# ARITHMETIC

Chapter 13

4th

SECONDARY

**MCD-MCM**

SACO OLIVEROS

Una regla muy poco considerada para el cálculo del MCD es la REGLA DE STURM

Calcule el MCD de 2520; 3060; 2790 y 4545.

***Resolución***

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2520 | 3060 | 2790 | 4545 | |
| ↓ | -2520 | -2520 | -2520 | |
| 2520 | 540 | 270 | 2025 | ← ***Residuo*** |
| -2430 | -540 | ↓ | -1890 | |
| 90 | 0 | 270 | 135 | ← ***Residuo*** |
| ↓ | | -270 | -90 | |
| 90 | | 0 | 45 | |
| -90 | | | ↓ | |
| 0 | | | 45 | = MCD |

# MCD - MCM

## 1 MCD

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCD es aquel número que cumple dos condiciones.

- Es un divisor común de dichos números.
- Es el mayor de los divisores comunes.

Ejm Sean los números 18 y 24

| # | Divisores $Z^+$ |
|---|---|
| 18 | 1; 2; 3; 6; 9; 18 |
| 24 | 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24 |

MCD(18; 24) = 6

Divisores comunes de 18 y 24

➡ 1; 2; 3 y 6

### En conclusión:

Sean los números A y B

$$CD_{comunes\ de\ A\ y\ B} = CD_{MCD(A;B)}$$

## 2 MCM

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCM es aquel número que cumple dos condiciones.

- Es múltiplo común de dichos números.
- Es el menor posible.

**Ejm** Sean los números 8 y 12

| # | Múltiplos $Z^+$ |
|---|---|
| 8 | 8; 16; 24; 32; 40; 48; … |
| 12 | 12; 24; 36; 48; 60; … |

**Múltiplos comunes de 8 y 12**

➡ 24; 48; 72; 96; …

$$\text{MCM}(8; 12) = 24$$

# MÉTODOS PARA DETERMINAR EL MCD-MCM

## A Por descomposición canónica

El MCD es igual al producto de sus factores primos comunes elevados a los menores exponentes posibles.

Ejm

**Dados los números A,B y C**

Si
$$A = 2^4 \times 3^5 \times 5^2$$
$$B = 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$$
$$C = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$$

MCD(A, B, C) $= 2^2 \times 3^3 \times 5^2$

El MCM es igual al producto de sus factores primos comunes y no comunes elevados a los mayores exponentes posibles.

Ejm

**Dados los números A,B y C**

Si
$$A = 2^4 \times 3 \times 5^2$$
$$B = 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$$
$$C = 2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 7$$

MCM(A,B,C) $= 2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^2$

# B Por descomposición simultanea

El **MCD** es el producto de sus factores comunes. (**El procedimiento termina al encontrar los números PESI**)

Ejm

**Calcule el MCD de 56; 140 y 168**

$$\begin{array}{rcrcr|l} 56 & - & 140 & - & 168 & 2 \\ 28 & - & 70 & - & 84 & 2 \\ 14 & - & 35 & - & 42 & 7 \\ 2 & - & 5 & - & 6 & \end{array}$$

PESI

MCD(56; 140; 168) $= 2^2 \times 7 = 28$

El **MCM** es el producto de sus factores (**El procedimiento termina al encontrar La unidad**)

Ejm

**Calcule el MCM de 35; 15 y 21**

$$\begin{array}{rcrcr|l} 35 & - & 15 & - & 21 & 3 \\ 35 & - & 5 & - & 7 & 5 \\ 7 & - & 1 & - & 7 & 7 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

MCM(35; 15; 21)$= 3x5x7 = 105$

# C Divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides

Solo para determinar el MCD de dos números A y B.

Aplicación **Al calcular el MCD de 750 y 270, indique los cocientes y residuos respectivos.**

*cocientes sucesivos*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 3 | 2 | |
| 750 | 270 | 210 | 60 | 30 | MCD |
| | 210 | 60 | 30 | 0 | |

*residuos sucesivos*

***Cocientes sucesivos:***

**2; 1; 3 y 2**

***Residuos sucesivos:***

**210; 60; 30**

## PROBLEMA 1.

¿Cuántos múltiplos comunes de 4 cifras tienen los números 18, 40 y 56?

**Resolución:**

**Sabemos:**

$$MCM_{(18,40,56)} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$= 2520$$

$18 = 2 \times 3^2$

$40 = 2^3 \times 5$

$56 = 2^3 \times 7$

➢ por lo tanto :

$$\text{Múltiplos comunes} = \underbrace{2520k}$$

$= 2520 \times 1$

$= 2520 \times 2$

$= 2520 \times 3$

**Respuesta:** 3 múltiplos

## PROBLEMA 2.

Resolución:

Hallar "n" sabiendo que el M.C.D. de $A = 8 \times 6^n$ y $B = 6 \times 8^n$ tiene 18 divisores

**Sabemos:**

$$MCD_{(A,B)} = 2^{n+3} \times 3$$

$$A = 8 \times 6^n = 2^{n+3} \times 3^n$$

$$B = 6 \times 8^n = 2^{3n+1} \times 3$$

- **Por dato :**

$$\underbrace{CANTIDAD\ DE\ DIVISORES_{(MCD)}} = 18$$

$$(n + 3 + 1)\ (1 + 1) = 18$$

$$n+4 = 9$$

$$n = 5$$

Respuesta: 5

## PROBLEMA 3.

Los cocientes sucesivos obtenidos en la determinación del MCD de A y B mediante el algoritmo de Euclides, han sido 14; 1; 1; 1; y 2 respectivamente y si ambos números son primos entre sí. ¿Cuál es la suma de éstos?

Ambos números son primos entre sí.

$MCD_{(A,B)} = 1$

## Resolución:

➤ **Por dato :**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| cocientes | 14 | 1 | 1 | 1 | 2 | x |
| 117 | 8 | 5 | 3 | 2 | 1 | = MCD |
| residuos | 5 | 3 | 2 | 1 | 0 | + |

**Piden:** 117 + 8 = 125

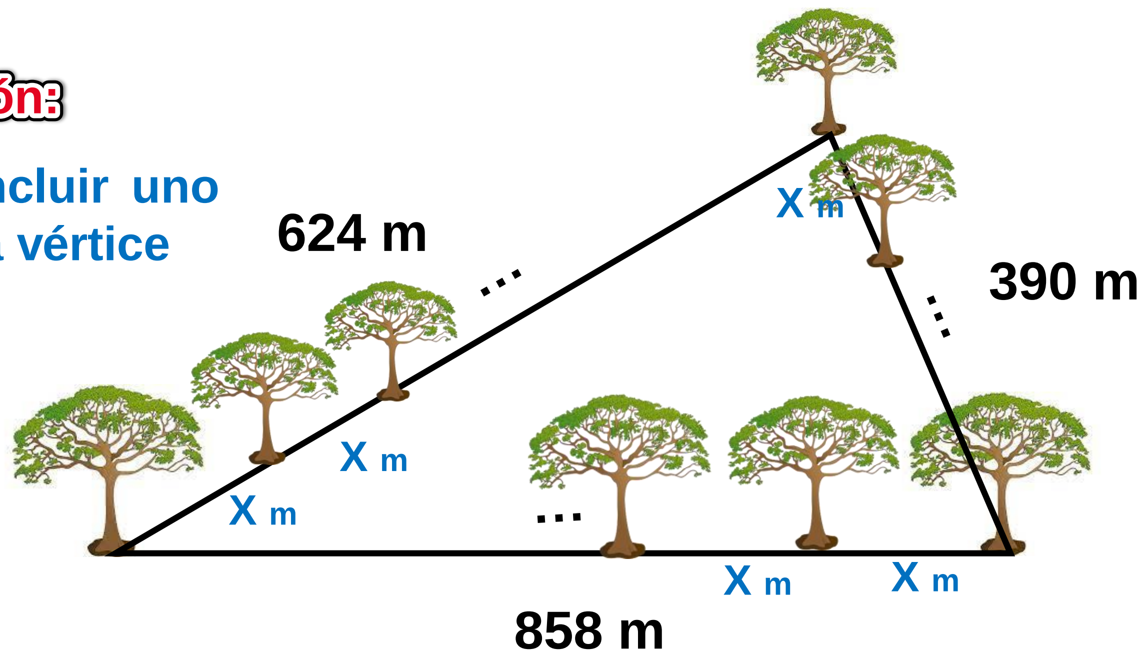
**Respuesta:** 125

## PROBLEMA 4.

En un terreno triangular de dimensiones 390 m, 858 m y 624 m se va a plantar árboles igualmente espaciados en el perímetro del terreno. ¿Cuál es la menor cantidad de árboles que se debe de plantar, si se debe incluir uno en cada vértice?

**Resolución:**

Debe incluir uno en cada vértice




**Sabemos:**

$$X = MCD_{(390,858,640)} = 2$$

$$390 = 2 \times 3 \times 5 \times 13$$

$$858 = 2 \times 3 \times 11 \times 13$$

$$640 = 2^7 \times 5$$

**Piden:**

$$\text{Cant. árboles} = \frac{390 + 858 + 624}{2}$$

$$= 936$$

**Respuesta:** 936 árboles

**OBSERVACIÓN:**

se va a plantar árboles igualmente espaciados en el perímetro del terreno

## PROBLEMA 5.

Aaron y Aariana están jugando boliche con pinos de plástico en la sala de su casa, sorprendentemente, Aaron derriba 8 pinos en cada tiro y su hermana Aariana 9 pinos en cada tiro. Al final del juego se dan cuenta que han derribado la misma cantidad de pinos ¿Cuál será dicha cantidad si es el mayor numeral de 3 cifras cuya <u>cifra</u> de mayor orden es 2 ?

**Resolución:**

**Sabemos:**

Aaron derriba 8 pinos en cada tiro y su hermana Aariana 9 pinos en cada tiro

han derribado la misma cantidad de pinos

$MCM_{(8,9)} = 72$

$$\begin{array}{c|c} 8 - 9 & 8 \\ 1 - 9 & 9 \\ 1 - 1 & \end{array}$$

mayor numeral de 3 cifras cuya cifra de mayor orden es 2

$= 72k$

$= 72 \times 1 \quad = \cancel{72}$

$= 72 \times 2 \quad = \cancel{144}$

$= 72 \times 3 \quad = \cancel{216}$

$= 72 \times 4 \quad = 288$

$\vdots$

**Respuesta:** 288 pinos derribados

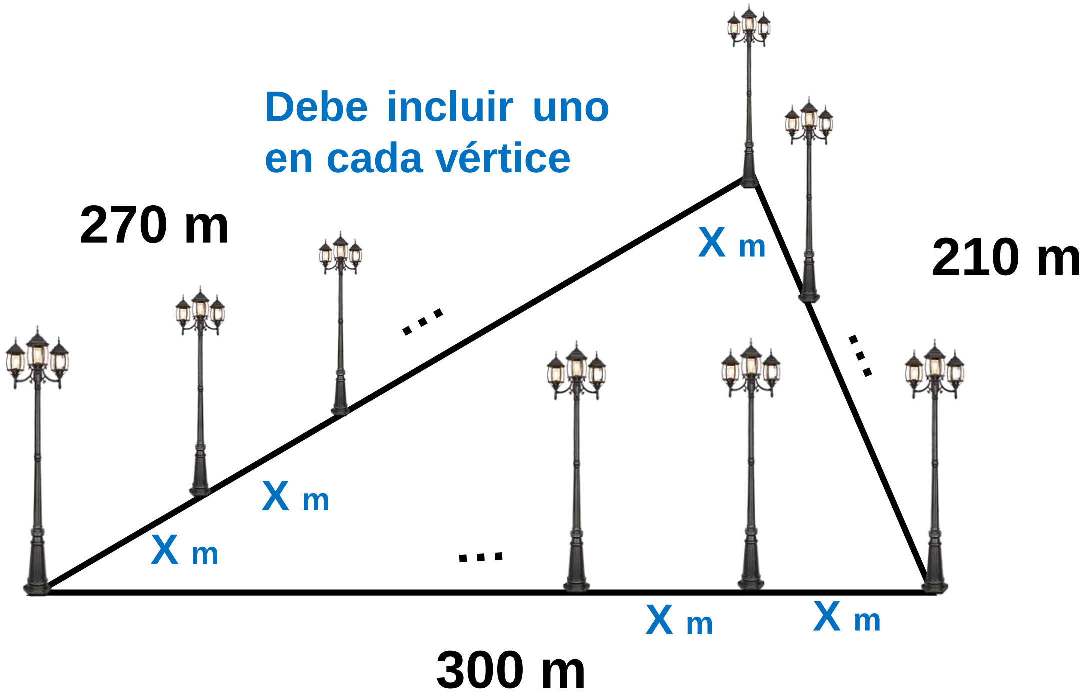
## PROBLEMA 6.

Se han colocado postes igualmente espaciados en el contorno de un campo triangular cuyos lados miden 210, 270 y 300 m respectivamente. Sabiendo que hay un poste en cada vértice y que la distancia entre poste y poste es la mayor posible. ¿Cuántos postes se colocaron?

**OBSERVACIÓN:**
se va a colocar postes igualmente espaciados en el perímetro del terreno

**Resolución:**

Debe incluir uno en cada vértice




**Sabemos:**

$$X = MCD_{(210,270,300)} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

210 = 2 x 3 x 5 x 7

270 = 2 x $3^3$ x 5

300 = $2^2$x 3 x $5^2$

**Piden:**

$$\text{Cant. postes} = \frac{210 + 270 + 300}{30}$$

$= 26$

**Respuesta:** 26 postes

## PROBLEMA 7.

Un comerciante de vino, tiene 3 barriles de vino de 540; 960 y 1260 litros de capacidad. Si desea vender este vino en recipientes todos iguales, cuya capacidad esté comprendida entre 25 y 48 litros, además están contenidos exactamente en cada uno de los barriles. Calcular la cantidad de recipientes que se utilizarán.

**Resolución:**




Capacidad entre 25 y 48 litros

…

DIVISOR COMÚN = 30

Están contenidos exactamente en cada uno de los barriles

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 540 | 960 | 1260 | 10 | 30 |
| 54 | 96 | 126 | 3 | |
| 18 | 32 | 42 | | |

cantidad de recipientes $= 18+32+42$

$= 92$

**Respuesta:** 92 recipientes