

TRIGONOMETRY

Chapter 12

1st
SECONDARY

**APLICACIONES DE LAS
PROPIEDADES DE LAS RAZONES
TRIGONOMÉTRICAS DE UN
ÁNGULO AGUDO**



HELICO MOTIVACIÓN

**TRABAJAR DURO POR
ALGO QUE NO NOS
INTERESA SE LLAMA
ESTRÉS. TRABAJAR DURO
POR ALGO QUE AMAMOS
SE LLAMA PASIÓN.**

I) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS DE UN ÁNGULO AGUDO (RTR)

Para un mismo ángulo agudo α se cumple :

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = \frac{\cancel{\text{CO}}}{\cancel{\text{H}}} \cdot \frac{\cancel{\text{H}}}{\cancel{\text{CO}}} = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = \frac{\cancel{\text{CA}}}{\cancel{\text{H}}} \cdot \frac{\cancel{\text{H}}}{\cancel{\text{CA}}} = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = \frac{\cancel{\text{CO}}}{\cancel{\text{CA}}} \cdot \frac{\cancel{\text{CA}}}{\cancel{\text{CO}}} = 1$$

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = 1$$

ángulos agudos iguales

Ejemplo :

$$E = \frac{7 \text{ sen}25^\circ \text{ csc}25^\circ - 3 \text{ tan}41^\circ \text{ cot}41^\circ}{2 \text{ cos}64^\circ \text{ sec}64^\circ} = \frac{7(1) - 3(1)}{2(1)} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

II) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS AGUDOS COMPLEMENTARIOS (CO – RT)

Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

CO – RT



Ejemplos :

$$\text{sen}42^\circ = \cos48^\circ ; \text{ porque } 42^\circ + 48^\circ = 90^\circ$$

$$\tan(x + 25^\circ) = \cot(65^\circ - x) ;$$

$$\text{porque } \cancel{x} + 25^\circ + 65^\circ - \cancel{x} = 90^\circ$$

HELICO PRACTICE 1

Indique la propiedad aplicada en :

a) $\tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ = 1$

b) $\sec 2^\circ = \csc 88^\circ$

c) $\sin 21^\circ \cdot \csc 21^\circ = 1$

Recordar :

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\sin \alpha \cdot \csc \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

ángulos agudos iguales

Definición de CO - RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta$$

$$\sec \alpha = \csc \beta$$

CO - RT

Resolución

a) $\tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ = 1$

Razones Trigonométricas
Recíprocas

b) $\sec 2^\circ = \csc 88^\circ$

$$2^\circ + 88^\circ = 90^\circ$$

CO - Razones
Trigonométricas

c) $\sin 21^\circ \cdot \csc 21^\circ = 1$

Razones Trigonométricas
Recíprocas

HELICO PRACTICE 2

Calcule $A + B$, si :

$$A = 2 \operatorname{sen} 42^\circ \cdot \operatorname{csc} 42^\circ + 3 \tan 18^\circ \cdot \cot 18^\circ$$

$$B = \frac{3 \operatorname{sen} 16^\circ}{\cos 74^\circ} - \frac{\tan 19^\circ}{\cot 71^\circ}$$

Recordar :

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

ángulos agudos iguales

Definición de CO - RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta$$

$$\sec \alpha = \csc \beta$$

CO - RT

 Resolución

$$A = 2 \operatorname{sen} 42^\circ \cdot \operatorname{csc} 42^\circ + 3 \tan 18^\circ \cdot \cot 18^\circ$$

$$A = 2 (1) + 3 (1) = 2 + 3 = 5$$

$$B = \frac{3 \operatorname{sen} 16^\circ}{\cos 74^\circ} - \frac{\tan 19^\circ}{\cot 71^\circ}$$

$$B = 3 - 1 = 2$$

$$16^\circ + 74^\circ = 90^\circ \Rightarrow \operatorname{sen} 16^\circ = \cos 74^\circ$$

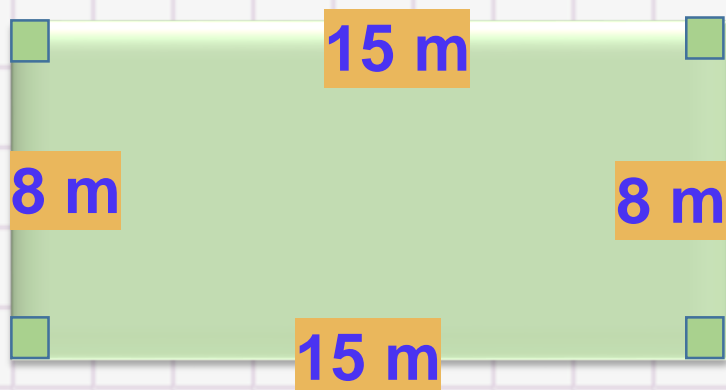
$$19^\circ + 71^\circ = 90^\circ \Rightarrow \tan 19^\circ = \cot 71^\circ$$

$$A + B = 5 + 2$$

$$\therefore A + B = 7$$

HELICO PRACTICE 3

Mi amiga María ha heredado un terreno cerca a La Molina; dicho terreno tiene forma rectangular tal como se muestra en el dibujo y sus dimensiones son las siguientes :



Ancho :
($8 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} x$)m

Largo : ($15 \tan x \cdot \cot x$)m

Determine el perímetro y área de dicho terreno.

Resolución

$$\text{Largo} = 15 (\tan x \cdot \cot x)\text{m}$$

Por RTR : $\text{Largo} = 15 (1)\text{m}$

$$\text{Largo} = 15 \text{ m}$$

$$\text{Ancho} = 8 (\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} x)\text{m}$$

Por RTR : $\text{Ancho} = 8 (1)\text{m}$

$$\text{Ancho} = 8 \text{ m}$$

$$\text{Perímetro} = 2 (15 \text{ m} + 8 \text{ m})$$

$$\text{Perímetro} = 2 (23 \text{ m}) = 46 \text{ m}$$

$$\text{Área} = (15 \text{ m}) (8 \text{ m}) = 120 \text{ m}^2$$

HELICO PRACTICE 4

Reduzca la expresión $M = (5 \operatorname{sen} 10^\circ + 3 \operatorname{cos} 80^\circ) \operatorname{csc} 10^\circ$

Resolución

$$M = (5 \operatorname{sen} 10^\circ + 3 \operatorname{cos} 80^\circ) \operatorname{csc} 10^\circ$$

$$M = (5 \operatorname{sen} 10^\circ + 3 \operatorname{sen} 10^\circ) \operatorname{csc} 10^\circ$$

$$M = 8 \operatorname{sen} 10^\circ \cdot \operatorname{csc} 10^\circ$$

$$M = 8 (1)$$

$$\therefore M = 8$$



Recordar :

Por CO - RT : $10^\circ + 80^\circ = 90^\circ$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 10^\circ = \operatorname{cos} 80^\circ$$

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1$$

$$\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tan} \alpha \cdot \operatorname{cota} \alpha = 1$$

ángulos agudos iguales

HELICO PRACTICE 5

Calcule el valor de $\text{sen}(x + 20^\circ)$; si $\text{sen}(5x + 20^\circ) \cdot \text{csc}(2x + 50^\circ) = 1$

Resolución

$$\text{sen}(5x + 20^\circ) \cdot \text{csc}(2x + 50^\circ) = 1$$

$$5x + 20^\circ = 2x + 50^\circ$$

$$3x = 30^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

Luego :

$$\begin{aligned}\text{sen}(x + 20^\circ) &= \text{sen}(10^\circ + 20^\circ) \\ &= \text{sen}30^\circ\end{aligned}$$

$$\therefore \text{sen}(x + 20^\circ) = \frac{1}{2}$$

Recordar :

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

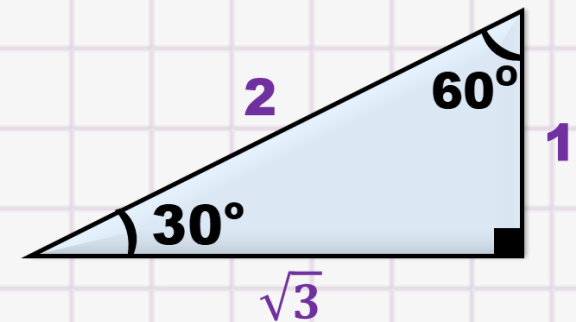


$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = 1$$

ángulos agudos iguales



$\text{sen}\alpha$	$\text{cos}\alpha$	$\text{tan}\alpha$	$\text{cot}\alpha$	$\text{sec}\alpha$	$\text{csc}\alpha$
$\frac{\text{CO}}{\text{H}}$	$\frac{\text{CA}}{\text{H}}$	$\frac{\text{CO}}{\text{CA}}$	$\frac{\text{CA}}{\text{CO}}$	$\frac{\text{H}}{\text{CA}}$	$\frac{\text{H}}{\text{CO}}$

HELICO PRACTICE 6

Álvaro y Elí (dos estudiantes del primer año de secundaria), se postularon para ser delegados del aula, obteniendo m y n votos a favor respectivamente.

Si todos los estudiantes cumplieron con votar y no se anuló ningún voto, determine cuántos estudiantes hay en el aula si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\operatorname{sen}(m + 15)^\circ \cdot \operatorname{csc}(2m + 5)^\circ = \tan 45^\circ$$

$$\operatorname{cos}(30 + n)^\circ \cdot \operatorname{sec}(2n + 10)^\circ = \cot 45^\circ$$

⌚ Resolución

$$\operatorname{sen}(m + 15)^\circ \cdot \operatorname{csc}(2m + 5)^\circ = 1$$

Por RTR : $(m + 15)^\circ = (2m + 5)^\circ$

$$15 - 5 = 2m - m$$

$$10 = m$$

$$\operatorname{cos}(30 + n)^\circ \cdot \operatorname{sec}(2n + 10)^\circ = 1$$

Por RTR : $(30 + n)^\circ = (2n + 10)^\circ$

$$30 - 10 = 2n - n$$

$$20 = n$$

Luego : $m + n = 10 + 20 = 30$

∴ Hay 30 estudiantes en el aula .

HELICO PRACTICE 7

El número de estudiantes por aula no puede exceder el valor de la variable x . Según dicha información, indique cuál es la cantidad máxima de estudiantes por aula en una institución educativa si se cumple lo siguiente :

$$\tan(2x)^\circ \cdot \cot 70^\circ = \tan 45^\circ$$

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\text{sen} \alpha \cdot \text{csc} \alpha = 1$$

$$\text{cos} \alpha \cdot \text{sec} \alpha = 1$$

$$\text{tan} \alpha \cdot \text{cot} \alpha = 1$$

ángulos agudos iguales

Resolución

Dato : $\tan(2x)^\circ \cdot \cot 70^\circ = 1$

Por RTR : $(2x)^\circ = 70^\circ$

$$x = \frac{70}{2}$$

$$x = 35$$

∴ En cada aula como máximo hay 35 estudiantes .



SACO
OLIVEROS