ALGEBRA

Chapter 15

3th
SECONDARY

Números Complejos

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

Benoit Mandelbrot publicó en 1975 su primer ensayo sobre fractales.

$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Su dimensión es fraccionaria.

Su construcción se basa en la iteración de un número complejo, es decir se hace una operación y ésta se repite con el resultado….

$z \rightarrow z^2 + C$ (conjunto de Mandelbrot).

NÚMEROS COMPLEJOS

UNIDAD IMAGINARIA (i):

$i = \sqrt{-1}$; se llama unidad imaginaria $\Rightarrow$ $\boxed{i^2 = -1}$

Ejemplos:

- $\sqrt{-9} = \sqrt{9}.\sqrt{-1} = 3i$
- $\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\sqrt{-1} = 5i$
- $\sqrt{-3} = \sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$

POTENCIAS DE (i):

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

$i^8 = 1$

$i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

Ejemplo:

$$i^{254} = \left(i^4\right)^{63} . i^2 = 1(-1) = -1$$

Teorema:

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \ \ldots\ldots + i^{4k} = 0$$

NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo z es un par ordenado de números reales a y b, escrito como:

$$z = (a, b)$$

El conjunto de números complejos se denota por $\mathbb{C}$:

$$\boxed{C := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}}$$

a es la **parte real** de z: $Re(z) : a$

b es la **parte imaginaria** de z: $Im(z) : b$

FORMA BINOMIAL DE z:

Un número complejo $z = (a, b)$ se escribe comúnmente como:

$$\boxed{z = a + bi \ / \ i = \sqrt{-1}}$$

$i = \sqrt{-1}$; se llama unidad imaginaria

a es la **parte real** de z: $Re(z): a$

b es la **parte imaginaria** de z: $Im(z): b$

$$\boxed{i = (0, 1)}$$

SACO OLIVEROS

PROPIEDADES

$$z = a + bi \; / \; i = \sqrt{-1}$$

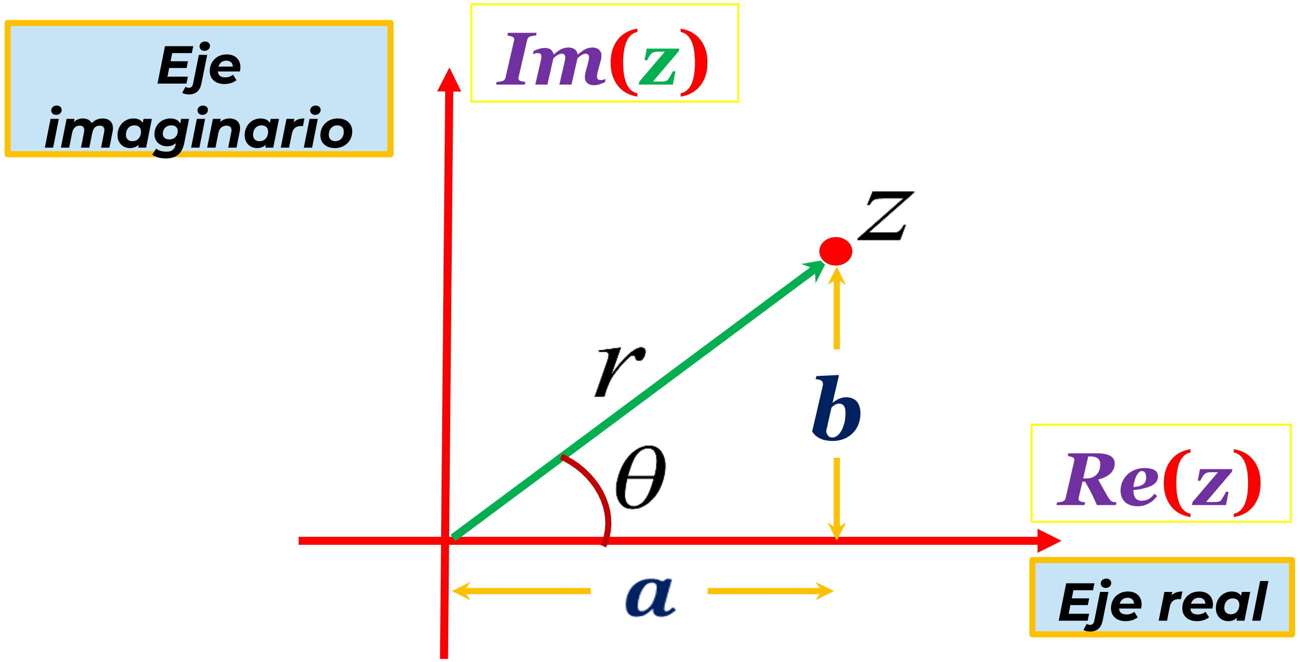
- ✓ Si $a = 0$, $b = 0$, se dice que Z es un COMPLEJO NULO ➡ $\boxed{z = (0, 0) = 0}$
- ✓ Si $a = 0$, se dice que Z es un IMAGINARIO PURO ➡ $\boxed{z = (0, b) = bi}$
- ✓ Si $b = 0$, Z se comporta como un NÚMERO REAL ➡ $\boxed{z = (a, 0) = a}$

IGUALDAD DE COMPLEJOS:

Si: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ➡ $\boxed{x_1 = x_2} \wedge \boxed{y_1 = y_2}$

EL PLANO COMPLEJO (PLANO Z, DE ARGAND O DE GAUSS):

$$z = (a, b) = a + bi \;/\; i = \sqrt{-1}$$



Módulo:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Argumento:

$$\theta = Arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

PROPIEDADES

$$z = a + bi \;/\; i = \sqrt{-1}$$

➢ **Conjugado de Z:**

$$\overline{z} = a - bi$$

➢ **Opuesto de Z:**

$$op(z) = z^{*} = -a - bi$$

OPERACIONES BÁSICAS :

Sean:

$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$

- **Adición:** $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

- **Multiplicación:**

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- **División:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di} \times \dfrac{c - di}{c - di}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$$

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 15

SACO OLIVEROS

Problema 1

Siendo $i = \sqrt{-1}$

Calcule

$$P = i^{79} + i^{99} - i^{51} + i^{82} + i^{41}$$

Recordemos:

POTENCIAS DE i:

$i^{4k} = 1$	$i^{4k+2} = -1$
$i^{4k+1} = i$	$i^{4k+3} = -i$

Resolución:

$$P = i^{79} + i^{99} - i^{51} + i^{82} + i^{41}$$

- $i^{79} = i^{76+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{99} = i^{96+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{51} = i^{48+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{82} = i^{80+2} = i^{4k+2} = -1$
- $i^{41} = i^{40+1} = i^{4k+1} = i$

$$P = (-i) + (-i) - (-i) + (-1) + (i)$$

$$P = -i - i + i - 1 + i$$

$$\boxed{\therefore \quad P = -1}$$

Problema 2

Reduzca

$$F = \frac{3i^{259} + 5i^{3593}}{20i^{4775} + 4i^{8749}}; \quad \left(i = \sqrt{-1}\right)$$

Recordemos:

POTENCIAS DE i:

$i^{4k} = 1$	$i^{4k+2} = -1$
$i^{4k+1} = i$	$i^{4k+3} = -i$

Resolución:

$$F = \frac{3i^{259} + 5i^{3593}}{20i^{4775} + 4i^{8749}}$$

- $i^{59} = i^{56+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{93} = i^{92+1} = i^{4k+1} = i$
- $i^{75} = i^{72+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{49} = i^{48+1} = i^{4k+1} = i$

$$F = \frac{3(-i) + 5(i)}{20(-i) + 4(i)} = \frac{\cancel{2i}}{\cancel{-16i}}$$

$$\boxed{\therefore \ F = -\frac{1}{8}}$$

Problema 3

Si $z_1 = 4 + 7i$

$z_2 = -2 + 3i$

$z_3 = 2 - 5i$

Efectúe

$$z = z_1 + \bar{z}_2 + z_3^*$$

Resolución:

Recordemos:

Sea: $z = a + bi$

Conjugado de z**:**

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

Opuesto de z**:**

$$\boxed{z^* = -a - bi}$$

$$z = z_1 + \bar{z}_2 + z_3^*$$

$$z = (4 + 7i) + (-2 - 3i) + (-2 + 5i)$$

$$z = \cancel{4} + 7i - \cancel{2} - 3i - \cancel{2} + 5i$$

$$\boxed{\therefore \quad z = 9i}$$

Problema 4

Si $z_1 = 5 - 2i$
$z_2 = -3 + 2i$

al efectuar

$$T = \bar{z}_1 . z_2^* + 1 + 4i$$

cuyo valor de T ***en soles es el precio de un galón de pintura para pintar*** 2 ***pizarras; ¿cuánto costará pintar*** 40 ***pizarras?***

Recordemos: Sea: $z = a + bi$

Conjugado de z*:* $\boxed{\bar{z} = a - bi}$

Opuesto de z*:* $\boxed{z^* = -a - bi}$

Resolución:

$$T = \bar{z}_1 . z_2^* + 1 + 4i$$

$$T = (5 + 2i)(3 - 2i) + 1 + 4i$$

$$T = 15 - 10i + 6i - 4\underbrace{i^2}_{(-1)} + 1 + 4i$$

$$T = 15 - \cancel{10i} + \cancel{6i} + 4 + 1 + \cancel{4i}$$

$\boxed{T = 20}$ ***(Precio de 1 galón de pintura en soles).***

Para pintar 40 pizarras se requieren 20 galones.

$\boxed{\therefore \textit{ Pintar 40 pizarras costará } 20 \times 20 = S/.400}$

Problema 5

Efectúe

$$P=\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}\quad ;\left(i=\sqrt{-1}\right)$$

Recordemos:

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (Binomio al cuadrado):

$$\boxed{(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2}$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS:

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

Resolución:

$$P=\frac{1+i}{1-i}-\frac{1-i}{1+i}$$

$$P=\frac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$P=\frac{\left(1+2i+i^2\right)-\left(1-2i+i^2\right)}{1-i^2}$$

$$P=\frac{\cancel{1}+2i+\cancel{i^2}-\cancel{1}+2i-\cancel{i^2}}{1-i^2}\qquad i^2\to -1$$

$$P=\frac{4i}{2}$$

$$\boxed{\therefore\quad P=2i}$$

Problema 6

Siendo $z_1 = 2 + i$

$$z_2 = 3 - 2i$$

Calcule

$$T = z_1^2 + z_2^2$$

luego señale Im(T)

Recordemos:

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (Binomio al cuadrado):

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

Resolución:

Cálculo de z_1^2:

$$z_1^2 = (2 + i)^2$$

$$z_1^2 = 4 + 4i + i^2$$

$$z_1^2 = 4 + 4i - 1$$

$$\boxed{z_1^2 = 3 + 4i}$$

Cálculo de z_2^2:

$$z_2^2 = (3 - 2i)^2$$

$$z_2^2 = 9 - 12i + 4i^2$$

$$z_2^2 = 9 - 12i - 4$$

$$\boxed{z_2^2 = 5 - 12i}$$

$$T = z_1^2 + z_2^2 \Rightarrow T = 3 + 4i + 5 - 12i$$

$$\boxed{T = 8 - 8i}$$

Im(T)= -8

SACO OLIVEROS

Problema 7

Un docente de la facultad de sistemas hace una encuesta a sus estudiantes acerca de que país tiene la velocidad más rápida de internet si las alternativas fueron

N°	Países
1	Rusia
2	EE.UU
3	Corea del sur

Al finalizar la clase el docente menciona que la respuesta se obtienen al calcular $|z|$ -2, sabiendo que $Z = \frac{5(1+i)}{2-i} + 2 + i$, ¿Cuál es el país con la velocidad más rápida de internet?

Resolución:

$$z = \frac{5(1+i)}{2-i} + 2 + i$$

$$z = \frac{5(1+i)}{(2-i)} \cdot \frac{(2+i)}{(2+i)} + 2 + i$$

$$z = \frac{5(2+i+2i+i^2)}{4-i^2} + 2 + i$$

$$z = \frac{5(2+i+2i-1)}{4+1} + 2 + i$$

$$z = \frac{\cancel{5}(1+3i)}{\cancel{5}} + 2 + i$$

$$z = 1 + 3i + 2 + i$$

$$\boxed{z = 3 + 4i}$$

Recordemos: ***MÓDULO DE Z:***

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Nos piden: $|z| - 2$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} - 2$$

$$|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} - 2$$

$$|z| = \sqrt{25} - 2$$

Rpta: Corea del Sur