ESERCIZIARIO DI FISICA 2

Pietro Donatis

Versione 1

Premessa e notazioni.

Questo *Eserciziario di fisica 2* copre gli argomenti tradizionali della meccanica classica insegnate nelle classi quarta e quinta di un liceo scientifico.
L'idea da cui è nato è partita da numerose discussioni tra l'autore e i professori Carlo Càssola e Fabio Maria Antoniali con l'intenzione di fornire agli allievi un testo di problemi svolti e una ampia selezione di esercizi proposti; si tratta di un testo gratuito: scaricabile dalla rete e fotocopiabile liberamente.
La responsabilità di quanto scritto, e di tutti gli eventuali errori, è esclusivamente di Pietro Donatis; il quale, tuttavia, deve riconoscere a Carlo Càssola la paternità di gran parte degli esercizi proposti.
Questo lavoro è senz'altro da considerarsi in evoluzione; sarò grato a tutti coloro che vorranno essere tanto gentili da segnalare errori o fornire commenti utili al miglioramento di quanto scritto in vista di auspicabili nuove versioni.

Il lavoro è organizzato fornendo per ogni argomento dei richiami teorici seguiti, paragrafo per paragrafo da problemi svolti; alla fine di ogni capitolo sono presentati degli esercizi proposti, le cui soluzioni sono tutte riportate in appendice A.
I problemi svolti che presentano nella soluzione caratteristiche particolarmente importanti, o che esemplificano questioni teoriche non richiamate precedentemente, sono segnalati con l'asterisco $*$.
Alcuni dei problemi risolti richiedono l'uso del calcolo differenziale ed integrale e il caso è sempre segnalato nella soluzione; negli esercizi proposti, la stessa cosa è segnalata dalla presenza di una stellina $\star$.
La difficoltà di un esercizio proposto è rappresentata dal numero di pallini neri ●.

Per separare la parte decimale di un numero si è usato il punto invece della virgola.
Le quantità vettoriali sono indicate in grassetto mentre i corrispondenti moduli sono in carattere normale; cosicché, ad esempio, $\boldsymbol{v}$ indica un vettore e v il suo modulo.
Questo eserciziario è stato scritto usando il programma di composizione tipografica LaTeX; per le figure sono stati usati i pacchetti pstricks e tikz.

Palermo, 10 agosto 2021

Indice

Parte I

Onde e ottica

Capitolo 1

Oscillazioni e onde

1.1 Funzione d'onda

Si dice *onda* la propagazione di una perturbazione in un mezzo elastico. Un'onda non trasporta materia ma solo l'energia della perturbazione. Un'onda si dice *armonica* se la perturbazione che l'ha generata è un'oscillazione armonica; esemplare, a questo riguardo, è la propagazione di un'onda lungo una corda che abbia una tensione $\boldsymbol{\tau}$: in tal caso, fissato un asse delle ascisse x avente origine ad uno dei capi della corda, la perturbazione può essere rappresentata per mezzo di una funzione $y(t, x)$ che esprime la perturbazione all'istante t nella posizione x.

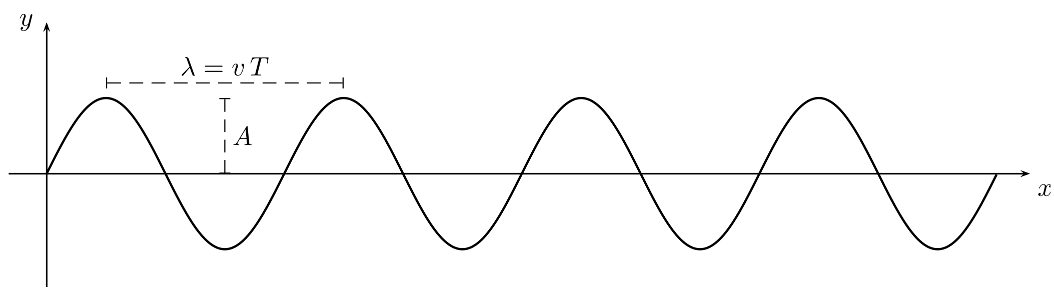


Figura 1.1: Il grafico di una funzione d'onda

Vale quindi

$$
\begin{aligned}
y(t,x) = A\cos\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{v}\right) + \theta\right] = A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} \pm \frac{x}{\lambda}\right) + \theta\right] = \\
= A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x \pm vt) \pm \theta\right] = A\cos(\omega t \pm kx \pm \theta)
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

ove il segno meno è da usare per onde che si propaghino nel verso delle x crescenti, il segno piú per onde che si propaghino nel verso delle x decrescenti. A è l'*ampiezza* e rappresenta la massima deformazione della corda dalla sua posizione di equilibrio; ω è la *pulsazione* ed è la pulsazione del moto armonico compiuto da ciascun punto della corda; T è il *periodo* e coincide con il periodo del moto armonico; λ è la *lunghezza* d'onda e rappresenta lo spazio percorso dall'onda in un periodo; due punti dell'onda che distano un numero intero di lunghezze d'onda dicono oscillare *in fase*, mentre due punti che distano in numero dispari di semilunghezze d'onda si dicono oscillare *in opposizione di fase*.
T è il periodo temporale dell'onda, mentre λ ne è il periodo spaziale, valgono cioè le relazioni

$$
y(t+T, x) = y(t,x) \qquad , \qquad y(t, x+\lambda) = y(t,x) \tag{1.2}
$$

per ogni t e x.
k è detto *numero d'onda*; il parametro θ viene detto *fase iniziale* e da esso dipende la deformazione del punto iniziale dell'onda.
Un altra grandezza comunemente utilizzata è la *frequenza* ν dell'onda che rappresenta il numero di oscillazioni compiute dall'onda in un secondo.
Fra le grandezze sopra definite valgono le seguenti relazioni

$$\lambda = v\,T = \frac{2\pi v}{\omega} \quad , \quad \nu = \frac{1}{T} \quad , \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad , \quad v = \nu\lambda \quad , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \ . \tag{1.3}$$

La velocità di un'onda su una corda dipende dalla densità lineare μ, cioè la massa per unità di lunghezza, e dal modulo τ della tensione;

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \tag{1.4}$$

In generale, la velocità di un'onda dipende solo dalle caratteristiche fisiche del mezzo in cui l'onda si propaga.
L'energia trasportata da un'onda è proporzionale al quadrato dell'ampiezza. Per una corda vibrante l'energia trasportata da un tratto di lunghezza ℓ è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,\mu\ell\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}\,m\omega^2 A^2 \tag{1.5}$$

ove m è la massa del tratto di corda.

PROBLEMI RISOLTI

***Problema 1**

Un'onda di ampiezza $A = 15\,\mathrm{cm}$ su una corda è generata dal moto armonico di uno dei suoi estremi con frequenza $\nu = 1.2\,\mathrm{Hz}$ e si propaga con velocità $v = 2.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; sapendo che all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ l'estremo oscillante si trova nella posizione di equilibrio e che il movimento iniziale avviene nel verso delle y positive,

① determinare periodo, lunghezza, pulsazione e fase iniziale dell'onda;
② scrivere l'equazione d'onda;
③ determinare la deformazione della corda a distanza $d = 3\lambda$ dall'estremo oscillante all'istante $t = 10\,\mathrm{s}$.

Soluzione

① Usando le relazioni (1.3) si trova facilmente

$$T = \frac{1}{\nu} = 0.83\,\mathrm{s} \qquad , \qquad \lambda = \frac{v}{\nu} = 2.1\,\mathrm{m} \qquad , \qquad \omega = 2\pi\nu = 7.5\,\mathrm{s^{-1}} \ .$$

Per determinare la fase iniziale si osserva che deve valere $y(0,0) = 0$ e quindi l'equazione d'onda diventa

$$y(0,0) = A\cos\theta = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \cos\theta = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{2} \ .$$

Per scegliere fra i due segni occorre ragionare sul moto armonico dell'estremo della corda; il testo del problema ci informa che il movimento iniziale avviene nel verso delle y positive, questo significa che la velocità iniziale è positiva; ricordando che l'espressione algebrica del modulo della velocità di un moto armonico in funzione del tempo è $v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta)$ si deduce che la velocità iniziale, cioè all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$, è

$$v(0) = -A\omega\,\mathrm{sen}\,\theta$$

perché questa velocità sia positiva bisogna quindi che il seno sia negativo e quindi deve essere

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \; .$$

② I dati ricavati sopra permettono di scrivere l'espressione della funzione d'onda:

$$y(t,x) = A\cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{v}\right) - \frac{\pi}{2}\right] = A\,\mathrm{sen}\left[2\pi\nu\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = 0.15\,\mathrm{sen}(7.5\,t - 3.0\,x)$$

③ Utilizzando la funzione d'onda si trova facilmente

$$y(10, 3\lambda) = A\,\mathrm{sen}\left[2\pi\nu(10-3)\right] = A\,\mathrm{sen}(14\pi\nu) = 8.8\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$$

Problema 2

In riferimento a un sistema di assi cartesiano l'equazione di un'onda che si propaga lungo una corda di densità lineare $\mu = 0.5\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$ è

$$y(t,x) = 5.2\,\mathrm{sen}(0.25\pi x + 4\pi t) \; ;$$

determinare l'ampiezza, la lunghezza d'onda, la velocità, il periodo, la frequenza, la tensione della corda.

Soluzione

Confrontando l'equazione d'onda data con la (1.1), si trova subito che

$$A = 5.2\,\mathrm{m}$$

inoltre

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} &= 0.25\pi \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = 8.0\,\mathrm{m} \\ \frac{2\pi v}{\lambda} &= 4\pi \qquad \longrightarrow \qquad v = 16\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

Si noti che il verso di propagazione dell'onda è opposto a quello scelto come positivo nel sistema di riferimento. Da questi valori è possibile trovare quelli delle altre grandezze:

$$T = \frac{\lambda}{v} = 0.5\,\mathrm{s} \qquad , \qquad \nu = \frac{v}{\lambda} = 2\,\mathrm{Hz}$$

Il modulo della tensione della corda si determina per mezzo della (1.4), ricordando di trasformare i $\mathrm{g\,cm^{-1}}$ in $\mathrm{kg\,m^{-1}}$:

$$\tau = \mu v^2 = 12.8\,\mathrm{N}$$

Si noti che la presenza della funzione seno al posto della funzione coseno non cambia le caratteristiche dell'onda ma solo la fase iniziale.

***Problema 3**

Un'onda sinusoidale ha frequenza $\nu = 500\,\mathrm{Hz}$ e velocità $v = 350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; determinare

① quanto distano due punti la cui differenza di fase è $\Delta\theta = \pi/3\,\mathrm{rad}$;

② la differenza di fase fra due punti dell'onda che oscillano separati dall'intervallo di tempo $\Delta t = 1.2\,\mathrm{s}$.

Soluzione

① Poiché due punti che si trovano ad una differenza di fase di 2π distano una lunghezza d'onda, proporzionalmente si trova che una differenza di fase $\Delta\theta$ corrisponde ad una distanza

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\pi}\,\Delta\theta$$

quindi, ricordando che vale $\lambda = v/\nu$, si ha

$$\Delta x = \frac{v\Delta\theta}{2\pi\nu} = 0.117\,\mathrm{m}$$

② Due punti che oscillano separati da un periodo hanno una differenza di fase di 2π, proporzionalmente se la distanza temporale è Δt la differenza di fase è

$$\Delta\theta = \frac{\Delta t}{T}\,2\pi \;;$$

ricordando che $T = 1/\nu$ si trova

$$\Delta\theta = 2\pi\nu\Delta t = 3.8\cdot 10^2\,\mathrm{rad}$$

1.2 Interferenza; onde stazionarie

La composizione di due onde che si trovino ad oscillare simultaneamente nello stesso mezzo è regolata dal seguente *principio di sovrapposizione.*

1. Il moto di ciascuna delle onde componenti è indipendente dalla presenza delle altre onde.
2. La deformazione del mezzo dovuta alla presenza di piú onde è uguale alla somma vettoriale delle deformazioni dovute alle singole onde componenti.

Si consideri la sovrapposizione di due onde aventi stessa lunghezza, frequenza ed ampiezza, che si propaghino nel verso positivo delle ascisse con una differenza di fase θ, le cui equazioni d'onda sono

$$y_1(t,x) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)\right] \qquad , \qquad y_2(t,x) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)+\theta\right]$$

Utilizzando le formule di prostaferesi, si ottiene

$$y(t,x) = y_1(t,x) + y_2(t,x) = 2A\cos\frac{\theta}{2}\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x-vt)+\frac{\theta}{2}\right] \tag{1.6}$$

L'onda risultante ha quindi la stessa lunghezza e frequenza delle due onde componenti, ha una fase che è la media delle due fasi componenti e ampiezza $2A\cos\frac{\theta}{2}$.
Se $\theta = 2k\pi$, nel qual caso le onde componenti si dicono *in fase*, l'onda risultante ha ampiezza $2A$, cioè uguale alla somma delle ampiezze delle onde componenti; se $\theta = (2k+1)\pi$, nel qual caso le onde componenti si dicono *in opposizione di fase*, l'onda risultante ha ampiezza nulla. Nel primo caso si ha *interferenza costruttiva* e nel secondo caso *interferenza distruttiva.*
Se due onde di ugual frequenza si propagano partendo in fase e si incontrano dopo aver percorso distanze diverse d_1 e d_2 esse risultano sfasate; la loro interferenza è costruttiva se la differenza dei due percorsi è pari a un numero intero di lunghezze d'onda, cioè se

$$|d_1 - d_2| = k\lambda \tag{1.7}$$

e distruttiva se la differenza dei du percorsi è pari a un numero dispari di mezze lunghezze d'onda, cioè se

$$|d_1 - d_2| = \frac{2k+1}{2}\,\lambda\;. \tag{1.8}$$

Se le due onde si muovono in versi opposti, le loro funzioni d'onda sono

$$y_1(t,x) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right] \qquad , \qquad y_2(t,x) = A\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) + \theta\right]$$

la cui sovrapposizione dà

$$y(t,x) = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}vt + \frac{\theta}{2}\right) \tag{1.9}$$

L'onda risultante non si propaga: vi sono dei punti, detti *nodi*, che restano fermi; la loro posizione si trova annullando il primo dei due coseni:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\theta}{2}\right) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{\lambda}{4\pi}\big[(2k+1)\pi - \theta\big] \tag{1.10}$$

Un'onda che ha queste caratteristiche si dice *onda stazionaria*.

PROBLEMI RISOLTI

***Problema 1**

Due onde sonore vengono generate da due altoparlanti disposti a distanza D lungo l'asse delle ascisse; sapendo che la frequenza delle onde è $\nu = 440\,\mathrm{Hz}$ e che la velocità del suono in aria è $v = 343.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, determinare D in modo tale che una persona posta sull'asse delle ascisse, in un punto che non sia posto fra i due altoparlanti, percepisca interferenza distruttiva nei seguenti due casi:

① i due altoparlanti emettono onde in fase;

② l'altoparlante piú lontano emette un'onda sfasata di θ_0 rispetto all'altoparlante piú vicino.

Soluzione

① Se le due onde vengono emesse in fase, lo sfasamento con cui vengono rilevate dall'ascoltatore dipende solo dalla diversa distanza percorsa; se la distanza percorsa differisce per un numero intero di lunghezze d'onda, le due onde, partite in fase, arrivano ancora in fase; in generale una differenza D fra le distanze percorse dalle due onde genera la differenza di fase

$$\Delta\theta = 2\pi\,\frac{D}{\lambda}$$

tale differenza produce quindi una interferenza distruttiva se la differenza di fase è un multiplo dispari di π, cioè se

$$2\pi\,\frac{D}{\lambda} = (2k+1)\pi \qquad \longrightarrow \qquad D = (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

cioè la distanza fra gli altoparlanti deve essere un numero dispari di mezze lunghezze d'onda. Nel caso presente, quindi, si ha

$$D = (2k+1)\,\frac{v}{2\nu} = (2k+1)\cdot 39\,\mathrm{cm}$$

② Se i due altoparlanti generano onde inizialmente sfasate, per avere interferenza distruttiva è necessario che la differenza di fase totale, cioè la somma di quella con cui le onde sono generate piú quella acquisita per aver percorso distanza diverse, deve essere un multiplo dispari di π; quindi

$$\Delta\theta = \theta_0 + 2\pi\,\frac{D}{\lambda} = (2k+1)\pi \qquad \longrightarrow \qquad D = (2k+1)\,\frac{\lambda}{2} - \frac{\theta_0}{2\pi}\,\lambda$$

***Problema 2**

Una corda di lunghezza $\ell = 5.0\,\mathrm{m}$ e massa $m = 2.4\,\mathrm{kg}$ è tesa in modo che il modulo della sua tensione sia $\tau = 192\,\mathrm{N}$ e i suoi estremi sono fissati; i questa situazione le onde generate ad un estremo si propagano fino all'altro estremo ove si riflettono; le onde riflesse indietro interferiscono con le onde che si propagano in avanti dando origine ad onde stazionarie. Determinare la posizione dei nodi.

Soluzione

L'equazione delle onde stazionarie ha la forma (1.9) con

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\ell\tau}{m}} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Ma il fatto che gli estremi della corda siano fissi impone che gli estremi della corda siano due nodi delle onde stazionarie; deve quindi, in ogni istante, valere

$$y(t,0) = y(t,\ell) = 0$$

dalla prima delle (1.10) quindi si trova

$$\cos\frac{\theta}{2} = 0 \qquad , \qquad \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\,\ell + \frac{\theta}{2}\right) = 0$$

Dalla prima si ottiene

$$\theta = \pi + 2k\pi$$

che usata nella seconda dà

$$\frac{2\pi}{\lambda}\ell + \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} + k'\pi \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = \frac{2\ell}{k'-k}$$

$k' - k$ è un numero intero positivo, posto $n = k' - k$, le lunghezze d'onda dipendono da n, si ha infatti

$$\lambda_n = \frac{2\ell}{n}$$

quindi non tutte le lunghezze d'onda sono possibili, ma solo quelle i cui multipli interi sono il doppio della lunghezza della corda. Allora l'equazione delle onde stazionarie diventa

$$y(t,x) = 2A\cos\left[\frac{n\pi}{\ell}\,vt + \frac{\pi}{2} + k\pi\right]\cos\left[\frac{n\pi}{\ell}\,x + \frac{\pi}{2} + k\pi\right] = 2A\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\,vt\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\,x\right)$$

i nodi quindi si hanno per

$$\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{\ell}\,x\right) = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x = m\,\frac{\ell}{n}\ .$$

con la condizione $0 \le x \le \ell$.
Quindi, per $n = 1$ la lunghezza d'onda è $\lambda_1 = 2\ell$ e vi sono nodi per $m = 0, 1$ alle posizioni $x_1 = 0$ e $x_2 = \ell$; per $n = 2$ la lunghezza d'onda è $\lambda_2 = \ell$ e vi sono nodi per $m = 0, 1, 2$ alle posizioni $x_1 = 0$, $x_1 = \frac{\ell}{2}$, $x_3 = \ell$ e cosí via. In generale, quindi, all'onda stazionaria di lunghezza d'onda λ_n corrispondono $n + 1$ nodi nelle posizioni

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = \frac{1}{n}\,\ell \quad , \quad x_2 = \frac{2}{n}\,\ell \quad , \quad \ldots \quad , \quad x_{n-1} = \frac{n-1}{n}\ell \quad , \quad x_n = \ell$$

Si osservi che le frequenze delle onde stazionarie, dette *armoniche*, corrispondenti alle diverse lunghezze d'onda sono

$$\nu_1 = \frac{v}{\lambda_1} = \frac{v}{2\ell} \quad , \quad \nu_2 = \frac{v}{\lambda_2} = 2\frac{v}{2\ell} \quad , \quad \nu_3 = \frac{v}{\lambda_3} = 3\frac{v}{2\ell} \quad , \quad \ldots \quad , \quad \nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n\frac{v}{2\ell}$$

sono dunque tutte multiple della ν_1 detta *armonica fondamentale*.

1.3 Onde sonore; effetto Doppler; battimenti

Le onde sonore sono onde di compressione longitudinali che si propagano in un mezzo, come l'aria, in grado di comprimersi ed espandersi. La velocità delle onde sonore in un mezzo è data da

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \tag{1.11}$$

ove $B = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$, detto *modulo di compressione* del mezzo, è la variazione Δp di pressione necessaria a causare una variazione relativa $\Delta V/V$ del volume del mezzo. Nel caso dell'aria si può dimostrare che vale

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \tag{1.12}$$

ove γ è il rapporto fra la capacità termica molare a pressione costante C_p e la capacità termica a volume costante C_V che per l'aria vale $\gamma = 1.4$; p e ρ sono rispettivamente pressione e densità dell'aria e dipendono entrambe dalle temperatura. Alla temperatura $t = 20\,°\mathrm{C}$ vale

$$v_s = 343.21\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{1.13}$$

Quando la sorgente di un'onda sonora e l'osservatore sono in moto relativo la frequenza percepita dall'osservatore è diversa da quella emessa dalla sorgente e dipende dal modulo e dal verso della velocità relativa. Si devono distinguere due casi.

A. La sorgente sonora è in movimento con velocità di modulo v verso l'osservatore fermo. In questo caso la relazione fra la frequenza emessa ν_e e la frequenza percepita ν è

$$\nu = \frac{\nu_e}{1 - \dfrac{v}{v_s}} \tag{1.14}$$

ove v_s è la velocità del suono. Se la sorgente si allontana dall'osservatore occorre cambiare il segno della velocità relativa v e quindi al denominatore compare un segno positivo.

B. L'osservatore è in movimento verso con velocità di modulo v la sorgente sonora ferma. In questo caso la relazione è

$$\nu = \left(1 + \frac{v}{v_s}\right)\nu_e\ . \tag{1.15}$$

Ancora nel caso l'osservatore si allontani dal sorgente occorre cambiare il segno di v.

Si noti che, in entrambi i casi, la frequenza percepita è maggiore se sorgente e osservatore si avvicinano e minore se si allontanano.
Se interferiscono due onde sonore con pulsazioni diverse ma molto vicine si ha il fenomeno dei *battimenti*: si tratta di un'oscillazione con pulsazione uguale alla media delle oscillazioni componenti e con ampiezza *modulata* cioè a sua volta oscillante con una frequenza, detta *frequenza di battimento* pari alla semi differenza delle frequenze componenti. Nel caso di fasi iniziali nulle, si supponga che nel punto di ascissa x le deformazioni armoniche varino nel tempo con le leggi

$$y_1(t) = A\cos(2\pi\nu_1 t) \qquad , \qquad y_2(t) = A\cos(2\pi\nu_2 t)$$

si ha allora

$$y(t) = A(t)\cos\left(2\pi\,\frac{\nu_1+\nu_2}{2}\,t\right) \tag{1.16}$$

ove

$$A(t) = 2A\cos\left(2\pi\,\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\,t\right) \tag{1.17}$$

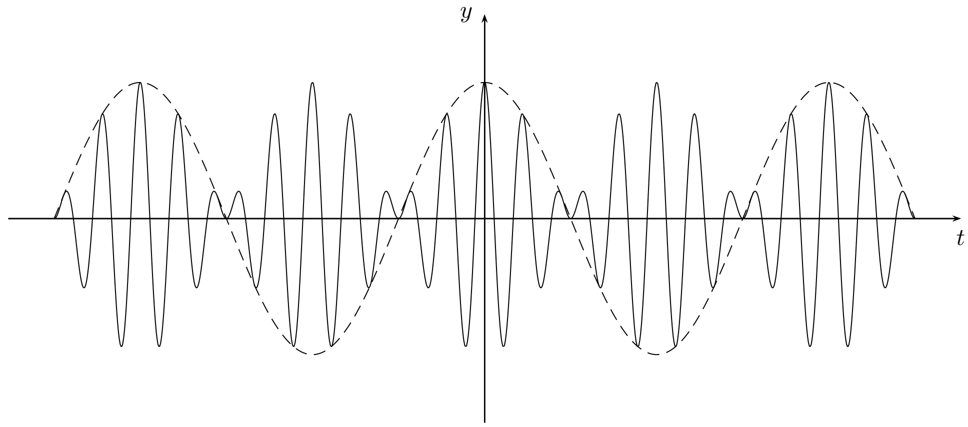


Figura 1.2: Battimenti.

Il risultato è rappresentato in figura 1.2.
La frequenza ν_b con cui l'ampiezza presenta i massimi è detta *frequenza di battimento* ed è il doppio della frequenza dell'oscillazione indicata in figura con il tratteggio; vale quindi

$$\nu_b = |\nu_1 - \nu_2| \tag{1.18}$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Una sbarra di ferro di lunghezza $\ell = 184.5\,\mathrm{m}$ viene percossa ad un'estremità; si generano due onde sonore una che si propaga lungo la sbarra e l'altra che si propaga in aria; un osservatore che si trova all'altro capo della sbarra percepisce l'onda in aria un intervallo di tempo $\Delta t = 0.5\,\mathrm{s}$ dopo l'onda nella sbarra; determinare il modulo v la velocità del suono nella sbarra di ferro.

Soluzione

Indicando con t_a il tempo di propagazione dell'onda in aria e con t_f il tempo di propagazione dell'onda nel ferro, si ha

$$t_f = \frac{\ell}{v} \quad , \quad t_a = \frac{\ell}{v_s} \qquad \longrightarrow \qquad \Delta t = \ell\left(\frac{1}{v_s} - \frac{1}{v}\right)$$

da cui si ottiene

$$v = \frac{\ell v_s}{\ell - v_s \Delta t} = 4.9 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}\ .$$

*Problema 2

Si consideri un'ambulanza in moto con velocità $v_1 = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ con la sirena in funzione che mette un'onda sonora con frequenza $\nu_e = 520\,\mathrm{Hz}$; un'automobile si muove verso l'ambulanza con velocità $v_2 = 14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; determinare la frequenza percepita dal guidatore dell'automobile.

Soluzione

Nello stabilire la velocità di una sorgente o di un osservatore è necessario fissare il sistema di riferimento rispetto al quale tali velocità vanno determinate. Il sistema di riferimento corretto è quello in cui l'aria in cui si propagano le onde sonore è ferma. Rispetto a tale sistema di riferimento la sorgente e l'osservatore in questione sono entrambi in moto, quindi non è possibile utilizzare né la (1.14) né la (1.15). L'onda emessa dall'ambulanza verrebbe percepita da un osservatore fermo con una frequenza aumentata secondo la (1.14); tale frequenza viene percepita dall'osservatore nell'automobile ulteriormente aumentata secondo la (1.15); il risultato finale è quindi

$$\nu = \frac{1 + \frac{v_2}{v_s}}{1 - \frac{v_1}{v_s}} \nu_e = \frac{v_s + v_2}{v_s - v_1} \nu_e = 584\,\mathrm{Hz}\ .$$

1.4 Esercizi

Funzione d'onda

●○○ **Es. 1** — Due corde di chitarra in acciaio hanno la stessa lunghezza. Una ha diametro $d_1 = 0.5\,\mathrm{mm}$ ed è soggetta a una tensione di modulo $\tau_1 = 400\,\mathrm{N}$; la seconda ha diametro doppio ed è soggetta a una tensione doppia; determinare il rapporto tra i moduli delle velocità di propagazione di un'onda sinusoidale in queste due corde.

●●○ **Es. 2** — Su una corda avente densità lineare $\mu = 4.2\,\mathrm{g\,m^{-1}}$ si propaga un'onda di funzione $y(t,x) = 0.25\cos(kx + \omega t)$; utilizzando i valori $k = 2.5\,\mathrm{m^{-1}}$, $\omega = 6.5\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ determinare

a) la velocità di propagazione dell'onda;

b) il modulo della tensione della corda.

●●○ **Es. 3** — Una lega di alluminio di densità volumica $\rho = 2.8\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ può sopportare una tensione massima per unità di sezione pari a $\sigma = 483\,\mathrm{MPa}$; determinare il modulo della velocità massima con cui un onda propagare su un filo fatto di tale lega, mostrando che essa non dipende dalla sezione del filo.

●●○ **Es. 4** — Una persona, nell'intervallo di tempo $\Delta t = 3.4\,\mathrm{s}$, osserva transitare $n = 13$ creste di un'onda; sapendo che la distanza fra due creste successive è $\Delta x = 0.75\,\mathrm{m}$, determinare il modulo della velocità di propagazione dell'onda.

●●○ **Es. 5** — Scrivere la funzione di un'onda trasversale sinusoidale che si muove su una corda in direzione delle ascisse positive, con numero d'onda angolare $k = 6\,\mathrm{cm^{-1}}$, periodo $T = 0.20\,\mathrm{s}$ e ampiezza $A = 3.0\,\mathrm{mm}$; determinare inoltre il modulo della velocità massima di un punto della corda.

●●○ **Es. 6** — Una corda orizzontale di lunghezza $\ell = 12\,\mathrm{m}$ ha massa $m_1 = 450\,\mathrm{g}$ ed è messa in tensione passando per una carrucola e quindi dopo la quale è appeso un corpo di massa $m_2 = 1.3\,\mathrm{kg}$; determinare

a) il modulo della velocità di propagazione di un'onda sulla corda;

b) la lunghezza d'onda di un'onda sapendo che ha periodo $T = 0.085\,\mathrm{s}$;

●●● **Es. 7** — Un'onda trasversale si propaga lungo una corda tesa attraverso un tratto di densità lineare $\mu_1 = 20\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$, poi passa su un tratto di densità $\mu_2 = 80\,\mathrm{g\,cm^{-1}}$; determinare il rapporto fra le lunghezze d'onda nei due tratti.

Interferenza; onde stazionarie

●○○ **Es. 1** — Due onde di uguale ampiezza e frequenza ma con differenza di fase θ si propagano lungo una corda; determinare θ in modo tale che l'ampiezza dell'onda risultante dall'interferenza sia uguale all'ampiezza delle due onde componenti.

●○○ **Es. 2** — Una corda di lunghezza $\ell = 60\,\mathrm{cm}$ vibra con un'onda stazionaria avente 3 ventri; stabilire di che armonica si tratta, e qual è la sua lunghezza d'onda.

●○○ **Es. 3** — Un filo per stendere i panni di massa $m = 12.5\,\mathrm{g}$ è soggetto a una tensione di modulo $\tau = 30.1\,\mathrm{N}$ ed ha lunghezza $\ell = 7.66\,\mathrm{m}$; si determinino la sua frequenza fondamentale e la sua seconda armonica.

●○○ **Es. 4** — Determinare di quale fattore cambia la frequenza fondamentale di una corda tesa nei seguenti casi

a) la tensione viene duplicata;
b) il diametro viene triplicato, mantenendo costante la densità volumica del materiale;
c) la lunghezza viene dimezzata.

●○○ **Es. 5** — Un impulso progressivo viene prodotto al capo libero di una corda tesa di lunghezza $\ell = 10\,\mathrm{m}$ e massa $m = 150\,\mathrm{g}$; l'altra estremità della corda è fissata ad una parete per cui, giunto al termine della corda, l'impulso ritorna indietro arrivando al capo libero dopo $\Delta t = 200\,\mathrm{ms}$, determinare il modulo della tensione τ della corda.

●●○ **Es. 6** — In un violino la corda accordata sul la deve avere, nell'armonica fondamentale, una frequenza di $\nu = 440\,\mathrm{Hz}$; si trova che tale corda produce una nota alla frequenza $\nu_2 = 450\,\mathrm{Hz}$ se sottoposta a una tensione di modulo $\tau_2 = 500\,\mathrm{N}$;

a) determinare il modulo della tensione che produce l'accordatura corretta;
b) sapendo che la corda è lunga $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ determinarne la densità lineare.

●●○ **Es. 7** — Una corda tesa di lunghezza $\ell = 10.0\,\mathrm{m}$ e massa $m = 150\,\mathrm{g}$ ha un'estremità fissata ad una parete. Un impulso trasversale I_1 prodotto al capo libero, dopo un intervallo di tempo $\Delta t = 0.200\,\mathrm{s}$ ritorna al punto di partenza;

a) si determinino la velocità di propagazione delle onde trasversali e la tensione τ nella corda.
b) in seguito, due impulsi I_2 e I_3, identici nella forma, vengono generati al capo libero della corda ad una certa distanza l'uno dall'altro; sapendo che I_3 interferisce con I_2 ad una distanza dalla parete pari a $\ell/3$, determinare l'intervallo temporale Δt_1 intercorso tra la generazione dei due impulsi e specificare il tipo d'interferenza essi producono.

●●○ **Es. 8** — Una corda ha densità lineare $\mu = 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ lunga $\ell = 4.00\,\mathrm{m}$ e soggetta ad una tensione di modulo $\tau = 400\,\mathrm{N}$; determinare

a) la frequenza fondamentale ν_1;
b) di quanto deve essere aumentata la tensione della corda per ottenere una frequenza fondamentale $\nu_1' = 3/2\,\nu_1$.

●●○ **Es. 9** — Due sorgenti sonore puntiformi emettono, in fase tra loro, onde stazionarie di medesima ampiezza alla frequenza $\nu = 114.4\,\mathrm{Hz}$; determinare che tipo di interferenza si realizza in un punto che dista $d_1 = 9.0\,\mathrm{m}$ dalla prima sorgente e $d_2 = 7.5\,\mathrm{m}$ dalla seconda.

●●● **Es. 10** — Supposto che due sorgenti sonore aventi la stessa fase e la stessa ampiezza siano distanti $D = 100\,\mathrm{m}$ emettano onde armoniche di ugual frequenza $\nu = 420\,\mathrm{Hz}$, determinare a quale distanza d dalle sorgenti, internamente al segmento che le congiunge, un osservatore avverte il primo punto di interferenza distruttiva.

●●● **Es. 11** — Un'onda stazionaria su una corda ha velocità di modulo $v = 330\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; si sa che la frequenza n-esima è $\nu_n = 375\,\mathrm{Hz}$ e la successiva è $\nu_{n+1} = 450\,\mathrm{Hz}$; determinare

a) la lunghezza della corda;
b) il valore della frequenza fondamentale.

●●○ **Es. 12** — Due sorgenti puntiformi S_1 ed S_2 emettono onde sonore armoniche di pari lunghezza d'onda e ampiezza emesse in fase situate a distanza D; un ricevitore è situato in un punto P che forma con le due sorgenti un triangolo rettangolo isoscele avente l'angolo retto in P e tale che la distanza di P dalle due sorgenti sia $d = 2.00\,\mathrm{m}$; si verifichi che il ricevitore registra un'interferenza costruttiva; il ricevitore si sposta quindi da P verso S_2 rilevando la prima interferenza distruttiva dopo aver percorso la distanza $a = 50.0\,\mathrm{cm}$; determinare la frequenza emessa dalle sorgenti.

●●● **Es. 13** — Due funi di densità lineare $\mu_1 = 32.0\,\mathrm{g\,m^{-1}}$ e $\mu_2 = 12.5\,\mathrm{g\,m^{-1}}$ e di lunghezze $\ell_1 = 7.5\,\mathrm{m}$ e $\ell_2 = 2.0\,\mathrm{m}$ sono unite ad una estremità comune e sono tese orizzontalmente con una tensione di modulo $\tau = 340\,\mathrm{N}$; determinare qual'è il numero minimo di nodi che deve formare la prima fune perché si formano onde stazionarie con un nodo nel punto di giunzione e la relativa frequenza.

Onde sonore; effetto Doppler; battimenti

●○○ **Es. 1** — Sapendo che le frequenze sonore udibili da un orecchio umano sono comprese circa nell'intervallo fra $\nu_1 = 20\,\mathrm{Hz}$ e $\nu_2 = 20\,\mathrm{kHz}$; determinare il corrispondente intervallo di frequenze.

●○○ **Es. 2** — Una sirena di allarme di un edificio emette un'onda sonora di frequenza $\nu = 920\,\mathrm{Hz}$; un passante si allontana dall'edificio misurando una frequenza $\nu_r = 850\,\mathrm{Hz}$; determinare la velocità del passante.

●●○ **Es. 3** — Una persona, ferma al bordo di una strada rettilinea, confronta la frequenza prodotta da una sirena di un'autoambulanza produce con quella del proprio diapason tarato a $\nu_0 = 440\,\mathrm{Hz}$, e trova che la differenza sia nella fase di avvicinamento sia in quella di allontanamento si misura una frequenza di battimento $\nu_b = 40.0\,\mathrm{Hz}$; determinare il modulo della velocità dell'autoambulanza e la frequenza emessa dell'autoambulanza.

●●○ **Es. 4** — Per accordare il sol di un violino lo si confronta con un pianoforte che, essendo accordato, produce un suono di frequenza $nu = 98\,\mathrm{Hz}$; la corda di violino risolta troppo tesa e si percepiscono $n = 5$ battimenti al secondo; determinare il periodo di oscillazione della corda di violino e la riduzione percentuale della tensione della corda necessaria per la corretta accordatura.

●●● **Es. 5** — Una volante della polizia si muove alla velocità di modulo $v_a = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ verso un'autoambulanza in moto verso la volante con velocità $v_b = 75\,\mathrm{km\,h^{-1}}$; la volante ha una sirena che emette un'onda sonora di frequenza $\nu_a = 650\,\mathrm{Hz}$ mentre l'autoambulanza ha una sirena diversa che emette un'onda sonora di frequenza $nu_b = 920\,\mathrm{Hz}$; determinare

a) la frequenza ν_1 dell'ambulanza rilevata dalla volante;

b) la frequenza ν_2 della volante rilevata dall'ambulanza.

●●○ **Es. 6** — Suonando il do$_5$ su una tastiera di pianoforte insieme a un diapason che emette la frequenza $\nu_1 = 519\,\mathrm{Hz}$ si ottengono $n_1 = 4\,\mathrm{s^{-1}}$ battimenti al secondo, mentre se la frequenza emessa dal diapason è $\nu_2 = 536\,\mathrm{Hz}$ si ottengono $n_2 = 13\,\mathrm{s^{-1}}$ battimenti al secondo; determinare la frequenza del do$_5$.

●●● **Es. 7** — Una persona sta correndo alla velocità di modulo $v = 10.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ verso un muro suonando un fischietto a che emette un suono di frequenza $\nu = 440\,\mathrm{Hz}$; determinare

a) la frequenza ν_1 del suono che giunge al muro;

b) la frequenza ν_2 del suono riflesso udito dalla persona in corsa.

●●● **Es. 8** — Due sirene emettono onde sonore della stessa frequenza $\nu = 750\,\mathrm{Hz}$; una persona si muove con velocità di modulo v lungo il segmento che unisce le due sirene percependo $n = 530$ battimenti al minuto; determinare v.

●●● **Es. 9** — Due treni si muovono uno verso l'altro con la stessa velocità di modulo $v = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; il treno A emette un fischio avente frequenza $\nu_e = 650\,\mathrm{Hz}$; determinare la frequenza percepita dal treno B se l'aria in cui si propaga l'onda sonora si muove per effetto del vento nella direzione da B ad A con velocità di modulo $v_1 = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Capitolo 2

Ottica geometrica

2.1 Riflessione

La luce è un campo elettromagnetico che si propaga oscillando nello spazio con velocità di modulo costante; nello spazio vuoto il valore di tale costante è $c = 299792458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. La luce visibile dall'occhio umano ha una lunghezza d'onda compresa fra $400\,\mathrm{nm}$ e $700\,\mathrm{nm}$. Se la luce si propaga nello spazio vuoto o se incontra ostacoli grandi rispetto alla sua lunghezza d'onda, è possibile applicare il modello dell'*ottica geometrica* che considera la luce come la propagazione in linea retta lungo *raggi luminosi* che seguono il *principio di Fermat*:

> *Nel propagarsi da un punto A ad un punto B la luce percorre sempre la curva* brachistocrona*, cioè la traiettoria per la quale impiega il tempo minimo.*

Quando un raggio luminoso incide su una superficie riflettente rimbalza indietro generando un raggio detto *raggio riflesso*; questo fenomeno è detto *riflessione* ed è regolato dalle seguenti leggi:

1. il raggio incidente, il raggio riflesso e la retta perpendicolare alla superficie riflettente nel punto di incidenza P sono complanari;
2. l'angolo di incidenza i e l'angolo di riflessione i' sono uguali.

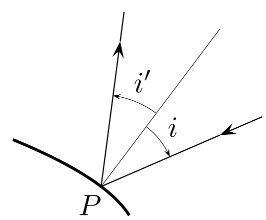


Figura 2.1: Angoli di incidenza e riflessione.

I ruoli del raggio incidente e del raggio riflesso sono scambiabili (principio di invertibilità dei cammini ottici).
Un fascio di raggi luminosi passanti per uno stesso punto si dice *omocentrico*.
Un raggio luminoso incidente su uno specchio (o su una lente) e il corrispondente raggio emergente si dicono *raggi coniugati*; se raggi coniugati formano entrambi fasci omocentrici i rispettivi centri si dicono *punti coniugati*. Di due punti coniugati se uno è sorgente di uno dei due fasci coniugati l'altro si dice *immagine*. Se i punti di un fascio omocentrico uscente da un dispositivo si incontrano in un punto fisico allora l'immagine che si forma è detta reale; se i raggi invece divergono da un punto e solo i loro prolungamenti si incontrano in un punto l'immagine che si forma è detta *virtuale*.
I dispositivi che hanno la proprietà di avere sempre fasci omocentrici coniugati a fasci omocentrici, cioè che immagine di un punto è sempre un punto, si dicono dispositivi *stigmatici*.

2.1.1 Specchio piano

L'immagine di un punto P che emette un fascio di raggi luminosi formata da uno specchio piano si trova nel punto P' simmetrico di P rispetto al piano dello specchio. L'immagine $A'B'$ di un oggetto esteso AB formata da uno specchio piano, quindi, è *diritta* (è cioè orientata nello stesso verso dell'oggetto che l'ha prodotta) è *virtuale* (cioè non formata dai raggi riflessi, ma dai loro prolungamenti); ha le stesse dimensioni dell'oggetto. Lo specchio piano è un dispositivo stigmatico.

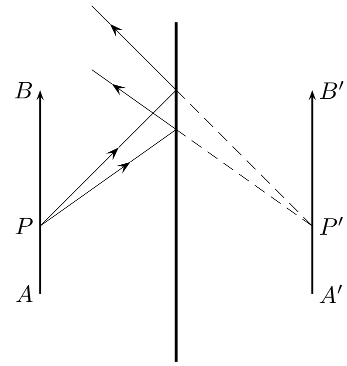


Figura 2.2: Riflessione da uno specchio piano.

2.1.2 Specchio sferico concavo

L'immagine P' di un punto P che si trova a distanza p da uno specchio sferico concavo si forma a distanza p' dallo specchio; detto r il raggio di curvatura dello specchio vale la *legge dei punti coniugati*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \ , \tag{2.1}$$

ove $f = r/2$. L'asse di simmetria dello specchio sferico è detto *asse ottico* dello specchio e vertice V è il punto di intersezione fra asse ottico e specchio; il punto F dell'asse ottico che dista f dallo specchio si dice *fuoco* dello specchio; si trova nel punto medio fra lo specchio ed il centro C dello specchio.
Per la costruzione delle immagini si tenga conto che:

a) i raggi luminosi incidenti paralleli all'asse si riflettono passando per il fuoco;

b) i raggi luminosi incidenti passanti per il fuoco si riflettono paralleli all'asse ottico;

c) i raggi luminosi incidenti nel vertice si riflettono simmetricamente all'asse ottico.

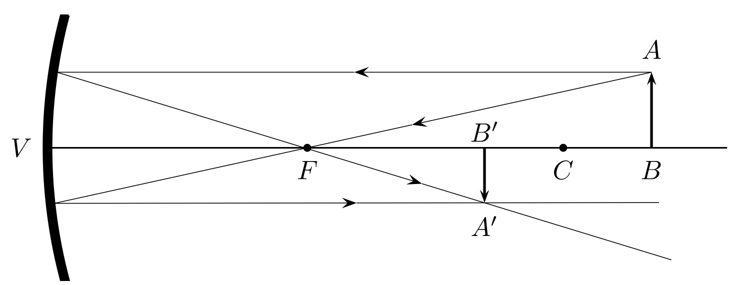


Figura 2.3: Un'immagine reale, rimpicciolita, capovolta.

L'*ingrandimento trasversale* I di un specchio sferico è definito dalla relazione

$$I = \frac{p'}{p} \tag{2.2}$$

L'immagine è maggiore dell'oggetto se $|I| > 1$ ed è piú piccola dell'oggetto se $|I| < 1$. Il tipo di immagine che si forma dipende dalla posizione dell'oggetto; si individuano tre casi.

1. $p > 2f \ \rightarrow \ f < p' < 2f$: l'immagine è reale, rimpicciolita e capovolta.

2. $f < p < 2f \ \rightarrow \ p' > 2f$: l'immagine è reale, ingrandita e capovolta.
3. $0 < p < f \ \rightarrow \ p' < 0$: l'immagine è virtuale, ingrandita e diritta.

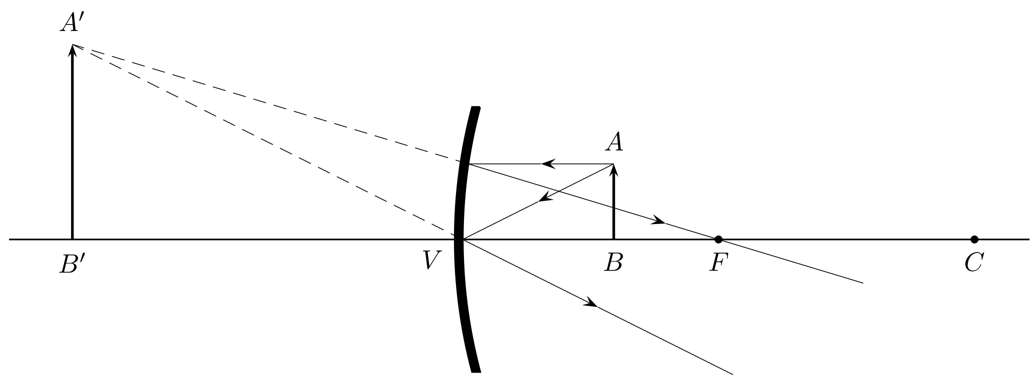


Figura 2.4: Un'immagine virtuale, ingrandita, diritta.

2.1.3 Specchio sferico convesso

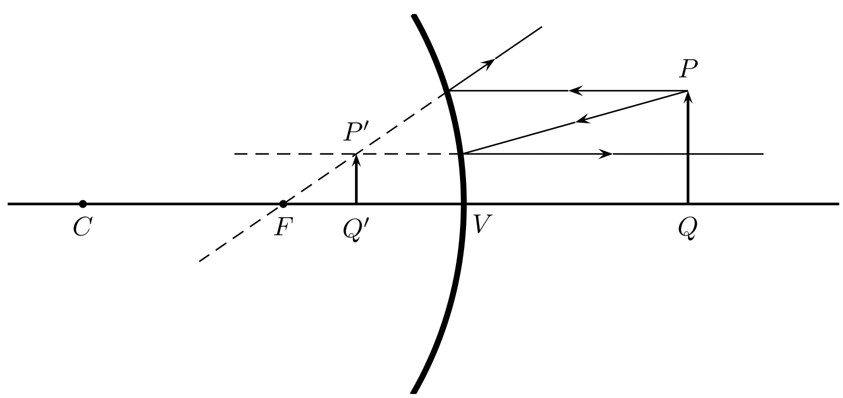


Figura 2.5: L'immagine prodotta dallo specchio convesso.

La legge dei punti coniugati per uno specchio convesso è uguale a quella per lo specchio concavo con l'unica differenza che ora il fuoco è virtuale, cioè convergono al fuoco i prolungamenti dei raggi riflessi di raggi incidenti paralleli all'asse ottico; vale quindi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = -\frac{1}{f} \ , \tag{2.3}$$

L'immagine prodotta da uno specchio convesso è sempre ingrandita, virtuale e diritta, come rappresentato in figura 2.5. Si osservi che, dal confronto delle figure 2.4 e 2.5, l'immagine prodotta dallo specchio convesso può essere costruita a partire da quello concavo, nel caso con $p < f$ utilizzando il principio di invertibilità di cammini ottici.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un oggetto la cui dimensione trasversale è $y = 20\,\mathrm{cm}$ viene riflesso da uno specchio sferico concavo di raggio $r = 50\,\mathrm{cm}$; sapendo che l'immagine ha dimensione trasversale $y' = 30\,\mathrm{cm}$ determinare la distanza dell'oggetto e dell'immagine dallo specchio.

Soluzione

Se l'immagine è ingrandita, vi sono due possibilità: o l'oggetto è posto fra il centro ed il fuoco, nel qual caso l'immagine è ingrandita, reale e capovolta, o è posto fra lo specchio e il fuoco, nel qual caso l'immagine è ingrandita virtuale e diritta.
Nel primo caso è $p' > 0$ e quindi si ha ingrandimento positivo e quindi utilizzando le due equazioni

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \qquad , \qquad \frac{p'}{p} = \frac{y'}{y}$$

si ottengono rispettivamente

$$p = \frac{y + y'}{y'} f = 42\,\mathrm{cm} \qquad , \qquad p' = \frac{y + y'}{y} f = 63\,\mathrm{cm}$$

Nel secondo caso è $p' < 0$ e quindi si ha ingrandimento negativo e quindi utilizzando le due equazioni

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f} \qquad , \qquad \frac{p'}{p} = -\frac{y'}{y}$$

si ottengono rispettivamente

$$p = \frac{y' - y}{y'} f = 19\,\mathrm{cm} \qquad , \qquad p' = -\frac{y' - y}{y} f = 13\,\mathrm{cm}$$

Problema 2

Uno specchio sferico di raggio $r = 60\,\mathrm{cm}$ produce un'immagine virtuale di un oggetto posto a distanza $p = 15\,\mathrm{cm}$; determinare a che distanza dallo specchio si forma l'immagine e quale sia l'ingrandimento.

Soluzione

Noto che l'immagine è virtuale, vi sono due possibilità; o lo specchio è concavo e l'oggetto si trova fra lo specchio ed il fuoco, e in tal caso ne risulta un'immagine diritta, virtuale e ingrandita; o lo specchio è convesso, con l'oggetto posto ovunque, e in tal caso ne risulta un'immagine diritta, virtuale e rimpicciolita.
Nel primo caso si ha, usando l'equazione dei punti coniugati (2.1),

$$p' = \frac{pf}{p - f} = -30\,\mathrm{cm} \qquad , \qquad I = \frac{f}{p - f} = -2$$

Nel secondo caso, usando l'equazione dei punti coniugati (2.1), si ha

$$p' = -\frac{pf}{p + f} = -10\,\mathrm{cm} \qquad , \qquad I = \frac{f}{p + f} = -0.67$$

2.2 Rifrazione

Quando la luce si propaga da un mezzo trasparente in cui la sua velocità è v_1 ad un secondo mezzo trasparente ove la sua velocità è v_2, la traiettoria è una linea spezzata. Questo fenomeno è detto *rifrazione* ed è regolato dalle seguenti leggi

1. il raggio incidente, il raggio rifratto e la retta perpendicolare alla superficie di separazione dei due mezzi nel punto di incidenza sono complanari.

2. [legge di Snell-Descartes] il rapporto fra il seno dell'angolo di incidenza i e il seno dell'angolo di rifrazione r è uguale al rapporto fra le due velocità di propagazione della luce nei due mezzi.

Il rapporto fra le velocità di propagazione si dice *indice di rifrazione relativo* dei due mezzi 1 e 2 e si indica con il simbolo n_{12}; si dice *indice di rifrazione assoluto* del mezzo 1 il rapporto fra la velocità della luce nel vuoto e v_1. Valgono dunque le relazioni

$$\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{12} = \frac{n_2}{n_1} \qquad \text{con} \quad n_1 = \frac{c}{v_1}\ ,\ n_2 = \frac{c}{v_2}$$

Se la luce si propaga da un mezzo in cui la velocità v_1 è minore a uno in cui la velocità v_2 è maggiore esiste un *angolo limite* i_0 di incidenza oltre il quale non vi può essere rifrazione; tale angolo limite corrisponde al caso in cui l'angolo di rifrazione è retto. Vale quindi

$$\operatorname{sen} i_0 = \frac{v_1}{v_2}$$

Superando l'angolo limite vi è solo riflessione; per questo motivo il fenomeno in questione è detto riflessione totale. Se il mezzo di uscita è il vuoto (o l'aria, in cui la velocità della luce approssima molto bene c), il seno dell'angolo limite coincide con il reciproco dell'indice di rifrazione assoluto.

2.2.1 Lenti

Una lente convergente è un dispositivo trasparente che trasmette la luce deviandola verso l'asse ottico. Si tratta di un dispositivo approssimativamente stigmatico nel caso di lenti sottili e di raggi incidenti formanti angoli non troppo grandi con l'asse ottico. In questa approssimazione, i raggi paralleli all'asse ottico vengono trasmessi deviati verso un punto detto *fuoco* della lente; la lente ha due fuochi che si trovano ad ugual distanza f. Se un oggetto si trova a distanza p da un lente convergente la sua immagine si forma ad una distanza p' tale che valga l'*equazione dei punti coniugati* per le lenti convergenti

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}\ . \tag{2.4}$$

l'identità di questa equazione con l'analoga vista per gli specchi sferici rende identica la discussione dei diversi casi circa immagini reali o virtuali, diritte o capovolte, ingrandite o rimpicciolite, a seconda della posizione dell'oggetto. Per l'ingrandimento trasversale vale una formula identica alla (2.2).
Una lente divergente si comporta rispetto ad una convergente come si comportano gli specchi convessi rispetto a quelli concavi: vale la stessa legge dei punti coniugati, con distanza focale negativa, e si costruiscono le immagini nel medesimo modo.
Il reciproco della distanza focale di una lente è detto *potere diottrico* D della lente; vale cioè

$$D = \frac{1}{f}$$

il potere diottrico si misura in *diottrie.*

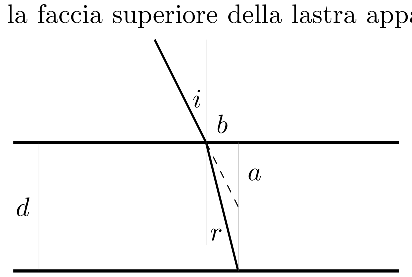
PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Su un foglio di carta è sovrapposta una lastra di vetro dello spessore $d = 2.4\,\text{cm}$; sapendo che il vetro ha indice di rifrazione $n = 1.5$ determinare a quale distanza sotto la faccia superiore della lastra appare la scritta sul foglio.

Soluzione

Con riferimento alla figura, si deve determinare la lunghezza del segmento a, quando $i = 0$. Vale



$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}(90^\circ - i) = \frac{\cos i}{\operatorname{sen} i}$$

ma anche

$$b = d\,\mathrm{sen}\, r = \frac{d}{n}\,\mathrm{sen}\, i$$

Pertanto

$$a = b\,\frac{\cos i}{\mathrm{sen}\, i} = \frac{d}{n}\,\mathrm{sen}\, i\,\frac{\cos i}{\mathrm{sen}\, i} = \frac{d}{n}\,\cos i$$

Quindi, per $i = 0$, si trova

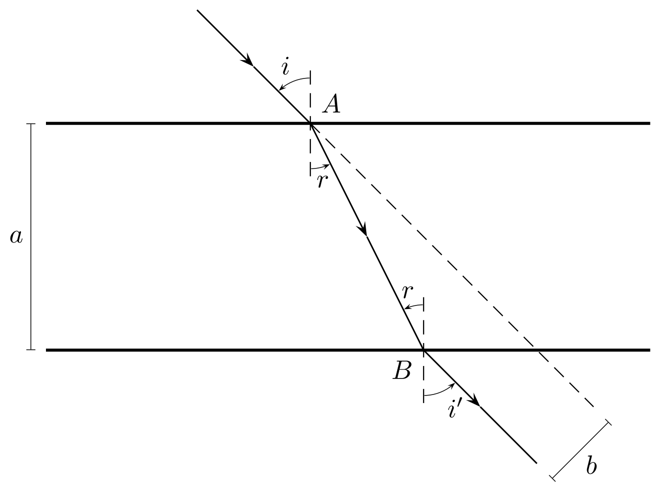
$$a = \frac{d}{n} = 1.6\,\mathrm{cm}$$

Problema 2

Una lamina è costituita da un materiale trasparente, di indice di rifrazione assoluto $n = 1.5$, delimitato da due superfici piane parallele distanti $a = 4.5\,\mathrm{cm}$. Un raggio luminoso incide su una delle superfici con un angolo di incidenza $i = 30°$; dimostrare che il raggio emergente è parallelo a quello incidente e determinare la distanza fra i due raggi.

Soluzione

L'angolo di incidenza e l'angolo di emergenza sono uguali. Con riferimento alla figura



la legge di Snell-Descartes per le due rifrazioni sono

$$\mathrm{sen}\, i' = n\,\mathrm{sen}\, r \qquad \mathrm{e} \qquad \mathrm{sen}\, r = \frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\, i'$$

da cui

$$\mathrm{sen}\, i' = \mathrm{sen}\, i \qquad \Longleftrightarrow \qquad i' = i$$

quindi il raggio incidente e il raggio emergente sono paralleli. Per il calcolo della distanza b si noti che valgono

$$AB = \frac{a}{\cos r} \qquad \mathrm{e} \qquad AB = \frac{b}{\mathrm{sen}(i-r)}$$

e quindi

$$b = \frac{\mathrm{sen}(i-r)}{\cos r}\, a$$

ma

$$r = \mathrm{arcsen}\left(\frac{1}{n}\,\mathrm{sen}\, i\right)$$

da cui

$$b = 0.87\,\text{cm}$$

Problema 3

Un oggetto di lunghezza trasversale $\ell = 15\,\text{cm}$ si trova a distanza $p = 45\,\text{cm}$ da una lente avente distanza focale $f = -20\,\text{cm}$; determinare la distanza p' a cui si forma l'immagine e la sua lunghezza trasversale.

Soluzione

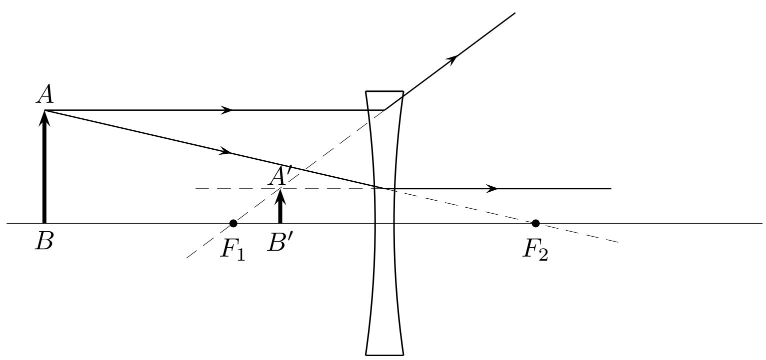
Usando la (2.4) si trova

$$p' = \frac{pf}{p-f} = 14\,\text{cm}$$

l'immagine è quindi virtuale. La sua lunghezza trasversale è data da

$$\ell' = -\frac{p'}{p}\,\ell = -\frac{f\ell}{p-f} = 4.6\,\text{cm}$$

Si osservi che è necessario il segno meno, perché per le lenti divergenti l'ingrandimento è sempre negativo. Il grafico che illustra il problema è dato in figura.



2.3 Esercizi

Riflessione

●○○ **Es. 1** — Una candela di dimensione trasversale $y = 1.5\,\text{cm}$ è posto alla distanza $p = 5.0\,\text{cm}$ dal vertice di uno specchio concavo, trasversalmente rispetto all'asse ottico. A $p' = 10\,\text{cm}$ dal vertice, dietro lo specchio, si forma l'immagine virtuale della candela. Si costruisca geometricamente l'immagine dell'oggetto e si determini:

a) distanza focale e raggio di curvatura dello specchio;

b) altezza dell'immagine virtuale.

●●● **Es. 2** — Una candela alta $h = 10\,\text{cm}$ si trova alla distanza $d = 2.0\,\text{m}$ dalla riva di un lago largo $D = 50\,\text{m}$. Una bambina, i cui occhi si trovano ad un'altezza $H = 1.4\,\text{m}$ dal suolo, si trova dall'altra parte del lago, anch'essa alla distanza $d = 2.0\,\text{m}$ dalla riva. Determinare

a) a quale distanza x dalla bambina avviene la riflessione della luce che emessa dalla candela raggiunge gli occhi della bambina;

b) qual è l'altezza minima dal suolo, e quale la massima, sulla verticale dove si trova la bambina, da cui è possibile vedere la candela.

●●○ **Es. 3** — Un oggetto si trova davanti ad uno specchio concavo avente distanza focale $f = 20\,\text{cm}$; sapendo che l'immagine prodotta è i $3/2$ dell'oggetto determinare la posizione dell'oggetto e dell'immagine. Rappresentare la situazione in mediante un accurato disegno.

●●○ **Es. 4** — Un oggetto la cui dimensione trasversale è $\ell = 20\,\text{cm}$ viene riflesso da uno specchio sferico concavo di raggio $r = 60\,\text{cm}$; sapendo che l'immagine ha dimensione trasversale $\ell' = 30\,\text{cm}$ determinare la distanza dell'oggetto e dell'immagine dallo specchio.

●●○ **Es. 5** — Uno specchio sferico di raggio $r = 60\,\text{cm}$ produce un'immagine rimpicciolita di un oggetto posto a distanza $p = 15\,\text{cm}$; determinare a che distanza dallo specchio si forma l'immagine e quale sia l'ingrandimento.

●●● **Es. 6** — Due specchi piani formano un angolo $\alpha = 120°$; un raggio luminoso incide sul primo specchio con un angolo di incidenza $i = 70°$, dopo essere stato riflesso incide sul secondo specchio; determinare l'angolo di riflessione r del secondo specchio.

●●● **Es. 7** — Un raggio luminoso incide su di uno specchio piano con angolo di incidenza i; lo specchio viene ruotato attorno ad un asse passante per il punto di incidenza di una angolo α; determinare l'angolo con cui viene ruotato il raggio riflesso.

Rifrazione

●○○ **Es. 1** — Determinare l'indice di rifrazione assoluto di un vetro che ha angolo limite di $i_0 = 60°$.

●○○ **Es. 2** — Un raggio luminoso, passando da un mezzo meno denso a un mezzo piú denso, incide con angolo di incidenza di $i = 60°$ e viene deviato di $\alpha = 30°$; determinare l'indice di rifrazione relativo dei due mezzi.

●○○ **Es. 3** — L'angolo limite per la riflessione totale nel diamante è $i_0 = 24.43°$; determinare l'indice di rifrazione del diamante.

●○○ **Es. 4** — Un raggio luminoso passa dal mezzo 1 al mezzo 2 con angoli di incidenza e rifrazione $i = 30°$ e $r = 20°$; si determini l'angolo di rifrazione r' di un raggio luminoso il cui angolo di incidenza è $i' = 40°$.

●●○ **Es. 5** — Un subacqueo da sotto la superficie di un lago vede il Sole lungo un direzione che forma un angolo $\alpha = 50°$ rispetto all?orizzontale; sapendo che l'indice di rifrazione dell'acqua rispetto all'aria è $n = 1.33$, determinare l'angolo β, rispetto all'orizzontale con cui i raggi dal Sole incidono la superficie del lago.

●●○ **Es. 6** — Si adopera una lente convergente con potere diottrico $D = 12.5\,\text{m}^{-1}$ come semplice microscopio per osservare dei campioni su un vetrino situato che si trova a distanza di $p = 5.00\,\text{cm}$ dalla lente.

a) Determinare a quale distanza si forma l'immagine;
b) Se la distanza della visione distinta dell'osservatore è $d_0 = 25.0\,\text{cm}$, determinare a quale minima distanza dalla lente dovrà porsi per vedere distintamente l'immagine.
c) Determinare la distanza focale della lente necessaria per consentire di vedere distintamente l'immagine ponendo l'occhio molto vicino alla lente.

●○○ **Es. 7** — Un oggetto alto $\ell = 15\,\text{cm}$ si trova a distanza $p = 40\,\text{cm}$ da una lente convergente di distanza focale $f = 20\,\text{cm}$; determinare la posizione e l'altezza dell'immagine e rappresentare la situazione in mediante un accurato disegno.

●○○ **Es. 8** — Ripetere l'esercizio precedente nel caso di una lente divergente (nel qual caso, ovviamente, $f = -20\,\mathrm{cm}$).

●●● **Es. 9** — Un raggio di luce viaggia da un primo mezzo con indice di rifrazione assoluto $n_1 = 2$ a un secondo mezzo il cui indice di rifrazione assoluto è $n_2 = 5/3$ per poi uscire nell'aria, il cui indice di rifrazione assoluto si assume $n_3 = 1$. Siano S_{12} e S_{23} le superfici piane che separano i mezzi nell'ordine in cui il raggio le incontra. Determinare il valore limite dell'angolo d'incidenza α_1 sulla superficie S_{12} per cui

a) il raggio subisce riflessione totale su S_{12};
b) il raggio, dopo una prima rifrazione su S_{12}, viene completamente riflesso sulla superficie S_{23}.

●●● **Es. 10** — Un subacqueo è immerso nel mare a $D = 15\,\mathrm{m}$ di profondità e vede un gabbiano a un'inclinazione di $\alpha = 15°$ rispetto alla verticale: l'indice di rifrazione dell'acqua rispetto all'aria è $n = 1.33$; sapendo che l'intervallo di tempo impiegato dal gabbiano a raggiungere il punto che si trova sulla verticale del subacqueo è $\Delta t = 4.0\,\mathrm{s}$, muovendosi a velocità $v = 3.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, determinare

a) sotto quale angolo β il gabbiano vede il subacqueo;
b) a quale altezza h dalla superficie del mare sta volando il gabbiano;
c) a quale profondità d apparente il gabbiano vede il sub.

●●● **Es. 11** — Una candela lunga $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ si trova a $D = 100\,\mathrm{cm}$ da uno schermo; se una lente convergente viene posta fra la candela e lo schermo a distanza $p = 40\,\mathrm{cm}$ dalla candela, l'immagine della candela si forma sullo schermo;

a) determinare la distanza focale della lente;
b) determinare la dimensione dell'immagine;
c) dire se esiste un secondo punto ove collocare la lente in modo che l'immagine si formi ancora sullo schermo;
d) dimostrare che è impossibile ottenere l'immagine della candela sullo schermo usando una lente divergente.

●○○ **Es. 12** — Un oggetto si trova a distanza $p = 30\,\mathrm{cm}$ da una lente avente potere diottrico $D = -5$ diottrie; determinare il tipo di lente e la sua distanza focale; determinare inoltre la posizione dell'immagine e rappresentare la situazione in mediante un accurato disegno.

●●● **Es. 13** — Una freccia alta $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ si trova a distanza $p_1 = 30\,\mathrm{cm}$ da una lente convergente avente distanza focale $f_1 = 20\,\mathrm{cm}$; a distanza $d = 72\,\mathrm{cm}$ dalla prima si trova una seconda lente convergente con distanza focale $f_2 = 10\,\mathrm{cm}$. Determinare dove si forma l'immagine della freccia dovuta alle due lenti, quale sia la sua altezza e se sia diritta o rovescia. Rappresentare la situazione in mediante un accurato disegno.

●●○ **Es. 14** — Una lastra di vetro con le facce parallele di indice di rifrazione assoluto $n = \sqrt{3}$ è colpita da un raggio luminoso con un angolo di incidenza $i = 60°$; determinare l'angolo di rifrazione. Il raggio quindi attraversa la lastra e viene emesso nuovamente nel vuoto; determinare l'angolo i' di uscita dalla lastra. Determinare inoltre l'angolo limite della lastra.

●●○ **Es. 15** — L'immagine virtuale fornita da una lente sottile è $\frac{1}{3}$ dell'oggetto; sapendo che la distanza focale della lente è $f = 30\,\mathrm{cm}$, determinare dove si trova l'oggetto e dove si forma l'immagine. Rappresentare la situazione in mediante un accurato disegno.

●●○ **Es. 16** — Un oggetto posto davanti ad una lente di distanza focale $f = -120\,\mathrm{cm}$ forma un'immagine tale che l'ingrandimento sia $I = -\frac{3}{4}$; determinare ove si trova l'oggetto e dove si forma l'immagine. Rappresentare la situazione in mediante un accurato disegno.

●●○ **Es. 17** — Una lente forma un'immagine diritta e rimpicciolita di tre volte; sapendo che la l'immagine si forma a una distanza $p' = 20\,\mathrm{cm}$ dalla lente, determinare la posizione dell'oggetto e la distanza focale. Rappresentare la situazione in mediante un accurato disegno.

●●○ **Es. 18** — Una lente forma un'immagine diritta e rimpicciolita di tre volte; sapendo che la l'oggetto si trova ad una distanza $p = 20\,\mathrm{cm}$ dalla lente, determinare la posizione dell'immagine e la distanza focale. Rappresentare la situazione in mediante un accurato disegno.

●○○ **Es. 19** — Un raggio di luce si muove in una lastra di vetro ad una velocità pari a $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$; determinare l'angolo limite nel suo passaggio dal vetro al vuoto.

●○○ **Es. 20** — Per mezzo di una lente avente un potere diottrico $D = 2.5$ diottrie si vuole ottenere un immagine diritta le cui dimensioni siano il doppio delle dimensioni dell'oggetto; specificare il tipo di lente che occorre usare; determinare a che distanza dalla lente occorre porre l'oggetto per avere l'ingrandimento desiderato e a che distanza si forma l'immagine ingrandita.

●○○ **Es. 21** — In una macchina fotografica la distanza fra l'obiettivo (che si suppone essere costituito da una lente convergente la cui distanza focale è variabile) e la pellicola è $d = 50\,\mathrm{mm}$; volendo mettere a fuoco una persona che dista $D = 4.5\,\mathrm{m}$ dalla lente, quale deve essere la distanza focale dell'obiettivo.

●●● **Es. 22** — Un oggetto è posto di fronte ad una lente di distanza focale $f = 12.0\,\mathrm{cm}$; l'immagine che si forma è reale ed è ingrandita di fattore 4/3; determinare il tipo di lente. Quindi, senza spostare l'oggetto si sostituisca la lente con una lente di tipo diverso ma con la stessa distanza focale: stabilire il nuovo ingrandimento I'.

Capitolo 3

Ottica ondulatoria

3.1 Interferenza

Il modello corpuscolare non esaurisce la descrizione di tutti i fenomeni luminosi. In effetti, in certe condizioni, la luce manifesta comportamenti tipicamente ondulatori. Si esaminano qui alcuni fenomeni di interferenza luminosa.

3.1.1 Fori di Young

Una sorgente luminosa è posta dietro uno schermo in cui sono praticati due fori, come in figura. Le onde luminose generate dalla sorgente S giungono in fase ai due fori S_1 ed S_2 che, per il principio di Huygens, si comportano come sorgenti di onde coerenti in fase. Giunte al punto p percorrendo le distanze diverse x_1 ed x_2 risultano non piú in fase. Se la differenza dei percorsi delle due onde è uguale a un numero intero di lunghezze d'onda l'interferenza è costruttiva, se è uguale a un numero dispari di mezze lunghezze d'onda l'interferenza è distruttiva. Si può dimostrare che la differenza dei due percorsi è

$$\Delta x = d \operatorname{sen} \alpha \simeq d \, \frac{y}{D} \tag{3.1}$$

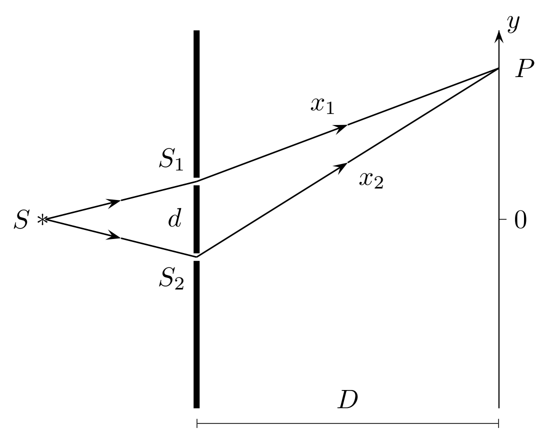


Figura 3.1: I fori di Young.

ove y è l'ordinata del punto P; l'approssimazione $\operatorname{sen} \alpha \simeq y/D$ è valida per angoli non troppo grandi. Sullo schermo si formano quindi frange di interferenze, con righe luminose e righe scure rispettivamente in corrispondenza delle ordinate dalle relazioni

$$y_{max} = \frac{D}{d} \, k\lambda \qquad , \qquad y_{min} = \frac{D}{d} \, (2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

Queste relazioni valgono nel vuoto; se il dispositivo è immerso in un mezzo trasparente di indice di rifrazione n, al posto della differenza dei percorsi Δx è necessario utilizzare la *differenza dei cammini ottici*: il cammino ottico è il prodotto del percorso per l'indice di rifrazione in cui tale percorso ha luogo. In questo caso le precedenti equazioni si modificano in

$$y_{max} = \frac{D}{nd} \, k\lambda \qquad , \qquad y_{min} = \frac{D}{nd} \, (2k+1)\frac{\lambda}{2} \tag{3.2}$$

3.1.2 Lamina sottile

In questo dispositivo un'onda luminosa di lunghezza λ incide su una lamina sottile costituita da un corpo trasparente a facce parallele di indice di rifrazione n. Sulla faccia superiore, l'onda in parte si riflette e in parte si trasmette; l'onda trasmessa si riflette sulla superficie inferiore e va ad interferire con la prima onda riflessa. Le onde interferenti hanno differenza di cammini ottici legata allo spessore h della lamina. Per il calcolo della differenza dei cammini ottici occorre anche tenere conto del fatto che la riflessione sulla prima faccia, tra un mezzo meno denso e uno piú denso, comporta una sfasatura di mezza lunghezza d'onda.

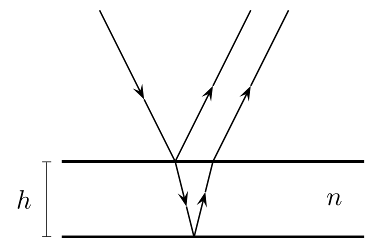


Figura 3.2: La lamina sottile.

Complessivamente si ha una differenza di cammini ottici pari a

$$\Delta x = 2nh - \frac{\lambda}{2}$$

Se ne deduce che si ha rispettivamente interferenza costruttiva e distruttiva quando

$$h = \frac{2k+1}{4n}\,\lambda \qquad , \qquad h = k\,\frac{\lambda}{2n} \tag{3.3}$$

3.1.3 Il cuneo d'aria

Questo dispositivo è simile al precedente. È costituito da due lastre di vetro affacciate, a contatto ad un estremo e tenute distanti da uno spessore all'altro estremo. Ragionando analogamente al caso precedente, si trova la differenza di cammini ottici

$$\Delta x = 2h + \frac{\lambda}{2}$$

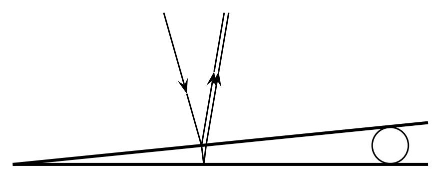


Figura 3.3: Il cuneo d'aria.

e quindi si ha rispettivamente interferenza costruttiva e distruttiva per

$$h = \frac{2k-1}{4}\,\lambda \qquad , \qquad h = k\,\frac{\lambda}{2} \tag{3.4}$$

3.1.4 Anelli di Newton

Un altro dispositivo simile ai precedenti. Una calotta sferica di raggio di curvatura R costituita di vetro con indice di rifrazione n è appoggiata, dal lato curvo, su un piano orizzontale anch'esso di vetro. Si comporta quindi come un cuneo d'aria di spessore variabile. Si hanno quindi anelli di interferenza costruttiva e distruttiva rispettivamente per i raggi

$$r = \sqrt{\frac{2k+1}{2}\,R\lambda} \qquad , \qquad r = \sqrt{kR\lambda} \tag{3.5}$$

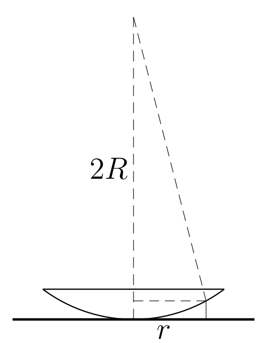


Figura 3.4: Gli anelli di Newton.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un fascio di luce incide su due fori di Young distanti $d = 1.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$; su di uno schermo distante $D = 3.5\,\mathrm{m}$ si formano delle frange di interferenza. Sapendo che la distanza fra il massimo centro e il terzo massimo laterale è $y = 5.2\,\mathrm{cm}$ determinare l'angolo α sotto cui si vede il terzo massimo e la lunghezza d'onda della luce incidente.

Soluzione

I cammini ottici delle due onde che interferiscono nel massimo centrale sono uguali; vi è quindi interferenza costruttiva. Per il terzo massimo laterale, dalle (3.1) e (3.2), si trova

$$d \operatorname{sen} \alpha = 3\lambda$$

Per valori non troppo grandi di y rispetto a D vale l'approssimazione

$$\alpha \simeq \operatorname{sen} \alpha \simeq \frac{y}{D} = 1.5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{rad} = 0.85°$$

Da qui si trova facilmente

$$\lambda = \frac{yd}{3D} = 7.4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$$

Problema 2

Su una bolla di sapone incide un fascio di luce bianca, sapendo che nello spettro della luce riflessa manca la lunghezza d'onda $\lambda = 660\,\mathrm{nm}$ corrispondente; determinare il minimo spessore della bolla di sapone.

Soluzione

La bolla di sapone ha un indice di rifrazione che può essere considerato equivalente a quello dell'acqua, quindi $n = 1.33$. Utilizzando la seconda delle (3.3) per $k = 1$ si ha

$$h = \frac{\lambda}{4n} = 1.24 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}$$

Problema 3

Due lastre di vetro formano un cuneo d'aria; da un estremo sono a contatto, all'estremo opposto sono tenute separato da un capello di diametro $d = 0.030\,\mathrm{mm}$; i due estremi distano $D = 6.0\,\mathrm{cm}$. Determinare il numero di frange scure per unità di lunghezza che si formano se incide sulle lamine un fascio di luce di lunghezza d'onda $\lambda = 450\,\mathrm{nm}$.

Soluzione

La seconda delle (3.4) mette in relazione lo spessore con l'intero k corrispondente alla k-esima frangia scura. Quindi il numero N complessivo di frange scure è la parte intera di

$$N = \frac{2d}{\lambda}$$

il numero di frange per unità di lunghezza quindi è la parte intera di

$$n = \frac{N}{D} = \frac{2d}{\lambda D} = 2.2 \cdot 10^3$$

Quindi si formano 22 frange scure per centimetro.

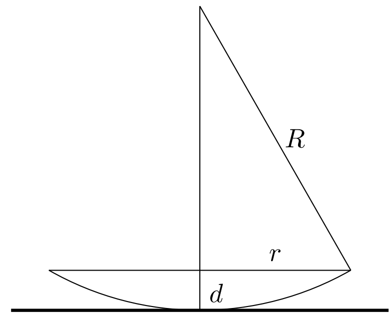
*Problema 4

Una lente sferica piano-convessa di massimo spessore $d = 2.0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$ è appoggiata su di una lastra di vetro è appoggiata su di una lastra di vetro, come in figura 3.4; sapendo che quando incide un'onda luminosa di lunghezza $\lambda = 750\,\mathrm{nm}$ si formano $k = 50$ anelli scuri, determinare il raggio di curvatura della lente e il numero di anelli per unità di lunghezza.

Soluzione

Con riferimento alla figura, vale la relazione

$$r^2 = R^2 - (R-d)^2 = 2Rd - d^2$$



In corrispondenza alla distanza r si forma il k-esimo, anello scuro come risulta dalla seconda delle (3.5). Si ha quindi

$$2Rd - d^2 = kR\lambda$$

da cui si può trovare la relazione fra il numero totale k degli anelli scuri e lo spessore della lente. Nel caso presente si ha

$$R = \frac{d^2}{2d - k\lambda} = 1.6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

Il numero di anelli per unità di lunghezza è

$$\frac{k}{r} = \frac{k}{\sqrt{kR\lambda}} = \frac{1}{d}\sqrt{k\,\frac{2d-k\lambda}{\lambda}} = 6.5 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}^{-1}$$

Si noti, in particolare, che la densità lineare degli anelli aumenta con il numero d'ordine, cioè allontanandosi dal centro divengono sempre piú fitti.

3.2 Diffrazione

È il fenomeno che avviene quando un onda attraversa un'apertura o una fenditura; l'onda, seguendo il principio di Huygens, si allarga attraversando la fenditura in modo tanto piú evidente quanto piú la lunghezza dell'onda è paragonabile alle dimensioni della fenditura.

3.2.1 Fenditura singola

Quando un fascio luminoso passa attraverso una fenditura di apertura d, l'immagine che si produce su di una schermo non è data solo dalla striscia luminosa fra i punti A e B, ma la striscia si allarga di un'angolo α tale che valga

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{d}$$

inoltre sul bordo della striscia si formano delle frange tanto piú evidenti quanto piú la dimensione della fenditura è confrontabile con la lunghezza λ dell'onda.
I successivi massimi laterali hanno intensità luminosa molto minore e sono separati da frange scure che si hanno per angoli θ tali che

$$d\operatorname{sen}\theta = k\lambda$$

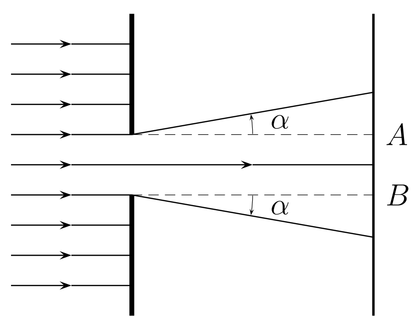


Figura 3.5: La diffrazione.

Se la fenditura è circolare con diametro D, si può dimostrare che l'allargamento della striscia luminosa è dato dall'angolo θ tale che

$$\operatorname{sen}\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D} \tag{3.6}$$

Si dice *potere risolvente* di un dispositivo ottico la capacità di distinguere fra lunghezze d'onda diverse. Utilizzando il *criterio di Rayleigh* si assume che due lunghezze d'onda λ e λ' sono distinguibili se il massimo di diffrazione di λ si forma non piú vicino del primo minimo di diffrazione di λ'. Si definisce allora potere risolvente la quantità

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda' - \lambda}$$

Si consideri il caso di sorgenti luminose (che emettono la stessa lunghezza d'onda) osservate per mezzo di un dispositivo ottico circolare con diametro D, per esempio due stelle osservate con un telescopio, o due sorgenti luminose puntiformi lontane osservate attraverso la pupilla di un occhio.
In questo caso la prima frangia scura si ha per un angolo dato dalla (3.6). Poiché il criterio di Rayleigh richiede che l'immagine della seconda sorgente cada in corrispondenza di tale frangia scura, la distanza angolare minima θ_{min} sotto cui si devono vedere due sorgenti luminose perché le loro immagini siano distinte è tale che

$$\operatorname{sen}\theta_{min} \simeq \theta_{min} = 1.22\,\frac{\lambda}{D}$$

3.2.2 Reticolo di diffrazione

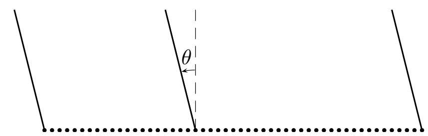


Figura 3.6: Il reticolo di diffrazione.

È un dispositivo in cui la luce viene fatta passare attraverso un numero molto grande di piccole fenditure che si trovano a una distanza paragonabile con la lunghezza d'onda della luce incidente. Quello che si vede sullo schermo è una serie di righe luminose, dette massimi principali, intervallate da altre righe meno luminose, dette massimi secondari. I massimi principali si trovano lungo direzioni di propagazione che formano un angolo θ con la perpendicolare al reticolo, per cui vale

$$d\operatorname{sen}\theta = k\lambda \tag{3.7}$$

Attorno a ciascuno di questi massimi principali vi è una famiglia di massimi secondari. Per esempio se n è il numero delle fenditure illuminate del reticolo, attorno al k-esimo massimo vi sono $n-1$ minimi per

$$d\operatorname{sen}\theta = k\lambda + \frac{m}{n}\,\lambda$$

ove $m = 1, 2, \ldots, n-1$ è un intero; questi minimi separano $n-2$ massimi secondari che si hanno per

$$d\operatorname{sen}\theta = k\lambda + \frac{2m+1}{2n}\,\lambda$$

Il reticolo di diffrazione ha potere risolvente

$$R = nk$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Nel quadro *Una domenica pomeriggio sull'isola della Grande Jatte*, di Georges Seurat, pioniere del movimento puntinista, tramite la semplice giustapposizione di punti colorati fa si che il mescolamento dei colori, solitamente realizzato nella fase di stesura, avvenga solo nell'occhio dell'osservatore. Supponendo che i punti siano approssimativamente cerchi molto piccoli aventi distanza dai rispettivi centri $d = 2.0\,\mathrm{mm}$ e che il diametro della pupilla sia $D = 1.5\,\mathrm{mm}$, determinare la distanza minima ℓ dal quadro dalla quale i punti verdi ($\lambda = 510\,\mathrm{nm}$) non sono più distinguibili singolarmente dall'osservatore.

Soluzione

A distanza ℓ i punti sono visti sotto un angolo θ il cui seno è dato da

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{d}{\ell}$$

Ma a causa della diffrazione dovuta alla pupilla, due punti sono indistinguibili se sono visti sotto un angolo il cui seno sia minore di

$$1.22\,\frac{\lambda}{D}$$

Ne segue, quindi che deve valere

$$\frac{d}{\ell} < 1.22\,\frac{\lambda}{D}$$

e quindi

$$\ell > \frac{dD}{1.22\lambda} = 4.8\,\mathrm{m}$$

Problema 2

Un reticolo di diffrazione ha $n = 2700$ linee per centimetro; e produce un massimo principale per $\theta = 32°$; la luce incidente contiene tutte le lunghezze d'onda del visibile, comprese fra 380 nm e 750 nm; determinare le lunghezze d'onda che hanno contribuito a formare quel massimo principale.

Soluzione

La lunghezza d'onda che forma un massimo principale sono date dalla (3.7); quindi le lunghezze d'onda si ottengono da

$$\lambda_k = \frac{d}{k}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

per diversi valori interi di k. La distanza d fra le fenditure del reticolo è

$$d = \frac{0.01}{n}$$

si ha quindi, rispettivamente per $k = 3, 4, 5$

$$\lambda_3 = 654\,\mathrm{nm} \qquad , \qquad \lambda_4 = 491\,\mathrm{nm} \qquad , \qquad \lambda_5 = 393\,\mathrm{nm}$$

3.3 Esercizi

Interferenza

●○○ **Es. 1** — Una sorgente monocromatica verde, di lunghezza d'onda $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$, attraversa due strette fenditure parallele, distanti tra loro $d = 7.70\,\mu\mathrm{m}$;

a) si calcoli la deviazione angolare della frangia luminosa del terzo ordine;
b) si risponda alla domanda precedente nel caso in cui tutto il dispositivo venga immerso in un liquido di indice di rifrazione $n = 1.33$.

●●○ **Es. 2** — In un esperimento sugli anelli di Newton il raggio curvatura della lente è $R = 5\,\mathrm{m}$ e il suo diametro è $d = 20\,\mathrm{mm}$; si determini il numero di anelli scuri che si osservano con una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 589\,\mathrm{nm}$.

●○○ **Es. 3** — Si consideri un dispositivo che genera gli *anelli di Newton*: se il raggio della calotta è $r = 8.4\,\mathrm{cm}$ e questa è ricavata da una sfera di raggio $R = 75\,\mathrm{cm}$, sapendo che utilizzando una luce di lunghezza d'onda λ si generano $n = 20000$ anelli, determinare λ.

●●○ **Es. 4** — Una luce monocromatica incide su due fori di Young che distano $d = 50\,\mu\mathrm{m}$ formando, su uno schermo, posto a distanza $D = 75\,\mathrm{cm}$ dai fori, una figura di interferenza; sapendo che due righe scure successive distano $\Delta y = 2\,\mathrm{mm}$, determinare la lunghezza d'onda della luce utilizzata.

●○○ **Es. 5** — Due fori di Young distanti $d = 2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$ attraversati da una luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 540\,\mathrm{nm}$ formano su uno schermo distante $D = 3.5\,\mathrm{m}$ una figura di interferenza; determinare la distanza fra il massimo centrale ed il terzo massimo laterale.

●●○ **Es. 6** — Una lastra di vetro di indice di rifrazione $n_1 = 1.5$ è bagnata da uno strato d'acqua ($n_2 = 1.3$); sapendo che $\lambda = 420\,\mathrm{nm}$ è la lunghezza d'onda della luce non riflessa, determinare lo spessore minimo dello strato d'acqua.

●●○ **Es. 7** — Due fori di Young distano $d = 1.5\,\mathrm{mm}$; una luce monocromatica di lunghezza d'onda λ li attraversa formando una figura d'interferenza su uno schermo distante $D = 4.2\,\mathrm{m}$; sapendo che il primo minimo di intensità e il quarto massimo laterale, presi da parti opposte, distano $\Delta y = 5.8\,\mathrm{mm}$, determinare λ.

●○○ **Es. 8** — Su due fori di Young incide una luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 589\,\mathrm{nm}$ formando una figura d'interferenza su uno schermo distante $D = 3.5\,\mathrm{m}$; sapendo che si formano $n = 28$ frange chiare in ogni centimetro, determinare la distanza dei fori.

●○○ **Es. 9** — Su una lamina di vetro sottile di indice di rifrazione assoluto $n = 1.52$ incide perpendicolarmente un raggio di luce di colore rosso e di lunghezza d'onda $\lambda = 691\,\mathrm{nm}$ determinare il minimo spessore della lamina affinché non vi sia luce riflessa.

●●● **Es. 10** — In un esperimento di Young un fascio di luce verde di lunghezza d'onda $\lambda = 505\,\mathrm{nm}$ forma una figura di interferenza; ripetendo l'esperimento con un fascio di luce di colore diverso e lunghezza d'onda incognita λ' si nota che, in questo caso, il quinto massimo laterale di intensità luminosa si trova dove, nel caso precedente, si trovava il quinto minimo laterale di intensità luminosa. Determinare λ'.

●●○ **Es. 11** — Gli *strass* sono oggetti di vetro ($n_1 = 1.5$) rivestiti di monossido di silicio ($n_2 = 1.9$) per renderli più riflettenti.

a) Determinare lo spessore minimo h che deve avere il rivestimento per poter riflettere con piena interferenza costruttiva la luce di lunghezza d'onda $\lambda = 5.5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.
b) Dire inoltre cosa cambierebbe se invece di usare il monossido di silicio si usasse un materiale avente indice di rifrazione $n_3 = 1.3$.

Diffrazione

●●○ **Es. 1** — Calcola la lunghezza d'onda della luce monocromatica incidente su una fenditura di larghezza $d = 0.12\,\mathrm{mm}$ tale per cui su uno schermo posto a distanza $\ell = 1.2\,\mathrm{m}$ si forma una figura di diffrazione in cui il primo minimo d'intensità si trova a $y = 5\,\mathrm{mm}$ dall'asse della fenditura.

●●○ **Es. 2** — Determina l'apertura D della lente dell'obiettivo di un telescopio che riesce a risolvere due oggetti distanti tra loro $d = 4.5 \cdot 10^4\,\mathrm{m}$ e situati a distanza $\ell = 9.2 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}$ dal telescopio. Si consideri la lunghezza d'onda media emessa dagli oggetti celesti pari a $\lambda = 600\,\mathrm{nm}$.

●●○ **Es. 3** — Una figura di diffrazione è prodotta da un fascio di luce laser He-Ne (avente lunghezza d'onda $\lambda = 632.8\,\mathrm{nm}$) attraverso una fessura rettangolare e proiettandone la figura su uno schermo posto alla distanza $\ell = 8.00\,\mathrm{m}$ dalla fenditura; sapendo che il massimo centrale è largo $\Delta y = 16.5\,\mathrm{cm}$,

a) determinare la larghezza d della fenditura;
b) stabilire se, utilizzando un fascio laser con $\lambda = 500.0\,\mathrm{nm}$, la larghezza del massimo centrale aumenta o diminuisce.

●●○ **Es. 4** — Due stelle distano $\ell = 10\,\mathrm{pc}$ dalla Terra e emettono una luce di lunghezza d'onda $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$; determinare la distanza minima d tra le due stelle se queste risultano appena risolvibili con un telescopio avente un obiettivo di diametro di $D = 12.0\,\mathrm{cm}$.

●●○ **Es. 5** — Di notte, i due fari di un'automobile che viene incontro appaiono distinti a distanza $\ell = 5.4\,\mathrm{km}$; sapendo che la pupilla ha un diametro $D = 2.5\,\mathrm{mm}$ e che la lunghezza d'onda della luce emessa è $\lambda = 580\,\mathrm{nm}$, determinare la distanza fra i fari.

●●○ **Es. 6** — In un reticolo di lunghezza $\ell = 5.0\,\mathrm{cm}$ con $n = 5000$ fenditure forma un massimo principale per una lunghezza d'onda $\lambda_1 = 450\,\mathrm{nm}$ per un angolo $\theta_1 = 20°$; con una lunghezza d'onda λ_2 si forma un massimo principale dello stesso ordine per un angolo $\theta_2 = 25°$; determinare λ_2.

●●○ **Es. 7** — Un reticolo di diffrazione con 1500 fenditure per centimetro viene usato per vedere le due righe gialle dello spettro del sodio di lunghezza d'onda $\lambda_1 = 5890\,\text{Å}$ e $\lambda_2 = 5896\,\text{Å}$;

a) si determini la distanza angolare fra le righe corrispondenti al primo massimo;

b) stabilire se il reticolo riesce a risolvere le due righe.

●●○ **Es. 8** — Facendo passare un fascio luminoso di lunghezza d'onda $\lambda = 570\,\mathrm{nm}$ attraverso una fenditura rettangolare si forma una figura di interferenza su uno schermo distante $\ell = 180\,\mathrm{cm}$; i due minimi del secondo ordine sono separati dalla distanza $y = 15\,\mathrm{cm}$; determinare la larghezza della fenditura.

●●● **Es. 9** — Un reticolo di diffrazione lungo $\ell = 25.2\,\mathrm{mm}$ è formato da $n = 1.26 \cdot 10^4$ fenditure; viene illuminato perpendicolarmente da una luce gialla a vapori di sodio costituita da due lunghezze d'onda molto prossime: $\lambda_1 = 589.00\,\mathrm{nm}$ e $\lambda_2 = 589.59\,\mathrm{nm}$. Determinare

a) a quale angolo si forma il primo massimo principale laterale relativo a λ_1;

b) il numero minimo m di fenditure che il reticolo deve avere per risolvere le due lunghezze d'onda al primo ordine e dedurne se il reticolo utilizza permette di vedere le due righe come distinte.

●●● **Es. 10** — Una luce incide sopra un reticolo di diffrazione in cui le fenditure distano $d = 2.4\,\mu\mathrm{m}$; si generano massimi principali in corrispondenza degli angoli $\theta_1 = 11.5°$, $\theta_2 = 23.6°$, $\theta_3 = 36.9°$. Determinare la lunghezza d'onda della luce incidente.

●●● **Es. 11** — Un reticolo di diffrazione ha passo reticolare $d = 5\,\mu\mathrm{m}$; su di esso incide un fascio luminoso di lunghezza d'onda $\lambda = 450\,\mathrm{nm}$. Determinare il numero k di massimi principali visibili.

Parte II

Elettromagnetismo

Capitolo 4

Elettrostatica

4.1 Legge di Coulomb e campo elettrico

Ogni corpo è costituito da atomi; ogni atomo contiene particelle di carica positiva, dette protoni, e particelle di carica negativa, dette elettroni. Il valore assoluto e di tale carica è lo stesso per queste particelle ed è detta *carica elementare*; il suo valore è

$$e = 1.6021766208(98) \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

un atomo è neutro se il numero dei suoi elettroni è uguale a quello dei suoi protoni; diversamente l'atomo è uno ione la cui carica è un multiplo intero della carica elementare. Uno ione può essere carico positivo o negativo a seconda che l'atomo abbia perso o acquisito elettroni. Per un dato elemento il numero dei protoni è fisso; cambiare il numero dei protoni significa cambiare elemento. Quindi un corpo si dive elettricamente carico se i suoi atomi hanno perso o acquisito elettroni.
Due corpi carichi interagiscono a distanza in modo simile all'interazione gravitazionale fra cariche. Se due cariche puntiformi q_1 e q_2 la forza di interazione, detta *legge di Coulomb* è data da

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3} = -\boldsymbol{F}_2$$

ove $\boldsymbol{F}_1$ è la forza agente su q_1 e $\boldsymbol{F}_2$ è la forza agente su q_2; $\boldsymbol{r}_{21}$ è il vettore orientato da q_2 a q_1. Da questa espressione si vede che la forza è attrattiva se le cariche sono discordi e repulsiva se le cariche sono concordi. Il modulo della forza è inversamente proporzionale al quadrato della distanza, vale infatti

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{|q_1|\,|q_2|}{r^2}$$

La costante ϵ_0 è detta *costante dielettrica del vuoto*, il suo valore è

$$\epsilon_0 = 8.8541878128 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$$

È spesso comodo definire la costante

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.987551793 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$$

in modo tale che il modulo della forza di interazione fra le cariche ha modulo

$$F = k\,\frac{|q_1|\,|q_2|}{r^2}$$

L'azione a distanza viene trattata matematicamente introducendo il concetto di campo di forze. Nel caso delle forze elettriche, si definisce *campo elettrico* in un punto la forza magnetica per unità di carica agente in quel punto. Piú dettagliatamente, posta in un punto dello spazio una carica positiva q, detta carica di prova, se su di essa agisce la forza elettrica $\boldsymbol{F}$, in generale dovuta ad una incognita distribuzione di altre cariche elettriche, si definisce campo elettrico $\boldsymbol{E}$ il rapporto

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}}{q} \tag{4.1}$$

La relazione fra il campo elettrico e le cariche che lo generano è data dalla legge di Gauss: *il flusso del campo elettrico attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è proporzionale alla carica elettrica presente all'interno della superficie*

$$\Phi_S(\boldsymbol{E}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{4.2}$$

ove Q è la carica totale interna alla superficie. Dalla legge di Gauss segue la convenzione per il segno del flusso; poiché il campo elettrico punta dalla cariche positive a quelle negative, il flusso è considerato positivo quando è uscente dalla superficie S è negativo quando è entrante.
Il campo elettrico sui punti della superficie di un conduttore è sempre perpendicolare alla superficie e vale

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,\hat{\boldsymbol{n}} \tag{4.3}$$

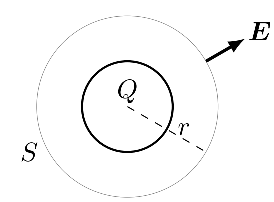
ove σ è la densità superficiale di carica sul conduttore e $\hat{\boldsymbol{n}}$ è il versore normale uscente. La (4.3) è nota come *teorema di Coulomb*.

PROBLEMI RISOLTI

*Problema 1

Utilizzando la legge di Gauss determinare il campo elettrico generato da una sfera conduttrice su cui è stata posta la carica $Q = 57 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$; determinare quindi la forza elettrica agente sulla carica puntiforme $q = 13\,\mathrm{nC}$ posta a distanza $d = 75\,\mathrm{cm}$ dal centro della sfera carica.

Soluzione



La carica si distribuisce in modo uniforme sulla superficie della sfera, quindi per simmetria il campo elettrico ha simmetria sferica cioè in ogni punto ha direzione radiale con il verso uscente dal centro della sfera e in modo tale abbia lo stesso modulo in tutti i punti alla distanza dal centro. Per applicare la legge di Gauss si sceglie una superficie chiusa sferica S concentrica con la sfera carica di raggio r. In figura la sfera carica è rappresentata con una linea spessa mentre la superficie di Gauss con una linea sottile. In questo modo il vettore campo elettrico è in ogni punto perpendicolare ad S ed ha lo stesso modulo; il flusso quindi si trova moltiplicando la superficie della sfera e il modulo di $\boldsymbol{E}$. Quindi

$$\Phi_S(\boldsymbol{E}) = ES = 4\pi r^2 E$$

Per la legge di Gauss (4.2) si ha quindi

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \Longrightarrow \qquad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

Si vede quindi che il campo elettrico generato dalla sfera è indipendente dal raggio della sfera e dipende solo dalla distanza dal centro.
La forza sulla carica q si trova quindi utilizzando la (4.1):

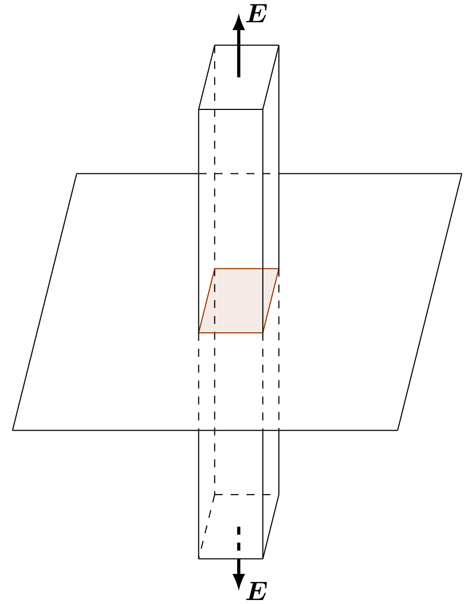
$$F = qE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq}{d^2} = 1.2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$$

La sfera carica quindi, interagisce con la carica puntiforme q come se fosse una carica puntiforme collocata nel centro della sfera. In virtú di questo risultato si può affermare che una sfera dal punto di vista dell'interazione elettrica si comporta come una carica puntiforme.

*Problema 2

Utilizzare la legge di Gauss per dimostrare che un piano indefinito omogeneamente carico genera un campo elettrico uniforme.

Soluzione



Vista la simmetria del problema, supposta positiva la carica sul piano, il campo elettrico ha direzione perpendicolare al piano e verso allontanantesi dal piano, come in figura. Si considera allora una superficie chiusa costituita da un parallelepipedo S avente basi di area A e superfici laterali perpendicolari al piano e tale che le due basi siano equidistanti dal piano; cioè tale che il piano divida il parallelepipedo in due parti uguali. Tale parallelepipedo interseca il piano su un rettangolo di area A; su questo rettangolo è depositata la carica Q, che è la carica totale presente all'interno della superficie chiusa. Il campo elettrico fluisce solo attraverso le due basi; essendo esse equidistanti dal piano, il campo ha lo stesso modulo in tutti i punti delle due basi a cui, inoltre, è perpendicolare. Il campo è parallelo alle superficie laterali attraverso le quali pertanto non vi è flusso. Il flusso del campo elettrico attraverso il parallelepipedo S quindi è

$$\Phi_S(\boldsymbol{E}) = 2AE$$

e per la legge di Gauss

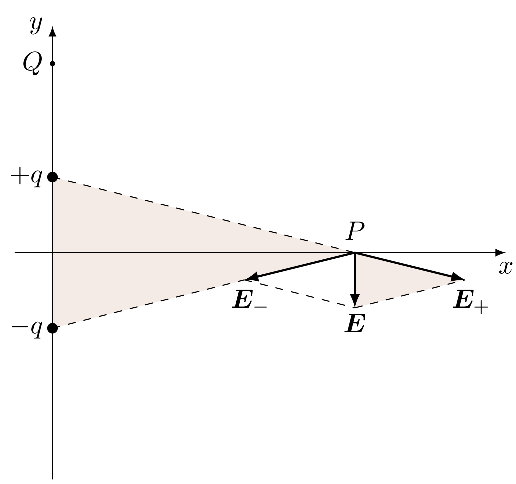
$$2AE = \frac{Q}{\epsilon_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \tag{4.4}$$

ove $\sigma = Q/A$ è la densità superficiale di carica. Si vede quindi che il campo elettrico è costante.

*Problema 3

Determinare il campo elettrico generato da un dipolo elettrico, costituito da due cariche uguali ed opposte $\pm q$ mantenute ad una distanza fissata $2d$, nei punti dei due assi di simmetria del problema. Determinare quindi la forza agente sul dipolo in un campo elettrico costante.

Soluzione



Si scelgono gli assi cartesiani in modo che le due cariche, positiva e negativa, abbiano rispettivamente coordinate $(0, d)$ e $(0, -d)$. Nel punto $P(x, 0)$ dell'asse delle x il campo elettrico è la somma dei due campi $\boldsymbol{E}_+$ e $\boldsymbol{E}_-$ generati dalle due cariche. I loro moduli sono uguali e vale

$$E+ = E_- = k\,\frac{q}{d^2 + x^2}$$

Per sommare i due contributi si osserva che i due triangoli colorati in figura sono simili; vale

$$\frac{E}{E_+} = \frac{2d}{\sqrt{d^2 + x^2}}$$

e quindi

$$E = \frac{2d}{\sqrt{d^2 + x^2}}\,E_+ = \frac{2kqd}{(d^2 + x^2)^{3/2}}$$

Se la distanza di P dal dipolo è molto piú grande delle sue dimensioni, cioè se $x \gg d$ si ha

$$\left(d^2 + x^2\right)^{3/2} = x^3 \left(1 + \frac{d^2}{x^2}\right)^{3/2} \simeq x^3 \left(1 + \frac{3d^2}{2x^2}\right)$$

e quindi

$$E \simeq \frac{2kqd}{x^3}\left(1 - \frac{3d^2}{2x^2}\right) = k\,\frac{p}{x^3}\left(1 - \frac{3d^2}{2x^2}\right) \simeq k\,\frac{p}{x^3}$$

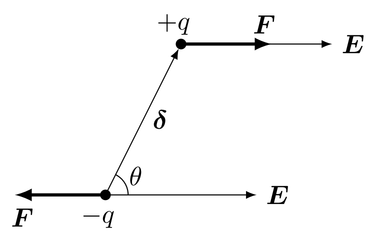
ove si è definito $p = 2qd$, detto *momento di dipolo*. Si noti che per grandi distanze la dipendenza è dall'inverso del cubo della distanza, comportamento tipico del dipolo.
Per quanto riguarda il campo elettrico in un punto $Q(0, y)$ dell'altro asse di simmetria, i campi elettrici generati dalle due cariche hanno la stessa direzione ma verso opposto; vale

$$E = k\,\frac{q}{(y-d)^2} - k\,\frac{q}{(y+d)^2} = \frac{4kqyd}{\left(y^2 - d^2\right)^2}$$

Nel caso sia $y \gg d$ si ha

$$E \simeq k\,\frac{2p}{y^3}\left(1 + \frac{2d^2}{y^2}\right) \simeq k\,\frac{2p}{y^3}$$

da cui si vede ancora emergere la dipendenza dal inverso del cubo della distanza.
Il campo elettrico agisce sulle due cariche del dipolo con forze uguali ed opposte di modulo $F = qE$; quindi sul dipolo agisce una coppia di forze di braccio $\delta \operatorname{sen}\theta$, ove $\boldsymbol{\delta}$ è il vettore che va dalla carica negativa a quella positiva, mentre θ è l'angolo formato dal campo elettrico e da $\boldsymbol{\delta}$. Il momento di questa coppia ha modulo



$$M = F\delta \operatorname{sen}\theta = qE\delta \operatorname{sen}\theta = pE \operatorname{sen}\theta$$

riconoscendo che $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{\delta}$, si può scrivere in forma vettoriale

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$$

Problema 4

Si considerino due sfere conduttrici identiche; su di una si trova la carica elettrica $Q = 12\,\mu\mathrm{C}$; la seconda sfera viene messa in contatto con la prima e quindi allontanata fino a che i loro centri distano $d = 20\,\mathrm{cm}$. Determinare la forza di Coulomb agente fra le due sfere.

Soluzione

Quando le due sfere sono messe a contatto, vista la simmetria del problema, la carica si distribuisce in modo uguale fra le due sfere (ma si veda piú sotto un argomento che utilizza il concetto di potenziale elettrico), pertanto le due sfere hanno cariche $q_1 = q_2 = Q/2$. L'interazione fra le due sfere è inversamente proporzionale al quadrato della distanza fra i due centri. Si ha quindi

$$F = k\,\frac{q_1 q_2}{d^2} = k\,\frac{Q^2}{4d^2} = 8.1\,\mathrm{N}$$

4.2 Il potenziale elettrico e l'energia elettrostatica

Il campo elettrico genera una forza conservativa, quindi il lavoro da essa compiuto può essere espresso in termini di un'energia potenziale $\mathcal{U}$ in modo analogo al caso della forza gravitazionale. Se sotto l'azione del campo elettrico generato da una carica puntiforme q_1 la carica q si sposta dal punto A al punto B, il lavoro fatto dalla forza di Coulomb si può scrivere nella forma

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B)$$

ove $\mathcal{U}$ l'energia potenziale che dipende solo dalla distanza r fra le due cariche e vale

$$\mathcal{U}(r) = k\,\frac{q_1 q}{r} + \text{cost.}$$

Pertanto

$$\mathcal{L}_{A\to B} = kqq_1\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

L'energia potenziale è sempre definita a meno di una costante additiva; tale costante può essere fissata scegliendo in quali punti l'energia potenziale abbia un dato valore; per esempio, la costante è nulla se l'energia potenziale è nulla all'infinito. A meno che non venga esplicitamente detto diversamente, negli esercizi che seguono si suppone la costante nulla.
Nel caso il campo elettrico sia generato dalle n cariche $q_1, \ldots, q_n$, il lavoro totale sulla carica q è la somma dei lavori dovuti a ciascuna delle n cariche; questo comporta che l'energia potenziale del punto A, nel caso si supponga nulla all'infinito, si scriva

$$\mathcal{U}(A) = kq\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_{iA}}$$

ove r_{iA} è la distanza dell' i-esima carica dal punto A.
È assai conveniente definire la *differenza di potenziale elettrico* $\Delta\phi$ fra due punti come il lavoro fatto sulla carica q che si sposta fra questi due punti per unità di carica; cioè

$$\frac{\mathcal{L}_{A\to B}}{q} = \frac{\mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B)}{q} = \phi(A) - \phi(B) = -\Delta\phi_{AB} \tag{4.5}$$

Il potenziale elettrico in P dovuto alle cariche $q_1, \ldots, q_n$ è quindi

$$\phi(P) = k\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} \tag{4.6}$$

ove r_i è la distanza di q_i da P.
Nel caso il campo elettrico sia costante, vi è una semplice relazione che lega $\boldsymbol{E}$ alla differenza di potenziale fra due punti, vale infatti

$$\Delta\phi_{AB} = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{AB} = -E_r d$$

ove E_r è la componente del vettore $\boldsymbol{E}$ nella direzione di $\boldsymbol{AB}$ e d è il modulo di $\boldsymbol{AB}$.
Il fatto che il campo elettrico generi una forza conservativa è vero solo in elettrostatica, cioè fino a che le cariche sono ferme e non vi sono correnti elettriche (si suppone qui che il tempo impiegato dalle cariche a raggiungere le loro configurazioni di equilibrio, per esempio sulla superficie di un conduttore, sia trascurabile). Questo si esprime matematicamente dicendo che, in elettrostatica, la circuitazione del campo elettrico lungo una qualsiasi curva orientata chiusa γ è nulla, cioè

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{E}) = 0$$

Si definisce energia elettrostatica W di una distribuzione arbitraria di n cariche il lavoro compiuto per portarle dall'infinito alle loro posizioni. Se nella posizione individuata dal vettore $\boldsymbol{r}$ vi è il potenziale $\phi(\boldsymbol{r})$, il lavoro necessario per portare la carica q dall'infinito a $\boldsymbol{r}$ è l'opposto di quello compiuto dal campo elettrico, che è

$$\mathcal{L} = q\big[\phi(\infty) - \phi(r)\big] = -q\phi(r)$$

quindi, l'energia elettrostatica della carica q nella posizione $\boldsymbol{r}$ ove via il potenziale $\phi(r)$ è

$$W(r) = q\phi(r) \tag{4.7}$$

Se vi sono n cariche q_i, nelle posizioni $\boldsymbol{r}_i$, l'energia elettrostatica della configurazione vale

$$W = k\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{k}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$$

ove r_{ij} è la distanza delle cariche q_i e q_j. Vale anche

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\phi_i$$

ove ϕ_i è il potenziale elettrico nel punto ove si trova la carica q_i dovuto alle altre $n-1$ cariche.
Il fatto che il campo elettrico sia conservativo, comporta che il lavoro fatto su un percorso chiuso sia nullo; come conseguenza si ha che in elettrostatica la circuitazione del campo elettrico lungo una curva chiusa γ è nulla:

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{E}) = 0 \tag{4.8}$$

L'energia di una particella viene spesso misurata in elettronvolt, simbolo eV, insieme ai suoi multipli keV, MeV, GeV, TeV. L'elettronvolt è definito come l'energia cinetica guadagnata da un elettrone sottoposto alla differenza di potenziale di 1 V. Vale quindi

$$1\,\mathrm{eV} = 1.6021766208(98)\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Per l'equivalenza fra massa ed energia è usuale misurare la massa delle particelle in eV c^{-2}; vale

$$1\,\mathrm{eV}\,c^{-2} = 1.782661907(11)\cdot 10^{-36}\,\mathrm{kg}$$

Un dipolo elettrico di momento $\boldsymbol{p}$ immerso in un campo elettrico $\boldsymbol{E}$ ha energia W data da

$$W = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$$

PROBLEMI RISOLTI

*Problema 1

Determinare il potenziale elettrico dovuto ad una carica puntiforme q. Generalizzare il problema al caso del potenziale elettrico dovuto ad una sfera di raggio R con una distribuzione omogenea di carica Q.

Soluzione

La soluzione è immediata utilizzando la (4.6); l'unica cosa che merita un commento aggiuntivo è il fatto che il potenziale elettrico, come l'energia potenziale, è definita a meno di una costante additiva c. In un punto a distanza r da q quindi il potenziale elettrico è dato da

$$\phi(r) = k\,\frac{q}{r} + c$$

La costante c può essere determinata scegliendo a che distanza da q si vuole che il potenziale sia nullo. Il caso $c = 0$ si ottiene scegliendo il potenziale nullo all'infinito.
Poiché il campo elettrico generato da una sfera è uguale a quello generato da una carica puntiforme concentrata nel centro della sfera, il lavoro fatto è quindi lo stesso e pertanto anche il potenziale elettrico. Posto a zero il potenziale all'infinito, si ha quindi

$$\phi(r) = k\,\frac{Q}{r} \tag{4.9}$$

ove r è la distanza dal centro della sfera. Si noti che il risultato è il medesimo sia che la carica Q sia distribuita uniformemente nell'intero volume o distribuita uniformemente sulla sola superficie. Infine è possibile determinare il potenziale sulla superficie della sfera:

$$\phi(R) = k\,\frac{Q}{R}$$

*Problema 2

Determinare la relazione fra campo elettrico e potenziale elettrico nel caso generale.

Soluzione

Per un campo elettrico generato da una distribuzione di carica qualsiasi, per trovare la relazione fra campo e potenziale è necessario utilizzare il calcolo differenziale e integrale. Per uno spostamento infinitesimo $\boldsymbol{dr}$ il lavoro compiuto dal campo elettrico sulla carica positiva q è

$$d\mathcal{L} = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{dr} = q\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = qE_r dr$$

ove E_r è la componente del campo elettrico nella direzione del vettore $\boldsymbol{r}$. La corrispondente variazione di potenziale infinitesima è, utilizzando la (4.5),

$$d\phi = -\frac{d\mathcal{L}}{q} = -E_r dr \tag{4.10}$$

da cui si può dedurre

$$E_r = -\frac{d\phi}{dr}$$

la componente del campo elettrico nella direzione dello spostamento è quindi la derivata del potenziale. Si noti, in particolare, che utilizzando questa relazione sulla (4.9), che è il potenziale dovuto ad una sfera carica, si ottiene

$$E(r) = k\,\frac{Q}{r^2}$$

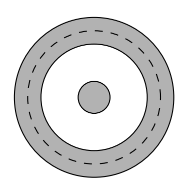
che, come visto sopra è il campo elettrico generato da una sfera carica.
Infine, dalla (4.10), è possibile ottenere, per integrazione, la differenza di potenziale fra due punti qualsiasi A e B.

$$\Delta\phi_{AB} = \phi_B - \phi_A = -\int_{r_A}^{r_B} E_r\,dr \tag{4.11}$$

*Problema 3

Un conduttore sferico cavo ha raggio interno r_2 ed esterno r_3; all'interno della cavità via è, concentrica al conduttore sferico, un sfera di raggio r_1 carica con carica q. Determinare il modulo del campo elettrico ed il potenziale elettrico al variare della distanza dal centro comune.

Soluzione



Per risolvere il problema si fa uso del calcolo differenziale e integrale. Tra i due conduttori vi è induzione completa; per vederlo si consideri una superficie di Gauss, tratteggiata in figura, concentrica ai conduttori in questione, e di raggio compreso fra r_2 ed r_3. Tale superficie si trova all'interno del conduttore cavo ove il campo elettrico è nullo e quindi la carica all'interno di tale superficie deve essere nulla; la superficie però contiene la carica q presente sulla sfera interna, vi deve quindi essere una carica $-q$ interna alla superficie di Gauss. Tale carica può essere solo sulla superficie interna della sfera cava; ma la sfera cava è neutra, vi deve quindi essere anche una carica $+q$ che può essere solo sulla superficie esterna. Si può quindi concludere

$$\begin{array}{lll} E(r) = k\,\dfrac{q}{r^2} & \text{per} & r \geq r_3 \\ E(r) = 0 & \text{per} & r_2 < r < r_3 \\ E(r) = k\,\dfrac{q}{r^2} & \text{per} & r_1 \leq r \leq r_2 \\ E(r) = 0 & \text{per} & r < r_1 \end{array}$$

Il potenziale è costante dove il campo è nullo, cioè all'interno dei conduttori, e la costante è fissata dalla continuità. Per $r > r_3$ il potenziale è dato da

$$\phi(r) = \phi(r) - \phi(\infty) = \int_r^\infty E(r)dr = kq\int_r^\infty \frac{1}{r^2}\,dr = k\,\frac{q}{r}$$

Conseguentemente, per $r_2 \leq r \leq r_3$, si ha

$$\phi(r) = \phi(r_3) = k\,\frac{q}{r_3}$$

Per $r_1 \leq r \leq r_2$ si ha

$$\phi(r_3) - \phi(r) = -\int_r^{r_2} E(r)\,dr = -kq\int_r^{r_2} \frac{1}{r^2}\,dr = kq\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right)$$

da cui

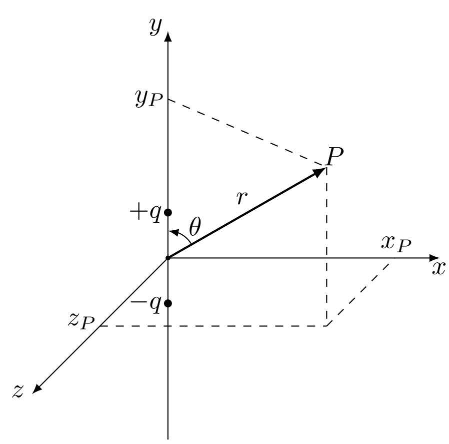
$$\phi(r) = kq\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r}\right)$$

Si noti che per $r = r_2$ si ritrova correttamente $\phi(r_2) = \phi(r_3)$. Per continuità all'interno della sfera vi è lo stesso potenziale che sulla superficie quindi per $r \leq r_1$ si ha

$$\phi(r) = kq\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}\right)$$

*Problema 4

Determinare il potenziale elettrico di un dipolo.



Soluzione

Si vuole determinare il potenziale elettrico dovuto al dipolo costituito da due cariche opposte $\pm q$ a distanza $2d$ nel punto $P(x, y, z)$; gli assi cartesiani sono scelti in modo tale che le coordinate delle due cariche siano rispettivamente $(0, d, 0)$ e $(0, -d, 0)$. Utilizzando la (4.6) si ha

$$\phi(P) = k\,\frac{q}{r}\left[\left(1 - 2\,\frac{yd}{r^2}\right)^{-1/2} - \left(1 + 2\,\frac{yd}{r^2}\right)^{-1/2}\right]$$

Come nel caso del campo elettrico di un dipolo è interessante determinare il limite per $r \gg d$.

Utilizzando l'approssimazione

$$(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x$$

valida per $x \ll 1$, si ha

$$\left(1 \pm 2\,\frac{yd}{r^2}\right)^{-1/2} \simeq 1 \mp \frac{yd}{r^2}$$

e quindi

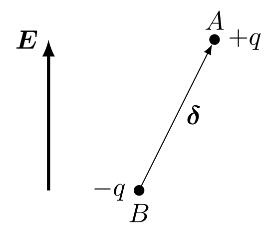
$$\phi(P) = k\,\frac{q}{r}\left(1 + \frac{yd}{r^2} - 1 + \frac{yd}{r^2}\right) = k\,\frac{q2yd}{r^3} = k\,\frac{yp}{r^3} = k\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

***Problema 5**

Determinare l'energia elettrostatica di un dipolo in un campo elettrico costante $\boldsymbol{E}$.

Soluzione

Si consideri un dipolo elettrico con il momento $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{\delta}$ orientato in modo da formare un angolo θ con il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ uniforme. Per determinare l'energia elettrostatica del sistema si usa la (4.7) e vale



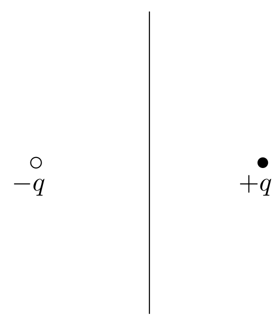
$$W = q\phi(A) - q\phi(B) = q\Delta\phi_{AB} = -q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\delta} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$$

come era da aspettarsi tale energia è minima quando il momento di dipolo elettrico è allineato con il campo $\boldsymbol{E}$.

***Problema 6**

Data carica positiva q che si trova a distanza x da un piano conduttore indefinito, sapendo che il piano è a potenziale nullo, determinare la forza con cui il piano attira la carica q.

Soluzione



La carica positiva q induce sulla superficie affacciata del piano una carica negativa che attira q. Per determinare la forza di attrazione sarebbe necessario determinare la disposizione delle cariche negative indotte sul piano; cosa evidentemente non facile. Tuttavia si può risolvere il problema con il metodo delle cariche immagine. Il problema proposto infatti è equivalente alla situazione in cui, simmetricamente rispetto al piano si trovi una carica $-q$; in questo caso infatti il potenziale elettrico in tutti i punti del piano è nullo. La carica $-q$ è una carica fittizia che viene detta *carica immagine*. La presenza della carica q induce quindi sulla superficie del piano affacciata la carica $-q$ in modo tale che la situazione che si crea è uguale a quella che si ha se si toglie il piano conduttore e si introduca la carica immagine. Il modulo della forza con cui il piano attira q è quindi

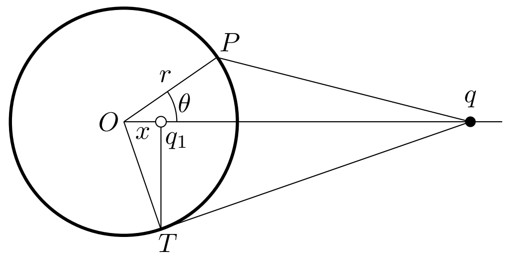
$$F = k\,\frac{q^2}{4x^2}$$

***Problema 7**

Una carica positiva q è posta davanti ad una sfera conduttrice, di raggio r, a distanza d dal centro della sfera. determinare la forza con cui la sfera attira la carica.

Soluzione

Anche in questo caso il problema può essere risolto con il metodo delle cariche immagine; si tratta di determinare valore e posizione della carica immagine q_1 tale che il sistema delle due cariche q e q_1 abbia come superficie equipotenziale a potenziale nullo la superficie della sfera. Per simmetria si deve poter supporre che la carica immagine q_1 si trovi sulla retta che unisce il centro della sfera con la carica q a distanza x dal centro; si suppone inoltre che la carica immagine abbia valore $q_1 = -yq$.



Si consideri quindi un qualunque punto $P(x,y,z)$ della sfera; la carica q ha coordinate $(d,0,0)$ e la carica immagine ha coordinate $(x,0,0)$. Per determinare le incognite x e y si impone l'annullamento del potenziale in P è la condizione

$$\phi(P) = k\left[\frac{q}{r^2 - 2rd\cos\theta + d^2} - \frac{yq}{r^2 - 2rx\cos\theta + x^2}\right] = 0$$

da cui

$$y^2\big(r^2 - 2rd\cos\theta + d^2\big) = r^2 - 2rx\cos\theta + x^2$$

che deve essere vera per ogni θ; riscrivendola nella forma

$$2r\big(x - y^2 d\big)\cos\theta = r^2 + x^2 - y^2\big(d^2 + r^2\big)$$

si vede che la relazione è vera per ogni θ se valgono

$$\begin{cases} x = dy^2 \\ y^2\big(d^2 + r^2\big) = r^2 + x^2 \end{cases}$$

Dalla prima si ha $y^2 = x/d$ che, sostituita nella seconda dà

$$\frac{x}{d}\big(d^2 + r^2\big) = r^2 + x^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad dx^2 - \big(d^2 + r^2\big)x + dr^2 = 0$$

da cui

$$\big(x - d\big)\big(dx - r^2\big) = 0$$

vi sono quindi due soluzioni

$$x = d \qquad , \qquad x = \frac{r^2}{d}$$

La prima soluzione fa coincidere le due cariche e quindi produce un potenziale nullo in tutto lo spazio: la soluzione va scartata. La seconda soluzione si accetta; in corrispondenza si ha

$$y = \frac{r}{d}$$

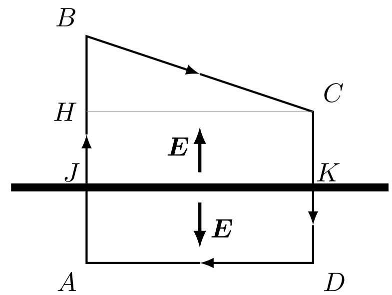
Il valore di x, come si può facilmente verificare, è quello dell'ascissa del punto T in cui la retta tangente passa per la carica q. La distanza fra la carica e la carica immagine $q_1 = -rq/d$ è $(d^2 - r^2)/d$; quindi il modulo della forza di attrazione fra la sfera e la carica q è

$$F = k\,\frac{rq^2/d}{(d^2 - r^2)^2/d^2} = k\,\frac{rq^2 d}{(d^2 - r^2)^2}$$

Problema 8

Verificare la (4.8) nel caso del campo elettrico generato da un piano indefinito carico positivamente per la curva chiusa rappresentata in figura.

Soluzione



Il piano indefinito positivo genera un campo elettrico uniforme su entrambi e semispazi da esso generati di direzione perpendicolare al piano e verso tale da allontanarsi dal piano, quindi verso l'alto sopra e verso il basso sotto, come rappresentato in figura. Detto imprecisamente, la circuitazione è data dalla somma dei prodotti scalari del campo elettrico per i vettori spostamento lungo la curva γ, quindi vale

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E} \cdot \big(\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{BC} + \boldsymbol{CD} + \boldsymbol{DA}\big)$$

osservando che valgono

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E} \cdot \big(\boldsymbol{AJ} + \boldsymbol{JB}\big) = -E\ AJ + E\ JB \\
&\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{BC} = -E\ HB \\
&\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{CD} = \boldsymbol{E} \cdot \big(\boldsymbol{CK} + \boldsymbol{KD}\big) = -E\ CK + E\ KD \\
&\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{DA} = 0
\end{aligned}$$

si può concludere

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{E}) = E\big(- AJ + JB - HB - CK + KD\big) = 0$$

4.3 Condensatori

Se su un corpo conduttore è presente la carica Q sulla sua superficie si misura un potenziale ϕ. Tale potenziale è direttamente proporzionale alla carica Q presente sul corpo, la costante di proporzionalità C è detta *capacità* e dipende dalle caratteristiche geometriche del corpo; vale quindi

$$Q = C\phi$$

Due conduttori carichi isolati uno rispetto all'altro tra i quali esiste induzione elettrostatica completa costituiscono un *condensatore*. I due conduttori, detti armature del condensatore, hanno quindi carica uguale ed opposta $\pm Q$; fra di essi si misura una differenza di potenziale, tradizionalmente indicata con il simbolo V; si dice capacità del condensatore la costante C definita dalla relazione

$$Q = CV$$

La capacità di un condensatore piano è proporzionale all'area A della superficie delle armature e inversamente proporzionale alla loro distanza d:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \tag{4.12}$$

Fra le armature di un condensatore piano, con una densità di carica superficiale σ, il campo elettrico è costante e vale

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

mentre all'esterno del condensatore il campo elettrico è nullo. La differenza di potenziale V fra le armature di un condensatore piano è legata al campo elettrico interno dalla relazione

$$V = Ed$$

Il condensatore è un dispositivo che accumula un'energia elettrostatica pari al lavoro fatto per caricarlo; tale energia è

$$W = \frac{1}{2}\,QV = \frac{1}{2}\,CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Se fra le armature del condensatore è presente un materiale isolante invece del vuoto, tale materiale, detto *dielettrico*, si polarizza. In questo caso il campo elettrico interno e la differenza di potenziale fra le armature diminuiscono.
All'interno del dielettrico si ha un momento di dipolo per unità di volume $\boldsymbol{P}$, detto vettore di polarizzazione; questo per materiali omogenei è proporzionale al campo elettrico esterno $\boldsymbol{E}$ e vale

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 \chi \boldsymbol{E}$$

ove χ è un costante che dipende dalla sostanza di cui è costituito il dielettrico ed è detta *suscettività elettrica*, si tratta di una grandezza adimensionale. Se il dielettrico è omogeneo, la polarizzazione produce sulle sue superfici una densità superficiale di carica σ_p che è uguale al modulo del vettore di polarizzazione, vale cioè

$$\sigma_p = \epsilon_0 \chi E$$

Applicando la legge di Gauss si ottiene

$$E = \frac{\sigma - \sigma_p}{\epsilon_0}$$

A partire dalla suscettività elettrica si può definire la *costante dielettrica relativa* ϵ_r del materiale in questione:

$$\epsilon_r = 1 + \chi$$

Nel vuoto $\chi = 0$ e quindi $\epsilon_r = 1$. In termini di questa costante il campo elettrico interno al condensatore diviene

$$E = \frac{1}{\epsilon_r}\,E_0$$

ove E_0 è il campo elettrico nel vuoto. Similmente la differenza di potenziale fra le armature e la capacità del condensatore sono modificate nel modo seguente:

$$V = \frac{1}{\epsilon_r}\,V_0 \qquad , \qquad C = \epsilon_r C_0$$

Si può verificare che tutte le equazione dell'elettrostatica in presenza di un dielettrico si ottengono da quelle nel vuoto sostituendo al posto della costante dielettrica del vuoto ϵ_0 la costante dielettrica assoluta del dielettrico in questione definita da

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$$

Quindi, per esempio, la legge di Gauss e la legge di Coulomb divengono

$$\Phi_S(\boldsymbol{E}) = \frac{Q}{\epsilon} \qquad , \qquad F = \frac{1}{4\pi\epsilon}\,\frac{q_1 q_2}{r_{21}^3}\,\boldsymbol{r}_{21}$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Determinare la capacità di una sfera conduttrice di raggio r.

Soluzione

Se Q è la carica sulla sfera, il suo potenziale è

$$\phi = k\,\frac{Q}{r}$$

pertanto la capacità è

$$C = \frac{r}{k}$$

Problema 2

Determinare la capacità di un condensatore piano avente le armature di area A distanti d, verificando la (4.12).

Soluzione

Ricordando che la carica sulle armature si può scrivere nella forma $Q = \sigma A$ e che la differenza di potenziale fra le armature è legata al campo elettrico interno, e quindi alla densità superficiale σ dalle relazioni

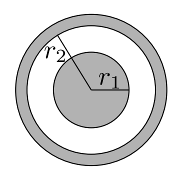
$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, d$$

dal rapporto di queste due espressioni si ottiene la (4.12).

***Problema 3**

Determinare la capacità di un condensatore sferico la cui armature sono costituite da una sfera e da un guscio sferico, rispettivamente di raggio r_1 ed r_2 come in figura.

Soluzione



Fra la due sfere vi è induzione completa. Quindi supponendo che la sfera interna sia caricata con una carica $+Q$, sulla superficie interna del guscio esterno vi è una carica $-Q$. Si suppone inoltre che l'ulteriore carica $+Q$ presente sulla superficie esterna del guscio sia stata eliminata collegando tale superficie a terra (peraltro la cosa non è necessaria alla seguente discussione). Per determinare la differenza di potenziale fra le armature basta considerare che essa è uguale al lavoro per unità di carica fatto dalle forze elettriche per portare una carica dall'armatura interna a quella esterna. Ma il campo elettrico, per la legge di Gauss, dipende solo dalla carica presente sulla sfera interna; se ne conclude che vale

$$V = \phi(r_1) - \phi(r_2) = k\,\frac{Q}{r_1} - k\,\frac{Q}{r_2} = kQ\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

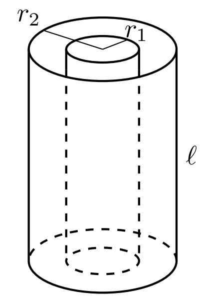
Da qui si ottiene l'espressione per la capacità

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{k}\,\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

***Problema 4**

Determinare la capacità di un condensatore cilindrico di lunghezza ℓ le cui armature sono un cilindro pieno di raggio r_1 e un guscio cilindrico ad esso coassiale di raggio r_2.

Soluzione



Per risolvere il problema si fa uso del calcolo differenziale ed integrale. Tra i due conduttori vi induzione completa; se si suppone che l'armatura interna abbia una carica positiva $+Q$, quella esterna ha una carica $-Q$. Il campo elettrico fra le due armature, per la legge di Gauss, è generato dalle sole cariche che si trovano sul cilindro interno; Il modulo E a distanza $r_1 < r < r_2$ dall'asse del condensatore è calcolato nell'esercizio 42 di pagina 53:

$$E(r) = \frac{2kQ}{\ell r}$$

quindi la differenza di potenziale fra le armature è data dalla (4.11)

$$V = \phi(r_1) - \phi(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E(r) = \frac{2kQ}{\ell} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\, dr = \frac{2kQ}{\ell} \log \frac{r_2}{r_1}$$

da cui si può dedurre

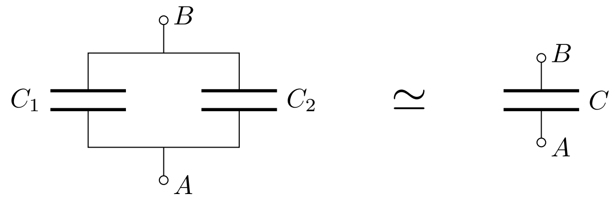
$$C = \frac{\ell}{2k \log \dfrac{r_2}{r_1}}$$

*Problema 5

Determinare la capacità equivalente di due condensatori collegati in parallelo e in serie.

Soluzione

Due condensatori si dicono collegati in parallelo se le loro armature hanno la stessa differenza di potenziale V; questo si realizza mediante un collegamento come quello in figura a destra.



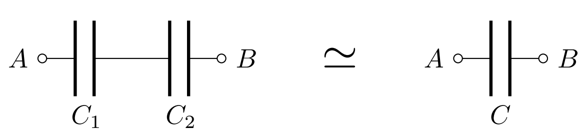
Date le capacità C_1 e C_2, si chiede di determinare la capacità C del condensatore che, sottoposto alla stessa differenza di potenziale, ha sulle sue armature la stessa carica che si trova sulle armature di C_1 e C_2; un tale condensatore rende fisicamente indistinguibili le due configurazioni rappresentate in figura, nel senso che collegando i poli A e B nello stesso punto di un circuito, comunque complicato, non si misurano differenze. Un tale condensatore è detto *equivalente* al parallelo di C_1 e C_2 e la sua capacità si dice *capacità equivalente*.
La carica totale Q presente sulle armature di C è la somma delle cariche Q_1 e Q_2 presenti su C_1 e C_2; quindi si ha

$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)V$$

Ma deve essere anche $Q = CV$ quindi:

$$C = C_1 + C_2$$

pertanto la capacità equivalente di due condensatori collegati in parallelo è la comma delle singole capacità componenti.
Due condensatori si dicono collegati in serie se hanno, per induzione elettrostatica, la stessa carica elettrica Q; questo si realizza mediante un collegamento come quello in figura.



In questo caso i condensatori C_1, C_2 e C hanno tutti la stessa carica mentre la somma delle differenze di potenziale ai capi di C_1 e C_2 è uguale a quella di C; quindi si ha

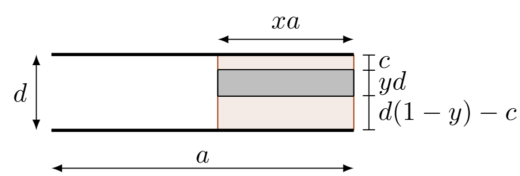
$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

ma si ha anche $V = Q/C$ quindi

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Questi risultati si generalizzano facilmente al caso in cui i collegamenti siano effettuati fra pí di due condensatori.
Si noti, infine, che nel caso di condensatori collegati in parallelo la capacità equivalente è sempre maggiore di tutte le capacità componenti, mentre nel casi di condensatori collegati in serie la capacità equivalente è sempre minore di tutte le capacità componenti.

***Problema 6**



All'interno di un condensatore piano formato da due armature rettangolari di dimensioni $a = 50\,\text{cm}$ e $b = 20\,\text{cm}$ è inserito un parallelepipedo conduttore di spessore yd ove $y = 0.35$ e $d = 5.0\,\text{cm}$ è la distanza fra le armature; questo parallelepipedo ha le basi parallele alle armature del condensatore, ed è inserito per una frazione $x = 0.45$ della larghezza a delle armature; fra tale parallelepipedo è presente un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 1.2$. La situazione è rappresentata in figura, ove non campare la dimensione b. Determinare il lavoro necessario per caricare il dispositivo con una carica $Q = 3.0 \cdot 10^{-9}\,\text{C}$. Dal risultato trovato dedurre se il conduttore, insieme ai dielettrici che lo circondano, è attratto dentro il condensatore o espulso fuori; determinare inoltre il modulo della forza agente.

Soluzione

Il dispositivo va pensato come un condensatore di larghezza $(1-x)a$ e separazione d fra le armature senza dielettrico, in parallelo con serie di due condensatori di larghezza xa e separazione fra le armature rispettivamente b e c con dielettrico; infatti il parallelepipedo funziona da conduttore che collega i due condensatori in serie. Si comincia con il calcolare la capacità equivalente dei due condensatori in serie in presenza di dielettrico; chiamata C_1 la capacità di quello superiore e C_2 la capacità di quello inferiore, si ha

$$C_1 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{xab}{c} \qquad , \qquad C_2 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{xab}{d(1-y)-c}$$

e quindi il loro parallelo ha resistenza equivalente C_{12} data da

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_0 xab}\big[d(1-y) - c + c\big] \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_{12} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{xab}{d(1-y)}$$

Questa capacità non dipende da dove è inserito il parallelepipedo ed è la stessa che si avrebbe se la distanza fra le due armature fosse semplicemente diminuita di una distanza corrispondente allo spessore del parallelepipedo. Rimane da calcolare il parallelo fra C_{12} e la parte rimanente, che ha capacità

$$C_3 = \epsilon_0 \frac{(1-x)ab}{d}$$

Quindi la capacità totale è

$$\begin{aligned} C = C_{12} + C_3 &= \epsilon_r \epsilon_0 \frac{xab}{d(1-y)} + \epsilon_0 \frac{(1-x)ab}{d} = \frac{\epsilon_0 ab}{d}\left[\epsilon_r \frac{x}{1-y} + 1 - x\right] = \\ &= C_0\left[\epsilon_r \frac{x}{1-y} + 1 - x\right] = 24\,\text{pF} \end{aligned}$$

la quantità fra parentesi quadre è la correzione rispetto alla capacità C_0 del condensatore vuoto, che si recupera ponendo $x = y = 0$.
Il lavoro necessario per caricare il condensatore alla differenza di potenziale richiesta è uguale all'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore, e quindi è

$$W = \frac{Q^2}{2C} = 1.8 \cdot 10^{-7}\,\text{J}$$

La capacità si può scrivere nella forma

$$C = C_0 \left[\frac{\epsilon_r - 1 + y}{1 - y} \, x + 1 \right]$$

da cui si vede che, essendo il coefficiente di x sicuramente positivo, C aumenta con x. Poiché l'energia elettrostatica accumulata è inversamente proporzionale alla capacità è chiaro che all'aumentare dell'inserimento del conduttore condensatore l'energia diminuisce; questo significa che il conduttore è attratto all'interno del condensatore e che il lavoro per il suo spostamento è fatto dalle forze elettriche del condensatore a spese dell'energia elettrostatica accumulata. Per convincersi ulteriormente che il ragionamento è corretto si osservi che se il conduttore fosse espulso dalle forze elettriche sarebbe necessario, per il suo inserimento agire con una forza esterna che vincesse tali forze elettriche; in tale caso il lavoro fatto dalle forze esterne andrebbe ad aumentare l'energia elettrostatica del condensatore.
Per il calcolo esplicito del modulo della forza agente è necessario il calcolo differenziale; in particolare si deve ricordare che la forza è la derivata del lavoro compiuto rispetto allo spostamento e quindi l'opposto della derivata dell'energia elettrostatica; si ha cosí

$$F(x) = \frac{d\mathcal{L}}{d(xa)} - \frac{dW}{d(xa)} = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{1}{a} \frac{dC}{dx} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 a^2 b} \frac{(\epsilon_r - 1 + y)(1 - y)}{\left[x(\epsilon_r - 1 + y) + 1 - y\right]^2} = 2.3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

Il segno positivo di questa forza, conferma che ha il verso delle x crescenti. Si osservi che da questo risultato generale si ottiene anche, come caso particolare, la forza F_d nel caso in cui il corpo che entra nel condensatore sia completamente dielettrico; basta porre nella precedente $y = 0$; analogamente si ottiene la forza F_c nel caso in cui vi sia solo il conduttore, ponendo $\epsilon_r = 1$. Nei due casi si ottengono rispettivamente:

$$F_d = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 a^2 b} \frac{\epsilon_r - 1}{\left[x(\epsilon_r - 1) + 1\right]^2} \qquad , \qquad F_d = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 a^2 b} \frac{y(1 - y)}{\left[xy + 1 - y\right]^2}$$

Se le due condizioni si verificano entrambe, cioè se non vi è né conduttore né dielettrico, la forza è ovviamente nulla.

*Problema 7

Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui il condensatore si collegato ad un generatore che mantiene la differenza di potenziale fra le armature costante e uguale a $V = 120\,\mathrm{V}$.

Soluzione

La prima parte del problema, cioè il calcolo della capacità è uguale all'esercizio precedente e non viene ripetuto. Per quanto riguarda l'energia elettrostatica, occorre tenere conto che ora il condensatore non è un sistema isolato ma è collegato ad un generatore di tensione che compie del lavoro per mantenere costante la differenza di potenziale. Infatti l'aumento della capacità dovuto all'inserimento del parallelepipedo fa si che, per mantenere costante V deva aumentare Q: Dal punto di vista microscopico, le cariche aggiuntive fornite dal generatore vanno a compensare le cariche di polarizzazione che compaiono sulla superficie del dielettrico affacciata all'armatura del condensatore.
Per valutare come cambia l'energia elettrostatica a potenziale costante conviene usare l'espressione $W = CV^2/2$, da cui si vede che un aumento della capacità ΔC produce un aumento ΔW dell'energia dato da

$$\Delta W = \frac{1}{2} V^2 \Delta C$$

In questa espressione è compresa l'energia fornita dal generatore di cui si è parlato sopra. Questa è l'energia necessaria a far passare la carica ΔQ attraverso il potenziale V in modo tale che questo rimanga costante quando la capacità varia di ΔC, tale carica è evidentemente $\Delta Q = V\Delta C$; il lavoro $\mathcal{L}_G$ fatto dal generatore è quindi

$$\mathcal{L}_G = V\Delta Q = V^2 \Delta C$$

Questo lavoro ha due contribui: l'aumento ΔW dell'energia elettrostatica del condensatore e il lavoro $\mathcal{L}_p$ necessario a spostare il parallelepipedo; quindi

$$\mathcal{L}_G = \Delta W + \mathcal{L}_p$$

da cui si può calcolare il lavoro compiuto per spostare il parallelepipedo:

$$\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_G - \Delta W = V^2 \Delta C - \frac{1}{2} V^{\Delta} C = \frac{1}{2} V^{\Delta} C$$

Con riferimento a quanto trovato nell'esercizio precedente, si ha

$$\Delta C = C - C_0 = C_0 \frac{\epsilon_r - 1 + y}{1 - y} x$$

e quindi

$$\mathcal{L}_p = \frac{1}{2} V^2 C_0^2 \frac{\epsilon_r - 1 + y}{1 - y} x = \frac{1}{2} V^2 \epsilon_0 \frac{xab}{d} \frac{\epsilon_r - 1 + y}{1 - y}$$

Come fatto sopra, questa espressione consente di ricavare la forza con cui il parallelepipedo è attirato all'interno del condensatore:

$$F(x) = \frac{d\mathcal{L}_p}{d(xa)} = \frac{1}{2} V^2 \epsilon_0 \frac{b}{d} \frac{\epsilon_r - 1 + y}{1 - y} = 2.2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

Il valore è simile a quello trovato precedentemente, si noti però che in questo caso il modulo della forza è costante, cioè non dipende da x. Come nel caso precedente si possono fare i due casi particolari

$$F_d = \frac{1}{2} V^2 \epsilon_0 \frac{b}{d} (\epsilon_r - 1) \qquad , \qquad F_c = \frac{1}{2} V^2 \epsilon_0 \frac{b}{d} \frac{y}{1 - y}$$

4.4 Esercizi

Legge di Coulomb e campo elettrico

●○○ **Es. 1** — Determinare la carica di un corpo privato di $n = 3.13 \cdot 10^{10}$ elettroni.

●○○ **Es. 2** — Calcolare il rapporto fra la forza di attrazione gravitazionale e la forza di attrazione elettrica fra un protone ed un elettrone posti a distanza d.

●○○ **Es. 3** — Una carica $q = -600\,\mathrm{nC}$ è appesa a una cordicella che può di sopportare senza spezzarsi un tensione massima $\tau = 30.5\,\mathrm{N}$; qual è il valore minimo della carica Q, e di quale segno, che deve essere posta a distanza $d = 5.20\,\mathrm{cm}$ verticalmente sotto q, affinché la cordicella si spezzi. Si trascuri il peso di q.

●○○ **Es. 4** — Determinare in quale punto fra $q_1 = -50.0\,\mathrm{nC}$ e $q_2 = -30.0\,\mathrm{nC}$, distanti $d = 40.0\,\mathrm{cm}$ occorre mettere la carica $q_3 = 10.0\,\mathrm{nC}$ affinché stia in equilibrio. Cosa cambia se q_3 vale $-20\,\mathrm{nC}$?

●○○ **Es. 5** — Date due cariche $q_1 = 50\,\mathrm{nC}$ e $q_2 = -135\,\mathrm{nC}$ poste a distanza $d = 2.0\,\mathrm{m}$; determinare, se esistono, i punti del segmento che le unisce in cui il campo elettrico è nullo.

●○○ **Es. 6** — Il modulo del campo elettrico generato da una carica Q a una distanza $d_1 = 19\,\mathrm{cm}$ vale $E_1 = 40\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; determinare

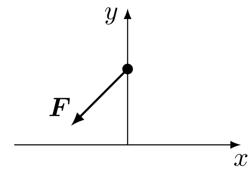
a) quanto vale E per $d_2 = 43\,\mathrm{cm}$;

b) quanto vale il campo generato da una carica $3Q$ a distanza $d = 52\,\mathrm{cm}$.

●●○ **Es. 7** — Un corpo di massa m e carica $q = -800\,\mathrm{nC}$ è soggetto al peso e ad un campo elettrico $\boldsymbol{E} = (E, 0)$. Sapendo che la forza risultante forma con la verticale un angolo $\alpha = 45°$ come rappresentato in figura e che il suo modulo è $F = 0.050\,\mathrm{N}$ si determinino:

a) modulo e verso del campo elettrico;

b) la massa m.



●○○ **Es. 8** — Un corpo inizialmente scarico viene elettrizzato per strofinio fino ad avere la carica $q = +12\,\mu\mathrm{C}$; determinare il numero di elettroni sottratti al corpo.

●○○ **Es. 9** — Due sfere identiche A e B hanno inizialmente cariche $Q_A = 7q$ e $Q_B = -4q$; determinare la carica di ciascuna di esse dopo che sono messe a contatto.

●○○ **Es. 10** — Due cariche $q_1 = q$ e $q_2 = -2q$ si trovano a distanza $d = 20\,\mathrm{cm}$; determinare in quale punto il campo elettrico è nullo.

●○○ **Es. 11** — Due cariche discordi si attirano una forza di modulo $F = 2.4\,\mathrm{N}$; determinare il modulo della forza di attrazione se la distanza fra le cariche viene dimezzata.

●○○ **Es. 12** — Un elettrone si trova, inizialmente fermo nell'origine di un sistema di assi cartesiani, in un campo elettrico costante, diretto nel verso delle x positive, avente modulo $E = 6.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ si determini modulo direzione e verso dell'accelerazione dell'elettrone.

●○○ **Es. 13** — Due cariche $Q_1 = -5.0\,\mu\mathrm{C}$ e $Q_2 = 6.0\,\mu\mathrm{C}$ distano $d = 20\,\mathrm{cm}$. Determinare modulo, direzione e verso della forza agente sulla carica $q = 2.0\,\mathrm{nC}$ che si trova nel punto medio delle due cariche.

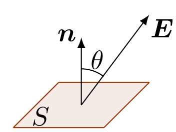
●○○ **Es. 14** — Due cariche $Q_1 = -3.3\,\mu\mathrm{C}$ e $Q_2 = 5.6\,\mu\mathrm{C}$ si trovano, rispetto ad un sistema di assi cartesiani, rispettivamente nei punti $(-d, 0)$ e $(0, -d)$, con $d = 20\,\mathrm{cm}$. Determinare le componenti e il modulo della forza agente sulla carica $q = 2\,\mathrm{nC}$ che si trova nell'origine.

●○○ **Es. 15** — Un corpo di massa $m = 20\,\mathrm{g}$ si trova in un campo elettrico uniforme volto verso l'alto di modulo $E = 45 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; determinare la carica che deve trovarsi sul corpo perché rimanga sospeso a mezz'aria.

●○○ **Es. 16** — La carica $Q = -5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$ si trova al centro di un cubo; determinare il flusso del campo elettrico attraverso una delle facce del cubo.

●○○ **Es. 17** — Quando le due cariche q_1 e q_2 si trovano a distanza d_1 la forza di Coulomb con cui interagiscono ha modulo $F_1 = 536\,\mathrm{N}$, quando si trovano a distanza d_2 la forza di Coulomb ha modulo $F_2 = 324\,\mathrm{N}$; determinare il rapporto r_1/r_2.

●●○ **Es. 18** — La superficie quadrata S di lato $\ell = 3.5\,\mathrm{cm}$ si trova in un campo elettrico uniforme di modulo $E = 1500\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ formante l'angolo $\theta = 25°$ con il versore perpendicolare alla superficie, come in figura. Determinare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie.



●●○ **Es. 19** — La carica $Q = 500\,\mathrm{nC}$ si trova nel centro di una superficie semisferica S; determinare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie S.

●●○ **Es. 20** — Un protone orbita attorno ad una sfera conduttrice carica, muovendosi con velocità di modulo $v = 4.5 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ lungo un circonferenza di raggio $r = 3.0\,\mathrm{cm}$; determinare la carica della sfera.

●●○ **Es. 21** — In un punto della superficie di un conduttore carico una carica $q = 5.0\,\mathrm{nC}$ subisce una forza attrattiva verso il conduttore di modulo $F = 2 \cdot 10^7\,\mathrm{N}$. Determinare la densità superficiale di carica del conduttore.

●●○ **Es. 22** — Due cariche che si trovano a distanza $d = 25\,\mathrm{cm}$ si attirano con una forza di modulo $F = 42\,\mathrm{N}$; sapendo che la somma delle cariche è $Q = 32\,\mathrm{\mu C}$ determinare il valore delle due cariche.

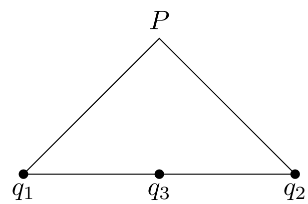
●●○ **Es. 23** — Una superficie circolare S di raggio $r = 15\,\mathrm{cm}$ si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo elettrico uniforme di modulo $E = 5.3 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; sapendo che il campo elettrico forma un angolo di $\theta = 25°$ con il piano della superficie, determinare il flusso di $\boldsymbol{E}$ attraverso S.

●●○ **Es. 24** — Due cariche $Q_1 = 2.0\,\mathrm{\mu C}$, $Q_2 = -4.0\,\mathrm{\mu C}$ sono fissate rispetto ad un sistema di assi cartesiani rispettivamente nei punti di coordinate $(d, 0)$ e $(0, d)$; sapendo che $d = 2.0\,\mathrm{cm}$,

a) determinare le componenti del vettore campo elettrico nell'origine;
b) determinare il modulo della forza di Coulomb agente su una carica $q = -6.5 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ posta nell'origine.

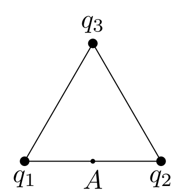
●●○ **Es. 25** — Il triangolo in figura è rettangolo e isoscele, i cateti misurano $\ell = 40\,\mathrm{cm}$; agli estremi e sul punto medio dell'ipotenusa si trovano le cariche $q_1 = q_2 = 200\,\mathrm{nC}$ e $q_3 = -150\,\mathrm{nC}$; determinare

a) il modulo del campo elettrico nel punto P;
b) il modulo del campo elettrico nel punto P se q_2 cambia segno.



●●○ **Es. 26** — Il lato del triangolo equilatero in figura misura $\ell = 50\,\mathrm{cm}$; ai suoi vertici si trovano le cariche $q_1 = -q_2 = 40\,\mathrm{nC}$ e $q_3 = 2q_1$;

a) il modulo del campo elettrico nel punto medio A della base;
b) il modulo dell'accelerazione subita da una carica $q = 1.0\,\mathrm{\mu C}$ di massa $m = 2.0\,\mathrm{mg}$.



●●○ **Es. 27** — Ai vertici di un triangolo equilatero di lato $\ell = 60\,\mathrm{cm}$ si trovano tre cariche lati che valgano $q_1 = q_2 = -100\,\mathrm{nC}$ e $q_3 = -2q_1$; al centro del triangolo si trova una carica $q = 120\,\mathrm{nC}$ di massa $m = 0.8\,\mathrm{g}$. Trascurando il peso di q,

a) determinare il modulo e verso dell'accelerazione di q;
b) come cambia l'accelerazione se q ha segno opposto.

●●○ **Es. 28** — Una carica $Q = 500\,\mathrm{nC}$ genera in un punto P a distanza d un campo elettrico di modulo $E = 2000\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; determinare

a) la distanza d;
b) a che distanza D da Q va posta una seconda carica q, uguale alla prima in valore e segno affinché il campo elettrico totale in P sia nullo.

●●○ **Es. 29** — Un corpo di massa $m = 0.620\,\mathrm{g}$ e carica $q = 500\,\mathrm{nC}$ è accelerato verso il basso con un'accelerazione di modulo $a = 5.40\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; determinare

a) il modulo e il verso del campo elettrico nel punto in cui si trova la carica;
b) il modulo dell'accelerazione del corpo se si cambia il verso del campo elettrico mantenendo la stessa direzione.

●●○ **Es. 30** — Due gusci sferici metallici concentrici di raggio $r_1 = 3.2\,\mathrm{cm}$ e $r_2 = 9.8\,\mathrm{cm}$ sono ambedue carichi; il più interno ha densità superficiale $\sigma_1 = 0.6366\,\mathrm{\mu C\,m^{-2}}$;

a) determinare il modulo del campo elettrico a distanza $d_1 = 2.5\,\mathrm{cm}$ e a $d_2 = 6.5\,\mathrm{cm}$ dal centro;
b) sapendo che il modulo del campo elettrico a distanza $D = 10\,\mathrm{cm}$ è $E = 90000\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, quanto vale la densità superficiale σ_2 della carica sulla sfera esterna.

●●○ **Es. 31** — La Terra genera un campo elettrico diretto verso il centro, di modulo approssimativamente costante pari a $E = 150\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; sapendo che il raggio medio della Terra è $R_T = 6371\,\mathrm{km}$, determinare la carica totale contenuta all'interno della Terra.

●●○ **Es. 32** — Il modulo del campo elettrico terrestre al livello del mare è $E = 150\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ ed è diretto verso il basso; determinare quale carica dovrebbe avere un corpo di massa $m = 10\,\mathrm{g}$ per restare sospeso a mezz'aria.

●●● **Es. 33** — Due superfici sferiche conduttrici concentriche hanno raggi $r_1 = 3.4\,\mathrm{C}$ e $r_2 = 9.0\,\mathrm{cm}$. Determinare le cariche che si trovano sulle due superfici sferiche se il campo elettrico è nullo per $r > r_2$ e vale $E = 25 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ per $r = 5.5\,\mathrm{cm}$ ed è diretto verso il centro comune delle due superfici sferiche.

●●● **Es. 34** — In una regione di spazio in cui vi è un campo elettrico uniforme diretto verso l'alto si trova un cubo di lato $\ell = 30\,\mathrm{cm}$. Sulla faccia superiore del cubo si misura un campo elettrico di modulo $E_a = 30\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ ed è diretto verso l'alto; su quella inferiore ha modulo $E_b = 20\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ ancora diretto verso l'alto. Determinare quanta carica è contenuta nel cubo;

●●● **Es. 35** — Una sfera di raggio $r = 10\,\mathrm{cm}$ è carica uniformemente su tutto il suo volume con densità volumetrica $\rho = 300\,\mathrm{nC}$; determinare il modulo del campo elettrico a $d_1 = 5.0\,\mathrm{cm}$ dal centro e a $d_2 = 15\,\mathrm{cm}$ dal centro.

●●● **Es. 36** — Una sfera carica con densità $\rho = 0.3\,\mathrm{\mu C\,m^{-3}}$ ha raggio $r = 2.0\,\mathrm{cm}$; essa è posta all'interno di, e concentrica a, una sfera metallica cava di raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$, carica con una densità superficiale $\sigma = 0.3184\,\mathrm{nC\,m^{-2}}$; determinare il modulo del campo elettrico

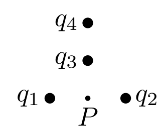
a) nel centro della sfera;
b) a distanza $d = 6.0\,\mathrm{cm}$;
c) a distanza $D = 50\,\mathrm{cm}$.

●●○ **Es. 37** — Tre cariche puntiformi $Q_1 = Q_2 = -Q_3 = 2.8\,\mathrm{\mu C}$ sono fissate rispetto ad un sistema di assi cartesiani rispettivamente nei punti di coordinate $(-d, 0)$, $(d, 0)$ e $(0, d)$, con $d = 3.2\,\mathrm{cm}$;

1. determinare le componenti del vettore campo elettrico nell'origine;
2. determinare il modulo della forza di Coulomb agente sulla carica Q_3 dovuta alla presenza delle cariche Q_1 e Q_2.

●●○ **Es. 38** — Due cariche $Q_1 = 8\,\mathrm{\mu C}$, $Q_2 = -2\,\mathrm{\mu C}$ sono fissate rispetto ad un sistema di assi cartesiani rispettivamente nei punti di coordinate $(-d, 0)$ e $(2d, 0)$ con $d = 20\,\mathrm{cm}$; determinare l'ascissa del punto sulla retta che unisce le due cariche in cui il campo elettrico è nullo.

●●○ **Es. 39** — Determinare le componenti del campo elettrico nel punto P dovuto alla presenza delle cariche $q_1 = 2.0\,\mathrm{nC}$, $q_2 = -3.0\,\mathrm{nC}$, $q_3 = 4.0\,\mathrm{nC}$ e $q_4 = -12.0\,\mathrm{nC}$, disposte come in figura, sapendo che le distanze fra q_1 e P, fra q_2 e P, fra q_3 e P e fra q_4 e q_3 sono tutte uguali a $d = 20\,\mathrm{cm}$.



●●○ **Es. 40** — Quattro cariche elementari di uguale intensità $Q = 4.2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ si trovano ai vertici di un quadrato di lato $\ell = 2.5\,\mathrm{cm}$; sapendo che tre cariche sono positive e una è negativa, determinare

a) il modulo del campo elettrico al centro del quadrato;
b) le componenti della forza di Coulomb agente su una carica $q = -2.1 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}$ posta nel centro.

●●○ **Es. 41** — Una carica puntiforme $q = -4.8\,\mu\mathrm{C}$, si trova nell'origine di un sistema di assi cartesiani; in quella regione di spazio vi è un campo elettrico uniforme di componenti $\boldsymbol{E} = (0, E)$ con $E = 52 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; determinare le coordinate del punto in cui il campo elettrico è nullo.

●●○ **Es. 42** — Un filo indefinito è carico con carica positiva distribuita uniformemente con densità lineare λ; determinare il modulo del campo elettrico in funzione della distanza d dal filo.

●●○ **Es. 43** — Determinare la forza per unità di superficie con cui si respingono due piani indefiniti paralleli carichi con la stessa densità superficiale di carica σ.

●●○ **Es. 44** — L'acqua è una molecola polare in cui, cioè, la carica positiva e negativa hanno centri diversi con momento di dipolo elettrico di modulo $p = 6.1 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{C\,m}$. Una tale molecola si trova in un campo elettrico uniforme di modulo $E = 5.2 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,C^{-1}}$. Determinare il modulo del momento delle forze agenti sulla molecola d'acqua nei casi in cui:

a) il momento di dipolo sia parallelo al campo elettrico;
b) il momento di dipolo sia perpendicolare al campo elettrico;
c) l'angolo fra momento di dipolo e campo elettrico sia $\alpha = 35°$.

●●○ **Es. 45** — Un dipolo elettrico è immerso in un campo elettrico costante di modulo $E = 400\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; sapendo che, al variare dell'angolo θ compreso fra $\boldsymbol{E}$ il momento di dipolo $\boldsymbol{p}$, il valore massimo del modulo del momento della coppia di forze agente è $M_0 = 5 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{N\,m}$; determinare

a) il modulo di $\boldsymbol{p}$;
b) il modulo di $\boldsymbol{M}$ quando $\theta = 50°$.

●●● **Es. 46** — La carica $Q = 5.24\,\mu\mathrm{C}$ viene divisa in due parti che vengono poste ad una distanza $d = 20.5\,\mathrm{cm}$; determinare il modulo massimo della forza di Coulomb di repulsione fra le due parti.

●●● **Es. 47** — Nel modello di Bohr per l'atomo di idrogeno un elettrone percorre un orbita circolare di raggio $r = 0.529\,\mathrm{Å}$ attorno ad un protone; determinare la velocità orbitale dell'elettrone.

●●● **Es. 48** — Due sfere identiche che si trovano a distanza $d = 20\,\mathrm{cm}$ si attirano con una forza di modulo $F_1 = 0.54\,\mathrm{N}$; quindi vengono messe a contatto e riportate a distanza d: il modulo della forza di repulsione è ora $F_2 = 0.18\,\mathrm{N}$. Determinare le cariche iniziali delle due sfere.

●●● **Es. 49** — Ai vertici di un quadrato sono disposte le cariche q_1, q_2, q_3, q_4 in modo che valga la relazione $q_1 = q_3 = 8.1 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ siano su vertici opposti; sia inoltre $q_2 = q_4$; sapendo che il modulo della forza elettrica agente su q_1 e q_3 è nulla, determinare il valore di q_2 e q_4.

●●● **Es. 50** — $\star$ Due cariche uguali sono collocate sull'asse delle y di un sistema di assi cartesiani simmetricamente rispetto all'origine a distanza $d = 15.0\,\text{cm}$; determinare

a) in quale punto del semiasse positivo delle x il campo elettrico è minimo;

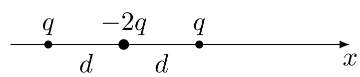
b) in quale punto è massimo.

●●● **Es. 51** — Due sfere hanno cariche $q_1 = -q_2 = 5.2\,\mu\text{C}$ sono trattenute da due molle identiche ad una distanza $d = 2.5\,\text{cm}$; sapendo che quando le due sfere sono scariche la loro distanza è $D = 4\,\text{cm}$ determinare la costante elastica κ delle molle.

●●● **Es. 52** — All'istante $t = 0\,\text{s}$ un elettrone si trova nell'origine di un sistema di assi cartesiani con velocità $\boldsymbol{v} = (v_0, 0)$, con $v_0 = 5.3 \cdot 10^6\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$; l'elettrone si trova in una regione di spazio dove è presente un campo elettrico generato da un piano indefinito con densità superficiale di carica σ; sapendo che dopo un certo tempo l'elettrone passa per il punto $P(x, y)$, con $x = 2.5\,\text{cm}$ e $y = 0.5\,\text{cm}$, determinare l'istante t in cui l'elettrone passa per P e il valore di σ.

●●● **Es. 53** — Due sferette di massa $m = 150\,\text{g}$ sono attaccate a due fili di lunghezza $\ell = 120\,\text{cm}$ e su di esse si trova la stessa carica $q = 0.45\,\mu\text{C}$; determinare la distanza x delle due cariche all'equilibrio, nell'approssimazione in cui l'angolo θ formato dai due fili sia sufficientemente piccolo da poter approssimare $\cos\theta \simeq 1$.

●●● **Es. 54** — Determinare il campo elettrico di un *quadrupolo*, costituito da due dipoli affiancati con momenti di dipolo opposti come rappresentato in figura, in un punto sull'asse di simmetria del quadrupolo di ascissa $x \gg d$. Esprimere il risultato in termini del momento di quadrupolo $p_q = qd^2$.

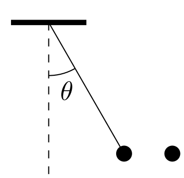


●●● **Es. 55** — Ripetere l'esercizio precedente nel caso in cui le cariche dei due dipoli opposti siano disposti a formare un quadrato di lato d.

●●● **Es. 56** — Una sferetta di massa $m = 150\,\text{g}$ è attaccata ad un filo e su di essa si trova la carica $q_1 = 1.28\,\mu\text{C}$; una seconda sferetta, disposta come in figura a distanza $d = 20\,\text{cm}$ dalla prima, ha la carica $q_2 = -1.70\,\mu\text{C}$; determinare

a) l'angolo θ;

b) la tensione τ del filo.



●●● **Es. 57** — Utilizzare la legge di Gauss per determinare come varia il campo elettrico all'interno di una sfera di raggio R in cui si trovi una carica Q distribuita uniformemente sull'intero volume, al variare della distanza r dal centro.

●●● **Es. 58** — Due superfici sferiche concentriche hanno raggi $r = 10\,\text{cm}$ e $R = 25\,\text{cm}$; sulla prima si trova, distribuita uniformemente, la carica $Q_1 = -5.2 \cdot 10^{-6}\,\text{C}$ sulla seconda la carica $Q_2 = 4.5 \cdot 10^{-6}\,\text{C}$; determinare modulo direzione e verso del campo elettrico per

a) $r_1 = 5\,\text{cm}$;

b) $r_2 = 20\,\text{cm}$;

c) $r_3 = 30\,\text{cm}$.

●●● **Es. 59** — ⋆ Dimostrare che il modulo del campo elettrico prodotto da un anello di carica Q e raggio R nei punti del suo asse è dato da

$$E = k\,\frac{Qx}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

ove x è la distanza dal centro dell'anello. Utilizzare il risultato per provare a determinare la pulsazione di oscillazione di un elettrone vincolato a stare sull'asse dell'anello, nell'approssimazione $z \ll R$.

Il potenziale elettrico e l'energia elettrostatica

●○○ **Es. 1** — Sapendo che il potenziale elettrico in P vale $\phi(P) = 25\,\mathrm{V}$, determinare il lavoro fatto dalle forze elettriche per spostare la carica $q = -8.2\,\mu\mathrm{C}$ dall'infinito al punto P.

●○○ **Es. 2** — Determinare il lavoro fatto contro le forze elettriche per spostare la carica $q = 5.4\,\mu\mathrm{C}$ dall'infinito ad un punto P ove il potenziale elettrico vale $\phi(P) = 75\,\mathrm{V}$.

●○○ **Es. 3** — Determinare, joule ed in elettronvolt, l'energia cinetica finale di un elettrone che, in un tubo catodico viene accelerato dalla differenza di potenziale $\Delta\phi = 20 \cdot 10^3\,\mathrm{V}$.

●○○ **Es. 4** — Determinare il potenziale elettrico a distanza $d = 4.0 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$ da un protone.

●○○ **Es. 5** — In una particella α vi sono due protoni a distanza $d = 4 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$; determinare l'energia elettrostatica della particella α (si può usare il risultato dell'esercizio precedente).

●○○ **Es. 6** — A distanza $d = 25\,\mathrm{cm}$ dalla carica Q si misura un potenziale elettrico $\phi = 100\,\mathrm{V}$; determinare Q.

●○○ **Es. 7** — Un piano conduttore indefinito è carico con la densità superficiale di carica uniforme $\sigma = 5.0\,\mu\mathrm{C}$ determinare la differenza di potenziale fra il punto P che si trova a distanza $d = 20\,\mathrm{cm}$ dal piano e un punto sul piano.

●○○ **Es. 8** — Determinare la differenza di potenziale a cui si deve sottoporre una particella α perché raggiunga l'energia $\mathcal{E} = 2.5\,\mathrm{MeV}$.

●○○ **Es. 9** — Il punto A dista $d_A = 54\,\mathrm{cm}$ dalla carica Q, mentre il punto B ne dista $d_B = 26\,\mathrm{cm}$; sapendo che $Q = -62\,\mathrm{nC}$, determinare la differenza di potenziale fra A e B.

●○○ **Es. 10** — Le due cariche opposte q_1 e q_2 si trovano a distanza $d = 60\,\mathrm{cm}$;

a) determinare il modulo del campo elettrico e il potenziale elettrico nel loro punto medio;
b) stabilire cosa cambia se le due cariche sono uguali.

●○○ **Es. 11** — Si determini il lavoro compiuto dal campo elettrico generato dalla carica $Q = 5.2\,\mu\mathrm{C}$, che si trovi nell'origine di un sistema assegnato di assi cartesiani, su una seconda carica $q = -2.4\,\mu\mathrm{C}$ che si sposta dal punto $A(3.2, 4.4)$ al punto $B(5.0, 12)$ (le coordinate si intendono espresse in centimetri).

●○○ **Es. 12** — Le due cariche $q_1 = -2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ e $q_2 = 5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$ si trovano a distanza $d = 21\,\mathrm{cm}$.

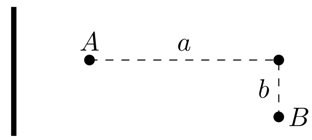
a) Determinare a che distanza x da q_1 si trova il punto del segmento che congiunge le due cariche in cui il potenziale elettrostatico è nullo. In tale punto è nullo anche il campo elettrico?
b) Stabilire se esistono altri punti nello spazio circostante in cui il potenziale è nullo.
c) Stabilire come cambia la risposta a) nel caso in cui q_2 sia negativa.

●○○ **Es. 13** — Due cariche $q_1 = 200\,\mathrm{nC}$ e $q_2 = -120\,\mathrm{nC}$ si trovano a distanza $d = 30.0\,\mathrm{cm}$; determinare

a) la distanza x di q_1 dal punto P sul segmento che le congiunge in cui il potenziale elettrico è nullo;
b) il lavoro fatto dalle forze elettriche per portare una carica $q = 50\,\text{nC}$ da P a distanza infinita.
c) il lavoro dalle forze elettriche per portare q da P a M, punto medio del segmento congiungente q_1 e q_2.

●○○ **Es. 14** — Due cariche $Q_1 = -Q_2 = 3\,\mu\text{C}$ sono fissate rispetto ad un sistema di assi cartesiani nei punti di coordinate (espresse in centimetri) $(2, 0)$ e $(-2, 0)$; determinare il lavoro compiuto dal campo elettrico generato dalle due cariche per spostare la carica $q = -6 \cdot 10^{-9}\,\text{C}$ dall'origine al punto di coordinate $(0, 3)$.

●○○ **Es. 15** — Un piano indefinito è carico con densità superficiale $\sigma = 6.2 \cdot 10^{-2}\,\text{C}\,\text{m}^{-2}$; determinare il lavoro compiuto dal campo elettrico generato dal piano per spostare la carica $q = -4\,\mu\text{C}$ dal punto B al punto A rappresentati in figura, con $a = 2.5\,\text{cm}$, $b = 0.75\,\text{cm}$, .



●○○ **Es. 16** — Un rettangolo ha un lato il doppio dell'altro; due cariche q uguali sono poste nei due estremi di uno dei due lati minori; determinare la carica Q che va posta in uno dei rimanenti vertici perché nel quarto vertice il potenziale sia nullo.

●○○ **Es. 17** — Due cariche $q_1 = q = 5.5 \cdot 10^{-9}\,\text{C}$ e $q_2 = -2q$ (si veda esercizio 10 di pagina 50) si trovano ad una distanza $d = 20\,\text{cm}$. Determinare l'energia elettrostatica del sistema.

●○○ **Es. 18** — Determinare la velocità, in $\text{m}\,\text{s}^{-1}$, di un protone la cui energia cinetica è $\mathcal{E} = 20\,\text{MeV}$.

●○○ **Es. 19** — L'ammoniaca è una molecola dipolare il cui momento di dipolo vale $p = 4.9 \cdot 10^{-30}\,\text{C}\,\text{m}$; determinare il potenziale elettrico dovuto ad una molecola di ammoniaca a distanza $d = 50\,\text{nm}$ lungo l'asse del dipolo.

●○○ **Es. 20** — Determinare l'energia elettrostatica di due elettroni posti a distanza $d = 75\,\text{nm}$; stabilire come cambia tale energia se la distanza raddoppia.

●●○ **Es. 21** — Un elettrone parte dall'infinito con velocità di modulo v e si ferma nel punto medio del segmento formato da due elettroni distanti $d = 50\,\text{cm}$; determinare v.

●●○ **Es. 22** — Il lavoro fatto da una forza esterna per spostare la carica $q = -5.0\,\mu\text{C}$, inizialmente ferma, da A a B è $\mathcal{L} = 75\,\text{mJ}$; sapendo che l'energia cinetica finale della carica è $\mathcal{E} = 30\,\text{mJ}$, determinare la differenza di potenziale fra A e B.

●●○ **Es. 23** — Determinare il lavoro che una forza esterna deve compiere per portare tre elettroni dall'infinito ai vertici di un triangolo equilatero di lato $\ell = 5.0\,\text{nm}$.

●●○ **Es. 24** — In una regione di spazio dove è presente un campo elettrico costante di componenti $\boldsymbol{E} = \big(E, 0, 0\big)$, con $E = 2.5 \cdot 10^4\,\text{N}\,\text{C}^{-1}$, determinare la differenza di potenziale fra i punti $A(0, 3.5\,\text{cm}, 0)$ e $B(4.5\,\text{cm}, 0, 0)$.

●●○ **Es. 25** — Con riferimento alla configurazione di cariche delle esercizio 39 a pagina 53, determinare il potenziale elettrico nel punto P.

●●○ **Es. 26** — Due cariche q_1 e q_2 sono distanti d e sono tali che il campo elettrico da esse generato è nullo in un punto del segmento che le unisce a distanza $d/4$ da q_1; stabilire se esiste e dove si trova il punto P in cui il potenziale elettrico è nullo.

●●○ **Es. 27** — Una goccia di mercurio ha una carica q e sulla superficie si misura il potenziale elettrico $\phi_1 = 120\,\mathrm{V}$. Se la goccia si unisce ad una seconda goccia identica per raggio e carica e formare una nuova goccia sferica, determinare il potenziale elettrico ϕ_2 sulla superficie della nuova sfera.

●●○ **Es. 28** — Una superficie sfera metallica ha raggio $R = 8.0\,\mathrm{cm}$. In un punto A che si trova a distanza $r = 15\,\mathrm{cm}$ dal centro il potenziale elettrico è $\phi = -2.7 \cdot 10^3$ volt. Determinare

a) la densità di carica della sfera;
b) il modulo del campo elettrico e il potenziale elettrostatico nel centro;
c) il lavoro compiuto dalle forze elettriche per portare la carica $q = -12\,\mathrm{nC}$ dal centro alla superficie della sfera.

●●○ **Es. 29** — Data una sfera conduttrice di raggio $R = 7.0\,\mathrm{cm}$ e carica $Q = -300\,\mathrm{nC}$; determinare

a) il potenziale a distanza $r_1 = 3.0\,\mathrm{cm}$ dal centro, sulla superficie e a distanza $r_2 = 12\,\mathrm{cm}$ dal centro;
b) il campo elettrico a distanza r_1 dal centro, sulla superficie e a distanza r_2 dal centro;
c) il lavoro compiuto dalle forze elettriche per avvicinare la carica $q = 50\,\mathrm{nC}$ da un punto che si trovi ad una distanza $d_1 = 70\,\mathrm{cm}$ fino ad un punto che si trovi alla distanza $d_2 = 25\,\mathrm{cm}$.

●●○ **Es. 30** — Una sfera conduttrice ha raggio $R = 12\,\mathrm{cm}$ e carica Q; spostando la carica $q = -50\,\mathrm{nC}$ dalla distanza $r_1 = 80\,\mathrm{cm}$ dal centro alla distanza finale di $r_2 = 25\,\mathrm{cm}$, le forze elettriche compiono un lavoro $\mathcal{L} = 5.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$. Determinare

a) la carica Q e la densità superficiale di carica σ;
b) il modulo del campo elettrico sulla superficie della sfera;
c) il potenziale elettrostatico nel suo centro.

●●○ **Es. 31** — Una sfera conduttrice di raggio $r = 6.2\,\mathrm{cm}$ ha una densità di carica superficiale pari a $\sigma = 16\,\mathrm{\mu C\,m^{-2}}$. Per portare una carica q dalla distanza $d_1 = 12\,\mathrm{cm}$ alla distanza $d_2 = 48\,\mathrm{cm}$ dal centro della sfera le forze elettriche compiono il lavoro $\mathcal{L} = 2.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$; determinare q.

●●○ **Es. 32** — Una sfera conduttrice di raggio $R = 7.5\,\mathrm{cm}$ ha una densità di carica superficiale pari a $\sigma = 150\,\mathrm{\mu C}$; determinare

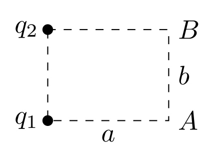
a) il potenziale elettrico ed il modulo del campo elettrico nel centro e sulla superficie della sfera;
b) il lavoro che le forze elettriche devono compiere per portare un elettrone dalla superficie della sfera a distanza infinita.

●●● **Es. 33** — Sono date due sfere metalliche concentriche, l'esterna è cava, di raggi $r_1 = 6.0\,\mathrm{cm}$ e $r_2 = 12\,\mathrm{cm}$; il potenziale elettrico nel centro è $\phi_0 = -1.6 \cdot 10^4\,\mathrm{V}$.

a) Determinare il modulo del campo elettrico a distanza $d_1 = 10\,\mathrm{cm}$ dal centro.
b) Sapendo che il campo elettrico è nullo a distanza $d_2 = 50\,\mathrm{cm}$ dal centro, determinare la densità superficiale presente sulla sfera esterna.
c) Determinare il potenziale elettrico a distanza d_2 dal centro.

●●○ **Es. 34** — Due cariche $q_1 = -20\,\mathrm{nC}$ e $q_2 = 50\,\mathrm{nC}$ sono disposte, come in figura, nei due vertici di un rettangolo di lati $a = 4.0\,\mathrm{m}$ e $b = 3.0\,\mathrm{m}$ determinare il lavoro compiuto dal campo elettrico generato dal piano per spostare la carica $q = -4\,\mathrm{\mu C}$ dal punto A al punto B.

a) determinare il potenziale elettrico nei punti A e B
b) determinare il lavoro fatto dalle forze elettriche per portare la carica $q = -500\,\mathrm{nC}$ da A a B.



●●○ **Es. 35** — Con riferimento al sistema dell'esercizio 26 di pagina 51, si determini lavoro che le forze elettriche compiono per spostare la carica di $q = -2\,\mathrm{nC}$ dal punto A all'infinito.

●●○ **Es. 36** — Tre cariche $q_1 = q_2 = 200\,\mathrm{nC}$ e $q_3 = 150\,\mathrm{nC}$ sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero di lato $\ell = 50\,\mathrm{cm}$; determinare

a) il potenziale elettrico nel centro del triangolo;

b) determinare il valore che deve avere q_3 perché il potenziale elettrico sia nullo al centro del triangolo.

●●○ **Es. 37** — Si consideri la Terra come una sfera conduttrice; sapendo che sulla superficie terrestre è presente un campo elettrico di modulo $E = 150\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ diretto verso il centro (si ricordi l'esercizio 31 di pagina 52), e che il raggio della Terra è $R = 6371\,\mathrm{km}$, determinare il potenziale elettrico al centro della Terra.

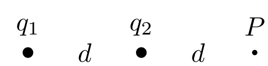
●●● **Es. 38** — Per il modello di Bohr un atomo di elio ionizzato una volta possiede un unico elettrone che si muove lungo un'orbita circolare di raggio $r_0 = 2.65 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$, con centro nel nucleo; determinare l'energia di seconda ionizzazione dell'elio.

●●○ **Es. 39** — Tre cariche del valore di $q_1 = 1.0\,\mathrm{\mu C}$, $q_2 = -2q_1$ e $q_3 = 3q_1$ si trovano ai vertici di un triangolo equilatero di lato $\ell = 10\,\mathrm{cm}$. Determinare l'energia elettrostatica del sistema.

●○○ **Es. 40** — Si consideri un piano indefinito di densità di carica superficiale $\sigma = 53 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C\,m^{-2}}$; determinare a che distanza si trovano due piani equipotenziali che abbiano una differenza di potenziale $\Delta\phi = 25\,\mathrm{V}$.

●○○ **Es. 41** — Determinare il lavoro compiuto dal campo elettrico generato dalla carica elementare $Q = 6.3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ per spostare la carica $q = 2.7 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ dal punto A al punto B sapendo che le distanze di Q dai punti A e B sono rispettivamente $d_A = 10\,\mathrm{cm}$ e $d_B = 15\,\mathrm{cm}$, come rappresentato in figura. Determinare quindi la differenza di potenziale $\Delta\phi_{AB}$.

●○○ **Es. 42** — Determinare il lavoro compiuto dalle forze elettriche per spostare la carica $q = 200\,\mathrm{nC}$ dall'infinito al punto P come rappresentato in figura, sapendo che $q_1 = 4.0\,\mathrm{\mu C}$ e $q_2 = 2.0\,\mathrm{\mu C}$ e che $d = 30\,\mathrm{cm}$; determinare quindi l'energia elettrostatica della configurazione cosí ottenuta.



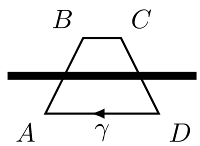
●●○ **Es. 43** — Secondo il modello standard delle particelle elementari, un neutrone è costituito da due *quark down*, di carica $-e/3$ e da un *quark up* di carica $+2e/3$; un protone invece è costituto da due *quark up* e un *quark down*. Supponendo che la distanza fra i quark all'interno dei nucleoni sia $d = 2.5 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$, determinare l'energia elettrostatica del neutrone e del protone.

●●○ **Es. 44** — Una particella α si trova in un campo elettrico costante di modulo $E = 5.6 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; sapendo che parte da ferma e che la differenza di potenziale fra la posizione iniziale e finale è $\Delta\phi = 120\,\mathrm{V}$ determinare lo spazio percorso e la velocità finale della particella α.

●●○ **Es. 45** — Un protone viene lanciato con velocità iniziale $v = 4.3 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ contro una particella α ferma; determinare a che distanza dalla particella α il protone si ferma.

●●○ **Es. 46** — Un telefono portatile consuma la potenza $P = 2.1\,\mathrm{W}$ ed è alimentato da una batteria ricaricabile che fornisce la differenza di potenziale $\Delta\phi = 3.8\,\mathrm{V}$; sapendo che la durata media di una carica del telefono è $t = 36\,\mathrm{h}$, determinare quanti elettroni attraversano i terminali della batteria in questo intervallo di tempo.

●●● **Es. 47** — Verificare la legge della circuitazione (4.8) nel caso del campo elettrico generato da un piano conduttore indefinito carico positivamente per la curva chiusa γ rappresentata in figura.



●●● **Es. 48** — La carica q_1 si trova nel punto di coordinate $(2, 0)$ e la carica q_2 si trova nel punto di coordinate $(-2, 0)$; sapendo che $q_2 = -2q_1$ determinare tutti i punti in cui il potenziale è nullo.

●●● **Es. 49** — ⋆ Determinare il potenziale elettrico, al variare della distanza dal centro, all'interno di una sfera di raggio R in cui si trovi una carica Q distribuita uniformemente sull'intero volume (si utilizzi il risultato dell'esercizio 57 di pagina 54).

●●● **Es. 50** — Con riferimento all'esercizio 54 di pagina 54, determinare il potenziale di un quadrupolo in un punto sull'asse di simmetria di ascissa $x \gg d$.

●●● **Es. 51** — ⋆ Una sfera di raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$ ha potenziale elettrico uguale a $\phi_1 = 50\,\mathrm{V}$ nel centro e a $\phi_2 = 100\,\mathrm{V}$ sulla superficie esterna; nei punti interni il potenziale elettrico varia con il raggio secondo la legge $\phi(r) = \phi_1 + \frac{r}{R}\left(\phi_2 - \phi_1\right)$. Stabilire se la sfera è conduttrice o isolante e determinare il modulo, direzione e verso del campo elettrico all'interno della sfera.

●●● **Es. 52** — ⋆ Il modulo di un campo elettrico varia con la distanza r da un centro secondo la legge $E(r) = a/r^4$, ove $a = 500\,\mathrm{V\,m^3}$; sapendo che il verso del campo è centrifugo, determinare la differenza di potenziale elettrico fra il punto B distante $r_B = 50.0\,\mathrm{cm}$ dal centro, e il punto A distante $r_A = 20.0\,\mathrm{cm}$ dal centro.

●●● **Es. 53** — ⋆ Determinare il potenziale elettrico dovuto ad un anello di carica Q e raggio R nei punti del suo asse (fare riferimento all'esercizio 59 di pagina 55).

●●● **Es. 54** — Un conduttore ha la forma di un anello a cui manca un arco corrispondente ad un angolo $\alpha = 45°$; sapendo che la densità di carica lineare è λ e che il raggio dell'anello è R, determinare il potenziale nel centro.

●●● **Es. 55** — ⋆ Nel modello atomico proposto in un articolo del 1911 (che si può trovare al sito `http://www.lawebdefisica.com/arts/structureatom.pdf`), Rutherford considera l'atomo costituito da un nucleo centrale di carica Ze nel centro di una carica negativa $-Ze$ distribuita uniformemente all'interno di una sfera di raggio R; suppone inoltre che il potenziale elettrico sia nullo sulla superficie della sfera, invece che all'infinito. Determinare il modulo del campo elettrico e il valore del potenziale elettrico per $r < R$ e confrontarli con le formule riportate nell'articolo originale citato sopra. Si noti che nell'articolo di Rutherford il numero atomico è indicato con N invece che con Z e le grandezze sono espresse in unità elettrostatiche (*esu*, invece che nel sistema internazionale SI), nelle quali vale $k = 1$; inoltre il campo elettrico è indicato con X e il potenziale con V.

Condensatori

●○○ **Es. 1** — Un condensatore sferico ha le armature di raggi $r_1 = 1.0\,\mathrm{cm}$ e $r_2 = 5.0\,\mathrm{cm}$ determinare;

a) la capacità del condensatore sferico;
b) l'area della armature di un condensatore piano che la stessa capacità e la stessa distanza fra le armature.

●○○ **Es. 2** — Sapendo che la capacità di una sfera di mercurio è C_1, determinare la capacità C_2 della sfera che si ottiene dall'unione della sfera con una sfera identica.

●○○ **Es. 3** — Sapendo che il raggio medio della Terra è $R = 6371\,\mathrm{km}$, determinare la capacità della Terra.

●○○ **Es. 4** — Un condensatore ha armature di area $A = 20\,\mathrm{cm}^2$, distanti $d = 2.5\,\mathrm{mm}$; stabilire come cambiano la capacità, il modulo del campo elettrico e la differenza di potenziale fra le armature se la distanza fra le armature viene raddoppiata.

●○○ **Es. 5** — Un condensatore piano ha armature circolari di raggio $r = 8.0\,\mathrm{cm}$ e distanti fra loro $d = 1.0\,\mathrm{mm}$, determinare la capacità e la carica che si trova sulle armature quando fra loro è presente una differenza di potenziale $V = 100\,\mathrm{V}$.

●○○ **Es. 6** — Un elettrone è in equilibrio fra le armature di un condensatore sotto l'azione del suo peso e della forza elettrica; sapendo che la distanza fra le armature è $d = 3.0\,\mathrm{mm}$, determinare la differenza di potenziale fra le armature e stabilire quale fra di esse è carica positivamente.

●○○ **Es. 7** — Un condensatore piano ad armature circolari di raggio $r = 4.24\,\mathrm{cm}$, distanza $d = 3.5\,\mathrm{mm}$ e carica $Q = 5.0\,\mathrm{nC}$; sapendo che l'armatura carica positivamente è quella inferiore, determinare

a) la differenza di potenziale fra le armature;

b) il modulo, la direzione e il verso del campo elettrico;

c) il modulo, la direzione e il verso della forza che subisce un elettrone lasciato libero fra le armature.

●○○ **Es. 8** — Un conduttore neutro è posto tra le armature di un condensatore di carica $Q = 150\,\mathrm{nC}$; le armature distano $d = 6.0\,\mathrm{mm}$; determinare la carica Q_c del conduttore e il modulo del campo elettrico all'interno del conduttore.

●○○ **Es. 9** — Un condensatore ha le armature di area $A = 4\pi\,\mathrm{cm}^2$ e distanza $d = 0.5\,\mathrm{mm}$; su di esse si trova la carica $Q = 2.4 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$; determinare

a) la capacità del condensatore;

b) la differenza di potenziale fra le armature;

c) il modulo del campo elettrico interno al condensatore.

●○○ **Es. 10** — Due condensatori, di capacità $C_1 = 2.0\,\mathrm{nF}$ e $C_2 = 3.0\,\mathrm{nF}$, sono collegati in serie e caricati con un generatore che fornisce la differenza di potenziale di $V = 10\,\mathrm{V}$;

a) la carica presente sulle armature e la differenza di potenziale di ciascun condensatore;

b) il lavoro fatto dal generatore.

●○○ **Es. 11** — Un generatore che fornisce la differenza di potenziale $V = 12\,\mathrm{V}$ è usato per caricare un dispositivo costituito da due condensatori di capacità $C_1 = 52\,\mathrm{pF}$ e $C_2 = 36\,\mathrm{pF}$ collegati in parallelo; determinare

a) la carica presente sulle armature e la differenza di potenziale di ciascun condensatore;

b) il lavoro fatto dal generatore.

●○○ **Es. 12** — Un condensatore piano vuoto ha le armature di area $A = 4.5\,\mathrm{cm}^2$ distanti $d = 2.5\,\mathrm{mm}$; viene caricato con un generatore che compie un lavoro $\mathcal{L} = 160\,\mu\mathrm{J}$; determinare la carica presente sulle armature, la differenza di potenziale fra di esse e in modulo del campo elettrico presente all'interno.

●○○ **Es. 13** — Un condensatore vuoto piano, le cui armature hanno area $A = 4.5\,\mathrm{cm}^2$ e distanza $d = 2.5\,\mathrm{mm}$, viene caricato con una carica $Q = 5.0\,\mathrm{nC}$ e quindi isolato; quindi la distanza fra armature viene raddoppiata. Determinare la differenza di potenziale fra le armature ed il campo elettrico all'interno del condensatore prima e dopo la modifica di d.

●○○ **Es. 14** — Le armature di un condensatore piano sono distanti $d = 2.5\,\mathrm{mm}$, la loro superficie misura$A = 10\,\mathrm{cm}^2$ e carica $Q = 10\,\mathrm{nC}$; determinare il modulo della forza agente su di un elettrone posto fra le due armature.

●●○ **Es. 15** — Due condensatori uguali sono collegati in parallelo e sono quindi caricati con un generatore che fornisce la differenza di potenziale $V = 30\,\mathrm{V}$; uno dei due è vuoto e ha capacità $C_1 = 2.5\,\mathrm{nF}$, l'altro è riempito di un materiale dielettrico di costante relativa $\epsilon_r = 12$; determinare la carica presente su ciascun condensatore.

●●○ **Es. 16** — Un condensatore piano ha le armature di area $A = 4.25\,\mathrm{cm}^2$ distanti $d = 1.25\,\mathrm{mm}$; metà dello spazio fra le armature è riempita da un materiale dielettrico di costante relativa $\epsilon_{r1} = 5.00$, la restante metà è riempita da un materiale dielettrico di costante relativa $\epsilon_{r2} = 8.00$; determinare la capacità del condensatore.

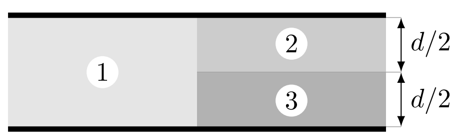
●●○ **Es. 17** — In un condensatore piano le armature hanno area $A = 4.5\,\mathrm{cm}^2$ e lo spazio fra è riempito da un dielettrico di costante relativa $\epsilon_r = 5.2$; la sua capacità è $C = 50\,\mathrm{pF}$. Sapendo che il condensatore viene caricato con una differenza di potenziale $V = 25\,\mathrm{V}$, determinare

a) il modulo del campo elettrico nel dielettrico;
b) la carica totale Q presente sulle armature;
c) la carica di polarizzazione presente sulle superfici del dielettrico.

●●○ **Es. 18** — Un condensatore piano ha le armature di area $A = 75\,\mathrm{cm}^2$ ed ha carica $Q = 50\,\mathrm{nC}$; all'interno vi è un dielettrico di costante relativa ϵ_r; sapendo che il modulo del campo elettrico nel dielettrico è $E = 2.4 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, determinare

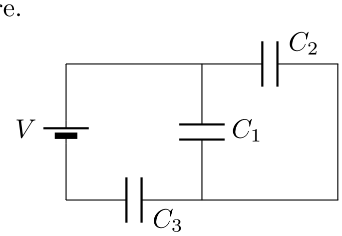
a) la costante ϵ_r;
b) la carica di polarizzazione presente sulle superfici del dielettrico.

●●○ **Es. 19** — Un condensatore piano è riempito con tre diversi dielettrici come in figura; sapendo che la distanza fra le armature è $d = 5.24\,\mathrm{mm}$, che la loro area è $A = 8.44\,\mathrm{cm}^2$ e che le costanti dielettriche relative dei tre dielettrici sono $\epsilon_{r1} = 20.0$, $\epsilon_{r2} = 35.0$, $\epsilon_{r3} = 64.0$, determinare la capacità del condensatore.



●●○ **Es. 20** — Tre condensatori sono collegati a un generatore come in figura, sapendo che si ha $C_1 = 25\,\mathrm{pF}$, $C_2 = 20\,\mathrm{pF}$, $C_3 = 10\,\mathrm{pF}$, $V = 24\,\mathrm{V}$, determinare

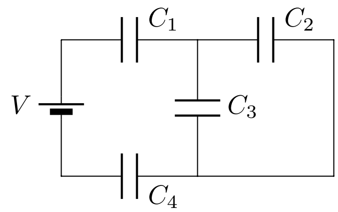
a) la capacità equivalente;
b) la differenza di potenziale di ciascun condensatore;
c) la carica di ciascun condensatore.



●●○ **Es. 21** — Quattro condensatori sono collegati come in figura, sapendo che $V = 50\,\mathrm{V}$, $C_1 = 24\,\mathrm{\mu F}$, $C_2 = 36\,\mathrm{\mu F}$, $C_3 = 20\,\mathrm{\mu F}$, $C_4 = 100\,\mathrm{\mu F}$; determinare

a) la capacità equivalente;
b) la differenza di potenziale di ciascun condensatore;

c) la carica di ciascun condensatore.



●●○ **Es. 22** — Un condensatore di capacità $C_1 = 120\,\mathrm{pF}$ è caricato con una differenza di potenziale $V_1 = 24.0\,\mathrm{V}$; quindi è scollegato dal generatore e collegato in parallelo ad un secondo condensatore scarico. Sapendo che la la differenza di potenziale passa a $V_2 = 10.0\,\mathrm{V}$, determinare la capacità del secondo condensatore.

●●○ **Es. 23** — Un condensatore piano ha le armature circolari distanti $d = 3.2\,\mathrm{mm}$ sulle quali si trova la carica $Q = 100\,\mathrm{nC}$, il modulo del campo elettrico al suo interno è $E = 800\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; determinare

a) la capacità e il raggio delle armature;

b) come cambiano capacità, differenza di potenziale, modulo del campo elettrico ed energia elettrostatica se si raddoppia il valore di Q.

●●○ **Es. 24** — In un condensatore è immagazzinata l'energia elettrostatica $W = 40\,\mathrm{pJ}$. Un protone fra le due armature subisce un'accelerazione di modulo $a = 5.5 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ (si trascuri il ruolo della forza peso). Sapendo che le armature distano $d = 3.5\,\mathrm{mm}$, determinare la capacità del condensatore.

●●○ **Es. 25** — Due condensatori di capacità $C_1 = 60\,\mathrm{\mu F}$ e $C_2 = 30\,\mathrm{\mu F}$ sono collegati in serie; ad essi è collegato in parallelo un terzo condensatore di capacità $C_3 = 10\,\mathrm{\mu F}$; l'intero dispositivo è caricato con una differenza di potenziale $\Delta V = 20\,\mathrm{V}$. Determinare la carica e la differenza di potenziale di ciascun condensatore.

●●○ **Es. 26** — Due condensatori di capacità $C_1 = 20\,\mathrm{\mu F}$ e $C_2 = 30\,\mathrm{\mu F}$ sono collegati in parallelo; ad essi è collegato in serie un terzo condensatore di capacità $C_3 = 50\,\mathrm{\mu F}$; l'intero dispositivo è caricato con una differenza di potenziale $V = 120\,\mathrm{V}$. Determinare la carica e la differenza di potenziale di ciascun condensatore.

●●○ **Es. 27** — Un condensatore le cui armature piane distano $d = 2.2\,\mathrm{cm}$, viene caricato fino a che al suo interno si trova un campo elettrico di intensità $E = 2.5 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; sapendo che la carica sulle armature è $Q = 4.4\,\mathrm{nC}$ determinare l'area delle armature e l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.

●●○ **Es. 28** — Per caricare un condensatore piano è necessaria l'energia $W = 1.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$; quando è carico al suo interno si trova un campo elettrico costante di modulo $E = 2.1 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$. Sapendo che la distanza fra le armature del condensatore è $d = 1.6\,\mathrm{mm}$, si determinino la carica che si trova sulle armature e la capacità del condensatore.

●●○ **Es. 29** — Le armature piane di un condensatore hanno area $A = 1.13 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m^2}$; all'interno del condensatore vi è un campo elettrico uniforme di modulo $E = 2.3 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ e fra le armature la differenza di potenziale $V = 120\,\mathrm{V}$; determinare

a) la capacità del condensatore;

b) la carica presente sulle armature;

c) il lavoro necessario per triplicare la distanza fra le armature.

●●○ **Es. 30** — In un condensatore piano è a stata accumulata l'energia elettrostatica $W = 4.0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}$ depositando sulle sue armature la carica $Q = 2.0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$; sapendo che le armature distano $d = 2.0\,\mathrm{mm}$, determinare

a) la capacità del condensatore;
b) il campo elettrico interno al condensatore;
c) il lavoro necessario per raddoppiare la distanza fra le armature.

●●○ **Es. 31** — Un condensatore le cui armature piane distano $d = 4.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ e avente capacità $C = 5.0 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}$ viene caricato con una carica $Q = 2.0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$; quindi in mezzo alle due armature viene inserita una lamina conduttrice avente la stessa superficie delle armature e spessore $s = 1.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$; determinare

a) la capacità C_s del condensatore dopo l'inserimento;
b) la differenza di potenziale V_s fra le armature dopo l'inserimento.

●●○ **Es. 32** — Un condensatore vuoto, avente capacità $C = 60\,\mathrm{nF}$, ha sulle armature, che distano $d = 2.0\,\mathrm{cm}$, la carica $Q = 42\,\mu\mathrm{C}$; determinare

a) la differenza di potenziale fra le armature ed il modulo del campo elettrico interno;
b) la capacità, la differenza di potenziale fra le armature ed il modulo del campo elettrico interno, dopo l'inserimento di un dielettrico di costante relativa $\epsilon_r = 4$;
c) la differenza di potenziale fra le armature quando il dielettrico è inserito solo per metà.

●●○ **Es. 33** — Un generatore che fornisce la differenza di potenziale $V = 120\,\mathrm{V}$ è usato per caricare n condensatori uguali di capacità $C = 50\,\mathrm{nF}$ collegati in serie. Sapendo che il lavoro fatto dal generatore è $\mathcal{L} = 15\,\mu\mathrm{J}$, determinare n.

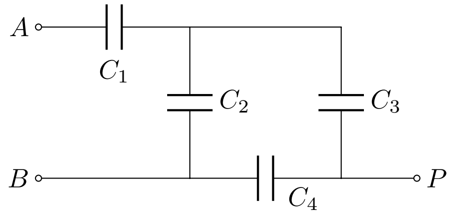
●●● **Es. 34** — Un condensatore vuoto di capacità $C = 5.9\,\mathrm{pF}$ è caricato con un generatore che fornisce la differenza di potenziale $V = 24\,\mathrm{V}$ e che viene subito dopo scollegato. Sapendo che la superficie della armature misura $A = 40\,\mathrm{cm}^2$.

a) Determinare la carica sulle armature, il modulo del campo elettrico presente fra le armature e l'energia elettrostatica accumulata nel condensatore.
b) Se all'interno del condensatore viene inserita una lastra metallica con dello spessore di $s = 2.5\,\mathrm{mm}$ determinare la capacità C_s, il campo elettrico E_s, la differenza di potenziale V_s e l'energia elettrostatica accumulata nel condensatore W_s.
c) Se l'interno del condensatore è riempito da un materiale dielettrico di costante relativa $\epsilon_r = 4$, determinare C_d, il campo elettrico E_d, la differenza di potenziale V_d e l'energia elettrostatica accumulata nel condensatore W_d.

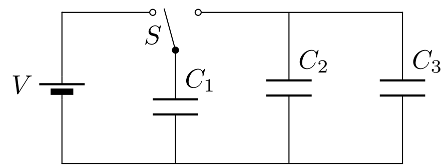
●●● **Es. 35** — Determinare le grandezze che si modificano nelle domande a) e b) dell'esercizio precedente nel caso in cui il generatore resti collegato al condensatore.

●●● **Es. 36** — Quattro condensatori sono collegati come in figura; sapendo che per le quattro capacità si hanno i valori $C_1 = 5.0\,\mathrm{nF}$, $C_2 = 10\,\mathrm{nF}$, $C_3 = 20\,\mathrm{nF}$ e $C_4 = 30\,\mathrm{nF}$, determinare

a) la capacità equivalente misurata fra i punti A e B;
b) la capacità equivalente misurata fra i punti A e P.



●●● **Es. 37** — Tre condensatori sono alternativamente collegati a un generatore tramite il commutatore S come in figura; inizialmente il commutatore chiude a sinistra poi, una volta raggiunto l'equilibrio, viene spostato a chiudere a destra. Sapendo che valgono $V = 120\,\mathrm{V}$, $C_1 = 10\,\mathrm{nF}$; $C_2 = 20\,\mathrm{nF}$ e $C_3 = 30\,\mathrm{nF}$, determinare quali siano, alla fine, la differenza di potenziale e la carica di ciascun condensatore.



Capitolo 5

Corrente elettrica

5.1 Leggi di Ohm

Se fra due punti di un conduttore vi è una differenza di potenziale, vi è uno spostamento di elettroni dal punto a potenziale minore al punto a potenziale maggiore. Se fra i due punti viene mantenuta costante la differenza di potenziale mediante un generatore, gli elettroni continuano a fluire. Ogni qual volta vi è un flusso di elettroni si dice vi è una corrente elettrica che scorre nel conduttore; per convenzione il flusso della corrente elettrica è opposto a quello degli elettroni, cioè la corrente elettrica va pensata come cariche elettriche positive che scorrono dal potenziale maggiore al potenziale minore. Dato un filo conduttore omogeneo di sezione costante si definisce *intensità della corrente elettrica* i la quantità di carica che attraversa una sezione del filo nell'unità di tempo, cioè

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Piú precisamente, la definizione data è corretta se l'intensità della corrente elettrica è *continua* cioè se non dipende da dall'intervallo di tempo. Nel caso generale la carica che attraversa la sezione dipende dal tempo e l'intensità della corrente elettrica è definita dalla derivata

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

L'intensità della corrente elettrica che scorre in un filo è proporzionale alla differenza di potenziale V applicata agli estremi del filo; vale quindi

$$V = Ri$$

detta *prima legge di Ohm*; la costante R è detta *resistenza* e dipende dalle caratteristiche del filo secondo la *seconda legge di Ohm*:

$$R = \rho \, \frac{\ell}{S}$$

ove ℓ è la lunghezza del filo, S l'area della sua sezione, ρ dipende dal materiale di cui è costituito il filo è detto *resistività*.

L'intensità della corrente elettrica che scorre in un filo può essere messa in relazione con la velocità $\boldsymbol{v}$ delle cariche che scorrono nel filo. Si definisce *densità di corrente* $\boldsymbol{j}$ la corrente elettrica che fluisce attraverso l'unità di superficie; in questo modo l'intensità della corrente elettrica che fluisce attraverso la superficie di area ΔS è

$$i = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n} \, \Delta S$$

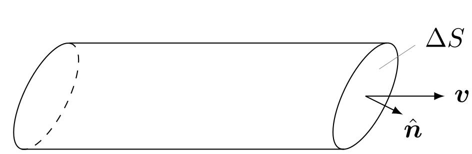


Figura 5.1: La densità di corrente.

ove $\boldsymbol{n}$ è il versore perpendicolare alla superficie ΔS; se la sezione è perpendicolare al flusso delle cariche si ha semplicemente

$$i = j\Delta S$$

Se le cariche che costituiscono la corrente elettrica hanno densità volumica n e scorrono attraverso ΔS con velocità $\boldsymbol{v}$ la densità di corrente $\boldsymbol{j}$ si scrive

$$\boldsymbol{j} = nq\boldsymbol{v}$$

Vi è inoltre una relazione che lega la densità di corrente $\boldsymbol{j}$ al campo elettrico $\boldsymbol{E}$ presente nel conduttore:

$$\boldsymbol{E} = \rho\boldsymbol{j}$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un filo di rame di resistività $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ è lungo $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ e ha una sezione di area $S = 0.5\,\mathrm{mm}^2$ ai suo capi è applicata la tensione $V = 24\,\mathrm{V}$; determinare l'intensità della corrente elettrica che lo attraversa e la carica che lo attraversa in un'ora.

Soluzione

Utilizzando la seconda e la prima legge di Ohm si ha

$$i = \frac{VS}{\rho\ell} = 1.4 \cdot 10^3\,\mathrm{A}$$

Poiché l'intensità di corrente elettrica è la carica che attraversa la sezione del filo in un secondo, per trovare la carica che attraversa il filo in un ora basta moltiplicare i per il numero di secondi in un ora, cioè

$$q = 3600i = 5.1 \cdot 10^6\,\mathrm{C}$$

Problema 2

Un fascio di sezione $S = 5.0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$ è costituito da particelle α di densità volumica $n = 5.4 \cdot 10^7\,\mathrm{cm}^{-3}$ e si muove con velocità uniforme di modulo $v = 24 \cdot 10^4\,\mathrm{m\,s}^{-1}$; determinare l'intensità di corrente elettrica trasportata dal fascio.

Soluzione

La densità di corrente del fascio di particelle α ha modulo

$$j = 2env$$

l'intensità della corrente elettrica è quindi

$$i = jS = 2envS = 2.1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{A}$$

5.2 Circuiti elettrici in corrente continua

Un circuito elettrico è un insieme di fili conduttori collegati in un percorso chiuso; in un circuito vi sono elementi attivi, detti *generatori* mantengono una differenza di potenziale costante V ai loro capi generando un flusso di cariche attraverso il percorso chiuso. I tratti di circuito ove non siano presenti generatori sono elementi passivi, caratterizzati dalla loro resistenza ed ai quali si applica la prima legge di Ohm.
I generatori compiono un lavoro per mantenere costante la differenza di potenziale ai loro capi; tale lavoro non si può esprimere in termini di potenziale elettrico perché, nel caso di cariche in movimento, la forza del campo elettrico non è conservativa. Per questo si preferisce, in questo contesto usare la parola *tensione* al posto di differenza di potenziale. Il lavoro per unità di carica del generatore che spinge la corrente elettrica lungo un circuito è uguale alla circuitazione del campo elettrico lungo il circuito e viene detto, impropriamente, *forza elettromotrice* $\mathcal{E}$ (simbolo da non confondere con quello dell'energia) del generatore, spesso abbreviata con f.e.m, vale quindi

$$\mathcal{E} = \Gamma_\gamma(\boldsymbol{E})$$

ove la curva γ è il circuito orientato dal polo positivo al polo negativo del generatore.

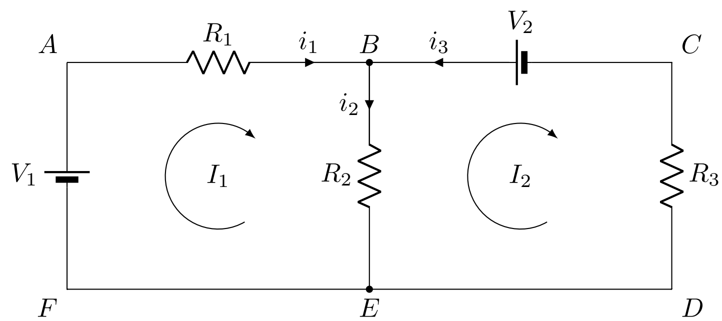


Figura 5.2: Un esempio di circuito elettrico.

Nello studio dei circuiti si suole indicare, con un certo abuso di notazione, con V la tensione mantenuta costante da un generatore che fornisce la forza elettromotrice $\mathcal{E}$; tale scelta è consuetudinaria ed è giustificata dal fatto che numericamente e dimensionalmente V ed $\mathcal{E}$ coincidono. Ogni porzione di circuito in cui scorre una corrente elettrica è detto *ramo*. Il punto di unione di tre o piú rami si dice *nodo*; in un circuito reale, un nodo corrisponde ad una saldatura.
Per esempio, nel circuito di figura 5.2 sono presenti tre rami: $BAFE$ contenente il generatore V e la resistenza R_1, in cui scorre l'intensità di corrente i_1; BE contenente la resistenza R_2, in cui scorre l'intensità di corrente i_2; $BCDE$ contenente il generatore V_2 e la resistenza R_3, in cui scorre l'intensità di corrente i_3. Vi sono inoltre due nodi B ed E. Le porzioni di ramo, come EF e DE o la parte che contiene il punto A compreso fra il generatore V_1 e la resistenza R_1, in cui non sono presenti né elementi attivi né passivi, vanno considerate privi di resistenza e quindi tratti di circuito allo stesso potenziale; vale cioè $V_{DE} = V_{EF} = 0$.
I versi delle correnti elettriche di ciascun ramo, indicate in figura, sono arbitrarie; solo risolvendo il circuito si trova il verso di ciascuna corrente elettrica. Ogni sotto-circuito del circuito dato, cioè ogni percorso chiuso che si può individuare nel circuito è detto *maglia*. Nell'esempio sono presenti tre maglie: $ABEF$, $BCDE$ e $ACDF$.
Risolvere un circuito elettrico significa determinare le intensità delle correnti elettriche che scorrono in ciascun ramo conoscendo i valori degli elementi attivi e passivi del circuito, cioè i valori delle tensioni fornite dai generatori e delle resistenze. A tale scopo si utilizzano. insieme alle leggi di Ohm, le *leggi di Kirchhoff*:

1. La somma delle intensità delle correnti elettriche entranti in un nodo è uguale alla somma di quelle uscenti dal nodo.

2. La somma delle tensioni che si incontrano percorrendo un'intera maglia è nulla.

Queste leggi quindi forniscono un'equazione per ogni nodo e un'equazione per ogni maglia. Nel caso del circuito di figura 5.2 si hanno, rispettivamente per i nodi e per le maglie, le equazioni

$$\begin{cases} i_1 + i_3 = i_2 \\ i_2 = i_1 + i_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{AB} + V_{BE} + V_{EF} + V_{FA} = 0 \\ V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EB} = 0 \\ V_{AC} + V_{CD} + V_{DF} + V_{FA} = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni, tuttavia non sono indipendenti; le due equazioni del primo sistema sono uguali e sommando le prime due equazioni del secondo sistema si ottiene la terza.
Si può dimostrare che il numero di equazioni indipendenti è uguale al numero di correnti elettriche indipendenti ed è

$$M = R - N + 1$$

ove R è il numero dei rami e N il numero dei nodi. È possibile determinare M maglie cui associare M correnti elettriche indipendenti che possono essere determinate risolvendo le M equazioni ottenute applicando la seconda legge di Kirchhoff alle M maglie.
Nel caso del circuito di figura 5.2, $R = 3$, $N = 2$ e $M = 2$ quindi si possono considerare le due maglie $ABEF$ e $BCDE$ a cui si associano le intensità di corrente I_1 e I_2. Queste sono dette *correnti elettriche fittizie* e sono, in questo caso, legate alle correnti elettriche reali dalle relazioni

$$i_1 = I_1 \quad , \quad i_2 = I_1 - I_2 \quad , \quad i_3 = -I_2 \tag{5.1}$$

La seconda legge di Kirchhoff dà quindi le due equazioni

$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) - V_1 = 0 \\ V_2 + R_3 I_2 + R_2(I_2 - I_1) = 0 \end{cases}$$

che, note le tensioni fornite dai generatori e le resistenze, consentono di trovare facilmente I_1 e I_2 e quindi le intensità delle correnti elettriche reali tramite le (5.1).
L'energia immessa da ciascun generatore nel circuito viene convenientemente calcolata come energia per unità di tempo, cioè come potenza. La potenza erogata da un generatore che fornisce la tensione V emettendo la corrente di intensità i è

$$\mathcal{P} = Vi$$

La corrente elettrica nel circuito è continua, quindi le cariche si muovono con velocità costante; pertanto tutta l'energia erogata dai generatori viene dissipata, sotto forma di calore, dalle resistenze. La potenza dissipata dalla resistenza R attraversata dalla corrente elettrica di intensità i è

$$\mathcal{P} = Ri^2$$

In un circuito, la somma della potenze erogate dai generatori è uguale a quella dissipata delle resistenze.
L'energia necessaria al funzionamento di un dispositivo elettrico si misura talvolta in wattora W h, e nel suo multiplo kW h. Si tratta dell'energia necessaria per mantenere in funzione per un'ora un dispositivo che consuma la potenza di un watt. Vale quindi

$$1\,\mathrm{W\,h} = 3600\,\mathrm{J}$$

I generatori reali hanno una resistenza interna R_i, quindi la forza elettromotrice da essi erogata non è interamente disponibile perché parte di essa va perduta sulla resistenza interna. La corrente elettrica effettivamente circolante nel circuito è quindi minore di quella che sia avrebbe con un generatore ideale e vale

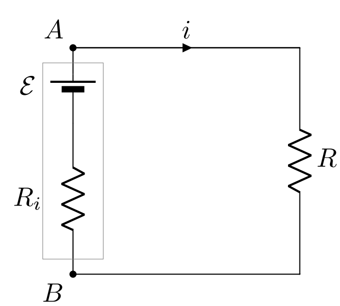


Figura 5.3: La resistenza interna di un generatore reale.

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + R_i}$$

Quindi la tensione che si misura ai capi AB del generatore reale non coincide con la forza elettromotrice erogata dal generatore ma è

$$V = \mathcal{E} - R_i i = \frac{R}{R + R_i}\,\mathcal{E}$$

Si vede che quanto piú R_i è piccola rispetto alla resistenza sulla quale è utilizzato il generatore, piú il suo effetto è trascurabile. La caduta di tensione sulla resistenza interna del generatore si ha solo quando scorre la corrente elettrica, quindi se il circuito è aperto la tensione ai capi del generatore è uguale a quella che si ha a circuito chiuso con resistenza interna nulla.
Per la misura delle intensità della corrente elettrica si usano gli amperometri e per la misura delle tensioni si usano i voltmetri. Questi, come i generatori, hanno una resistenza interna. Lo schema di utilizzo è riportato in figura 5.4, in cui l'amperometro misura l'intensità della corrente elettrica che scorre nel ramo AB e il voltmetro misura la tensione ai capi di AB.

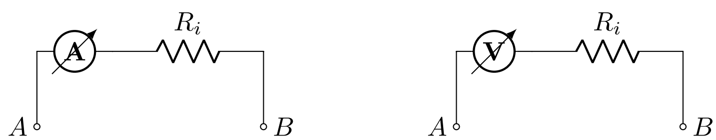


Figura 5.4: Resistenza interna di un amperometro e di un voltmetro.

La resistenza interna R_i dell'amperometro risulta in serie alla resistenza R del ramo ove scorre l'intensità della corrente elettrica da misurare; quindi deve essere $R_i \ll R$. Simmetricamente, la resistenza interna del voltmetro è in parallelo alla resistenza del ramo ai cui capi si vuole misurare la tensione; quindi deve essere $R_i \gg R$.

5.2.1 Il circuito RC

Il contenuto di questa sezione richiede l'utilizzo del calcolo infinitesimale.
Si consideri un condensatore di capacità C inizialmente carico con carica Q, le cui armature vengono messe in collegamento tramite un filo elettrico di resistenza R in cui sia presente un interruttore.

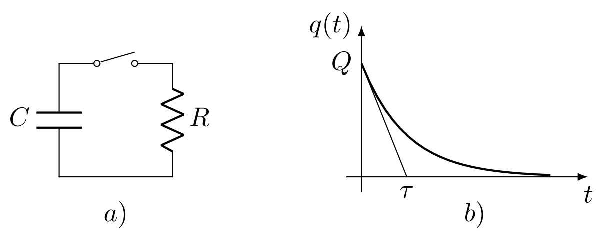


Figura 5.5: a) La scarica del circuito RC; b) il grafico di $q(t)$.

Alla chiusura dell'interruttore comincia a scorrere una corrente elettrica che porta progressivamente alla scarica del condensatore; la legge con cui la carica sulle armature varia nel tempo è esponenziale, vale infatti

$$q(t) = Q\,e^{-t/\tau}$$

ove $\tau = RC$ è il *tempo caratteristico* del circuito e rappresenta l'intersezione con l'asse t della retta tangente al grafico di $q(t)$ nel punto $(0, Q)$. La tensione ai capi del condensatore e l'intensità della corrente elettrica che circola nel circuito si trovano facilmente:

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{Q}{C}\,e^{-t/\tau} \qquad , \qquad i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{Q}{RC}\,e^{-t/\tau}$$

Si consideri ora una condensatore di capacità C, inizialmente scarico, che viene caricato collegandolo ad un generatore che fornisce la tensione V mediante un filo di resistenza R in cui è presente anche un interruttore.

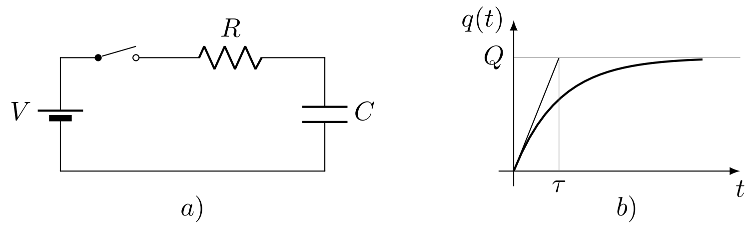


Figura 5.6: a) La carica del circuito RC; b) il grafico di $q(t)$.

Alla chiusura dell'interruttore comincia a scorrere una corrente elettrica che progressivamente carica il condensatore; la legge con cui la carica sulle armature varia nel tempo è esponenziale, vale infatti

$$q(t) = CV\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

La tensione ai capi del condensatore e l'intensità della corrente elettrica che circola nel circuito si trovano facilmente:

$$V(t) = \frac{q(t)}{C} = V\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad , \qquad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{V}{R}\, e^{-t/\tau}$$

5.2.2 Corrente elettrica nelle soluzioni

Un composto ionico in acqua si dissocia negli ioni che lo compongono. Si può quindi costruire una *cella elettrolitica* costituita da una vasca che contiene la soluzione di acqua e composto ionico e due elettrodi collegati ai poli di un generatore: l'elettrodo collegato al polo positivo si dice *anodo* e l'elettrodo collegato al polo negativo si dice *catodo*.

L'energia elettrica fornita dal generatore spinge gli ioni negativi verso l'anodo ove avviene una reazione di *ossidazione*; nello stesso tempo gli ioni positivi vengono attratti verso il catodo ove avviene una reazione di *riduzione*; la migrazione degli ioni e le due reazioni chimiche di fatto costituiscono una corrente elettrica nella soluzione che chiude il circuito. In una cella elettrolitica si ha quindi la trasformazione di energia elettrica in energia chimica.

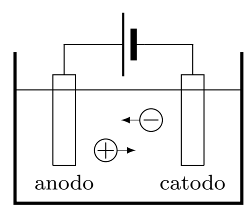


Figura 5.7: Una cella elettrolitica.

Il processo prende il nome di *elettrolisi* e serve a separare gli ioni di cui è costituito il composto ionico; ed è regolato dalle *leggi di Faraday*:

1. *La massa della sostanza che si libera ad un elettrodo è proporzionale alla quantità di carica elettrica che ha attraversato la cella elettrolitica e la costante di proporzionalità è detto* equivalente elettrochimico *della sostanza.*

2. *In due celle elettrolitiche attraversate dalla stessa quantità di carica elettrica, le masse delle sostanze che si liberano agli elettrodi sono proporzionali ai rispettivi equivalenti elettrochimici.*

Queste leggi sono sintetizzate dall'unica equazione

$$M = \frac{M_0}{vF}\, Q$$

ove M è la massa della sostanza che si libera ad un elettrodo; M_0 è la *massa molare*, cioè la massa di una mole, della sostanza; v è la *valenza* della sostanza, cioè il numero di elettroni che la sostanza mette in gioco nel processo di ossidoriduzione; Q è la carica elettrica che attraversa la cella elettrolitica; F è una costante, detta *costante di Faraday*, che corrisponde alla carica di una mole di cariche elementari quindi

$$F = N_A e = 96485.33212\,\mathrm{C\,mol^{-1}}$$

essendo N_A il *numero di Avogadro*. L'equivalente elettrochimico di una sostanza, cui fa riferimento la seconda legge di Faraday, è M_0/vF è cioè il rapporto fra la sua massa molare e il prodotto fra la valenza e la costante di Faraday.

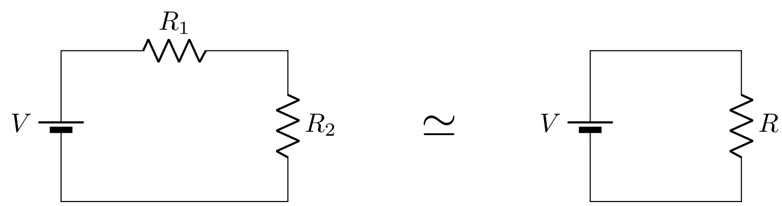
PROBLEMI RISOLTI

***Problema 1**

Determinare la resistenza equivalente di due fili conduttori collegati in serie e in parallelo.

Soluzione

Si dicono collegati in serie due fili attraversati dalla stessa corrente elettrica, come nella figura seguente



Le due resistenze sono percorse dalla stessa intensità della corrente elettrica i, applicando la prima legge di Ohm alle due resistenze R_1 ed R_2 si ha

$$V_1 = R_1 i \qquad , \qquad V_2 = R_2 i$$

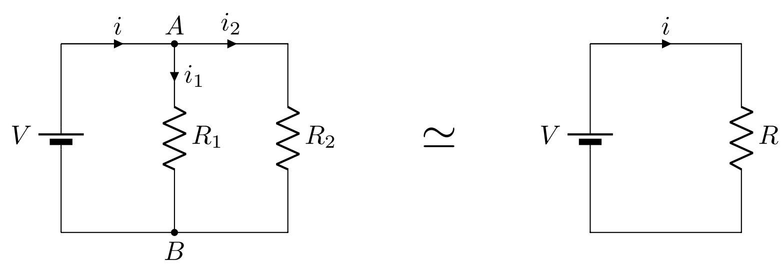
La somma delle due tensioni ai capi delle resistenza V_1 e V_2 è uguale alla tensione fornita dal generatore, quindi vale

$$V = V_1 + V_2 = (R_1 + R_2)i$$

La stessa legge di Ohm applicata al circuito equivalente è $V = Ri$ e quindi

$$R = R_1 + R_2$$

quindi la resistenza equivalente di due resistenze in serie è la somma delle resistenze.
Si dicono collegati in parallelo due fili a cui è applicata la stessa tensione, come nella figura seguente



Alle due resistenze R_1 ed R_2 del primo circuito è applicata la stessa tensione V, per la prima legge di Ohm si ha quindi

$$V = R_1 i_1 \qquad , \qquad V = R_2 i_2$$

Ai nodi A e B si applica la prima legge di Kirchhoff:

$$i = i_1 + i_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

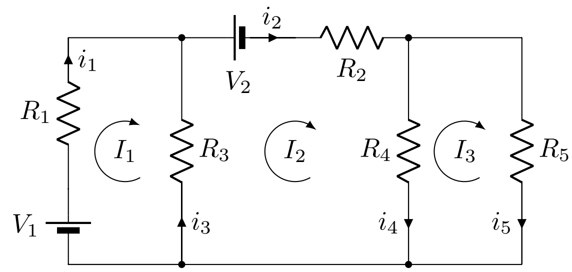
Confrontando questa equazione con quella che si ottiene applicando la prima legge Ohm al secondo circuito:

$$i = \frac{V}{R}$$

di ricava
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
che dà la resistenza equivalente di due resistenze collegate in parallelo.

*__Problema 2__

Sapendo che $V_1 = 12\,\mathrm{V}$, $V_2 = 20\,\mathrm{V}$, $R_1 = 5.0\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 15\,\Omega$, $R_4 = 6.0\,\Omega$, $R_5 = 12\,\Omega$, determinare l'intensità delle correnti elettriche che circolano nei rami del circuito in figura, le potenze erogate dai generatori e le potenze dissipate nelle resistenze.



Soluzione

Le correnti elettriche fittizie sono quelle indicate in figura; con le correnti elettriche reali valgono le relazioni
$$i_1 = I_1 \quad , \quad i_2 = I_2 \quad , \quad i_3 = I_2 - I_1 \quad , \quad i_4 = I_2 - I_3 \quad , \quad i_5 = I_3$$
La seconda legge di Kirchhoff applicata alle tre maglie dà
$$\begin{cases} R_1 I_1 + R_3(I_1 - I_2) - V_1 = 0 \\ V_2 + R_2 I_2 + R_4(I_2 - I_3) + R_3(I_2 - I_1) = 0 \\ R_4(I_3 - I_2) + R_5 I_3 = 0 \end{cases}$$
ossia
$$\begin{cases} (R_1 + R_3) I_1 - R_3 I_2 = V_1 \\ -R_3 I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) I_2 - R_4 I_3 = -V_2 \\ -R_4 I_2 + (R_4 + R_5) I_3 = 0 \end{cases}$$
che risolto, per esempio con il metodo di Cramer, si ottiene
$$I_1 = 0.14\,\mathrm{A} \quad , \quad I_2 = -0.61\,\mathrm{A} \quad , \quad I_3 = -0.17\,\mathrm{A}$$
e quindi
$$i_1 = 0.14\,\mathrm{A} \quad , \quad i_2 = -0.61\,\mathrm{A} \quad , \quad i_3 = -0.75\,\mathrm{A}$$
$$i_4 = -0.44\,\mathrm{A} \quad , \quad i_5 = -0.17\,\mathrm{A}$$
Il risultato negativo di alcune di queste intensità significa che i versi scelti arbitrariamente per le correnti elettriche corrispondenti in figura 5.2 sono sbagliati; quindi i_2 scorre verso sinistra, i_3 verso il basso, i_4 e i_5 verso l'alto.
Le potenze erogate dai due generatori sono
$$\mathcal{P}_{V_1} = V_1 i_1 = 1.7\,\mathrm{W} \quad , \quad \mathcal{P}_{V_2} = -V_2 i_2 = 12\,\mathrm{W}$$
Le potenze dissipate sulle resistenze sono
$$\mathcal{P}_{R_1} = R_1 i_1^2 = 0.10\,\mathrm{W} \quad , \quad \mathcal{P}_{R_2} = R_2 i_2^2 = 3.7\,\mathrm{W} \quad , \quad \mathcal{P}_{R_3} = R_3 i_3^2 = 8.5\,\mathrm{W}$$
$$\mathcal{P}_{R_4} = R_4 i_4^2 = 1.1\,\mathrm{W} \quad , \quad \mathcal{P}_{R_5} = R_5 i_5^2 = 0.36\,\mathrm{W}$$
Come si vede, tenuto conto degli arrotondamenti, la potenza totale erogata è uguale alla potenza totale dissipata.
Potrebbe darsi il caso in cui la potenza erogata da un generatore sia negativa; questo significa che il generatore non eroga potenza ma la assorbe, per esempio perché si sta ricaricando.

5.3 Esercizi

Leggi di Ohm

●○○ **Es. 1** — Un filo conduttore ha resistenza R_1; determinare la resistenza R_2 di un filo dello stesso materiale di lunghezza e diametro doppi.

●○○ **Es. 2** — Un filo elettrico di resistenza R_1 viene tagliato a metà, le due metà vengono saldate insieme; determinare la resistenza R_2 del filo cosí ottenuto.

●○○ **Es. 3** — Un conduttore di resistività $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ di lunghezza $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ è cavo; il suo raggio interno è $r_1 = 0.2\,\mathrm{mm}$ il suo raggio esterno è $r_2 = 0.5\,\mathrm{mm}$; determinare l'intensità della corrente elettrica che scorre nel filo quando ai suoi capi è applicata la tensione $V = 12\,\mathrm{mV}$.

●○○ **Es. 4** — In un filo conduttore che collega i due punti A e B scorre la corrente elettrica di intensità $i_1 = 2.4\,\mathrm{A}$. Fra gli stessi due punti si aggiunge un secondo filo identico al primo; determinare l'intensità i_2 della corrente elettrica totale che scorre da A a B.

●○○ **Es. 5** — In un filo conduttore che collega i due punti A e B scorre la corrente elettrica di intensità $i_1 = 2.4\,\mathrm{A}$. Fra gli stessi due punti si aggiunge un secondo filo uguale al primo ma di lunghezza doppia; determinare l'intensità i_2 della corrente elettrica totale che scorre da A a B.

●○○ **Es. 6** — Una batteria viene ricaricata per $t = 4\,\mathrm{h}$ con una corrente elettrica di intensità $i = 5.0\,\mathrm{A}$ applicando fra i morsetti una tensione $V = 12\,\mathrm{V}$; determinare

a) la carica elettrica che attraversa la batteria durante la carica;
b) il lavoro compiuto per completare la ricarica

●○○ **Es. 7** — Un filo di tungsteno quando sottoposto alla tensione $V = 6.00\,\mathrm{V}$ è attraversato dalla corrente elettrica di intensità $i = 113\,\mathrm{A}$ sapendo che la lunghezza del filo è $\ell = 100\,\mathrm{cm}$ e l'area della sezione è $S = 1.00\,\mathrm{mm}^2$, determinare la resistività del tungsteno.

●○○ **Es. 8** — Un passero è posato su un cavo dell'alta tensione in cui scorre la corrente elettrica di intensità $i = 100\,\mathrm{A}$; sapendo che la resistenza per unità di lunghezza del cavo $R/\ell = 45\,\mu\Omega\,\mathrm{m}^{-1}$ e che le zampe del passero distano $d = 3.5\,\mathrm{cm}$, determinare la tensione fra le zampe dell'uccello.

●●○ **Es. 9** — Un filo conduttore di lunghezza $\ell = 5.0\,\mathrm{m}$ e diametro $d = 1.2\,\mathrm{mm}$ è attraversato da una corrente elettrica di intensità $i = 600\,\mathrm{mA}$ quando ai suo capi è applicata la tensione $V = 50\,\mathrm{mV}$; sapendo che la velocità delle cariche all'interno del filo ha modulo $v = 50 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{cm/s}$, determinare

a) la resistenza del filo;
b) la resistività del filo;
c) la densità volumica degli elettroni di conduzione.

●●○ **Es. 10** — La tensione $V = 5.0\,\mathrm{mV}$ applicata ad un filo di rame ($\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$) di lunghezza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ e raggio $r = 0.5\,\mathrm{mm}$; determinare quanti elettroni attraversano una sezione del filo nell'intervallo di tempo $\Delta t = 15\,\mathrm{ms}$:

●●○ **Es. 11** — Determinare la resistenza di un filo di rame di raggio $r = 0.75\,\mathrm{mm}$ e massa $m = 200\,\mathrm{g}$, sapendo che la densità del rame è $\delta = 8.92 \cdot 10^3\,\mathrm{kg\,m}^{-3}$ e la sua resistività è $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

●●○ **Es. 12** — A un filo elettrico di lunghezza $\ell = 2.5\,\mathrm{m}$, sezione di area $S = 0.5\,\mathrm{mm}^2$ è attraversato dalla corrente elettrica di intensità $i = 15\,\mathrm{A}$ quando ad esso è applicata la tensione $V = 1.2\,\mathrm{V}$; determinare

a) il modulo del campo elettrico all'interno del filo;
b) la resistività del filo.

●●○ **Es. 13** — Un cavo elettrico è composto da $N = 100$ fili di rame, resistività $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$, ciascuno di diametro $d = 5.0\,\mu\mathrm{m}$ e lunghezza $\ell = 4.5\,\mathrm{m}$; determinare la resistenza del cavo elettrico.

●●○ **Es. 14** — Il Sole emette un vento solare costituito, fra gli altri, di protoni; supponendo che i protoni abbiano densità volumica $n = 10\,\mathrm{cm}^{-3}$ e arrivano ad incontrare il campo magnetico terrestre, che li devia, a velocità $v = 500\,\mathrm{km\,s}^{-1}$. Sapendo che il raggio medio della Terra è $R = 6371\,\mathrm{km}$, determinare l'intensità della corrente elettrica che raggiungerebbe la Terra se non fosse protetta dal proprio campo magnetico.

●●○ **Es. 15** — Un fascio di protoni di sezione $S = 200\,\mu\mathrm{m}^2$ in un acceleratore muovendosi contro un bersaglio produce una corrente elettrica di intensità $i = 0.50\,\mathrm{mA}$; sapendo che ogni elettrone ha energia cinetica $\mathcal{E}_c = 30\,\mathrm{GeV}$, determinare

a) quanti protoni colpiscono il bersaglio in $t = 12\,\mathrm{ms}$;
b) la densità volumica dei protoni nel fascio.

●●○ **Es. 16** — Determinare il diametro che deve avere un filo di rame $\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$ di lunghezza $\ell = 800\,\mathrm{m}$ affinché la tensione ai suoi capi sia $V = 5.0\,\mathrm{V}$ quando è attraversato dalla corrente elettrica di intensità $i = 2.0\,\mathrm{A}$.

●●○ **Es. 17** — In un acceleratore di particelle $N = 10^{12}$ elettroni si muovono lungo un orbita circolare di lunghezza $\ell = 250\,\mathrm{m}$ alla velocità $v = 0.9\,c$; determinare l'intensità della corrente elettrica all'interno dell'acceleratore.

●●○ **Es. 18** — Una sfera conduttrice di raggio $r = 20\,\mathrm{cm}$ è collegata a un generatore che la mantiene a carica costante $Q = 5.4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$; la sfera è collegata a terra tramite un filo di resistenza $R = 25\,\Omega$. Supponendo che il suolo si possa considerare a potenziale nullo, determinare l'intensità della corrente elettrica che scorre nel filo.

●●● **Es. 19** — Determinare l'intensità della corrente elettrica prodotta dall'elettrone che ruota attorno al protone nell'atomo di idrogeno sapendo che il raggio dell'orbita è $r = 5.29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$, detto *raggio di Bohr*.

●●● **Es. 20** — ⋆ Un corpo carico è connesso a terra tramite un filo conduttore, sapendo che la carica presente sul corpo all'istante t è data da $q(t) = q_0 e^{-2t}$, con $q_0 = 4.5\,\mathrm{mC}$; determinare l'intensità della corrente elettrica nel filo all'istante $t_1 = 2.5\,\mathrm{s}$.

Circuiti elettrici in corrente continua

●○○ **Es. 1** — Una radiolina alimentata da una batteria da $V = 6.0\,\mathrm{V}$ e che durante il suo funzionamento assorbe la potenza $\mathcal{P} = 2.87\,\mathrm{W}$; determinare quanta carica attraversa la batteria nell'intervallo di tempo $\Delta t = 5\,\mathrm{h}$ di funzionamento.

●○○ **Es. 2** — Una resistenza R quando è collegata ad un generatore che fornisce la tensione $V = 9.0\,\mathrm{V}$ dissipa la potenza $\mathcal{P}_1 = 0.65\,\mathrm{W}$; determinare

a) il valore di R;
b) quale potenza $\mathcal{P}_2$ viene dissipata dalla stessa resistenza se viene collegata ad un generatore che fornisce la tensione doppia.

●○○ **Es. 3** — Una resistenza R dissipa la potenza $\mathcal{P} = 40\,\mathrm{W}$ quando è attraversata dalla corrente elettrica di intensità $i_1 = 3.15\,\mathrm{A}$; determinare

a) il valore di R;
b) l'intensità della corrente elettrica i_2 che attraversando la stessa resistenza dissipa potenza doppia.

●○○ **Es. 4** — Una stufa elettrica operando alla tensione $V = 220\,\mathrm{V}$ consuma la potenza $\mathcal{P} = 1500\,\mathrm{W}$; determinare

a) l'intensità della corrente elettrica che circola nella stufa;

b) il valore della resistenza presente nella stufa;

c) l'energia $\mathcal{E}_d$ dissipata dalla stufa accesa per $t = 2.5\,\mathrm{h}$ misurata in $\mathrm{kW\,h}$.

●○○ **Es. 5** — La resistenza equivalente $R = 18\,\Omega$ è ottenuta collegando la resistenza $R_1 = 72\,\Omega$ con un'altra resistenza R_2; stabilire se il collegamento è in serie o in parallelo e determinare il valore R_2.

●○○ **Es. 6** — Un filo di rame ($\rho = 1.68 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$) ha sezione di area $S = 2.4 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^2$ e lunghezza $\ell = 3.5\,\mathrm{m}$ è attraversata dalla corrente elettrica di intensità $i = 12\,\mathrm{A}$; determinare, in $\mathrm{W\,h}$, l'energia dissipata dalla resistenza nel tempo $t = 20\,\mathrm{min}$.

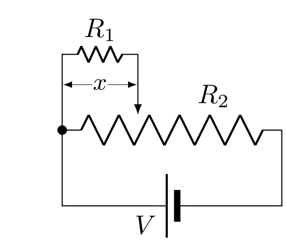
●○○ **Es. 7** — Un generatore fornisce a un circuito la tensione $V = 24\,\mathrm{V}$; sapendo che la potenza erogata è $P = 5.2\,\mathrm{W}$, determinare l'intensità della corrente elettrica prodotta e la resistenza equivalente del circuito.

●○○ **Es. 8** — Un lettore CD è alimentato da una batteria che fornisce al circuito interno la tensione $V = 9.0\,\mathrm{V}$; durante il funzionamento la batteria è attraversata da una corrente elettrica di intensità $i = 20\,\mathrm{mA}$; determinare la potenza assorbita.

●○○ **Es. 9** — Una stufa elettrica è costruita con una resistenza $R = 24.2\,\Omega$ per essere impiegata ad una tensione $V = 220\,\mathrm{V}$; se il costo di un $\mathrm{kW\,h}$ è $c = 0.06$ €, determinare la spesa s per un tempo $t = 3.5\,\mathrm{h}$ di funzionamento.

●●○ **Es. 10** — Un generatore con resistenza interna $R_i = 2.25\,\Omega$ è collegato a un circuito di resistenza equivalente R; sapendo che quando il circuito è aperto ai capi del generatore si misura la differenza di potenziale V_0 determinare il valore minimo di R tale che la differenza di tensione reale ai capi del generatore non vari piú del $1.2\,\%$.

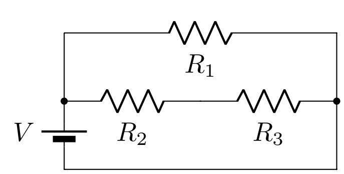
●●○ **Es. 11** — Il circuito in figura rappresenta un generatore che alimenta un circuito in cui è presente una resistenza variabile a resistenza di lunghezza variabile, detta *potenziometro*; una resistenza $R_1 = 20\,\Omega$ collegata in parallelo ad una resistenza $R_2 = 50\,\Omega$ di lunghezza totale $\ell = 15\,\mathrm{cm}$ tramite un contatto strisciante di lunghezza $x = 5.0\,\mathrm{cm}$; sapendo che $V = 24\,\mathrm{V}$, determinare la potenza erogata dal generatore.



●●○ **Es. 12** — La resistenza R_1 è collegata in parallelo alla serie di R_2 ed R_3, come in figura; sapendo che $R_1 = 2.0\,\Omega$, $R_2 = 3.0\,\Omega$, $R_3 = 2.0\,\Omega$, $V = 24\,\mathrm{V}$, determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

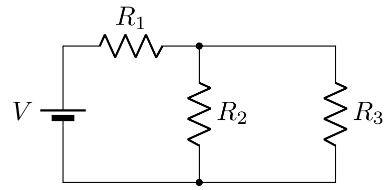
b) la potenza erogata dal generatore e le potenze dissipate dalle resistenze.



●●○ **Es. 13** — La resistenza R_1 è collegata in serie al parallelo di R_2 ed R_3, come in figura; sapendo che $R_1 = 2.0\,\Omega$, $R_2 = 3.0\,\Omega$, $R_3 = 2.0\,\Omega$, $V = 24\,\mathrm{V}$, determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

b) la potenza erogata dal generatore e le potenze dissipate dalle resistenze.

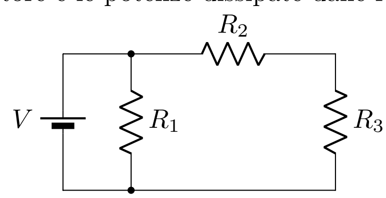


●●○ **Es. 14** — Si consideri il circuito in figura e si dica se in esso vi sono resistenze collegate in serie o in parallelo; sapendo che $R_1 = 18\,\Omega$, $R_2 = 24\,\Omega$, $R_3 = 12\,\Omega$, $V = 96\,\mathrm{V}$, determinare

a) la resistenza equivalente del circuito;

b) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

c) la potenza erogata dal generatore e le potenze dissipate dalle resistenze.

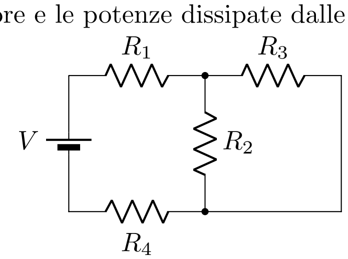


●●○ **Es. 15** — Si consideri il circuito in figura e si dica se in esso vi sono resistenze collegate in serie o in parallelo; sapendo che $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 15\,\Omega$, $R_3 = 30\,\Omega$, $R_4 = 6.0\,\Omega$, $V = 180\,\mathrm{V}$, determinare

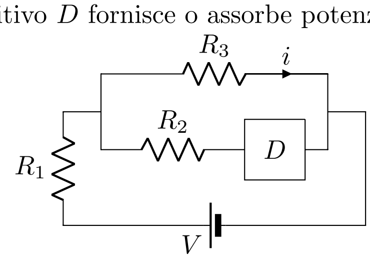
a) la resistenza equivalente del circuito;

b) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

c) la potenza erogata dal generatore e le potenze dissipate dalle resistenze.



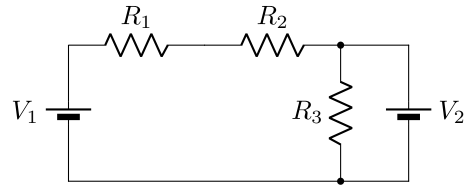
●●○ **Es. 16** — Il circuito in figura è costituito da un generatore che fornisce energia ad un sistema di tre resistenze collegate fra loro e ad un dispositivo D, rappresentato dal quadrato, che può contenere sia elementi attivi che passivi; utilizzando i valori $R_1 = 1.20\,\Omega$, $R_2 = 24.0\,\Omega$, $R_3 = 36.0\,\Omega$, $V = 4.50 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$, $i = 12.0\,\mathrm{A}$, determinare se il dispositivo D fornisce o assorbe potenza e determinarne il valore.



●●○ **Es. 17** — Si consideri il circuito in figura e si dica se in esso vi sono resistenze collegate in serie o in parallelo; sapendo che $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 8.0\,\Omega$, $R_3 = 4.0\,\Omega$, $V_1 = 64\,\mathrm{V}$, $V_2 = 24\,\mathrm{V}$, determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

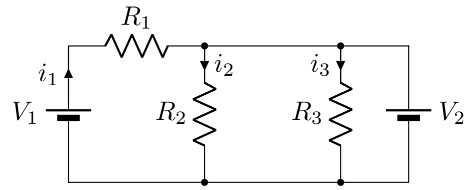
b) le potenze erogate dai generatori e le potenze dissipate dalle resistenze.



●●○ **Es. 18** — Si consideri il circuito in figura e si dica se in esso vi sono resistenze collegate in serie o in parallelo; sapendo che $R_1 = 12\,\Omega$, $R_2 = 8.0\,\Omega$, $R_3 = 4.0\,\Omega$, $V_1 = 64\,\mathrm{V}$, $V_2 = 24\,\mathrm{V}$, determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

b) le potenze erogate dai generatori e le potenze dissipate dalle resistenze.

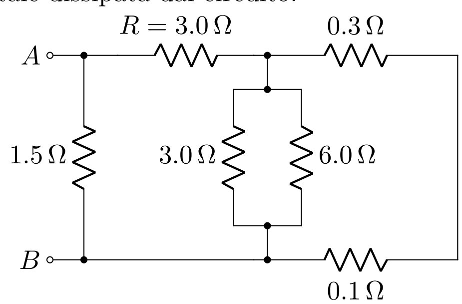


●●○ **Es. 19** — Si consideri il circuito in figura e si risponda alle seguenti domande.

a) Determinare la resistenza equivalente vista dai punti A e B.

b) Se fra i punti A e B si collega un generatore che fornisce la tensione $V = 30\,\mathrm{V}$, determinare l'intensità della corrente elettrica che attraversa la resistenza R.

c) Determinare la potenza totale dissipata dal circuito.

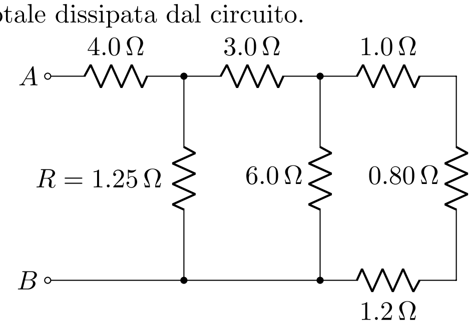


●●○ **Es. 20** — Si consideri il circuito in figura e si risponda alle seguenti domande.

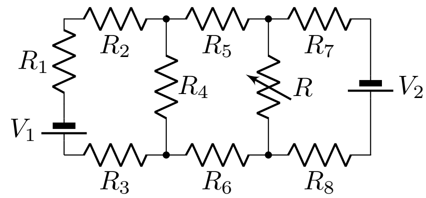
a) Determinare la resistenza equivalente vista dai punti A e B.

b) Se fra i punti A e B si collega un generatore che fornisce la tensione $V = 20\,\mathrm{V}$, determinare l'intensità della corrente elettrica che attraversa la resistenza R.

c) Determinare la potenza totale dissipata dal circuito.



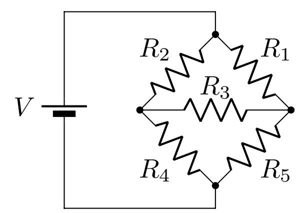
●●● **Es. 21** — Si consideri il circuito in figura che contiene la resistenza variabile R; sapendo che valgono $R_1 = 500\,\Omega$, $R_2 = 300\,\Omega$, $R_3 = 1000\,\Omega$, $R_4 = 200\,\Omega$, $R_5 = 1100\,\Omega$, $R_6 = 250\,\Omega$, $R_7 = 1500\,\Omega$, $R_8 = 4500\,\Omega$, $V_1 = 10\,\mathrm{V}$, $V_2 = 16\,\mathrm{V}$, determinare il valore di R affinché sia nulla l'intensità della corrente elettrica che passa attraverso R_5.



●●● **Es. 22** — Si consideri il circuito in figura e si dica se in esso vi sono resistenze collegate in serie o in parallelo; sapendo che valgono $R_1 = R_4 = 20.0\,\Omega$, $R_2 = R_5 = 30.0\,\Omega$, $R_3 = 40.0\,\Omega$, $V = 120\,\mathrm{V}$, determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

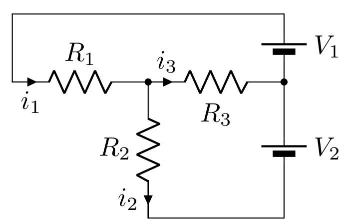
b) la potenza erogata dal generatore e le potenze dissipate dalle resistenze.



●●● **Es. 23** — Si consideri il circuito in figura in cui le tre resistenze sono collegate secondo lo schema detto *collegamento a stella*; sapendo che $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $R_3 = 40\,\Omega$, $V_1 = 60\,\mathrm{V}$, $V_2 = 90\,\mathrm{V}$, determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

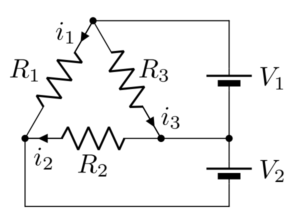
b) le potenze erogate dai generatori e le potenze dissipate dalle resistenze.



●●● **Es. 24** — Si consideri il circuito in figura in cui le tre resistenze sono collegate secondo lo schema detto *collegamento a triangolo*; sapendo che $R_1 = 20\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$, $R_3 = 40\,\Omega$, $V_1 = 60\,\mathrm{V}$, $V_2 = 90\,\mathrm{V}$, determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

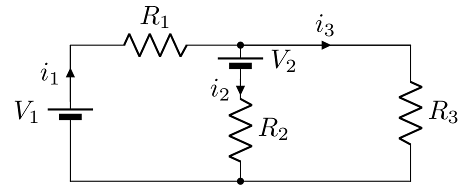
b) le potenze erogate dai generatori e le potenze dissipate dalle resistenze.



●●● **Es. 25** — Si consideri il circuito in figura e si dica se in esso vi sono resistenze collegate in serie o in parallelo; sapendo che $R_1 = 2.0\,\Omega$, $R_2 = 4.0\,\Omega$, $R_3 = 3.0\,\Omega$, $V_1 = 32\,\mathrm{V}$, $V_2 = 14\,\mathrm{V}$, determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

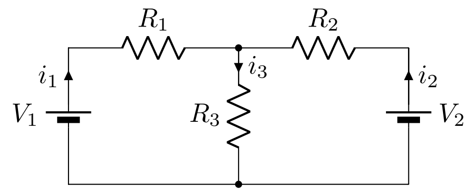
b) le potenze erogate dai generatori e le potenze dissipate dalle resistenze.



●●● **Es. 26** — Si consideri il circuito in figura e si dica se in esso vi sono resistenze collegate in serie o in parallelo; sapendo che $R_1 = 40\,\Omega$, $R_2 = 10\,\Omega$, $R_3 = 20\,\Omega$, $V_1 = 320\,\mathrm{V}$, $V_2 = 30\,\mathrm{V}$ determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

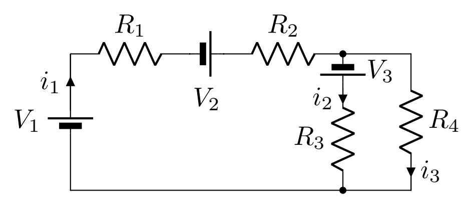
b) le potenze erogate dai generatori e le potenze dissipate dalle resistenze.



●●● **Es. 27** — Si consideri il circuito in figura e si dica se in esso vi sono resistenze collegate in serie o in parallelo; sapendo che $R_1 = 2.0\,\Omega$, $R_2 = R_3 = 4.0\,\Omega$, $R_4 = 12\,\Omega$, $V_1 = 16\,\mathrm{V}$, $V_2 = V_3 = 8.0\,\mathrm{V}$ determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

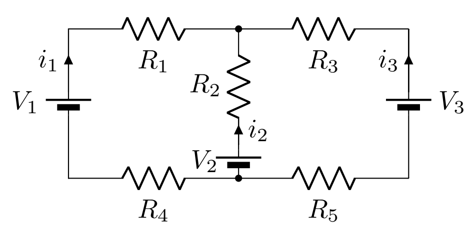
b) le potenze erogate dai generatori e le potenze dissipate dalle resistenze.



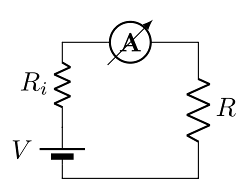
●●● **Es. 28** — Si consideri il circuito in figura e si dica se in esso vi sono resistenze collegate in serie o in parallelo; sapendo che $R_2 = 8.0\,\Omega$, $R_1 = R_3 = R_4 = R_5 = 2.0\,\Omega$, $V_2 = 8.0\,\mathrm{V}$, $V_1 = V_3 = 4.0\,\mathrm{V}$, determinare

a) le tensioni ai capi di ciascuna resistenza e le intensità di corrente elettrica che le attraversano;

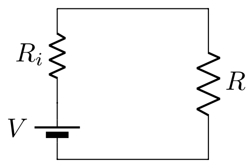
b) le potenze erogate dai generatori e le potenze dissipate dalle resistenze.



●●● **Es. 29** — ⋆ Si vuole misurare il valore della resistenza R usando un circuito come in figura, misurando l'intensità della corrente elettrica con un amperometro; la resistenza R_i è la serie delle resistenze interne del generatore e dell'amperometro. Sapendo che valgono $V = 60\,\mathrm{V}$, $R_i = 2.0\,\Omega$ e che il risultato della misura è $i = 5.8(2)\,\mathrm{A}$, determinare R e il suo errore di misura.



●●● **Es. 30** — ⋆ Si consideri il circuito in figura ove R_i è la resistenza interna del generatore e R è una resistenza variabile; sapendo che $V = 45\,\mathrm{V}$ e $R_i = 0.5\,\Omega$, si determini per quale valore di R la potenza dissipata su R è massima e il valore di tale potenza potenza massima.



●○○ **Es. 31** — Un circuito RC che ha tempo caratteristico $\tau = 1.5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s}$, è alimentato da un generatore che fornisce la tensione V_0; determinare il tempo necessario a caricare il condensatore fino alla differenza di potenziale $V = 0.99V_0$.

●○○ **Es. 32** — Un condensatore di capacità $C = 500\,\mu\mathrm{F}$ si scarica attraverso un filo di resistenza $R = 120\,\Omega$; determinare dopo quanto tempo la carica sulla armature è un terzo di quella iniziale.

●●○ **Es. 33** — Un condensatore di capacità C inizialmente scarico viene caricato collegandolo ad un generatore che fornisce la tensione $V_0 = 30.0\,\mathrm{V}$ con un filo di resistenza $R = 600\,\Omega$; sapendo che la tensione ai capi del condensatore dopo l'intervallo di tempo $\Delta t = 1.50\,\mu\mathrm{s}$ è $V = 12.0\,\mathrm{V}$, determinare C.

●●○ **Es. 34** — Un condensatore di capacità $C = 12\,\mathrm{nF}$ inizialmente scarico viene caricato collegandolo ad un generatore che fornisce la tensione $V_0 = 24\,\mathrm{V}$ con un filo di resistenza $R = 120\,\Omega$; determinare in quale istante la tensione ai capi del condensatore è uguale a quella ai capi della resistenza.

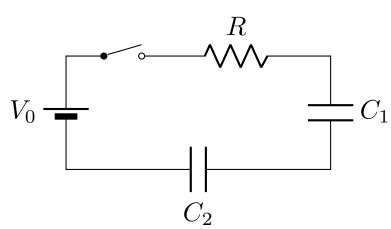
●●○ **Es. 35** — Un condensatore ha armature di area $S = 4.5\,\mathrm{cm}^2$ distanti $d = 1.5\,\mathrm{mm}$, fra le sue armature vi è un materiale dielettrico di costante relativa $\epsilon_r = 15$; il condensatore viene caricato, poi le sue armature vengono collegate per mezzo di un filo conduttore di resistenza $R = 120\,\Omega$ attraverso il quale il condensatore si scarica; determinare l'istante dall'inizio della scarica in cui la tensione ai capi del condensatore è dimezzata.

●●● **Es. 36** — ⋆ Le armature di un condensatore sferico hanno raggi $R_1 = 8.0\,\mathrm{cm}$ e $R_2 = 8.5\,\mathrm{cm}$; lo spazio fra le armature è riempito di porcellana che ha costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 7.0$ e resistività $\rho = 1.0 \cdot 10^{12}\,\Omega\,\mathrm{m}$; inizialmente la differenza di potenziale fra le armature è V_0, determinare

a) la resistenza dalla porcellana;
b) il tempo necessario affinché la differenza di potenziale ai capi del condensatore dimezzi.

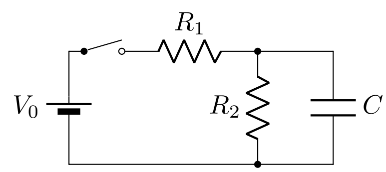
●●● **Es. 37** — Due condensatori di capacità $C_1 = 30\,\mu\mathrm{F}$ e $C_2 = 60\,\mu\mathrm{F}$ sono collegati come in figura in serie ad un generatore che fornisce la tensione $V_0 = 24\,\mathrm{V}$ tramite un filo di resistenza $R = 20\,\Omega$; lungo il circuito è presente anche un interruttore che viene tenuto chiuso per un tempo pari al tempo caratteristico τ del circuito; determinare

a) il tempo caratteristico τ del circuito;
b) la differenza di potenziale ai capi di C_2 quando l'interruttore viene aperto.



●●● **Es. 38** — Si consideri il circuito in figura; inizialmente l'interruttore è chiuso e il condensatore si carica; a carica completata l'interruttore viene aperto e il condensatore si scarica. Sapendo che $V_0 = 40\,\mathrm{V}$, $R_1 = 15\,\Omega$ $R_2 = 30\,\Omega$, $C = 60\,\mu\mathrm{F}$, determinare

a) la carica del condensatore al termine della carica;
b) la tensione ai capi del condensatore all'istante $t = 2\tau$ dopo l'apertura dell'interruttore, essendo τ il tempo caratteristico del circuito.



●●○ **Es. 39** — Una cella elettrolitica, che contiene una soluzione di $CuSO_4$ (solfato di rame), è attraversata per un tempo t da una corrente elettrica di intensità $i = 0.12\,\mathrm{A}$;

a) sapendo che il rame ha una massa molare di $M_0^{Cu} = 63.5\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ e che ha valenza $v_{Cu} = 2$ e che al catodo si depositano $M_{Cu} = 118.44\,\mathrm{mg}$ di rame, si determini t;
b) se la stessa corrente elettrica, nello stesso tempo, attraversa una cella in cui si trova una soluzione di $AgNO_2$ (nitrito di argento), sapendo che la massa molare dell'argento è $M_0^{Ag} = 108\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ e la sua valenza è $v_{Ag} = 1$, si determini la massa di argento che si deposita al catodo.

●●● **Es. 40** — Due celle elettrolitiche sono disposte in serie in un circuito. La prima contiene $AgNO_3$ (nitrato di argento), e la seconda $ZnSO_4$ (solfato di zinco); si fa passare nel circuito una corrente elettrica costante per $t = 30\,\mathrm{min}$ e si depositano $M = 5.0\,\mathrm{g}$ di argento; sapendo che l'argento ha massa molare $M_0^{Ag} = 108\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ e valenza $v_{Ag} = 1$ e che lo zinco ha massa molare $M_0^{Zn} = 65.4\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ e valenza $v_{Zn} = 2$, si determini

a) l'intensità della corrente elettrica che è passata nel circuito;
b) la massa dello zinco che si è depositato nella seconda cella.

Capitolo 6

Magnetostatica

6.1 Campo magnetico

Una corrente elettrica continua genera nello spazio circostante un *campo magnetico*; questo campo magnetico, a sua volta agisce sulle correnti elettriche e, piú in generale, sulle cariche in moto. L'unità di misura del campo magnetico è detta *tesla*, simbolo T; a volte si usa anche il sottomultiplo *gauss*. simbolo G. La relazione fra le due unità è $1\,\mathrm{G} = 10^{-4}\,\mathrm{T}$.
La relazione fra l'intensità della corrente elettrica ed il campo magnetico da essa generato è dato dalla legge della circuitazione di Ampère:

> *La circuitazione del campo magnetico $\boldsymbol{B}$ lungo una curva chiusa orientata γ è proporzionale all'intensità della corrente elettrica i concatenata con γ.*

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{B}) = \mu_0 i \tag{6.1}$$

La costante di proporzionalità μ_0 è detta *permeabilità magnetica del vuoto* e il suo valore è

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$$

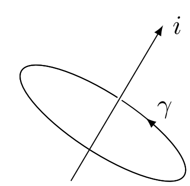


Figura 6.1: Il segno della circuitazione

Per corrente elettrica concatenata si intende una corrente elettrica che attraversi una qualsiasi superficie avente γ per bordo; il segno della circuitazione si intende positivo quando il verso di γ è visto in senso antiorario da un osservatore che sia orientato come la corrente elettrica i, come rappresentato nella figura 6.1.
La forza magnetica agente su una carica q in moto con velocità $\boldsymbol{v}$ immersa in un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ è detta *forza di Lorentz* e vale

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{6.2}$$

la forza quindi è perpendicolare a $\boldsymbol{B}$ e a $\boldsymbol{v}$ e il suo lavoro è nullo.
Se una carica q di massa m si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ perpendicolare a $\boldsymbol{B}$, campo magnetico uniforme, la carica si muove con traiettoria circolare di raggio

$$r = \frac{mv}{qB} \tag{6.3}$$

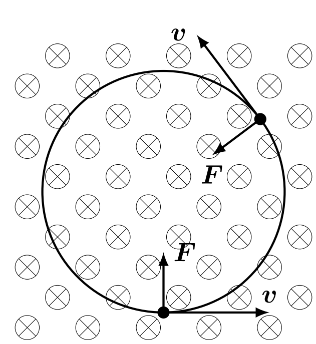


Figura 6.2: La traiettoria circolare.

In figura 6.2 è rappresentato il campo magnetico entrante mediante la convenzione per cui si usa una crocetta $\otimes$ per indicare il campo entrante nel foglio e un pallino $\odot$ per il campo uscente dal foglio. Se la velocità $\boldsymbol{v}$ non è perpendicolare a $\boldsymbol{B}$, ma forma con esso un angolo θ, il raggio dipende solo dalla componente della velocità perpendicolare a $\boldsymbol{B}$, $v_\perp = v \operatorname{sen}\theta$; la componente parallela

$v_\parallel = v\cos\theta$ a $\boldsymbol{B}$ corrisponde ad un moto uniforme. Si ha quindi la composizione fra un moto circolare ed un moto uniforme lungo l'asse della circonferenza, la traiettoria è quindi un'elica; il raggio della circonferenza dell'elica ed il suo passo sono dati da

$$r = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{mv}{qB}\,\mathrm{sen}\,\theta \quad , \quad d = \frac{2\pi m v_\parallel}{qB} = \frac{2\pi m v}{qB}\cos\theta$$

La forza magnetica agente su un filo rettilineo di lunghezza ℓ percorso da una corrente elettrica di intensità i è

$$\boldsymbol{F} = i\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B} \tag{6.4}$$

ove il vettore $\boldsymbol{\ell}$ ha modulo ℓ e direzione e verso della corrente elettrica.
Se il filo non è rettilineo è necessario utilizzare il calcolo integrale; la forza $d\boldsymbol{F}$ sul tratto infinitesimo $d\boldsymbol{\ell}$ del filo è dato da

$$d\boldsymbol{F} = i d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{B}$$

Come per il campo elettrico, anche per il campo magnetico, oltre che ad una legge per la circuitazione, si ha anche una legge per il flusso:
Il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa S è sempre nullo.

$$\Phi_S(\boldsymbol{B}) = 0$$

il che corrisponde ad affermare che non esistono cariche magnetiche.
Il fatto che la circuitazione di $\boldsymbol{B}$ non sia nulla significa che la forza magnetica non è conservativa; non esiste quindi un potenziale magnetico.
Il campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente elettrica di intensità i ha le linee di campo disposte lungo circonferenze con il centro sul filo, orientate secondo la regola vista sopra in figura 6.1. Il campo magnetico è quindi tangente alle circonferenze con il centro sul filo e, applicando la legge di Ampère si trova che il suo modulo è

$$B = \mu_0\,\frac{i}{2\pi r} \tag{6.5}$$

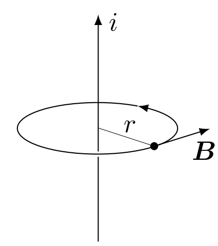


Figura 6.3: Il campo magnetico generato da un filo rettilineo.

ove r è il raggio della circonferenza.
Se vi sono due fili paralleli percorsi dalle correnti elettriche di intensità i_1 ed i_2 il campo magnetico generato da ciascuno dei due agisce sull'altro; ne risulta una forza attrattiva se le due correnti elettriche hanno lo stesso verso e repulsiva se hanno versi opposti. Il modulo della forza è proporzionale alla lunghezza ℓ del filo su cui agisce; si ha

$$F = \mu_0\,\frac{i_1 i_2}{2\pi r}\,\ell$$

Piú in generale il campo magnetico generato da un tratto infinitesimo $d\boldsymbol{\ell}$ di filo percorso dalla corrente elettrica di intensità i nel punto P, individuato dal vettore $\boldsymbol{r}$ è dato dalla *legge di Biot-Savart*:

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{d\boldsymbol{\ell} \times \boldsymbol{r}}{r^3}\,i \tag{6.6}$$

ove il verso dell'elemento infinitesimo $d\boldsymbol{\ell}$ è lo stesso di quello della corrente elettrica. In generale, per ottenere il campo magnetico totale generato dall'intero filo occorre il calcolo integrale.

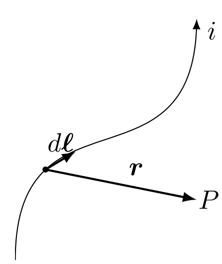


Figura 6.4: La legge di Biot-Savart

6.1.1 Dipolo magnetico

Ad ogni circuito chiuso percorso da una corrente elettrica è possibile associare un *dipolo magnetico*.

Per vederlo si consideri una spira rettangolare di lati a, b immersa in un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B}$. Il vettore campo magnetico forma un angolo θ con il versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ perpendicolare al piano della spira e con il verso stabilito con la solita regola del verso antiorario. Sui quattro lati della spira il campo magnetico agisce con quattro forze, come indicato nella figura 6.5; le forze $\boldsymbol{F}_2$ ed $\boldsymbol{F}_4$ sono uguali e contrarie e quindi danno un contributo nullo; le forze $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_3$ formano una coppia di momento avente modulo

$$M = F_2 a \operatorname{sen}\theta = ibBa \operatorname{sen}\theta$$

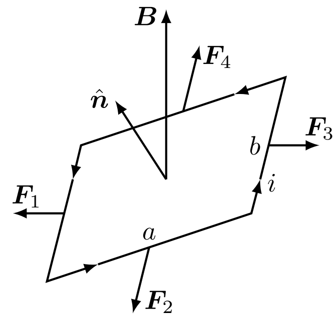


Figura 6.5: La spira immersa in un campo magnetico.

Si definisce allora *momento magnetico* della spira il vettore

$$\boldsymbol{m} = iab\,\hat{\boldsymbol{n}}$$

che ha il verso di $\hat{\boldsymbol{n}}$ e il modulo dato dal prodotto dell'area della spira per la corrente che circola in essa. In questo modo il momento delle forze si può scrivere

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}$$

Questa relazione si applica al caso generale qualsiasi sia la forma della spira.
Una spira di dipolo magnetico $\boldsymbol{m}$ immersa in un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ ha energia W data da

$$W = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$$

PROBLEMI RISOLTI

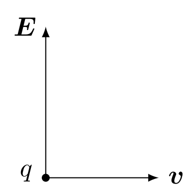
*Problema 1

La carica $q = 350\,\mathrm{nC}$ si muove con velocità di modulo $v = 2.50 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ diretta secondo l'asse delle x positive ed entra in una regione di spazio in cui vi sono un campo elettrico uniforme di modulo $E = 1.20 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ diretto nel verso delle y positive e un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B}$; determinare il modulo, direzione e verso del minimo campo magnetico $\boldsymbol{B}$ per cui la forza agente sulla carica q è nulla.

Soluzione

La situazione è rappresentata in figura. La forza totale agente sulla carica q è

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$



essa è nulla se vale

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

Quindi il campo magnetico si deve trovare nel piano perpendicolare a $\boldsymbol{E}$ contenente $\boldsymbol{v}$, cioè nel piano yz. Scrivendo la precedente equazione in termini dei moduli si ha

$$E = vB \operatorname{sen}\theta$$

ove θ è l'angolo compreso fra $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{B}$; visto che i valori di E e v sono dati, il valore di B è minimo quando $\operatorname{sen}\theta$ è massimo, cioè quando $\theta = 90°$. Se ne deduce che $\boldsymbol{B}$ è parallelo all'asse z e il suo verso è quello delle z positive, cioè uscente dal foglio; il suo modulo è

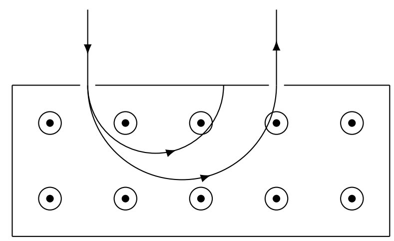
$$B = \frac{E}{v}$$

Un tale dispositivo, che consente di selezionare particelle cariche con una certa velocità, regolando opportunamente i moduli di $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$, è detto *selettore di velocità*.

***Problema 2**

Uno *spettrometro di massa* è un dispositivo che permette di distinguere particelle di massa diversa come diversi isotopi di un certo elemento. Si supponga che un fascio di ioni di carbonio C ionizzati due volte e quindi aventi la stessa carica $q = 2e$; da questo fascio si vogliono estrarre gli ioni di $^{14}C^{++}$ di carbonio 14 la cui massa atomica è $A = 14.003241\,\mathrm{u}$. Quindi si accelera il fascio per mezzo di una differenza di potenziale $V = 20\,\mathrm{V}$ si fa entrare attraverso una sottile fenditura in una regione di spazio ove sia presente un campo magnetico di modulo $\boldsymbol{B}$ perpendicolare alla velocità degli ioni; questi percorrono orbite diverse a seconda della massa. Determinare il modulo del campo magnetico se gli ioni richiesti escono dal dispositivo da una seconda fenditura posta a distanza $d = 25\,\mathrm{cm}$ dalla prima.

Soluzione



La situazione è quella descritta in figura, in cui è indicata per chiarezza anche la traiettoria degli ioni non selezionati. L'energia cinetica con cui gli ioni entrano nel dispositivo è

$$\frac{1}{2}mv^2 = qV = 2eV$$

da cui si trova la velocità

$$v = \sqrt{\frac{4eV}{m}}$$

quindi, per mezzo della (6.3), si ottiene

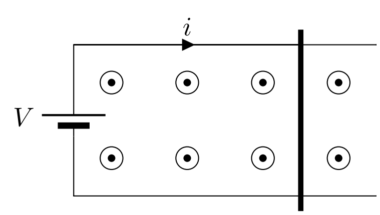
$$B = \frac{mv}{qr} = \frac{mv}{ed} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{mV}{e}} = 1.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$$

Si noti che la massa atomica del ^{14}C è data in *unità di massa atomica* (simbolo u) che corrisponde ad $1/12$ della massa di un atomo di ^{12}C e per il quale si ha

$$1\,\mathrm{u} = 1.6605402(10) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$$

Problema 3

Si consideri un circuito costituito da un conduttore di resistenza trascurabile piegato a U su cui può strisciare senza attrito un conduttore di lunghezza $\ell = 15\,\mathrm{cm}$ di resistenza $R = 25\,\Omega$; in questo circuito gira una corrente elettrica spinta da un generatore di tensione $V = 20\,\mathrm{V}$. Il circuito si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico di modulo $B = 45\,\mathrm{mT}$ perpendicolare al piano del circuito come rappresentato in figura. Determinare modulo direzione e verso della forza agente sul conduttore.



Soluzione

La corrente circola nel circuito in senso orario, quindi con riferimento alla figura scorre nel conduttore vero il basso. Essendo il campo magnetico uscente, per la (6.4) la forza è diretta verso sinistra, tende cioè a diminuire la dimensione del circuito. Il modulo della forza è

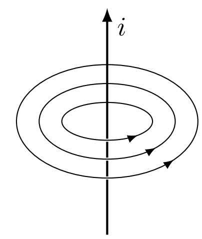
$$F = i\ell B = \frac{V}{R}\ell B = 5.4\,\mathrm{mN}$$

***Problema 4**

Dimostrare che il campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente elettrica di intensità i è dato dalla (6.5).

Soluzione

La geometria del problema suggerisce che le linee del campo magnetico siano disposto come circonferenze concentriche con il centro sul filo e giacenti su piani perpendicolari al filo, come rappresentato in figura. In questo caso conviene scegliere come curva γ lungo cui calcolare la circuitazione una di queste linee di campo; considerando quindi la curva γ di raggio r per simmetria si può ritenere che il modulo di $\boldsymbol{B}$ lungo γ sia costante, vale cosí



$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{B}) = 2\pi r B$$

A questo, per la legge di Ampère (6.1), si ha

$$2\pi r B = \mu_0 i$$

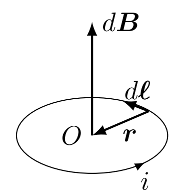
da cui la (6.5).

***Problema 5**

Determinare il campo magnetico $\boldsymbol{B}$ generato da una spira circolare di raggio R percorsa dalla corrente elettrica di intensità i nel centro del spira ed in un punto dell'asse di simmetria.

Soluzione

Si faccia riferimento alla figura; l'elemento infinitesimo $d\boldsymbol{\ell}$ genera nel centro un campo magnetico infinitesimo $d\boldsymbol{B}$ dato dalla legge di Biot-Savart (6.6); $d\boldsymbol{\ell}$ e $\boldsymbol{r}$ sono ortogonali e il modulo di $\boldsymbol{r}$ è R, si ha quindi

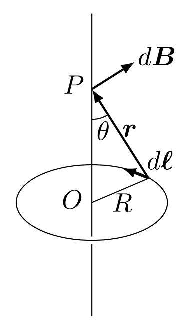


$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i d\ell}{R^2}$$

Sommare i contributi di tutti gli elementi infinitesimi in questo caso è semplice e si trova

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i 2\pi R}{R^2} = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

Nel caso di un punto P sull'asse di simmetria, con riferimento alla figura, l'elemento infinitesimo $d\boldsymbol{\ell}$ genera il campo magnetico infinitesimo $d\boldsymbol{B}$ che forma l'asse di simmetria un angolo $90° - \theta$; d'altra parte l'elemento infinitesimo diametralmente opposto genera un campo infinitesimo uguale; la somma dei due contributi ha la sola componente parallela all'asse e ciascuno dei due contribuisce per una quantità



$$dB_\parallel = dB \operatorname{sen}\theta = dB\,\frac{R}{r} = dB\,\frac{R}{\sqrt{x^2+R^2}}$$

D'altra parte, per la legge di Biot-Savart si ha

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i d\ell}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i d\ell}{x^2+R^2}$$

se x è la distanza di P dal centro O della spira. Quindi il contributo dell'elemento $d\boldsymbol{\ell}$ è quindi

$$dB_\parallel = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{iRd\ell}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

Il contributo di tutta la spira quindi dà

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{i2\pi R^2}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2}\,\frac{iR^2}{\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

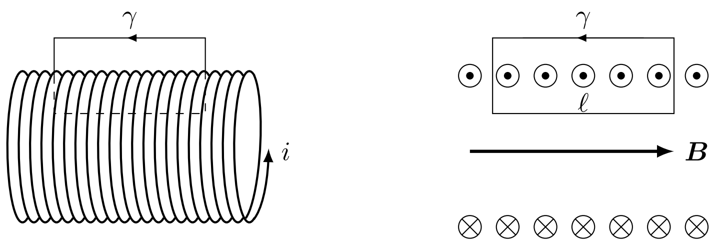
Per $x = 0$ si riottiene il risultato trovato sopra per il campo magnetico nel centro O.

*__Problema 6__

Determinare il campo magnetico generato da un solenoide indefinito.

Soluzione

Un solenoide è un avvolgimento a spirale di sezione cilindrica, come rappresentato in figura



Supponendo che il solenoide sia indefinitamente lungo è lecito considerare le linee di campo magnetico all'interno parallele all'asse del solenoide; queste poi devono chiudersi indefinitamente lontano, pertanto il campo magnetico può essere considerato nullo all'esterno del solenoide. Per determinare il campo, quindi si può utilizzare la legge di Ampère (6.1), calcolando la circuitazione lungo la curva γ rappresentata in figura. La circuitazione di $\boldsymbol{B}$ è quindi nulla nel tratto esterno e nei due tratti perpendicolari alla superficie del solenoide cilindrico; rimane solo il tratto interno, di lunghezza ℓ, orientato come il campo $\boldsymbol{B}$. Si ha pertanto

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{B}) = B\ell$$

Sia quindi N il numero di avvolgimenti del solenoide nel tratto ℓ; per la legge di Ampère si ha $B\ell = \mu_0 N i$, quindi

$$B = \mu_0\,\frac{N}{\ell}\,i = \mu_0 n i \tag{6.7}$$

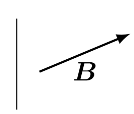
ove $n = N/\ell$ è il numero di avvolgimenti per unità di lunghezza. Si noti che il campo B non dipende da ove si trova la curva γ all'interno del solenoide, quindi B è costante all'interno del solenoide e nullo fuori.

6.2 Esercizi

Campo magnetico

●○○ **Es. 1** — La carica $q = 2.0\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}$ si muove con velocità $v = 4.5\cdot 10^{6}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme, perpendicolare alla direzione del moto, di intensità $B = 1.0\cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$. Determinare il modulo della forza magnetica agente sulla carica.

●○○ **Es. 2** — Un filo elettrico si trova in una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B}$ come nella figura a fianco. Determinare il verso di percorrenza della corrente affinché il filo risenta di una forza uscente dal foglio.



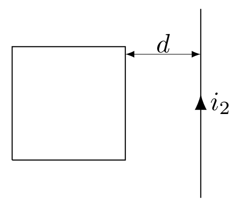
●○○ **Es. 3** — Una particella di carica $q = 5.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ e massa $m = 8.2 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{kg}$ si muove lungo il semiasse delle ascisse positive con velocità $v = 2.0 \cdot 10^{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ in una regione di spazio ove è presente un campo magnetico uniforme di modulo $B = 48\,\mathrm{mT}$ giacente sul piano xy in modo da formare un angolo di 60° con il semiasse positivo delle y.

a) Determinare il modulo della forza agente sulla carica.

b) Dedurne il tipo di moto.

●○○ **Es. 4** — Determinare il modulo del campo magnetico prodotto da una spira circolare di raggio $r = 10\,\mathrm{cm}$, in cui circola la corrente elettrica di intensità $i = 15\,\mathrm{A}$, in un punto del suo asse di simmetria ad una distanza $d = 15\,\mathrm{cm}$ dal centro della spira.

●●○ **Es. 5** — Una spira quadrata di lato $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ è percorsa da una corrente elettrica di intensità i_1; complanare alla spira, e parallela ad uno dei suoi lati, a distanza $d = 20\,\mathrm{cm}$ si trova un filo rettilineo indefinito percorso dalla corrente elettrica di intensità $i_2 = 2.0\,\mathrm{A}$; sapendo che il filo attira la spira con una forza di modulo $F = 8.0\,\mathrm{mN}$, determinare l'intensità i_1 della corrente elettrica che circola nella spira, specificandone il verso, con riferimento alla figura.



●○○ **Es. 6** — Una particella α di massa $m = 6.644657230(82) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ e carica $q = 2e$, si muove lungo una traiettoria circolare di raggio $r = 4.5\,\mathrm{cm}$ in un campo magnetico di intensità $B = 1.2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$, orientato in modo che sia uscente dal piano orizzontale. Si determinino:

a) il verso di percorrenza della traiettoria circolare;

b) il modulo della velocità della particella α;

c) il periodo di rivoluzione.

●●● **Es. 7** — Due fili indefiniti paralleli distanti $d = 50\,\mathrm{cm}$ sono percorsi da correnti elettriche discordi di intensità $i_1 = 20\,\mathrm{A}$ e $i_2 = 30\,\mathrm{A}$. Si determini il modulo del campo magnetico da loro generato in un punto P che sia equidistante dai due fili e si trovi a distanza $\ell = 60\,\mathrm{cm}$ dal piano dei fili.

●●○ **Es. 8** — Tre fili paralleli, di lunghezza $\ell = 4.0\,\mathrm{m}$, sono uscenti da tre vertici A, B e C di un quadrato di lato $a = 20\,\mathrm{cm}$; sono percorsi da correnti elettriche equiverse rispettivamente di intensità $i_A = 2.0\,\mathrm{A}$, $i_B = 4.0\,\mathrm{A}$ e $i_C = 2.0\,\mathrm{A}$; determinare

a) il modulo del campo magnetico presente nel quarto vertice del quadrato;

b) la forza magnetica sul filo passante per B.

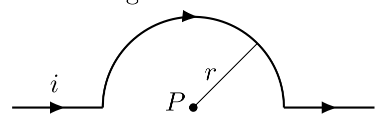
●○○ **Es. 9** — Un fascio di protoni entra in un selettore di velocità muovendosi lungo l'asse x, con velocità di modulo $v = 20\,\mathrm{km\,s^{-1}}$; sapendo che vi è un campo magnetico di modulo $B = 5.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ diretto nel verso delle y negative,

a) determinare modulo direzione e verso del campo elettrico tale che i protoni non siano deflessi;

b) rispondere alla domanda precedente se il fascio è costituito da elettroni aventi la stessa velocità.

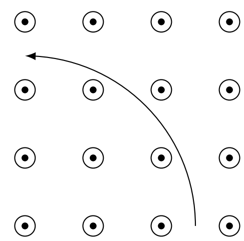
●●○ **Es. 10** — Due solenoidi coassiali di lunghezza $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ e di raggi $r_1 = 10\,\mathrm{cm}$ e $r_2 = 20\,\mathrm{cm}$, sono costituiti rispettivamente da $N_1 = 5000$ e $N_2 = 6000$ avvolgimenti; sapendo che sono percorsi da due correnti elettriche di verso opposto e di intensità $i_1 = 2.5\,\mathrm{A}$ e $i_2 = 4.0\,\mathrm{A}$, determinare il modulo del campo magnetico alle distanze $d_1 = 7.0\,\mathrm{cm}$ e $d_2 = 14\,\mathrm{cm}$dall'asse comune dei due solenoidi.

●●○ **Es. 11** — Determinare il campo magnetico generato in P dal filo piegato a semicirconferenza, come rappresentato in figura, sapendo che valgono $r = 10\,\mathrm{cm}$ e $i = 3.0\,\mathrm{A}$.



●●○ **Es. 12** — Una particella di massa $m = 6.64 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ e carica di modulo $|q| = 2e$, viene accelerata mediante la differenza di potenziale $\Delta V = 1.20 \cdot 10^{6}\,\mathrm{V}$ e quindi entra in un campo magnetico di modulo $B = 2.20\,\mathrm{T}$ e viene deviata come rappresentato in figura determinare

a) segno della carica della particella e raggio di curvatura;
b) il modulo della velocità che ha la particella dopo essere stata accelerata dalla differenza di potenziale;
c) il raggio della traiettoria.



●●○ **Es. 13** — Due fili rettilinei, 1 e 2, paralleli distano $d = 60\,\mathrm{cm}$ e sono percorsi da correnti elettriche di intensità i_1 ed i_2; sapendo che il campo magnetico fra i due fili nel punto P che si trova a distanza $d/3$ dal filo 1 è nullo e che vale $i_1 = 2.4\,\mathrm{A}$, determinare

a) se le due correnti elettriche sono equiverse o antiverse;
b) l'intensità di i_2;
c) il campo magnetico agente su ciascun filo generato dalla corrente elettrica circolante sull'altro filo;
d) l'intensità della forza agente su ciascun filo per unità di lunghezza, specificandone direzione e verso.

●●○ **Es. 14** — Con riferimento ad un sistema cartesiano ortogonale, un corpo avente carica elettrica $q = 5.0 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ in moto nella direzione delle x positive con velocità di modulo $v = 6.5 \cdot 10^{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, entra in una zona dello spazio dove è presente un campo elettrico, diretto nella direzione delle y positive, di modulo $E = 2.5 \cdot 10^{2}\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; determinare modulo direzione e verso che deve avere un campo magnetico presente nella stessa zona dello spazio affinché la forza magnetica agente sulla carica in moto sia uguale e contraria alla forza elettrica.

●○○ **Es. 15** — Una particella di carica $q = 3.0\,\mathrm{\mu C}$ e massa $m = 0.20\,\mathrm{\mu g}$ che si muove con $\boldsymbol{v}$ perpendicolare a un campo magnetico di modulo $B = 2.5\,\mathrm{T}$ è soggetta a una forza di modulo $F = 0.65\,\mathrm{N}$; determinare

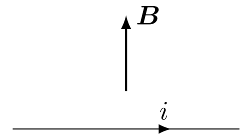
a) la velocità della particella;
b) il raggio della sua orbita.

●●○ **Es. 16** — Un tratto di filo conduttore lungo $\ell = 30\,\mathrm{cm}$ è percorso da una corrente elettrica di intensità $i = 0.08\,\mathrm{A}$ e si trova in una zona di campo magnetico costante, perpendicolare al filo; si osserva che esso subisce un'accelerazione di modulo $a = 0.3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, sapendo che la sua massa è $m = 80\,\mathrm{g}$, determinare

a) quanto vale il modulo B del campo magnetico;
b) come si deve variare $\boldsymbol{B}$ per ottenere un'accelerazione doppia della precedente e di verso opposto.

●●○ **Es. 17** — Un filo orizzontale percorso dalla corrente elettrica di intensità $i = 1.2\,\mathrm{A}$ è soggetto all'azione di un campo magnetico di intensità $B = 1.2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$ diretto verso l'alto; sapendo che il filo subisce una forza magnetica di modulo $F = 4.8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}$, determinare

a) la lunghezza del filo e la direzione e il verso della forza;
b) come cambia la forza se il filo è orientato verso l'alto o verso il basso.



●●○ **Es. 18** — Un tratto di filo di lunghezza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ percorso da una corrente elettrica di intensità $i_1 = 0.5\,\mathrm{A}$ è situato in una regione in cui trova un campo magnetico ignoto. Il filo ha massa $m = 200\,\mathrm{g}$ e subisce un'accelerazione di modulo $a = 0.08\,\mathrm{m\,s^{-2}}$; determinare

a) il modulo minimo del campo magnetico;
b) cosa cambia se l'intensità della corrente elettrica viene ridotta a $i_2 = 0.2\,\mathrm{A}$ e il suo verso viene invertito.

●●○ **Es. 19** — Un filo conduttore orizzontale è percorso da una corrente elettrica di intensità $i = 2.0\,\mathrm{A}$ ed è disposto in direzione sudovest-nordest in una regione ove si trova un campo magnetico orizzontale orientato verso nord; sapendo che il cavo è lungo $\ell = 1.2\,\mathrm{m}$ e ha massa $m = 18\,\mathrm{g}$ e che il modulo del campo magnetico è $B = 1.3 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$, determinare l'accelerazione del cavo.

●●○ **Es. 20** — Un filo conduttore si trova in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico di modulo $B = 5.5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}$ ed è percorso da una corrente elettrica di intensità $i = 10\,\mathrm{A}$ nel verso delle x positive; determinare il modulo della forza magnetica per unità di lunghezza se $\boldsymbol{B}$ è diretto:

a) nel verso delle x positive;
b) nel verso delle y positive;
c) nel verso delle z positive;

●●○ **Es. 21** — Un filo rettilineo disposto orizzontalmente è percorso da una corrente elettrica di intensità $i = 1.6\,\mathrm{A}$ ed è soggetto a un campo magnetico anch'esso orizzontale e perpendicolare al filo, di modulo $B = 0.9\,\mathrm{T}$; sapendo che la massa del filo è $m = 180\,\mathrm{g}$ e che la forza magnetica bilancia il peso del filo determinare la lunghezza del filo.

●●○ **Es. 22** — Un elettrone entra in una regione di spazio ove si trovano un campo elettrico ed un campo magnetico perpendicolari alla velocità $\boldsymbol{v}$ dell'elettrone; determinare

a) la relazione fra i moduli e le direzioni di $\boldsymbol{B}$ ed $\boldsymbol{E}$ affinché la forza totale sull'elettrone sia nulla;
b) cosa cambia se al posto dell'elettrone vi è un protone.

●●○ **Es. 23** — Un protone si muove nella direzione delle z positive con una velocità avente modulo $v = 2.0 \cdot 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, perpendicolare a un campo magnetico $\boldsymbol{B}$; sapendo che il protone subisce un'accelerazione di modulo $a = 3.0 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ nella direzione delle x negative, determinare

a) il modulo, la direzione e il verso di $\boldsymbol{B}$;
b) come cambiano la forza e l'accelerazione se lo stesso campo magnetico agisce su un elettrone avente la stessa velocità.

●●○ **Es. 24** — In un acceleratore di particelle un fascio di protoni è accelerato fino alla velocità di modulo $v = 5.0 \cdot 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, quando entra in un campo magnetico. Determinare il modulo di $\boldsymbol{B}$ in modo tale che la forza magnetica annulli gli effetti della gravità sui protoni.

●●○ **Es. 25** — Due ioni di uguale carica $q = 2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$ si muovono, in una regione contenente un campo magnetico costante, su orbite circolari di uguale raggio $r = 10\,\mathrm{cm}$; sapendo che uno di essi ha massa $m_1 = 10 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{kg}$ e l'altro $m_2 = 2.0 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{kg}$,

a) determinare quale dei due ioni ha velocità maggiore;

b) sapendo che il primo si muove con velocità di modulo $v_1 = 1.0 \cdot 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, determinare i periodi delle rotazioni.

●●○ **Es. 26** — Un protone entra in una regione di in cui si trova un campo magnetico costante di costante con velocità di modulo $v = 5.74 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e direzione perpendicolare al campo magnetico; sapendo che percorre un'orbita circolare di raggio $r = 30.0\,\mathrm{cm}$, determinare

a) il modulo del campo magnetico;

b) il periodo di rotazione del protone;

c) il modulo della forza agente sul protone.

●●○ **Es. 27** — Nell'atomo di idrogeno l'elettrone percorre un'orbita, che può essere considerata circolare con raggio $r = 5.29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$ e velocità di modulo $v = 2.19 \cdot 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. In un laboratorio di fisica si vuole riprodurre il moto dell'elettrone utilizzando un campo magnetico. Determinare

a) il modulo del campo magnetico necessario, perpendicolare al piano dell'orbita, necessario a riprodurre la medesima traiettoria;

b) come cambia l'orbita se al posto dell'elettrone si utilizza un protone con la stessa velocità.

●●○ **Es. 28** — Una particella di carica $q = 0.75\,\mathrm{\mu C}$ entra in una scatola cubica, di lato $\ell = 16\,\mathrm{cm}$, dove è presente un campo magnetico di modulo $B = 0.50\,\mathrm{T}$ diretto verso l'alto. La particella entra nel punto medio di una faccia laterale, ed esce dal punto medio di una faccia adiacente; sapendo che la massa della particella è $m = 1.0 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{kg}$, determinare la velocità della particella.

●●○ **Es. 29** — Una particella carica di massa $m = 3.2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{kg}$ si muove con velocità di modulo $v = 2.2 \cdot 10^5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ percorre, sotto l'azione di un campo magnetico di modulo $B = 3.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$, un'orbita circolare di raggio $r = 20\,\mathrm{cm}$;

a) determinare il modulo F della forza subita dalla particella;

b) se raddoppiano i valori di m e v, determinare come cambiano r ed F;

c) stabilire cambia nella risposta al quesito a) se si inverte il segno della carica.

●●○ **Es. 30** — Una particella di carica $q_1 = 200\,\mathrm{nC}$, massa $m_1 = 2.5 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{kg}$ e velocità di modulo $v_1 = 2.0 \cdot 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ percorre, sotto l'azione di un campo magnetico di modulo $B = 4.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$, un'orbita circolare di raggio r_1; una seconda particella avente massa doppia, carica $q_2 = \frac{5}{4}\,q_1$ e velocità $v_2 = \frac{5}{2}\,v_1$ è soggetta allo stesso campo magnetico; determinare

a) il raggio r_2 dell'orbita della seconda particella;

b) il modulo di v_2 affinché sia $r_2 = r_1$.

●●○ **Es. 31** — Un elettrone è accelerato fino all'energia di $\mathcal{E} = 11\,\mathrm{keV}$, per poi entrare in una regione ove si trova un campo magnetico di modulo $B = 250\,\mathrm{G}$, perpendicolare alla velocità dell'elettrone; determinare il raggio dell'orbita.

●●○ **Es. 32** — Un nucleo di deuterio e una particella α descrivono, nello stesso campo magnetico, orbite circolari aventi lo stesso raggio; determinare la relazione

a) fra i moduli v_D e v_α delle loro velocità;

b) fra i moduli p_D e p_α delle loro quantità di moto;

c) fra le loro energie cinetiche $\mathcal{E}_{cD}$ e $\mathcal{E}_{c\alpha}$.

●●○ **Es. 33** — Un tratto di filo percorso da una corrente elettrica di intensità $i = 3.0\,\mathrm{A}$ è disposto orizzontalmente in una regione ove è presente un campo magnetico, anch'esso orizzontale, formante con il filo un angolo $\theta = 25°$; la massa del filo è $m = 3.0\,\mathrm{g}$ e la sua lunghezza è $\ell = 20\,\mathrm{cm}$.

a) Determinare il modulo di $\boldsymbol{B}$ affinché il filo sia in equilibrio.

b) Se un protone entra nella regione e inizia a muoversi su una circonferenza di raggio $r = 9.6 \cdot 10^{-8}$ m, determinare il modulo della velocità del protone.

c) Determinare come cambierebbe il raggio se al posto del protone ci fosse una particella di massa tripla, di carica tripla e di segno negativo.

●●○ **Es. 34** — Un filo di lunghezza $\ell = 30\,\mathrm{cm}$, percorso da corrente elettrica, si trova in una regione in cui è presente un campo magnetico di modulo $B = 0.06\,\mathrm{T}$ che il filo un angolo $\theta = 35°$.

a) Sapendo che il filo subisce una forza di modulo $F = 1.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$ ed è lungo 30 cm, determinare l'intensità della corrente elettrica che lo attraversa.

b) Se disponiamo un secondo filo parallelo al primo di uguale lunghezza e percorso da una corrente con la stessa intensità, determinare a che distanza deve essere posto affinché il modulo della forza tra i fili sia F.

●○○ **Es. 35** — Si vuole costruire un trenino elettrico in cui la forza motrice sia di tipo magnetico: la corrente elettrica arriva tramite una rotaia, passa per una ruota, attraversa l'asse, arriva all'altra ruota ed è trasmessa all'altra rotaia; sapendo che il trenino deve essere spinto da una forza di modulo $F = 10\,\mathrm{N}$ e se il modulo del campo magnetico verticale è $B = 10\,\mu\mathrm{T}$, e che l'asse del treno, assimilabile a un'asta mobile, ha lunghezza $\ell = 3.5\,\mathrm{cm}$ determinare il valore dell'intensità di corrente elettrica che deve circolare nel circuito.

●●○ **Es. 36** — Quattro fili paralleli sono disposti a formare un quadrato di lato $\ell = 14\,\mathrm{cm}$; sapendo che sono percorsi da tre correnti elettriche entranti di intensità $i_1 = 10\,\mathrm{A}$ e una uscente di intensità $i_2 = 20\,\mathrm{A}$, determinare il modulo del campo magnetico nel centro del quadrato.

●●○ **Es. 37** — Due fili paralleli sono distanti $D = 15\,\mathrm{cm}$ e sono percorsi da correnti elettriche discordi di intensità $i_1 = 0.7\,\mathrm{A}$ e $i_2 = 0.55\,\mathrm{A}$. Il punto P si trova fra i due fili a distanza $d = 12\,\mathrm{cm}$ dal primo filo;

a) Determinare il modulo del campo magnetico nel punto P.

b) Si aggiunga un terzo filo percorso da una corrente elettrica di intensità $i_3 = 1.1\,\mathrm{A}$, parallelo ai primi due e disposto in modo che il secondo filo si trovi tra il primo e il terzo; determinare la distanza a del terzo filo da P e il verso di i_3 affinché il campo magnetico in P sia nullo.

c) determinare il modulo del campo magnetico in P se si invertono i versi delle tre correnti elettriche.

●●● **Es. 38** — In un atomo di idrogeno un elettrone ruota attorno a un protone lungo un orbita circolare di raggio $r = 5.29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$ con velocità di modulo $v = 2.19 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; determinare il modulo del campo magnetico nel centro dell'orbita e il modulo della forza magnetica agente sul protone.

●○○ **Es. 39** — Due fili paralleli percorsi da correnti elettriche di uguale intensità distano $d = 30\,\mathrm{cm}$ e si respingono con una forza per metro di modulo $F/\ell = 2.3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$; determinare

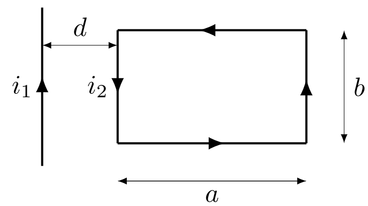
a) l'intensità di corrente elettrica nei due fili;

b) il modulo del campo magnetico in un punto complanare con i due fili e da loro equidistante.

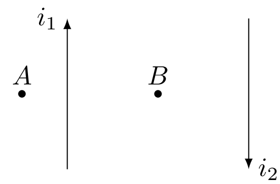
●●○ **Es. 40** — Un lungo filo rettilineo è percorso da una corrente elettrica di intensità $i_1 = 3.5\,\mathrm{A}$. Una spira rettangolare avente lati di lunghezza $a = 25\,\mathrm{cm}$ e $b = 15\,\mathrm{cm}$, complanare al filo è disposta come nella figura a fianco, subisce una forza repulsiva di intensità $F = 3.0 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$. Sapendo che $d = 10\,\mathrm{cm}$,

a) calcolare l'intensità della corrente elettrica i_2 che circola nella spira.

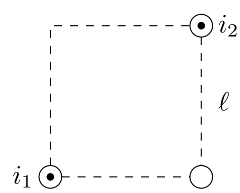
b) Illustrare cosa cambierebbe se fosse invertito il senso di i_2.



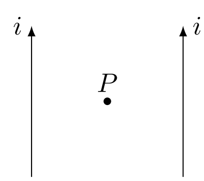
●●○ **Es. 41** — Due fili rettilinei indefiniti sono paralleli e si trovano ad una distanza $d = 120\,\mathrm{cm}$; sono percorsi da correnti elettriche di intensità $i_1 = i_2 = 8.0\,\mathrm{A}$, orientate in verso opposto. Determinare direzione, verso e modulo del campo magnetico generato dai due fili nei punti A e B, disposti come in figura, con $d_a = 30\,\mathrm{cm}$ e $d_b = 60\,\mathrm{cm}$.



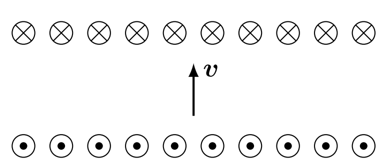
●●○ **Es. 42** — Tre fili rettilinei indefiniti paralleli sono disposti, come in figura, in modo che una loro sezione formi tre vertici di un quadrato di lato $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ e sono percorsi da correnti elettriche; i versi di i_1 e i_2 sono uguali che le intensità sono $i_1 = i_2 = 4.0\,\mathrm{A}$; sapendo che il campo nel quarto vertice del quadrato è nullo, determinare verso e intensità della corrente elettrica nel terzo filo.



●○○ **Es. 43** — Due fili paralleli di lunghezza $\ell = 250\,\mathrm{cm}$ e distanti $d = 20\,\mathrm{cm}$ sono percorsi da correnti elettriche di uguale intensità $i = 2.5\,\mathrm{A}$ aventi lo stesso verso; determinare la forza di interazione magnetica dei due fili e il modulo del campo magnetico risultante generato dai due fili in un punto P equidistante dai due fili.



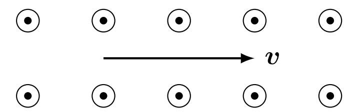
●○○ **Es. 44** — Un solenoide di lunghezza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ è formato da $N = 2000$ spire percorse dalla corrente di intensità $i = 2.5\,\mathrm{A}$; al suo interno un carica elettrica $q = 25 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$ si muove con velocità $v = 4.0 \cdot 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ in direzione perpendicolare all'asse del solenoide. Con riferimento al disegno, determinare il modulo, direzione e verso della forza di Lorentz agente sulla carica.



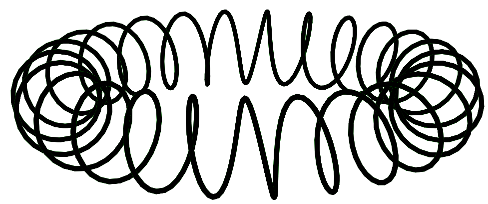
●○○ **Es. 45** — Una particella di carica $q = 4.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}$ e massa $m = 6.8\,\mathrm{g}$ si muove con velocità uniforme di modulo $v = 2.4 \cdot 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ nella direzione delle x positive quando entra in una regione di spazio dove è presente un campo magnetico di intensità $B = 5.8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{T}$ uscente dal foglio come in figura; determinare

a) il modulo, direzione e verso della forza magnetica agente sulla carica;

b) il raggio della traiettoria percorsa dalla carica sotto l'azione della forza.



●●● **Es. 46** — Un solenoide toroidale è costituito da $N = 4500$ avvolgimenti a sezione non rettilinea ma circolare, assumendo cosí la forma di una 'ciambella' come in figura (ove $N = 25$), di raggio interno $r_1 = 1.0\,\mathrm{cm}$ e raggio esterno $r_2 = 4.0\,\mathrm{cm}$; se il filo è percorso da una corrente elettrica di intensità $i = 4.0\,\mathrm{A}$ determinare il modulo del campo magnetico a distanza $r = 2.4\,\mathrm{cm}$ dal centro del solenoide.



Capitolo 7

Induzione elettromagnetica

7.1 Legge di Faraday-Neumann-Lenz

Se un conduttore si muove in un campo magnetico si genera una *forza elettromotrice* (*f.e.m.*) *indotta* che si manifesta come tensione ai capi del conduttore; la forza agente sulle cariche si può ricondurre al campo elettrico

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{7.1}$$

ove $\boldsymbol{v}$ è la velocità del punto del conduttore un cui si calcola il campo. In questo modo la forza elettromotrice indotta, e quindi la tensione, è data dalla circuitazione di $\boldsymbol{E}$ lungo il conduttore, vale cioè

$$\mathcal{E} = \Gamma(\boldsymbol{E}) = \Gamma(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Questa tensione può essere utilizzata per muovere le cariche in un circuito elettrico. In questo caso la circuitazione è calcolata lungo l'intero circuito.
Simmetricamente, se un campo magnetico varia in presenza di un conduttore, su questo si manifesta una forza elettromotrice indotta che genera una tensione ai capi del conduttore.
Questi due fenomeni sono riconducibili alla legge di Faraday-Neumann-Lenz secondo la quale si genera una forza elettromotrice indotta ogni qualvolta si ha una variazione di flusso magnetico:

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{E}) = -\frac{\Delta\Phi_S(\boldsymbol{B})}{\Delta t} \tag{7.2}$$

qui la circuitazione del campo $\boldsymbol{E}$ è calcolata lungo una curva chiusa orientata γ e il flusso del campo $\boldsymbol{B}$ è calcolato attraverso una qualunque superficie *aperta* S avente γ come bordo; la convenzione di segno richiede che il campo magnetico fluendo attraverso S 'veda' l'orientazione di γ in verso antiorario.
Nell'equazione precedente, inoltre, si suppone che la variazione di flusso magnetico sia uniforme nel tempo, diversamente, è necessario la derivata temporale; in generale, si ha quindi

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{E}) = -\frac{d\Phi_S(\boldsymbol{B})}{dt} \tag{7.3}$$

Si noti che la legge di Faraday-Neumann-Lenz vale anche nel vuoto, nel qual caso la variazione di flusso magnetico genera un campo elettrico che non agisce su alcuna carica; se invece, in particolare, vi è un circuito attraverso il quale vi sia una variazione di flusso magnetico, la forza elettromotrice indotta genera una corrente elettrica indotta il cui verso è quello tale che il campo magnetico da essa generato si opponga alla variazione di flusso; questa circostanza è nota come *legge di Lenz* ed è espressa dal segno negativo al secondo membro della (7.3).
La carica Q che scorre in un circuito di resistenza R dovuta alla corrente indotta è legato alla variazione di flusso $\Delta\Phi$ dalla *legge di Felici*

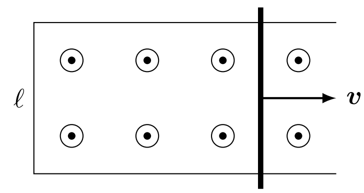
$$Q = -\frac{\Delta\Phi}{R} \tag{7.4}$$

L'unità della forza elettromotrice indotta è il volt; l'unità di misura del flusso magnetico è il *weber*, simbolo Wb, la cui definizione è quel flusso che, riducendosi uniformemente a zero, produce su una spira concatenata una forza elettromotrice di 1 volt.

PROBLEMI RISOLTI

***Problema 1**

Si consideri un circuito costituito da un'asta conduttrice mobile di resistenza $R = 25\,\Omega$ che può strisciare senza attrito su un conduttore piegato a U, di resistenza trascurabile, il cui lato parallelo all'asta ha lunghezza $\ell = 20\,\text{cm}$, e si supponga che una forza esterna $\boldsymbol{F}$ muova l'asta con velocità costante di modulo $v = 15\,\text{cm/s}$; il circuito è immerso in un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano del circuito e di verso uscente dal foglio di modulo $B = 4.5 \cdot 10^{-4}\,\text{T}$. Determinare l'intensità della corrente elettrica indotta che scorre nel circuito e il modulo di $\boldsymbol{F}$.



Soluzione

In questo caso attraverso il circuito di vi è una variazione di flusso magnetico; infatti nell'intervallo di tempo Δt l'asta si sposta di $\Delta x = v\Delta t$ e quindi l'area attraverso cui calcolare il flusso magnetico aumenta di

$$\Delta S = \ell v \Delta t$$

ne segue un aumento del flusso magnetico uscente pari a

$$\Delta\Phi(\boldsymbol{B}) = B\ell v\Delta t$$

e quindi, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, si ha una forza elettromotrice indotta tale da generare una corrente elettrica che si opponga a questo aumento di flusso magnetico uscente; deve pertanto trattarsi di una corrente elettrica che generi un campo magnetico entrante e quindi scorrente in verso orario. Il valore della forza elettromotrice è (si ricordi che il segno meno fissa il verso della corrente)

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi(\boldsymbol{B})}{\Delta t} = B\ell v$$

questa f.e.m. si manifesta come tensione che spinge le cariche lungo il circuito; si ha quindi l'intensità di corrente

$$i = \frac{B\ell v}{R} = 5.4 \cdot 10^{-7}\,\text{A}$$

L'asta quindi è percorsa dalla corrente i ed è immersa nel campo magnetico $\boldsymbol{B}$ e quindi risente di una forza di modulo

$$F' = i\ell B$$

e, con riferimento alla figura, diretta verso destra, cioè in opposizione al moto. Se ne deduce che, perché l'asta si muova con velocità uniforme, la forza $\boldsymbol{F}$ esterna da applicare è uguale ed opposta ad $\boldsymbol{F}'$. Si ha quindi

$$F = i\ell B = 4.9 \cdot 10^{-11}\,\text{N}$$

Evidentemente l'energia necessaria a far scorrere la corrente indotta lungo il circuito viene dal lavoro di questa forza esterna. Per vederlo basta verificare che la potenza fornita da $\boldsymbol{F}$ è uguale alla potenza elettrica dissipata sulla resistenza. La potenza fornita da $\boldsymbol{F}$ è

$$\mathcal{P}_F = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Fv = i\ell Bv = \frac{B^2\ell^2v^2}{R}$$

la potenza dissipata sulla resistenza è

$$\mathcal{P}_R = Ri^2 = R\,\frac{B^2\ell^2v^2}{R^2} = \frac{B^2\ell^2v^2}{R}$$

Si noti che la f.e.m. indotta si può anche calcolare direttamente dalla sua definizione in termini di circuitazione del campo elettrico lungo l'asta in movimento, vale infatti

$$\mathcal{E} = \Gamma(\boldsymbol{E})$$

Il campo elettrico si può determinare considerando la forza magnetica $\boldsymbol{F}_q$ agente sulle singole cariche di conduzione interne all'asta; queste sono, convenzionalmente, cariche positive q in moto con velocità $\boldsymbol{v}$ verso destra nel campo magnetico uscente; ciascuna di esse è quindi sottoposta alla forza di Lorentz

$$\boldsymbol{F}_q = q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

che quindi è diretta verso il basso ed ha modulo $F = qvB$; ciascuna di queste cariche positive di conduzione può essere considerata una carica di prova per mezzo della quale calcolare il campo elettrico:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{F}_q}{q} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

Si ha quindi

$$\mathcal{E} = \Gamma(\boldsymbol{E}) = \Gamma(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = vB\ell$$

come già trovato sopra.

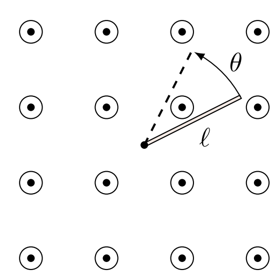
***Problema 2**

Si consideri un'asta di lunghezza $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ rotante attorno ad un asse passante per un suo estremo con velocità angolare costante di modulo $\omega = 12\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$; parallelo all'asse di rotazione, e quindi perpendicolare all'asta, vi è un campo magnetico uniforme di modulo $B = 2.6\cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$. Determinare la f.e.m. indotta che si produce fra gli estremi dell'asta.

Soluzione

La situazione è rappresentata in figura. Si produce una f.e.m. indotta perché, considerando una curva chiusa a forma di settore circolare formata dall'asta rotante e da una sua posizione successiva e dall'arco descritto dal suo estremo mobile, si ottiene una superficie variabile attraverso cui fluisce un campo magnetico; il flusso magnetico è quindi variabile e si produce un campo elettrico indotto la cui circuitazione, che è la f.e.m. indotta, è dato dalla legge (7.2).

Per calcolare la legge temporale di variazione del flusso magnetico occorre determinare come varia l'area $\mathcal{A}$ del settore circolare nel tempo; se l'asta ruota con legge oraria



$$\theta(t) = \omega t + \theta_0$$

si ha

$$\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}\,\ell^2\theta(t)$$

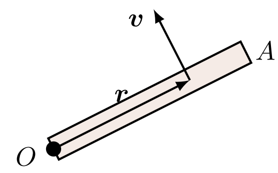
e quindi, nell'intervallo di tempo Δt si ha una variazione di flusso magnetico pari a

$$\Delta\Phi_S(\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2}\,B\ell^2\Delta\theta = \frac{1}{2}\,B\ell^2\omega\Delta t$$

e quindi il valore della f.e.m. indotta è

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi_S(\boldsymbol{B})}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,B\ell^2\omega = 6.2\,\mathrm{V}$$

Per quanto riguarda il verso, si può usare le legge di Lenz e osservare che il moto dell'asta diminuisce il flusso di $\boldsymbol{B}$, quindi la f.e.m. elettromotrice deve essere tale da far scorrere la corrente che genera un campo magnetico che si oppone a tale diminuzione e quindi un campo magnetico uscente; chiudendo il circuito, quindi si avrebbe una corrente elettrica che scorre dall'estremo fisso verso quello mobile.
Lo stesso esercizio può essere svolto calcolando la circuitazione del campo elettrico indotto, utilizzando il calcolo integrale; tale campo elettrico non è costante ma dipende dalla distanza r dal centro di rotazione; individuando con il vettore $\boldsymbol{r}$ un punto sull'asta si ha infatti, dalla (7.1),



$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \big(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\big) \times \boldsymbol{B}$$

il cui modulo è

$$E(r) = \omega r B$$

e il suo verso è diretto dal centro O verso l'estremo A. Per il calcolo della circuitazione occorre fare un integrale lungo una qualunque curva chiusa che contenga l'asta, per esempio il contorno del settore circolare già utilizzato sopra; tenuto conto che $\boldsymbol{E}$ è non nullo solo lungo l'asta, si ha

$$\mathcal{E} = \int_0^\ell E(r)\,dr = \omega B \int_0^\ell r\,dr = \frac{1}{2}\,\omega B \ell^2$$

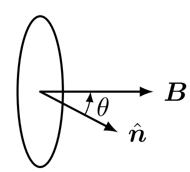
come trovato sopra.

*Problema 3

Una spira circolare di raggio $r = 15\,\mathrm{cm}$ ruota attorno ad un asse ad essa complanare e passante per il suo centro con velocità angolare di modulo costante $\omega = 10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$; la spira si trova in un campo magnetico uniforme di direzione perpendicolare all'asse di rotazione avente modulo $B = 4.25 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$

Soluzione

Il problema è simile ai due precedenti; anche in questo caso vi è una variazione di flusso magnetico attraverso un circuito dovuto al movimento del circuito o a parti di esso.
In questo caso il flusso magnetico alternativamente aumenta e diminuisce prima da un lato e poi dall'altro lato della spira; questo fa sí che la forza elettromotrice indotta sulla spira abbia alternativamente prima un verso e poi l'altro invertendosi cn una frequenza $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$; conseguentemente anche la corrente elettrica che ne risulta circola prima in un verso e poi nell'altro invertendosi con la medesima frequenza. Una corrente di questo tipo è detta *corrente alternata* e il dispositivo qui schematizzato è detto *generatore di corrente alternata*.



Venendo ai calcoli; con un'opportuna scelta della condizione iniziale, la legge con cui varia l'angolo θ fra il vettore $\boldsymbol{B}$ e il versore $\hat{\boldsymbol{n}}$ perpendicolare al piano della spira è

$$\theta(t) = \omega t$$

Il flusso magnetico attraverso una superficie S avente la spira come bordo è quindi

$$\Phi_S(\boldsymbol{B}) = \pi r^2 B \cos \omega t$$

La f.e.m. indotta quindi ha modulo

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_S(\boldsymbol{B})}{dt} = \pi r^2 B\,\omega \operatorname{sen} \omega t = 3.0 \cdot 10^{-4} \operatorname{sen}(10t)\mathrm{V}$$

e frequenza

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 1.6\,\mathrm{Hz}$$

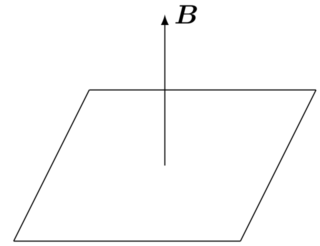
Il fatto che spira si circolare non ha alcun ruolo; per una qualsiasi spira di area $\mathcal{A}$, si ripete il calcolo ponendo $\mathcal{A}$ al posto di πr^2.

Problema 4

Una spira di area $\mathcal{A} = 120\,\mathrm{cm}^2$ si trova in una regione di spazio dove è presente un campo magnetico ad essa perpendicolare e con modulo variabile secondo la legge

$$B(t) = B_0 e^{-\lambda t}$$

Sapendo che la resistenza della spira è $R = 15\,\Omega$ e che $B_0 = 5.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$, $\lambda = 0.25\,\mathrm{s}^{-1}$, determinare l'intensità della corrente elettrica che scorre nella spira all'istante $t = 5.0\,\mathrm{s}$, specificandone il verso con riferimento alla figura.



Soluzione

La soluzione di questo esercizio richiede l'utilizzo del calcolo differenziale. In questo caso il flusso magnetico varia non per un movimento del circuito ma per la variazione dell'intensità del campo magnetico. Al passare del tempo l'intensità del campo magnetico diminuisce e quindi diminuisce il flusso; si genera quindi una f.e.m. indotta che genera a sua volta una corrente indotta tale da opporsi a tale diminuzione di flusso. La corrente indotta quindi genera un campo magnetico che ha lo stesso verso del campo $\boldsymbol{B}$; quindi, con riferimento alla figura, il verso di percorrenza della corrente indotta è antiorario. Per quanto riguarda la variazione di flusso magnetico attraverso una superficie S avente la spira come bordo vale

$$\Phi_S(\boldsymbol{B}) = \mathcal{A} B_0 e^{-\lambda t}$$

e quindi per il modulo della f.e.m. indotta si ha

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi_S(\boldsymbol{B})}{dt} = \lambda \mathcal{A} B_0 e^{-\lambda t}$$

e quindi l'intensità della corrente elettrica si trova

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{\lambda}{R} \mathcal{A} B_0 e^{-\lambda t}$$

Pertanto, all'istante richiesto, si ha

$$i(5.0) = 29\,\mathrm{nA}$$

7.2 Induzione mutua e autoinduzione

Dati due circuiti, il flusso magnetico Φ_2 del campo magnetico generato dalla corrente di intensità i_1 che scorre nel primo circuito attraverso il secondo circuito è proporzionale a i_1; tale relazione si scrive

$$\Phi_2 = M_{21} i_1$$

Simmetricamente, invertendo i ruoli dei due circuiti, si ha

$$\Phi_1 = M_{12} i_2$$

I due coefficienti M_{12} ed M_{21} si dicono *coefficienti di induzione mutua*. Si può dimostrare che i due coefficienti di induzione mutua di due circuiti sono sempre uguali, vale cioè

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Si consideri ora un circuito elettrico percorso da una corrente elettrica di intensità i; il campo magnetico generato da questa corrente elettrica fluisce attraverso lo stesso circuito; tale flusso è proporzionale a i e vale

$$\Phi(\boldsymbol{B}) = Li$$

Il coefficiente di proporzionalità L è detto *coefficiente di autoinduzione* o *induttanza* del circuito in questione.
L'unità di misura dei coefficienti di induzione mutua e dell'induttanza è detta *henry*, simbolo H. L'induttanza di un circuito è di un henry se cambiando l'intensità di corrente che circola nel circuito con la rapidità di un ampere al secondo ne risulta una f.e.m. di un volt. Le dimensioni del henry sono

$$\mathrm{H} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}\,A^{-2}} = \Omega\,\mathrm{s}$$

In generale, quindi, se vi sono due circuiti i flussi magnetici attraverso ciascuno dei due ha un contributo dalla induzione mutua e uno dalla autoinduzione; si ha quindi

$$\Phi_1 = Mi_2 + L_1 i_i \qquad , \qquad \Phi_2 = Mi_1 + L_2 i_2$$

Se le correnti elettriche variano, variano corrispondentemente i flussi e quindi si hanno f.e.m. indotte

$$\mathcal{E}_1 = M_{12}\frac{di_2}{dt} - L_1\frac{di_i}{dt} \qquad , \qquad \mathcal{E}_2 = M_{21}\frac{di_1}{dt} - L_2\frac{di_2}{dt}$$

Il generatore che fornisce energia al circuito deve fornire, oltre all'energia necessaria a compensare la perdita di energia sulla resistenza, anche l'energia per vincere la forza elettromotrice indotta che, per la legge di Lenz, si oppone alla causa che la genera. Questo lavoro fatto dal generatore si ritrova come energia magnetica immagazzinata nel circuito e vale

$$W = \frac{1}{2}\,Li^2$$

Dati due circuiti accoppiati, oltre all'energia immagazzinata in ciascuno dei due si ha anche l'energia dovuta all'accoppiamento. In generale quindi vale

$$W = \frac{1}{2}\,L_1 i_1^2 + Mi_1 i_2 + \frac{1}{2}\,L_2 i_2^2$$

La densità di energia, cioè l'energia per unità di volume, immagazzinata in un induttanza è

$$u = \frac{1}{2\mu_0}\,B^2 \tag{7.5}$$

PROBLEMI RISOLTI

*Problema 1

Determinare l'induttanza di un solenoide di lunghezza ℓ, costituito da N spire di area S.

Soluzione

Il campo magnetico all'interno del solenoide ha modulo

$$B = \mu_0\,\frac{N}{\ell}\,i$$

Il flusso di tale campo attraverso le N spire è

$$\Phi(\boldsymbol{B}) = NBS = \mu_0\,\frac{N^2 S}{\ell}\,i$$

da cui si deduce

$$L = \mu_0\,\frac{N^2 S}{\ell} \tag{7.6}$$

***Problema 2**

Determina il coefficiente di induzione mutua di due solenoidi coassiali aventi raggi $r_1 < r_2$, aventi la stessa lunghezza ℓ e costituiti rispettivamente da N_1 ed N_2 spire.

Soluzione

Siano i_1 ed i_2 le intensità delle correnti elettriche che scorrono nei due solenoidi. Il flusso attraverso le N_2 spire del solenoide esterno del campo magnetico generato dal solenoide interno è dato da

$$\Phi_2 = N_2 B_1 S_1 = N_2\, \mu_0\, \frac{N_1}{\ell}\, i_1\, \pi r_1^2$$

Quindi

$$M = \mu_0\, \frac{N_1 N_2 \pi r_1^2}{\ell}$$

Questo risultato si può verificare considerando il flusso attraverso le N_1 spire del solenoide interno del campo magnetico generato dal solenoide esterno; si ha

$$\Phi_1 = N_1 B_2 S_1 = N_1\, \mu_0\, \frac{N_2}{\ell}\, i_2\, \pi r_1^2$$

e quindi, ancora

$$M = \mu_0\, \frac{N_1 N_2 \pi r_1^2}{\ell}$$

Problema 3

Verificare la (7.5) nel caso di un solenoide di lunghezza ℓ costituito da N avvolgimenti si area S.

Soluzione

Il campo magnetico di un solenoide è diverso da zero solo all'interno del solenoide e il volume interno è $S\ell$; quindi l'energia magnetica per unità di volume è

$$u = \frac{W}{S\ell} = \frac{1}{S\ell}\, \frac{1}{2}\, L i^2$$

ricordando la (7.6), si ha

$$u = \frac{1}{2S\ell}\, \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}\, i^2$$

che si può riscrivere

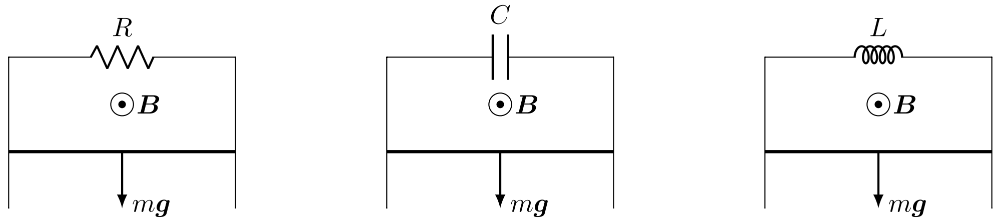
$$u = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 N}{\ell}\, i \right)^2$$

da cui, ricordando la (6.7), si ricava

$$u = \frac{1}{2\mu_0}\, B^2$$

***Problema 4**

Due sbarrette conduttrici di resistenza trascurabile disposte verticalmente possono essere collegate per mezzo di un conduttore, lungo le sbarrette può scivolare senza attrito un'asta conduttrice di massa m e lunghezza ℓ; il dispositivo è immerso in un campo magnetico uniforme $\boldsymbol{B}$ perpendicolare. Il circuito cosí costituito, in tutta generalità ha una resistenza, una capacità e un'induttanza: si vuole esaminare i contributi di ciascuna di queste grandezze, sul moto dell'asta trattandole separatamente, cioè schematizzando i tre casi rappresentati in figura



Soluzione

La soluzione richiede il calcolo integrale e differenziale.
L'equazione del moto dell'asta è in tutti e tre i casi

$$ma = mg - i\ell B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = g - \frac{i\ell B}{m} \tag{7.7}$$

Nel primo caso, la forza elettromotrice indotta è, come visto da un esercizio precedente, $\mathcal{E} = B\ell v$; quindi si ha

$$i = \frac{B\ell v}{R}$$

che, sostituita nella precedente dà

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{B^2\ell^2}{mR}\,v$$

Questa può essere integrata riscrivendola

$$\int_0^v \frac{dv'}{\frac{B^2\ell^2}{mR}v' - g} = -\int_0^t dt'$$

Il risultato è

$$v(t) = \frac{mRg}{B^2\ell^2}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right)$$

La velocità quindi tende ad un valore limite in modo analogo quello della caduta di un grave in un mezzo viscoso. Analogamente si ha per l'intensità della corrente

$$i(t) = \frac{mg}{B\ell}\left(1 - e^{-\frac{B^2\ell^2}{mR}t}\right)$$

Il valore asintotico dell'intensità di corrente

$$i(\infty) = \frac{mg}{B\ell}$$

è quello in cui vi è equilibrio fra forza magnetica ($iB\ell$) e forza peso (mg), come deve essere.
Nel secondo caso la forza elettromotrice è $\mathcal{E} = \frac{q}{C}$, e quindi

$$B\ell v = \frac{q}{C}$$

derivando la quale si trova

$$i = CB\ell\,\frac{dv}{dt}$$

Sostituendo nella (7.7) si trova

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{C\ell^2B^2}{m}\,\frac{dv}{dt}$$

da cui

$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{1 + \frac{C\ell^2B^2}{m}}$$

Si è cosí trovata l'accelerazione dell'asta che è costante e minore di g; il moto è dunque uniformemente accelerato. L'intensità di corrente è proporzionale all'accelerazione e quindi è costante e vale

$$i = CB\ell \, \frac{g}{1 + \frac{C\ell^2 B^2}{m}}$$

Nel terzo caso la forza elettromotrice è $\mathcal{E} = L\frac{di}{dt}$ e quindi

$$B\ell v = L \, \frac{di}{dt} \tag{7.8}$$

Derivando la (7.7) si trova

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{\ell B}{m} \frac{di}{dt}$$

che, utilizzando la precedente, si riscrive

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = -\frac{\ell^2 B^2}{mL} \, v$$

La velocità ha quindi un andamento sinusoidale della forma

$$v(t) = v_0 \operatorname{sen} \big(\omega t + \varphi\big)$$

con

$$\omega^2 = \frac{\ell^2 B^2}{mL}$$

Per determinare le costanti v_0 e φ si deve tenere presente che $v(0) = 0$ e $\frac{dv}{dt}(0) = g$; si trova facilmente

$$v(t) = \frac{g}{\omega} \operatorname{sen} \omega t$$

Per ottenere la legge del moto occorre integrare la legge della velocità:

$$\int_0^x dx' = \int_0^t v \, dt'$$

da cui

$$x(t) = x_0 \big(1 - \cos \omega t\big)$$

con

$$x_0 = \frac{g}{\omega^2}$$

cioè

$$x(t) = \frac{gmL}{\ell^2 B^2} \left(1 - \cos \frac{\ell B}{\sqrt{mL}} t\right)$$

L'asta quindi oscilla introno alla posizione x_0, con pulsazione ω e ampiezza x_0. Per ottenere l'intensità della corrente elettrica occorre integrare la (7.8):

$$\int_0^i di' = \frac{\ell B g}{L\omega} \int_0^t \operatorname{sen} \omega t' \, dt'$$

da cui

$$i(t) = \frac{\ell B g}{L\omega^2} \big(1 - \cos \omega t\big) = i(\infty) \big(1 - \cos \omega t\big)$$

L'intensità della corrente elettrica quindi oscilla intorno al valore $i(\infty)$ con ampiezza $i(\infty)$.

7.3 Il circuito RL

Si consideri il circuito in figura ove una resistenza ed una induttanza sono collegate in serie ad un generatore tramite un interruttore inizialmente aperto

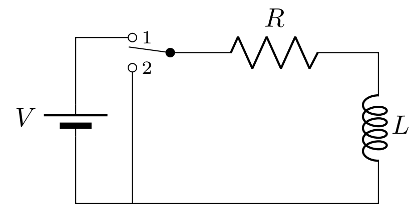


Figura 7.1: Il circuito RL.

Alla chiusura dell'interruttore nella posizione 1 il generatore inizia a lavorare e la corrente elettrica inizia a fluire contrastata dalla f.e.m. indotta sull'induttanza; l'equazione che governa il processo è

$$Ri(t) = V - L\,\frac{di(t)}{dt}$$

che può essere integrata per ottenere la legge di variazione della corrente rispetto al tempo

$$i(t) = \frac{V}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tag{7.9}$$

ove $\tau = \frac{L}{R}$ è detto *tempo caratteristico* del circuito RL ed è l'istante in cui la tangente all'origine assume il valore asintotico; dà una misura della rapidità con cui tale valore asintotico viene raggiunto.
Se successivamente, quando la corrente elettrica ha raggiunto il valore asintotico $i = V/R$, l'interruttore viene portato nella posizione 2 escludendo il generatore, la f.e.m. dell'induttanza progressivamente tende a fermare la corrente elettrica; l'equazione che governa il processo in questo caso è

$$Ri(t) = -L\,\frac{di}{dt}$$

che integrata dà

$$i(t) = \frac{V}{R}\,e^{-t/\tau}$$

In questo caso τ è l'istante in cui la tangente in $t = 0$ assume il valore nullo; dà una misura della rapidità con cui la corrente elettrica smette di circolare nel circuito. I grafici di $i(t)$ nei due casi sono rappresentati in figura.

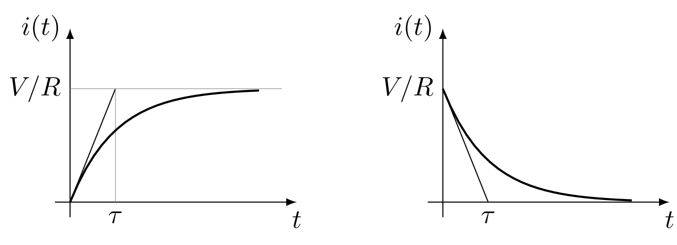


Figura 7.2: Il grafico di $i(t)$ nei due casi.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

In un circuito RL la corrente raggiunge i 3/4 del suo valore asintotico all'istante $t = 4.8\,\text{ms}$; determinare il tempo caratteristico del circuito.

Soluzione

Utilizzando la (7.9) si trova

$$\frac{3}{4}\frac{V}{R} = \frac{V}{R}\left(1 - e^{t/\tau}\right)$$

e quindi

$$\tau = \frac{t}{\ln 4} = 3.5\,\mathrm{ms}$$

Problema 2

Una resistenza $R = 20\,\Omega$ e un'induttanza L vengono collegate, all'istante $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ ad un generatore che fornisce la differenza di potenziale $V = 12\,\mathrm{V}$; sapendo che all'istante $t = 2.5\,\mathrm{s}$ l'intensità della corrente elettrica è $i(t) = 0.50\,\mathrm{A}$, determinare L; determinare quindi l'energia magnetica immagazzinata della bobina all'istante t.

Soluzione

La situazione è quella della figura 7.1 con l'interruttore nella posizione 1. L'intensità di corrente elettrica in funzione del tempo è data dalla (7.9), e quindi, risolvendo rispetto a R, si trova

$$L = -\frac{Rt}{\ln\left(1 - \frac{Ri}{V}\right)} = 28\,\mathrm{H}$$

L'energia nell'induttanza è data da

$$W(t) = \frac{1}{2}\,Li^2(t) = 3.5\,\mathrm{J}$$

7.4 Esercizi

Legge di Faraday-Neumann-Lenz

●○○ **Es. 1** — Una spira circolare di raggio $r = 4.5\,\mathrm{cm}$ ha resistenza $R = 2.5\,\Omega$ quale variazione uniforme deve avere un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ nell'intervallo di tempo $\Delta t = 0.1\,\mathrm{s}$ perché nella spira scorra una corrente elettrica indotta di intensità $i = 4.0\,\mathrm{A}$.

●○○ **Es. 2** — Una spira circolare di diametro $d = 2.3\,\mathrm{cm}$ ha resistenza $R = 5.0\,\Omega$ e si trova immersa in un campo magnetico perpendicolare di modulo $B = 1.3\,\mathrm{T}$; il verso di $\boldsymbol{B}$ viene invertito uniformemente nell'intervallo di tempo $\Delta t = 0.20\,\mathrm{s}$; determinare l'intensità della corrente indotta.

●○○ **Es. 3** — Una spira circolare avente diametro $d = 20\,\mathrm{cm}$ è immersa in un campo magnetico ad essa perpendicolare di modulo B. Il valore di B viene portato uniformemente a zero nell'intervallo di tempo $\Delta t = 0.010\,\mathrm{s}$ generando una corrente indotta di intensità $i = 20\,\mathrm{mA}$; sapendo che la resistenza della spira vale $R = 4.2\,\Omega$, determinare B.

●○○ **Es. 4** — Una spira di area $\mathcal{A} = 12\,\mathrm{cm}^2$ è immersa in un campo magnetico il cui modulo nell'intervallo di tempo $\Delta t = 1.2\,\mathrm{s}$ varia uniformemente dal valore $B_1 = 1.2\,\mathrm{T}$ al valore $B_2 = 2.8\,\mathrm{T}$; sapendo che la resistenza della spira è $R = 0.2\,\Omega$, determinare il valore della potenza dissipata.

●○○ **Es. 5** — Una spira di area $\mathcal{A} = 40\,\mathrm{cm}^2$ e resistenza $R = 0.80\,\Omega$ si trova in una regione di spazio ove vi è un campo magnetico perpendicolare il cui modulo varia uniformemente dal valore $B_1 = 2.5\,\mathrm{T}$ al valore B_2 nell'intervallo di tempo $\Delta t = 0.03\,\mathrm{s}$ producendo una f.e.m. indotta $\mathcal{E} = 0.0045\,\mathrm{V}$; determinare B_2.

●●○ **Es. 6** — Una spira circolare di diametro $d = 18\,\mathrm{cm}$ è sottoposta a un campo magnetico perpendicolare al piano della spira il cui modulo varia uniformemente dal valore $B_1 = 1.9\,\mathrm{T}$ al valore $B_2 = 0.70\,\mathrm{T}$ nel tempo $\Delta t = 0.60\,\mathrm{s}$; sapendo che la corrente elettrica indotta che si genera ha intensità $i = 0.20\,\mathrm{A}$ determinare

a) la resistenza della spira;

b) come cambia i se, lasciando invariati gli altri dati del problema, si raddoppia il diametro della spira.

●●○ **Es. 7** — Un'asta conduttrice mobile di lunghezza $\ell = 60\,\mathrm{cm}$ fa parte di un circuito rettangolare, immerso perpendicolarmente in una regione un cui si trova un campo magnetico di intensità $B = 2.0\,\mathrm{T}$; La sbarretta viene messa in movimento e si genera una corrente indotta di intensità $i = 5.2\,\mathrm{A}$; determinare

a) con che velocità deve muoversi la barretta per dissipare la potenza $\mathcal{P} = 10\,\mathrm{W}$;

b) la resistenza del circuito.

●●○ **Es. 8** — Un filo di resistenza totale $R = 15\,\Omega$ è piegato in modo da formare un circuito rettangolare di lati $a = 20\,\mathrm{cm}$ e $b = 30\,\mathrm{cm}$; attraverso il circuito cosí formato passa un campo magnetico di intensità $B_0 = 0.50\,\mathrm{T}$ diretto perpendicolarmente al piano del circuito; all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ l'intensità del campo magnetico comincia ad aumentare uniformemente fino a raddoppiare in un intervallo di tempo $\Delta t = 2.0\,\mathrm{s}$, determinare, usando la legge di Faraday-Neumann-Lenz, l'intensità della corrente elettrica che circola nel circuito.

●●● **Es. 9** — Una spira quadrata di lato $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ avente resistenza $R = 50\,\Omega$ si muove con velocità uniforme di modulo $v = 0.20\,\mathrm{cm/s}$; all'istante $t = 0.0\,\mathrm{s}$ entra in una zona in cui è presente un campo magnetico uniforme di modulo $B = 0.042\,\mathrm{T}$ perpendicolare ed uscente dal piano della spira; determinare

a) come il flusso magnetico attraverso la spira dipende dal tempo;

b) l'intensità della corrente elettrica che scorre nella bobina;

c) il modulo della forza che è necessario applicare per mantenere costante la velocità della spira.

●●● **Es. 10** — Una spira circolare di raggio $r = 10\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R = 0.64\,\Omega$ ruota attorno ad un suo diametro con una velocità angolare uniforme di modulo $\omega = 4\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$; la spira si trova immersa in un campo magnetico perpendicolare all'asse di rotazione di modulo $B = 0.82\,\mathrm{T}$. Si consideri il moto della bobina dall'istante in cui il piano della bobina è parallelo a $\boldsymbol{B}$ all'istante in cui è perpendicolare e si determinino

a) l'intensità della corrente indotta in funzione del tempo;

b) la carica totale che circola nella spira.

●●● **Es. 11** — Una spira quadrata di lato $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R = 0.64\,\Omega$ si trova immersa in un campo magnetico perpendicolare uscente il cui modulo varia nello spazio secondo la legge $B(x) = B_0 + \alpha x$; la spira si muove nella direzione delle x positive con velocità costante di modulo $v = 2.5\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$. Sapendo che con $B_0 = 6.0\,\mathrm{\mu T}$ e $\alpha = 0.03\,\mathrm{mT\,m^{-1}}$ si determinino

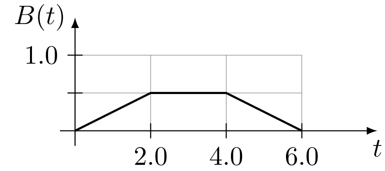
a) l'intensità e il verso della corrente indotta in funzione del tempo;

b) il modulo della forza necessaria a mantenere costante la velocità della spira.

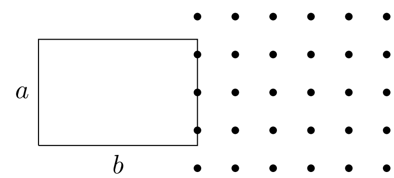
●●○ **Es. 12** — Una spira quadrata di lato $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R = 0.64\,\Omega$ si trova immersa in un campo magnetico perpendicolare uscente il cui modulo varia nel tempo secondo la legge $B(x) = B_0 e^{-\lambda t}$; sapendo che valgono $B_0 = 6.0\,\mathrm{\mu T}$ e $\lambda = 0.25\,\mathrm{s^{-1}}$, si determinino il flusso magnetico attraverso la spira e l'intensità della corrente indotta all'istante $t_1 = 15\,\mathrm{s}$, specificandone il verso.

●○○ **Es. 13** — Una spira quadrata di lato $\ell = 10\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R = 0.64\,\Omega$ si trova immersa in un campo magnetico perpendicolare uscente il cui modulo varia nel tempo secondo la legge $B(t) = B_0\, t$; sapendo che $B_0 = 30\,\mathrm{\mu T\,s^{-1}}$ determinare l'intensità ed il verso della corrente elettrica indotta sulla spira.

●●● **Es. 14** — Una spira circolare di raggio $r = 12\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R = 8.5\,\Omega$ si trova immersa in un campo magnetico uniforme perpendicolare al piano della spira e di verso uscente, variabile nel tempo secondo la legge oraria rappresentata in figura; determinare l'intensità della corrente elettrica indotta sulla spira in funzione del tempo, specificandone il verso.

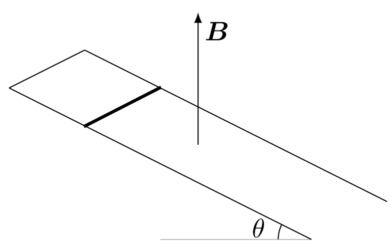


●●○ **Es. 15** — Una spira rettangolare di lati $a = 10\,\mathrm{cm}$ e $b = 15\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R = 12\,\Omega$ si muove con velocità di modulo $v = 0.30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ verso una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme perpendicolare uscente di modulo $B = 5.0\,\mathrm{mT}$; in figura è rappresentata la situazione all'istante iniziale $t = 0\,\mathrm{s}$; si determini come varia l'intensità della corrente elettrica indotta sulla spira nei primi 4 secondi, specificandone il verso.



●●○ **Es. 16** — Una sbarra metallica di lunghezza $\ell = 30\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R = 20\,\Omega$ è libera di scorrere su un filo conduttore piegato a U di resistenza trascurabile; sotto l'azione di una forza esterna $\boldsymbol{F}$ la sbarra si muove con velocità costante di modulo $v = 2.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e di verso tale che il circuito formato dal filo e dalla sbarra aumenti di area. Sapendo che è presente un campo magnetico uscente di modulo $B = 5.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$ perpendicolare al piano del circuito, si determini l'intensità e il verso della corrente elettrica indotta; determinare inoltre il lavoro compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}$ nell'intervallo di tempo $\Delta t = 10\,\mathrm{s}$.

●●● **Es. 17** — Un'asta di lunghezza $\ell = 40\,\mathrm{cm}$, avente massa $m = 0.25\,\mathrm{kg}$ e resistenza $R = 0.12\,\Omega$ scende lungo un conduttore piegato a U, di resistenza trascurabile, inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo $\theta = 15°$; inoltre è presente un campo magnetico uniforme come rappresentato in figura di modulo $B = 0.52\,\mathrm{T}$. Sapendo che l'asta scende con velocità costante di modulo v, determinare v.



Induzione mutua e autoinduzione

●○○ **Es. 1** — Determinare l'induttanza di un solenoide di lunghezza $\ell = 45\,\mathrm{cm}$ costituito da $N = 10^4$ spire di diametro $d = 3.5\,\mathrm{cm}$.

●○○ **Es. 2** — Quante avvolgimenti sono necessari per ottenere un solenoide di induttanza $L = 0.12\,\mathrm{H}$ di lunghezza $\ell = 25\,\mathrm{cm}$ e raggio $r = 2.0\,\mathrm{cm}$.

●○○ **Es. 3** — L'induttanza di un solenoide composta da $N = 5000$ spire è $L = 5.0\,\mathrm{mH}$; determinare il flusso del campo magnetico che attraversa ciascuna delle quando in essa scorre la corrente elettrica di intensità $i = 0.025\,\mathrm{A}$ e l'energia magnetica accumulata nel solenoide.

●○○ **Es. 4** — Si consideri un solenoide di lunghezza $\ell = 75\,\text{cm}$ costituito da $N = 1000$ spire di area $S = 4.0\,\text{cm}^2$; sapendo che in esso score una corrente elettrica di intensità $i = 2.5\,\text{A}$, determinare

a) la densità di energia magnetica all'interno del solenoide;
b) l'energia magnetica totale all'interno del solenoide.

●●○ **Es. 5** — Il filo di un solenoide viene utilizzato per costruire un solenoide di diametro doppio ma con lo stesso numero di avvolgimento per unità di lunghezza; determinare come varia l'induttanza del solenoide.

●●○ **Es. 6** — Due bobine si trovano in due posizioni fissate e abbastanza vicine da far sí che vi sia induzione mutua;

a) nell'istante in cui l'intensità di corrente nella prima bobina varia di $0.15\,\text{A}\,\text{s}^{-1}$ la f.e.m. nella seconda bobina è $\mathcal{E}_2 = 4.0\,\text{mV}$; determinare il coefficiente di induzione mutua;
b) nell'istante cui la seconda bobina è percorsa da una corrente elettrica di intensità $i_2 = 2.0\,\text{A}$, determinare il flusso magnetico che attraversa la prima bobina.

●●○ **Es. 7** — Una coppia di circuiti ha coefficiente di induzione mutua $M = 35\,\text{mH}$; nel primo circuito l'intensità di corrente varia, uniformemente, dal valore $i_1 = 0.85\,\text{A}$ al valore $i_2 = 1.8\,\text{A}$ nell'intervallo di tempo $\Delta t = 4.5\,\text{s}$; sapendo che la resistenza del secondo circuito è $R = 37\,\Omega$, determinare il valore dell'intensità di corrente che scorre nel secondo circuito.

●●● **Es. 8** — Determinare l'induttanza di un solenoide toroidale avente raggio $R = 10\,\text{cm}$ costituito da avvolgimenti di raggio $r = 0.50\,\text{cm}$, nell'approssimazione di poter considerare costante il campo magnetico interno al solenoide.

Il circuito RL

●○○ **Es. 1** — In un circuito RL avente tempo caratteristico τ determinare in percentuale quale frazione della corrente asintotica scorre nel circuito dopo un tempo $t = \tau$.

●○○ **Es. 2** — In un circuito RL avente tempo caratteristico τ determinare a quale istante l'intensità di corrente vale:

a) la metà del suo valore asintotico;
b) il 90 % del suo valore asintotico;
c) il 99.9 % del suo valore asintotico;

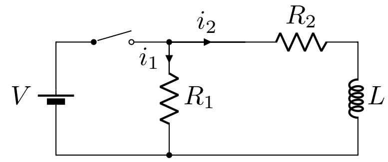
●●○ **Es. 3** — In un circuito RL la resistenza vale $R = 3.0\,\Omega$; con riferimento alla figura 7.1, si osserva che all'istante $t_0 = 0\,\text{s}$ in cui il generatore viene scollegato portando l'interruttore nella posizione 2 l'intensità della corrente elettrica che scorre nel circuito vale $i_0 = 1.5\,\text{A}$ e al successivo istante $t = 0.010\,\text{s}$ si ha $i = 15\,\text{mA}$. Determinare l'induttanza del circuito e la differenza di potenziale fornita dal generatore.

●●○ **Es. 4** — Si consideri un circuito in cui una resistenza $R = 4.0\,\Omega$ e un'induttanza $L = 20\,\text{mH}$ sono collegati in serie ad un generatore di tensione che fornisce la differenza di potenziale $V = 10\,\text{V}$. Si determini

a) il valore della corrente all'istante $t = 3.0\,\text{ms}$ dall'istante in cui l'interruttore viene chiuso;
b) l'energia magnetica immagazzinata nell'induttanza all'istante t.

●●○ **Es. 5** — Si consideri il circuito in figura e, sapendo che $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 20\,\Omega$, $V = 24\,\text{V}$ si determini

a) quanto valgono le intensità i_1 e i_2 immediatamente dopo la chiusura dell'interruttore;
b) i valori asintotici di i_1 e i_2.



●●● **Es. 6** — ⋆ Determinare l'energia magnetica W accumulata nell'induttanza di un circuito LR da quando viene collegato il generatore a quando si raggiunge il valore asintotico della corrente elettrica; determinare quindi l'energia W_R dissipata sulla resistenza dal momento in cui si scollega il generatore e verificare che le due energia sono uguali.

Capitolo 8

Circuiti in corrente alternata

Un generatore di tensione alternata fornisce una differenza di potenziale oscillante:

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

Nel circuito corrispondentemente circola una corrente elettrica oscillante con la stessa pulsazione ω ma, in generale, sfasato di una fase θ; l'intensità in generale è pertanto

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \theta)$$

Lo sfasamento dipende dalle caratteristiche del circuito. La soluzione esplicita dei circuiti in corrente alternata richiede l'uso del calcolo differenziale.

8.1 Circuito resistivo, capacitivo e induttivo

I circuiti a cui si fa riferimento qui sono riportati nella figura 8.1

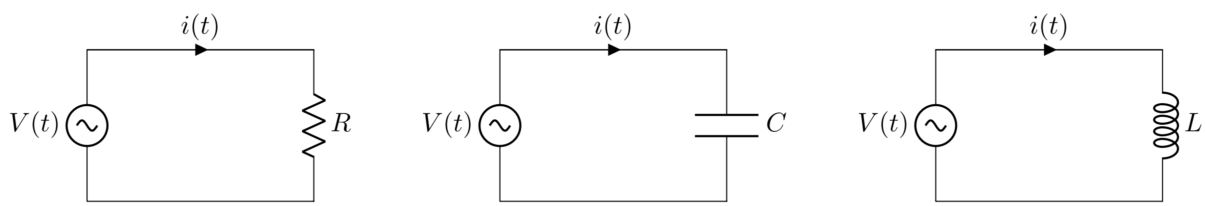


Figura 8.1: Circuiti resistivo, capacitivo e induttivo in corrente alternata.

Per il circuito resistivo l'intensità di corrente deve soddisfare alla legge

$$V_0 \cos \omega t = R i_0 \cos(\omega t + \theta)$$

che è risolta da

$$i_0 = \frac{V_0}{R} \qquad , \qquad \theta = 0$$

e quindi

$$i(t) = \frac{V_0}{R} \cos \omega t$$

L'oscillazione della corrente elettrica è quindi in fase con la tensione.
Per il circuito capacitivo si ha

$$V(t) = \frac{1}{C}\, q(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dV(t)}{dt} = \frac{1}{C}\, i(t) \qquad \Longrightarrow \qquad -\omega V_0 \operatorname{sen} \omega t = \frac{i_0}{C} \cos(\omega t + \theta)$$

che risolta dà
$$i_0 = \pm\omega C V_0 \qquad , \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$
e quindi
$$i(t) = -\omega C V_0 \operatorname{sen}\omega t$$
La corrente elettrica, pertanto, è sfasata di $\pi/2$ rispetto alla tensione.
Per il circuito induttivo si ha
$$V(t) = L\,\frac{di(t)}{dt} \qquad \Longrightarrow \qquad V_0\cos\omega t = -\omega L i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta)$$
che risolta dà
$$i_0 = \pm\frac{V_0}{\omega L} \qquad , \qquad \theta = \mp\frac{\pi}{2}$$
e quindi
$$i(t) = \frac{V_0}{\omega L}\,\operatorname{sen}\omega t$$
La corrente elettrica, pertanto, è sfasata di $-\pi/2$ rispetto alla tensione.

8.1.1 Circuito *RC*

Il circuito in questione è rappresentato in figura 8.2.

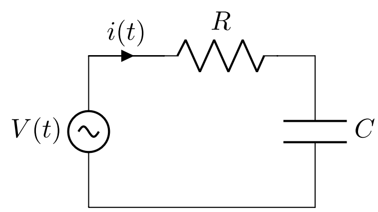


Figura 8.2: Il circuito *RC* in corrente alternata.

L'equazione che lo risolve è
$$V(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C}$$
derivando la quale si trova
$$\frac{dV(t)}{dt} = R\,\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} \qquad \Longrightarrow \qquad -\omega V_0 \operatorname{sen}\omega t = -\omega R i_0 \operatorname{sen}(\omega t + \theta) + \frac{i_0}{C}\cos(\omega t + \theta)$$
che risolta dà
$$i_0 = \frac{V_0}{R}\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \qquad , \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{\omega_0}{\omega}$$
ove la pulsazione
$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$
è detta *frequenza di taglio*; quindi si ha
$$i(t) = \frac{V_0}{R}\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}}\,\cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{8.1}$$
La tensione ai capi della resistenza R è
$$V_R(t) = Ri(t) = V_0\,\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}}\,\cos\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

mentre quella ai capi del condensatore C deve soddisfare la relazione

$$\frac{dV_C}{dt} = \frac{i(t)}{C}$$

da cui si trova

$$V_C(t) = V_0 \frac{\omega_0}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \operatorname{sen}\left(\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

Si osservi che valgono

$$\begin{array}{lclcl} V_C \simeq V_0 \cos\omega t & , & V_R \simeq 0 & \quad & \text{per } \omega \ll \omega_0 \\ V_R \simeq -V_0 \operatorname{sen}\omega t & , & V_C \simeq 0 & \quad & \text{per } \omega \gg \omega_0 \end{array}$$

Quindi per pulsazioni molto piccole rispetto alla frequenza di taglio ai capi del condensatore si misura una tensione uguale a quella fornita da generatore e con essa in fase, mentre ai capi della resistenza si trova una tensione nulla; un dispositivo di questo tipo prende il nome di *filtro passa-basso*. Simmetricamente, per pulsazioni molto grandi rispetto alla frequenza di taglio ai capi della resistenza si misura una tensione uguale a quella fornita dal generatore e sfasata di $\pi/2$, mentre ai capi del condensatore si trova una tensione nulla; un dispositivo di questo tipo è detto il nome di *filtro passa-basso*.

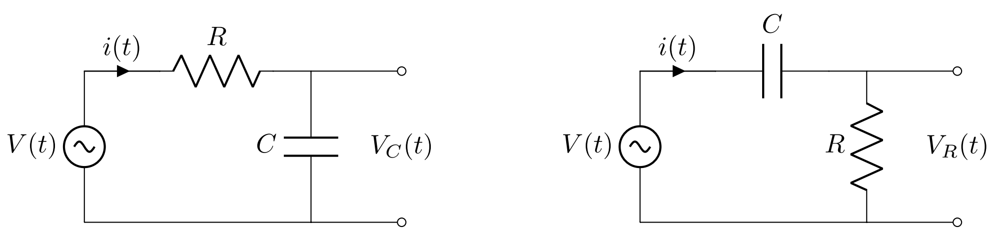


Figura 8.3: Il circuito *RC* usato come filtro passa-alto e passa-basso.

8.1.2 Circuito *RL*

Il circuito in questione è rappresentato in figura 8.4.

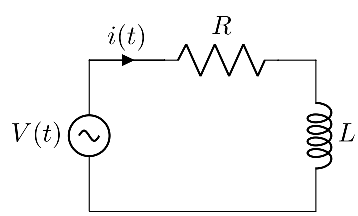


Figura 8.4: Il circuito *RL* in corrente alternata.

L'equazione che lo risolve è

$$V(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

che risolta dà

$$i_0 = \frac{V_0}{R}\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} \qquad , \qquad \operatorname{tg}\theta = -\frac{\omega}{\omega_0} \qquad \text{con} \quad \omega_0 = \frac{R}{L}$$

e quindi

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{8.2}$$

8.1.3 Circuito *LC*

Il circuito in questione è rappresentato in figura 8.5.

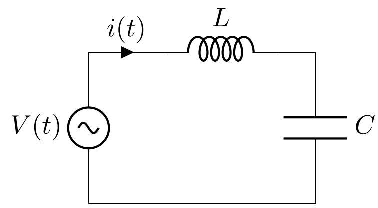


Figura 8.5: Il circuito *LC* in corrente alternata.

L'equazione che lo risolve è

$$V(t) = L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

derivando la quale si trova

$$\frac{dV(t)}{dt} = L\,\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}\,i(t)$$

che risolta dà

$$i_0 = \mp\frac{V_0}{L}\,\frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \qquad , \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{2} \qquad\qquad \text{con} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \tag{8.3}$$

e quindi

$$i(t) = \frac{V_0}{L}\,\frac{\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

Si vede quindi che la corrente elettrica oscilla con uno sfasamento di $-\pi/2$ rispetto alla tensione che la genera; inoltre per $\omega = \omega_0$, detta *condizione di risonanza* la corrente diviene infinita. La cosa dipende dal fatto di aver trascurato la resistenza dei conduttori presenti e viene corretta nel paragrafo seguente.

8.1.4 Circuito *RLC*

Il circuito in questione è rappresentato in figura 8.6.

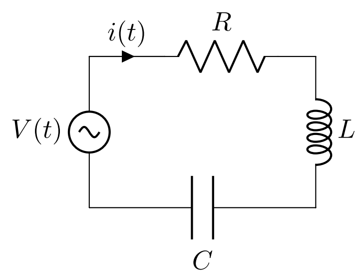


Figura 8.6: Il circuito *RLC* in corrente alternata.

L'equazione che lo risolve è

$$V(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C}$$

che, posto

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \qquad , \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{L}{R}\,\omega_0$$

è risolto da

$$i(t) = \frac{V_0}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\,\cos\left[\omega t + \mathrm{arctg}\,Q\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$

Il numero Q è detto *fattore di qualità*.
In condizioni di risonanza, $\omega = \omega_0$, l'ampiezza di oscillazione dell'intensità di corrente elettrica è massima.
La tensione ai capi di R è

$$V_R(t) = Ri(t) = V_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \cos\left[\omega t + \operatorname{arctg} Q\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)\right]$$

in condizioni di risonanza si ha $V_r(t) = V(t)$, cioè la tensione V_R coincide in ogni istante a quella fornita dal generatore.

8.1.5 La potenza in corrente alternata

La potenza fornita dal generatore all'istante t è

$$\mathcal{P}(t) = V(t)i(t) = V_0 i_0 \cos\omega t\big(\cos\omega t\cos\theta - \operatorname{sen}\omega t\operatorname{sen}\theta\big) \tag{8.4}$$

Calcolando la potenza media dissipata in un periodo di oscillazione $T = 2\pi/\omega$, contribuisce solo il primo termine e si ottiene

$$\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{1}{2} V_0 i_0 \cos\theta$$

equazione nota con il nome di *legge di Galileo-Ferraris*; $\langle\mathcal{P}\rangle$ è detta *potenza reale*; il fattore $\cos\theta$ è detto *fattore di potenza*.
Il secondo termine della (8.4) viene detto *potenza reattiva* ha valore medio nullo in un periodo e ha valore massimo

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2} V_0 i_0 \operatorname{sen}\theta$$

questa non viene dissipata sulla resistenza ma alternativamente ceduta e assorbita dal generatore e dai componenti non dissipanti del circuito: condensatori e induttanze.

8.1.6 Metodo complesso

L'idea è quella di associare ad ogni grandezza fisica variabile nel tempo con legge sinusoidale una quantità complessa di cui la grandezza fisica in questione costituisce la parte reale. In questo modo l'algebra dei numeri complessi, scritti in forma esponenziale, semplifica di molto la notazione e i calcoli. Se si pone

$$\boldsymbol{V} = V_0 e^{i\omega t} \qquad , \qquad \boldsymbol{i} = i_0 e^{i\theta} e^{i\omega t} = \boldsymbol{i}_0 e^{i\omega t}$$

per un circuito in corrente alternata vale la legge di Ohm generalizzata

$$\boldsymbol{V} = Z\boldsymbol{i}$$

ove Z è detta impedenza del circuito e viene calcolata con le solite regole circuitali tenendo presente che l'impedenza di una resistenza, di un condensatore e di un'induttanza sono date da

$$Z_R = R \qquad , \qquad Z_C = \frac{1}{i\omega C} \qquad , \qquad Z_L = i\omega L$$

In generale quindi l'impedenza di un circuito è un numero complesso con una parte reale, la resistenza, e una parte immaginaria X detta *reattanza*, misurata, come la resistenza, in ohm.
Se l'impedenza è reale, e quindi la reattanza è nulla, il generatore e la corrente elettrica oscillano in fase; si ha quindi il fenomeno della risonanza.

PROBLEMI RISOLTI

***Problema 1**

Determinare il lavoro dovuto alla potenza reattiva di un circuito LC nell'intervallo di tempo $[t_0, t]$.

Soluzione

Si comincia con l'osservare che, dalla (8.3) in un circuito LC vale $\theta = -\pi/2$ e quindi $\operatorname{sen}\theta = -1$, inoltre vale

$$V_0 = L\,\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega}\,i_0 = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) i_0$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = {}& V_0 i_0 \int_{t_0}^{t} \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t \, dt = \frac{1}{2\omega}\,\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) i_0^2 \cos^2\omega t\Big|_{t_0}^{t} = \\
&= \frac{1}{2}\,L i_0^2 \cos^2\omega t\Big|_{t_0}^{t} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\omega^2 C}\,i_0^2\big[1 - \operatorname{sen}^2\omega t\big]_{t_0}^{t} = \\
&= \frac{1}{2}\,L i_0^2 \cos^2\omega t\Big|_{t_0}^{t} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\omega^2 C}\,i_0^2 \operatorname{sen}^2\omega t\Big|_{t_0}^{t} = \\
&= \left[\frac{1}{2}\,L i^2(t) + \frac{1}{2C}\,q^2(t)\right]_{t_0}^{t}
\end{aligned}$$

I due termini sono quindi l'energia magnetica accumulata nell'induttanza e l'energia elettrostatica accumulata nel condensatore; questi termini, si noti oscillano sfasati di $\pi/2$ quindi quando uno è massimo l'altro è nullo.
In condizioni di risonanza si ha $1/(\omega^2 C) = L$ e quindi si ha

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,L i_0^2\Big|_{t_0}^{t} = \frac{1}{2}\,L i_0^2$$

che è costante.

***Problema 2**

Utilizzare il metodo complesso per risolvere il circuito RL.

Soluzione

L'impedenza del circuito è

$$Z = R + i\omega L$$

la reattanza è quindi

$$X = \omega L$$

In forma esponenziale l'impedenza si può scrivere

$$Z = Z_0 e^{i\varphi}$$

con

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad , \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega L}{R}$$

La legge di Ohm generalizzata quindi diviene

$$V_0 e^{i\omega t} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\,e^{i\varphi}\boldsymbol{i}_0 e^{i\omega t} = R\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\,e^{i\,\operatorname{arctg}\omega/\omega_0}\boldsymbol{i}_0 e^{i\omega t}$$

e quindi

$$\boldsymbol{i}_0 = \frac{V_0}{R}\,\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}}\,e^{-i\,\operatorname{arctg}\omega/\omega_0}$$

da cui, prendendo la parte reale si trova,

$$i(t) = \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{i}_0 e^{i\omega t}\right) = \frac{V_0}{R}\,\frac{\omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + \omega^2}}\,\cos\left[\omega t - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_0}\right]$$

in accordo con la (8.2).

*Problema 3**

Utilizzare il metodo complesso per risolvere il circuito RC.

Soluzione

L'impedenza del circuito è
$$Z = R - \frac{i}{\omega C}$$
la reattanza è quindi
$$X = -\frac{1}{\omega C}$$
In forma esponenziale l'impedenza si può scrivere
$$Z = Z_0 e^{i\varphi}$$
con
$$Z_0 = \sqrt{R^2 + X^2} \qquad , \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\omega RC}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\omega}$$
con $\omega_0 = 1/RC$.
La legge di Ohm generalizzata quindi diviene
$$V_0 e^{i\omega t} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}\; e^{i\varphi} \boldsymbol{i}_0 e^{i\omega t} = R\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}\; e^{-i \operatorname{arctg} \omega_0/\omega} \boldsymbol{i}_0 e^{i\omega t}$$
e quindi
$$\boldsymbol{i}_0 = \frac{V_0}{R} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}}\, e^{i \operatorname{arctg} \omega/\omega_0}$$
da cui, prendendo la parte reale si trova,
$$i(t) = \operatorname{Re}\left(\boldsymbol{i}_0 e^{i\omega t}\right) = \frac{V_0}{R} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \cos\left[\omega t + \operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\omega}\right]$$
in accordo con la (8.1).

8.2 Esercizi

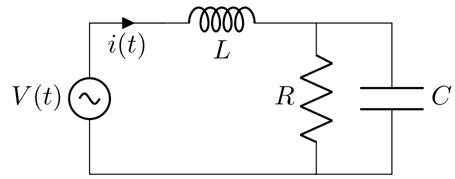
Circuito resistivo, capacitivo e induttivo

●○○ **Es. 1** — Determinare la frequenza alla quale la reattanza di un condensatore avente capacità $C = 12\,\mu\text{F}$ è in valore assoluto uguale alla reattanza dell'induttanza $L = 12\,\text{mH}$.

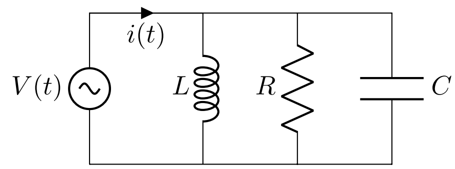
●○○ **Es. 2** — Un generatore di tensione alternata di pulsazione $\omega = 300\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ è collegato al parallelo di un condensatore di capacità $C = 5.5\,\text{nF}$ e un'induttore di induttanza $L = 0.12\,\text{H}$; determinare la reattanza del circuito.

●●○ **Es. 3** — Determinare il fattore di potenza di un circuito RLC in serie con $R = 10\,\Omega$, $L = 15\,\text{mH}$, $C = 12\,\mu\text{F}$ quando la pulsazione del generatore è $\omega = 1.0 \cdot 10^3\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

●●○ **Es. 4** — Un circuito è costituito da una resistenza, un condensatore ed un'induttanza sono collegati ad un generatore di tensione alternata di pulsazione ω come in figura; sapendo che valgono $R = 100\,\Omega$, $C = 22\,\mu\text{F}$ e $L = 0.12\,\text{H}$, determinare la frequenza di risonanza ω_0 del circuito e l'impedenza per $\omega = \omega_0$.

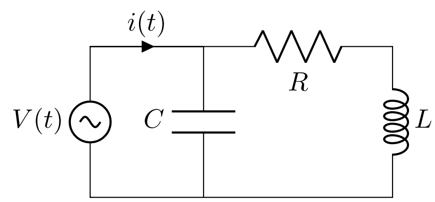


●●○ **Es. 5** — Un circuito è costituito da una resistenza, un condensatore ed un'induttanza sono collegati ad un generatore di tensione alternata di pulsazione ω come in figura; sapendo che valgono $R = 100\,\Omega$, $C = 22\,\mu\mathrm{F}$ e $L = 0.12\,\mathrm{H}$, determinare la frequenza di risonanza ω_0 del circuito e l'impedenza per $\omega = \omega_0$.



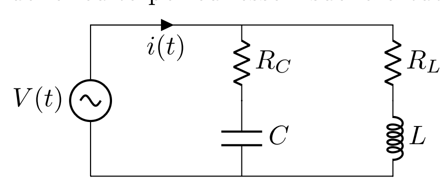
●●○ **Es. 6** — Un generatore di tensione alternata di ampiezza massima $V_0 = 310\,\mathrm{V}$, è collegato ad una resistenza, un condensatore ed un'induttanza come in figura; sapendo che valgono $R = 100\,\Omega$, $C = 20\,\mu\mathrm{F}$ e $L = 0.50\,\mathrm{H}$, determinare

a) la frequenza di risonanza ω_0 del circuito;
b) l'impedenza per $\omega = \omega_0$;
c) la potenza media dissipata per $\omega = \omega_0$.



●●● **Es. 7** — Un generatore di tensione alternata è collegato a due resistenze, un condensatore ed un'induttanza come in figura; determinare

a) l'impedenza del circuito;
b) la relazione fra gli elementi del circuito per cui esso risuona a tutte le frequenze.



●●● **Es. 8** — Un'induttanza L è connessa ad un condensatore di capacità variabile mediante una manopola. Si vuole che la frequenza di risonanza ω_0 vari linearmente con l'angolo, cioè che si abbia $\omega_0 = a + b\theta$, nell'intervallo da $\omega_1 = 4.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Hz}$ e $\omega_2 = 12 \cdot 10^5\,\mathrm{Hz}$, mentre la manopola ruota da $\theta_1 = 0\,\mathrm{rad}$ a $\theta_2 = \pi\,\mathrm{rad}$. Determinare la dipendenza di C dall'angolo θ.

●●● **Es. 9** — Una lampada di potenza $\mathcal{P} = 500\,\mathrm{W}$ assorbe la corrente elettrica di intensità $i = 2.5\,\mathrm{A}$ con un fattore di potenza unitario; determinare il valore dell'induttanza che deve essere posta in serie alla lampada perché lavori con un tensione alternata di intensità massima $V_0 = 310\,\mathrm{V}$ e frequenza $\nu = 50\,\mathrm{Hz}$.

●○○ **Es. 10** — Una pompa di calore collegata alla tensione di rete alternata di intensità massima $V_0 = 220\,\mathrm{V}$ è equivalente ad una resistenza $R = 12.0\,\Omega$ in serie ad una impedenza induttiva $\omega L = 1.30\,\Omega$; determinare

a) L'impedenza della pompa di calore;

b) la potenza assorbita dalla pompa di calore.

Capitolo 9

Campi magnetici nella materia

9.1 Diamagneti, paramagneti e ferromagneti

Un campo magnetico genera in un corpo un campo magnetico le cui caratteristiche dipendono dal tipo di sostanza di cui è composto il corpo.
Se la sostanza è costituita da atomi con momento magnetico nullo si dice *diamagnetica*; in questo caso il campo magnetico esterno induce delle correnti microscopiche, dette *amperiane*, che producono un campo magnetico di verso opposto a quello esterno, secondo ala legge di Faraday-Neumann-Lenz.
Se la sostanza è costituita da atomi con momento magnetico non nullo va pensata come un insieme di spire microscopiche percorse da una corrente amperiana aventi il momento magnetico in questione; in questo caso il fenomeno di induzione sopra descritto diviene secondario rispetto al fatto che il campo magnetico esterno tende ad orientare tutte le spire in modo che i campi magnetici da loro generati siano concordi con il campo esterno.
Nei due casi si ha un gran numero di momenti magnetici microscopici che danno origine ad un effetto macroscopico e definire il vettore *magnetizzazione*, indicato con $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, come il momento magnetico per unità di volume.
Il vettore magnetizzazione è legato alle correnti amperiane i_A dalla relazione

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{\mathcal{M}}) = i_A$$

Il campo magnetico totale $\boldsymbol{B}$ presente all'interno del materiale, quindi è generato dalle correnti macroscopiche di conduzione i_C che producono il campo esterno e dalle correnti amperiane. Si può applicare la legge di Ampère ottenendo

$$\Gamma_\gamma\left(\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\mathcal{M}}\right) = i_c$$

si definisce quindi il *campo magnetizzante*

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\mathcal{M}}$$

che dipende solo dalle correnti macroscopiche, cioè dalle correnti magnetizzanti:

$$\Gamma_\gamma(\boldsymbol{H}) = i_C$$

Si ha quindi

$$\boldsymbol{B} = \mu_0\big(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{\mathcal{M}}\big)$$

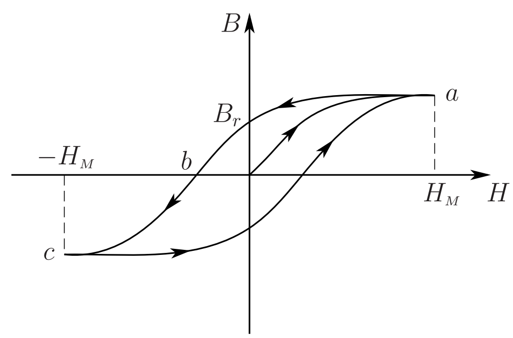
Il vettore magnetizzante e il vettore di magnetizzazione sono proporzionali e vale

$$\boldsymbol{\mathcal{M}} = \chi_m \boldsymbol{H}$$

La costante di proporzionalità è detta *suscettività magnetica* ed è positiva per i materiali paramagnetici e negativa per i materiali diamagnetici. Si può quindi scrivere

$$\boldsymbol{B} = \mu_0 \kappa \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H}$$

ove $\kappa = 1 + \chi_m$ è detta *permeabilità magnetica relativa* e μ è detta *permeabilità magnetica assoluta.* Per alcune sostanze, dette *ferromagneti*, la relazione fra $\boldsymbol{B}$ ed $\boldsymbol{H}$ è piú complicata di quella semplice vista per diamagneti e paramagneti. La relazione è descritta dal ciclo di isteresi rappresentato in figura



da cui si vede che aumentando il campo magnetizzante il campo magnetico nel ferromagnete aumenta fino ad un valore di saturazione, che si ha per H_M nel punto a (o c, per la magnetizzazione di verso opposto); ma anche in assenza del campo esterno , cioè per $H = 0$, il materiale conserva un campo magnetico residuo B_r; per annullare completamente il campo nel ferromagnete occorre invertire il campo esterno fino al valore b.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un solenoide è lungo $\ell = 50\,\text{cm}$ ed è costituito da $N = 2000$ spire percorse da una corrente elettrica di intensità $i = 2.5\,\text{A}$; si trovino i moduli dei campi $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{B}$ all'interno del solenoide quando: il solenoide è vuoto e quando il solenoide è pieno di una sostanza con magnetizzazione di modulo $\mathcal{M} = 4.5 \cdot 10^5\,\text{A m}^{-1}$.

Soluzione

Nel caso di solenoide vuoto si ha, come noto

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell}\, i = 1.3 \cdot 10^{-2}\,\text{T}$$

e, in assenza di magnetizzazione,

$$H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{N}{\ell}\, i = 8.0 \cdot 10^3\,\text{A m}^{-1}$$

In presenza di magnetizzazione, il vettore $\boldsymbol{H}$ resta invariato e il campo magnetico diviene

$$B = \mu_0 (H + \mathcal{M}) = 5.8 \cdot 10^{-1}\,\text{T}$$

Problema 2

L'ago di una bussola è fatto di nichel, è lungo $\ell = 5.0\,\text{cm}$, ha diametro $d = 1.2\,\text{mm}$; sapendo che la densità del nichel è $\rho = 8908\,\text{kg m}^{-3}$ e che il momento magnetico di un atomo di nichel vale $m = 5.56 \cdot 10^{-24}\,\text{J T}^{-1}$ e che solo il 15 % degli atomi è allineato al campo magnetico esterno, determinare il modulo del vettore di magnetizzazione.

Soluzione

Poiché il vettore di magnetizzazione è il momento magnetico per unità di volume, nel caso presente si ha

$$\mathcal{M} = 0.15\,\frac{Nm}{V}$$

ove N è il numero totale di atomi e $0.15\,N$ è il numero degli atomi allineati. D'altra parte, il numero totale degli atomi è dato dal rapporto fra la massa M dell'ago e la massa atomica del nichel. Questa, a sua volta è il quoziente del peso atomico A_{Ni}, rintracciabile sulla tavola periodica, e il numero di Avogadro N_A.
Quindi

$$\mathcal{M} = 0.15\,\frac{MN_Am}{A_{Ni}V} = 0.15\,\frac{\rho N_Am}{A_{Ni}} = 76\cdot 10^4\,\mathrm{A\,m^{-1}}$$

9.2 Esercizi

Diamagneti, paramagneti e ferromagneti

●○○ **Es. 1** — All'interno di un solenoide, lungo $\ell = 50\,\mathrm{cm}$ e costituito da $N = 1000$ spire e percorso da una corrente elettrica di intensità $i = 10\,\mathrm{A}$, viene inserito un cilindro di alluminio; sapendo che la permeabilità magnetica relativa dell'alluminio (sostanza paramagnetica) è $\kappa = 1.000021$, determinare il campo magnetico totale presente all'interno del cilindro.

●○○ **Es. 2** — Un solenoide di lunghezza $\ell = 120\,\mathrm{cm}$ è costituito da $N = 1000$ spire percorse da una corrente elettrica di intensità $i = 5.2\,\mathrm{A}$; lo spazio interno al solenoide è riempito da un materiale ferromagnetico di permeabilità $\kappa = 60$. Calcolare i moduli dei campi $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ all'interno del solenoide.

Parte III

Appendici

Appendice A

Risposte agli esercizi proposti

Funzione d'onda

1. $\sqrt{\frac{\tau_1}{\mu_1} \cdot \frac{\mu_2}{\tau_2}} = \sqrt{2}$

2. a) $v = \frac{\omega}{k} = 2.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
b) $\tau = \frac{\mu\omega^2}{k^2} = 2.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$.

3. $v = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = 4.2 \cdot 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

4. $v = \frac{n\Delta x}{\Delta t} = 2.9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

5. $y(t,x) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}\,t - kx\right) = 0.003\cos(31t - 600x)$; $v = \frac{2\pi A}{T} = 9.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

6. a) $v = \sqrt{\frac{m_2 g\ell}{m_1}} = 18\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
b) $\lambda = \sqrt{\frac{m_2 g\ell}{m_1}}\,T = 1.6\,\mathrm{m}$.

7. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = 2$.

Interferenza; onde stazionarie

1. $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad.

2. Si tratta della sesta armonica; $\lambda = \frac{\ell}{3} = 20\,\mathrm{cm}$.

3. $\nu_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\tau}{m\ell}} = 8.87\,\mathrm{Hz}$, $\nu_2 = \sqrt{\frac{\tau}{m\ell}} = 17.7\,\mathrm{Hz}$.

4. a) $\sqrt{2}$;
b) $1/3$;
c) $1/\sqrt{2}$.

5. $\tau = \dfrac{\ell m}{\Delta t^2} = 37.5\,\mathrm{N}$.

6. a) $\tau_1 = \dfrac{\nu_1^2}{\nu_2^2}\,\tau_2 = 489\,\mathrm{N}$;
b) $\mu = \dfrac{\tau_2}{4\nu_2^2\ell^2} = 2.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$.

7. a) $v = \dfrac{2\ell}{\Delta t} = 100\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $\tau = \dfrac{4m\ell}{\Delta t^2} = 150\,\mathrm{N}$;
b) $\Delta t_1 = \dfrac{\Delta t}{3} = 6.67\,\mathrm{ms}$, interferenza distruttiva.

8. a) $\nu_1 = \sqrt{\dfrac{\tau}{\mu}}\dfrac{1}{2\ell} = 25\,\mathrm{Hz}$;
b) $\tau' = \dfrac{9}{4}\tau = 900\,\mathrm{N}$.

9. Interferenza distruttiva.

10. $d = \dfrac{D}{2} - \left(\dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{4}\right)\dfrac{v_s}{\nu}$ è minima per $k = 121$, quindi $d = 35.7\,\mathrm{cm}$.

11. a) $\ell = \dfrac{v}{2(\nu_{n+1} - \nu_n)} = 2.20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
b) $\nu_1 = \nu_{n+1} - \nu_n = 75\,\mathrm{Hz}$.

12. $\nu = \dfrac{v_s}{2(\sqrt{d^2 + a^2} + a - \ell)} = 305\,\mathrm{Hz}$.

13. $n = \sqrt{\dfrac{\mu_1}{\mu_2}}\,\dfrac{\ell_1}{\ell_2} = 6$; $\nu = n\sqrt{\dfrac{\tau}{\mu_1}}\,\dfrac{1}{2\ell_1} = \sqrt{\dfrac{\tau}{\mu_2}}\,\dfrac{1}{2\ell_2} = 41.2\,\mathrm{Hz}$.

Onde sonore; effetto Doppler; battimenti

1. $\dfrac{v_s}{\nu_2} < \lambda < \dfrac{v_s}{\nu_1}$, quindi: $17 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} < \lambda < 17\,\mathrm{m}$.

2. $v = \left(1 - \dfrac{\nu_r}{\nu}\right) v_s = 26.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

3. $v = \dfrac{\nu_b}{\nu_0}\,v_s = 31.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; $\nu_e = \nu_0\left(1 - \dfrac{\nu_b^2}{\nu_0^2}\right) = 436\,\mathrm{Hz}$.

4. $T = \dfrac{1}{\nu + n} = 9.7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{s}$; $\dfrac{\Delta\tau}{\tau} = 1 - \dfrac{\nu^2}{(\nu + n)^2} = 9.4\,\%$.

5. $\nu_1 = \dfrac{v_s + v_a}{v_s - v_b}\,\nu_b = 1.05 \cdot 10^3\,\mathrm{Hz}$; $\nu_2 = \dfrac{v_s + v_b}{v_s - v_a}\,\nu_a = 743\,\mathrm{Hz}$.

6. $\nu = \nu_1 + n_1 = \nu_2 - n_2 = 523\,\mathrm{Hz}$.

7. a) $\nu_1 = \dfrac{\nu}{1 - v/v_s} = 453\,\mathrm{Hz}$;
b) $\nu_2 = \dfrac{v_s + v}{v_s - v}\,\nu = 466\,\mathrm{Hz}$.

8. $v = \dfrac{n v_s}{120\,\nu} = 2.0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

9. $\nu = \dfrac{v_s + v - v_1}{v_s - v - v_1} = 757\,\mathrm{Hz}.$

Riflessione

1. a) $f = \dfrac{pp'}{p + p'} = 3.3\,\mathrm{cm},\ r = 2f = 6.6\,\mathrm{cm};$

b) $y' = \dfrac{p'}{p}\,y = 3.0\,\mathrm{cm}.$

2. a) $x = \dfrac{H(D + 2d)}{H + h} = 50\,\mathrm{m};$

b) $H_{max} = \dfrac{h(D + d)}{d} = 2.6\,\mathrm{m},\ H_{min} = \dfrac{hd}{D + d} = 3.8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}.$

3. $p = \dfrac{I + 1}{I}\,f = 33\,\mathrm{cm};\ p' = (I + 1)f = 50\,\mathrm{cm}.$

4. $p = \dfrac{r}{2}\left(\dfrac{\ell}{\ell'} + 1\right) = 50\,\mathrm{cm};\ p' = \dfrac{r}{2}\left(\dfrac{\ell'}{\ell} + 1\right) = 75\,\mathrm{cm}.$

5. $p' = -\dfrac{pr}{2p + r} = 10\,\mathrm{cm};\ I = -\dfrac{r}{2p + r} = \dfrac{2}{3}.$

6. $r = \alpha - i = 50°.$

7. $2\alpha.$

Rifrazione

1. $n = \dfrac{1}{\operatorname{sen} i_0} = 1.15.$

2. $n = \dfrac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen}(i - \alpha)} = \sqrt{3}.$

3. $n = \dfrac{1}{\operatorname{sen} i_0} = 2.418.$

4. $r' = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{\operatorname{sen} i'}{\operatorname{sen} i}\,\operatorname{sen} r\right) = 26°.$

5. $\beta = \arccos(n \cos\alpha) = 31°.$

6. a) $q = \dfrac{pf}{p - f'} = -13.3\,\mathrm{cm};$

b) $d = d_0 + q = 11.7\,\mathrm{cm};$

c) $f = \dfrac{pd_0}{p + d_0} = 4.17\,\mathrm{cm}.$

7. $p' = \dfrac{fp}{p - f} = 40\,\mathrm{cm},\ \ell' = \dfrac{p'}{p}\,\ell = 15\,\mathrm{cm}.$

8. $p' = \dfrac{fp}{p - f} = -13\,\mathrm{cm},\ \ell' = -\dfrac{p'}{p}\,\ell = 5\,\mathrm{cm}.$

9. a) $\alpha_1 = \operatorname{arcsen}\dfrac{n_2}{n_1} = 56°;$

b) $\alpha_1 = \operatorname{arcsen}\dfrac{n_3}{n_1} = 30°.$

10. a) $\beta = \operatorname{arcsen}(n \operatorname{sen}\alpha) = 20°$;
b) $h = \dfrac{v\Delta t}{\operatorname{tg}\beta} = 33\,\text{m}$;
c) $d = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\, D = 11\,\text{m}$.

11. a) $f = \dfrac{p(D-P)}{D} = 24\,\text{cm}$;
b) $\ell' = \dfrac{p'}{p}\,\ell = 30\,\text{cm}$;
c) $p = \dfrac{D + \sqrt{D^2 - 4Df}}{2} = 60\,\text{cm}$.

12. Divergente; $f = -20\,\text{cm}$; $p' = \dfrac{p}{Dp-1} = -12\,\text{cm}$.

13. L'immagine si forma fra le due lenti a 12 cm dalla prima; la sua altezza è $\ell' = 100\,\text{cm}$; è rovescia.

14. $r = 30°$; $i' = i = 60°$; $i_0 = \operatorname{arcsen}\dfrac{1}{n} = 35°$.

15. $p = f\,\dfrac{I+1}{I} = 120\,\text{cm}$; $p' = f(I+1) = 40\,\text{cm}$.

16. $p = f\,\dfrac{I+1}{I} = 40\,\text{cm}$; $p' = f(I+1) = -30\,\text{cm}$.

17. $p = \dfrac{p'}{I} = 60\,\text{cm}$; $f = \dfrac{p'}{I+1} = 15\,\text{cm}$.

18. $p' = Ip = 6.7\,\text{cm}$; $f = \dfrac{Ip}{I+1} = 5\,\text{cm}$.

19. $i_0 = \operatorname{arcsen}\dfrac{v}{c} = 60°$.

20. Lente convergente; $p = \dfrac{I+1}{ID} = 60\,\text{cm}$; $p' = \dfrac{I+1}{D} = 120\,\text{cm}$.

21. $f = \dfrac{Dd}{D+d} = 4.9\,\text{cm}$.

22. Convergente; $I' = \dfrac{I}{2I+1} = -\dfrac{4}{11}$.

Interferenza

1. a) $\alpha = k\,\dfrac{\lambda}{d} = 0.21\,\text{m}$;
b) $\alpha = k\,\dfrac{\lambda}{nd} = 0.16\,\text{m}$.

2. $k = \dfrac{d^2}{4R\lambda} = 34$.

3. $\lambda = \dfrac{r^2}{nR} = 470\,\text{nm}$.

4. $\lambda = \dfrac{d}{D}\,\Delta y = 1.33 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$.

5. $\Delta y = \dfrac{3D\lambda}{d} = 2.8\,\text{cm}.$

6. $h = \dfrac{\lambda}{4n_2} = 8.1 \cdot 10^{-8}\,\text{m}.$

7. $\lambda = \dfrac{2d\Delta y}{9D} = 4603\,\text{Å}.$

8. $d = \dfrac{D\lambda n}{\Delta y} = 5.8\,\text{mm}.$

9. $h = \dfrac{\lambda}{2n} = 2.27 \cdot 10^{-7}\,\text{m}.$

10. $\lambda' = \dfrac{9}{10}\,\lambda = 455\,\text{nm}.$

11. a) $h = \dfrac{\lambda}{4n_2} = 0.72 \cdot 10^{-7}\,\text{m};$
b) $h = \dfrac{\lambda}{2n_3} = 2.1 \cdot 10^{-7}\,\text{m}.$

Diffrazione

1. $\lambda = \dfrac{yd}{\ell} = 5.0 \cdot 10^{-7}\,\text{m}.$

2. $D = 1.22\,\dfrac{\ell\lambda}{d} = 150\,\text{m}.$

3. a) $d = \dfrac{2\ell\lambda}{\Delta y} = 6.14 \cdot 10^{-5}\,\text{m};$
b) diminuisce.

4. $d = 1.22\,\dfrac{\ell\lambda}{D} = 1.57 \cdot 10^{12}\,\text{m}.$

5. $d = 1.22\,\dfrac{\lambda\ell}{D} = 1.5\,\text{m}.$

6. $\lambda_2 = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}\,\lambda_1 = 556\,\text{nm}.$

7. a) $\Delta\theta = \dfrac{k}{d}\,\Delta\lambda = 3 \cdot 10^{-4}\,\text{rad};$
b) sí, il reticolo risolve le righe se vengono illuminate almeno 981 delle 1500 fenditure.

8. $d = \dfrac{4\lambda\ell}{y} = 2.7 \cdot 10^{-5}\,\text{m}.$

9. a) $\theta = \dfrac{n\lambda_1}{\ell} = 0.29\,\text{rad};$
b) $m = \dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = 998$; il reticolo permette di risolvere le due righe.

10. $\lambda = d\operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{d}{2}\operatorname{sen}\theta_2 = \dfrac{d}{3}\operatorname{sen}\theta_3 = 480\,\text{nm}.$

11. $k = 11$

Legge di Coulomb e campo elettrico

1. $q = ne = 5.01 \cdot 10^{-9}$ C.

2. $\dfrac{Gm_p m_e}{ke^2} = 4.40 \cdot 10^{-40}$.

3. $Q = -\dfrac{\tau d^2}{kq} = 1.53 \cdot 10^{-5}$ C; positiva.

4. A distanza $x = \dfrac{q_1 - \sqrt{q_1 q_2}}{q_1 - q_2}\, d = 22.5\,\mathrm{cm}$ da q_1; nulla.

5. Non esistono.

6. a) $E_2 = \dfrac{d_1^2}{d_2^2}\, E_1 = 7.8\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;

b) $E_3 = \dfrac{3d_1^2}{d_3^2}\, E_1 = 16\,\mathrm{N\,C^{-1}}$.

7. a) Il campo elettrico ha modulo $E = \dfrac{F}{\sqrt{2}q} = 4.4 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$ ed è diretto nel verso delle x positive;

b) $m = \dfrac{F}{\sqrt{2}g} = 3.6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$.

8. $n = \dfrac{q}{e} = 7.5 \cdot 10^{13}$.

9. $Q_A = Q_B = 1.5q$.

10. Il punto si trova dalla parte di q_1 a distanza $x = (1 + \sqrt{2})d = 48\,\mathrm{cm}$.

11. $F = 9.6\,\mathrm{N}$.

12. L'accelerazione è diretta nel verso delle x negative e ha modulo
$a = \dfrac{eE}{m} = 1.14 \cdot 10^9\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

13. La forza è diretta verso la carica Q_1 e ha modulo $F = k\dfrac{4q}{d^2}(Q_2 - Q_1) = 2.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$.

14. $F_x = -k\,\dfrac{Q_1}{d^2} = 7.4 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$, $F_y = k\,\dfrac{Q_1}{d^2} = 1.3 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$, $F = k, \dfrac{\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2}}{d^2} = 1.5 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$.

15. $q = -\dfrac{mg}{E} = -4.4\,\mathrm{\mu C}$.

16. $\Phi(\boldsymbol{E}) = \dfrac{Q}{6\epsilon_0} = -9.4 \cdot 10^6\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}}$.

17. $\dfrac{r_1}{r_2} = \sqrt{\dfrac{F_2}{F_1}} = 0.777$.

18. $\Phi_S(\boldsymbol{E}) = \ell^2 E\cos\theta = 1.7\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}}$.

19. $\Phi_S(\boldsymbol{E}) = \dfrac{Q}{2\epsilon_0} = 2.8 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}}$.

20. $Q = \dfrac{m_p v^2 r}{ke} = 7.1 \cdot 10^{-13}$ C.

21. $\sigma = \dfrac{\epsilon_0 F}{q} = 0.35\,\mathrm{nC\,m^{-2}}$.

22. $q_1 = \dfrac{Q}{2} + \sqrt{\dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{d^2 F}{k}} = 39\,\mu\mathrm{C}$, $q_2 = \dfrac{Q}{2} - \sqrt{\dfrac{Q^2}{4} + \dfrac{d^2 F}{k}} = -7.4\,\mu\mathrm{C}$

23. $\Phi_S(\boldsymbol{E}) = E\pi r^2 \operatorname{sen}\theta = 1.6 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}}$.

24. a) $E_x = -k\,\dfrac{Q_1}{d^2} = -4.5 \cdot 10^7\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, $E_y = k\,\dfrac{Q_2}{d^2} = 9.0 \cdot 10^7\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $F = \dfrac{kq}{d^2}\,\sqrt{Q_1^2 + Q_2^2} = 0.65\,\mathrm{N}$.

25. a) $E = k\,\dfrac{\sqrt{2}q_1 + 2q_3}{\ell^2} = 3.3 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $E = \dfrac{k}{\ell^2}\sqrt{2q_1^2 + 4q_3^2} = 2.3 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$.

26. a) $E = \dfrac{8\sqrt{10}\,kq_1}{3\ell^2} = 1.2 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $a = \dfrac{qE}{m} = 6.1 \cdot 10^4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

27. a) $a = \dfrac{9kqq_1}{m\ell^2} = 0.34\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, diretta verso il punto medio delle cariche q_1 e q_2;
b) l'accelerazione ha lo stesso modulo ma verso opposto.

28. a) $r = \sqrt{\dfrac{kQ}{E}} = 1.5\,\mathrm{m}$;
b) $D = 2d = 3.0\,\mathrm{m}$.

29. a) $E = \dfrac{m(g-a)}{q} = 5.5 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, diretta verso l'alto;
b) $a = 2g - a = 14.2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

30. a) $E_1 = 0$, $E_2 = \dfrac{\sigma_1 r_1^2}{\epsilon_0 d_2^2} = 1.7 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $\sigma_2 = \dfrac{E\epsilon_0 D^2 - r_1^2\sigma_1}{r_2^2} = 7.6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C\,m^{-2}}$.

31. $Q = -4\pi\epsilon_0 R_T^2 E = -6.8 \cdot 10^5\,\mathrm{C}$.

32. $q = -\dfrac{mg}{E} = 6.54 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$.

33. $Q_2 = -Q_1 = \dfrac{Er^2}{k} = 8.4\,\mathrm{nC}$.

34. $Q = 3(E_a - E_b)\epsilon_0\ell^2 = 24\,\mathrm{pC}$

35. $E_1 = \dfrac{d_1\rho}{3\epsilon_0} = 5.6 \cdot 10^2\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, $E_2 = \dfrac{\rho r^3}{3\epsilon_0 d_2^2} = 5.0 \cdot 10^2\,\mathrm{N\,C^{-1}}$.

36. a) $E = 0$;
b)$E = \dfrac{\rho r^3}{3\epsilon_0 d^2} = 25\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
c) $E = \dfrac{\rho r^3 + 3\sigma R^2}{3\epsilon_0 D^2} = 6.1\,\mathrm{N\,C^{-1}}$.

37. a) $E_x = 0$, $E_y = k\,\dfrac{Q_3}{d^2} = 2.5 \cdot 10^7\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $F = \sqrt{2}\,k\,\dfrac{Q_1 Q_3}{d^2} = 97\,\mathrm{N}$.

38. $x = \dfrac{2Q_1 - Q_2 + \sqrt{2Q_2^2 - 7Q_1Q_2}}{Q_1 + Q_2}\,d = 9.6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

39. $E_x = k\,\dfrac{q_1 - q_2}{d^2} = 1.1 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, $E_y = 0$.

40. a) $E = 4k\,\dfrac{Q}{\ell^2} = 2.4 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $F_x = F_y = 2\sqrt{2}\,k\,\dfrac{Qq}{\ell^2} = 3.6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$.

41. $P = (0, y)$ con $y = \sqrt{\dfrac{kq}{E}} = 29\,\mathrm{cm}$.

42. $E = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d} = \dfrac{2k\lambda}{d}$.

43. $\dfrac{F}{A} = \dfrac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$.

44. a) $M = 0$;
b) $M = pE = 3.2 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{N\,m}$;
c) $M = pE \operatorname{sen}\alpha = 1.8 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{N\,m}$.

45. a) $p = \dfrac{M_0}{E} = 1.3 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{C\,m}$;
b) $M = M_0 \operatorname{sen}\theta = 3.8 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{N\,m}$.

46. $F = k\,\dfrac{Q^2}{4d^2} = 1.47\,\mathrm{N}$.

47. $v = \sqrt{\dfrac{ke^2}{m_e r}} = 4.7 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

48. $q_1 = \sqrt{\dfrac{F_2}{k}}\,d\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{F_1}{F_2}}\right) = -8.9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$,
$q_2 = \sqrt{\dfrac{F_2}{k}}\,d\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{F_1}{F_2}}\right) = -3q_1 = 27 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$.

49. $q_2 = q_4 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\,q_1 = 2.9 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$.

50. a) $x = 0$;
b) $x = \dfrac{d}{\sqrt{2}} = 10.6\,\mathrm{cm}$.

51. $\kappa = \dfrac{2kq_1^2}{d^2(D - d)} = 1.0 \cdot 10^5\,\mathrm{N\,m^{-1}}$

52. $t = \dfrac{x}{v_0} = 4.7\,\mathrm{ns}$, $\sigma = \dfrac{4m_e\epsilon_0 v_0^2 y}{ex^2} = 4.5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C\,m^{-2}}$.

53. $x = \sqrt[3]{\dfrac{2kq^2\ell}{mg}} = 14\,\text{cm}.$

54. $E = 2kp_q\,\dfrac{3x^2 - d^2}{x^2(x^2 - d^2)^2} \simeq \dfrac{6kp_q}{x^4}.$

55. $E \simeq \dfrac{12kp_q}{x^4}.$

56. a) $\theta = \operatorname{arctg}\dfrac{kq_1q_2}{mgd^2} = 18.4°;$
b) $\tau = 1.55\,\text{N}.$

57. $E = k\,\dfrac{Q}{R^3} @ifvmode\, r$

58. a) $E(r_1) = 0;$
b) $E(r_2) = k\,\dfrac{Q_1}{r_2^2} = 1.2\cdot 10^6\,\text{N C}^{-1}$, diretta verso il centro;
c) $E(r_3) = k\,\dfrac{Q_1 + Q_2}{r_3^2} = 7.0\cdot 10^4\,\text{N C}^{-1}$, diretta verso il centro.

59. $\omega = \sqrt{\dfrac{ke\,Qx}{m_eR^3}}.$

Il potenziale elettrico e l'energia elettrostatica

1. $\mathcal{L} = -q\phi(P) = 2.1\cdot 10^{-4}\,\text{J}.$

2. $\mathcal{L} = -q\phi(P) = 4.1\cdot 10^{-4}\,\text{J}.$

3. $\mathcal{E}_c = e\Delta\phi = 3.2\cdot 10^{-15}\,\text{J} = 5.1\cdot 10^{-34}\,\text{eV}.$

4. $\phi = e\phi = k\,\dfrac{e}{d} = 3.6\cdot 10^5\,\text{volt}.$

5. $W = k\,\dfrac{e^2}{d} = 5.8\cdot 10^{-13}\,\text{J}.$

6. $Q = \dfrac{\phi d}{k} = 2.8\,\text{nC}.$

7. $\Delta\phi = -\dfrac{\sigma d}{\epsilon_0} = 1.1\cdot 10^5\,\text{V}.$

8. $\Delta\phi = \dfrac{\mathcal{E}}{2e} = 2.0\cdot 10^{-13}\,\text{eV C}^{-1} = 1.3\,\text{MV}.$

9. $\Delta\phi_{AB} = kQ\left(\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right) = 1.1\cdot 10^3\,\text{V}.$

10. a) $E = k\,\dfrac{8q^2}{d^2},\ \phi = 0;$
b) $E = 0,\ \phi = k\,\dfrac{4q}{d}.$

11. $\mathcal{L} = kQq\left(\dfrac{1}{r_A} - \dfrac{1}{r_B}\right) = -1.2\,\text{J}.$

12. a) $x = \dfrac{-q_1}{q_2 - q_1}\, d = 6.0\,\mathrm{cm}$, no;
b) non vi sono altri punti;
c) il potenziale elettrico è nullo solo all'infinito.

13. a) $x = \dfrac{q_1}{q_1 - q_2}\, d = 18.8\,\mathrm{cm}$;
b) $\mathcal{L} = 0\,\mathrm{J}$;
c) $\mathcal{L} = -q\phi_M = -\dfrac{2kq}{d}\,(q_1 + q_2) = 2.4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$.

14. $\mathcal{L} = 0\,\mathrm{J}$.

15. $\mathcal{L} = -\dfrac{q\sigma a}{2\epsilon_0} = 3.5 \cdot 10^{2}\,\mathrm{J}$.

16. $Q = -\dfrac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5}}\, q$.

17. $W = k\,\dfrac{q_1 q_2}{d} = 2.7 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$.

18. $v = \sqrt{\dfrac{2\mathcal{E}}{m_p}} = 6.2 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

19. $\phi \simeq k\,\dfrac{p}{d^2} = 8.8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{V}$.

20. $W = k\,\dfrac{e^2}{d} = 3.1 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{J}$; dimezza.

21. $v = \sqrt{\dfrac{2k}{m_e d}}\, e = 32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

22. $\Delta\phi = \dfrac{\mathcal{E} - \mathcal{L}}{q} = 9.0 \cdot 10^{3}\,\mathrm{V}$.

23. $\mathcal{L} = 3k\,\dfrac{e^2}{\ell} = 1.4 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$

24. $\phi(A) - \phi(B) = E x_B = 1.1 \cdot 10^{3}\,\mathrm{V}$.

25. $\phi(P) = \dfrac{k}{d}\left(q_1 + q_2 + q_3 + \dfrac{q_4}{2}\right) = -1.3 \cdot 10^{2}\,\mathrm{V}$.

26. Non esiste un tale P.

27. $\phi_2 = \sqrt[3]{4}\,\phi_1 = 190\,\mathrm{V}$.

28. a) $\sigma = \dfrac{\epsilon_0 r \phi}{R^2} = -5.6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{C}$;
b) $\phi(0) = \dfrac{r}{R}\,\phi = -5.1 \cdot 10^{4}\,\mathrm{V}$, $E = 0\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
c) $\mathcal{L} = 0\,\mathrm{J}$.

29. a) $\phi(r_1) = \phi(R) = k\,\dfrac{Q}{R} = 3.9 \cdot 10^{4}\,\mathrm{V}$, $\phi(r_2) = k\,\dfrac{Q}{r_2} = 2.2 \cdot 10^{4}\,\mathrm{V}$;
b) $E(r_1) = 0\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, $E(R) = k\,\dfrac{Q}{R^2} = 5.5\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, $E(r_2) = k\,\dfrac{Q}{r_2^2} = 1.9 \cdot 10^{5}\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
c) $\mathcal{L} = kQq\left(\dfrac{1}{d_1} - \dfrac{1}{d_2}\right) = 3.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$.

30. a) $Q = \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\,\dfrac{\mathcal{L}}{kq} = 4.0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}$, $\sigma = \dfrac{Q}{4\pi R^2} = 2.2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C\,m^{-2}}$;
b) $E = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} = 2.5 \cdot 10^{7}\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
c) $\phi(0) = \phi(R) = k\,\dfrac{Q}{R} = 3.0 \cdot 10^{6}\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-1}}$.

31. $q = \dfrac{d_1 d_2}{d_2 - d_1}\,\dfrac{\epsilon_0 \mathcal{L}}{r^2 \sigma} = 4.6 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}$.

32. a) $\phi(0) = \phi(R) = \dfrac{\sigma R}{\epsilon_0} = 1.3 \cdot 10^{6}\,\mathrm{V}$, $E(0) = 0\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, $E(R) = \dfrac{\sigma}{\epsilon_0} = 1.7 \cdot 10^{7}\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $\mathcal{L} = -e\phi(R) = -2.0 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$.

33. a) $E = -\phi_0\,\dfrac{r_1}{d_1^2} = 9.6 \cdot 10^{4}\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $\sigma = \epsilon_0\,\dfrac{\phi_0 r_1}{r_2^2} = -5.9 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C\,m^{-2}}$;
c) $\phi(d_2) = 0\,\mathrm{V}$.

34. a) $\phi(A) = k\,\dfrac{q_1}{a} + k\,\dfrac{q_2}{\sqrt{a^2+b^2}} = 45\,\mathrm{V}$, $\phi(B) = k\,\dfrac{q_2}{a} + k\,\dfrac{q_1}{\sqrt{a^2+b^2}} = 76\,\mathrm{V}$;
b) $\mathcal{L} = kq(q_2 - q_1)\left[\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} - \dfrac{1}{a}\right] = 1.3 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{J}$.

35. $\mathcal{L} = q\phi(A) = k\,\dfrac{4qq_1}{\sqrt{3}\ell} = -1.9 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{J}$.

36. a) $\phi = \dfrac{k\sqrt{3}}{\ell}\,(2q_1 + q_3) = 1.7 \cdot 10^{4}\,\mathrm{V}$;
b) $q_3 = -2q_1 = -400\,\mathrm{nC}$.

37. $\phi(0) = \phi(R) = -ER = -9.6 \cdot 10^{8}\,\mathrm{V}$.

38. $\mathcal{E} = \dfrac{ke^2}{r_0} = 8.7 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J}$.

39. $W = k\,\dfrac{q_1 q_2 + q_1 q_3 + q_2 q_3}{\ell} = -0.45\,\mathrm{J}$.

40. $d = \dfrac{2\epsilon_0 \Delta\phi}{\sigma} = 8.3\,\mathrm{mm}$.

41. $\mathcal{L} = kQq\left(\dfrac{1}{d_A} - \dfrac{1}{d_B}\right) = 4.9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$; $\Delta\phi_{AB} = \dfrac{L}{q} = 1.8 \cdot 10^{5}\,\mathrm{V}$.

42. $\mathcal{L} = -\dfrac{kq}{d}\left(\dfrac{q_1}{2} + q_2\right) = 2.4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{J}$, $W = \dfrac{k}{2d}(2q_1 q_2 + q_1 q + q_2 q) = 0.26\,\mathrm{J}$.

43. $W_n = -\dfrac{ke^2}{3d} = 3.1 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J}$; $W_p = 0$.

44. $d = \dfrac{\Delta\phi}{E} = 2.1\,\mathrm{mm}$; $v = \sqrt{\dfrac{2e\Delta\phi}{m_p + m_n}} = 1.1 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

45. $d = \dfrac{4ke^2}{m_p v^2} = 3.0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}$.

46. $n = \dfrac{Pt}{e\Delta\phi} = 4.5 \cdot 10^{23}$.

47. $\mathcal{L} = kQq\left(\dfrac{1}{d_A} - \dfrac{1}{d_B}\right) = 4.9 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{J}$; $\Delta\phi_{AB} = \dfrac{L}{q} = 1.8 \cdot 10^5\,\mathrm{V}$.

48. Sono i punti la cui distanza da q_2 è doppia di quella da q_1, che sono i punti che si trovano sulla circonferenza di equazione $3x^2 + 3y^2 - 20x + 12 = 0$; che ha centro in $C(10/3, 0)$ e raggio $r = 8/3$.

49. $\phi(r) = \phi(R) + \displaystyle\int_r^R E(r)\,dr = \frac{kQ}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$.

50. $\phi(x) = 2kp_q \, \dfrac{1}{x(x^2 - d^2)} \simeq \dfrac{2kp_q}{x^3}$.

51. Isolante; il campo elettrico ha modulo costante e vale $E = \dfrac{\phi_2 - \phi_1}{R} = 250\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, diretto verso il centro.

52. $\Delta\phi_{AB} = \phi(r_B) - \phi(r_A) = \dfrac{a}{3}\left(\dfrac{1}{r_B^3} - \dfrac{1}{r_A^3}\right) = 19.5\,\mathrm{V}$.

53. $\phi(x) = kQ \displaystyle\int_x^\infty \frac{\xi}{(\xi^2 + R^2)^{3/2}}\,d\xi = k\,\frac{Q}{\sqrt{x^2 + R^2}}$.

54. $\phi = \dfrac{7}{4}\,\pi k\lambda$.

55. $E = kZe\left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{r}{R^3}\right)$, $\phi(r) = \displaystyle\int_r^R E(r)dr = kZe\left[\frac{1}{r} - \frac{3}{2R} + \frac{r^2}{2R^3}\right]$

Condensatori

1. a) $C = \dfrac{1}{k}\,\dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = 1.4\,\mathrm{pF}$;
b) $A = \dfrac{r_1 r_2}{4\pi} = 4.0 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2}$.

2. $C_2 = \sqrt[3]{2}\,C_1$.

3. $C = \dfrac{R}{k} = 0.71\,\mathrm{mF}$.

4. La capacità dimezza, il campo elettrico resta invariato, la differenza di potenziale raddoppia.

5. $C = \epsilon_0\,\dfrac{\pi r^2}{d} = 1.8 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$, $Q = \epsilon_0\,\dfrac{\pi r^2}{d} = 1.8 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{V}$.

6. $V = \dfrac{m_e g d}{e} = 1.7 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{V}$, l'armatura superiore.

7. a) $V = \dfrac{Qd}{\epsilon_0 \pi r^2} = 1.5 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$;
b) $E = \dfrac{Q}{\epsilon_0 \pi r^2} = 4.2 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, diretto verticalmente verso l'alto;
c) $F = \dfrac{eQ}{\epsilon_0 \pi r^2} + m_e g = 6.8 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{N}$, diretta verso il basso.

8. $Q_c = 0\,\mathrm{C}$, $E = 0\,\mathrm{N\,C^{-1}}$.

9. a) $C = \epsilon_0 \dfrac{A}{d} = 22\,\mathrm{pF}$;
b) $V = \dfrac{Q}{C} = 11\,\mathrm{V}$;
c) $E = \dfrac{V}{d} = 2.2 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$.

10. a) $Q_1 = Q_2 = V\,\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2} = 1.2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$, $V_1 = V\,\dfrac{C_2}{C_1+C_2} = 6.0\,\mathrm{V}$, $V_2 = V - V_1 = 4\,\mathrm{V}$;
b) $\mathcal{L} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}\,V^2 = 6.0 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$.

11. a) $Q_1 = C_1V = 6.2 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$, $Q_2 = C_2V = 4.3 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$, $V_1 = V_2 = V = 12\,\mathrm{V}$;
b) $\mathcal{L} = \dfrac{1}{2}(C_1+C_2)V^2 = 6.3\,\mathrm{nJ}$.

12. $Q = \sqrt{\dfrac{2\epsilon_0 A\mathcal{L}}{d}} = 2.3 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$, $V = \sqrt{\dfrac{2L}{Q}} = 1.2 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$, $E = \dfrac{V}{d} = 4.8 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$.

13. $V = \dfrac{Qd}{\epsilon_0 A} = 3.1 \cdot 10^3\,\mathrm{V}$, $E = \dfrac{Q}{\epsilon_0 A} = 1.3 \cdot 10^6\,\mathrm{N\,C^{-1}}$; la differenza di potenziale raddoppia, il campo elettrico resta invariato.

14. $F = \dfrac{eQ}{\epsilon_0 d} = 1.8 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{N}$.

15. $Q_1 = CV = 7.5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}$, $Q_2 = \epsilon_r CV = 9.0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$.

16. $C = \epsilon_0 \dfrac{A}{2d}(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) = 39\,\mathrm{pF}$.

17. a) $E = \dfrac{CV}{\epsilon_0\epsilon_r A} = 6.0 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $Q = CV = 1.3\,\mathrm{nC}$;
c) $Q_p = \dfrac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r}\,CV = 1.0\,\mathrm{nC}$.

18. a) $\epsilon_r = \dfrac{Q}{\epsilon_0 AE} = 3.1$;
b) $Q_p = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)EA = 34\,\mathrm{nC}$.

19. $C = \epsilon_0 \dfrac{A}{d}\left(\epsilon_{r1} + \dfrac{2\epsilon_{r2}\epsilon_{r3}}{\epsilon_{r2}+\epsilon_{r3}}\right) = 93\,\mathrm{pF}$.

20. a) $C = \dfrac{C_1C_3 + C_2C_3}{C_1+C_2+C_3} = 8.2\,\mathrm{pF}$;
b) $V_1 = V_2 = \dfrac{C_3 - C}{C_3} = 4.4\,\mathrm{V}$, $V_3 = \dfrac{C}{C_3}\,V = 20\,\mathrm{V}$
c) $Q_1 = C_1V_1 = 1.1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$, $Q_2 = C_2V_2 = 8.7 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}$, $Q_3 = CV = 2.0 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$

21. a) $C = \dfrac{C_1(C_2+C_3)C_4}{(C_1+C_4)(C_2+C_3)+C_1C_4} = 14\,\mathrm{\mu F}$;
b) $V_1 = \dfrac{C}{C_1}\,V = 30\,\mathrm{V}$, $V_2 = V_3 = \left(1 - \dfrac{C}{C_1} - \dfrac{C}{C_4}\right)V = 13\,\mathrm{V}$;
c) $Q_1 = Q_4 = CV = 7.2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$, $Q_2 = C_2V_2 = 4.6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$, $Q_3 = C_3V_3 = 2.6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$.

22. $C_2 = \dfrac{V_1 - V_2}{V_2}\,C_1 = 168\,\mathrm{pF}$.

23. a) $C = \dfrac{EQ}{d} = 4.0 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{F}$, $r = \sqrt{\dfrac{Q}{\pi\epsilon_0 E}} = 6.8\,\mathrm{mm}$;
b) C resta invariata, V raddoppia, E raddoppia, W quadruplica.

24. $C = \dfrac{2e^2 W}{m_p^2 d^2 a^2} = 20\,\mathrm{pF}$;

25. $Q_1 = Q_2 = \dfrac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2}\, V = 4.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$, $Q_3 = C_3 V = 2.0 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{C}$,
$V_1 = \dfrac{C_2}{C_1 + C_2}\, V = 6.7\,\mathrm{V}$, $V_2 = V - V_1 = 13\,\mathrm{V}$, $V_3 = V = 20\,\mathrm{V}$.

26. $Q_1 = \dfrac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}\, V = 1.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}$, $Q_2 = \dfrac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}\, V = 1.8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}$,
$Q_3 = Q_1 + Q_2 = 3.0 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}$, $V_1 = V_2 = \dfrac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3}\, V = 60\,\mathrm{V}$, $V_3 = V - V_1 = 60\,\mathrm{V}$

27. $A = \dfrac{Q}{\epsilon_0 E} = 2.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^2$, $W = \dfrac{1}{2}\, QEd = 1.2\,\mu\mathrm{J}$.

28. $Q = \dfrac{2W}{Ed} = 89\,\mathrm{nC}$, $C = \dfrac{2W}{E^2 d^2} = 2.7\,\mathrm{nF}$.

29. a) $C = \epsilon_0\, \dfrac{AE}{V} = 0.19\,\mathrm{pF}$;
b) $Q = \epsilon_0 AE = 23\,\mathrm{pC}$;
c) $\mathcal{L} = \epsilon_0 AEV = 2.8\,\mathrm{nJ}$.

30. a) $C = \dfrac{Q^2}{2W} = 0.50\,\mathrm{nF}$;
b) $E = \dfrac{2W}{Qd} = 2.0 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
c) $\mathcal{L} = W = 4.0\,\mathrm{nJ}$.

31. a) $C_s = \dfrac{d}{d-s}\, C = 6.7 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F}$;
b) $V_s = \dfrac{d-s}{d}\, \dfrac{Q}{C} = 3.0 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$.

32. a) $V = \dfrac{Q}{C} = 7.0 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$, $E = \dfrac{Q}{Cd} = 3.5 \cdot 10^4\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
b) $C_d = \epsilon_r C = 1.2 \cdot 10^2\,\mathrm{nF}$, $V_d = \dfrac{V}{\epsilon_r} = 1.8 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$, $E_d = \dfrac{E}{\epsilon_r} = 8.8 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,C^{-1}}$;
c) $V = \dfrac{2Q}{C(1+\epsilon_r)} = 2.8 \cdot 10^2\,\mathrm{V}$.

33. $n = \dfrac{CV^2}{2\mathcal{L}} = 24$.

34. a) $Q = CV = 1.4 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}$, $E = \dfrac{CV}{\epsilon_0 A} = 4.0 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, $W = \dfrac{1}{2}\, CV^2 = 1.7 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}$;
b) $C_s = \epsilon_0 \dfrac{AC}{\epsilon_0 A - Cs} = 10\,\mathrm{pF}$, $E_s = E$, $V_s = E\left(\epsilon_0\, \dfrac{A}{C} - s\right) = 14\,\mathrm{V}$,
$W_s = \dfrac{1}{2}\, QV_s = 9.9 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{J}$;
c) $C_d = \epsilon_r C = 24\,\mathrm{pF}$, $E_d = \dfrac{1}{\epsilon_r}\, E = 1.0 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, $V_d = \dfrac{1}{\epsilon_r}\, V = 6.0\,\mathrm{V}$,
$S_d = \epsilon_r W = 6.8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}$.

35. a) Tutto resta uguale;
b) $E_s = \dfrac{CV}{\epsilon_0 A - sC} = 6.9 \cdot 10^3\,\mathrm{N\,C^{-1}}$, $V_s = V = 24\,\mathrm{V}$,
$W_s = \dfrac{1}{2}\,\epsilon_0 \dfrac{AC}{\epsilon_0 A - Cs} V^2 = 2.9 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}$.

36. a) $C = \dfrac{C_1C_3C_4 + C_1C_2(C_3 + C_4)}{C_3C_4 + (C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} = 4.1\,\mathrm{nF}$;
b) $C = \dfrac{C_1C_2C_4 + C_1C_3(C_2 + C_4)}{C_2C_4 + (C_1 + C_3)(C_2 + C_4)} = 4.2\,\mathrm{nF}$

37. $V_1 = V_2 = V_3 = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3}\,V = 20\,\mathrm{V}$,
$Q_1 = C_1V_1 = 2 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$, $Q_2 = C_2V_2 = 4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$, $Q_3 = C_3V_3 = 6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{C}$.

Leggi di Ohm

1. $R_2 = \dfrac{1}{2}\,R_1$.

2. $R_2 = \dfrac{R_1}{4}$.

3. $i = \dfrac{V\pi(r_2^2 - r_1^2)}{\rho\ell} = 0.94\,\mathrm{A}$.

4. $i_2 = 2i_1 = 4.8\,\mathrm{A}$.

5. $i_2 = \dfrac{3}{2}\,i_1 = 3.6\,\mathrm{A}$.

6. a) $Q = it = 7.2 \cdot 10^4\,\mathrm{C}$;
b) $\mathcal{L} = Vit = 8.6 \cdot 10^5\,\mathrm{J}$.

7. $\rho = \dfrac{VS}{i\ell} = 5.31 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

8. $V = \dfrac{R}{\ell}\,id = 1.6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{V}$.

9. a) $R = \dfrac{V}{i} = 83\,\mathrm{m\Omega}$;
b) $\rho = \dfrac{\pi d^2 R}{4\ell} = 1.9 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$;
c) $n = \dfrac{V}{ve\ell\rho} = 6.6 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^{-3}}$.

10. $N = \dfrac{\pi r^2 \Delta t V}{\rho\ell e} = 1.1 \cdot 10^{17}$.

11. $R = \rho\,\dfrac{m}{\pi^2 r^4 \delta} = 0.12\,\Omega$.

12. a) $E = \dfrac{V}{\ell} = 0.48\,\mathrm{N\,m^{-1}}$;
b) $\rho = \dfrac{VS}{i\ell} = 1.6 \cdot 10^{-8}\,\Omega\,\mathrm{m}$.

13. $R = \dfrac{N\pi d^2}{4\rho\ell} = 26\,\mathrm{m\Omega}$.

14. $i = \pi R^2 env = 1.0 \cdot 10^8\,\mathrm{A}$.

15. a) $N = \dfrac{it}{e} = 3.8 \cdot 10^{13}$;
b) $n = \dfrac{i}{eS}\sqrt{\dfrac{m}{2\mathcal{E}_c}} = 4.8 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}^{-3}$.

16. $d = 2\sqrt{\dfrac{\ell\rho i}{\pi V}} = 2.6\,\mathrm{mm}$.

17. $i = \dfrac{Nev}{\ell} = 0.2\,\mathrm{A}$.

18. $i = \dfrac{kQ}{Rr} = 9.7\,\mathrm{A}$.

19. $i = \dfrac{e^2}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_e r^3}} = 1.05 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A}$.

20. $i(t_1) = 2q_0 e^{-2t_1} = 61\,\mu\mathrm{A}$.

Circuiti elettrici in corrente continua

1. $Q = \dfrac{\mathcal{P}}{V}\,\Delta t = 8.6 \cdot 10^3\,\mathrm{C}$.

2. a) $R = \dfrac{V^2}{\mathcal{P}_1} = 1.2 \cdot 10^2\,\Omega$;
b) $\mathcal{P}_2 = 4\mathcal{P}_1 = 2.6\,\mathrm{W}$.

3. a) $R = \dfrac{\mathcal{P}_1}{i^2} = 4.0\,\Omega$;
b) $i_2 = \sqrt{2}\,i_1 = 4.5\,\mathrm{A}$.

4. a) $i = \dfrac{\mathcal{P}}{V} = 6.82\,\mathrm{A}$;
b) $R = \dfrac{V^2}{\mathcal{P}} = 32.3\,\Omega$;
c) $\mathcal{E}_d = \mathcal{P}t = 3.75\,\mathrm{kW\,h}$.

5. In parallelo; $R_2 = \dfrac{RR_1}{R_1 - R} = 24\,\Omega$.

6. $\mathcal{E}_d = \rho\,\dfrac{\ell}{S}\,i^2 t = 1.2\,\mathrm{W\,h}$.

7. $i = \dfrac{\mathcal{P}}{V} = 0.22\,\mathrm{A}$, $R = \dfrac{V^2}{\mathcal{P}} = 1.1 \cdot 10^2\,\Omega$.

8. $\mathcal{P} = Vi = 0.18\,\mathrm{W}$.

9. $s = \dfrac{V^2}{R}\,t\,c = 0.42$ €.

10. $R \geq \dfrac{0.988}{0.012}\,R_i = 185\,\Omega$.

11. $\mathcal{P} = \dfrac{\ell^2 R_1 + x\ell R_2}{\ell^2 R_1 R_2 + x(\ell - x)R_2^2}\,V^2 = 14\,\mathrm{W}$.

12. a) $V_1 = V = 24\,\mathrm{V}$, $V_2 = \dfrac{R_2}{R_2+R_3}V = 14\,\mathrm{V}$, $V_3 = \dfrac{R_3}{R_2+R_3}V = 9.6\,\mathrm{V}$, $i_1 = \dfrac{V}{R_1} = 12\,\mathrm{A}$,
$i_2 = i_3 = \dfrac{V_2}{R_2} = 4.8\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_V = V(i_1+i_2) = 4.0\cdot 10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = R_1 i_1^2 = 2.9\cdot 10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = R_2 i_2^2 = 69\,\mathrm{W}$,
$\mathcal{P}_{R_3} = R_3 i_3^2 = 46\,\mathrm{W}$,

13. a) $V_1 = \dfrac{R_1(R_2+R_3)}{R_1(R_2+R_3)+R_2R_3}V = 15\,\mathrm{V}$, $V_2 = V_3 = V - V_1 = 9.0\,\mathrm{V}$, $i_1 = \dfrac{V_1}{R_1} = 7.5\,\mathrm{A}$,
$i_2 = \dfrac{V_2}{R_2} = 3.0\,\mathrm{A}$, $i_3 = i_1 - i_2 = 4.5\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_V = Vi_1 = 1.8\cdot 10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = R_1 i_1^2 = 1.1\cdot 10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = R_2 i_2^2 = 27\,\mathrm{W}$,$\mathcal{P}_{R_3} = R_3 i_3^2 = 41\,\mathrm{W}$.

14. R_2 ed R_3 sono in serie;
a) $R = \dfrac{R_1(R_2+R_3)}{R_1+R_2+R_3} = 12\,\Omega$;
b) $V_1 = V = 96\,\mathrm{V}$, $V_2 = \dfrac{R_2}{R_2+R_3}V = 64\,\mathrm{V}$, $V_3 = \dfrac{R_3}{R_2+R_3}V = 32\,\mathrm{V}$,
$i_1 = \dfrac{V}{R_1} = 5.3\,\mathrm{A}$, $i_2 = i_3 = \dfrac{V}{R_2+R_3} = 2.7\,\mathrm{A}$;
c) $\mathcal{P}_V = V(i_1+i_2) = 7.7\cdot 10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = R_1 i_1^2 = 5.1\cdot 10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = R_2 i_2^2 = 1.7\cdot 10^2\,\mathrm{W}$,
$\mathcal{P}_{R_3} = R_3 i_2^2 = 85\,\mathrm{W}$.

15. R_1, R_4 sono in serie, R_2, R_3 sono in parallelo;
a) $R = \dfrac{(R_1+R_4)(R_2+R_3)}{R_2+R_3} = 36\,\Omega$;
b) $V_1 = \dfrac{R_1}{R}V = 1.0\cdot 10^2\,\mathrm{V}$, $V_2 = V_3 = \dfrac{R-R_1-R_4}{R}V = 50\,\mathrm{V}$, $V_4 = \dfrac{R_4}{R}V = 30\,\mathrm{V}$,
$i_1 = i_4 = \dfrac{V}{R} = 5.0\,\mathrm{A}$, $i_2 = \dfrac{V_2}{R_2} = 3.3\,\mathrm{A}$, $i_3 = \dfrac{V_2}{R_3} = 1.7\,\mathrm{A}$;
c) $\mathcal{P}_V = Vi_1 = 9.0\cdot 10^2\,\mathrm{V}$, $\mathcal{P}_{R_1} = R_1 i_1^2 = 5.0\cdot 10^2\,\mathrm{V}$, $\mathcal{P}_{R_2} = R_2 i_2^2 = 1.7\cdot 10^2\,\mathrm{V}$, $\mathcal{P}_{R_3} = R_3 i_3^2 = 83\,\mathrm{V}$,
$\mathcal{P}_{R_4} = R_4 i_1^2 = 1.5\cdot 10^2\,\mathrm{V}$.

16. D fornisce la potenza $\mathcal{P} = 270\,\mathrm{W}$.

17. R_1 ed R_2 sono in serie;
a) $V_{R_1} = \dfrac{R_1}{R_1+R_2}(V_1-V_2) = 24\,\mathrm{V}$, $V_{R_2} = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}(V_1-V_2) = 16\,\mathrm{V}$, $V_{R_3} = V_2 = 24\,\mathrm{V}$,
$i_1 = i_2 = \dfrac{V_1-V_2}{R_1+R_2} = 2.0\,\mathrm{A}$, $i_3 = \dfrac{V_2}{R_3} = 6.0\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_{V_1} = V_1 i_1 = 1.3\cdot 10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{V_2} = V_2(i_3-i_1) = 96\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = R_1 i_1^2 = 48\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = R_2 i_1^2 = 32\,\mathrm{W}$,
$\mathcal{P}_{R_3} = R_3 i_3^2 = 1.4\cdot 10^2\,\mathrm{W}$.

18. R_2 ed R_3 sono in parallelo; a) $V_{R_1} = V_1 - V_2 = 40\,\mathrm{V}$, $V_{R_2} = V_{R_3} = V_2 = 24\,\mathrm{V}$, $i_1 = \dfrac{V_1-V_2}{R_1} = 3.3\,\mathrm{A}$,
$i_2 = \dfrac{V_2}{R_2} = 3.0\,\mathrm{A}$, $i_3 = \dfrac{V_2}{R_3} = 6.0\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_{V_1} = V_1 i_1 = 2.1\cdot 10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{V_2} = V_2(i_2+i_3-i_1) = 1.4\cdot 10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = R_1 i_1^2 = 1.3\cdot 10^2\,\mathrm{W}$,
$\mathcal{P}_{R_2} = R_2 i_2^2 = 72\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_3} = R_3 i_3^2 = 1.4\cdot 10^2\,\mathrm{W}$.

19. a) $R_e = 0.25\,\Omega$;
b) $i = 100\,\mathrm{A}$;
c) $\mathcal{P} = 3.6\cdot 10^2\,\mathrm{W}$.

20. a) $R_e = 5.0\,\Omega$;
b) $i = 3.2\,\mathrm{A}$;
c) $\mathcal{P} = 80\,\mathrm{W}$.

21. $R = \dfrac{R_4(R_7+R_8)V_1}{(R_1+R_2+_R 3+R_4)V_2 - R_4V_1} = 400\,\Omega$.

22. No;
a) $V_1 = 52.5\,\mathrm{V}$, $V_2 = 67.5\,\mathrm{V}$, $V_3 = 15.0\,\mathrm{V}$, $V_4 = 52.5\,\mathrm{V}$, $V_5 = 37.5\,\mathrm{V}$, $i_1 = 2.63\,\mathrm{A}$, $i_2 = 2.25\,\mathrm{A}$, $i_3 = 0.38\,\mathrm{A}$, $i_4 = 2.63\,\mathrm{A}$, $i_5 = 2.25\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_V = 585\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = 138\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = 152\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_3} = 5.63\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_4} = 138\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_5} = 152\,\mathrm{W}$.

23. a) $V_{R_1} = 67\,\mathrm{V}$, $V_{R_2} = 83\,\mathrm{V}$, $V_{R_3} = 23\,\mathrm{V}$, $i_1 = 3.3\,\mathrm{A}$, $i_2 = 2.8\,\mathrm{A}$, $i_3 = 0.58\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_{V_1} = 1.7\cdot10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{V_2} = 3.0\cdot10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = 2.2\cdot10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = 2.3\cdot10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_3} = 13\,\mathrm{W}$.

24. a) $V_{R_1} = 1.5\cdot10^2\,\mathrm{V}$, $V_{R_2} = 90\,\mathrm{V}$, $V_{R_3} = 60\,\mathrm{V}$, $i_1 = 7.5\,\mathrm{A}$, $i_2 = 3.0\,\mathrm{A}$, $i_3 = 1.5\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_{V_1} = 5.4\cdot10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{V_2} = 9.5\cdot10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = 1.1\cdot10^3\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = 2.7\cdot10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_3} = 90\,\mathrm{W}$.

25. No;
a) $V_{R_1} = 14\,\mathrm{V}$, $V_{R_2} = 4.0\,\mathrm{V}$, $V_{R_3} = 18\,\mathrm{V}$, $i_1 = 7.0\,\mathrm{A}$, $i_2 = 1.0\,\mathrm{A}$, $i_3 = 6.0\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_{V_1} = 2.2\cdot10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{V_2} = -14\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = 98\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = 4\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_3} = 1.1\cdot10^2\,\mathrm{W}$.

26. No;
a) $V_{R_1} = 2.6\cdot10^2\,\mathrm{V}$, $V_{R_2} = 33\,\mathrm{V}$, $V_{R_3} = 63\,\mathrm{V}$, $i_1 = 6.4\,\mathrm{A}$, $i_2 = -3.3\,\mathrm{A}$, $i_3 = 3.1\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_{V_1} = 2.1\cdot10^3\,\mathrm{W}$ $\mathcal{P}_{V_2} = -99\,\mathrm{W}$ $\mathcal{P}_{R_1} = 1.7\cdot10^3\,\mathrm{W}$ $\mathcal{P}_{R_2} = 1.1\cdot10^2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_3} = 2.0\cdot10^2\,\mathrm{W}$.

27. R_1 ed R_2 sono in serie;
a) $V_{R_1} = 6.7\,\mathrm{V}$, $V_{R_2} = 13\,\mathrm{V}$, $V_{R_3} = 12\,\mathrm{V}$, $V_{R_4} = 4.0\,\mathrm{V}$, $i_1 = 3.3\,\mathrm{A}$, $i_2 = 3.0\,\mathrm{A}$, $i_3 = 0.33\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_{V_1} = V_1i_1 = 53\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{V_2} = V_2i_1 = 27\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{V_3} = V_3i_2 = 24\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = R_1i_1^2 = 22\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = R_2i_1^2 = 44\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_3} = R_3i_2^2 = 36\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_4} = R_4i_3^2 = 1.3\,\mathrm{W}$.

28. R_1, R_4 ed R_3, R_5 sono in serie;
a) $V_{R_1} = V_{R_3} = V_{R_4} = V_{R_5} = 0.40\,\mathrm{V}$, $V_{R_2} = 3.2\,\mathrm{V}$, $i_1 = i_3 = -0.20\,\mathrm{A}$, $i_2 = 0.40\,\mathrm{A}$;
b) $\mathcal{P}_{V_1} = -0.80\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{V_2} = 3.2\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{V_3} = -0.80\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_1} = \mathcal{P}_{R_3} = \mathcal{P}_{R_4} = \mathcal{P}_{R_5} = 8\cdot10^{-2}\,\mathrm{W}$, $\mathcal{P}_{R_2} = 1.3\,\mathrm{W}$.

29. $R = \dfrac{V}{i} - R_1 = 8.3\,\Omega$, $\Delta R = \dfrac{V}{i^2}\,\Delta i = 0.4\,\Omega$.

30. $R = R_i = 0.5\,\Omega$, $\mathcal{P} = \dfrac{V^2}{4R_i} = 1.0\cdot10^3\,\mathrm{W}$.

31. $t = \tau\ln100 = 6.9\cdot10^{-7}\,\mathrm{s}$.

32. $t = RC\ln3 = 66\,\mathrm{ms}$.

33. $C = \dfrac{\Delta t}{R\,\ln\dfrac{V_0}{V_0-V}} = 4.89\,\mathrm{nF}$.

34. $t = RC\ln2 = 1.0\,\mu\mathrm{s}$.

35. $t = \epsilon_r\epsilon_0\,\dfrac{RS}{d}\,\ln2 = 3.3\cdot10^{-9}\,\mathrm{s}$.

36. $R = \dfrac{\rho}{4\pi} \displaystyle\int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2}\,dr = 5.9 \cdot 10^8\,\Omega$; $t = \epsilon_r \epsilon_0 \rho \ln 2 = 43\,\text{s}$.

37. $\tau = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\,R = 4.0 \cdot 10^{-4}\,\text{s}$, $V = \dfrac{C_1}{C_1 + C_2}\,V_0 \left(1 - \dfrac{1}{e}\right) = 5.1\,\text{V}$.

38. a) $Q = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\,C V_0 = 1.6 \cdot 10^{-3}\,\text{C}$;
b) $V = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2}\,\dfrac{V_0}{e^2} = 3.6\,\text{V}$.

39. a) $t = \dfrac{v_{Cu} F M_{Cu}}{i M_0^{Cu}} = 3.00 \cdot 10^3\,\text{s}$;
b) $M_{Ag} = \dfrac{M_0^{Ag} v_{Cu}}{M_0^{Cu} v_{Ag}}\,M_{Cu} = 403\,\text{g}$.

40. a) $i = \dfrac{v_{Ag} F}{t M_0^{Ag}}\,M = 2.5\,\text{A}$;
b) $M_{Zn} = \dfrac{M_0^{Zn} v_{Ag}}{M_0^{Ag} v_{Zn}}\,M = 1.5\,\text{g}$.

Campo magnetico

1. $F = qvB = 9.0 \cdot 10^{-10}\,\text{N}$.

2. Verso l'alto.

3. a) $F = qvB \,\text{sen}\, 30^\circ = 2.6 \cdot 10^{-4}\,\text{N}$;
b) moto elicoidale di raggio $r = \dfrac{mv}{qB}\,\text{sen}\,30^\circ = 3.1\,\text{cm}$ e passo $d = 2\pi r \,\text{cotg}\, 30^\circ = 34\,\text{cm}$.

4. $B = \dfrac{\mu_0 i r^2}{2(a^2 + r^2)^{3/2}} = 1.6 \cdot 10^{-5}\,\text{T}$.

5. $i_1 = \dfrac{2\pi d(d + \ell)F}{\mu_0 i_2 \ell^2} = 48\,\text{A}$, in senso antiorario.

6. a) Verso orario;
b) $v = \dfrac{qBr}{m} = 2.6 \cdot 10^2\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$;
c) $T = \dfrac{2\pi m}{qB} = 1.1\,\text{ms}$.

7. $B = \dfrac{\mu_0}{\pi(4\ell^2 + d^2)} \sqrt{4(i_2 - i_1)^2 \ell^2 + (i_1 + i_2)^2 d^2} = 6.6 \cdot 10^{-6}\,\text{T}$.

8. a) $B = \dfrac{\mu_0}{2\sqrt{2}\pi a}\,(2 i_A + \sqrt{2} i_B) = 6.8 \cdot 10^{-6}\,\text{T}$;
b) $F = \mu_0\,\dfrac{i_A i_B}{\sqrt{2}\pi a}\,\ell = 4.5 \cdot 10^{-5}\,\text{N}$.

9. a) $E = vB = 1.0 \cdot 10^2\,\text{N}\,\text{C}^{-1}$, diretto nel verso delle z positive;
b) non cambia nulla.

10. $B(d_1) = \dfrac{\mu_0}{\ell}(N_2 i_2 - N_1 i_1) = 2.9 \cdot 10^{-2}\,\text{T}$, $B(d_2) = \mu_o\,\dfrac{N_2}{\ell}\,i_2 = 6.0 \cdot 10^{-2}\,\text{T}$.

11. $B = \dfrac{\mu_0 i}{4r} = 9.4\,\mathrm{mT}$.

12. a) Carica negativa;
b) $v = \sqrt{\dfrac{-2q\Delta V}{m}} = 1.1 \cdot 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
c) $r = \dfrac{mv}{qB} = 10\,\mathrm{cm}$.

13. a) Equiverse;
b) $i_2 = 2i_1 = 4.8\,\mathrm{A}$;
c) $B_1 = \mu_0 \dfrac{i_1}{2\pi d} = 8.0 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}$, $B_2 = \mu_0 \dfrac{i_2}{2\pi d} = 16 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T}$;
d) forza attrattiva di modulo $F = \mu_0 \dfrac{i_1 i_2}{2\pi d} = 3.8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

14. $B = \dfrac{E}{v} = 3.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$, diretto nel verso delle z positive.

15. a) $v = \dfrac{F}{qB} = 8.7 \cdot 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
b) $r = \dfrac{mF}{q^2B^2} = 2.3 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$.

16. a) $B = \dfrac{ma}{i\ell} = 1.0\,\mathrm{T}$;
b) si deve raddoppiare il modulo di $\boldsymbol{B}$ e cambiarne il verso.

17. a) $\ell = \dfrac{F}{iB} = 33\,\mathrm{cm}$, uscente dal foglio;
b) in entrambi i casi la forza è nulla.

18. a) $B = \dfrac{ma}{i\ell} = 0.16\,\mathrm{T}$;
b) il modulo di $\boldsymbol{B}$ diviene $B = 0.4\,\mathrm{T}$, la sua direzione rimane invariata, ma cambia il verso.

19. $a = \dfrac{Bi\ell\,\mathrm{sen}\,45°}{m} = 1.2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

20. a) $\dfrac{F}{\ell} = 0\,\mathrm{N\,m^{-1}}$;
b) $\dfrac{F}{\ell} = iB = 5.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$;
c) $\dfrac{F}{\ell} = iB = 5.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N\,m^{-1}}$.

21. $\ell = \dfrac{mg}{iB} = 1.2\,\mathrm{m}$.

22. a) $E = vB$, $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$;
b) nulla.

23. a) $B = \dfrac{m_p a}{ev} = 1.6 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}$, nella direzione delle y positive;
b) la forza resta uguale in modulo ma con verso opposto, il modulo dell'accelerazione diviene $a_e = \dfrac{m_p}{m_e}\, a = 5.5 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

24. $B = \dfrac{m_p g}{ev} = 2.0 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{T}$.

25. a) Il secondo;
b) $T_1 = \dfrac{2\pi r}{v_1} = 6.2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$, $T_2 = \dfrac{m_2}{m_1}\,T_1 = 1.3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

26. a) $B = \dfrac{m_p v}{er} = 2.00 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$;
b) $T = \dfrac{2\pi r}{v} = 3.28 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$;
c) $F = \dfrac{m_p v^2}{r} = 1.84 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{N}$.

27. a) $B = \dfrac{m_e v}{er} = 2.35 \cdot 10^{5}\,\mathrm{T}$;
b) orbita di raggio $r' = \dfrac{m_p}{m_e}\,r = 9.71 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m}$ percorsa in senso inverso.

28. $v = \dfrac{qB\ell}{2m} = 3.0 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

29. a) $F = \dfrac{mv^2}{r} = 7.7 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}$;
b) r quadruplica e F raddoppia;
c) non cambia nulla.

30. a) $r_2 = 4r_1 = \dfrac{4m_1 v_1}{q_1 B} = 2.2\,\mathrm{mm}$;
b) $v_2 = \dfrac{5}{8}\,v_1 = 1.3 \cdot 10^{7}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

31. $r = \dfrac{1}{eB}\sqrt{2m_e\mathcal{E}} = 14\,\mathrm{mm}$.

32. a) $v_\alpha = v_D$;
b) $p_\alpha = 2p_D$;
c) $\mathcal{E}_{c\alpha} = 2\mathcal{E}_{cD}$.

33. a) $B = \dfrac{mg}{i\ell \operatorname{sen}\theta} = 0.12\,\mathrm{T}$;
b) $v = \dfrac{reB}{m_p} = 1.1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
c) non cambierebbe nulla.

34. a) $i = \dfrac{F}{B\ell \operatorname{sen}\theta} = 1.7\,\mathrm{A}$;
b) $d = \dfrac{\mu_0 i^2 \ell}{2\pi F} = 10\,\mathrm{\mu m}$.

35. $i = \dfrac{F}{B\ell} = 2.9 \cdot 10^{7}\,\mathrm{A}$.

36. $B = \dfrac{\sqrt{2}\mu_0}{\pi\ell}\,(i_1 + i_2) = 1.2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{T}$.

37. a) $B = \dfrac{\mu_0}{2\pi}\left(\dfrac{i_2}{D-d} - \dfrac{i_1}{d}\right) = 2.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}$;
b) $a = \dfrac{d(D-d)i_3}{di_2 - (D-d)i_1} = 8.8\,\mathrm{cm}$;
c) $B = 0$.

38. $B = \mu_0 \dfrac{ev}{4\pi r^2} = 12.5\,\mathrm{T}$, $F = 0$.

39. a) $i = \sqrt{\dfrac{2\pi d}{\mu_0} \dfrac{F}{\ell}} = 1.9\,\mathrm{A}$;
b) $B = 0$.

40. a) $i_2 = \dfrac{2\pi F}{\mu_0 i_1} \dfrac{d(d+a)}{ab} = 4.0\,\mathrm{A}$;
b) la forza sarebbe attrattiva invece che repulsiva, con lo stesso modulo.

41. $B_A = \dfrac{\mu_0 i_1}{2\pi d_a} \dfrac{d}{d+d_a} = 4.3\,\mathrm{\mu T}$, $B_B = \dfrac{\mu_0 i_1}{\pi d_b} = 5.3\,\mathrm{\mu T}$.

42. $i_3 = 2i_1 = 8.0\,\mathrm{A}$.

43. $F = \mu_0 \dfrac{i^2 \ell}{2\pi d} = 3.1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N}$.

44. $F = qvB = 3.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$, uscente.

45. a) $F = qvB = 5.8 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$, verso il basso;
b) $r = \dfrac{mv}{qB} = 6.7 \cdot 10^5\,\mathrm{m}$.

46. $B = \mu_0 \dfrac{Ni}{2\pi r} = 0.15\,\mathrm{T}$.

Legge di Faraday-Neumann-Lenz

1. $\Delta B = \dfrac{Ri\Delta t}{\pi r^2} = 1.6 \cdot 10^2\,\mathrm{T}$.

2. $i = \dfrac{\pi d^2 B}{2R\Delta t} = 1.1\,\mathrm{mA}$.

3. $B = \dfrac{4Ri\Delta t}{\pi d^2} = 27\,\mathrm{mT}$.

4. $\mathcal{P} = \dfrac{\mathcal{A}^2 (B_2 - B_1)^2}{R\Delta t^2} = 0.011\,\mathrm{W}$.

6. a) $R = \dfrac{\pi d^2}{4i} \dfrac{B_1 - B_2}{\Delta t} = 0.25\,\Omega$; b) quadruplica.

7. a) $v = \dfrac{\mathcal{P}}{iB\ell} = 1.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$; b) $R = \dfrac{\mathcal{P}}{i^2} = 0.37\,\Omega$.

8. $i = \dfrac{1}{R\Delta t}\, abB_0 = 1.0\,\mathrm{mA}$.

9. a) $\Phi(\boldsymbol{B})(t) = B\ell vt$ per $0 < t < \ell/v$, $\Phi(\boldsymbol{B})(t) = B\ell^2$ per $t \geq \ell/v$;
b) $i(t) = \dfrac{B\ell v}{R} = 1.7 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{A}$ per $0 < t < \ell/v$, $i = 0$ per $t > \ell/v$; c) $F = 7.1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{N}$.

10. a) $i = \dfrac{\pi r^2 B\omega}{R} \operatorname{sen} \omega t = 0.51 \operatorname{sen} 4\pi t$;
b) $Q = \dfrac{\pi r^2 B}{R} = 4.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{C}$.

11. a) $i = \dfrac{\alpha \ell^2 v}{R} = 12\,\text{nA}$ in verso orario;

b) $F = \dfrac{\alpha^2 \ell^4 v}{R} = 3.5 \cdot 10^{-15}\,\text{N}$.

12. $\Phi(\boldsymbol{B}) = \ell^2 B_0 e^{-\lambda t_1} = 1.4 \cdot 10^{-9}\,\text{Wb}$, $i = \dfrac{\ell^2 \lambda B_0}{R}\, e^{-\lambda t_1} = 5.5 \cdot 10^{-10}\,\text{A}$ in verso antiorario.

13. $i = \dfrac{\ell^2 B_0}{R} = 4.7 \cdot 10^{-7}\,\text{A}$.

14. $i = \dfrac{\pi r^2}{R}\, 0.25 = 1.3\,\text{mA}$ in verso orario, per $0 < t < 2$; $i = 0$, per $2 < t < 4$;

$i = \dfrac{\pi r^2}{R}\, 0.25 = 1.3\,\text{mA}$ in verso antiorario, per $4 < t < 6$.

15. Per $0 < t < \dfrac{b}{v} = 0.5\,\text{s}$ vale $i = \dfrac{vBa}{R} = 13\,\mu\text{A}$ in verso orario; per $0.5 < t < 4$ vale $i = 0$.

16. $i = \dfrac{B\ell v}{R} = 19\,\mu\text{A}$, $\mathcal{L} = Ri^2 \Delta t = 7.0 \cdot 10^{-8}\,\text{J}$.

17. $v = \dfrac{mgR}{B^2 \ell^2}\, \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta} = 1.9\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Induzione mutua e autoinduzione

1. $L = \mu_0 \dfrac{N^2 \pi d^2}{4\ell} = 0.27\,\text{H}$.

2. $N = \sqrt{\dfrac{L\ell}{\mu_0 \pi r^2}} = 4.4 \cdot 10^3$.

3. $\Phi = \dfrac{Li}{N} = 25\,\text{nWb}$; $W = \dfrac{1}{2}\, Li^2 = 1.6\,\mu\text{J}$.

4. a) $u = \dfrac{\mu_0 N^2 i^2}{2\ell^2} = 7.0\,\text{J}\,\text{m}^{-3}$;

b) $W = \dfrac{\mu_0 N^2 S i^2}{2\ell} = 2.1 \cdot 10^{-3}\,\text{J}$.

5. Raddoppia.

6. a) $M = \dfrac{\mathcal{E}_2}{\frac{di_1}{dt}} = 27\,\text{mH}$; b) $\Phi_1 = M i_2 = 53\,\text{mWb}$.

7. $i = \dfrac{M(i_2 - i_1)}{R\Delta t} = 2.0 \cdot 10^{-4}\,\text{A}$.

8. $L = \dfrac{\mu_0 N^2 r^2}{2R^2} = 3.9\,\text{mH}$.

Il circuito *RL*

1. $\dfrac{100(e-1)}{e} = 63.2\,\%$.

2. a) $t = \tau \ln 2 = 0.693\tau$;

b) $t = \tau \ln 10 = 2.30\tau$;

c) $t = \tau \ln 1000 = 6.91\tau$.

3. $L = \dfrac{tR}{\ln \frac{i_0}{i}} = 6.5\,\mathrm{mH}$; $V = Ri_0 = 4.5\,\mathrm{V}$.

4. a) $i(t) = \dfrac{V}{R}\left(1 - e^{-tR/L}\right) = 1.1\,\mathrm{A}$

b) $W = \dfrac{1}{2}\,Li^2(t) = 13\,\mathrm{mJ}$.

5. a) $i_1 = \dfrac{V}{R_1} = 2.4\,\mathrm{A}$, $i_2 = 0\,\mathrm{A}$;

b) $i_1 = \dfrac{V}{R_1} = 2.4\,\mathrm{A}$, $i_2 = \dfrac{V}{R_2} = 1.2\,\mathrm{A}$.

6. $W = \dfrac{1}{2}\,L\,\dfrac{V^2}{R^2}$; $W_R = \dfrac{1}{2}\,R\displaystyle\int_0^\infty i^2(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\,L\,\dfrac{V^2}{R^2}$.

Circuito resistivo, capacitivo e induttivo

1. $\nu = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 4.2 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$.

2. $X = \dfrac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = 36\,\Omega$

3. $\cos\theta = \cos\operatorname{arctg}\left[\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{1}{\omega C} - \omega L\right)\right] = 0.14$

4. $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{1}{R^2C^2}} = 4.1 \cdot 10^2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$; $Z(\omega_0) = \dfrac{L}{RC} = 54\,\Omega$.

5. $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = 6.2 \cdot 10^2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$; $Z(\omega_0) = R = 100\,\Omega$.

6. a) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{L^2}} = 6.0 \cdot 10^4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$;

b) $Z(\omega_0) = \dfrac{L}{RC} = 2.5 \cdot 10^2\,\Omega$;

c) $\mathcal{P} = \dfrac{V_0^2 RC}{2L} = 1.9 \cdot 10^2\,\mathrm{W}$.

7. a) $Z = \dfrac{R_L - \omega^2 LR_C C + i\omega(L + R_L R_C C)}{1 - \omega^2 LC + i\omega C(R_L + R_C)}$;

b) $R_L^2 = R_C^2 = \dfrac{L}{C}$.

8. Si ha $C = \dfrac{1}{L(a + b\theta)^2}$, con $a = \omega_1 = 4.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Hz}$ e $b = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{\pi} = 2.5 \cdot 10^5\,\mathrm{Hz\,rad^{-1}}$.

9. $L = \dfrac{1}{2\pi\nu i}\sqrt{V_0^2 - \dfrac{\mathcal{P}^2}{i^2}} = 0.30\,\mathrm{H}$.

10. a) $Z_0 = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = 12.1\,\Omega$

b) $\mathcal{P} = \dfrac{V_0^2}{Z_0} = 4.01 \cdot 10^3\,\mathrm{W}$.

Diamagneti, paramagneti e ferromagneti

1. $B = \mu_0 k\,\dfrac{N}{\ell}\,i = 2.5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{T}$.

2. $H = \dfrac{Ni}{\ell} = 4.3 \cdot 10^3\,\mathrm{A\,m^{-1}}$, $B = \mu_0 \kappa H = 0.33\,\mathrm{T}$, $M = (\kappa - 1)H = 2.6 \cdot 10^5\,\mathrm{A\,m^{-1}}$.

Appendice B

Sistema internazionale di unità di misura

Nella tabella sottostante sono riportate le grandezze fisiche fondamentali del sistema internazionale SI, i nomi delle unità di misura e i simboli che le rappresentano.

Grandezza	**Nome**	**Simbolo**
tempo (t)	secondo	s
lunghezza (l)	metro	m
massa (m)	chilogrammo	kg
temperatura (T)	kelvin	K
intensità di corrente (i)	ampere	A
quantità di sostanza (n)	mole	mol
intensità luminosa (I)	candela	cd

Nella tabella sottostante sono riportate alcune grandezze fisiche derivate, i nomi delle loro unità di misura con i simboli che le rappresentano e le relative dimensioni. Si noti che alcune unità di misura non hanno nome.

Grandezza	**Nome**	**Simbolo e dimensioni**
velocità ($\boldsymbol{v}$)		$\mathrm{m\,s^{-1}}$
accelerazione ($\boldsymbol{a}$)		$\mathrm{m\,s^{-2}}$
forza ($\boldsymbol{F}$)	newton	$\mathrm{N = kg\,m\,s^{-2}}$
lavoro, energia ($\mathcal{L}, \mathcal{E}$)	joule	$\mathrm{J = kg\,m^2\,s^{-2}}$
energia potenziale ($\mathcal{U}$)	joule	$\mathrm{J = kg\,m^2\,s^{-2}}$
energia elettrostatica (W)	joule	$\mathrm{J = kg\,m^2\,s^{-2}}$
potenza ($\mathcal{P}$)	watt	$\mathrm{W = kg\,m^2\,s^{-3}}$
carica elettrica (Q, q)	coulomb	$\mathrm{C = s\,A}$
campo elettrico ($\boldsymbol{E}$)		$\mathrm{N\,C^{-1} = kg\,m\,s^{-2}\,C^{-1}}$
flusso elettrico ($\Phi_S(\boldsymbol{E})$)		$\mathrm{V\,m = kg\,m^3\,s^{-3}\,A^{-1}}$
potenziale elettrico (ϕ, V)	volt	$\mathrm{V = kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-1}}$
capacità elettrica (C)	farad	$\mathrm{F = kg^{-1}\,m^{-2}\,s^4\,A^2}$
forza elettromotrice ($\mathcal{E}$)	volt	$\mathrm{V = kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-1}}$
resistenza (R)	ohm	$\mathrm{\Omega = kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-2}}$
resistività (ρ)		$\mathrm{\Omega\,m = kg\,m^3\,s^{-3}\,A^{-2}}$
campo magnetico ($\boldsymbol{B}$)	tesla	$\mathrm{T = kg\,s^{-2}\,A^{-1}}$
flusso magnetico ($\Phi_S(\boldsymbol{B})$)	weber	$\mathrm{Wb = kg\,m^2\,s^{-2}\,A^{-1}}$
induttanza (L)	henry	$\mathrm{H = kg\,m^2\,s^{-2}\,A^{-2}}$
reattanza (X)	ohm	$\mathrm{\Omega = kg\,m^2\,s^{-3}\,A^{-2}}$
magnetizzazione ($\boldsymbol{\mathcal{M}}$)		$\mathrm{T\,A^2\,N^{-1} = A\,m^{-1}}$
campo magnetizzante ($\boldsymbol{H}$)		$\mathrm{T\,A^2\,N^{-1} = A\,m^{-1}}$

Appendice C

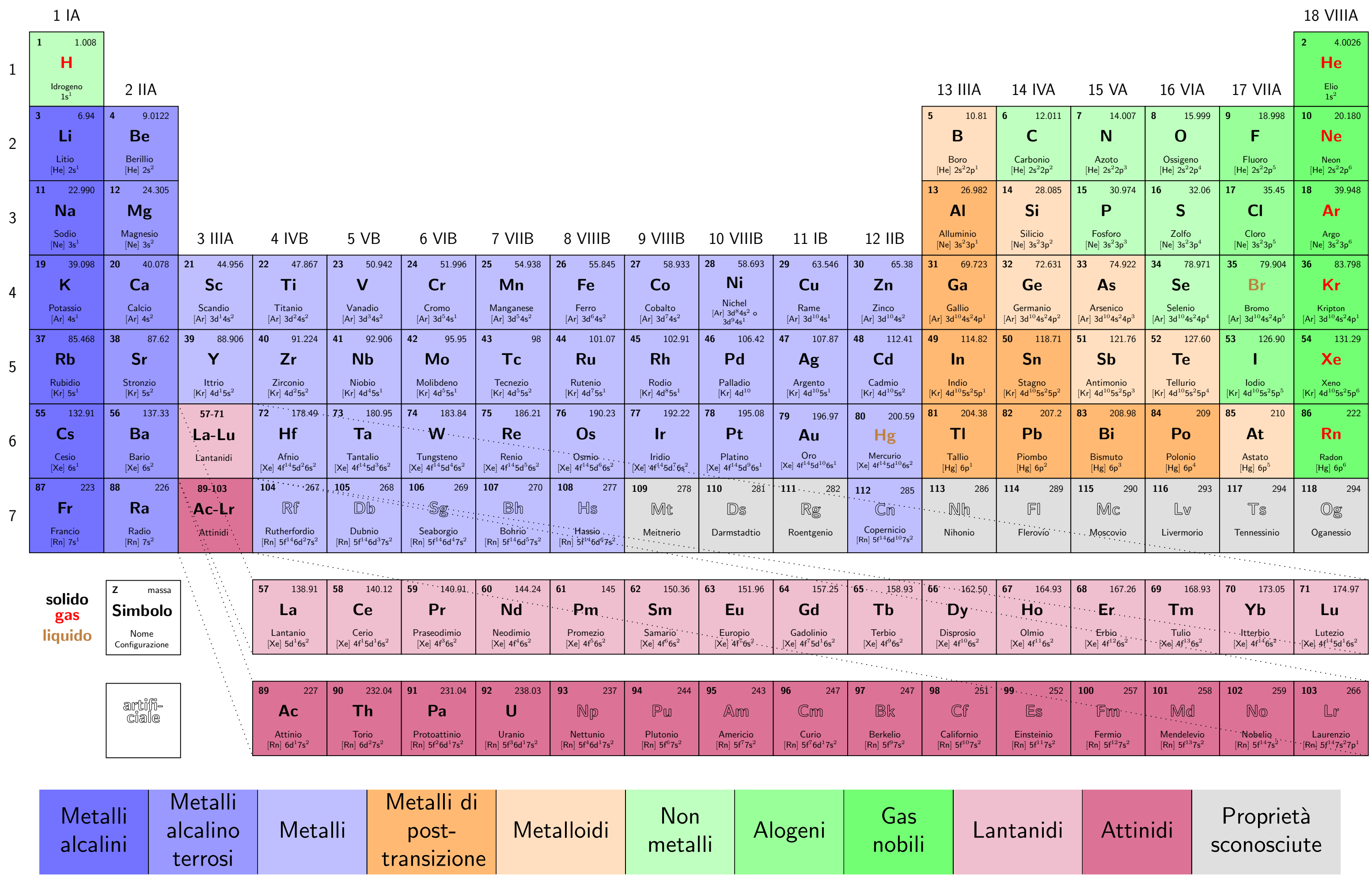
Alcune costanti fondamentali

Nella seguente tabella si riportano i valori di alcune costanti fisiche fondamentali. L'incertezza con cui sono state misurate è indicata dai numeri fra parentesi; ove non vi sia incertezza, il valore è considerato esatto.

Costante	**Simbolo**	**Valore**
velocità della luce nel vuoto	c	$299792458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
carica elementare	e	$1.6021766208(98) \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
costante di Planck	h	$6.626070040(81)\,\mathrm{J\,s}$
massa dell'elettrone	m_e	$9.10938356(11) \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ $0.5109989461(31)\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
massa del protone	m_p	$1.672621898(21) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ $938.2720813(58)\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
massa del neutrone	m_n	$1.674927(21) \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ $939.5654133(58)\,\mathrm{MeV}\,c^{-2}$
permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N\,A^{-2}}$
costante dielettrica del vuoto	ϵ_0	$\dfrac{1}{\mu_0 c^2} = 8.854187817 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2\,N^{-1}\,m^{-2}}$
numero di Avogadro	N_A	$6.022140857(74) \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
costante di gravitazione universale	G	$6.67408(31) \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
accelerazione di gravità standard	g	$9.80665\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

Appendice D

Tavola periodica degli elementi



Dati da Meija, J.; et al. (2016). "Atomic weights of the elements 2013 (IUPAC Technical Report)". Pure Appl. Chem. 88 (3): 265-91. https://www.degruyter.com/downloadpdf/j/pac.2016.88.issue-3/pac-2015-0305/pac-2015-0305.xml

Appendice E

Dati astronomici

L'*unità astronomica*, au, è definita come la distanza media fra la Terra e il Sole; vale

$$1\,\mathrm{au} = 149597870700\,\mathrm{m}$$

Il *parsec*, pc, è la distanza corrispondente alla parallasse di un secondo d'arco; vale

$$1\,\mathrm{pc} = 3.08567758149 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m}$$

L'*anno-luce*, ly, è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un anno giuliano, cioè in 365.25 giorni; vale quindi

$$1\,\mathrm{ly} = 299792458\,\mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 31557600\,\mathrm{s} = 0.94605304 \cdot 10^{16}\,\mathrm{m} = 63241\,\mathrm{au} = 0.3066\,\mathrm{pc}$$

Nella seguente tabella si riportano alcuni dati fisici sui alcuni corpi del sistema solare.
Fonte: Planetary Data Sheet - NASA Goddard Space Flight Center - https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/planetfact.html

Dato	**Sole**	**Terra**	**Luna**
massa	$1.988500 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$	$5.9723 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$	$0.07346 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$
raggio medio	695700 km	6371.008 km	1737.4 km
gravità superficiale(1)	$274.0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$	$9.798\,\mathrm{m\,s^{-2}}$	$1.62\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
velocità di fuga	$617.6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$	$11.186\,\mathrm{km\,s^{-1}}$	$2.38\,\mathrm{km\,s^{-1}}$
periodo di rotazione(2)		23.9345 h	655.728 h
periodo di rivoluzione(2)		365.256 d	27.3217 d(3)
semiasse maggiore(4)		$149.60 \cdot 10^{6}\,\mathrm{km}$	$0.3844 \cdot 10^{6}\,\mathrm{km}$
eccentricità dell'orbita		0.0167	0.0549
velocità orbitale media	$19.4\,\mathrm{km\,s^{-1}}$(5)	$29.78\,\mathrm{km\,s^{-1}}$	$1.022\,\mathrm{km\,s^{-1}}$

(1) Non tiene conto degli effetti di rotazione.
(2) Rispetto alle stelle fisse.
(3) Attorno alla Terra.
(4) È il raggio medio di rivoluzione.
(5) Relativa alle stelle vicine.