GEOMETRÍA

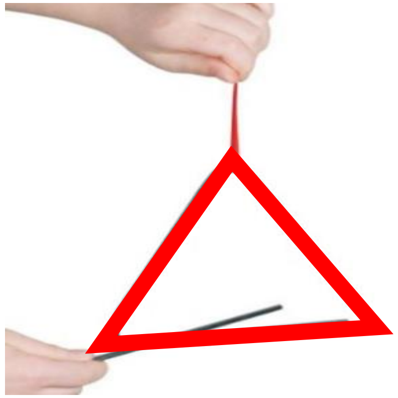
Capítulo 1

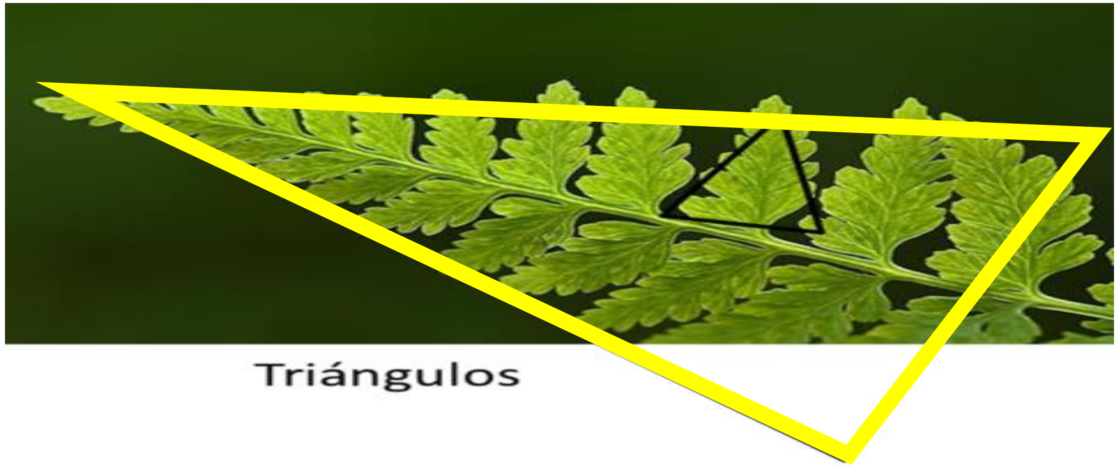
5th
SECONDARY

TRIÁNGULO

SACO OLIVEROS

El triángulo es una de las figuras geométricas elementales, que nos permite comprender las demás figuras geométricas que estudiaremos posteriormente, aplicando los axiomas, postulados, lemas, teoremas y corolarios estudiados en los capítulos anteriores; en nuestra vida cotidiana podemos encontrar muchos objetos de forma de triángulo como podemos observar en los siguientes gráficos.

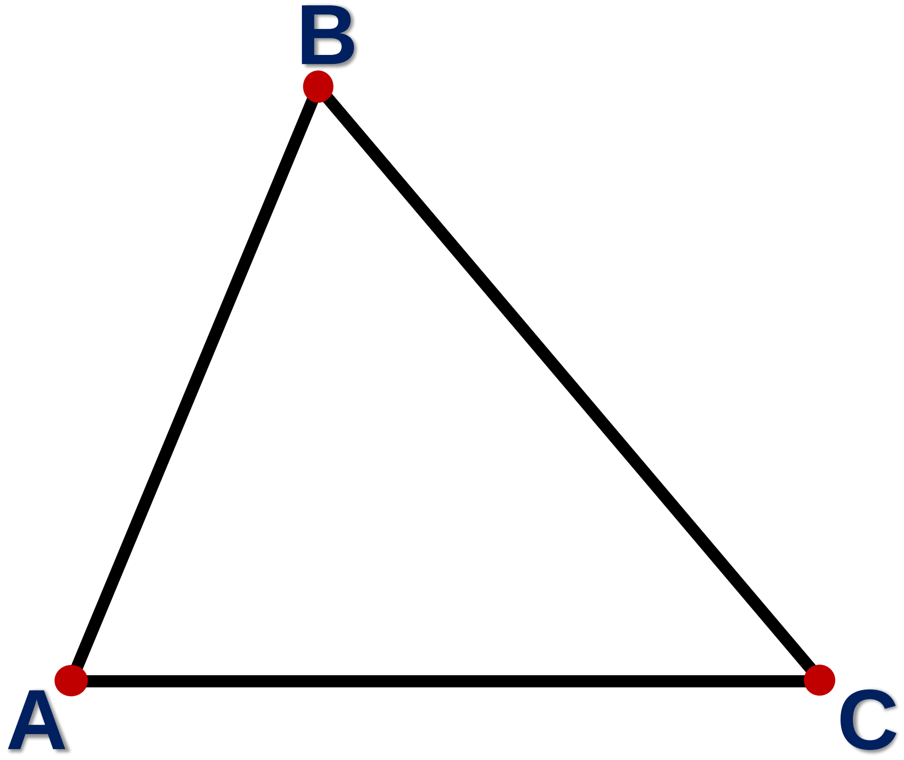




TRIÁNGULO

Definición.

Si A, B y C son tres puntos no colineales, entonces la unión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se denomina triángulo.



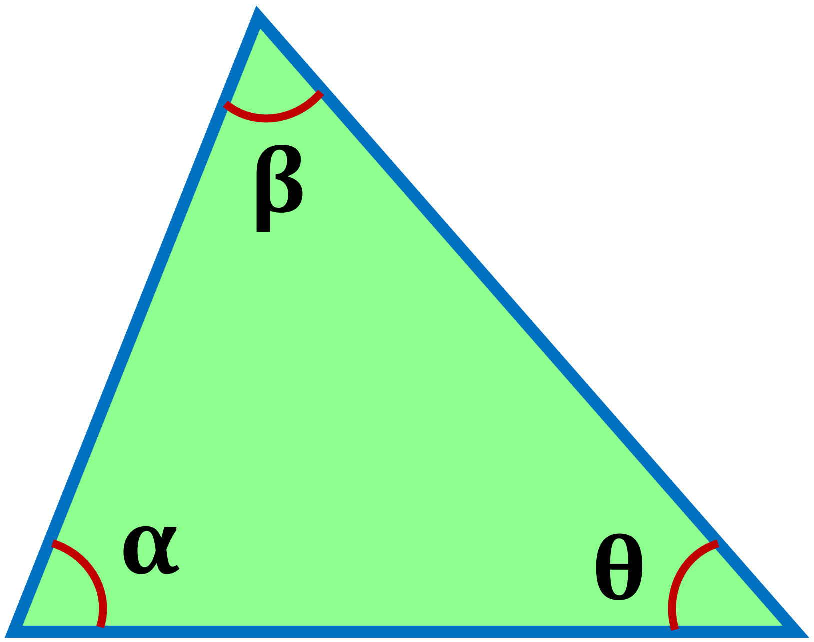
NOTACIÓN:

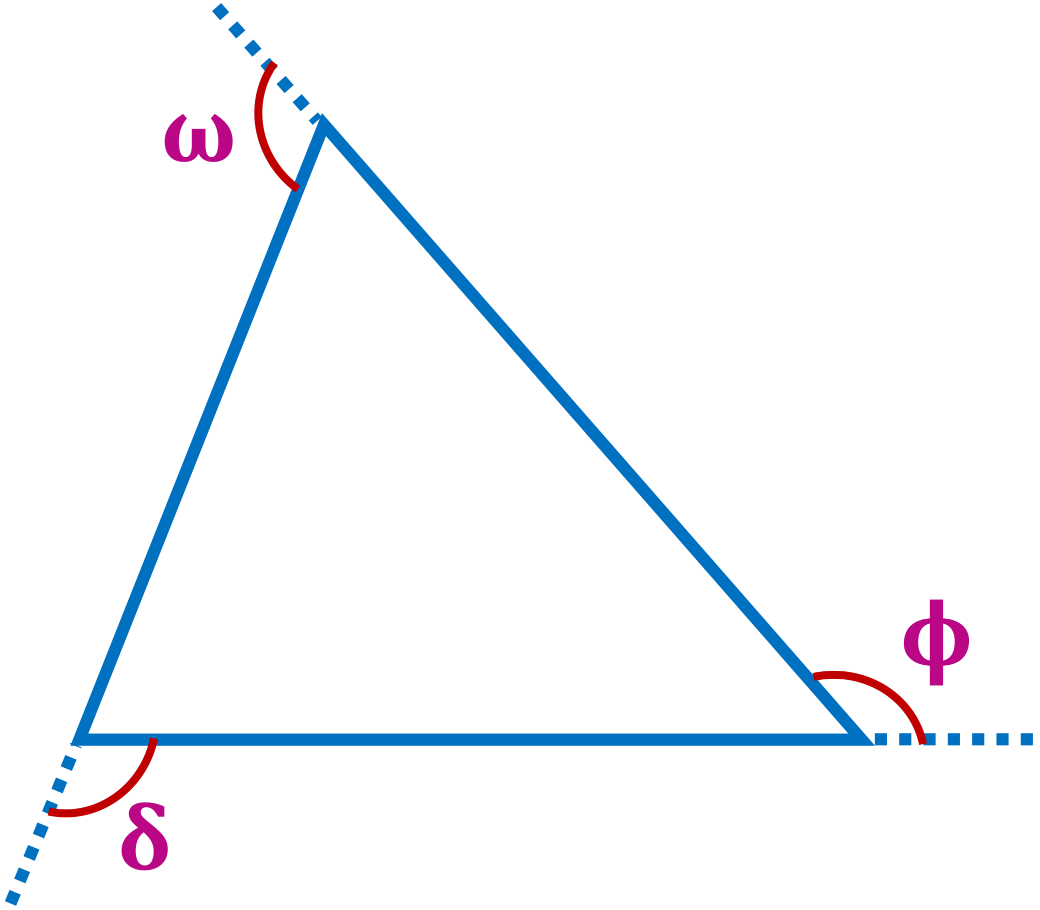
ΔABC: Se lee, triángulo ABC

ELEMENTOS

- **VÉRTICES:** A, B y C
- **LADOS:** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$

ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO

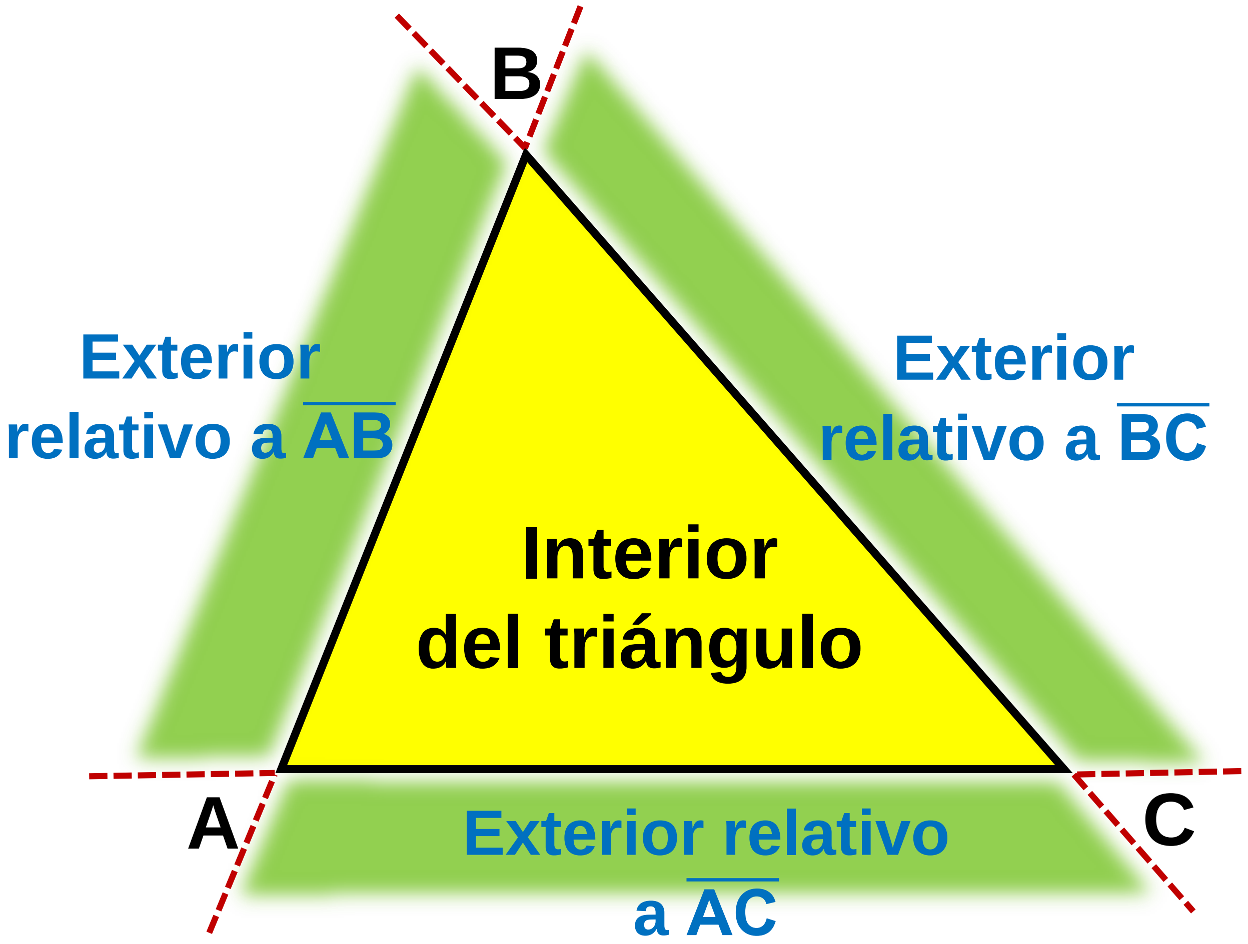




Medida de los ángulos:

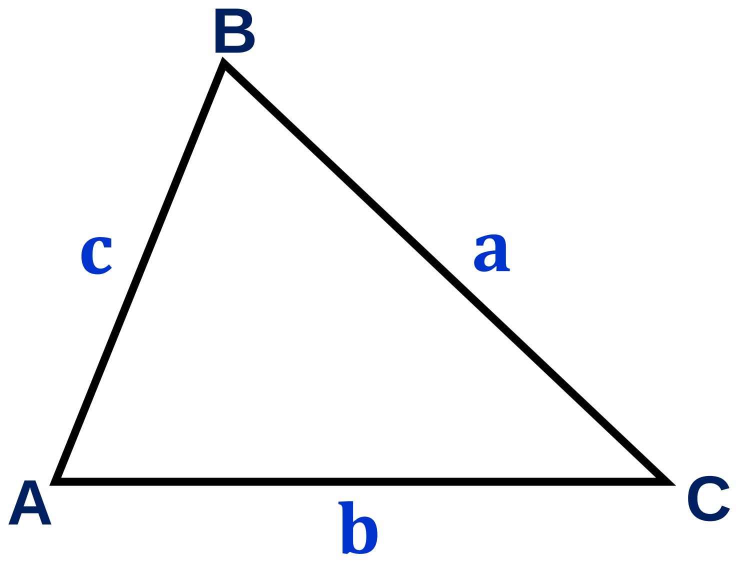
- **INTERNOS :** α, β y θ
- **EXTERNOS :** δ, ω y ϕ

INTERIOR Y EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO



PERÍMETRO DE UN TRIÁNGULO

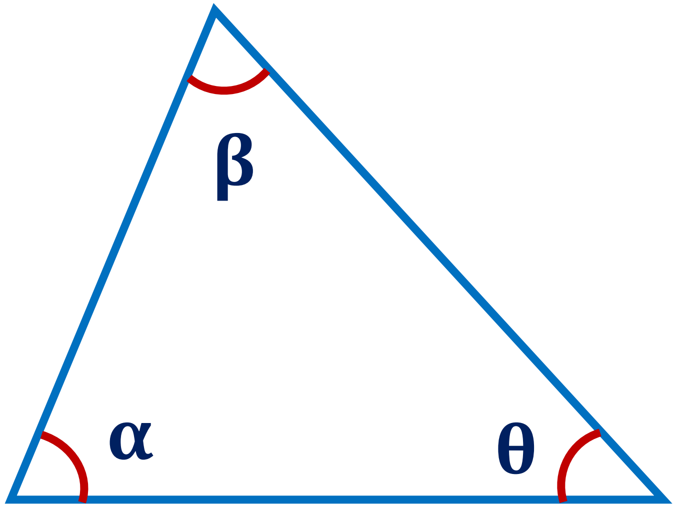
Es la suma de las longitudes de los lados del triángulo.
Se denota con 2p.



$$2p_{(ABC)} = a + b + c$$

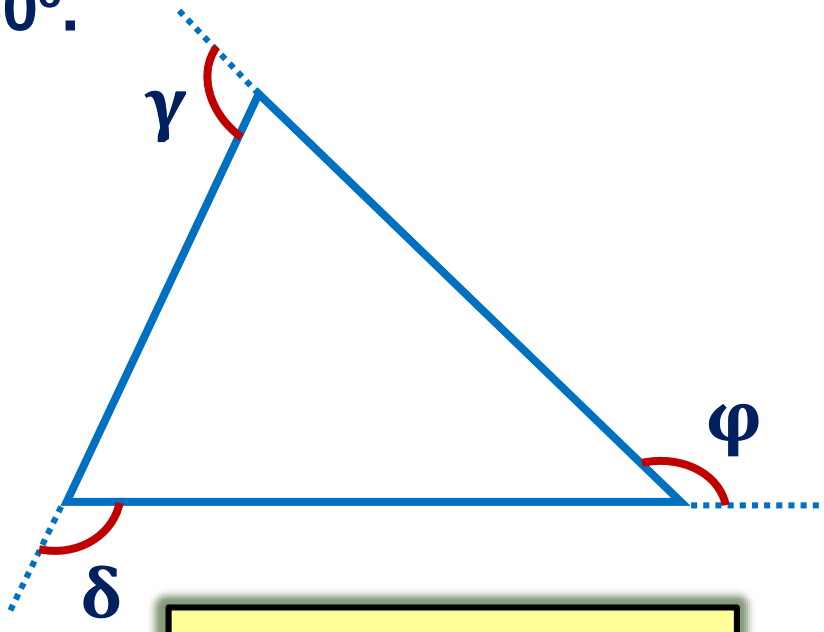
TEOREMAS FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.



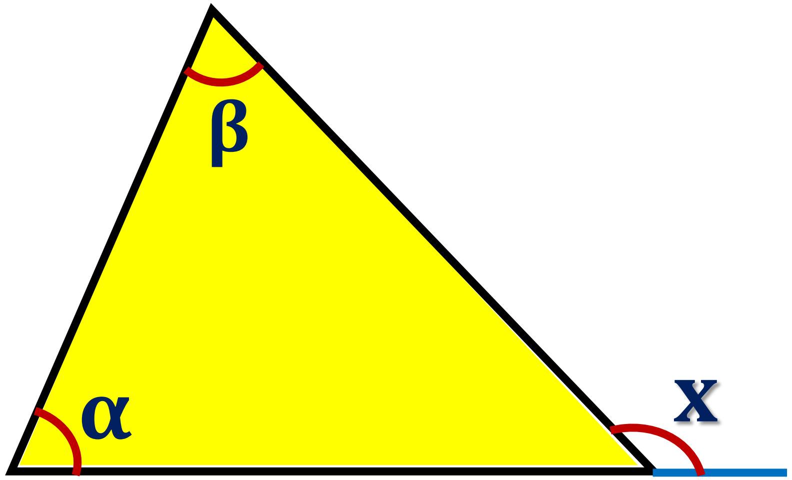
$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

En un triángulo, la suma de las medidas de los ángulos externos considerados uno por vértice es igual a 360º.



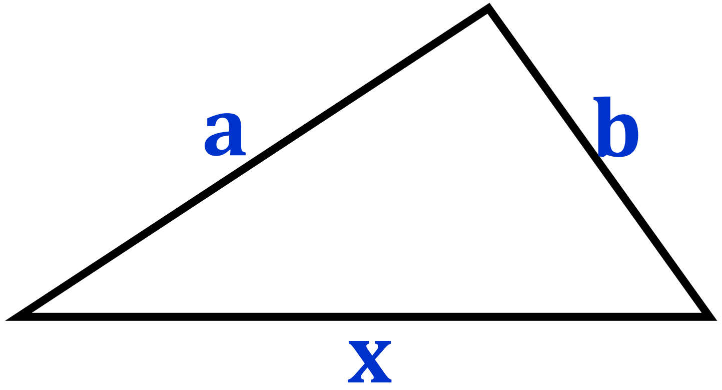
$$\gamma + \delta + \varphi = 360°$$

En un triángulo, la medida de un ángulo externo es igual a la suma de las medidas de dos ángulos internos no adyacentes a él.



$$x = \alpha + \beta$$

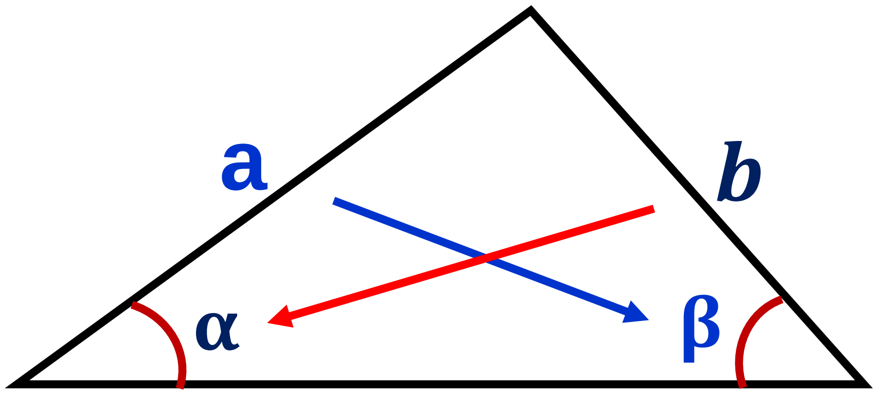
En todo triángulo, la longitud de un lado es mayor que la diferencia de las longitudes de los otros dos y menor que la suma de las longitudes de dichos lados. (Teorema de existencia)



Si: $a > b$

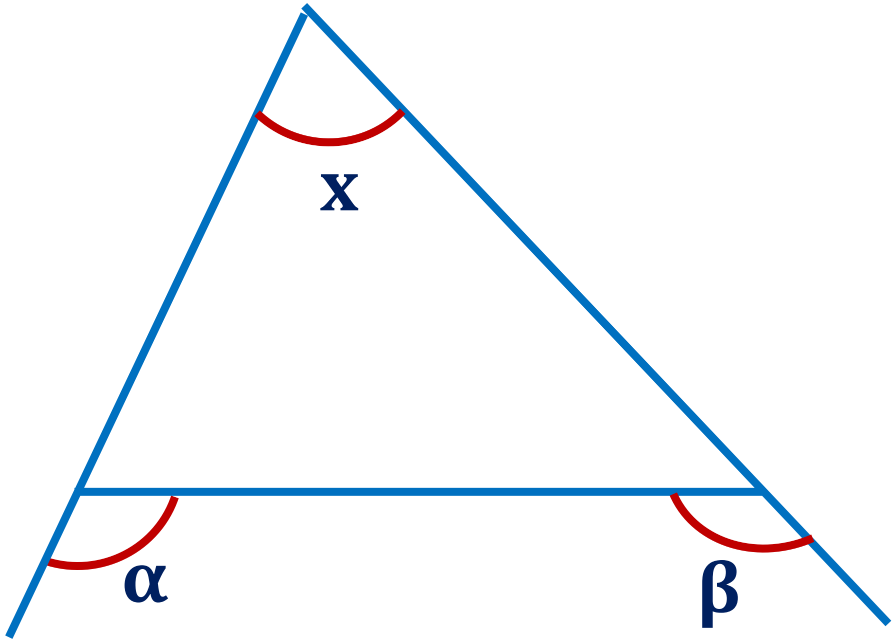
Entonces: $a - b < x < a + b$

En un triángulo al lado de mayor longitud se opone el ángulo de mayor medida y viceversa. (Teorema de correspondencia)

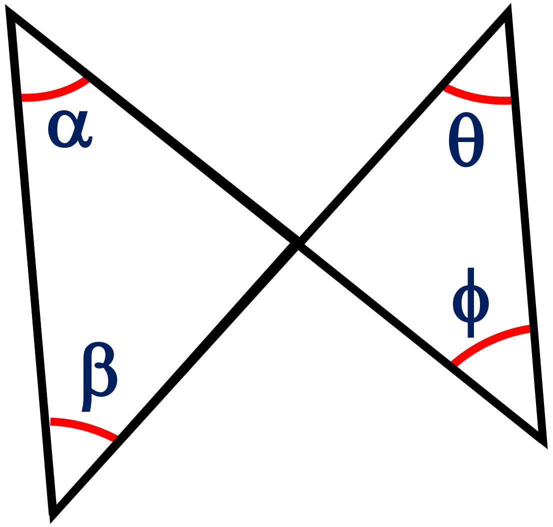


Si $a > b \Leftrightarrow \boxed{\beta > \alpha}$

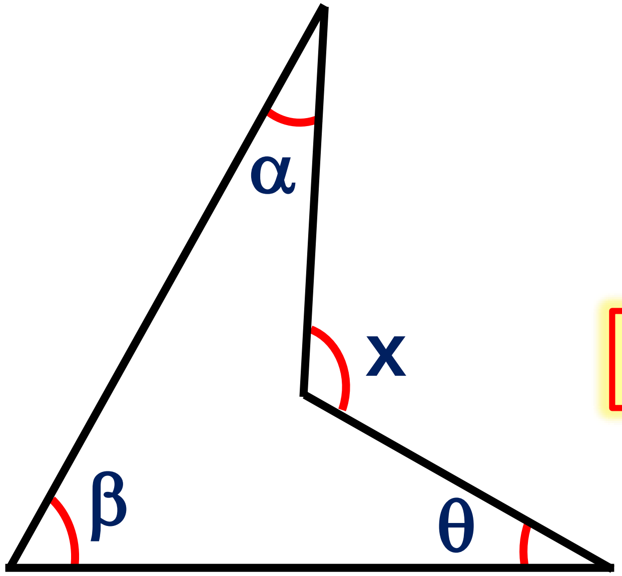
TEOREMAS ADICIONALES



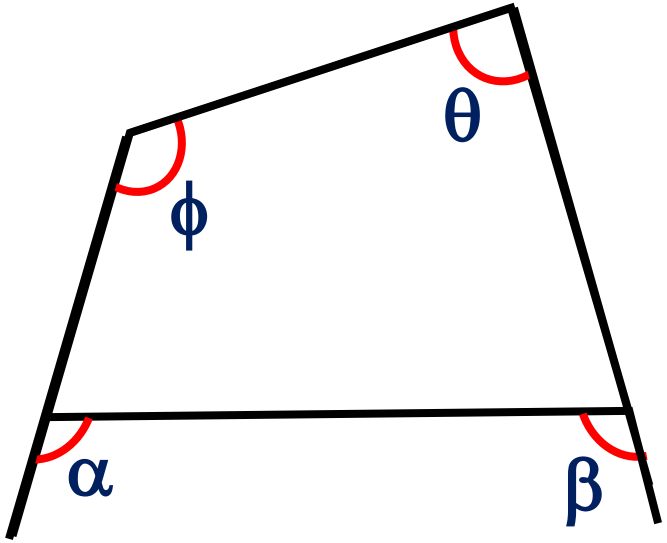
$$\boxed{\alpha + \beta = 180° + x}$$



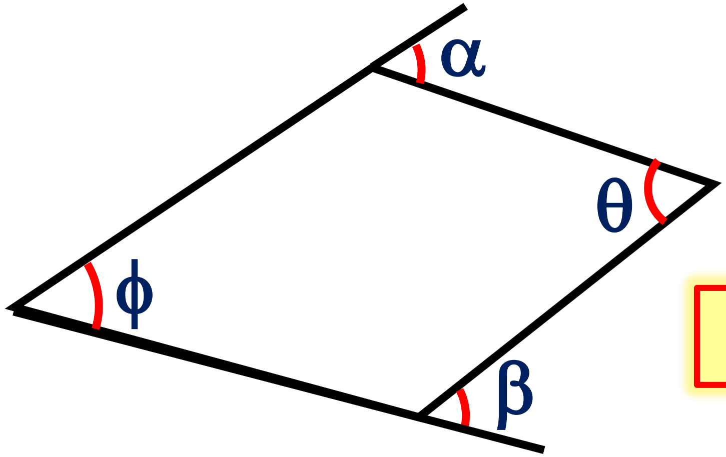
$\alpha + \beta = \theta + \phi$



$x = \alpha + \beta + \theta$



$\phi + \theta = \alpha + \beta$



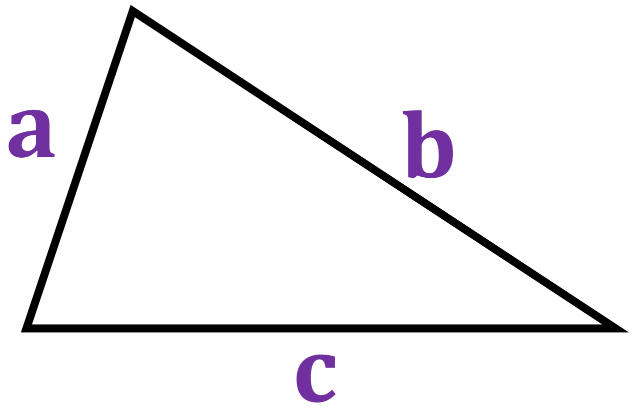
$\phi + \theta = \alpha + \beta$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

I. SEGÚN LA LONGITUD DE SUS LADOS

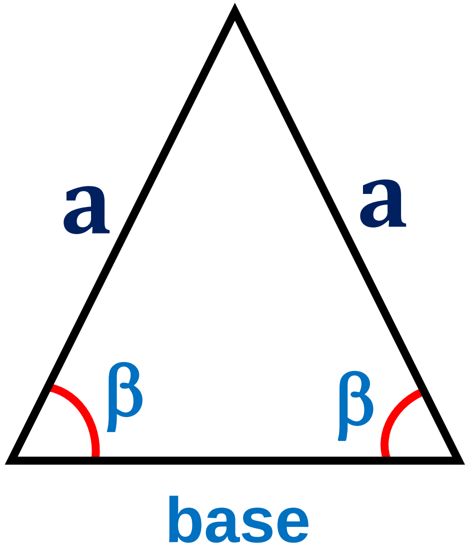
TRIÁNGULO ESCALENO

Tienen los tres lados de diferente longitud.



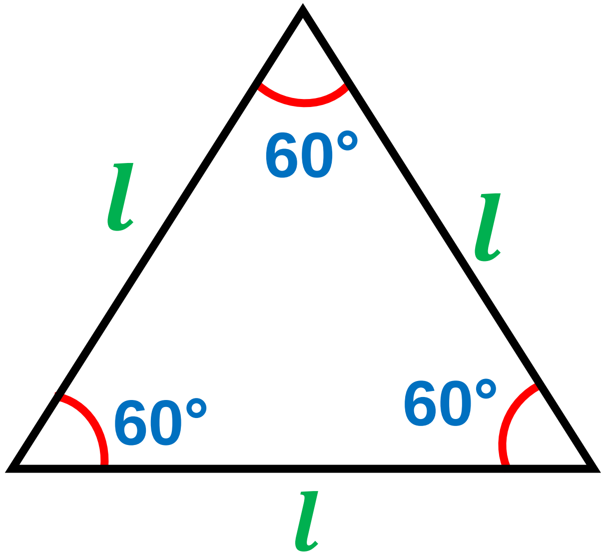
TRIÁNGULO ISÓSCELES

Tienen dos lados de igual longitud.



TRIÁNGULO EQUILÁTERO

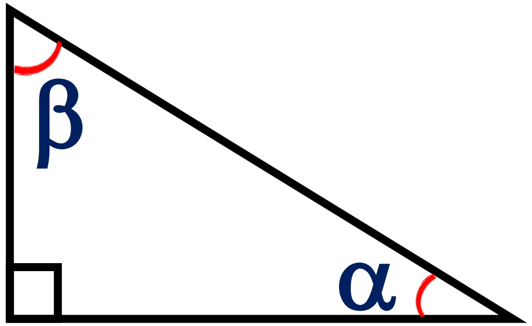
Tienen sus tres lados de igual longitud.



II. SEGÚN LAS MEDIDAS DE SUS ÁNGULOS

TRIÁNGULO RECTÁNGULO

Tiene un ángulo interno que mide 90°.

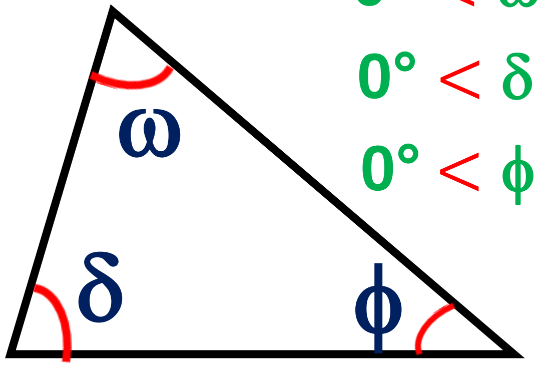


$\alpha + \beta = 90°$

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

TRIÁNG. ACUTÁNGULO

Los ángulos internos son agudos.



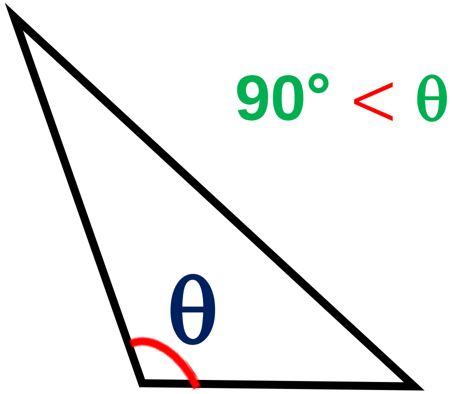
$0° < \omega < 90°$

$0° < \delta < 90°$

$0° < \phi < 90°$

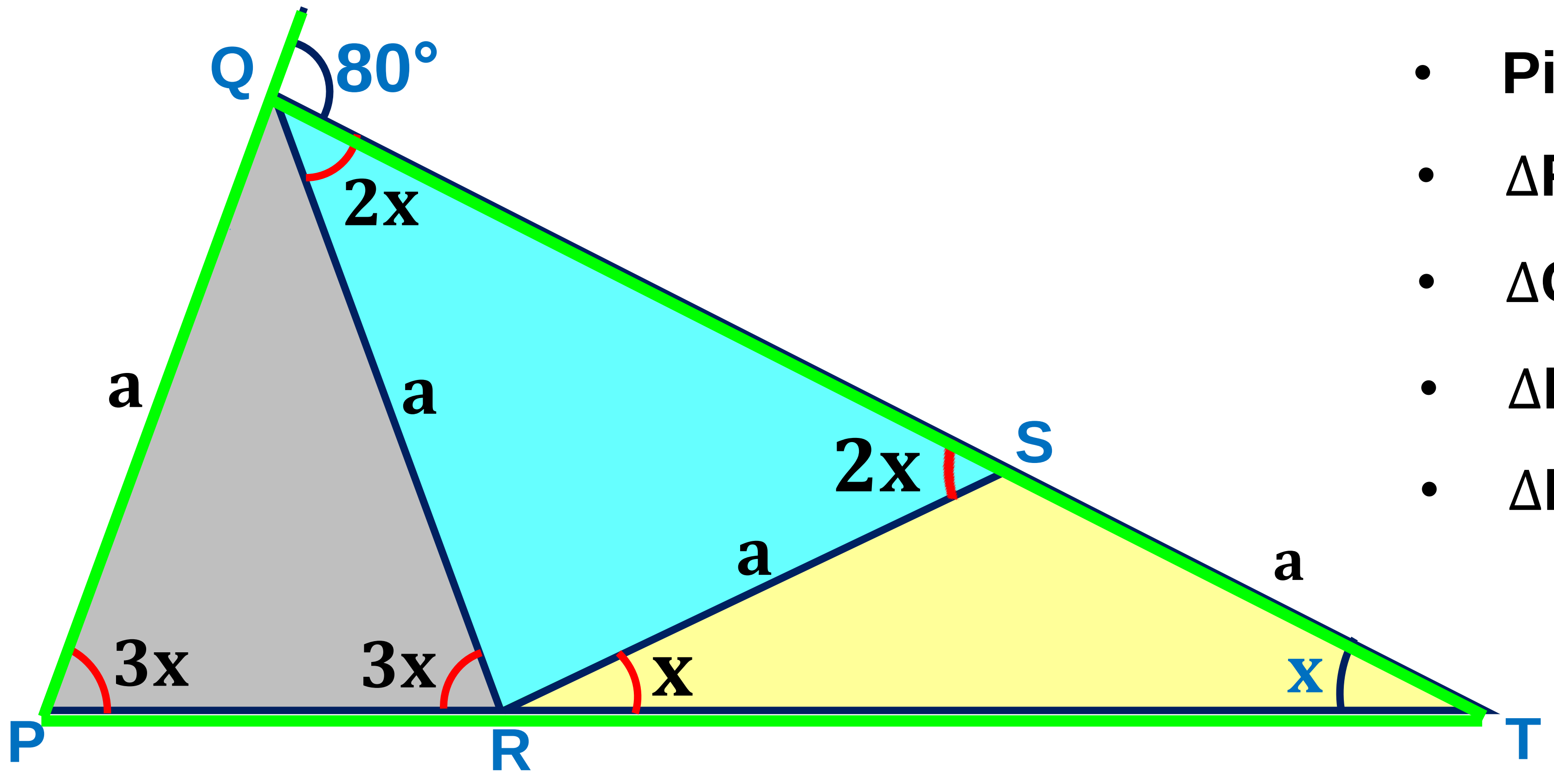
TRIÁNG. OBTUSÁNGULO

Un ángulo interno es obtuso.



$90° < \theta < 180°$

1. En la figura, halle el valor de x. Si PQ = QR = RS = ST.



Resolución

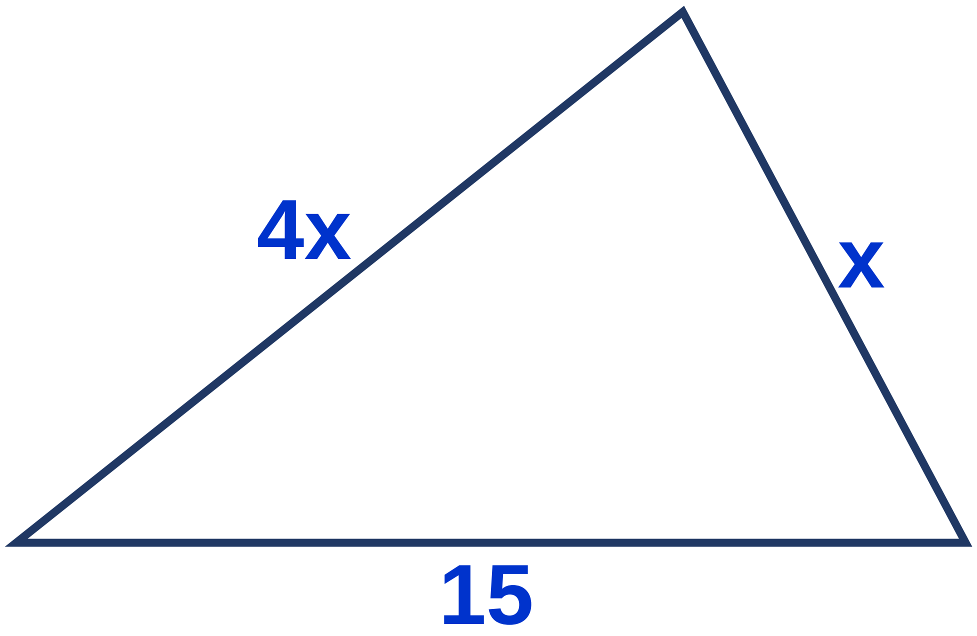
- Piden : x
- ΔRST : Isósceles
- ΔQRS : Isósceles
- ΔPQR : Isósceles
- ΔPQT :

$3x + x = 80°$

$4x = 80°$

$$\boxed{\therefore x = 20°}$$

2. En la figura, halle el valor entero que puede tomar x.



Resolución

- Piden: El valor entero de x
- Por teorema de existencia.

$$4x - x < 15 < 4x + x$$

$$3x < 15 < 5x$$

$$3x < 15 \qquad 15 < 5x$$

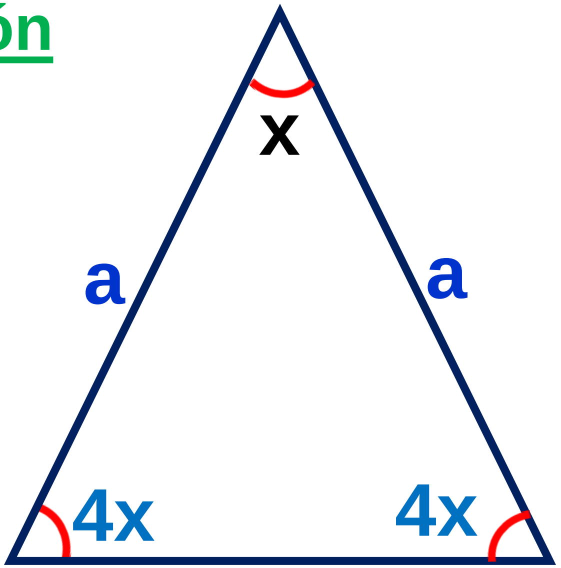
$$x < 5 \qquad 3 < x$$

$$3 < x < 5$$

$$\therefore x_{(entero)} = 4$$

3. Dos ángulos internos de un triángulo isósceles miden x y 4x. ¿Cuál es un posible valor de x?

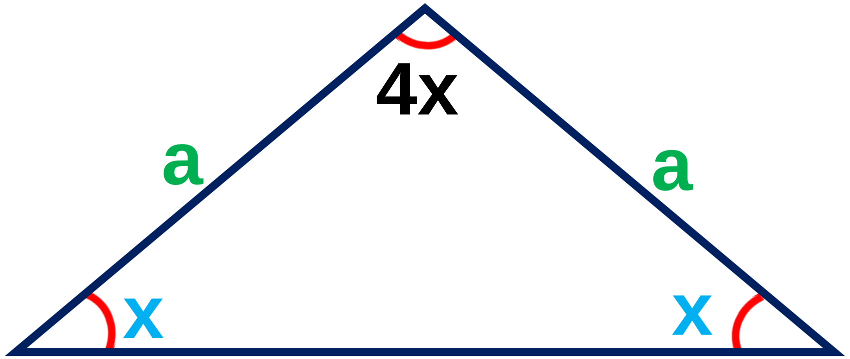
Resolución



$4x + 4x + x = 180°$

$9x = 180°$

$x = 20°$

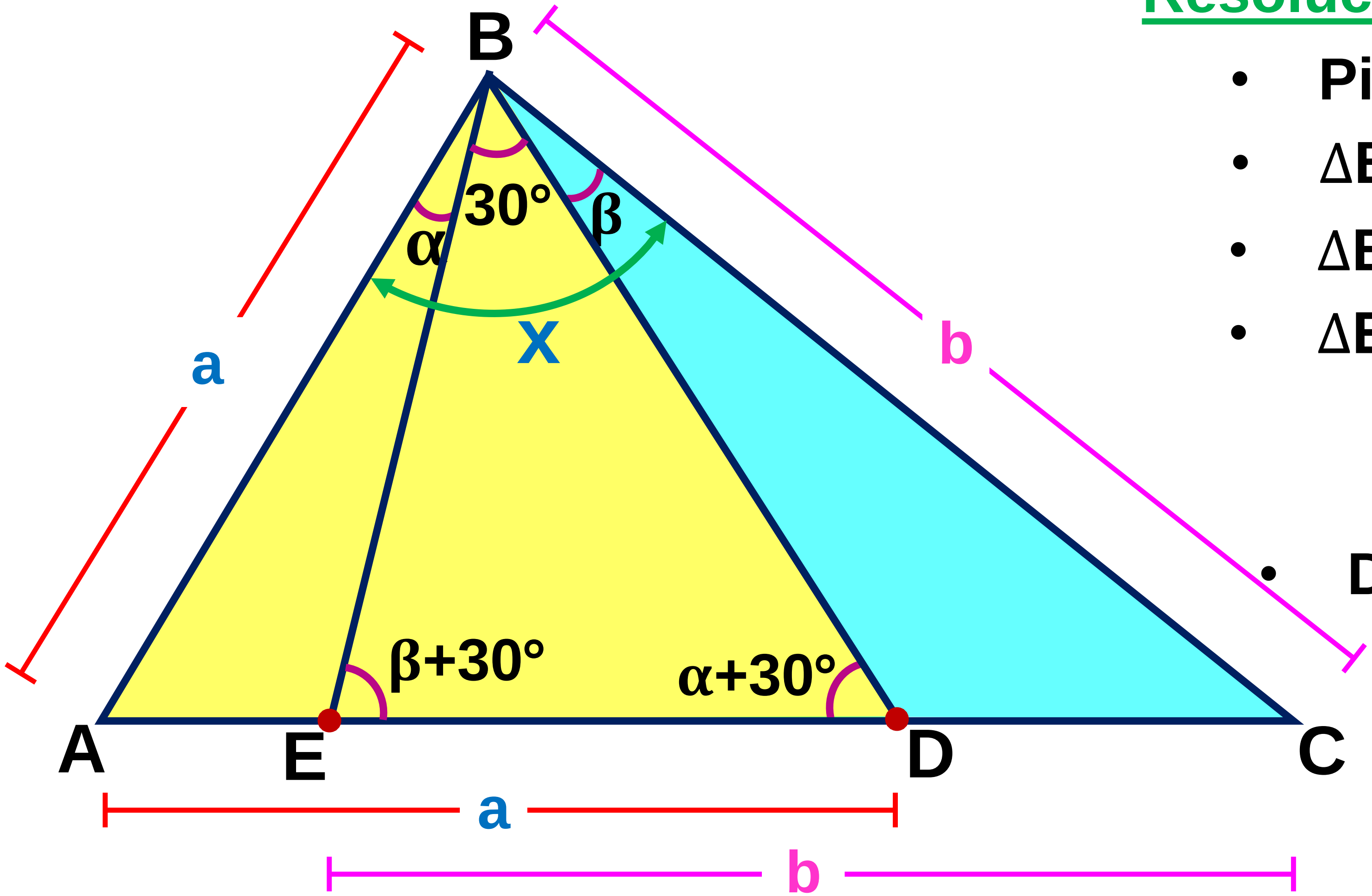


$x + x + 4x = 180°$

$6x = 180°$

$x = 30°$

4. En un triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica el punto D y en $\overline{AD}$ se ubica el punto E. Si m∡EBD = 30°, AB = AD y BC = EC; halle m∡ABC.



Resolución

- **Piden:** m∡ABC = x.
- **ΔBAD:** Isósceles
- **ΔBCE:** Isósceles
- **ΔEBD:**

$$\alpha + 30° + \beta + 30° + 30° = 180°$$

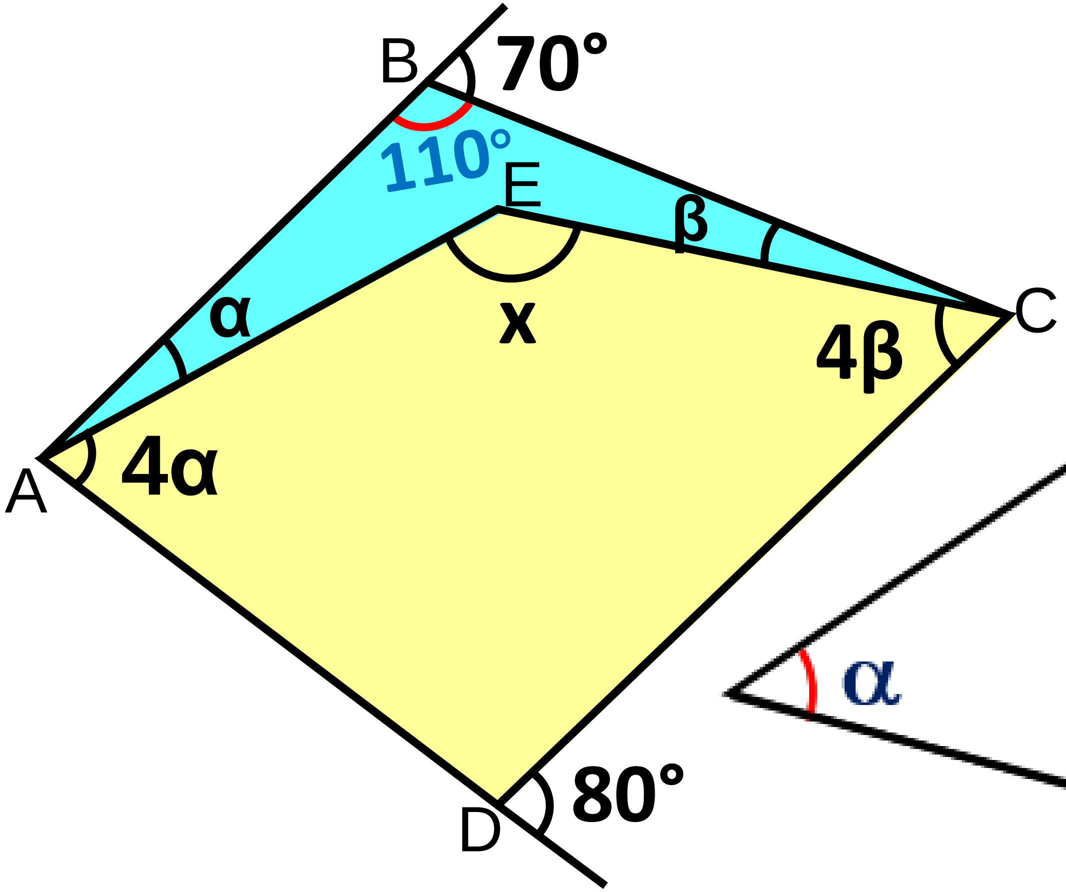
$$\alpha + \beta = 90°$$

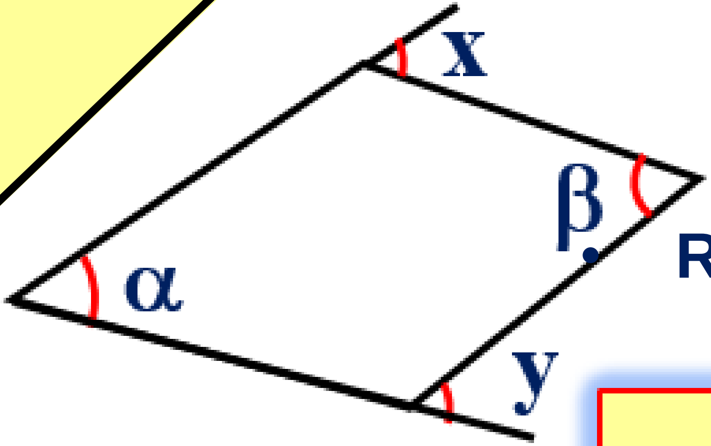
- **Del gráfico:**

$$x = \underbrace{\alpha + \beta}_{90°} + 30°$$

$$\boxed{\therefore m\measuredangle ABC = 120°}$$

5. En la figura, halle el valor de x.





$\boxed{x + y = \alpha + \beta}$

Resolución

- Piden: x
- Aplicando el teorema:

$$x = \alpha + \beta + 110° \quad \text{...(1)}$$

$$5\alpha + 5\beta = 70° + 80°$$

$$\cancel{5}\alpha + \cancel{5}\beta = 15\cancel{0}°$$

$$\alpha + \beta = 30° \quad \text{...(2)}$$

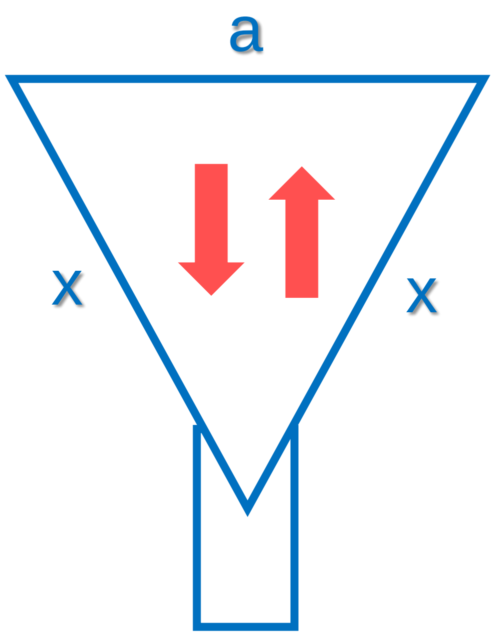
$\boxed{\alpha + \beta + \theta}$

- Reemplazando 2 en 1.

$$x = 30° + 110°$$

$\boxed{\therefore x = 140°}$

6. En la figura se muestra el diseño de una señal de tránsito, la cual se construirá con una placa metálica de forma de región triangular isósceles de perímetro 160 cm. Calcule el mínimo valor entero que pueda tomar x



Resolución

- Piden: El mínimo valor de x.
- Dato: $x + x + a = 160$

$$\boxed{a =} 160 - 2x \quad .... \ (1)$$

- Por el teorema de desigualdad triangular

$$x + x > a$$

$$\boxed{2x > a} \quad .... \ (2)$$

- Reemplazando 1 en 2.

$$2x > 160 - 2x$$

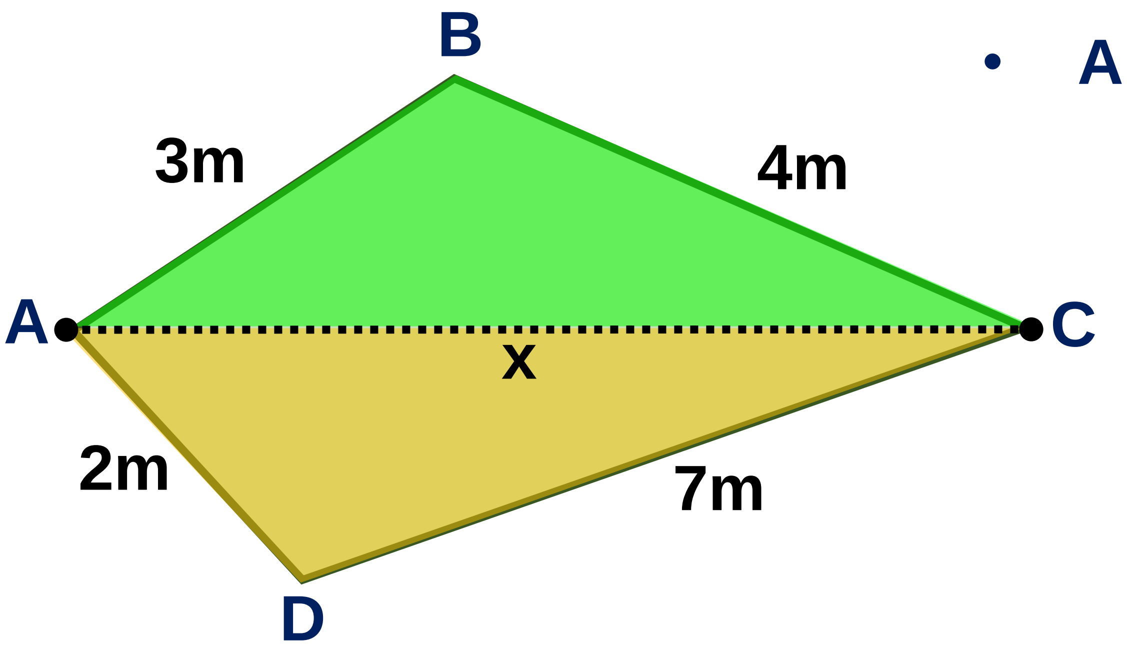
$$4x > 160$$

$$x > 40$$

$$\boxed{\therefore x_{min} = 41 \text{ cm}}$$

7. En la figura se tiene un jardín cuyas dimensiones de su contorno se muestra en cada lado. Determine el número entero de metros de malla metálica que se necesita desde A hasta C para cercar el jardín en dos partes.

Resolución



- Piden: x entero
- Aplicando el teorema de existencia.

ΔABC:

$$4 - 3 < x < 4 + 3$$

$$1 < \boxed{x < 7}$$

ΔACD:

$$7 - 2 < x < 7 + 2$$

$$\boxed{5 < x} < 9$$

$$5 < x < 7$$

$$\therefore x = 6 \text{ m}$$