

TRIGONOMETRY

Chapter 10

4th
SECONDARY

**RAZONES TRIGONOMÉTRICAS
DE ÁNGULOS EN POSICIÓN
NORMAL II**



CANADARM 2

El **Canadarm 2**, es un brazo robótico manipulador que está ubicado en la **Estación Espacial Internacional**.

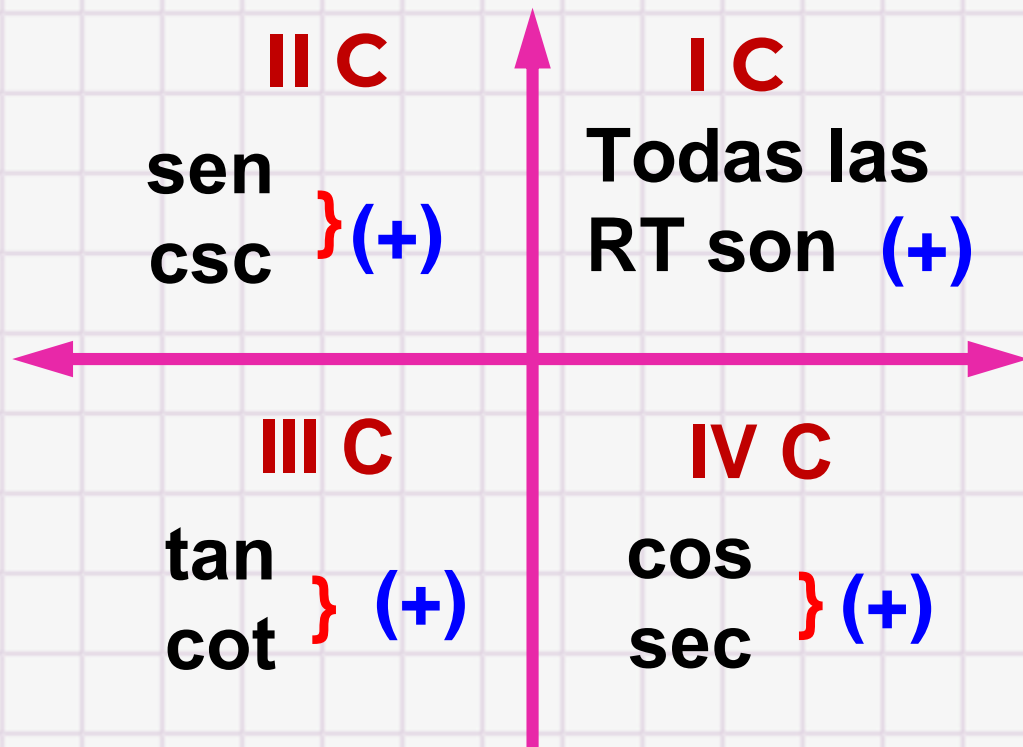
Este brazo manipulador opera con control de los **ángulos** en sus articulaciones.

Para obtener la posición final del astronauta en el extremo del brazo, se requiere un uso repetido de las **razones trigonométricas** de esos ángulos que se forman según los variados **movimientos** que realiza.



SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN CADA CUADRANTE

Regla práctica :



Observación :

Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ $\Rightarrow \alpha \in \text{IC}$

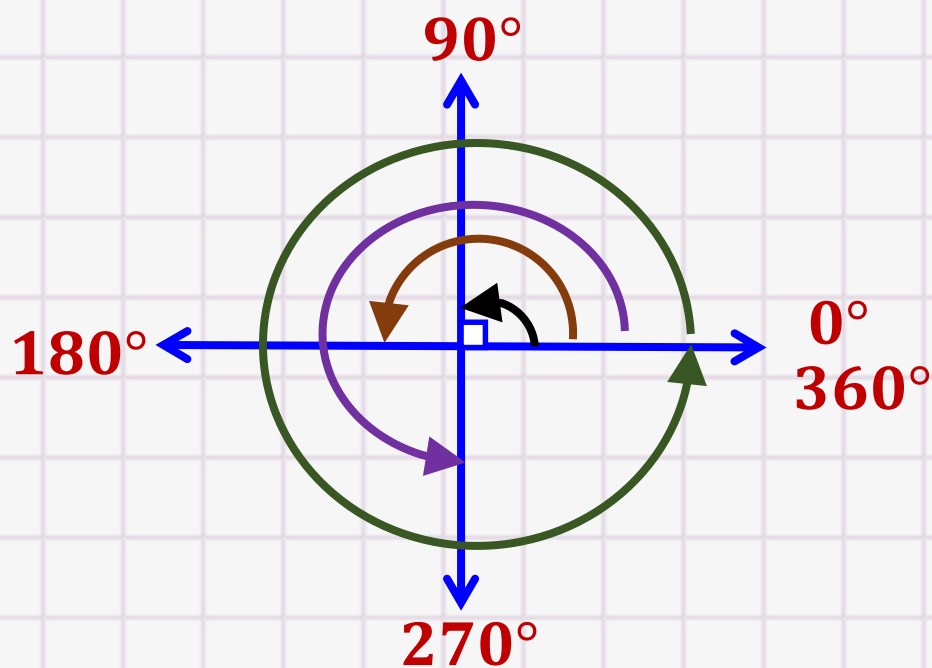
Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ $\Rightarrow \alpha \in \text{IIC}$

Si $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ $\Rightarrow \alpha \in \text{IIIC}$

Si $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ $\Rightarrow \alpha \in \text{IVC}$

ÁNGULOS CUADRANTALES

Son ángulos en posición normal cuyos lados finales coinciden con algún semieje del plano cartesiano.



$$\boxed{90^\circ n \quad \frac{\pi \cdot n}{2} \text{ rad}} , n \in \mathbb{Z}$$

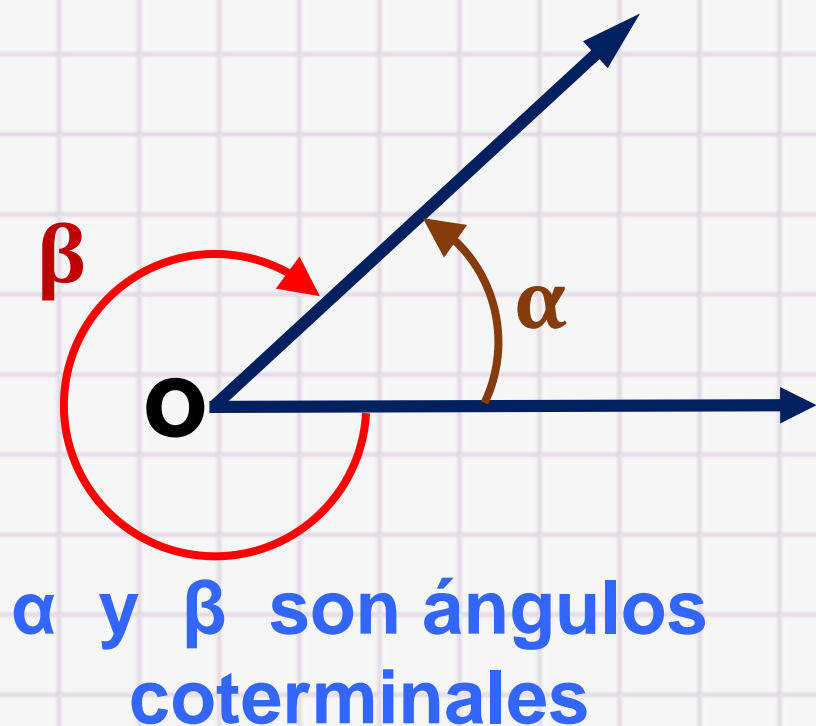
R.T	0° ; 360°	90°	180°	270°
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0
tan	0	N.D	0	N.D
cot	N.D	0	N.D	0
sec	1	N.D	-1	N.D
csc	N.D	1	N.D	-1

N.D : No determinado

Método : “ OIONIN IONONI ”

ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que al ser superpuestos presentan los mismos elementos : vértice, lado inicial y lado final .



Propiedades :

$$\triangle \alpha - \beta = 360^\circ k, \quad \forall k \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

$$\triangle RT(\alpha) = RT(\beta)$$

$$\text{sen} \alpha = \text{sen} \beta$$

$$\text{cos} \alpha = \text{cos} \beta$$

$$\text{tan} \alpha = \text{tan} \beta$$

$$\text{cot} \alpha = \text{cot} \beta$$

$$\text{sec} \alpha = \text{sec} \beta$$

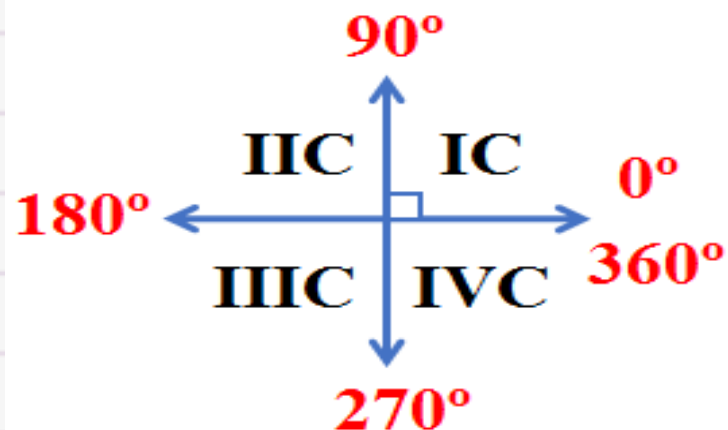
$$\text{csc} \alpha = \text{csc} \beta$$

HELICO PRACTICE 1

Determine el signo de las expresiones :

$$N = (\tan 142^\circ + \operatorname{sen} 232^\circ) \cos^2 121^\circ$$

$$M = (\sec 342^\circ - \operatorname{csc} 220^\circ) \cot 190^\circ$$



Recordar:

sen csc	} (+)	Todas las RT son (+)	
tan cot			
		cos sec	} (+)

Resolución

$$\triangleright N = (\underbrace{\tan 142^\circ}_{\text{II C}} + \underbrace{\operatorname{sen} 232^\circ}_{\text{III C}}) \underbrace{\cos^2 121^\circ}_{\text{II C}}$$

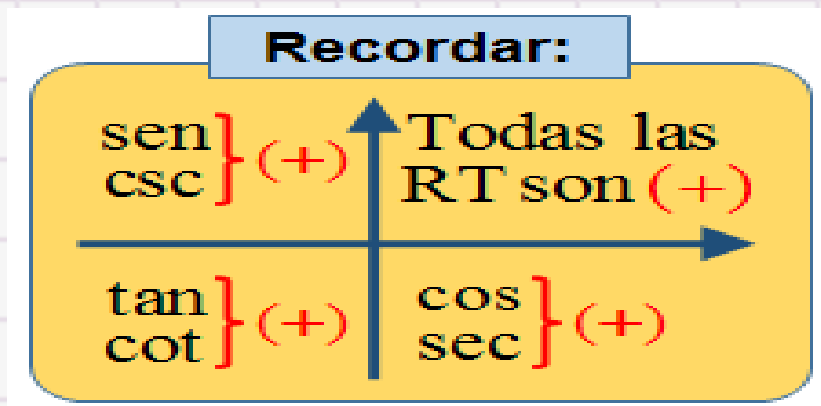
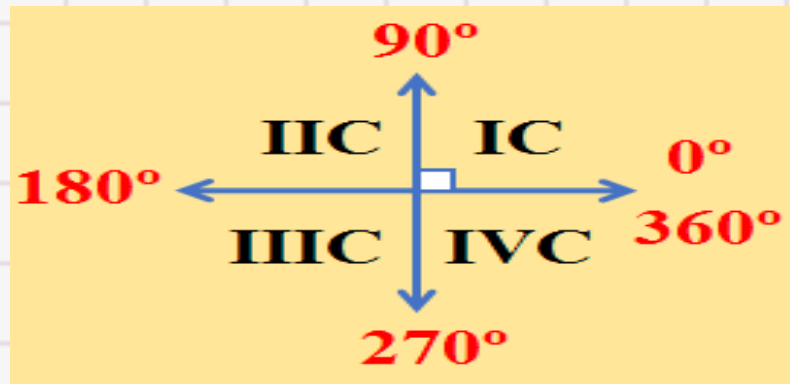
$$N = \{ (-) + (-) \} (-)^2 = (-) (+) \Rightarrow N = (-)$$

$$\triangleright M = (\underbrace{\sec 342^\circ}_{\text{IV C}} - \underbrace{\operatorname{csc} 220^\circ}_{\text{III C}}) \underbrace{\cot 190^\circ}_{\text{III C}}$$

$$M = [(+) - (-)] (+) = [(+) + (+)] (+) \Rightarrow M = (+)$$

HELICO PRACTICE 2

Halle el cuadrante al que debe pertenecer el ángulo α para que se cumplan las siguientes condiciones : $\sin 132^\circ \cdot \tan \alpha < 0$ y $\cos 225^\circ \cdot \cos \alpha > 0$



Resolución

$$\begin{array}{c} \text{IIC} \\ \hline \underbrace{\sin 132^\circ}_{(+)} \cdot \underbrace{\tan \alpha}_{(-)} < 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \text{IIC} \\ \alpha \in \text{IVC} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c} \text{IIC} \\ \hline \underbrace{\cos 225^\circ}_{(-)} \cdot \underbrace{\cos \alpha}_{(-)} > 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in \text{IIC} \\ \alpha \in \text{IIC} \end{array} \right.$$

$$\therefore \alpha \in \text{IIC}$$

HELICO PRACTICE 3

Si $\cos 4\alpha = -1$ y $\sin 6\theta = 1$, donde 4α y 6θ son ángulos cuadrantales positivos menores a una vuelta, efectúe : $P = 2 \tan \alpha + \tan^2 4\theta$

Resolución

R.T	$0^\circ ; 360^\circ$	90°	180°	270°
sen	0	1	0	-1
cos	1	0	-1	0

Datos :

$$\cos 4\alpha = -1$$

$$\Rightarrow 4\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\sin 6\theta = 1$$

$$\Rightarrow 6\theta = 90^\circ$$

$$\theta = 15^\circ$$

$$\text{Luego : } P = 2 \tan \alpha + \tan^2 4\theta$$

$$P = 2 \tan 45^\circ + \tan^2 4(15^\circ)$$

$$P = 2 \tan 45^\circ + \tan^2 60^\circ$$

$$P = 2(1) + (\sqrt{3})^2$$

$$P = 2 + 3$$

$$\therefore P = 5$$

HELICO PRACTICE 4

Si α y 60° son ángulos coterminales, efectúe :

$$P = \tan^2 \alpha + \sec \alpha - 2 \cos \alpha$$

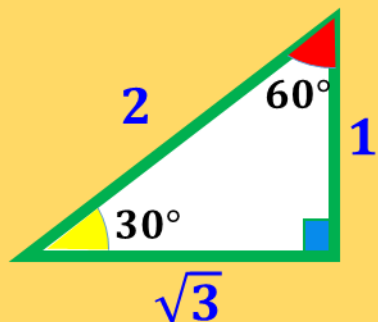
Resolución

Como α y 60° son ángulos coterminales, entonces :

$$RT(\alpha) = RT(60^\circ)$$

➡ $P = \tan^2 60^\circ + \sec 60^\circ - 2 \cos 60^\circ$

Recordar :



$$P = \sqrt{3}^2 + 2 - \cancel{2} \left(\frac{1}{\cancel{2}} \right)$$

$$P = 3 + 2 - 1$$

$$\therefore P = 4$$

HELICO PRACTICE 5

Siendo α y β ángulos coterminales, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\alpha \in \text{IIC}$;
calcule $\tan\beta$.

Resolución

Como $\alpha \in \text{IIC}$: $x < 0$; $y > 0$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ r = 3 \end{matrix}$$

Luego : $x^2 + y^2 = r^2$

$$(-1)^2 + y^2 = (3)^2$$

$$1 + y^2 = 9$$

$$y = 2\sqrt{2}$$

Como α y β son ángulos coterminales, entonces :

$$\text{RT}(\alpha) = \text{RT}(\beta)$$

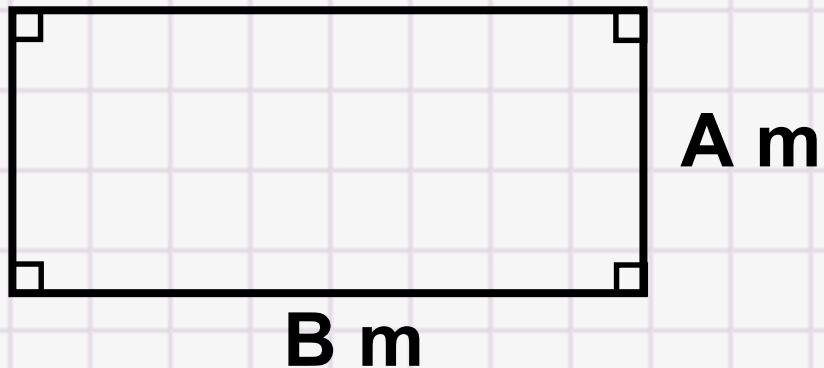
Luego : $\tan\beta = \tan\alpha = \frac{y}{x}$

$$\tan\beta = \frac{2\sqrt{2}}{-1}$$

$$\therefore \tan\beta = -2\sqrt{2}$$

HELICO PRACTICE 6

Roberto desea invertir sus ahorros en la compra de un terreno en los Olivos. Si las dimensiones del terreno son las siguientes y su costo por m^2 es de \$ 900 ... ¿ Cuánto tendrá que invertir en su compra ?



$$A = 5 \operatorname{sen} 90^\circ - 4 \operatorname{sec} 180^\circ$$

$$B = 7 \cos 360^\circ - 5 \operatorname{csc} 270^\circ$$

Resolución

$$A = 5 (1) - 4 (-1) = 5 + 4 = 9$$

$$B = 7 (1) - 5 (-1) = 7 + 5 = 12$$

Luego : Área = (A m) (B m)

$$\text{Área} = (9 \text{ m}) (12 \text{ m}) = 108 \text{ m}^2$$

$$\text{Costo Total} = (108) (\$ 900)$$

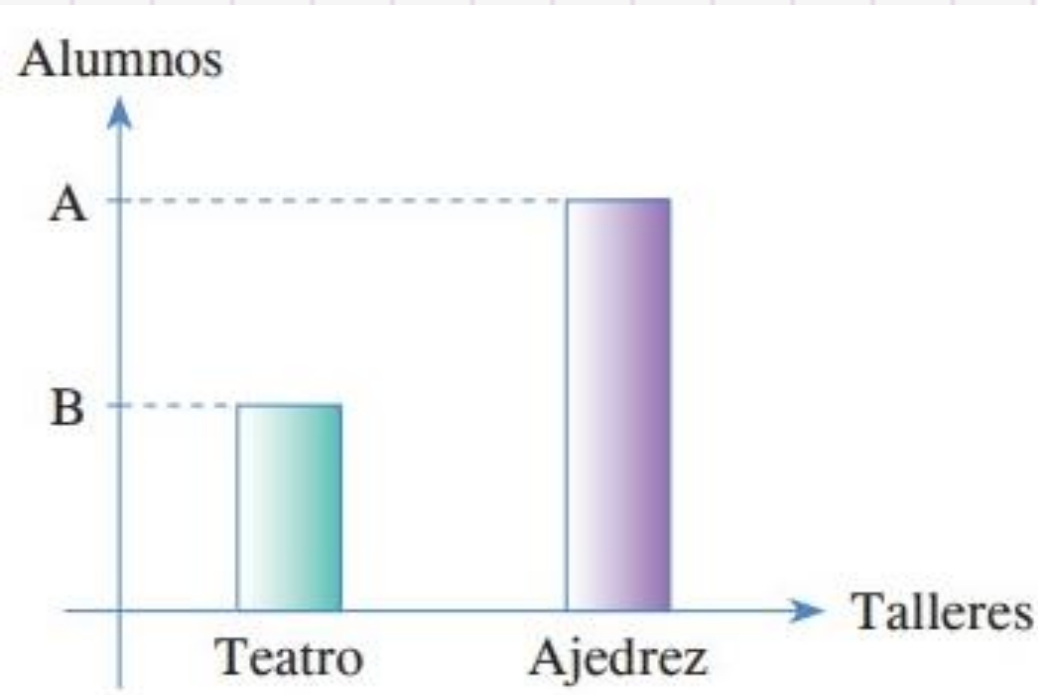
$$\text{Costo Total} = \$ 97\,200$$

HELICO PRACTICE 7

En el gráfico se muestra la cantidad de alumnos matriculados en cada taller, donde :

$$A = 120 \operatorname{sen} 30^\circ ; B = 44 \tan 45^\circ$$

Halle la cantidad total de alumnos .



Resolución

$$A = 120 \operatorname{sen}(30^\circ)$$

$$A = 120 \operatorname{sen} 30^\circ = 120 \left(\frac{1}{2} \right) = 60$$

$$B = 44 \tan(45^\circ)$$

$$B = 44 \tan 45^\circ = 44 (1) = 44$$

$$\text{Total} = 60 + 44$$

$$\therefore \text{Total} = 104 \text{ alumnos}$$



**SACO
OLIVEROS**