

TRIGONOMETRY

Chapter 10

2nd
SECONDARY

**PROPIEDADES DE LAS RAZONES
TRIGONOMÉTRICAS DE UN
ÁNGULO AGUDO II**

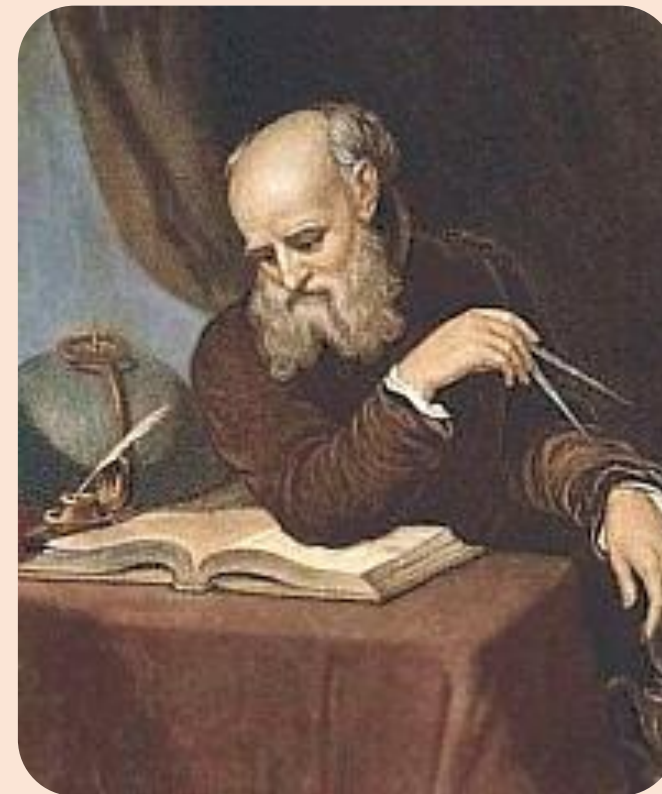


HELICO MOTIVACIÓN

Los egipcios fijaron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos; además utilizaron la trigonometría para desarrollar estudios en la astronomía.

Luego de Egipto y Babilonia, el estudio de la trigonometría se asentó en Grecia, donde destacó el matemático y astrónomo griego **Hiparco de Nicea**, quien fue uno de los principales y más importantes desarrolladores de la Trigonometría.

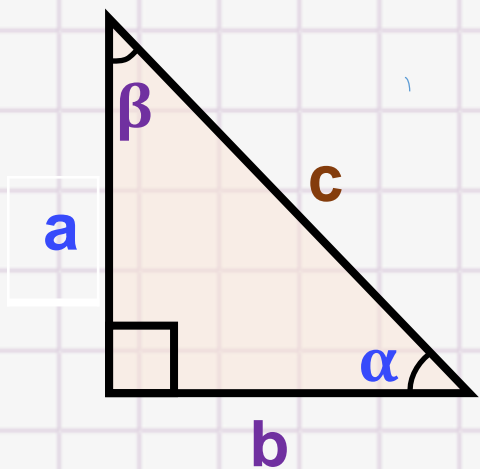
Actualmente una de las muchas aplicaciones de la trigonometría es la medición de las distancias entre los cuerpos celestes ... ¡anímate a investigar más aplicaciones trigonométricas y compártenos tu experiencia en la próxima clase !



Hiparco de Nicea

II) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS AGUDOS COMPLEMENTARIOS (CO – RT)

En un triángulo rectángulo, los catetos se consideran opuestos ó adyacentes, según sea el ángulo agudo de referencia .



\angle	CO	CA	H
α	a	b	c
β	b	a	c

Luego se cumple :

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\text{tan}\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta$$

$$\text{sec}\alpha = \frac{c}{b} = \csc\beta$$

Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

CO – RT

Ejemplos :

$$\text{sen}27^\circ = \cos63^\circ ; \text{ porque } 27^\circ + 63^\circ = 90^\circ$$

$$\tan(y + 51^\circ) = \cot(39^\circ - y) ;$$

$$\text{porque } \cancel{y} + 51^\circ + 39^\circ - \cancel{y} = 90^\circ$$

En general :

$$\text{Si } \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \text{RT}(\alpha) = \text{CO} - \text{RT}(\beta)$$

HELICO PRACTICE 1

Escriba verdadero (V) ó falso (F)

según corresponda :

a) $\sin 43^\circ = \cos 43^\circ$ (F)

b) $\tan 67^\circ = \cot 33^\circ$ (F)

c) $\sec 81^\circ = \csc 9^\circ$ (V)

Recordar
CO – RT :



Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta$$

$$\sec \alpha = \csc \beta$$

CO – RT

RESOLUCIÓN

a) $43^\circ + 43^\circ = 86^\circ \neq 90^\circ$

$$\therefore \sin 43^\circ \neq \cos 43^\circ$$

b) $67^\circ + 33^\circ = 100^\circ \neq 90^\circ$

$$\therefore \tan 67^\circ \neq \cot 33^\circ$$

c) $81^\circ + 9^\circ = 90^\circ$

$$\therefore \sec 81^\circ = \csc 9^\circ$$

HELICO PRACTICE 2

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, además $\sec\alpha = \frac{3}{2}$;

Efectúe $E = 4 \csc\beta - 1$

Recordar
CO - RT :



Definición de CO - RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

CO - RT

RESOLUCIÓN

Por CO - RT : $\sec\alpha = \csc\beta = \frac{3}{2}$

Luego calculamos E :

$$E = 4 \csc\beta - 1$$

$$E = 4 \left(\frac{3}{2} \right) - 1 = 6 - 1$$

$$\therefore E = 5$$

HELICO PRACTICE 3

Si $\tan\left(\frac{x}{3} + 30^\circ\right) = \cot 42^\circ$,
dé el valor de $\frac{x}{9}$.

Recordar CO – RT :

Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

CO – RT

RESOLUCIÓN

$$\tan\left(\frac{x}{3} + 30^\circ\right) = \cot 42^\circ$$

$$\rightarrow \frac{x}{3} + 30^\circ + 42^\circ = 90^\circ$$

$$\frac{x}{3} + 72^\circ = 90^\circ$$

$$\frac{x}{3} = 90^\circ - 72^\circ$$

$$\frac{x}{3} = 18^\circ$$

$$x = 3(18^\circ) = 54^\circ$$

Calculamos $\frac{x}{9}$:

$$\frac{x}{9} = \frac{54^\circ}{9}$$

$$\therefore \frac{x}{9} = 6^\circ$$



Calcule $\text{sen}3x$ si

$$\sec(3x - 15^\circ) = \csc(6x + 15^\circ)$$

Recordar CO – RT :

Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

CO – RT

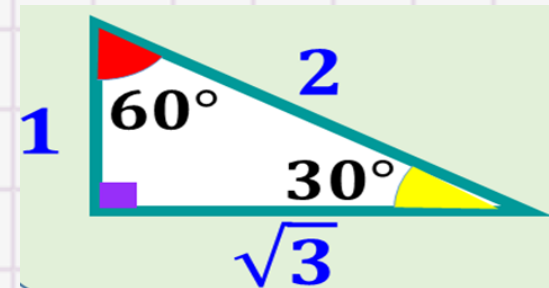
RESOLUCIÓN

$$\sec(3x - 15^\circ) = \csc(6x + 15^\circ)$$

$$3x - 15^\circ + 6x + 15^\circ = 90^\circ$$

$$9x = 90^\circ$$

$$x = 10^\circ$$



Luego :

$$\text{sen}3x = \text{sen} 3(10^\circ) = \text{sen}30^\circ$$

$$\therefore \text{sen}3x = \frac{1}{2}$$

HELICO PRACTICE 5

Reduzca :

$$E = \frac{9 \operatorname{sen} 8^\circ - 3 \cos 82^\circ}{4 \cos 82^\circ - 2 \operatorname{sen} 8^\circ}$$

Recordar CO – RT :

Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta$$

$$\sec \alpha = \csc \beta$$

CO – RT

RESOLUCIÓN

Se observa que : $8^\circ + 82^\circ = 90^\circ$

$$E = \frac{9 \operatorname{sen} 8^\circ - 3 \overbrace{\cos 82^\circ}^{\operatorname{sen} 8^\circ}}{4 \underbrace{\cos 82^\circ}_{\operatorname{sen} 8^\circ} - 2 \operatorname{sen} 8^\circ}$$

$$E = \frac{9 \operatorname{sen} 8^\circ - 3 \operatorname{sen} 8^\circ}{4 \operatorname{sen} 8^\circ - 2 \operatorname{sen} 8^\circ} = \frac{6 \operatorname{sen} 8^\circ}{2 \operatorname{sen} 8^\circ}$$

$$\therefore E = 3$$

RESOLUCIÓN

Andrés desea vender su terreno a \$1000 cada m^2 . – Sabiendo que las dimensiones de dicho terreno son las siguientes :



Ancho: A m

Largo: B m

$$A = 6 \left(\frac{\sin 73^\circ}{\cos 17^\circ} \right) + 2 \left(\frac{\tan 35^\circ}{\cot 55^\circ} \right)$$

$$B = 7 \left(\frac{\sec 80^\circ}{\csc 10^\circ} \right) + 3 \left(\frac{\cot 18^\circ}{\tan 72^\circ} \right)$$

¿Cuál será el valor del terreno ?

Se observa que :

$$73^\circ + 17^\circ = 90^\circ$$

$$80^\circ + 10^\circ = 90^\circ$$

$$35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$$

$$18^\circ + 72^\circ = 90^\circ$$

Por CO - RT :

$$A = 6 \left(\frac{\cancel{\cos 17^\circ}}{\cancel{\cos 17^\circ}} \right) + 2 \left(\frac{\cancel{\cot 55^\circ}}{\cancel{\cot 55^\circ}} \right)$$

$$A = 6(1) + 2(1) \rightarrow A = 8$$

$$B = 7 \left(\frac{\cancel{\csc 10^\circ}}{\cancel{\csc 10^\circ}} \right) + 3 \left(\frac{\cancel{\tan 72^\circ}}{\cancel{\tan 72^\circ}} \right)$$

$$B = 7(1) + 3(1) \rightarrow B = 10$$

$$S = (8 \text{ m})(10 \text{ m}) = 80 \text{ m}^2$$

$$\therefore \text{Valor} = (80)(\$1000) = \$80000$$

HELICO PRACTICE 7

Dos hermanas: Milagros e Inés, tienen respectivamente x e y años .- Si dichas edades se obtienen al resolver las siguientes igualdades :

$$\operatorname{sen} 3x^\circ - \cos(x + 10)^\circ = 0$$

$$\tan 4x^\circ - \cot y^\circ = 0$$

Determine la suma de edades de ambas hermanas.

RESOLUCIÓN

$$\operatorname{sen} 3x^\circ = \cos(x + 10)^\circ$$

Por CO - RT :

$$3x^\circ + (x + 10)^\circ = 90^\circ$$

$$4x + 10 = 90$$

$$4x = 80$$

$$x = 20 \text{ años}$$

$$\tan 4x^\circ = \cot y^\circ$$

Por CO - RT :

$$4x^\circ + y^\circ = 90^\circ$$

$$4(20) + y = 90$$

$$80 + y = 90$$

$$y = 10 \text{ años}$$

Luego : $x + y = 20 + 10 = 30$

$$\therefore \text{Suma de edades} = 30 \text{ años}$$



SACO
OLIVEROS