

TRIGONOMETRY

Chapter 23

4th
SECONDARY

FUNCIONES
TRIGONOMÉTRICAS II



MOTIVATING STRATEGY

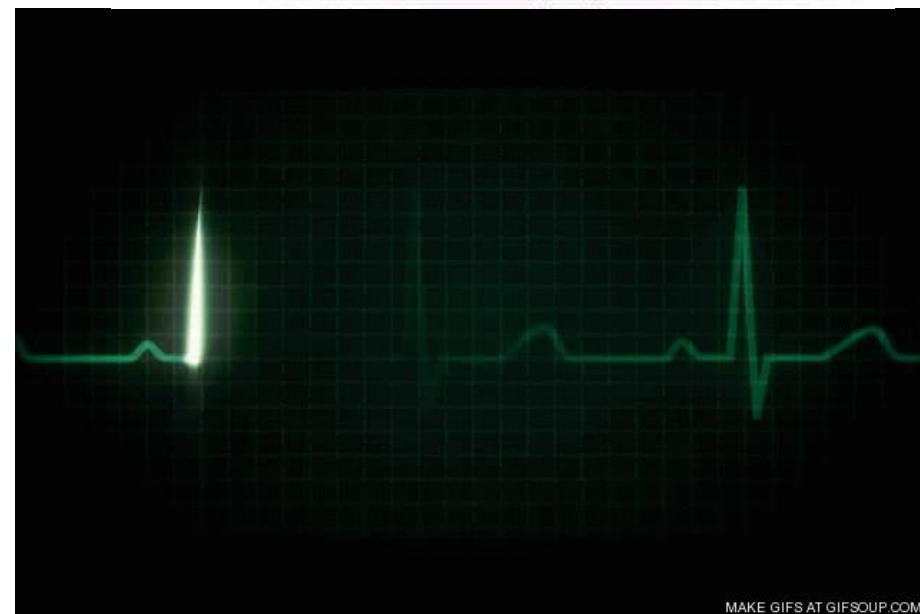
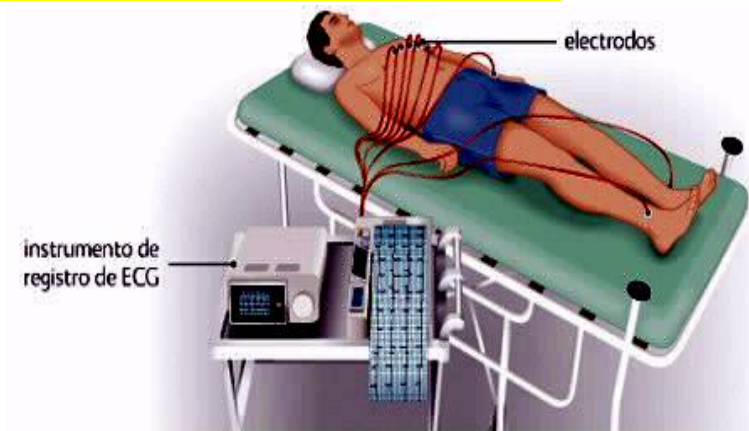
LA TRIGONOMETRÍA DEL CORAZÓN

El electrocardiograma (ECG) es la representación gráfica de la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo. Para ello se colocan electrodos en diversas partes del cuerpo para obtener información.

El aparato que genera el ECG, usa las funciones trigonométricas seno y coseno modificando las amplitudes y los periodos.

Se recomienda a personas mayores de 40 años realizarse un examen ECG anualmente.

¿ Tu profesor ya tiene su ECG ?

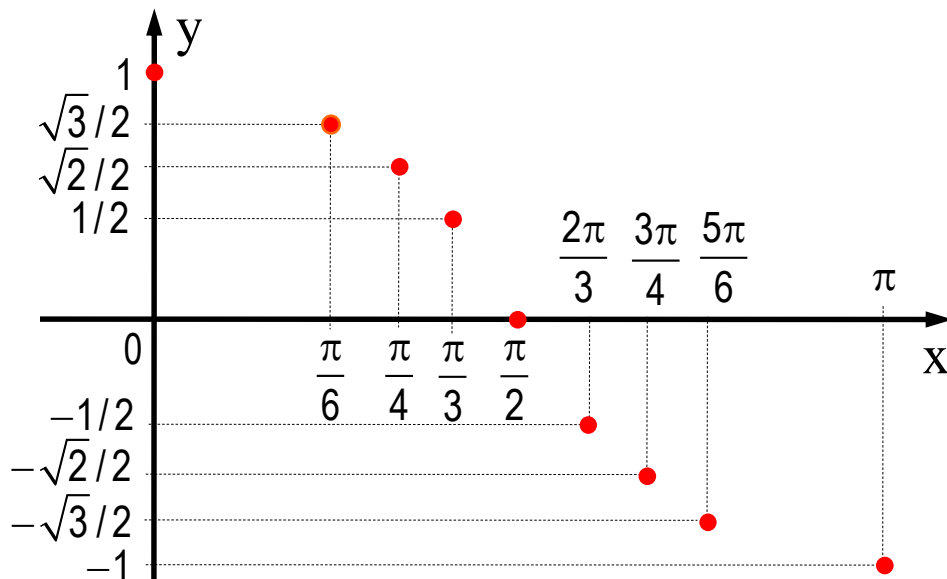


MAKE GIFS AT GIFSOUP.COM

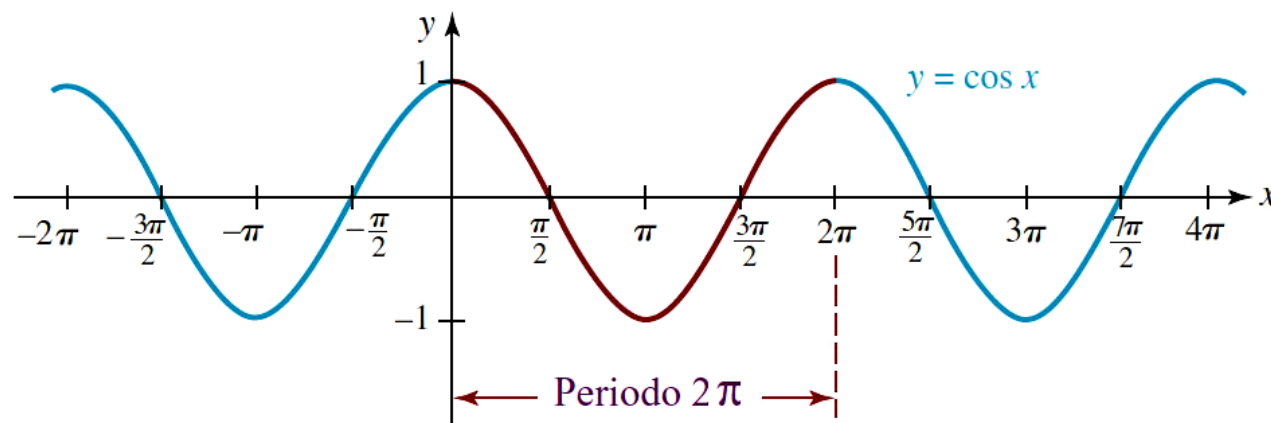
FUNCION COSENO : $F = \{ (x; y) / y = \cos x ; x \in \mathbb{R} \}$

Tabulando para algunos valores de x :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



Tabulando para más valores y uniendo dichos puntos obtenemos la curva :



Dominio : $\text{Dom}(F) = \mathbb{R} ; x \in \mathbb{R}$

Rango : $\text{Ran}(F) = [-1 ; 1] \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$

Periodo : $T = 2\pi$

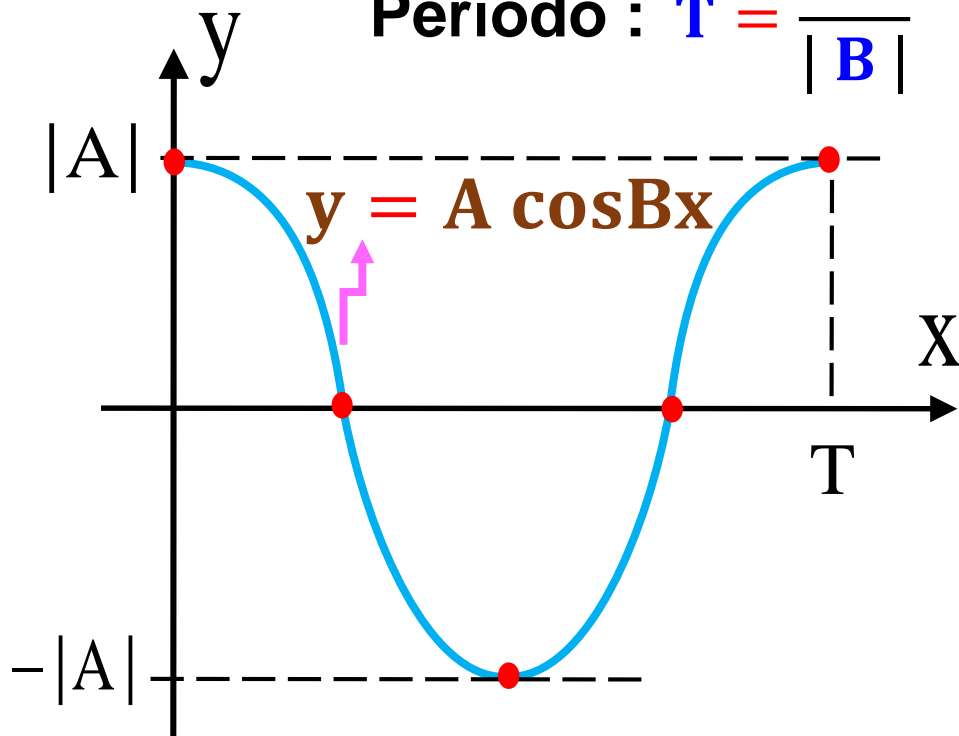
Es función par : $\cos(-x) = \cos x$

OBSERVACIÓN :

Sea la función : $y = A \cos Bx$

➡ Amplitud : $|A|$

Período : $T = \frac{2\pi}{|B|}$

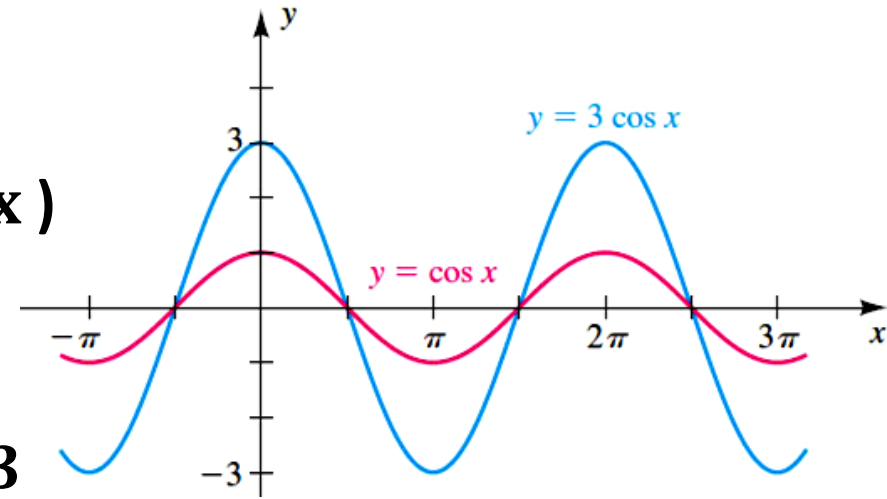


Ejemplos :

• $y = 3 \cos (1x)$

↑
 A

↑
 B



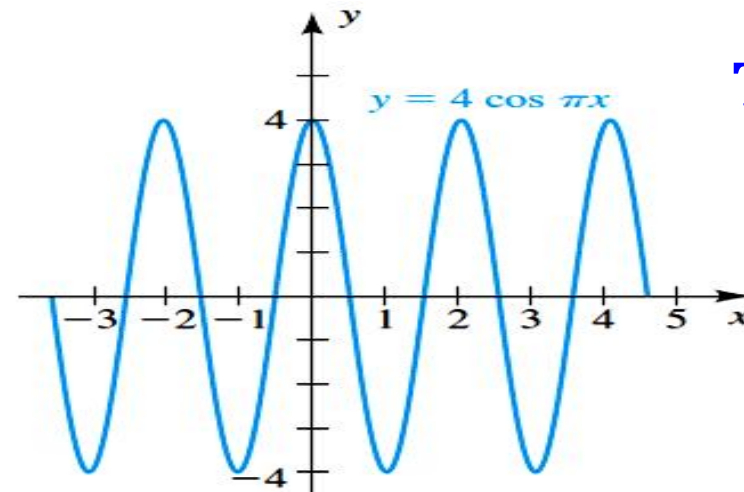
$|A| = |3| = 3$

$T = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{|1|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

• $y = 4 \cos (\pi x)$

$|A| = |4| = 4$

$T = \frac{2\pi}{|\pi|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$



HELICO PRACTICE 1

Halle el rango de la función $f(x) = 2 \cos x - 5$

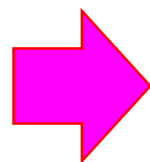
RESOLUCIÓN

Recordar : $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos x \leq 1$

Luego : $(-1 \leq \cos x \leq 1)(2)$

$$-2 - 5 \leq \underbrace{2 \cos x - 5}_{f(x)} \leq 2 - 5$$

$$-7 \leq f(x) \leq -3$$



$$\text{Ran}(f) = [-7; -3]$$



HELICO PRACTICE 2

Halle el rango de la función $g(x) = \frac{5 \cos 3x - 2}{3}$

RESOLUCIÓN

Recordar : $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos 3x \leq 1$

Luego : $(-1 \leq \cos 3x \leq 1)(5)$

$$-5 - 2 \leq 5 \cos 3x - 2 \leq 5 - 2$$

$$(-7 \leq 5 \cos 3x - 2 \leq 3) \div 3$$

$$-\frac{7}{3} \leq \frac{5 \cos 3x - 2}{3} \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{7}{3} \leq g(x) \leq 1$$

$$\therefore \text{Ran}(g) = \left[-\frac{7}{3} ; 1 \right]$$

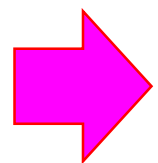
HELICO PRACTICE 3

Halle el rango de la función $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 3$

RESOLUCIÓN

$$f(x) = \underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos 2x} + 3$$

$$f(x) = \cos 2x + 3$$



$$f(x) = \cos 2x + 3$$

Recordar : $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos 2x \leq 1$

Luego : $-1 + 3 \leq \underbrace{\cos 2x + 3}_{f(x)} \leq 1 + 3$

$$2 \leq f(x) \leq 4$$

$$\therefore \text{Ran}(f) = [2; 4]$$

HELICO PRACTICE 4

Calcule $T_1 + T_2$, siendo T_1 y T_2 los periodos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente ; donde $f(x) = 3 \cos 3x$; $g(x) = 5 \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

RESOLUCIÓN

$$f(x) = 3 \cos(\overset{\textcolor{blue}{B}_1}{3}x)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{|B_1|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{\textcolor{blue}{2}\pi}{\textcolor{blue}{3}}$$

$$g(x) = 5 \cos\left(\overset{\textcolor{blue}{B}_2}{\frac{1}{2}}x\right)$$

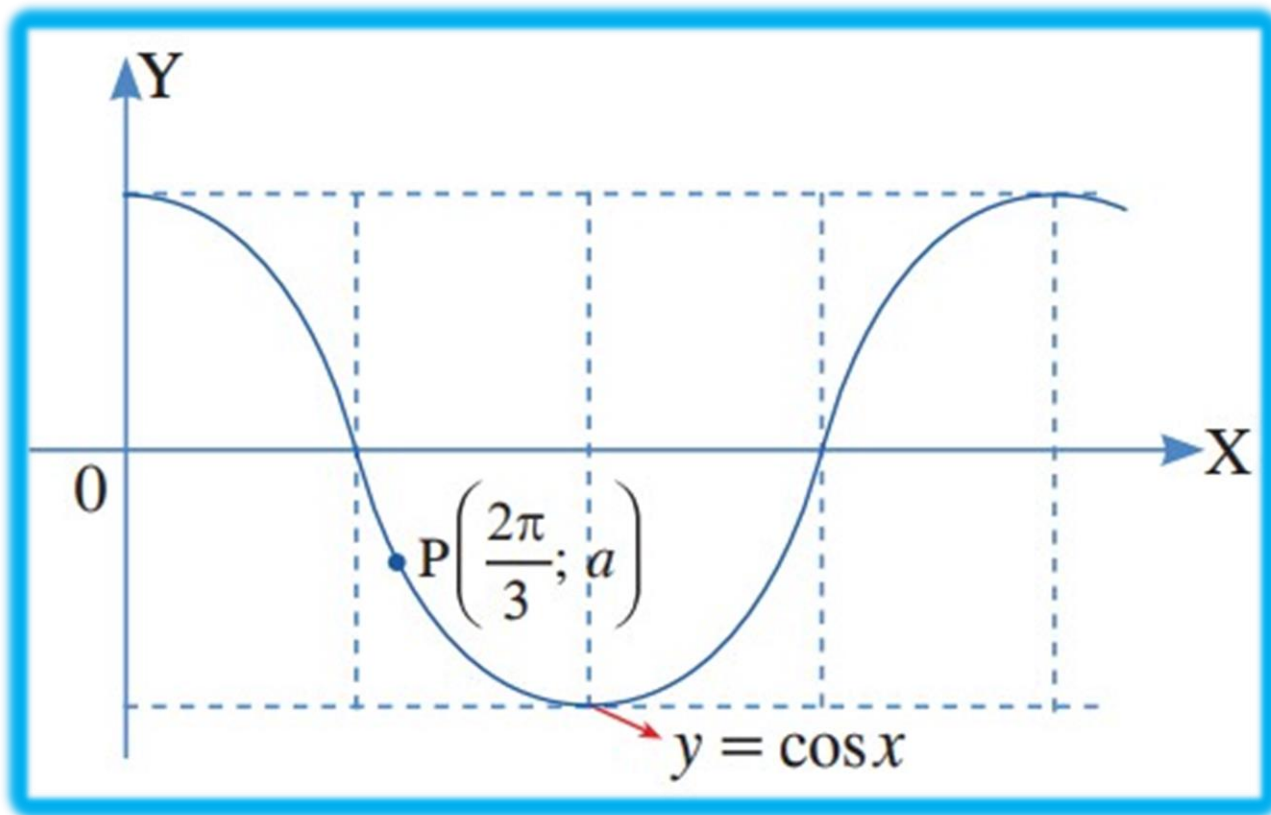
$$T_2 = \frac{2\pi}{|B_2|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{\frac{2\pi}{1}}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Luego : $T_1 + T_2 = \frac{2\pi}{3} + 4\pi$

$$\therefore T_1 + T_2 = \frac{14\pi}{3}$$

HELICO PRACTICE 5

Del gráfico, halle el valor de a .



RESOLUCIÓN

Sea : $f(x) = y = \cos x$

Se cumple que : $P\left(\frac{2\pi}{3}; a\right) \in f$

Luego : $a = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$a = \cos 120^\circ = \cos(\underbrace{180^\circ - 60^\circ})$

II C

$a = -\cos 60^\circ$

$\therefore a = -\frac{1}{2}$

HELICO PRACTICE 6

Las ganancias de una empresa del rubro metal – mecánica están definidas por : $f(x) = m \cos x + n$; donde m y n son respectivamente los costos fijos y costos variables ; además el rango de la función pertenece al intervalo $[-2 ; 4]$.- Calcule $A = 2n + m$

RESOLUCIÓN

Recordar : $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos x \leq 1$

Luego :

$$(-1 \leq \cos x \leq 1)(m) ; m > 0$$

$$-m + n \leq \underbrace{m \cos x + n}_{f(x)} \leq m + n$$

$$-2 \leq f(x) \leq 4$$

$$\begin{array}{rcl} \text{Luego :} & -m + n = -2 & \\ & m + n = 4 & \downarrow (+) \\ \hline & 2n = 2 & \Rightarrow n = 1 \end{array}$$

$$m + n = 4 \Rightarrow m + 1 = 4 \Rightarrow m = 3$$

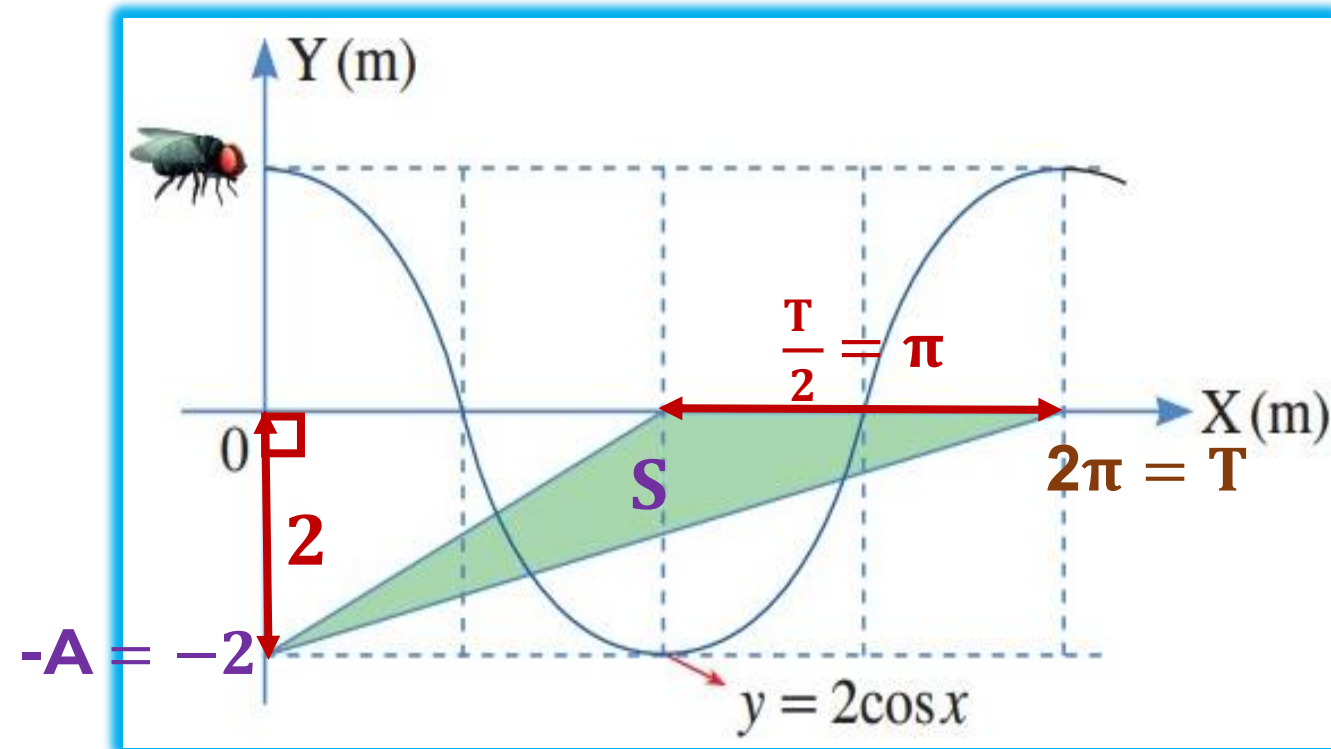
Calculamos $A = 2n + m$

$$A = 2(1) + 3$$

$$\therefore E = 5$$

HELICO PRACTICE 7

Se logró modelar el movimiento que realiza una mosca , según la gráfica mostrada .- Determine el área de la figura sombreada.



RESOLUCIÓN

$$f(x) = y = 2 \cos(1x)$$

$$\Rightarrow A = 2 ; B = 1$$

Calculamos el periodo T :

$$T = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{|1|} = \frac{2\pi}{1} \Rightarrow T = 2\pi$$

$$\frac{T}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Calculamos el área sombreada S :

$$S = \frac{(\pi)(2)}{2}$$

$$\therefore S = \pi m^2$$



SACO
OLIVEROS