# Ficha - Otimização sem restrições: condiçoes de otimalidade

1. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(w) = 15 - 12w - 25w^2 + 2w^3.$$

   (a) Use as primeira e segunda derivadas para determinar o máximo local e mínimo local de $F$.

   (b) Mostre que $F$ não tem nem um máximo global nem um mínimo global.

2. Considere a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(w) = 3w^3 + 7w^2 - 15w - 3.$$

   Calcule todos os pontos estacionários desta função, e determine se são mínimos locais e máximos locais. Esta função tem um máximo global ou um mínimo global?

3. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(w_1, w_2) = \frac{1}{3}w_1^3 + \frac{1}{2}w_1^2 + 2w_1w_2 + \frac{1}{2}w_2^2 - w_2 + 9.$$

   Calcule todos os pontos estacionários desta função, e verifique se são mínimos locais ou máximos locais. Esta função tem um máximo global ou um mínimo global?

4. Considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(w_1, w_2) = 8w_1^2 + 3w_1w_2 + 7w_2^2 - 25w_1 + 31w_2 - 29.$$

   Calcule todos os pontos estacionários desta função, e verifique se são mínimos locais e máximos locais. Esta função tem um máximo global ou um mínimo global?

5. Mostre que qualquer ponto da linha $w_2 - 2w_1 = 0$ é um mínimo de $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(w_1, w_2) = 4w_1^2 - 4w_1w_2 + w_2^2.$$

6. Verifique se o ponto $(0,\text{-}1)^T$ é mínimo da função

$$F(w_1, w_2) = w_1 + w_2 + \frac{1}{2}\left(w_1^2 + w_2^2\right) - \frac{w_1 + w_1^2 + w_1^3}{1 + w_1^4}.$$

   Justifique.

7. Considere o problema:

$$\text{minimizar } F(w_1, w_2) = \left(w_2 - w_1^2\right)\left(w_2 - 2w_1^2\right).$$

   (a) Mostre que as condições necessárias de otimalidade são satisfeitas no ponto $(0,0)^T$.

   (b) Mostre que a origem é um mínimo local de F para qualquer linha que passe na origem (que é, $w_2 = mw_1$).

   (c) Mostre que a origem não é um mínimo local de F (considere, por exemplo, curvas da forma $w_2 = kw_1^2$). Que conclusões se pode retirar a partir isto?

8. Considere o problema

$$\text{minimizar } F(w_1, w_2) = (w_1 - 2w_2)^2 + w_1^4.$$

   Determine o mínimo de $F$. Verifique que a condição necessária de $2^a$ ordem para um mínimo local é satisfeita nesse ponto. Verifica a condição suficiente de $2^a$ ordem? Este ponto é um minimizante local estrito? é um mínimo global?

9. Seja
$$F(w_1, w_2) = 2w_1^2 + w_2^2 - 2w_1w_2 + 2w_1^3 + w_1^4.$$
Determine os minimizantes/maximizantes de $F$ e indique que tipo de mínimos ou máximos são (local, global, estrito, etc).

10. Seja
$$F(w_1, w_2) = cw_1^2 + w_2^2 - 2w_1w_2 - 2w_2$$
onde $c$ é um escalar.

    (a) Determine os pontos estacionários de $F$ para cada valor de $c$.

    (b) Para que valores de $c$ pode $F$ ter um minimizante? Para que valores de $c$ pode $F$ ter um maximizante? Determine os minimizantes/maximizantes correspondentes a tais valores de c, e indique que tipo de mínimos ou máximos são (local, global, estrito, etc).

11. Para cada valor do escalar $c$, encontre o conjunto de todos os pontos estacionários da função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por
$$F(w_1, w_2) = w_1^2 + w_2^2 + cw_1w_2 + w_1 + 2w_2.$$
Quais dos pontos estacionários são minimizantes globais?

---

**Recordar: Alguns resultados de convexidade**

- Quando a função objetivo $F$ é uma função convexa e a região admissível $\mathcal{D}$ é um conjunto convexo, uma solução local é também global.

- **Teorema** (Desigualdade do gradiente)
  Seja $\mathcal{D}$ um conjunto convexo aberto não vazio e $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função diferençável. Então $F$ é uma função convexa se e só se $F$ satisfaz a seguinte desigualdade do gradiente:
  $$F(w) - F(y) \leq \nabla F(w)^T (w - y) \quad \text{para todo o } w, y \in \mathcal{D}$$

- **Teorema**
  Seja $\mathcal{D}$ um conjunto convexo aberto não vazio e $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ uma função duas diferençável. Então $F$ é uma função convexa se e só se a matriz hessiana $\nabla^2 F(w)$ de $F$ é semi-definida positiva para todo $w \in \mathcal{D}$.