Universidade do Minho
Escola de Ciências

Departamento de Matemática

Equações não lineares

- Método de Newton
- Método do ponto fixo
- Zeros de polinómios
- Método de Newton para sistemas

Introdução

O problema sobre o qual nos debruçaremos agora é o da determinação de raízes de equações não lineares (numa variável). Dada uma função real de variável real f, não linear, procuramos $r \in \mathbb{R}$ para o qual se tenha

$$f(r) = 0.$$

Tal valor r é dito uma raiz da equação $f(x) = 0$ ou um zero da função f.

Exemplo:

1. $x - \exp(-x) = 0$ (uma única raiz: $r \approx 0.5671$)
2. $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$ (três raízes: $r_1 = -1, r_2 = 2, r_3 = 3$)
3. $\operatorname{sen} x - 1 = 0$ (uma infinidade de raízes: $r_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$)
4. $\exp(x) + 1 = 0$ (nenhuma raiz)

Métodos iterativos

Os métodos que iremos estudar são, todos eles, métodos iterativos: são dadas $m+1$ aproximações iniciais $x_0, \ldots, x_m$ para uma raiz r da equação $f(x)=0$ e determina-se, então, uma nova aproximação x_{m+1}, repetindo-se sucessivamente este processo. Mais precisamente, é gerada uma sequência (x_k) de aproximações para r através do uso de fórmulas do tipo

$$x_{k+1} = g(k, x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{k-m}); k = m, m+1, \ldots$$

Se a função g não depender de k, isto é, se a forma da função iterativa se mantiver de iteração para iteração, o método diz-se estacionário.

Definição

O método diz-se convergente se

$$\lim_{k\to\infty} x_k = r$$

ou, equivalentemente, se

$$\lim_{k\to\infty} e_k = 0,$$

onde e_k designa o erro na iteração k, isto é, $e_k = r - x_k$.

Ordem de convergência

Para distinguir a rapidez de convergência de métodos convergentes, é habitual usar-se o conceito de ordem de convergência.

Definição

Seja (x_k) uma sequência obtida por um determinado método iterativo, convergente para r. Se existirem números reais $p \geq 1$ e $C > 0$ tais que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|r - x_{k+1}|}{|r - x_k|^p} = C, \tag{1}$$

dizemos que a ordem de convergência do método é p e que C é a respetiva constante de convergência assimptótica.

Nota: Se $p = 1$ então $C \leq 1$, caso contrário (x_k) não convergiria, mas, se $p > 1$, C poderá ser superior a 1.

Quando $p = 1$ e $C < 1$, diz-se que temos convergência linear[1] e, se $p > 1$, a convergência é dita superlinear,

dizendo-se, além disso, quadrática, se $p = 2$, cúbica, se $p = 3$, etc.

[1] Se $p = 1$ e $C = 1$, dizemos que a convergência é *sublinear*.

Exemplo: Considerem-se as sequências (x_k) e (y_k) tais que $x_k = \frac{1}{2^k}$ e $y_k = \frac{1}{2^{2^k}}$, as quais são ambas convergentes para $r = 0$. Tem-se:

$$\lim \frac{|x_{k+1} - r|}{|x_k - r|} = \lim \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \text{conv. linear}$$

$$\lim \frac{|y_{k+1} - r|}{|y_k - r|^2} = \lim \frac{\frac{1}{2^{2^{(k+1)}}}}{\frac{1}{(2^{2^k})^2}} = 1 \quad \longrightarrow \text{conv. quadrática}$$

Note-se que

$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = \frac{1}{8},\ x_4 = \frac{1}{16}, \ldots$$
$$y_0 = \frac{1}{2},\ y_1 = \frac{1}{4},\ y_2 = \frac{1}{16},\ y_3 = \frac{1}{256},\ y_4 = \frac{1}{65\,536}, \ldots,$$

sendo notória a diferença de rapidez de convergência das duas sucessões.

Notas

- É usual escrever a expressão $\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C$ de forma assimptótica, como

$$|e_{k+1}| \sim C|e_k|^p,$$

a qual nos indica como o erro se comporta quando k é suficientemente grande.

- Dados a sucessão (x_k) e $r \in \mathbb{R}$, se $e_k = r - x_k$ satisfaz

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = C,$$

então:

  - Se $p = 1$ e $C > 1$, a sequência (x_k) não converge para r.
  - Se $p > 1$, a sequência (x_k) converge para r para qualquer valor de C, desde que $|e_0|$ seja suficientemente pequeno;
  - Existe $M \geq C$ tal que $|e_{k+1}| \leq M|e_k|^p$, $\forall k$ e, se $M < 1$, então (x_k) converge para r, mesmo que seja $p = 1$.

- Quanto maior for a ordem de convergência de um método iterativo e menor a respetiva constante de convergência, maior será a sua rapidez de convergência, i.e., menor será o número de iterações necessárias para se obter uma aproximação razoável para a raiz; isto não significa que o método seja necessariamente mais eficiente, pois a eficiência dependerá, também, do esforço computacional exigido em cada iteração.

Método de Newton

If an algorithm converges unreasonably fast,
it must be Newton method

John Dennis

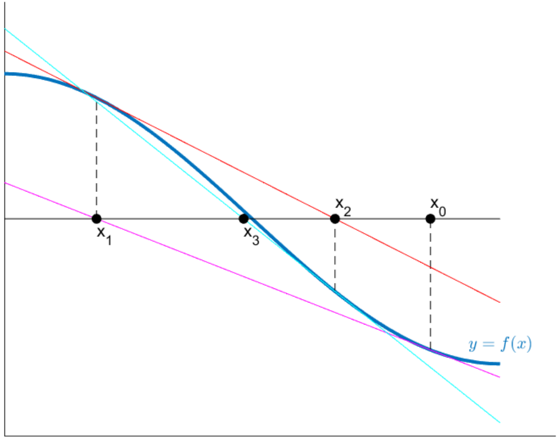
Em 1669, Isaac Newton (1643–1727) desenvolveu este método para calcular uma raiz de uma equação polinomial de $3^{\underline{o}}$ grau, mas o método só foi publicado em 1711. Em 1690, Joseph Raphson, matemático inglês (ca. 1647–ca. 1715), formulou as ideias de Newton para o caso de polinómios até ao grau 10, numa forma mais semelhante à que hoje se utiliza. Por esta razão, este método é também conhecido como método de Newton-Raphson. Cerca de 50 anos mais tarde, o matemático inglês Thomas Simpson (1710–1761) estendeu o uso do método para funções não necessariamente polinomiais e também para sistemas de duas equações não lineares.

Método de Newton: descrição

Se a função f cuja raiz procuramos for continuamente diferenciável e se a derivada de f puder ser calculada sem grande esforço computacional, poderemos procurar a raiz usando o chamado método de Newton .

Seja x_0 uma aproximação inicial (razoável) para um zero r de f. Consideremos a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa x_0. Na vizinhança de x_0, esta reta deverá "aproximar razoavelmente" o gráfico de f, pelo que a abcissa do ponto de interseção desta tangente com o eixo das abcissas deverá estar próxima da raiz r. Essa abcissa será, então, tomada como uma nova aproximação, x_1, para r, repetindo-se o processo a partir de x_1 para obter x_2 e assim sucessivamente.

Método de Newton



Método de Newton: esquema iterativo

Vejamos qual a expressão analítica de $x_{k+1}; k = 0, 1, 2, \ldots$.

A equação da tangente ao gráfico de f no ponto $(x_k, f(x_k))$ é dada por

$$y = f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k).$$

A abcissa do ponto onde esta reta interseta o eixo dos xx obtém-se fazendo $y = 0$ na equação anterior e resolvendo em ordem a x; designando essa abcissa por x_{k+1}, tem-se:

Método Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}; k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Nota O esquema iterativo anterior pressupõe que, para todo o k, $f'(x_k) \neq 0$, ou seja, que a tangente ao gráfico de f no ponto $(x_k, f(x_k))$ não é paralela ao eixo das abcissas.

Método de Newton - Convergência

Teorema (convergência do método de Newton para raízes simples)

Seja r uma raiz da equação $f(x)=0$ e suponhamos que f é duas vezes continuamente diferenciável num certo intervalo centrado em r e que $f'(r)\neq 0$, ou seja, que r é um zero simples de f. Então, existe um intervalo $I=[r-\delta, r+\delta]$ tal que, para qualquer aproximação inicial $x_0\in I$, o método de Newton converge para r, com convergência (pelo menos) quadrática; no caso de convergência quadrática a constante de convergência assimptótica é dada por

$$C=\frac{1}{2}\left|\frac{f''(r)}{f'(r)}\right|.$$

Demonstração: Como $f'(r)\neq 0$ e f' é contínua num intervalo centrado em r, é possível encontrar um intervalo centrado em r no qual f' nunca se anula.

Desenvolvendo a função f em série de Taylor em torno de x_k, obtém-se

$$0=f(r)=f(x_k)+f'(x_k)(r-x_k)+\frac{1}{2}f''(\zeta_k)(r-x_k)^2,\ \zeta_k\in(\min\{r,x_k\},\max\{r,x_k\}),$$

i.e.

$$r=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{f''(\zeta_k)}{2f'(x_k)}(r-x_k)^2=x_{k+1}-\frac{f''(\zeta_k)}{2f'(x_k)}(r-x_k)^2$$

Logo

$$|e_{k+1}| = |r - x_{k+1}| = \left|\frac{f''(\zeta_k)}{2f'(x_k)}\right| |e_k|^2.$$

A sucessão $(e_k)_k$ converge para zero (ver nota anterior), desde que x_0 seja suficientemente próximo de r (i.e. para x_0 num determinado intervalo $I = [r - \delta, r + \delta]$); além disso,

$$C = \lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left|\frac{f''(\zeta_k)}{f'(x_k)}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{f''(r)}{f'(r)}\right|.$$

Notas:

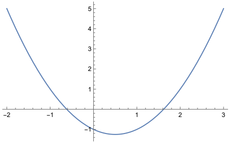
- A convergência será quadrática se $f''(r) \neq 0$, sendo superior a 2 se $f''(r) = 0$.
- Se r for uma raiz múltipla, então pode provar-se que convergência do método de Newton para essa raiz será apenas linear.

Método de Newton: exemplo

Consideremos equação

$$f(x) = x^3 - x - 1 = 0,$$

a qual, tem uma (única) raiz real no intervalo $I = [1, 1.5]$ (Prove!).



Aplicando o método de Newton, com aproximação inicial $x_0 = 1.25$, obtêm-se os resultados constantes da tabela seguinte.

k	x_k
1	1.3305085
2	1.3247490
3	1.3247180
4	1.3247180

Note-se que a raiz real da equação $x^3 - x - 1 = 0$ é (com precisão de 8 a.s.) $r = 1.3247180$.

Método de Newton

O teorema seguinte estabelece condições suficientes de convergência do método de Newton, para qualquer aproximação inicial num intervalo $I = [a, b]$, que são, por vezes, fáceis de verificar na prática.

Teorema

Seja f uma função definida num certo intervalo $[a, b]$ de $\mathbb{R}$, que verifique as seguintes condições:

1. $f \in C^2[a, b]$;
2. $f(a)f(b) < 0$;
3. $f'(x) \neq 0, \forall x \in [a, b]$;
4. $f''(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$ *ou* $f''(x) \leq 0,\ \forall x \in [a, b]$;
5. $\frac{|f(a)|}{|f'(a)|} < b - a \quad \text{e} \quad \frac{|f(b)|}{|f'(b)|} < b - a.$

Então, a equação $f(x) = 0$ tem uma única raiz em $[a, b]$ e o método de Newton converge para essa raiz, seja qual for a aproximação inicial $x_0 \in [a, b]$.

Teorema do Ponto Fixo de Banach

Vamos introduzir o chamado Teorema do Ponto Fixo de Banach [2]. Começamos por dar duas definições.

Definição (função contrativa)

Seja $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ e seja $g : D \to \mathbb{R}$ uma certa função. Dizemos que g é contrativa em D, se existe uma constante $0 \leq L < 1$, tal que

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|, \ \forall x, y \in D \qquad (*)$$

Qualquer constante L satisfazendo (*) é dita (uma) constante de Lipschitz.

Nota: Sendo g contrativa em D, então g é (uniformemente) contínua em D.

Definição (ponto fixo)

Seja $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ e seja $g : D \to \mathbb{R}$ uma certa função. Diz-se que $\alpha \in D$ é um ponto fixo de g se

$$g(\alpha) = \alpha.$$

[2] Stephan Banach $(1892 - 1945)$, de origem polaca, é considerado um dos mais importantes matemáticos do séc. XX, sendo um dos fundadores da *Análise Funcional*.

Se nada for dito em contrário, no que se segue I designa um intervalo fechado (não necessariamente limitado) de $\mathbb{R}$.

Teorema (do ponto fixo de Banach – num intervalo fechado de $\mathbb{R}$)

Seja I um intervalo fechado de $\mathbb{R}$ e seja g uma aplicação de I em si mesmo (i.e. tal que $g(I) \subseteq I$), contrativa em I, com constante de Lipschitz L. Então:

1. *Para qualquer valor inicial $x_0 \in I$, a sequência de iterações (x_k) definida por*

$$x_{k+1} = g(x_k);\; k = 0, 1, 2, \ldots$$

   é convergente para um ponto $\alpha \in I$.

2. *O limite α da sequência (x_k) é um ponto fixo de g, sendo, além disso, o único ponto fixo que g tem em I.*

3. *O erro $e_k := \alpha - x_k$ satisfaz:*
   - *Estimativa a posteriori:* $|\alpha - x_k| \leq \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$
   - *Estimativa a priori:* $|\alpha - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$

A verificação de que uma função g é contrativa num intervalo $I = [a, b]$ poderá tornar-se mais simples recorrendo ao seguinte teorema.

Teorema

Seja $I = [a, b]$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $g : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 em I e tal que

$$L = \max_{x \in I} |g'(x)| < 1.$$

Então g é contrativa em I, com constante de Lipschitz L.

Nota : A conclusão do teorema continua válida se I for um intervalo não limitado e f for apenas contínua em I com derivada no interior de I, desde que substituamos a condição $L = \max_{x \in I} |g'(x)| < 1$ por $L = \sup_{x \in \text{int}(I)} |g'(x)| < 1$.

Notas

- A condição

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|, \ \forall x, y \in I, \ x \neq y \qquad (**)$$

(que é uma condição mais fraca do que a contratividade) não é suficiente para garantir a existência de um ponto fixo em I. Por exemplo, a função $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dada por $g(x) = x + \frac{1}{1+x}$ satisfaz a condição (**)[3], mas não tem nenhum ponto fixo em $I = [0, \infty)$, uma vez que $\frac{1}{1+x} > 0, \ \forall x \geq 0$.

- No entanto, se, para além de fechado, o intervalo I for também limitado (i.e. se $I = [a, b]$ com $a, b \in \mathbb{R}$) então a condição anterior (supondo, naturalmente, que $g(I) \subseteq I$) é suficiente para a existência de um único ponto fixo de g em I, o qual pode ser procurado gerando a sequência $x_{k+1} = g(x_k)$ com x_0 escolhido arbitrariamente em I; este resultado é (um caso particular) do chamado *Teorema de Edelstein*.

[3] Pode usar Teorema do Valor Médio para mostrar que assim é.

Método das iterações sucessivas (ou do ponto fixo)

Retomemos o problema da determinação de raízes de uma equação não linear

$$f(x) = 0. \tag{3}$$

Suponhamos que, a partir desta equação, obtemos uma equação equivalente

$$g(x) = x, \tag{4}$$

transformando, assim, o problema da determinação de raízes da equação (3) (zeros de f) no da determinação de pontos fixos da função g.

Exemplo:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2}_{g_1(x)} = x$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 + x \Leftrightarrow x = \underbrace{\sqrt{x+2}}_{g_2(x)}, \quad \text{(para } x \geq -2).$$

$$x^2 - x - 2 = \Leftrightarrow x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x = \underbrace{1 + \frac{2}{x}}_{g_3(x)}, \quad \text{(para } x \neq 0).$$

Método das iterações sucessivas (ou do ponto fixo)

Se encontrarmos um intervalo fechado I tal que

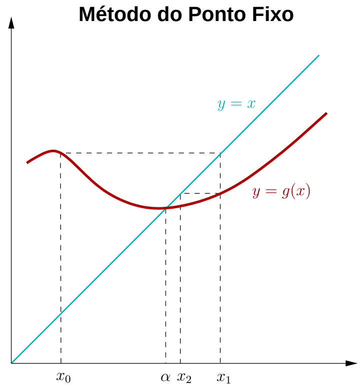
- $g(I) \subseteq I$
- g seja contrativa em I

então, tendo em conta o Teorema do Ponto Fixo de Banach, poder-se-á procurar α (único ponto fixo de g em I, ou seja, único zero de f em I), usando a fórmula iterativa

$$x_{k+1} = g(x_k);\; k = 0, 1, \ldots,$$

com x_0 escolhido arbitrariamente em I. A este método chamamos **método do ponto fixo** ou **método das iterações sucessivas**.

Método das iterações sucessivas :: Interpretação geométrica



Método do ponto fixo :: exemplo

Considere-se novamente o problema da determinação de raízes da equação $f(x) = 0$, com $f(x) = x^3 - x - 1$. Tem-se

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = x + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{x+1}.$$

Seja então $g(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Considere-se o intervalo $I = [1, 1.5]$ (esta escolha é sugerida por ser fácil de verificar que f tem uma raiz nesse intervalo) e vejamos que g satisfaz as condições de aplicação do Teorema do Ponto Fixo nesse intervalo. Tem-se

$$g(x) = \sqrt[3]{x+1}, \qquad g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}, \qquad I = [1, 1.5]$$

Então:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ g(1) \approx 1.2599 \in I \\ \bullet\ g(1.5) \approx 1.3572 \in I \\ \bullet\ g'(x) > 0, \forall x \in I \Rightarrow g \text{ é crescente em } I \end{array}\right\} \Rightarrow g(I) \subseteq I.$$

É fácil de verificar que g é de classe C^1 em $I = [1, 1.5]$ e que

$$L = \max_{x \in [1,1.5]} |g'(x)| = \max_{x \in [1,1.5]} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0.22 < 1.$$

Como $g(I) \subseteq I$ e g é contrativa em I (com constante de Lipschitz $L \approx 0.22$), podemos, então, aplicar o Teorema do Ponto Fixo para procurar o (único) ponto fixo de g em I.

Na tabela seguinte registam-se algumas iterações obtidas usando o Método do Ponto Fixo, com aproximação inicial $x_0 = 1.25$, usando a função iterativa g, i.e., usando a fórmula $x_{k+1} = \sqrt[3]{x_k + 1}; k = 0, 1, 2, \ldots$

k	x_k
1	1.3103707
2	1.3219871
3	1.3241990
4	1.3246194
5	1.3246992
6	1.3247144
7	1.3247173
8	1.3247178

Relembre que a única raiz real da equação é (8 a.s.) $r = 1.3247180$.

Convergência local do método do ponto fixo

Teorema

Seja α um ponto fixo de uma função g e suponhamos que g é continuamente diferenciável num certo intervalo centrado em α e que, além disso,

$$|g'(\alpha)| < 1.$$

Então, o método do ponto fixo definido por $x_{k+1} = g(x_k)$ converge localmente para α, i.e., existe um intervalo $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ tal que, se tomarmos a aproximação inicial x_0 em I, as iterações sucessivas convergem para α.

Notas

1. O teorema anterior mostra que, se α for um ponto fixo de g e $|g'(\alpha)| < 1$ (sendo g' contínua numa vizinhança de α), então podemos aplicar o método das iterações sucessivas para aproximar α, desde que x_0 seja escolhido "suficientemente" próximo de α.
2. Suponhamos, agora, que $|g'(\alpha)| > 1$. Tem-se

   $$|\alpha - x_{k+1}| = |g(\alpha) - g(x_k)| = |g'(\xi_k)||\alpha - x_k|.$$

   Mas, para x_k "próximo"de α, será ξ_k "próximo"de α, pelo que $|g'(\xi_k)| > 1$ (relembre-se que g' é, por hipótese, contínua numa vizinhança de α). Isto significa que $|e_{k+1}| > |e_k|$, pelo que, neste caso, o método das iterações sucessivas não poderá convergir[4]; ver exemplo na figura seguinte.
3. Se $|g'(\alpha)| = 1$, não podemos, à partida, tirar qualquer conclusão sobre a convergência/não convergência do método.

[4] Exceto, naturalmente, se, para algum k, se tiver $x_k = \alpha$.

Método do ponto fixo

Ordem de convergência (caso $0 < |g'(\alpha)| < 1$)

Teorema

Seja α um ponto fixo de uma função g e suponhamos que g é continuamente diferenciável num certo intervalo centrado em α e que, além disso,

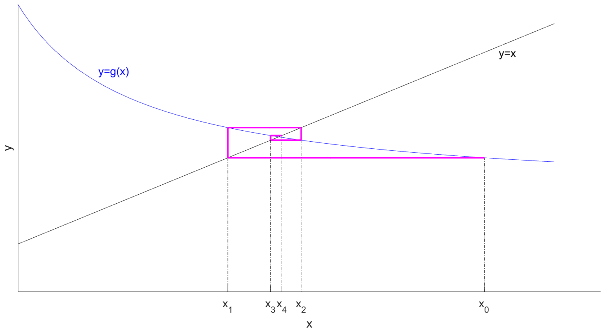
$$0 < |g'(\alpha)| < 1.$$

Seja I o intervalo (que sabemos existir) para o qual se verificam as condições do teorema do ponto fixo, e suponhamos que $x_0 \in I$ e que $x_{k+1} = g(x_k)$; $k = 0, 1, \ldots$. Designando por e_k o erro na iteração k, isto é, sendo $e_k = \alpha - x_k$, (e admitindo que $e_k \neq 0$, para todo o k), tem-se,

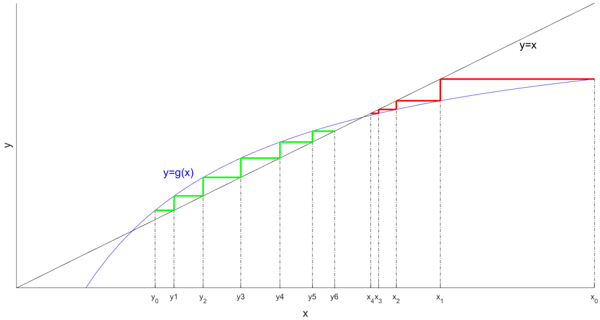
$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|} = |g'(\alpha)|.$$

Por outras palavras, nestas condições o método converge linearmente, com constante de convergência assimptótica $C = |g'(\alpha)|$.

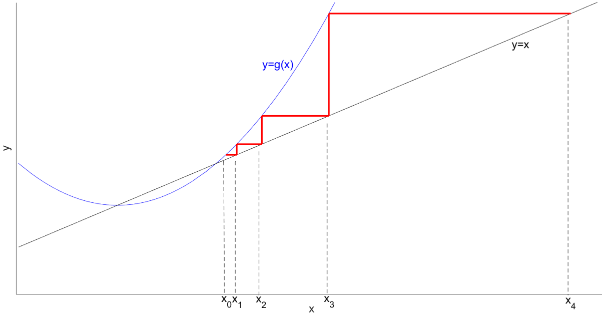
Comportamento MPF :: $-1 < g'(\alpha) < 0$



Comportamento MPF :: $0 < g'(\alpha) < 1$



Comportamento MPF :: $-1 < g'(\alpha) > 1$



Método do ponto fixo

Ordem de convergência (caso $g^{(k)}(\alpha)=0; k=0,1,\ldots,p-1; g^{(p)}(\alpha)\neq 0$)

Teorema

Seja α um ponto fixo de uma função g e suponhamos que g é p ($p \geq 2$) vezes continuamente diferenciável num certo intervalo centrado em α e que, além disso, $g'(\alpha) = g''(\alpha) = \cdots g^{(p-1)}(\alpha) = 0$ e que $g^{(p)}(\alpha) \neq 0$. Seja (x_k) a sequência de iterações obtida por aplicação do método do ponto fixo, com x_0 escolhido suficientemente próximo de α. Então, se $e_k = \alpha - x_k \neq 0$ para todo o k, tem-se

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p} = \frac{1}{p!}|g^{(p)}(\alpha)|.$$

Por outras palavras, nestas condições, a ordem de convergência do método é p e a constante de convergência assimptótica é $C = \frac{1}{p!}|g^{(p)}(\alpha)|$.

Exercício:

Mostre que o Método de Newton para obter as raízes de $f(x) = 0$ se pode formular como um método do ponto fixo com

$$x = g(x) \qquad \text{e} \qquad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Conclua que o Método de Newton converge quadraticamente numa vizinhaça suficientemente pequena duma raiz simples.

Zeros de polinómios

Considere-se o problema da determinação das raízes de uma equação não linear

$$p(x) = 0,$$

no caso em que p é um polinómio de grau n de coeficientes reais, isto é,

$$p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_{n+1}, \tag{5}$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $a_1 \neq 0$.

Os métodos que referimos anteriormente podem, naturalmente, ser usados para procurar os zeros de p. Neste caso, existem, no entanto, algumas particularidades, que vale a pena referir.

Alguns resultados sobre zeros de polinómios

Teorema fundamental da Álgebra

Se p é um polinómio de grau n da forma (5), então p tem n zeros $z_1, \ldots, z_n$ em $\mathbb{C}$, i.e. p admite uma fatorização da forma

$$p(x) = a_1(x - z_1) \ldots (x - z_n).$$

Se os coeficientes de p são reais e z é um zero não real de p, então o conjugado de z também é um zero de p.

Regra dos sinais de Descartes

Seja p um polinómio de coeficientes reais e sejam

- $\nu =$ nº de mudanças de sinal na sequência dos seus coeficientes;
- $N_+ =$ nº de zeros positivos de p.

Então, tem-se:

$$N_+ \leq \nu \quad \text{e} \quad \nu - N_+ \text{ é par.}$$

Aplicando a regra de Descartes ao polinómio $q(x) = p(-x)$ podemos obter o resultado correspondente para os zeros negativos de p.

Alguns resultados sobre zeros de polinómios

Regra de Budan

Seja p um polinómio da forma (5) e sejam ν_a e ν_b o número de mudanças de sinal nas sequências

$$p(a), p'(a), p''(a), \ldots, p^{(n)}(a)$$

$$p(b), p'(b), p''(b), \ldots, p^{(n)}(b),$$

respetivamente. Se N é o número de zeros reais de p no intervalo $[a, b]$, então

$$N \leq \nu_a - \nu_b \quad \text{e} \quad \nu_a - \nu_b - N \text{ é par}$$

Exemplo: Seja $p(x) = x^4 - x - 1$. Aplicando a regra dos Sinais de Descarte:

$$\nu = 1 \Rightarrow N_+ = 0 \text{ ou } N_+ = 1.$$

$$1 - N_+ \text{ par } \Rightarrow N_+ = 1.$$

Conclusão: o polinómio p tem exatamente um zero positivo.

Alguns resultados sobre zeros de polinómios

Considerado agora $q(x) = p(-x) = x^4 + x - 1$, tem-se $\nu = 1 \Rightarrow N_+ = 1$, ou seja, q tem uma zero positivo e, portanto, p tem um único zero negativo.

Em resumo, podemos concluir que p tem um zero positivo, um zero negativo e dois zeros complexos conjugados.

Regra de Budan:

	$x=-1$	$x=0$	$x=2$
$p(x)$	1	-1	13
$p'(x)$	-5	-1	1
$p''(x)$	12	0	48
$p'''(x)$	12	0	48
$p^{(4)}(x)$	24	24	24
ν_x	2	1	0

Logo

- em $[-1, 0]$ há 1 zero
- em $[0, 2]$ há 1 zero

Alguns resultados sobre zeros de polinómios

Teorema I (Cauchy)

Seja $p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_{n+1}, a_1 \neq 0$ e seja

$$R = 1 + \max_{2 \leq k \leq n+1} \frac{|a_k|}{|a_1|}.$$

Então, os zeros z_i de p satisfazem

$$|z_i| < R; i = 1, \ldots, n.$$

Exemplo: No caso do polinómio $p(x) = x^4 - x - 1$ anteriormente considerado, tem-se $R = 2$, pelo que poderíamos concluir que os quatro zeros de p satisfazem $|z_i| < 2$. Em particular, o zero positivo está no intervalo $(0, 2)$ e o zero negativo no intervalo $(-2, 0)$.

Alguns resultados sobre zeros de polinómios

Teorema II (Cauchy)

Seja $p(x) = a_1 x^n + a_2 x^{n-1} + \cdots + a_n x + a_{n+1},\ a_{n+1}, a_1 \neq 0$, e seja

$$r = \frac{1}{1 + \max\limits_{1 \le k \le n} \dfrac{|a_k|}{|a_{n+1}|}}.$$

Então, os zeros z_i de p satisfazem $|z_i| > r; i = 1, \ldots, n$.

Exemplo: Considere-se o polinómio $p(x) = 8x^6 - 4x^5 - 22x^4 + 5x^3 - 3x^2 + 9x + 27$.
Tem-se $r = \frac{1}{1+\frac{22}{27}} = \frac{27}{49}$; por outro lado, pelo Teorema I, tem-se $R = 1 + \frac{27}{8} = \frac{35}{8}$, pelo que podemos concluir que os zeros de p satisfazem

$$\frac{27}{49} < |z_i| < \frac{35}{8}.$$

Método de Newton para determinação das raízes complexas

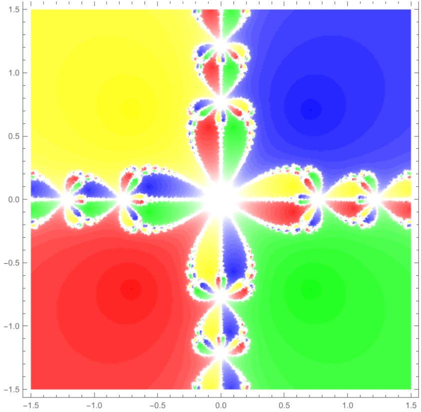
O método de Newton também pode ser usado para a determinação de zeros complexos, desde se considere como aproximação inicial um número complexo. Quando o polinómio tem mais de uma raiz, a raiz para a qual o método de Newton converge depende naturalmente da aproximação inicial x_0.

A bacia de atração de uma raiz r é o conjunto de aproximações iniciais que levam à convergência do método de Newton para r. Colorindo o plano complexo de acordo com a raiz para a qual a aproximação inicial converge e dando a cada solução uma cor diferente, pode levar a imagens muito bonitas.

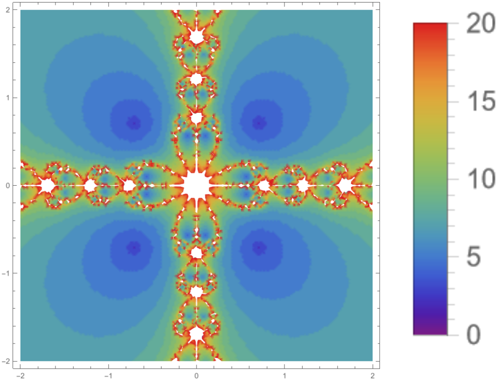
Exemplo: As raízes do polinómio $p(x) = x^4 + 1$, são

$$r_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Consideramos várias aproximações iniciais sobre o quadrado $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ e usamos 4 cores: vermelho (que mostra convergência para r_1), azul (r_2), amarelo (r_3) e verde (r_4); o resultado é mostrado na figura abaixo. As regiões brancas correspondem ao uso de aproximações iniciais para as quais o método de Newton não convergiu em 20 iterações.



Outra forma de obter as bacias de atração é utilizar uma escala de cores para representar o número de iterações necessárias para obter convergência, sem levar em conta para que raiz convergem as iterações.



Sistemas não lineares

O caso da resolução de um sistema de equações não lineares é bastante mais complexo do que o caso escalar:

- Existe uma muito maior variedade de comportamentos, pelo que saber se existe ou não solução do sistema e, em caso afirmativo, saber quantas soluções existem é difícil;
- determinar uma “boa”aproximação inicial é, geralmente, difícil;
- não existe um resultado do tipo do Teorema do Valor Intermédio que garanta uma região contendo a raiz;
- o esforço computacional dos métodos cresce rapidamente com o tamanho do sistema.

Método de Newton para sistemas não lineares

Vamos descrever, de uma forma muito sucinta, como aplicar o método de Newton para sistemas de equações não lineares. Considere-se um sistema de n equações não lineares em n incógnitas

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

ou, usando notação vetorial,

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

onde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ e $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$.

Método de Newton para sistemas

O método de Newton para o sistema anterior é definido por

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}), k = 0, 1, 2 \ldots;$$

$\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ dado,

onde $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ designa a matriz Jacobiana da função $\mathbf{f}$ calculada em $\mathbf{x}$, i.e.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

Método de Newton para sistemas (cont.)

Temos

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} \underbrace{- \left(\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\right)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})}_{\mathbf{s}^{(k)}}.$$

Na prática, não invertemos explicitamente a matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$, mas, em vez disso:

- resolvemos o sistema

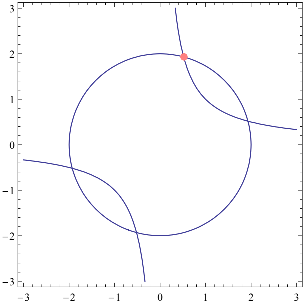
$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

  para determinar o incremento $\mathbf{s}^{(k)}$;
- calculamos a próxima iteração, usando

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}.$$

Exemplo: Considere-se o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$



Uma das suas soluções, $\mathbf{r}$, é o ponto assinalado na figura; vamos determinar essa solução, usando o método de Newton com aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Façamos $x_1 = x, x_2 = y$; temos

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 4 \\ x_1 x_2 - 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ x_2 & x_1 \end{bmatrix}$$

```
>> f=@(x) [x(1)^2+x(2)^2-4; x(1)*x(2)-1];
>> J=@(x) [2*x(1), 2*x(2); x(2), x(1)];
>> x0=[0;1];
>> s0=-J(x0)\f(x0); x1=x0+s0
x1 =
    1.0000
    2.5000
```

```
>> s1=-J(x1)\f(x1); x2=x1+s1

x2 =

    0.5952

    2.0119

>> s2=-J(x2)\f(x2); x3=x2+s2

x3 =

    0.5200

    1.9342

>> s3=-J(x3)\f(x3); x4=x3+s3

x4 =

    0.5176

    1.9319

>> s4=-J(x4)\f(x4); x5=x4+s4

x5 =

    0.5176

    1.9319
```

Notas

- Se $\mathbf{r}$ for uma raiz de $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, se as funções f_i tiverem derivadas parciais (relativamente a cada uma das variáveis x_i) de primeira e segunda ordem contínuas para todos os pontos numa certa vizinhança de $\mathbf{r}$ e se a matriz Jacobiana $\mathbf{J}'(\mathbf{r})$ for invertível, então o método de Newton converge (localmente) para $\mathbf{r}$, com convergênca quadrática; em geral, é necessária uma boa aproximação inicial $\mathbf{x}_0$ para garantir a convergência.

- O custo do método de Newton para sistemas de ordem n é muito elevado, já que, em cada iteração, há que:
  - calcular a matriz Jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{x}^{(k)})$ ($\Rightarrow n^2$ cálculos de valores de funções);
  - resolver um sistema ($\Rightarrow \mathcal{O}(n^3)$ operações).

Os chamados métodos de atualização da secante (exemplo: Método de Broyden):

- usam valores da função $\mathbf{f}$ em iterações sucessivas para obter uma aproximação para a matriz Jacobiana;
- em cada iteração, não calculam uma nova fatorização dessa matriz (necessária para resolver o sistema), mas simplesmente efetuam uma atualização da fatorização da iteração anterior.