a sua amplitude e fase.

c) Dê um exemplo de um sinal não nulo $x(n)$ que, aplicado como entrada ao sistema dado produza uma resposta constantemente nula.

Exercício 4. Repita o exercício anterior para o sistema definido por

$$y(n) = 0.5x(n) - 0.5x(n-4).$$

Exercício 5. Considere um sinal $x(n)$ cuja TFTD é $\hat{x}(\omega)$. Determine (em função de $\hat{x}(\omega)$) a TFTD dos seguinte sinais:

a) $y(n) = (-1)^n x(n)$

b) $y(n)$ dado por

$$y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n\text{par} \\ 0, & n\text{ímpar} \end{cases}$$

c) $y(n)$ dado por $y(n) = x(2n)$

Nota: Esta alínea é um pouco mais difícil. A resposta é:

$$\frac{1}{2}\big(\hat{x}(\frac{\omega}{2}) + \hat{x}(\frac{\omega}{2} + \pi)\big).$$

Sugestão: use $y(n) = x(2n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{x}(\omega) e^{i(2n)\omega} d\omega$

Exercício 6. Seja dado um sistema LIT com resposta em frequência $\hat{h}(\omega)$ e correspondente resposta impulsional $h(n)$. Suponha que sabemos que:

(i) O sistema é causal;

(ii) $\hat{h}(\omega) = \overline{\hat{h}(-\omega)}$;

(iii) A TFTD da sequência $h(n+1)$ é real.

Mostre que o sistema é FIR e diga qual o comprimento total da sequência $h(n)$ (diz-se que a sequência tem comprimento L, se, sendo x_m e x_M, respectivamente o maior inteiro e o menor inteiro tais que $x(n) = 0$, para $n < x_m$ e $x(n) = 0$ para $n > x_M$, se tem e $L = x_M - x_n + 1$).

Exercício 7. Suponha que a um sinal $x(n)$ se aplicam sucessivamente dois sistemas LIT:

$$x(n) \rightarrow \boxed{T_1} \rightarrow w(n) \rightarrow \boxed{T_2} \rightarrow y(n)$$

em que:

- o sistema T_1 tem uma resposta em frequência $\hat{h_1}(\omega)$ dada por

$$\hat{h_1}(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < \omega \leq \pi \end{cases}$$

- o sistema T_2 é descrito pela seguinte equação às diferenças:

$$y(n) = w(n) - w(n-1).$$

Suponha que o sinal de entrada é

$$x(n) = \cos(\frac{3}{5}\pi n) + 3\delta(n-5) + 2.$$

Determine a resposta $y(n)$.

Exercício 8. Considere um sistema (LIT, causal) cujas resposta em frequência é dada por:

$$\hat{h}(\omega) = \frac{-\frac{1}{5} + e^{-i\omega}}{1 - \frac{1}{5}e^{-i\omega}}.$$

a) Expresse o sistema na forma de uma equação às diferenças.

b) Determine a resposta impulsional $h(n)$.

departamento de matemática e aplicações
universidade do minho

Transformada Z

Exercício 1. Determine a Transformada Z dos seguintes sinais, usando a definição, indicando a respectiva RC:

a) $x(n) = \delta(n-k),\ k \in \mathbb{Z}$

b) $x(n) = 2^n u(n)$

c) $x(n) = (\frac{1}{5})^{-n} u(-n-1)$

d) $x(n) = (\frac{4}{3})^n u(1-n)$

e) $x(n) = a^{|n|}$ com $|a| < 1$.

Exercício 2. Use a função `ZTransform` do Mathematica para tentar calcular as transformadas das alíneas anteriores.

Verifique qual a definição de transformada Z que o Mathematica usa e interprete os resultados.

Calcule as transformadas que não podem ser calculadas com a função `ZTransform`, recorrendo à definição de Z (mas, com o auxílio do Mathematica).

Exercício 3. Prove as seguintes propriedades da transformada Z (indicando qual a RC, em função da RC de x).

a) $\mathcal{Z}[x(n-k)](z) = z^{-k} X(z)$

b) $\mathcal{Z}[a^n x(n)](z) = X\left(\frac{z}{a}\right)$

c) $\mathcal{Z}[x(-n)](z) = X\left(\frac{1}{z}\right)$

d) $\mathcal{Z}[nx(n)](z) = -z\frac{dX(z)}{dz}$

Exercício 4. Use as propriedades da transformada Z e a tabela de transformadas para calcular as transformadas do seguintes sinais, indicando a RC:

a) $x(n) = 2\delta(n-2) + 3u(n-3)$

b) $x(n) = (n+1)3^n u(n)$

c) $x(n) = (n-2)(\frac{1}{2})^{n-2} \cos\left(\frac{\pi}{3}(n-2)\right) u(n-2)$.

Exercício 5. Determine $x(n)$ em cada um dos casos seguintes:

a) $X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}, \quad |z| > \frac{1}{3}$.

b) $X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{3}}, \quad |z| < \frac{1}{3}$.

c) $X(z) = \frac{z^3}{z-1}, \quad |z| > 1$

d) $X(z) = \frac{4z^2+8z}{4z^2-5z+1}$, sabendo que $x(n)$ é causal.

e) $X(z) = \frac{4}{z^3(2z-1)}$, sabendo que $x(n)$ é causal.

Exercício 6. Sendo $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}$, determine todas as suas possíveis transformadas inversas.

Exercício 7. Considere um sinal $x(n)$ cuja transformada Z é $X(z)$ para $R_1 < |z| < R_2$.

a) Mostre que a transformada Z do sinal $y(n) = (-1)^n x(n)$ é $Y(z) = X(-z)$ (com a mesma região de convergência).

b) Seja $y(n)$ dado por

$$y(n) = \begin{cases} x(n/2), & n \text{ par} \\ 0, & n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Mostre que $Y(z) = X(z^2)$ para $\sqrt{R_1} < |z| < \sqrt{R_2}$.

c) Seja $y(n)$ dado por $y(n) = x(2n)$. Mostre que $Y(z) = \frac{1}{2}\Big(X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})\Big)$ $(R_1^2 < |z| < R_2^2)$.

Exercício 8. Em cada alínea, considere o sistema LIT cuja função de transferência é indicada. Classifique cada um dos sistemas quanto à estabilidade e causalidade:

a) $X(z) = \frac{z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-2)}, \quad \frac{1}{3} < |z| < 2$

b) $X(z) = \frac{z}{z-3}, \quad |z| < 2$

c) $\frac{1}{1+0.5e^{i\frac{2\pi}{5}}z^{-1}}, \quad |z| > \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{(1-z^{-1})(1+5z^{-1})}, \quad |z| > 5$.

Exercício 9. Considere um sistema LIT com função de transferência $H(z) = \frac{z}{z-1}$ para $|z| > 1$. Determine a transformada Z da resposta do sistema aos seguintes sinais:

a) $x(n) = (\frac{1}{2})^n u(n)$

b) $x(n) = 3^n u(-n-1)$

Exercício 10. Considere o sistema LIT causal, definido pela seguinte equação às diferenças

$$y(n) - y(n-1) = x(n).$$

a) Calcule a sua função de transferência.

b) O sistema é estável? Justifique.

c) Determine a resposta do sistema ao sinal de entrada $x(n) = u(n)$.
Sugestão: Calcule a transformada Z de $x(n)$, $X(z)$, efectue o produto $X(z)H(z)$ e inverta.

d) Determine a resposta impulsional $h(n)$ do sistema.

e) Calcule a resposta do sistema ao sinal de entrada $x(n) = u(n) - u(n-3)$.
Sugestão: Reescreva $x(n)$ como combinação linear de impulsos unitátrios (transladados).

Exercício 11. Considere-se um sistema causal LIT. Suponha que a resposta ao sinal de entrada $x(n) = \delta(n) - 3\delta(n-1)$ é o sinal $y(n) = 2\delta(n) - 2\delta(n-1)$.

a) Calcule a função de transferência do sistema, indicando a RC.

b) Determine a resposta impulsional do sistema.

Exercício 12. Considere o sistema causal com função de transferência

$$H(z) = \frac{z}{(z - z_0)(z - \overline{z_0})}, \quad z_0 = 0.8e^{i\pi/4}$$

a) O sistema é estável? Justifique.

b) Determine a equação às diferenças que caracteriza o sistema.

c) Determine a resposta impulsional do sistema.

Exercício 13. Um sistema LIT com resposta em frequência $\hat{h}(\omega)$ diz-se *passa-tudo* se a sua resposta em frequência satisfizer $|\hat{h}(\omega)| = K$, $\forall \omega \in [-\pi, \pi]$, onde K é uma constante.

Considere um sistema LIT com função de transferência da forma

$$H(z) = -\overline{\alpha}\frac{z - (\overline{\alpha})^{-1}}{z - \alpha}, \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

a) Mostre que o sistema é passa-tudo; mais precisamente, mostre que

$$|\hat{h}(\omega)| = |H(e^{i\omega})| = 1.$$

b) Considere o sistema com função de transferência

$$H_1(z) = \frac{z - 2}{z + \frac{1}{3}}, |z| > \frac{1}{3}.$$

(i) O sistema tem fase mínima? Justifique.

(ii) Factorize a função de transferência $H_1(z)$ como um produto da forma

$$H_1(z) = H_{min}(z) H_{pt}(z)$$

onde $H_{min}(z)$ corresponde a um sistema de fase mínima, $H_{pt}(z)$ a um sistema passa-tudo e de tal modo que

$$|H_1(z)| = |H_{min}(z)|.$$

c) Repita a alínea anterior para o sistema

$$H_2(z) = \frac{(z - 3)(z - \frac{1}{4})}{(z - \frac{3}{4})(z - \frac{4}{3})}$$

Transformada de Fourier

Exercício 1. Determine a Transformada de Fourier das seguintes funções, usando a definição.

a) $f(t) = \chi_{[-1,1]}$

b) $g(t) = e^{-|t|}$

c) $h(t) = e^{-t}u(t)$, onde $u(t)$ designa a função de Heaviside ou salto unitário, definida por

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

d) $k(t) = \max\{1 - |t|, 0\}$

Exercício 2. *a)* Invoque a ajuda do *Mathematica* para obter informação sobre a função `FourierTransform`. Em particular, veja como usar `FourierParameters`.

b) Use a função `FourierTransform` para calcular novamente as transformadas consideradas no exercício anterior.

Exercício 3. Considere a seguinte função Gaussiana $g(t) = e^{-t^2}$.

a) Mostre que g satisfaz a seguinte equação diferencial

$$g'(t) + 2tg(t) = 0.$$

b) Use as propriedades da transformada de Fourier para mostra que $\hat{g}$ satisfaz

$$2\widehat{g}'(\omega) + \omega\widehat{g}(\omega) = 0.$$

c) Mostre, então, que $\widehat{g}(\omega) = Ke^{-\omega^2/4}$ onde $K = \hat{g}(0)$.

d) Tendo em conta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

conclua, finalmente, que

$$\widehat{g}(\omega) = \sqrt{\pi} e^{-\omega^2/4}.$$

e) Determine (novamente) a transformada de Fourier de g, usando agora a função `FourierTransform` do Mathematica.

Exercício 4. Dada uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$, seja $\tilde{f}(t) = \overline{f(-t)}$. Mostre que $(\mathcal{F}\tilde{f})(\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$.

Exercício 5. Considere os operadores de translação, modulação e dilatação definidos em $L^2(\mathbb{R})$ por:

$$(T_a f)(t) = f(t-a), \quad (E_a f)(t) = e^{iat} f(t), \quad (D_a f)(t) = |a|^{-1/2} f(t/a)$$

a) Mostre que são operadores lineares e que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|T_a f\| = \|f\|, \quad \|E_a f\| = \|f\|, \quad \|D_a f\| = \|f\|$$

b) Prove que

$$\widehat{T_a f}(\omega) = \big(E_{-a}\widehat{f}\big)(\omega), \quad \widehat{E_a f}(\omega) = \big(T_a\widehat{f}\big)(\omega), \quad \widehat{D_a f}(\omega) = \big(D_{1/a}\widehat{f}\big)(\omega).$$

Exercício 6. Use propriedades da transformada de Fourier e algumas transformadas já calculadas para determinar a transformada de Fourier das funções seguintes:

a) $f(t) = \chi_{[-a,a]}$

b) $g(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$

c) $h(t) = e^{-at^2}, \quad a > 0$

Exercício 7. *a)* Use o Mathematica para calcular a transformada de Fourier da função $f(t) = 1$ (considerada como uma distribuição).

b) Sabendo que as propriedades da transformada de Fourier dadas para funções de $L^2(\mathbb{R})$ são válidas para transformadas de distribuições, calcule a transformada de Fourier de:

(i) $f(t) = e^{iat}, \quad a \in \mathbb{R}$

(ii) $\cos(at), \quad a \in \mathbb{R}$

c) Use o Mathematica para calcular as transformadas da alínea anterior.

Exercício 8. Seja $f \in \mathcal{S}$ onde $\mathcal{S}$ designa o espaço de Schwartz[1] (note que, em particular, isto implica $\lim_{t\to\pm\infty} t|f(t)|^2 = 0$). Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |f(t)|^2 dt \times \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \geq \frac{1}{4}\|f\|^2\|\hat{f}\|^2 = \frac{\pi}{2}\|f\|^4.$$

Nota: Isto estabelece princípio de incerteza para funções de $\mathcal{S}$ e para o caso $t_0 = \omega_0 = 0$.

[1] Veja as suas notas sobre distribuições.

Sugestão:

(i) Comece por notar que provar a desigualdade pretendida é equivalente a mostrar que

$$\|tf\|^2\|\omega\hat{f}\|^2 \geq \frac{1}{4}\|f\|^2\|\hat{f}\|^2$$

.

(ii) Usando propriedades da transformada de Fourier, mostre que a desigualdade é equivalente a

$$\|tf\|^2\,\|f'\|^2 \geq \frac{1}{4}\|f\|^4,$$

ou seja, a

$$\|tf\|\,\|f'\| \geq \frac{1}{2}\|f\|^2.$$

(iii) Use a desigualdade de Schwarz e propriedades de números complexos para estabelecer

$$\|tf\|\,\|f'\| \geq |\langle tf, f'\rangle| \geq |\mathrm{Re}\langle tf, f'\rangle|.$$

(iv) Use integração por partes e a condição sobre a função f, para mostrar que

$$|2\mathrm{Re}\langle tf, f'\rangle| = |\langle tf, f'\rangle + \langle f', tf\rangle| = \|f\|^2,$$

o que estabelece o resultado.

Nota: A extensão para qualquer função $f \in L^2(\mathbb{R})$ usa o facto de $\mathcal{S}$ ser denso em $L^2(\mathbb{R})$. Para estabelecer o resultado para t_0, ω_0 quaisquer considera-se uma função auxiliar $g(t) = e^{-i\omega_0 t}f(t+t_0)$ (obtida por modulação e translação de f); omitimos os pormenores.

Transformada de Fourier com Janela

Exercício 1. Seja g uma função janela, com centro μ_g e raio σ_g.

a) Mostre que os operadores de modulação, translação e dilatação transformam g em funções janela.

b) Mostre que:

$$\mu_{T_a g} = \mu_g + b, \qquad \mu_{E_a g} = \mu_g, \qquad \mu_{D a g} = a\mu_g$$
$$\sigma_{T_a g} = \sigma_g, \qquad \sigma_{E_a g} = \sigma_g, \qquad \sigma_{D a g} = |a|\sigma_g$$

Exercício 2. Considere uma função Gaussiana $g_\alpha(t) = e^{-\alpha t^2}$. Relembrando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

mostre que:

a) $\|g_\alpha\|^2 = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}}$

b) $\mu_{g_\alpha} = \mu_{\widehat{g_\alpha}} = 0$

c) $\sigma_{g_\alpha}\sigma_{\widehat{g_\alpha}} = \frac{1}{2}$ (isto é, as Gaussiana atinge o valor mínimo do princípio de incerteza).

Exercício 3. Derive *formalmente* a seguinte fórmula de inversão para a transformada de Fourier com janela, supondo que $g(0) \neq 0$.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\overline{g(0)}} \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{F}_g f\}(t,\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Exercício 4. Dadas duas funções f, g chama-se *correlação* de f e g e denota-se por $f \otimes g$ a função definida por

$$(f \otimes g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\overline{g(s-t)} ds = (f * \widetilde{g})(t),$$

onde $\widetilde{g}(t) := \overline{g(-t)}$.

Transformada de Fourier com Janela

a) Mostre que
$$(f \otimes g)(t) = \{\mathcal{F}_g f\}(t, 0).$$

b) Se conhecermos g e a correlação $f \otimes g$ a tarefa de "decorrelação"(isto é, a determinação de f) é, por vezes, possível. Mostre que, se a transformada de Fourier de g, $\widehat{g}(\omega)$ não tem zeros para ω real, então

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\overline{\widehat{g}(\omega)}} \int_{-\infty}^{\infty} (f \otimes g)(t) e^{-i\omega\, t} dt.$$

A função f pode (pelo menos, teoricamente) ser, então, recuperada de $\widehat{f}$ através da transformada inversa de Fourier.

c) Seja
$$g(t) = e^{-|t|}$$
e
$$(f \otimes g)(t) = (1 + |t|) e^{-|t|}.$$
Determine $\widehat{f}(\omega)$ e $f(t)$.

Transformada Contínua com Ôndula

Exercício 1. Considere a seguinte função:

$$\psi^H(t) := \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se} \quad \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{outros valores de } t. \end{cases}$$

a) Mostre que se trata de uma ôndula básica.

b) Determine a transformada de Fourier de $\psi^H(t)$ e o valor da constante de admissibilidade C_{ψ^H} para esta ôndula.

c) Esboce o gráfico de $\psi^H(t)$ e de $|\widehat{\psi^H}(\omega)|$.

Nota: Esta ôndula é, como já referimos, conhecida por *ôndula de Haar*.

Exercício 2. Considere a função chapéu Mexicano, definida por

$$\psi(t) = -\frac{d^2}{dt^2} e^{-t^2/2} = (1 - t^2) e^{-t^2/2}$$

a) Mostre que se trata uma ôndula.

b) Determine $\widehat{\psi}(\omega)$ e o valor da constante de admissibilidade C_ψ para esta ôndula.

c) Mostre que $\widehat{\psi}(\omega)$ admite um máximo para $\omega = \sqrt{2}$.

d) Esboce o gráfico de $\psi(t)$ e de $\hat{\psi}(\omega)$.

Exercício 3. Mostre que se ψ é uma função real, então

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{|\widehat{\omega}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega.$$

Exercício 4. Seja $\psi(t) = (1 - Bt^2)\, e^{-At^2},\ A > 0$.

a) Determine B de modo que ψ seja admissível, ou seja, de modo que ψ seja uma ôndula básica.

b) Para esse valor de B, determine o valor da constante C_ψ.

Exercício 5. *a)* Determine a transformada contínua com ôndula da função $f(t) = \operatorname{sen} t$, tomando para ôndula analisadora $\psi(t)$ a ôndula de Haar. Repita, tomando para $\psi(t)$ o chapéu Mexicano.

Nota: Tendo em atenção que $\operatorname{sen} t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, note que a transformada $\mathcal{W}_\psi f$ pode ser expressa em termos da transformada de Fourier de ψ.

b) Determine, para cada uma das ôndulas referidas, os máximos locais de $\{\mathcal{W}_\psi f\}(a, \cdot)$ (para $a > 0$, fixo).

Exercício 6. Use funções apropriadas do Mathematica para obter informação e esboçar o gráfico da ôndula de Haar e da ôndula chapéu Mexicano (com $\sigma = 1$).

Nota: A ôndula chapéu Mexicano definida no Mathematica é ligeiramente diferente da ôndula referida no Exercício 2, uma vez que é "normalizada", i.e. tem norma 1.

Exercício 7. Considere a ôndula de Gabor (com parâmetro $w = 6.0$), descrita no Mathematica.

a) Indique a sua expressão analítica e esboce o gráfico da sua parte real e da sua parte imaginária.

b) Calcule a sua transformada de Fourier e diga qual o valor da transformada para $\omega = 0$. Que conclui?

Exercício 8. Analise e modifique (calculando transformadas com outras ôndulas, outras escalas, etc) o notebook `TCO.nb`.

Transformada Discreta com Ôndula

Exercício 1. Considere a função escala da AMR de Haar

$$\phi(t) = \chi_{[0,1)} = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ 0, & \text{restantes valores de } t. \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de ϕ e mostre que $\|\phi\|_2 = 1$.

b) Considere as funções $\phi(2t)$ e $\phi(2t-1)$. Indique o suporte, esboce o gráfico e calcule a norma de cada uma destas funções. Qual a norma das funções $\phi_{1;0}(t) = \sqrt{2}\phi(2t)$ e $\phi_{1;1}(t) = \sqrt{2}\phi(2t-1)$?

c) Esboce o gráfico de $\phi(t) + \phi(2t-1)$ e verifique que $\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1)$.

d) Indique a relação de dupla escala para a função escala ϕ, isto é, determine os coeficientes h_k tais que $\phi = \sum_k h_k \phi_{1;k}$.
Nota: $\{h_k\}$ é chamado filtro passa-baixo associado à ôndula.

e) Use a função `WaveletFilterCoefficients` do Mathematica para determinar o filtro passa-baixo dado pelo Mathematica (`PrimalLowpass`) da ôndula de Haar. Compare os valores obtidos com os que obteve na alínea anterior e comente.

Exercício 2. Considere novamente a ôndula de Haar

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1/2, \\ -1, & 1/2 \le t < 1, \\ 0, & \text{restantes valores de } t. \end{cases}$$

a) Escreva essa função como combinação linear das funções $\phi(2t)$ e $\phi(2t-1)$.

b) Escreva a equação de ôndula, i.e. determine os coeficientes g_k tais que $\psi = \sum_k g_k \phi_{1;k}$.
Nota: $\{g_k\}$ é chamado filtro passa-alto associado à ôndula.

c) Use a função `WaveletFilterCoefficients` do Mathematica para determinar o filtro passa-alto dado pelo Mathematica (`PrimalHihgpass`) da ôndula de Haar. Compare os valores obtidos com os que obteve na alínea anterior e comente.

d) Estabeleça as seguintes relações:

$$\phi(t) = \frac{\phi(t/2) + \psi(t/2)}{2}, \qquad \phi(t-1) = \frac{\phi(t/2) - \psi(t/2)}{2} \tag{1}$$

Transformada Discreta com Ôndula

Notas:

- No que segue, ϕ e ψ são, respectivamente, a função escala e a ôndula associadas à AMR de Haar, isto é, são as funções acima definidas.
- Usamos aqui a notação $f_{j;k}$ para designar a função obtida, de uma dada função f, do seguinte modo:
$$f_{j;k}(t) := 2^{j/2} f(2^j t - k).$$

Exercício 3. Considere a seguinte função em escada, definida no intervalo $[0, 4)$:

$$f(t) = \begin{cases} 3, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t < 2, \\ -2, & 2 \leq t < 3, \\ 4, & 3 \leq t < 4. \end{cases}$$

a) Escreva essa função como combinação linear das funções $\phi(t-k)$ isto é, determine coeficientes α_k^0 tais que
$$f(t) = \sum_k \alpha_k^0 \phi(t-k).$$

b) Esboce os gráficos das funções $\phi(t/2)$,$\phi(t/2-1)$,$\psi(t/2)$ e $\psi(t/2-1)$.

c) Fazendo uso das relações (1), determine coeficientes $\alpha_0^{-1}, \alpha_1^{-1}$ e $\beta_0^{-1}, \beta_1^{-1}$ tais que
$$f(t) = \alpha_0^{-1}\phi(t/2) + \alpha_1^{-1}\phi(t/2-1) + \beta_0^{-1}\psi(t/2) + \beta_1^{-1}\psi(t/2-1).$$

Mais precisamente, mostre que
$$\alpha_0^{-1} = \frac{\alpha_0^0 + \alpha_1^0}{2}, \qquad \alpha_1^{-1} = \frac{\alpha_2^0 + \alpha_3^0}{2}$$
$$\beta_0^{-1} = \frac{\alpha_0^0 - \alpha_1^0}{2}, \qquad \beta_1^{-1} = \frac{\alpha_2^0 - \alpha_3^0}{2}.$$

d) Sejam $A^{-1}(t) = \alpha_0^{-1}\phi(t/2) + \alpha_1^{-1}\phi(t/2-1)$ e $D^{-1}(t) = \beta_0^{-1}\psi(t/2) + \beta_1^{-1}\psi(t/2-1)$. Determine A^{-1} e D^{-1} e esboce os seus gráficos.

e) Determine coeficientes α_0^{-2} e β_0^{-2} tais que
$$A^{-1}(t) = \alpha_0^{-2}\phi(t/4) + \beta_0^{-2}\psi(t/4).$$

Notas:

- Entende-se que todas as funções referidas estão restringidas ao intervalo $[0, 4)$.
- Para resolver este exercício poderá, em alternativa ao uso das relações (1), fazer uma identificação natural entre as funções referidas e os vectores de $\mathbb{R}^4$ cujas componentes são os seus valores em cada um dos 4 subintervalos $[0, 1), [1, 2), [2, 3)$ e $[3, 4)$. Por exemplo, $f \leftrightarrow (3, -1, 2, 4)$, $\phi(t/2) \leftrightarrow (1, 1, 0, 0)$, $\psi(t/4) \leftrightarrow (1, 1, -1, -1)$.

Exercício 4. Seja V_0 o espaço das funções em escada, definidas em $[0,4)$, com nós interiores nos pontos $1,2,3$. Facilmente se verifica que qualquer dos seguintes conjuntos forma uma base o.n. desse espaço:

$$\begin{aligned} B_0 &= \{\phi_{0;k} : k = 0,1,2,3\}, \\ B_{-1} &= \{\phi_{-1;k}, \psi_{-1;k} : k = 0,1\}, \\ B_{-2} &= \{\phi_{-2;0}, \psi_{-2;0}, \psi_{-1;0}, \psi_{-1;1}\}. \end{aligned}$$

a) Exprima a função f correspondente ao vector $s = (5,1,1,4)$ em cada uma das bases anteriores.

Sugestão: Comece por exprimir f nas bases não "normalizadas", usando um processo análogo ao que utilizou no exercício anterior.

b) Use as fórmulas das Transformadas Rápidas com Ôndula - nomeadamente, as fórmulas para a transformada directa

$$\begin{aligned} a_k^{j-1} &= \sum_n h_{n-2k} a_n^j \\ d_k^{j-1} &= \sum_n g_{n-2k} a_n^j, \end{aligned}$$

onde h_k e g_k são os coeficientes da equação de dupla escala e da equação de ôndula, para resolver de novo a alínea anterior.

c) Peça ajuda sobre a função `DiscreteWaveletTransform` do Mathematica e utilize-a para para efectuar a decomposição do sinal s até ao máximo nível possível, usando a ôndula de Haar. Compare os diversos coeficientes de aproximação e de detalhe obtidos com os coeficientes na base B_{-1} e B_{-2} obtidos na alínea *a)*. (Use a função `Normal` para ver todos os coeficientes).

Exercício 5. Seja V_0 o espaço das funções em escada, definidas no intervalo $[0,8)$, com nós interiores nos pontos k; $k = 1,2,\ldots,7$.

a) Qual a dimensão desse espaço? Indique duas bases ortonormadas de V_0:

- B_0, formada por funções da forma $\phi_{0;k}$
- B_{-1}, constituída por funções da forma $\phi_{-1;k}$ e $\psi_{-1;k}$.

b) Seja f a função em escada de V_0 correspondente ao seguinte vector de $\mathbb{R}^8$:

$$v = (4,6,10,12,8,6,5,3).$$

Determine $\mathbf{b}^0$ e $\mathbf{b}^{-1}$, vectores dos coeficientes da função f nas bases B_0 e B_{-1}, respectivamente.

Nota: Para calcular os coeficientes na base B_{-1}, pode usar a função `DiscreteWaveletTransform` aplicada ao vector v.

c) Calcule a energia $E(v)$ do vector v (relembre que $E(v) = \|v\|^2$).

d) Calcule a energia dos vectores $\mathbf{a}^{-1}$ e $\mathbf{d}^{-1}$, onde $\mathbf{a}^{-1}$ designa o vector dos coeficientes de aproximação do nível -1 (i.e. o vector dos coeficientes das funções $\phi_{-1;k}$) e $\mathbf{d}^{-1}$ o vector dos coeficientes de detalhe do nível -1 (i.e. o vector dos coeficientes das funções $\psi_{-1;k}$). Determine a percentagem de energia de cada um destes vectores (i.e. calcule

$$\frac{E(\mathbf{a}^{-1})}{E(v)} \times 100\%, \qquad \text{e} \frac{E(\mathbf{d}^{-1})}{E(v)} \times 100\%$$

e) Use a propriedade `EnergyFraction` do Mathematica para obter a informação da alínea anterior.

f) Seja $\widetilde{\mathbf{b}}^{-1}$ um vector obtido de $\mathbf{b}^{-1}$ obtido substituindo por zero os coeficientes correspondentes às funções $\psi_{-1;k}$ e seja $\tilde{f}$ a correspondente função de V_0 ("aproximação" para f). Determine a função $\tilde{f}$ (procurando o seu vector $\tilde{v}$ correspondente). **Sugestão:** Pode usar as funções `WaveletThreshold` e `InverseDiscreteWaveletTransform` para determinar o vector $\tilde{v}$.

g) Esboce, em sobreposição, os gráficos de f , $\tilde{f}$ e $f - \tilde{f}$.

Exercício 6. Construa um sinal (vector) $s = (1, 2, \ldots 7, 8, 8, 7, \ldots 2, 1)$.

a) Use o Mathematica para efectuar um passo de decomposição da transformada rápida com ôndula do sinal s, escolhendo para ôndula analisadora a ôndula de Haar.

Qual o comprimento dos vectores dos coeficientes de *aproximação* e *detalhe*?

b) Use o Mathematica para saber qual o comprimento dos filtros das ôndulas de Daubechies `DaubechiesWavelet`[2] e `DaubechiesWavelet`[4].

c) Repita a alínea *a)* usando as ôndulas de Daubechies `Daubechies`[2] e `DaubechiesWavelet`[4]. Que conclui? Como justifica tal resultado?

d) Efectue uma decomposição do sinal original até ao nível 3, usando a ôndula de Daubechies `DaubechiesWavelet`[2].

exame final

Exercício 1. Diga, justificando, se cada um dos sistemas seguintes é: (i) linear; (ii) invariante no tempo; (iii) estável; (iv) causal.

a) $T_1(x(n)) = |x(n)|$

b) $T_2(x(n)) = nx(n)$

Exercício 2. Considere o sistema discreto definido por

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-3)}{2}.$$

a) Determine a sua resposta impulsional, $h(n)$.

b) Calcule a sua resposta em frequência, $\hat{h}(\omega)$, e represente graficamente a sua amplitude e fase.

c) Dê um exemplo de um sinal não nulo, $x(n)$ que, considerado como entrada do sistema dado, produza uma resposta constantemente nula.

Exercício 3. Seja $x(n)$, o sinal anti-causal, cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{z^2 - \frac{z}{3}}{(z - \frac{2}{3})(z + \frac{1}{2})}.$$

Determine $x(n)$ e esboce (parte de) o seu gráfico.

Exercício 4. Considere um sistema LIT com função de transferência

$$H(z) = \frac{(z+3)(z-\frac{1}{2})}{z + \frac{1}{3}}, |z| > \frac{1}{3}.$$

a) O sistema tem fase mínima? Justifique.

b) Factorize a função de transferência $H(z)$ como um produto da forma

$$H(z) = H_{min}(z)H_{pt}(z)$$

de tal modo que H_{pt} corresponda a um sistema passa-tudo e H_{min} a um sistema de fase mínima e tal que

$$|H(e^{i\omega})| = |H_{min}(e^{i\omega})|.$$

(cont.)

Exercício 5. Considere o sinal x obtido calculando uma amostra nos 256 igualmente espaçados no intervalo $[0,1]$, $t_k = \frac{k}{256}$; $k = 1, \ldots, 256$, da função

$$f(t) = -52t^4 + 100t^3 - 49t^2 + 2 + g(200(t - 2/3)),$$

onde $g(t) = te^{-t^2}$.

a) Esboce o gráfico de x.

b) Calcule $\hat{x}$, a transformada de Fourier discreta de x.

c) Seja $\hat{x}_M$ obtido de $\hat{x}$, tornado nulas as componentes $\hat{x}(k)$, para $k = 8, \ldots, 250$. Calcule a Transformada de Fourier Discreta Inversa de $\hat{x}_M$, esboce o seu gráfico e comente.

Exercício 6. Considere a função ψ cuja transformada de Fourier é dada por

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \pi \leq |\omega| \leq 2\pi \\ 0, & \text{outros valores de } \omega \end{cases}$$

a) Mostre que se trata de uma óndula analisadora e determine o respectivo valor da constante de admissibilidade

b) Determine a expressão de $\psi(t)$.

c) Esboce os gráficos de $|\hat{\psi}(\omega)|$ e de $\psi(t)$ e comente quanto às propriedades de localização no tempo e na frequência desta óndula.

exame recurso

Exercício 1. Diga, justificando, se cada um dos sistemas seguintes é: (i) linear; (ii) invariante no tempo; (iii) estável; (iv) sem-memória.

a) $T_1(x(n)) = |x(n)|$

b) $T_2(x(n)) = nx(n)$

Exercício 2. Considere o sistema discreto definido por

$$y(n) = \frac{x(n) + x(n-4)}{2}.$$

a) Determine a sua resposta impulsional, $h(n)$.

b) Calcule a sua resposta em frequência, $\hat{h}(\omega)$, e represente graficamente a sua amplitude e fase.

c) Dê um exemplo de um sinal não nulo, $x(n)$ que, considerado como entrada do sistema dado, produza uma resposta constantemente nula.

Exercício 3. Seja $x(n)$, o sinal causal cuja transformada Z é dada por

$$X(z) = \frac{z^2 - \frac{z}{3}}{(z - \frac{2}{3})(z + \frac{1}{2})}.$$

Determine $x(n)$ e esboce (parte de) o seu gráfico.

Exercício 4. Considere um sistema LIT com função de transferência

$$H(z) = \frac{(z+2)(z-\frac{1}{3})}{z+\frac{1}{2}}, |z| > \frac{1}{2}.$$

a) O sistema tem fase mínima? Justifique.

b) Factorize a função de transferência $H(z)$ como um produto da forma

$$H(z) = H_{min}(z)H_{pt}(z)$$

de tal modo que H_{pt} corresponda a um sistema passa-tudo e H_{min} a um sistema de fase mínima e tal que

$$|H(e^{i\omega})| = |H_{min}(e^{i\omega})|.$$

(cont.)

Exercício 5. Considere o sinal x obtido calculando uma amostra nos 256 igualmente espaçados no intervalo $[0, 1]$, $t_k = \frac{k}{256}; k = 1, \ldots, 256$, da função

$$f(t) = -52t^4 + 100t^3 - 49t^2 + 2 + g(200(t - 2/3)),$$

onde $g(t) = te^{-t^2}$.

a) Esboce o gráfico de x.

b) Calcule $\hat{x}$, a transformada de Fourier discreta de x.

c) Seja $\hat{x}_M$ obtido de $\hat{x}$, tornado nulas as componentes $\hat{x}(k)$, para $k = 8, \ldots, 250$. Calcule a Transformada de Fourier Discreta Inversa de $\hat{x}_M$, esboce o seu gráfico e comente.

Exercício 6. Considere a função ψ cuja transformada de Fourier é dada por

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \pi \leq |\omega| \leq 2\pi \\ 0, & \text{outros valores de } \omega \end{cases}$$

a) Mostre que se trata de uma ôndula analisadora e determine o respectivo valor da constante de admissibilidade.

b) Determine a expressão de $\psi(t)$.

c) Esboce os gráficos de $|\hat{\psi}(\omega)|$ e de $\psi(t)$ e comente quanto às propriedades de localização no tempo e na frequência desta ôndula.