

# TRIGONOMETRY

## Chapter 09

**4th**  
SECONDARY

### RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL I

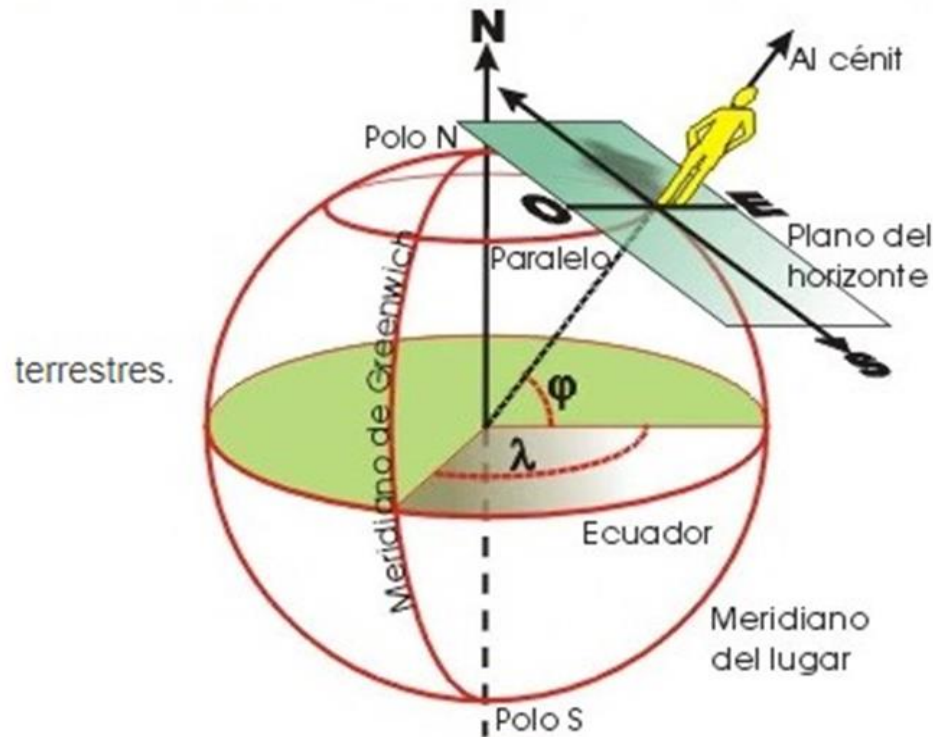


# HELICO - MOTIVACIÓN

## COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Determinan la posición del observador sobre la superficie terrestre. Aunque sabemos que la Tierra está achatada por los polos vamos a suponer, en primera aproximación, que es una esfera perfecta. Un punto cualquiera de la esfera terrestre queda determinado por dos coordenadas geográficas: la longitud y la latitud.

Cualquier plano paralelo al del ecuador, comprendido entre los polos norte, N, y sur, S, corta a la esfera en una circunferencia denominada paralelo. Las infinitas esferas que pasan por los polos N y S son los meridianos



# ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

## DEFINICIÓN :

Es aquel ángulo trigonométrico ubicado sobre el plano cartesiano, donde :

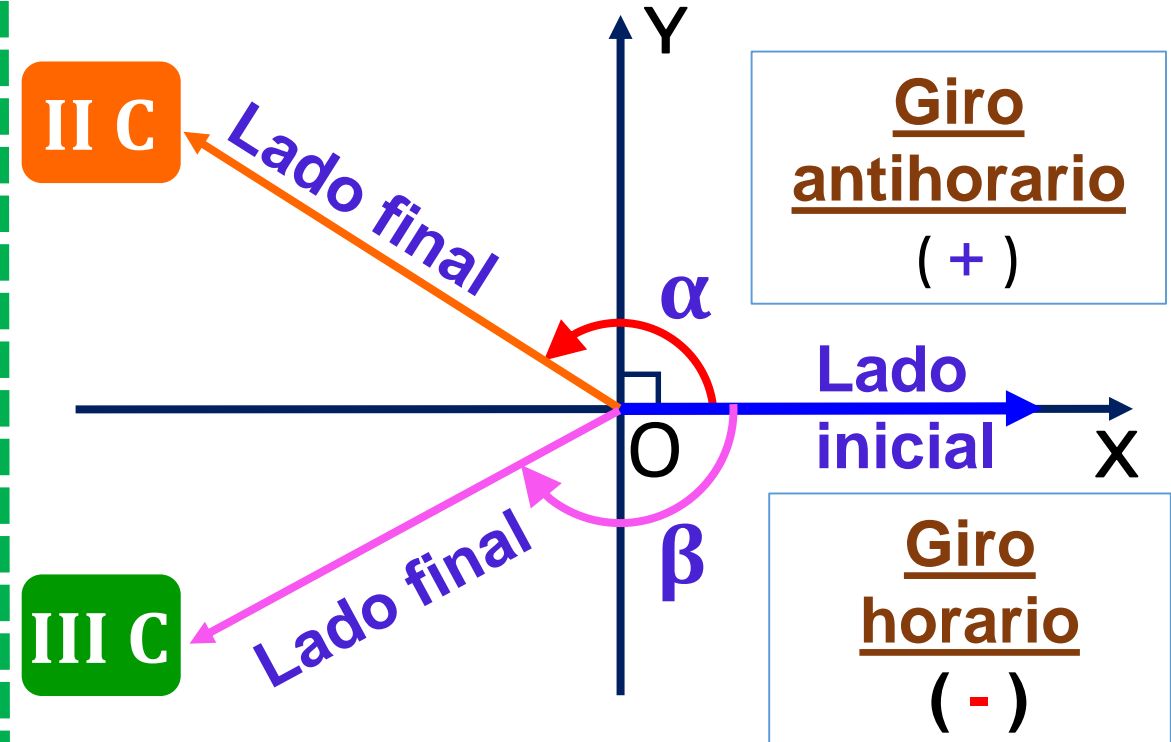
- **Vértice** : Origen de coordenadas.
- **Lado inicial** : Semieje X positivo.
- **Lado final** : Se ubica en cualquier cuadrante o semieje del plano.



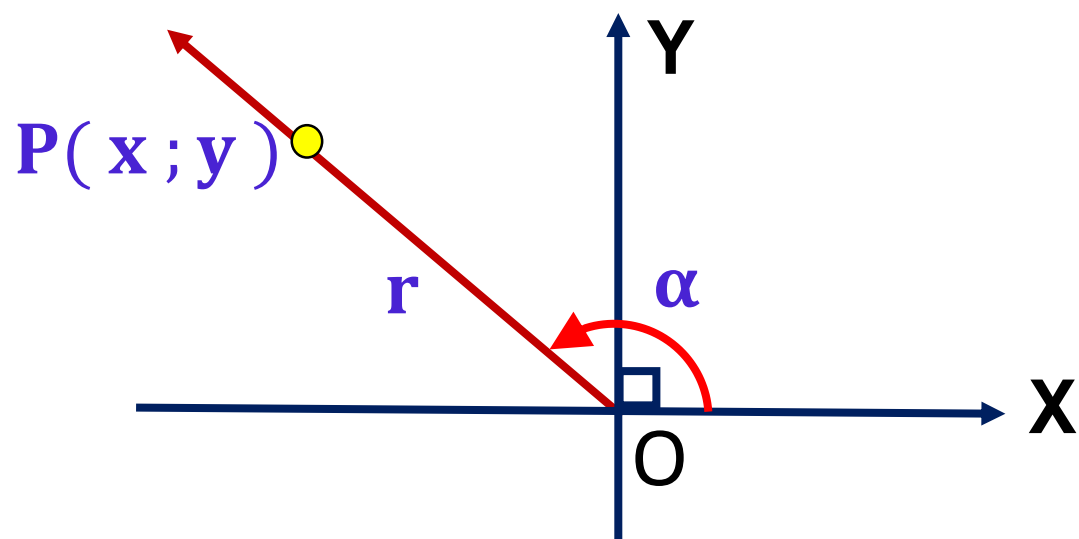
## OBSERVACIÓN :

La posición del lado final de un ángulo en posición normal, determina el cuadrante o semieje al cual pertenece dicho ángulo .

## Representación gráfica :



# RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL



$\alpha$  : ángulo en posición normal .

$x$  : abscisa del punto P .

$y$  : ordenada del punto P .

$r$  : radio vector del punto P.

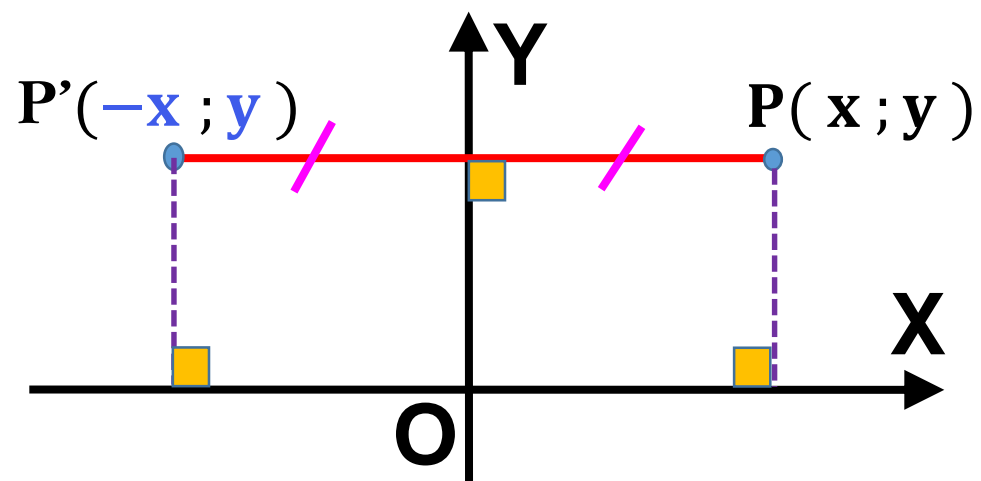
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (r > 0)$$

## DEFINICIONES :

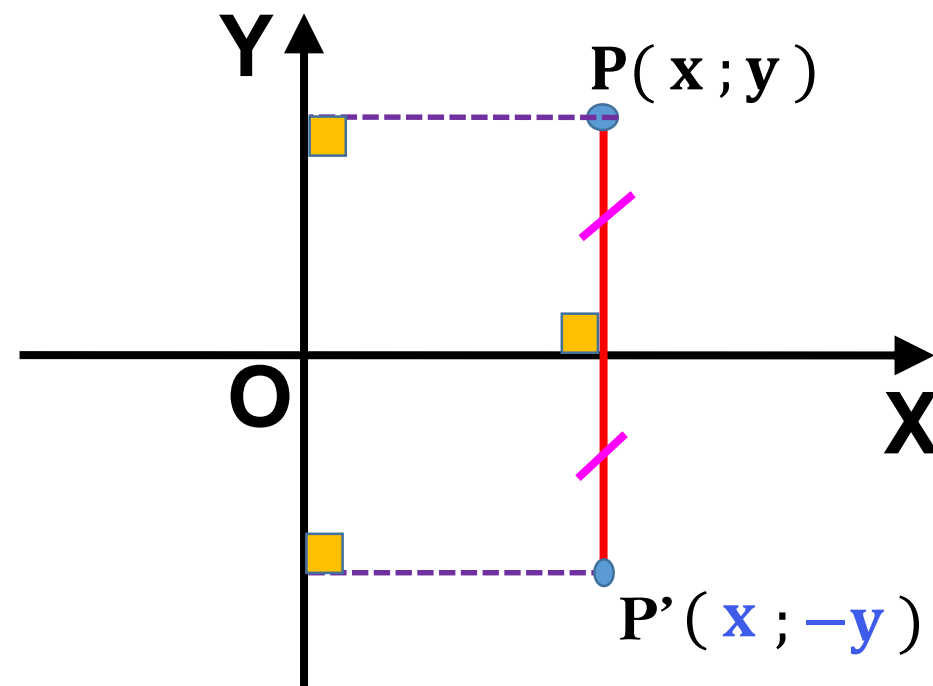
$\text{sen} \alpha$	$\text{cos} \alpha$	$\text{tan} \alpha$	$\text{cot} \alpha$	$\text{sec} \alpha$	$\text{csc} \alpha$
$\frac{y}{r}$	$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{r}{x}$	$\frac{r}{y}$

# PUNTOS SIMÉTRICOS EN EL PLANO CARTESIANO

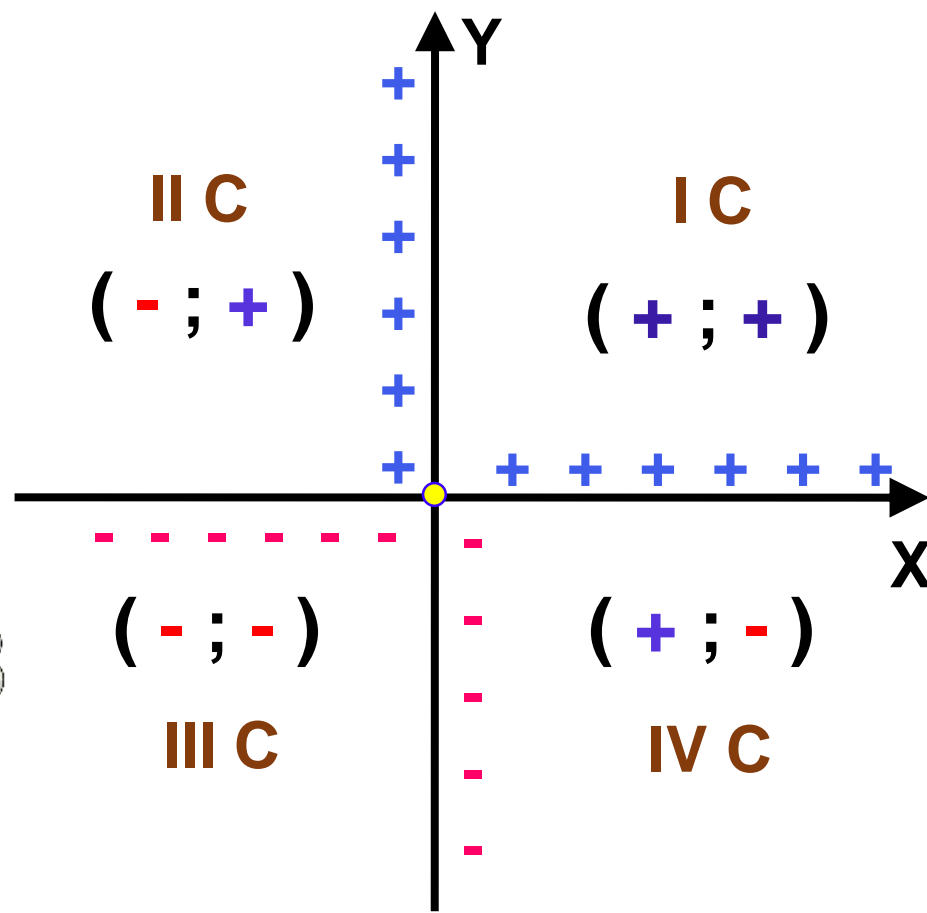
Simetría respecto al eje Y :



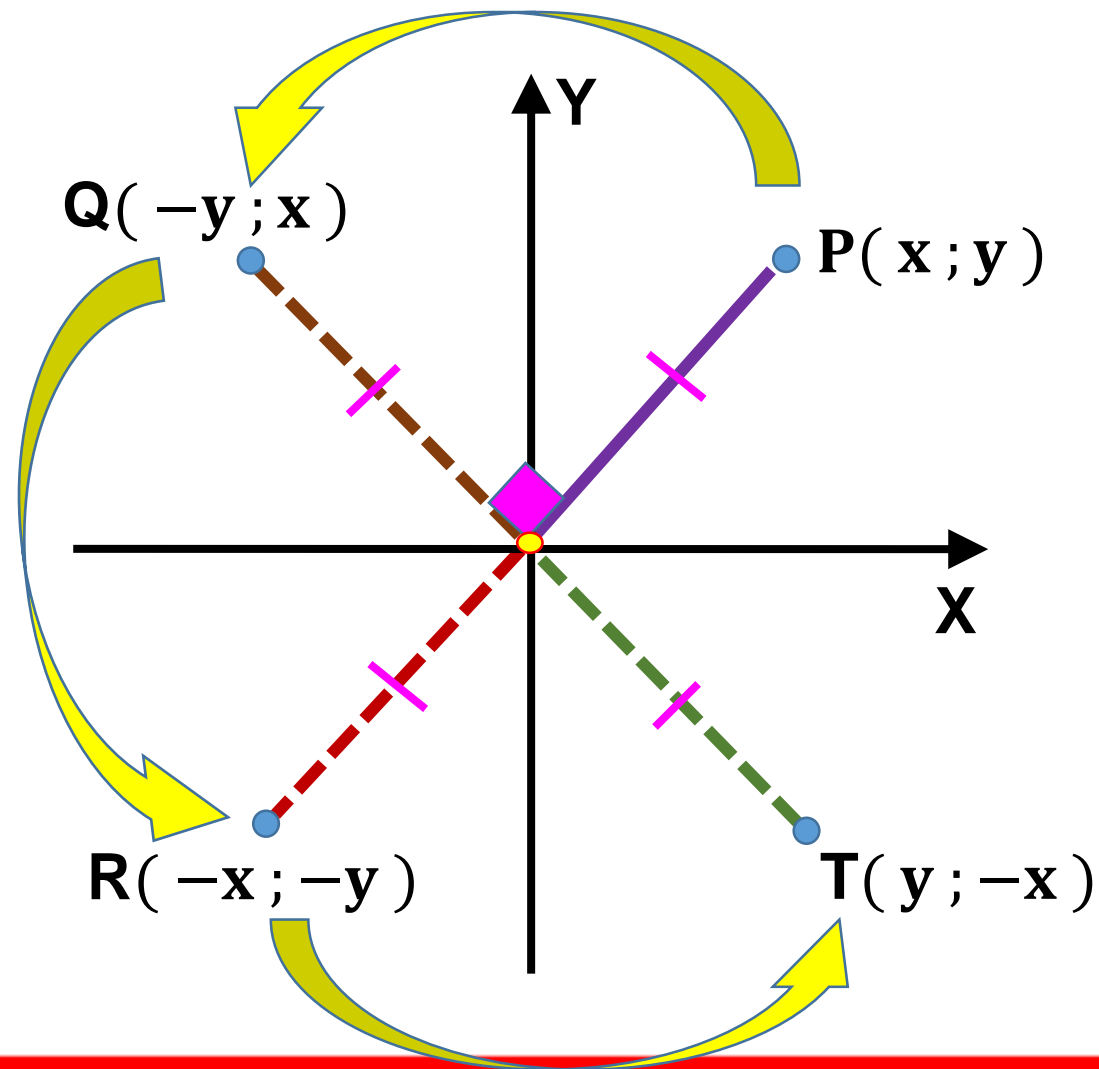
Simetría respecto al eje X :



## SIGNOS DE COORDENADAS :



## GIROS ORTOGONALES :



# HELICO PRACTICE 1

Si el punto  $P(-1 ; 3)$  pertenece al lado final de un ángulo  $\theta$  en posición normal, halle el valor de  $G = \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$

**Recordamos :**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

## RESOLUCIÓN

Según dato :  $x = -1$  ;  $y = 3$

$$\begin{aligned} \rightarrow r &= \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} \\ r &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

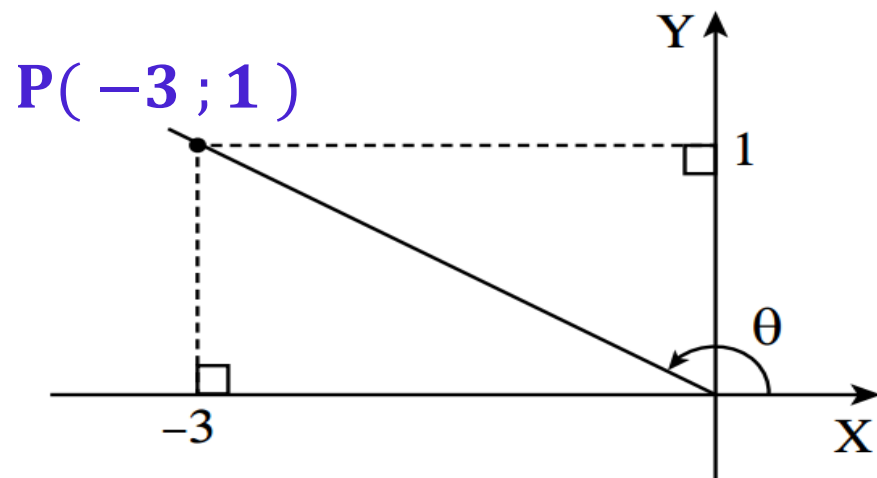
Luego :  $G = \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$

$$G = \left( \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \left( \frac{-1}{\sqrt{10}} \right)$$

$$\therefore G = -\frac{3}{10}$$

# HELICO PRACTICE 2

A partir del gráfico, obtenga el valor de  $Q = \csc^2 \theta - 3 \tan \theta + \cot \theta$



**Recordamos :**

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y}$$

## RESOLUCIÓN

Según gráfico :  $x = -3$  ;  $y = 1$

$$\begin{aligned} \rightarrow r &= \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} \\ r &= \sqrt{10} \end{aligned}$$

Luego :

$$Q = \csc^2 \theta - 3 \tan \theta + \cot \theta$$

$$Q = \left( \frac{\sqrt{10}}{1} \right)^2 - 3 \left( \frac{1}{-3} \right) + \left( \frac{-3}{1} \right)$$

$$Q = 10 + 1 - 3$$

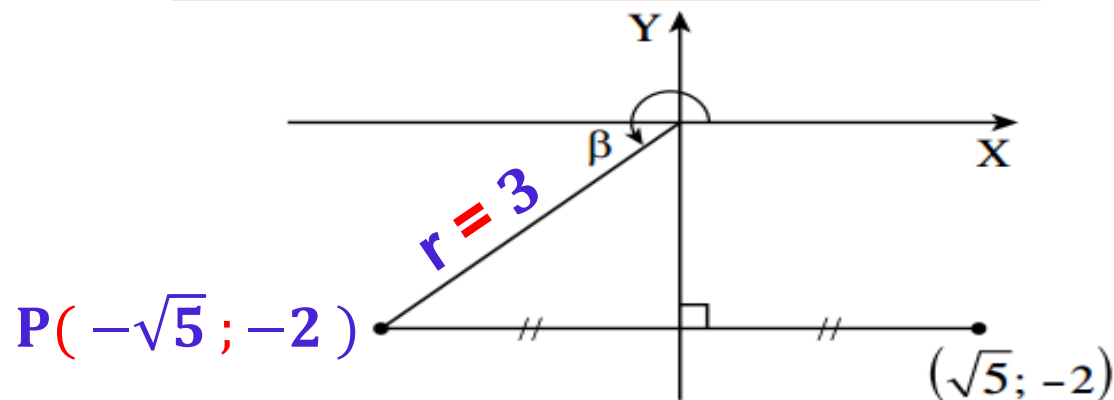
$$\therefore Q = 8$$



# HELICO PRACTICE 3

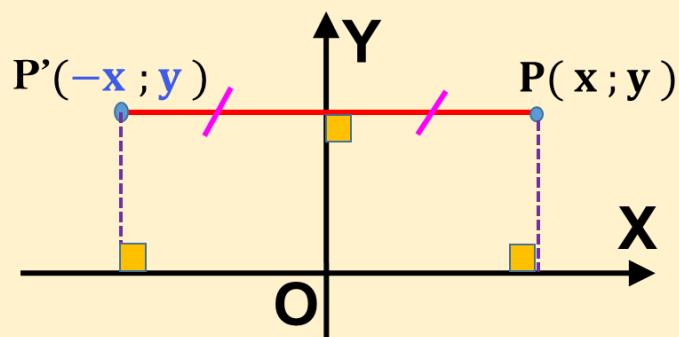
A partir del gráfico, efectúe

$$P = \sqrt{5} \cos \beta - \operatorname{sen} \beta$$



**Recordamos :**

Simetría respecto al eje Y :



$$\cos \beta = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{y}{r}$$

## RESOLUCIÓN

Según gráfico :  $x = -\sqrt{5}$  ;  $y = -2$

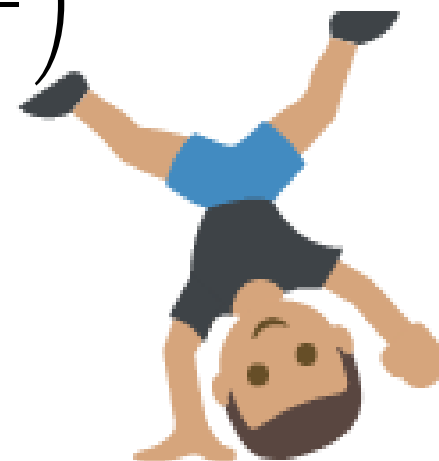
$$r = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (-2)^2} \rightarrow r = 3$$

Luego :  $P = \sqrt{5} \cos \beta - \operatorname{sen} \beta$

$$P = \sqrt{5} \left( \frac{-\sqrt{5}}{3} \right) - \left( \frac{-2}{3} \right)$$

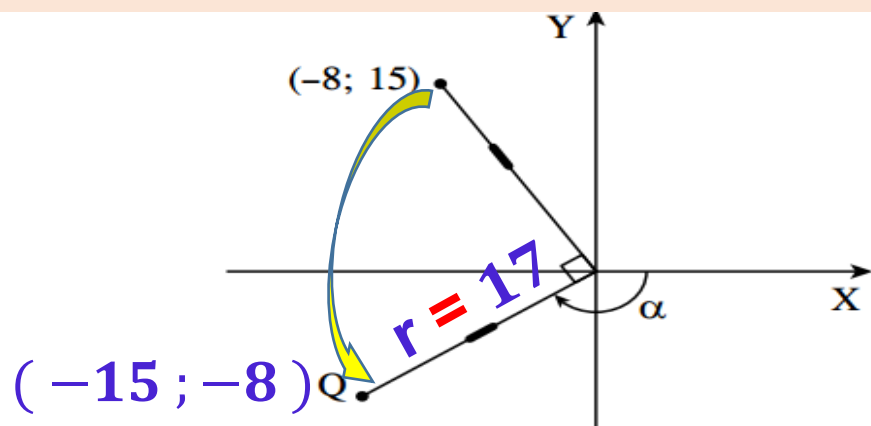
$$P = \frac{-5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-3}{3}$$

$$\therefore P = -1$$

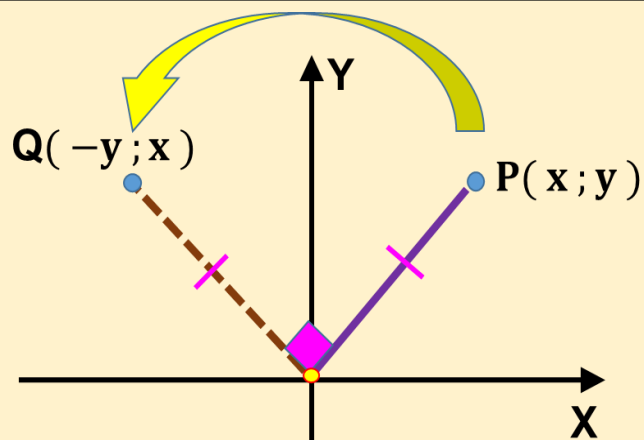


# HELICO PRACTICE 4

En el gráfico se muestra el ángulo  $\alpha$  en posición normal. - Obtenga el valor de  $W = \csc\alpha + \cot\alpha$



**Giros ortogonales :**



$$\csc\alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}$$

## RESOLUCIÓN

Según gráfico :  $x = -15$ ;  $y = -8$

$$r = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} \rightarrow r = 17$$

Luego :  $W = \csc\alpha + \cot\alpha$

$$W = \frac{17}{-8} + \frac{-15}{-8}$$

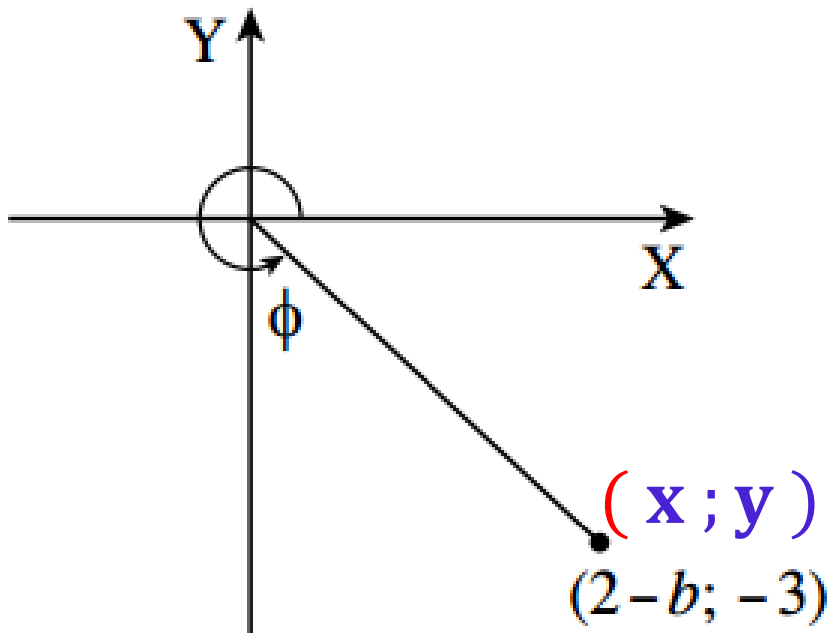
$$W = \frac{2}{-8}$$

$$\therefore W = -\frac{1}{4}$$



# HELICO PRACTICE 5

Del gráfico, si  $\tan\phi = -\frac{3}{4}$ ,  
efectúe  $R = b^3 - b^2$ .



**Recordamos :**

$$\tan\phi = \frac{y}{x}$$

## RESOLUCIÓN

Según gráfico :  $x = 2 - b$  ;  $y = -3$

Según dato :  $\tan\phi = -\frac{3}{4}$ ,

Luego :  $\frac{-3}{2 - b} = \frac{-3}{4}$ ,

$$2 - b = 4 \quad \rightarrow \quad b = -2$$

Calculamos R :

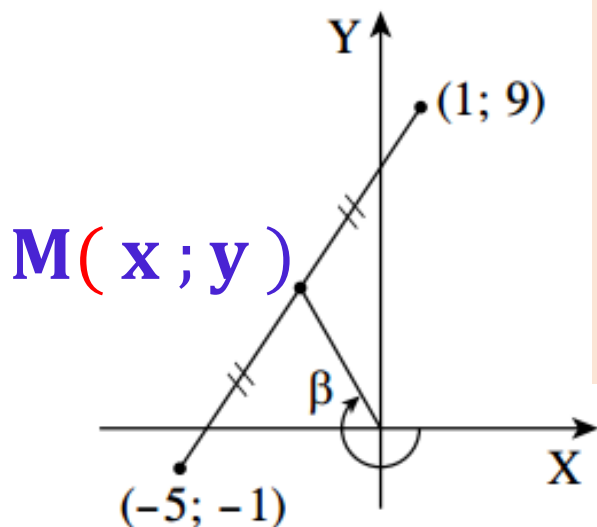
$$R = (-2)^3 - (-2)^2$$

$$R = (-8) - (4) = -8 - 4$$

$$\therefore R = -12$$

# HELICO PRACTICE 6

Eithan ha rendido sus exámenes de Estadística, Economía y Física obteniendo las notas A, B y C, respectivamente.- Si para conocer dichas notas se tienen que resolver los siguientes ejercicios :



$$A = 4\sqrt{20} \operatorname{sen}\beta$$

$$B = 5 - \sqrt{20} \operatorname{sec}\beta$$

$$C = 6 - 6 \tan\beta$$

¿ En cuál de los cursos obtuvo la mayor calificación ?

## RESOLUCIÓN

Calculamos coordenadas de M :

$$x = \frac{-5 + 1}{2} = -2 \quad \text{---} \quad y = \frac{-1 + 9}{2} = 4$$

Luego :  $r = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2} \rightarrow r = \sqrt{20}$

Calculamos A, B y C :

$$A = 4\sqrt{20} \left( \frac{4}{\sqrt{20}} \right) = 16$$

$$B = 5 - \sqrt{20} \left( \frac{\sqrt{20}}{-2} \right) = 5 + 10 = 15$$

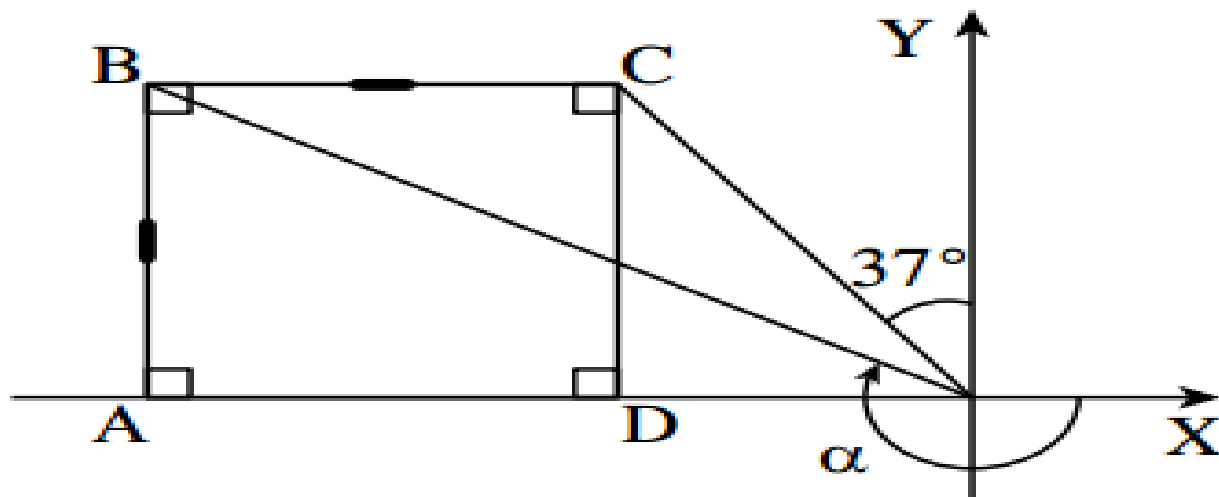
$$C = 6 - 6 \left( \frac{4}{-2} \right) = 6 + 12 = 18$$

∴ Eithan obtuvo calificación en Física .

# HELICO PRACTICE 7

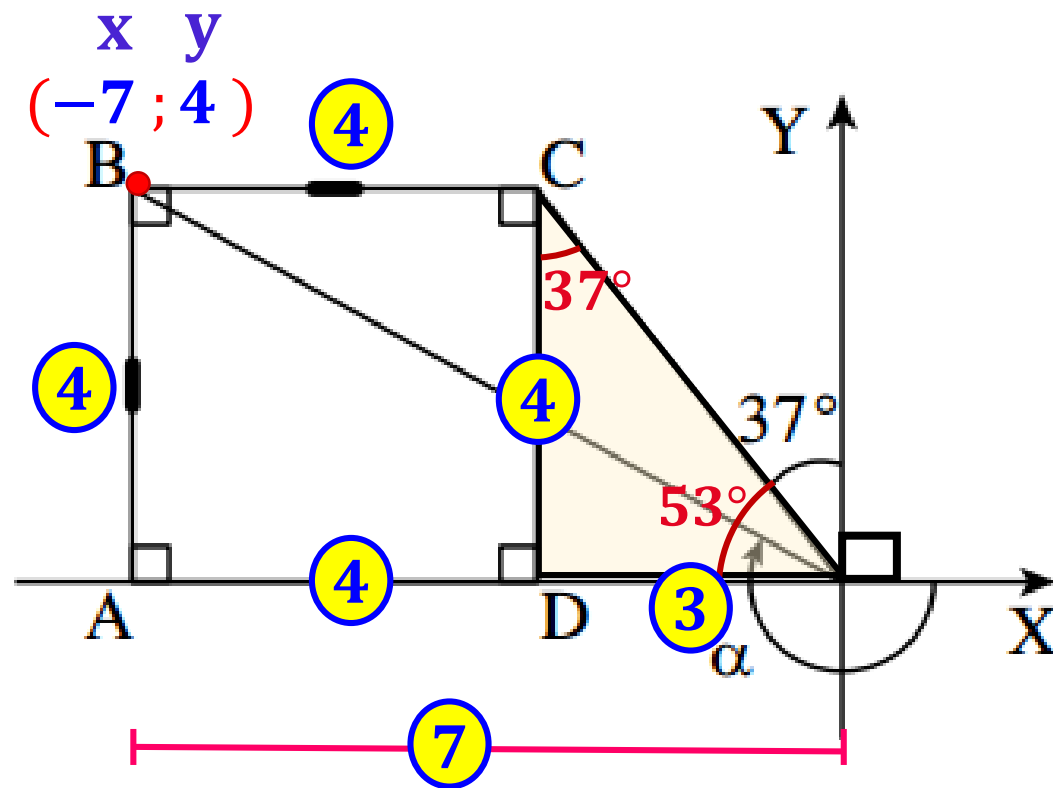
Diego ha rendido sus exámenes de Geometría y Física obteniendo las notas A y B respectivamente.- Si para conocer dichas notas se tienen que resolver los siguientes ejercicios :

$A = 2 + 4\sqrt{65} \operatorname{sen}\alpha$  ;  $B = 12 - 7 \tan\alpha$  .  
¿Cuál es el promedio de ambas calificaciones?



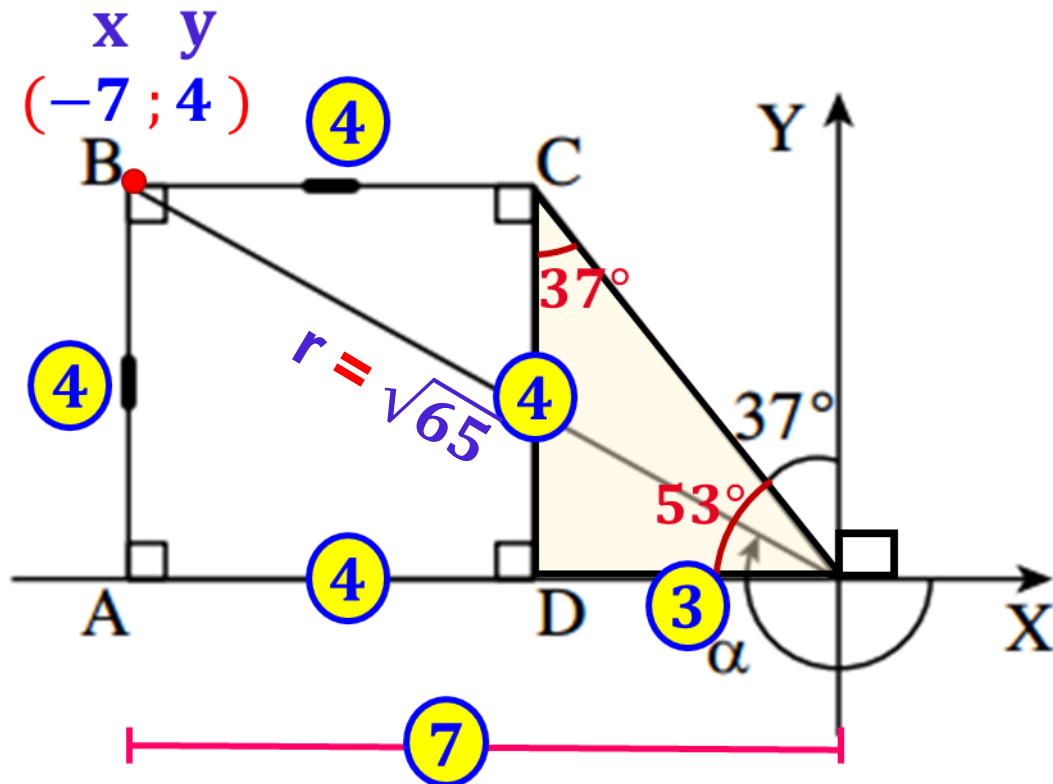
## RESOLUCIÓN

Asignamos valores notables para determinar coordenadas de B :



# HELICO PRACTICE 7

## RESOLUCIÓN



**Según gráfico :  $x = -7$  ;  $y = 4$**

$$r = \sqrt{(-7)^2 + (4)^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{65}$$

## Luego :

$$A = 2 + 4\sqrt{65} \left( \frac{4}{\sqrt{65}} \right) = 18$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{12} - \cancel{7} \left( \frac{\mathbf{4}}{\cancel{-7}} \right) = \mathbf{12} + \mathbf{4} = \mathbf{16}$$

$$\frac{A + B}{2} = \frac{18 + 16}{2} = 17$$

∴ El promedio de ambas calificaciones es 17 .



**SACO**  
**OLIVEROS**