ALGEBRA

Chapter 22

4th
SECONDARY

Funciones III

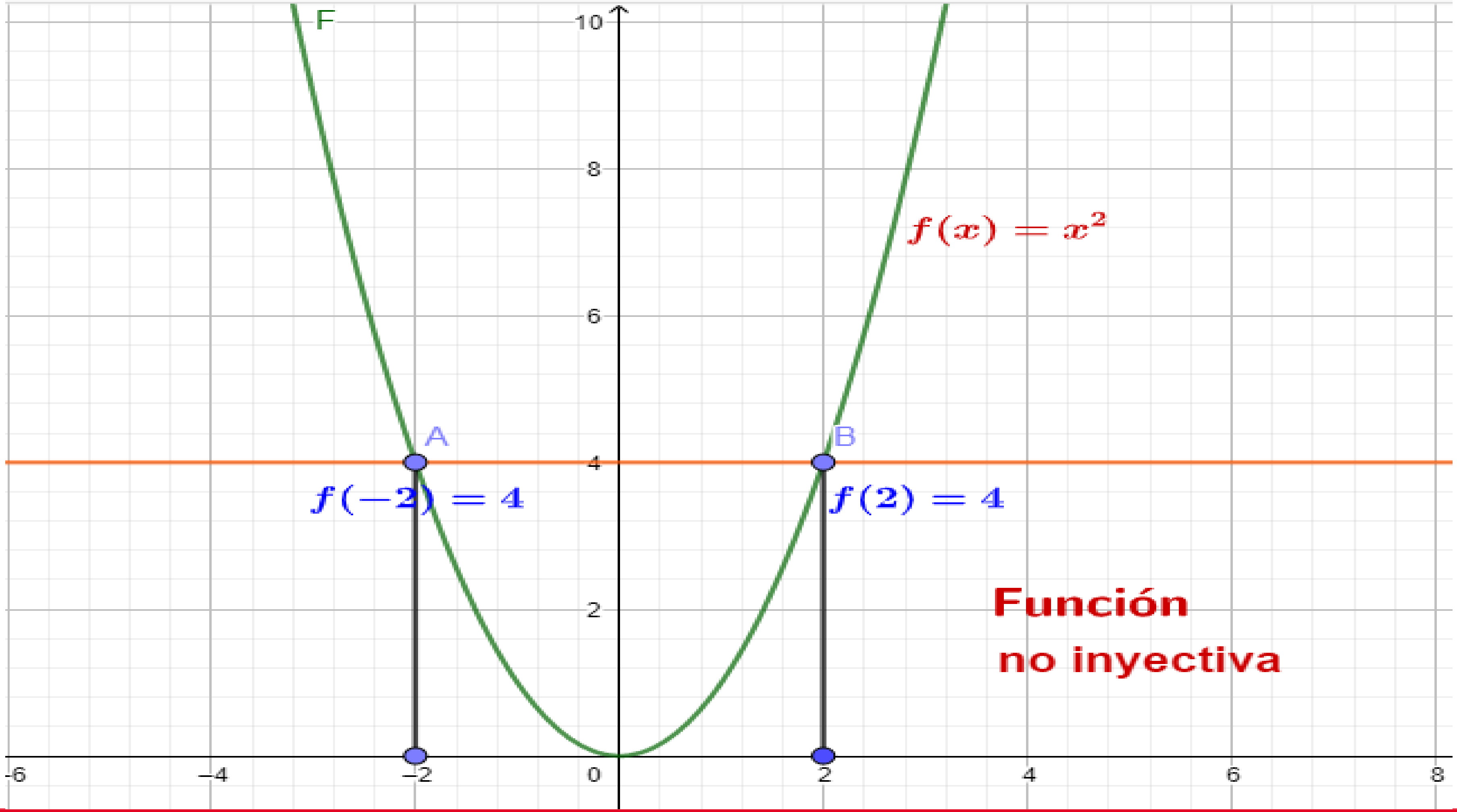
SACO OLIVEROS

HELICO

MOTIVATING

SACO OLIVEROS

Motivation Strategy



HELICO THEORY

FUNCIONES III

I) FUNCIÓN INYECTIVA

Sea la función $f: A \rightarrow B$,diremos que f es inyectiva si y solo si:

$\underbrace{f(a) = f(b)}_{p}$, $\underbrace{\text{implica}}_{\longrightarrow}$ $\underbrace{\boxed{a = b}}_{q}$ para todo $a; b \in A$

que es equivalente a la siguiente definición:

$\underbrace{\boxed{a \neq b}}_{\sim q}$ $\underbrace{\text{implica}}_{\longrightarrow}$ $\underbrace{f(a) \neq f(b)}_{\sim p}$

la cual usaremos en los ejercicios

FORMA PRÁCTICA DE INDENTIFICAR CUÁNDO UNA FUNCIÓN ES INYECTIVA Y CUÁNDO NO

Sea $F = \{(a; 3), (b; 6), (c; 8), (d; 6)\}$

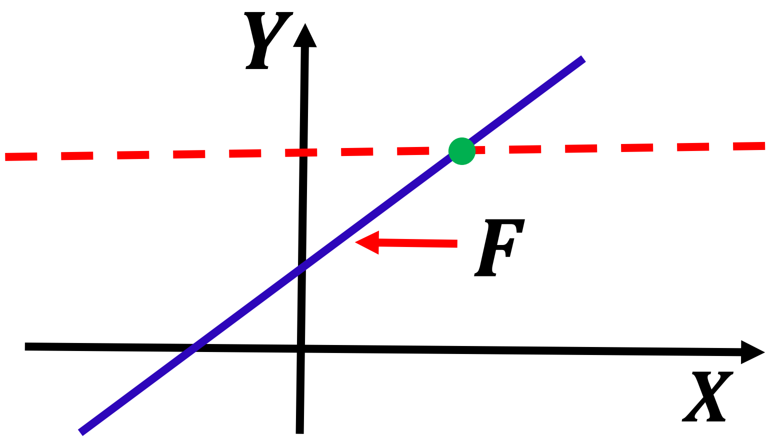
➡ F **no** es inyectiva,

Sea $G = \{(a; 7), (b; 2), (c; 8), (d; 1), (e; 5), (f; 3)\}$

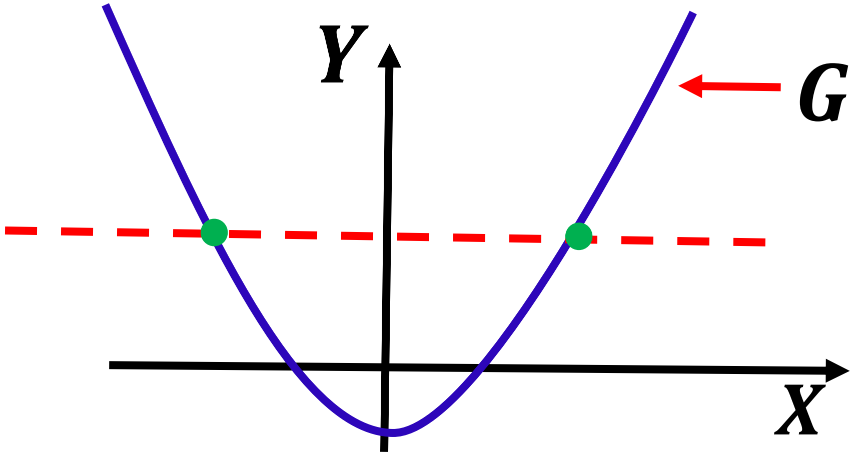
➡ G **si** es inyectiva,
porque **ninguna** de las segundas componentes **se repite**

OBSERVACIÓN

Para gráficas de funciones, se dirá que una gráfica es inyectiva si al trazar una horizontal lo corta sólo en un punto.



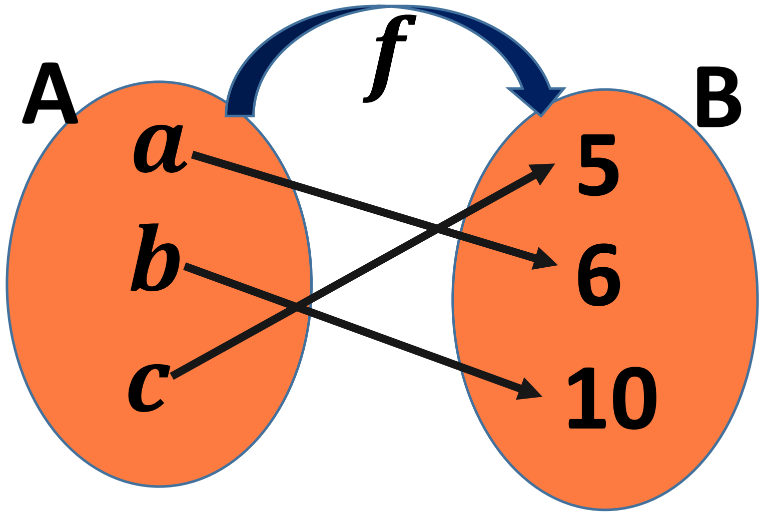
F **es inyectiva**

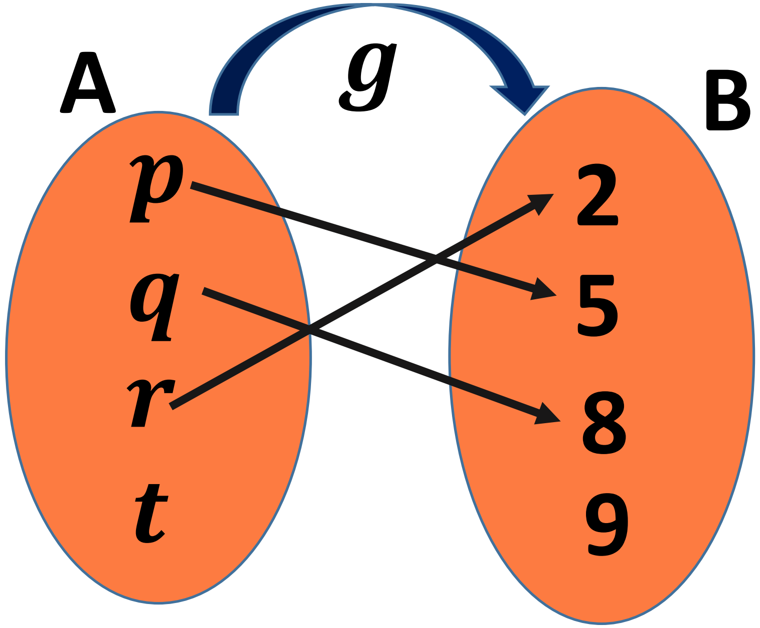


G **no es inyectiva**

II) FUNCIÓN SOBREYECTIVA

Sea la función $f: A \to B$,diremos que f es sobreyectiva si y solo si: $Rang(f) = B$





f es sobreyectiva, pues:

$$Rang(f) = B$$

g no es sobreyectiva, pues:

$$Rang(f) \neq B$$

III) FUNCIÓN BIYECTIVA

La función $f: A \rightarrow B$ es biyectiva si y solo si f es inyectiva y sobreyectiva

IV) FUNCIÓN INVERSA

Si $f: A \rightarrow B$ es una función biyectiva ,entonces existe $f^{-1}: B \rightarrow A$ llamada inversa de f, definida por la condición $y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

PROPIEDAD:

$$Dom(f^{-1}) = Ran(f)$$

$$Ran(f^{-1}) = Dom(f)$$

HELICO
PRACTICE

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1 ¿Cuáles de las funciones son inyectivas?

$$F = \{(1;2),(3;5),(4;8),(5;9)\}$$
$$G = \{(0;1),(2;5),(4;1),(5;7)\}$$
$$H = \{(1;5),(3;5),(7;10),(10;5)\}$$

Resolución

F es inyectiva: *pues **NO** se repite ningún elemento del rango; la correspondencia es uno a uno*

G **no** es inyectiva: *pues se repite un elemento del rango:*

$(0;1)$ y $(4;1)$

H **no** es inyectiva: *pues se repite un elemento del rango:*

$(1;5),(3;5)$ y $(10;5)$

PROBLEMA 2 Sean $A = \{1; 2; 3; 4\}$ y $B = \{1; 3; 5; 7\}$ y las funciones $f: A \rightarrow B$ y $g: A \rightarrow B$ tal que:

$f = \{(1; 1), (2; 1), (3; 3), (4; 5)\}$

$g = \{(1; 3), (2; 1), (3; 5), (4; 7)\}$

¿f y g son sobreyectivas?

Resolución

f no es Sobreyectiva:

pues $Ran(f) \neq B$

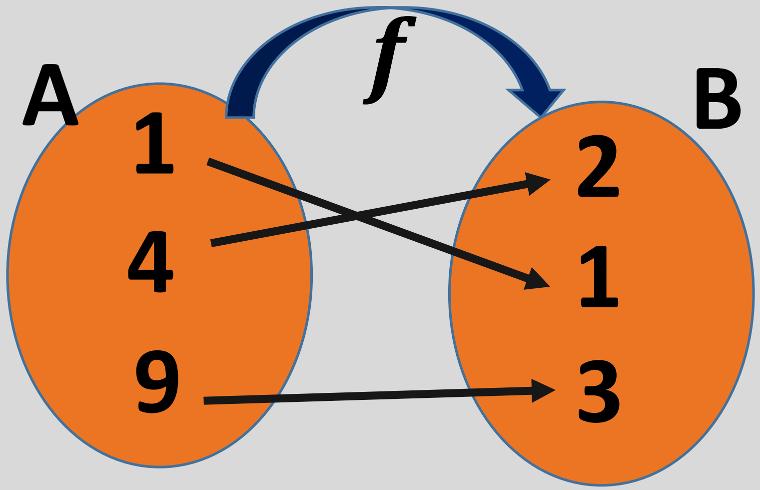
$\{1; 3; 5\} \neq \{1; 3; 5; 7\}$

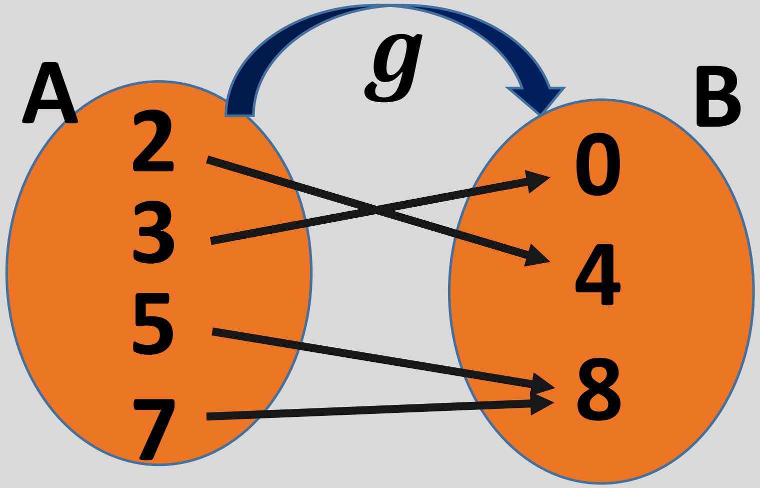
g si es Sobreyectiva:

pues $Ran(g) = B$

$\{3; 1; 5; 7\} = \{1; 3; 5; 7\}$

PROBLEMA 3 Dada las funciones:





¿f y g son inyectivas?

Resolución

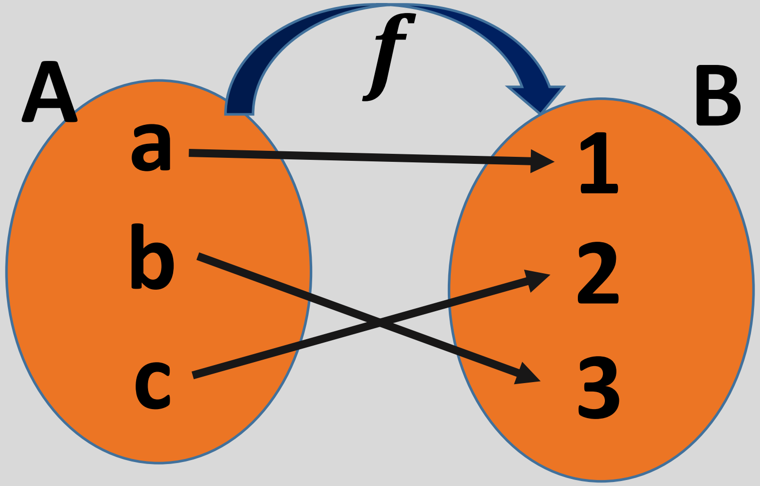
f si es inyectiva:

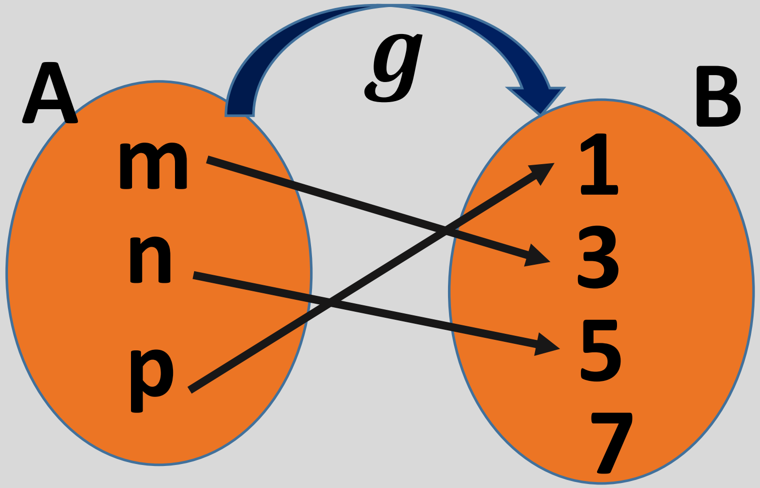
***NO* se repite ningún elemento del rango**

g no es inyectiva:

(5;8) ,(7;8)

PROBLEMA 4 Siendo las funciones:





¿f y g son sobreyectivas?

Resolución

f si es Sobreyectiva:

pues $Ran(f) = B$

$$\{1;2;3\} = \{1;2;3\}$$

g no es Sobreyectiva:

pues $Ran(g) \neq B$

$$\{1;3;5\} \neq \{1;3;5;7\}$$

PROBLEMA 5 Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: A \rightarrow B$ funciones; Además:

$A = \{2,4,6,8\}$ y $B = \{2,3,5,8\}$ tales que

$f = \{(2;5),(4;5),(8;3),(6;8)\}$

$g = \{(2;2),(6;3),(4;8),(8;5)\}$ ¿f y g son biyectivas ?

$f: A \rightarrow B$ *es biyectiva si y solo si f inyectiva y sobreyectiva*

Resolución

I) f NO es Inyectiva

$$f = \{(2;5),(4;5),(8;3),(6;8)\}$$

pues se repite un elemento del rango:

$$(2;5) \text{ y } (4;5)$$

f NO es biyectiva

I) g es Inyectiva

$$g = \{(2,2);(6,3),(4,8);(8,5)\}$$

Pue NO se repite ningún elemento del rango

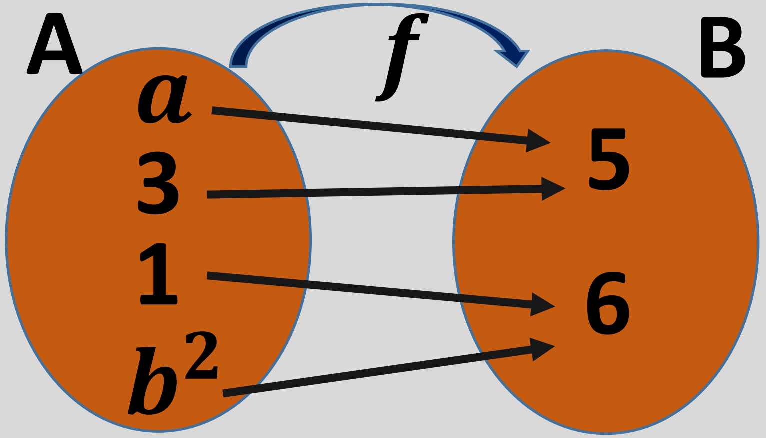
II) g es sobreyectiva

pues el $Ran(g)) = B$

$$\{2,3,5,8\} = \{2,3,5,8\}$$

g Es biyectiva

PROBLEMA 6 Del gráfico, f representa una función inyectiva.



Además, la expresión $K = a + b$, donde K es el máximo valor de $a + b$, representa la cantidad de alumnos clasificados a la final de un torneo de ajedrez. Si participaron 10 alumnos, ¿cuántos alumnos quedaron descalificados?

Resolución

f es Inyectiva

$\Rightarrow (a;5) = (3;5) \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$\Rightarrow (1;6) = (b^2;6) \Rightarrow b^2 = 1$

$\boxed{b = 1}$ ó $b = -1$

$(Por\ dato: K\ es\ máximo)$

$K = 3 + 1$

$K = 4 \ (alumnos\ clasificados)$

$\therefore$ $\boxed{\text{N° de alumnos descalificados} = 6}$

PROBLEMA 7 Se tiene $f:\ A \to B$ función, donde $f=\{(2;9),(3;4),(4;5)\}$. El costo (en soles) de una bicicleta viene dado por el producto de los valores del dominio de la función inversa de f ¿Cuál es el costo de la bicicleta?

RESOLUCIÓN

Si $f;A \to B$, *ES BIYECTIVA* $\to \exists f^{-1}$

$I)\ f$ *es inyectiva*

$f=\{(2;\underline{9}),(3;\underline{4}),(4;\underline{5})\}$

pues NO se repite ningún elemento del rango

$II)\ f$ *es sobreyectiva*

$rang(f)=B$

$\{4,5,9\}=\{4,5,9\}$

.por lo tanto f es biyectiva $\to \exists f^{-1}$

$$f^{-1}=\{(9;2),(4;3),(5;4)\}$$

$$Dom(f^{-1})=\{9,4,5\}$$

nos piden el costo de la bicicleta

el producto de los Valores del dominio $\begin{cases} =(9)(4)(5) \\ =180 \end{cases}$

EL COSTO DE LA BICICLETA ES 180 SOLES