



ARITHMETIC

Chapter 15

5th
SECONDARY

Divisibilidad I



 **SACO OLIVEROS**



Teorema: La suma de dos impares consecutivos es un múltiplo de 4.

¿Seguro que es verdad? Probemos algunos casos

$$1 + 3 = 4, 3 + 5 = 8, 5 + 7 = 12, 19 + 21 = 40, 157 + 159 = 316, \dots$$

¿Cómo demostrarlo con dos impares consecutivos cualesquiera?

Los números pares son múltiplos de dos; son de la forma $2n$.

Cada número impar es el siguiente de un número par: es de la forma $2n+1$.

El siguiente del número impar $2n + 1$ es el número par $2n + 2$, cuyo siguiente es el número impar $(2n+2) + 1 = 2n + 3$.

La suma de dos impares consecutivos es:

$$(2n + 1) + (2n + 3) = 2n + 1 + 2n + 3 = 4n + 4$$

Esta suma es un múltiplo de 4 puesto que $4n + 4 = 4(n + 1)$.



TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

En general:

$$\begin{array}{c} A \quad \textcolor{red}{\text{L}} \quad B \\ 0 \quad k \end{array}$$

Donde:

$$A = B \times k$$

$$A \in \textcolor{red}{Z}; B \in \textcolor{red}{Z}^+; k \in \textcolor{red}{Z}$$



Módulo

Notación:

$$A = \overset{\circ}{B} = \overset{\circ}{B} = Bk$$

"A es múltiplo de B"

"A es divisible entre B"

"B es divisor de A"

"B es factor de A"



Para números no divisibles

Por defecto

$$\begin{array}{r} A \quad \text{---} \quad B \\ r_d \quad k \end{array}$$

$$A = Bk + r_d$$

$$A = \overset{\circ}{B} + r_d$$

Donde:

$$A = \overset{\circ}{B} + r_d = \overset{\circ}{B} - r_e$$

Por exceso

$$\begin{array}{r} A \quad \text{---} \quad B \\ r_e \quad (k+1) \end{array}$$

$$A = B(k+1) - r_e$$

$$A = \overset{\circ}{B} - r_e$$



Ejm

$$\begin{array}{r} 39 \quad \text{---} \quad 5 \\ 4 \quad 7 \end{array}$$

$$39 = 5 \times 7 + 4$$

$$39 = \overset{\circ}{5} + 4$$

Donde:

$$\overset{\circ}{5} + 4 = \overset{\circ}{5} - 1$$

$$\begin{array}{r} 39 \quad \text{---} \quad 5 \\ 1 \quad (7+1) \end{array}$$

$$39 = 5 \times 8 - 1$$

$$39 = \overset{\circ}{5} - 1$$



Principios fundamentales

$$\diamond n + n + \dots + n = n$$

$$\diamond n^k = n, \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

$$\diamond n - n = n$$

$$\diamond nk = n$$

$$\diamond \text{Si } 23a = 5 \rightarrow a = 5, \text{ Observación: } 23 \neq 5$$

$$\diamond (n + r)^k = n + r^k$$

$$\diamond (n - r)^k = \begin{cases} n + r^k & \Leftrightarrow k: \text{par} \\ n - r^k & \Leftrightarrow k: \text{impar} \end{cases}$$

$$\diamond (n + a)(n + b) \dots (n + p) = n + a \times b \times \dots \times p$$



❖ Si un numero es múltiplo de cierto módulo, será múltiplo de cualquiera de los divisores de dichos números

$$\text{Si } A = 35 \rightarrow A = \begin{cases} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 35 \end{cases}$$

❖ Si un numero es múltiplo de varios módulos será múltiplo del (m.c.m) de dichos números

$$\text{Si: } B = 12$$

$$B = 15$$

$$B = 6$$

$$B = \text{MCM}(12, 15, 6)$$

$$B = 60$$



1

¿Cuántos múltiplos de 8 terminados en 6 existen entre 39 y 721?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

$$\begin{aligned} 8 &= 8.k \\ 39 &< 8.k < 721 \\ 4, \dots &< k < 90, \dots \end{aligned}$$

Pero:

$$8.k = \dots 6$$

→ $k = \dots 2; \dots 7$

Donde:

$$k = 7; 12; 17; \dots; 87$$

$$\# \text{ valores } (k) = \frac{87 - 7}{5} + 1 = \frac{80}{5} + 1 = 17$$

Piden:

$$\therefore \# \text{ valores } (k) = 17$$

RPTA:

17



2

Del 1 al 1714, ¿Cuántos números son divisibles por 6 pero no por 4?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

del 1; 2; 3; 4; ;1714

* Para 6

$$6 \leq 1714$$

$$6 \cdot k \leq 1714$$

$$k \leq 285,66...$$

* Para 6 y 4

$$\text{MCM}(6;4) = 12$$

$$12 \leq 1714$$

$$12 \cdot k \leq 1714$$

$$k \leq 142,83...$$

Piden:

múltiplos de 6 pero no de 4

$$\therefore 285 - 142 = 143$$

RPTA:

143



3

Al dividir N entre 8 deja residuo 3. Determine el residuo que se obtiene al dividir

$$E = (N^3) \cdot (6N) + 2N \text{ entre } 8.$$

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

$$N = 8 + 3$$

Reemplazando en E

$$E = (8 + 3)^3 \cdot 6(8 + 3) + 2(8 + 3)$$

$$E = (8 + 27)(8 + 18) + (8 + 6)$$

$$E = (8 + 3)(8 + 2) + (8 + 6)$$

$$E = (8 + 6) + (8 + 6)$$

$$E = 8 + 6 + 8 + 6$$

$$E = 8 + 12 = 8 + 4$$

RPTA:

$$8 + 4$$



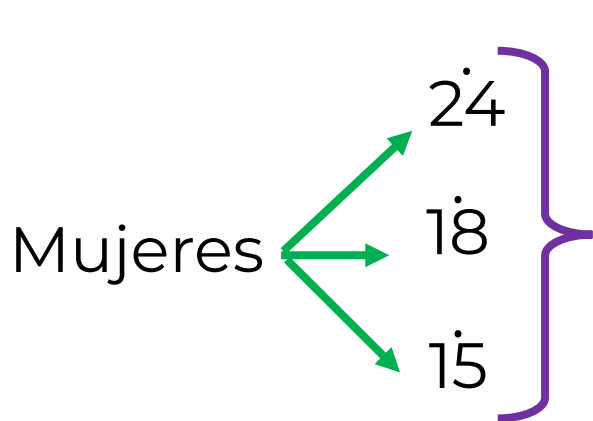
4

En el colegio Saco Oliveros de Lince hay 450 alumnos, de las mujeres se sabe que $\frac{7}{24}$ usan falda, $\frac{5}{18}$ son mayores de edad y $\frac{4}{15}$ practican ajedrez. ¿Cuántos hombres hay?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

Total: 450



$$\text{Mujeres} = \overset{0}{\text{mcm}}(24; 18; 15)$$

$$\text{Mujeres} = \overset{0}{360}$$

$$\text{Mujeres} = 360 \cdot k < 450$$

$$\text{Mujeres} = 360$$

Pero:

$$\text{Varones} + \text{Mujeres} = 450$$

$$360 + \text{Varones} = 450$$

$$\therefore \text{Varones} = 90$$

RPTA:

90



5

Halle el residuo que se obtiene al dividir 1850^{125} entre 7.

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned}
 \text{Operando: } 1850^{125} &= (\overset{\circ}{7} + 2)^{125} \\
 &= \overset{\circ}{7} + 2^{125} \\
 &= \overset{\circ}{7} + (2^3)^{41} \cdot 2^2 \\
 &= \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1)^{41} \cdot 2^2 \\
 &= \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1) \cdot 4 \\
 &= \overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7} + 4
 \end{aligned}$$

Donde:

$$1850^{125} = \overset{\circ}{7} + \textcircled{4}$$

Piden :

$$\therefore \text{residuo} = 4$$

RPTA:

4



6

En la fiesta de aniversario del Rotary Club asistieron 120 personas entre damas, caballeros y niños; el número de caballeros que no bailaban en un momento dado era igual a la tercera parte del número de damas; el número de niños era igual a la quinta parte del número de damas y la cuarta parte del número de damas fue con minifalda. ¿Cuántas damas no bailaban en dicho momento?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos: Total personas = 120

$$\begin{array}{l} \text{Damas: } \left. \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \rightarrow 5 \\ \searrow 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Damas} = \text{MCM}^0(3;5;4) \\ \text{Damas} = 60 \\ \text{Damas} = 60.k \end{array} \end{array}$$

$$\text{Damas} < 120 \quad \Rightarrow \quad \text{Damas} = 60$$

$$\text{Pero los niños: } \frac{1}{5} \cdot 60 = 12$$

$$\Rightarrow \text{Caballeros} = 120 - (60 + 12) = 48$$

$$\ast \text{ Caballeros que no bailan: } \frac{1}{3} \cdot 60 = 20$$

Luego:

$$\ast \text{ Caballeros que bailan} = 48 - 20 = 28$$

$$\ast \text{ Damas que bailan} = 28$$

Piden:

$$\Rightarrow \text{Damas que no bailan} = 60 - 28 = 32$$



7

En una fiesta asistieron un número de personas que es mayor que 200 pero menor que 350. En cierto momento se observó que los $\frac{2}{11}$ de los asistentes son varones que están bebiendo y los $\frac{5}{13}$ de los asistentes son mujeres que están bailando o bebiendo. ¿Cuántas mujeres están bailando o bebiendo?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos: # asistentes: X

$$X: \left. \begin{array}{l} 11 \\ 13 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X = \overset{0}{\text{MCM}}(11;13) \\ X = 143 \\ X = 143.k \end{array}$$

Donde: $250 < 143.k < 350$

si: $k = 2 \Rightarrow X = 286$

Luego:

* Varones que beben: $\frac{2}{11} \cdot 286 = 52$

Piden:

* Mujeres que bailan o beben:

$$\frac{5}{13} \cdot 286 = 110$$

RPTA:

110