Matemática Computacional

Exercícios de Equações Diferenciais

maria irene falcão

Mestrado em Matemática e Computação

Exercícios

Exercício 1. Use a função $\mathbf{metEuler}$ para resolver os PVI's abaixo indicados. Em cada caso, compare os valores aproximados com os valores da solução analítica; use $N = 10$ e repita para $N = 20$.

a) $y'(x) = xe^{3x} - 2y,\ \ x \in [0,1]; \quad y(0) = 0$

Solução analítica: $y(x) = \frac{1}{5}xe^{3x} - \frac{1}{25}e^{3x} + \frac{1}{25}e^{-2x}$

b) $y'(x) = 1 + \frac{y}{x},\ \ x \in [1,2]; \quad y(1) = 2$

Solução analítica: $y(x) = x \ln x + 2x$

c) $y'(x) = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2,\ x \in [1,3]; \quad y(1) = 0$

Solução analítica: $y(x) = x \tan(\ln x)$

d) $y'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2,\ \ x \in [1,2]; \quad y(1) = -1$

Solução analítica: $y(x) = -1/x$

e) $y'(x) = x - 2\,x\,y,\ \ x \in [0,1]; \quad y(0) = 0$

Solução analítica: $y(x) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x^2})$.

Exercício 2. Considere o seguinte problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' = xy^2,\ \ x \in [0,1]\,, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

a) Usando a função $\mathbf{metEuler}$, calcule aproximações para y(1.0), usando, sucessivamente, $N = 10, 20, 40, 80$.

b) Sabendo que a solução exata do problema é dada por $y(x) = \frac{2}{2-x^2}$, diga se os seus resultados ilustram a ordem de convergência $\mathcal{O}(h)$ $(h = 1/N)$ do método.

Exercício 3. Use o método de Euler com passo $h = 0.1$ para encontrar uma solução aproximada, no ponto $x = 0.2$, do seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} y''(x) = x\,y, \\ y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 1\,. \end{cases}$$

Exercício 4. Use o método de Runge-Kutta de 2ª ordem, com passo $h = 0.1$, para determinar um valor aproximado, nos pontos 0.1 e 0.2, da solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$y'(x) = -\frac{y^2}{1+x}\,; \quad y(0) = 1\,.$$

Exercício 5. Use o método de Runge-Kutta de 4ª ordem, com passo $h = 0.1$, para determinar um valor aproximado, nos pontos 0.1 e 0.2, da solução do seguinte problema de valores iniciais:

$$y'(x) = -2xy\,; \quad y(0) = 1\,.$$

Exercício 6. Considere um problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y), & x \in [a,b], \\ y(a) = \alpha, \end{cases}$$

e suponha que $f(x,y)$ é apenas função de x. Mostre que, neste caso, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem se reduz à aplicação da regra de Simpson:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx = y(x_{k+1}) - y(x_k) \approx \frac{h}{6}[f(x_k) + 4f(x_k + \frac{h}{2}) + f(x_k + h)].$$

Exercício 7.

a) Obtenha informação sobre as funções pré-definidas $\mathbf{ode23}$ e $\mathbf{ode45}$.

b) Use a função $\mathbf{ode23}$ para resolver o seguinte problema de valores iniciais:

$$y'(x) = -y(x) - 5e^{-x}\text{sen}5x;\ y(0) = 1.$$

Determine a solução aproximada do problema no intervalo $[0,3]$.

c) A solução exata do problema considerado na alínea anterior é:

$$y(x) = e^{-x}\cos 5x.$$

Esboce o gráfico de $y(x)$ e da solução aproximada.

Exercício 8. Supondo que y é 4 vezes continuamente diferenciável num intervalo que contém os pontos $x-h, x$ e $x+h$, estabeleça a seguinte fórmula (diferença centrada de 2ª ordem para aproximar $y''(x)$):

$$\frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2} = y''(x) + \mathcal{O}(h^2).$$

Exercício 9. Considere o seguinte PVF:

$$\begin{cases} y''(x) - y = -4e^{-x}\,;\, x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \\ y(1) = \frac{3}{e} \end{cases},$$

cuja solução analítica é $y(x) = e^{-x}(1+2x)$.

a) Resolva o problema, usando o método das diferenças finitas de 2ª ordem com $h = \frac{1}{4}$. Calcule o erro no ponto $x = 0.75$.

b) Repita, considerando sucessivamente $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$.

c) Verifique se os erros calculados no ponto $x = 0.75$ têm o comportamento esperado (recorde que estamos a usar um método de 2ª ordem).

Exercício 10. Resolva o seguinte problema de valores de fronteira, usando o método das diferenças finitas de 2ª ordem, considerando $h = \frac{\pi}{4}$. Compare a solução aproximada com os valores da solução exata nos nós.

$$\begin{cases} y''(x) - y'(x) - y(x) = 5\,\mathrm{sen}\,x\,;\, x \in [0,\pi] \\ y(0) = 1 \\ y'(\pi) = 2 \end{cases}.$$

Repita, considerando $h = \frac{\pi}{16}$.

Nota: A solução analítica é: $y(x) = \cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x$.

Trabalhos

Trabalho 1. Um modelo clássico em ecologia é o modelo presa-predador de Lotka-Volterra.

Considere um ecossistema simples constituído por coelhos, que têm um fornecimento de alimento infinito, e por raposas que se alimentam exclusivamente de coelhos. Este sistema pode ser modelado por um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dc}{dt} = \alpha c - \beta c r \\ \dfrac{dr}{dt} = -\gamma r + \delta c r \end{cases}$$

onde t representa o tempo, $c(t)$ é o número de coelhos, $r(t)$ o número de raposas e α, β, γ e δ são constantes não-negativas. Se $\beta = 0$, os coelhos crescem sem parar (α tem a ver com a sua taxa de crescimento); se $\delta = 0$, as raposas morrem de fome (γ é a sua taxa de declínio).

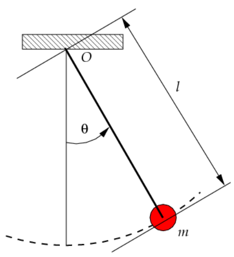
Considere $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ e $\delta = 1$.

a) Suponha que as condições inicias são $c(0) = 3$ e $r(0) = 5$.[1] Resolva o problema, para $0 \leq t \leq 5$, com recurso ao uso da função `ode45`. Esboce os gráficos de c e de r como função de t. Esboce também o gráfico de r versus c (o chamado *espaço-de-fases*.)

b) Repita, considerando $c(0) = 3$ e, sucessivamente $r(0) = 1$, $r(0) = 1.5$ e $r(0) = 2$.

c) Que observa no caso $c(0) = 3, r(0) = 2$?

Trabalho 2. A equação diferencial ordinária que governa o movimento do pêndulo (gravitacional simples)



é a seguinte:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell} \operatorname{sen} \theta = 0,$$

onde t representa o tempo (s), $\theta(t)$ o deslocamento angular (rad), g é a aceleração da gravidade ($g \approx 9.8$ m/s^2) e ℓ é o comprimento da haste (m).

[1]Os números referem-se a milhares de indivíduos.

Considere um pêndulo de comprimento $\ell = 9.8$ m. Use a função `ode45` para esboçar os gráficos do deslocamento θ (rad) e da velocidade angular $\frac{d\theta}{dt}$ (rad/s) desse pêndulo, no intervalo de tempo $[0, 10]$, para as seguintes condições iniciais:

a) $\theta(0) = \dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{d\theta}{dt}(0) = 0$.

b) $\theta(0) = \dfrac{\pi}{2}$; $\dfrac{d\theta}{dt}(0) = 0$.

c) $\theta(0) = \dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{d\theta}{dt}(0) = -1$.

d) $\theta(0) = \dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{d\theta}{dt}(0) = -2$.