ARITHMETIC

Tomo IV

CHAPTER 11

2nd

SECONDARY

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

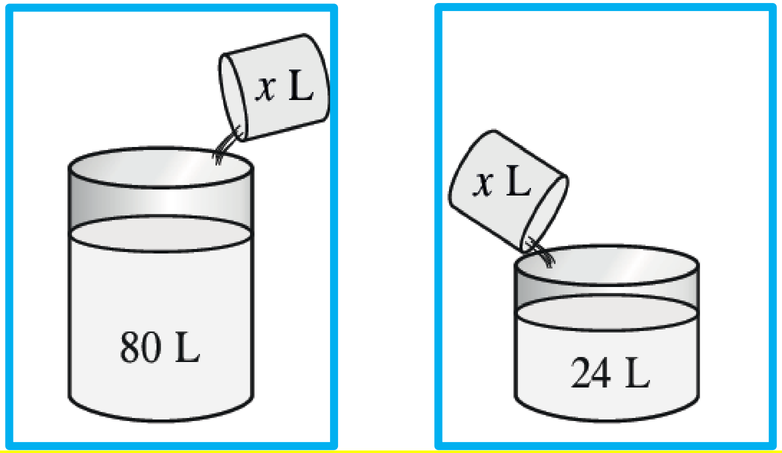
Euclides de Alejandría: Matemático griego clásico por excelencia y su nombre aún es, quizá, el más popular en la larga y desarrollada historia de las matemáticas. Nació en el año 330 a.C en la ciudad de Tiro, Grecia y murió en el año 275 a.C en Alejandría.
Euclides es considerado uno de los matemáticos más famosos de la antigüedad para acceder al conocimiento de las ciencias exactas. Como resultado de esto obtuvo el celebre tratado "Los elementos", el cual consta de trece volúmenes y es considerado como una de las obras más distinguidas de la literatura universal.

HELICOTHEORY

1

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Es necesario llenar dos cilindros de agua de 80 L y 24 L, respectivamente. ¿Cuál es la mayor capacidad del balde que podremos utilizar para llenarlas con cantidades exactas de baldes?



Por condición del problema, se sabe que x es divisor de 80 y 24

$\therefore$ Mayor capacidad $=$ 8 litros

Escribimos los divisores de 24 y 80

D(24) = {1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24}

D(80) = {1; 2; 4; 5; 8; 10; 16; 20; 40; 80}

Divisores comunes: 1; 2; 4; 8

Mayor divisor común: 8

A este valor se le conoce como MCD

HELICOTHEORY

2

MÉTODOS PARA CALCULAR EL MCD :

a) Descomposición simultánea:

Halle el MCD de 360 y 240

360 - 240	2	
180 - 120	2	
90 - 60	2	x
45 - 30	3	
15 - 10	5	
3 - 2		

MCD(360; 240) = $2^3 x 3 x 5$

MCD(360; 240) = 120

OBSERVACIÓN

$$\left.\begin{array}{l} 360 = 120 \times 3 \\ 240 = 120 \times 2 \end{array}\right\} \text{PESI}$$

En general si:

MCD(A; B) = d

$$\left.\begin{array}{l} A = d \times p \\ B = d \times q \end{array}\right\} \text{PESI}$$

HELICOTHEORY

OBSERVACIÓN

Dado un conjunto de números, cualquiera de ellos es múltiplo de su MCD

Del ejemplo:

$24 = 8 \times 3 \longrightarrow 24 = \dot{8}$

$80 = 8 \times 10 \longrightarrow 80 = \dot{8}$

En general:

$$CD_{\text{comunes de A y B}} = CD_{\text{MCD(A; B)}}$$

Los divisores comunes de un conjunto de números son también los divisores de MCD de dichos números

$8: \underbrace{1; 2; 4; 8}_{\text{Divisores}}$

$MCD(24; 80) = 8$

b) Descomposición canónica: Halle el MCD de 360 y 240

1. Descomponemos canónicamente los números:

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

$$360 = 2^3 x\, 3^2 x\, 5$$

240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$240 = 2^4 x\, 3\, x\, 5$$

2. Se toman los factores comunes con menor exponente:

$$\text{MCD}(360;\ 240) = 2^3 x\, 3\, x\, 5$$

$$\text{MCD}(360;\ 240) = 120$$

c) Algoritmo de Euclides:

Halle el MCD de 70 y 15

$$\begin{array}{r|l} 70 & 15 \\ \hline 10 & 4 \end{array} \longrightarrow \text{MCD}(70;\ 15) = \text{MCD}(15;\ 10)$$

$$\begin{array}{r|l} 15 & 10 \\ \hline 5 & 1 \end{array} \longrightarrow \text{MCD}(15;\ 10) = \text{MCD}(10;\ 5)$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 5 \\ \hline 0 & 2 \end{array} \longrightarrow \text{MCD}(10;\ 5) = 5$$

El proceso termina cuando la división es exacta

Cocientes sucesivos	4	1	2
70	15	10	5 →
Residuos sucesivos	10	5	0

MCD(70; 15) = 5

Esquema del algoritmo de Euclides

3 PROPIEDADES:

1. Si dos números enteros positivos son primos entre si, entonces se cumple que el MCD es igual a 1.
Si: A y B son **PESI** $\rightarrow$ MCD(A; B)=1

2. Si un número entero es múltiplo de otro número positivo, entonces el MCD de ambos será igual al menor.
Si: A = $\dot{\mathrm{B}}$, A y B $\in \mathbb{Z}^{+} \rightarrow$ MCD(A;B)=B

Ejemplo:

Si 6 y 25 son PESI, entonces

MCD(6; 25) = 1

Ejemplo:

Si 18 = $\dot{6}$, entonces

MCD(18; 6) = 6

3. Si dos números enteros positivos se multiplican o se dividen por un mismo número, entonces el MCD queda multiplicado o dividido, respectivamente, por dicho número.

4. El MCD de un conjunto de números no varia si dos o más de ellos se les reemplaza por su MCD.

Ejemplo:

Si MCD(12; 8) = 4 , entonces

$$\text{MCD}(12 \times 3;\ 8 \times 3) = 4 \times 3$$

Si MCD(36; 24) = 12 , entonces

$$\text{MCD}(36 \div 4;\ 24 \div 4) = 12 \div 4$$

MCD(9; 6) = 3

Sea MCD(A, B, C, D) = d

→ MCD[MCD(A, B), MCD(C, D)] = d

→ MCD[MCD(A, B, C), D] = d

Así también recordar

Si MCD(A, B) = P

MCD(C, D) = Q

→ MCD(A, B, C, D) = MCD(P, Q)

HELICOPRACTICE

1. Si A = MCD (600; 480; 840) B = MCD (700; 280; 420)
   Calcula A + B.

Resolución

600 -	480 -	840	2
300 -	240 -	420	2
150 -	120 -	210	2
75 -	60 -	105	3
25 -	20 -	35	5
5 -	4 -	7	

PESI

700 -	280 -	420	2
350 -	140 -	210	2
175 -	70 -	105	5
35 -	14 -	21	7
5 -	2 -	3	

PESI

MCD(600; 480; 240 $2^3 x\, 3\, x\, 5$

A=120

MCD(700; 280; 420) $2^2 x\, 5\, x\, 7$

B=140

$\boxed{A + B = 260}$

HELICOPRACTICE

2. **¿Cuántos divisores comunes tienen los números 210 y 330?**

Resolución

$$\begin{array}{rcl|l} 210 & - & 330 & 2 \\ 105 & - & 165 & 3 \\ 35 & - & 55 & 5 \\ 7 & - & 11 & \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} \times$$

$\underbrace{7 \;-\; 11}_{\text{PESI}}$

PESI

$$MCD(210; 330) = 2^{1} x\, 3^{1} x\, 5^{1}$$

$$\boxed{CD_{\text{comunes de A y B}} = CD_{MCD(A;\,B)}}$$

$$CD_{MCD(210;\,330)} = (1+1)(1+1)(1+1)$$

$$CD_{MCD(210;\,330)} = (2)(2)(2) = 8$$

$$\Rightarrow \quad CD_{\text{comunes de 210 y 330}} = 8$$

$$\boxed{\therefore \text{ Tienen } 8 \text{ divisores comunes}}$$

HELICOPRACTICE

3. **Si A = $2^2 \times 3 \times 5$ y B = 2×3^2, calcule MCD(A, B).**

Resolución :

Tomamos los factores comunes con el menor exponente(METODO DE DESCOMPOSICION CANÓNICA)

$$A = 2^2 \times 3 \times 5 \qquad B = 2 \times 3^2$$

$$\rightarrow \quad \text{MCD}(A; B) = 2 \times 3$$

$$\boxed{\therefore\ MCD\ es\ 6}$$

HELICOPRACTICE

4. Si el MCD de 10k y 14k es 24, calcula k^2.

Resolución :

$$\begin{array}{cc|c} 10K & 14K & K \\ 10 & 14 & 2 \\ \underbrace{5 \quad - \quad 7}_{PESI} & & \end{array}$$

Del dato: MCD(10K,14K) = 24

Igualamos: 2K = 24

k=12

$\boxed{\therefore\ k^2 = 144}$

→ MCD(10k; 14k) = 2K

HELICOPRACTICE

5. **Para llenar con agua tres envases de 120, 420 y 240 litros se necesitan un balde de máxima capacidad. ¿Cuál será la capacidad del balde si en todos los casos los envases se llenaron al vaciar totalmente el último balde?**

Resolución :

120	420	240	10
12	42	24	2
6	21	12	3
2	7	4	

$\underbrace{2 - 7 - 4}_{\text{cantidad de baldes}}$

cantidad de baldes

$MCD(A; B) = 10 \times 2 \times 3$

$\underbrace{MCD(A; B)}_{\text{Máxima capacidad de cada balde}} = 60$

Máxima capacidad de cada balde

$\therefore$ **60 litros es la máxima capacidad**

HELICOPRACTICE

6. El argentino Miguel Najdorf jugó contra $\overline{(b-3)a}$ oponentes en una partida simultánea de ajedrez con los ojos vendados en 1947. ¿Contra cuantos oponentes jugó Miguel si el MCD de $\overline{31a}$ y $\overline{5b6}$ es 9?

Resolución:

$$MCD(\overline{31a}\,;\,\overline{5b6}) = 9$$

$$\overline{31a} = \dot{9}$$
$$3 + 1 + a = \dot{9}$$
$$4 + a = \dot{9}$$
$$a = 5$$

$$\overline{5b6} = \dot{9}$$
$$5 + b + 6 = \dot{9}$$
$$11 + b = \dot{9}$$
$$b = 7$$

$$\overline{(b-3)a} = \overline{(7-3)5} = 45$$

$$\boxed{\therefore\ 45}$$

HELICOPRACTICE

7. Al preguntar Alejandro a Sergio por su edad, este le contesta: “Tengo tantos años como la mayor cantidad entre la cual se puede dividir 72 y 96 de manera exacta”. ¿Qué edad tendrá Sergio dentro de 7 años?

Resolución :

La mayor cantidad entre la cual se puede dividir 72 y 96 de manera exacta es igual al MCD de 72 y 96

$$\begin{array}{c|c} 72 - 96 & 6 \\ 12 - 16 & 2 \\ 6 - 8 & 2 \\ \underbrace{3 - 4}_{\text{PESI}} & \end{array}$$

$$MCD(A; B) = 6 \times 2 \times 2$$

$$MCD(A; B) = 24$$

Sergio tiene 24 años

$\boxed{\therefore \text{ tendrá } 24 + 7 = 31 \text{ años}}$