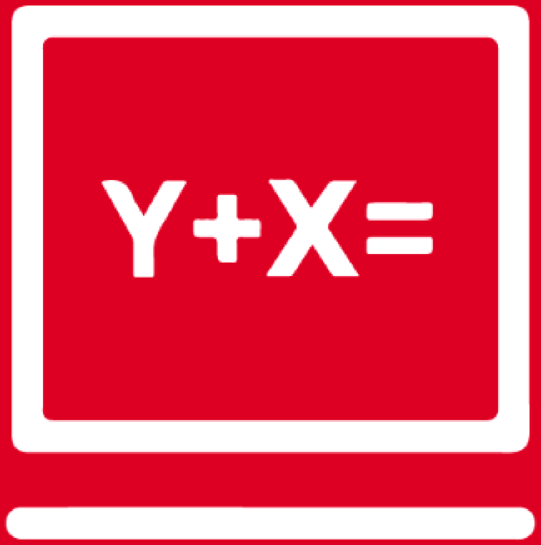
ARITHMETIC

2023

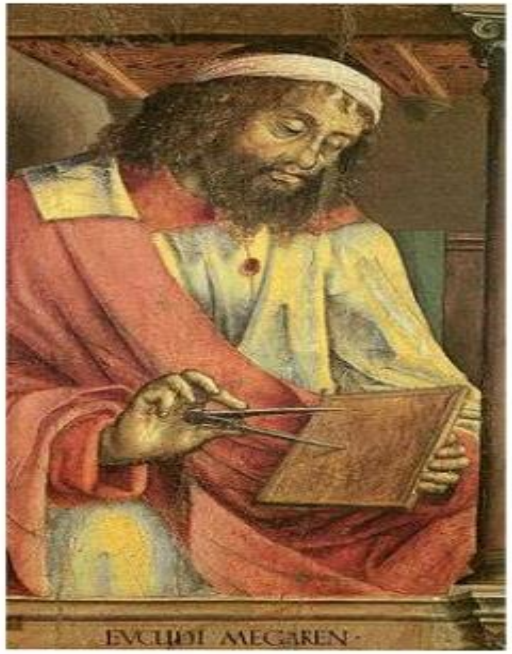
Chapter 17
Sesion 2



1st
SECONDARY

Maximo Común Divisor

SACO OLIVEROS



Euclides fue un matemático y geómetra griego (ca. 325 - ca. 265 a. C.), a quien se le conoce como "El Padre de la Geometría".

Su vida es poco conocida, salvo que vivió en Alejandría (actualmente Egipto) durante el reinado de Ptolomeo I. Ciertos autores árabes afirman que Euclides era hijo de Naucrates y se barajan tres hipótesis:

-Euclides fue un personaje matemático histórico que escribió *Los elementos* y otras obras atribuidas a él.

-Euclides fue el líder de un equipo de matemáticos que trabajaba en Alejandría.

-Las obras completas de Euclides fueron escritas por un equipo de matemáticos de Alejandría quienes tomaron el nombre Euclides.

El **algoritmo de Euclides** es un método antiguo y eficaz para calcular el máximo común divisor (**MCD**). El **algoritmo de Euclides** es una ligera modificación que permite además expresar al máximo común divisor como una combinación lineal. Este algoritmo tiene aplicaciones en diversas áreas como álgebra, teoría de números y ciencias de la computación entre otras. Con unas ligeras modificaciones suele ser utilizado en computadoras electrónicas debido a su gran eficiencia.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

El MCD es el mayor de los divisores comunes de dos o más números.

Dados los números 24 y 42

- Divisores de 24 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 y 24
- Divisores de 42 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 y 42
- Divisores comunes : 1 ; 2 ; 3 y 6
- Mayor Divisor Común = 6 (MCD)

- Divisores del "MCD" ⟶ 1; 2; 3 y 6

Propiedad :

Cantidad de Divisores Comunes = Cantidad de Divisores de su M.C.D.

METODOS DE CÁLCULO

A) Descomposición Simultánea

Calcule el MCD de 56; 140 y 168

$$\begin{array}{ccccc|c} 56 & - & 140 & - & 168 & 2 \\ 28 & - & 70 & - & 84 & 2 \\ 14 & - & 35 & - & 42 & 7 \\ 2 & - & 5 & - & 6 & \end{array}$$

$$\underbrace{2 \quad 5 \quad 6}_{\text{PESI}}$$

➢ $MCD(56; 140; 168) = 28$

B) Descomposición Canónica

Se escogen los factores comunes, con sus menores exponentes.

Calcule el MCD (A , B) , si :

$A = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$

$B = 2^2 \times 3^5 \times 7^2$

$MCD(A, B) = 2^2 \times 3^2$

➢ $MCD(A, B) = 36$

C) Algoritmo de Euclides (Divisiones Sucesivas)

(Sólo para calcular el MCD de 2 números)

Ejemplo : Calcule el MCD de 750 y 270, por el algoritmo de Euclides e indique los cocientes y residuos sucesivos.

Cocientes sucesivos

q		2	1	3	2	
	750	270	210	60	30	MCD
r		210	60	30	0	

Residuos sucesivos

750 | 270
540   2
210

270 | 210
210   1
60

210 | 60
180   3
30

- Cocientes sucesivos :

  2 ; 1 ; 3 ; 2

- Residuos Sucesivos :

  210 ; 60 ; 30 ; 0

PROPIEDADES

Dados A y B $\in \mathbb{Z}^+$ se cumple que :

1

※ Si $A = \overset{\circ}{B}$ (múltiplo de B)

$$MCD(A, B) = B$$

※ Si A y B son PESI

$$MCD(A, B) = 1$$

※ Si $MCD(A, B) = d$,

$$A = d.\alpha \; ; \; B = d.\beta$$

Donde α y β son PESI

2 Dados A, B, C y D $\in \mathbb{Z}^+$

$MCD(A, B, C, D) =$

$$MCD[MCD(A, C), MCD(B, D)] =$$

$$MCD[MCD(A, B), MCD(C, D)]$$

3 Si $MCD(A, B, C) = d$, entonces

$$MCD(An, Bn, Cn) = dn$$

$$MCD\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{d}{n}$$

; $n \in \mathbb{Z}^+$

HELICO PRACTICE

1

Si $\mathrm{MCD}(24;60)=\overline{ab}$. Calcule $a+b$.

RESOLUTION

$$\begin{array}{rr|l} 24-60 & & 6 \\ 4-10 & & 2 \\ \underbrace{2-3}_{\text{PESI}} & & \end{array} \Bigg\} \times$$

$$\mathrm{MCD}(24;60)=12=\overline{ab}.$$

$$\boxed{a=1} \quad \boxed{b=2}$$

- $a+b=1+2=3$

RPTA : 3

HELICO PRACTICE

2

Si el MCD de 14 y 28 es $\overline{mn}$. Calcule $m \cdot n$.

RESOLUTION

$$\begin{array}{c|c} 14 - 28 & 2 \\ 7 - 14 & 7 \\ \underbrace{1 - 2}_{\text{PESI}} & \end{array} \Big\} \times$$

$$\text{MCD}(14; 28) = 14 = \overline{mn}.$$

$\boxed{m = 1}$ $\boxed{n = 4}$

➢ $m \cdot n = 1 \cdot 4 = 4$

RPTA :	4

HELICO PRACTICE

3

Al calcular el mayor divisor común de $4n$ y $7n$ se obtuvo 12. Calcule $\sqrt{2n+1}$.

RESOLUTION

$$\begin{array}{cc|c} 4n & 7n & n \\ 4 & 7 & \end{array}$$

$\underbrace{4 \quad 7}_{\text{PESI}}$

MCD(4n ; 7n) = n = 12

- Se pide :

$$\sqrt{2n+1} = \sqrt{2(12)+1} = \sqrt{25} = 5$$

RPTA :	5

HELICO PRACTICE

4

Si MCD(3k, 6k, 24k) = 21.Calcule k^2.

RESOLUTION

$$\begin{array}{ccccc|c} 3k & - & 6k & - & 24k & k \\ 3 & - & 6 & - & 24 & 3 \\ 1 & - & 2 & - & 8 & \end{array} \quad (\times)$$

PESI

$$MCD(3k ; 6k ; 24k) = 3k = 21$$

$$\boxed{k = 7}$$

- **Se pide :**

$$k^2 = 7^2 = 49$$

RPTA :	49

HELICO PRACTICE

5

Al calcular el MCD de dos números por el método de divisiones sucesivas se obtuvo como cocientes sucesivos 2; 1 y 2. Calcule la suma de dichos números si el MCD resultó ser 5.

RESOLUTION

q	2	1	2
40	15	10	5
r	10	5	0

➢ La suma de los números es :

$40 + 15 = 55$

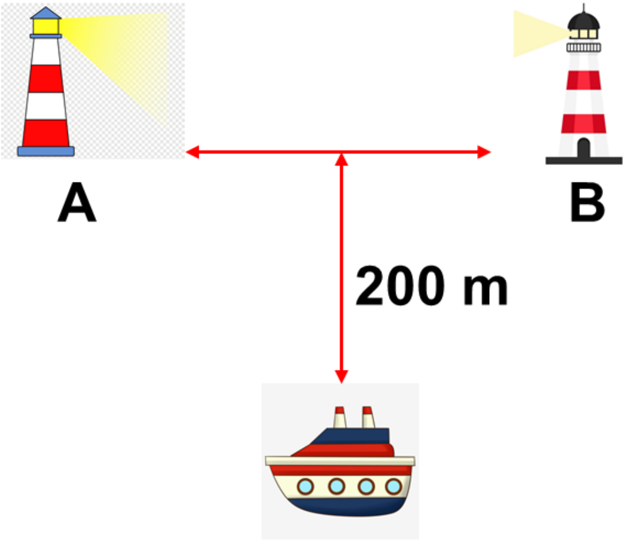
RPTA :	55

HELICO PRACTICE

6

Los faros permiten la localización de la tierra y permiten a los navegantes saber en que lugar se encuentran, si un barco esta a una distancia de 200 m de los faros A y B, y se percata que estos coinciden cada 5 vueltas, además que el producto entre el numero de vueltas de los faros A y B es 150 (ambos números de vueltas tienen mas de una cifra), determine la suma de vueltas de ambos faros.

RESOLUTION



Del problema: $MCD(A, B) = 5$

Por propiedad: $\left.\begin{matrix} A = 5p \\ B = 5q \end{matrix}\right\}$ p y q son PESI

Del problema: $A.B = 150$

$\cancel{5}p.\cancel{5}q = \cancel{150}$

$p.q = 6$

$p.q = 6$

1.6 PESI x

2.3 PESI √

N° de vueltas de los faros:

$A = 5p = 5(2) = 10$

$B = 5q = 5(3) = 15$

Nos piden:

$A + B = 25$

RPTA :	25

HELICO PRACTICE

7

Don Evaristo es un vendedor minorista en la ciudad de Chincha ubicada en el departamento de Ica, y ha comprado tres depósitos de vino con 240 litros, 180 litros y 120 litros. Para poder vender estas cantidades de vino en su licorería, necesita envasarlos en bidones todos de igual volumen, sin que sobre ni falte vino, ¿cuántos bidones como mínimo serán necesarios?

RESOLUTION

$$\begin{array}{ccccc|l} 240 & - & 180 & - & 120 & 10 \\ 24 & - & 18 & - & 12 & 2 \\ 12 & - & 9 & - & 6 & 3 \\ \multicolumn{5}{c|}{\underbrace{4 \quad - \quad 3 \quad - \quad 2}_{\text{Menor cantidad de bidones}}} & \end{array}$$

Máxima cantidad de litros en cada bidón

MCD(240, 180, 120) = 60 litros

➢ Menor cantidad de bidones:

$4 + 3 + 2 = 9$

RPTA :	9 bidones