

TRIGONOMETRY

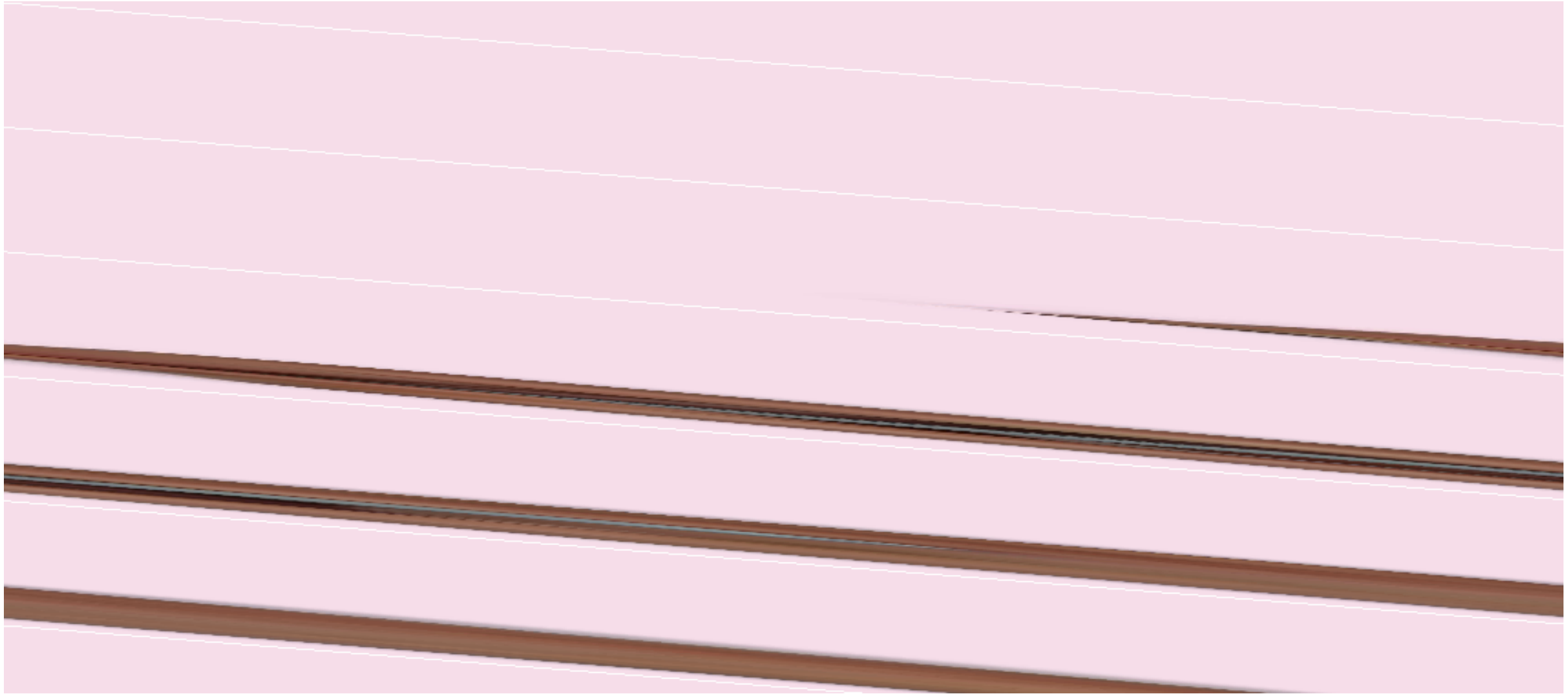
Chapter 23

5th
SECONDARY

ECUACIONES
TRIGONOMÉTRICAS



¿ QUÉ SON LAS ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS ?





ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

ECUACIÓN TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL (ETE) :

$$FT(ax + b) = N \quad ; a \neq 0$$

X_g = Argumento de la ETE

Donde :

FT : Operador Trigonométrico

x : Variable angular

a , b : Constantes reales ;

N : Constante real , la cual pertenece al rango de la FT .

Ejemplos :

- $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- $\cos(2x) = \frac{1}{2}$

- $\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

EXPRESIONES GENERALES : x_g : Argumento de la ETE V_p : Valor Principal1) Para el **SENO** : ; $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{sen}(x_g) = N \Rightarrow x_g = k\pi + (-1)^k V_p$$

2) Para el **COSENO** :

$$\text{cos}(x_g) = N \Rightarrow x_g = 2k\pi \pm V_p$$

3) Para la **TANGENTE** :

$$\text{tan}(x_g) = N \Rightarrow x_g = k\pi + V_p$$

Ejemplo:

Resolver $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{1}{2}$

Resolución

- $\cos(2x) = \frac{1}{2} \dots$ **ETE**

- Valor Principal :** $V_p = \frac{\pi}{3}$

- Expresión General :**

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} ; k \in \mathbb{Z}$$

HELICO PRACTICE 1

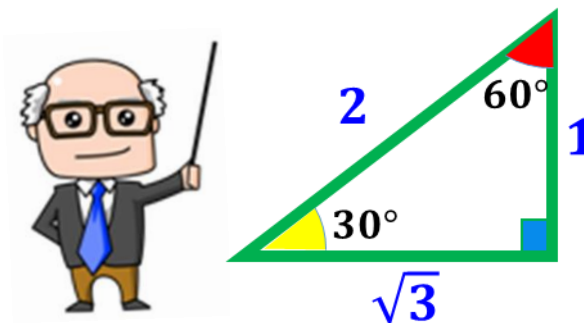
Indique la menor solución positiva de $\tan 3x - \sqrt{3} = 0$

Resolución

Del dato : $\tan 3x = \sqrt{3}$... ETE Recuerda :

Luego : $3x_1 = \frac{\pi}{3}$

$$x_1 = \frac{\pi}{9}$$



$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

∴ La menor solución positiva es $\frac{\pi}{9}$

HELICO PRACTICE 2

Indique la menor solución positiva de $\text{sen} x \cdot \text{cos} x = 0,25$

Resolución

Del dato : $(\text{sen} x \cdot \text{cos} x = 0,25) (2)$

$$2 \text{sen} x \cdot \text{cos} x = 0,5$$

$$\text{sen} 2x = \frac{1}{2} \quad \dots \text{ETE}$$

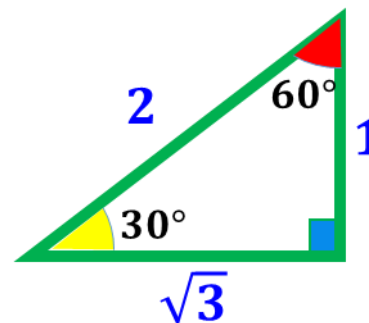
Luego :

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{12}$$

∴ La menor solución positiva es $\frac{\pi}{12}$

Recuerda :

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

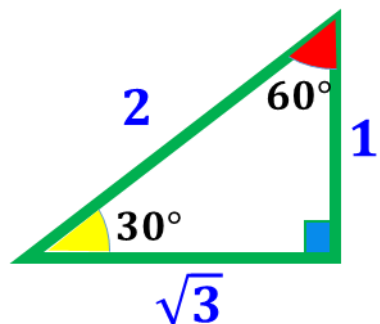


HELICO PRACTICE 3

Halle la solución general de $\tan x + \cot x = 4$

Resolución

Del dato : $\tan x + \cot x = 4$



$$2 \csc 2x = 4$$

$$\csc 2x = 2$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \quad \dots \text{ETE}$$

Luego : $X_g = 2x$

$$V_p = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Hallamos solución general :

$$X_g = k\pi + (-1)^k \cdot V_p ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = k\pi + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} ; k \in \mathbb{Z}$$

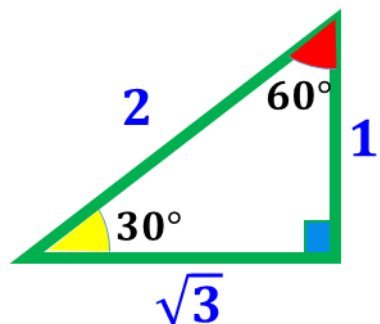
$$\therefore x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} ; k \in \mathbb{Z}$$

HELICO PRACTICE 4

Halle la solución general de $2 \cos 2x - \tan 45^\circ = 0$

Resolución

Del dato : $2 \cos 2x - 1 = 0$



$$2 \cos 2x = 1$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \quad \dots \text{ETE}$$

Luego : $X_g = 2x$

$$V_p = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Hallamos solución general :

$$X_g = 2k\pi \pm V_p ; k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x = k\pi \pm \frac{\pi}{6} ; k \in \mathbb{Z}$$

HELICO PRACTICE 5

Halle la segunda solución positiva de la ecuación

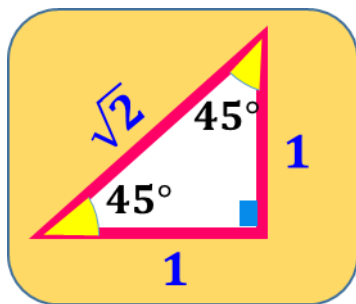
$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3} \tan 30^\circ = 0$$

Resolución

Del dato : $\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \cancel{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\right) = 0$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \dots \text{ETE}$$



Luego : $V_p = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Hallamos X_2 :

$$\frac{X_2}{2} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{X_2}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore X_2 = \frac{5\pi}{2}$$

HELICO PRACTICE 6

Muchas poblaciones de animales, como las de los conejos, fluctúan en periodos cíclicos de 12 años . - Supongamos que N es la población de conejos en un tiempo t (en años) y está determinada por : $N_{(t)} = 1000 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4000$
 ¿Cuál es el menor tiempo para el cual la población de conejos será de 4500 ?

Resolución

$$N_{(t)} = 1000 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4000$$

Dato : $N_{(t)} = 4500$

$$\Rightarrow 4500 = 1000 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4000$$

$$500 = 1000 \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

ETE

Recuerda :

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

La menor solución es :

$$\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow t = 2$$

∴ El menor tiempo es 2 años .

HELICO PRACTICE 7

En una ciudad de la sierra, la temperatura promedio (en grados centígrados) de cada día del mes de agosto, se determina por la expresión :

$$T_{(t)} = 8 + 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right) ; \text{ donde } t \text{ denota el tiempo en días.}$$

Indique los tres días en los cuales la temperatura promedio en la ciudad es de 13° C .

Resolución

$$T_{(t)} = 8 + 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

$$13 = 8 + 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

$$5 = 10 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

$$\frac{1}{2} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{12}\right)$$

ETE

$$\frac{\pi t}{12} = \{ 30^{\circ} ; 150^{\circ} ; 390^{\circ} \}$$

$$\frac{\cancel{\pi} t}{12} = \frac{\cancel{\pi}}{6} \rightarrow$$

$t = 2$
de agosto

$$\frac{\cancel{\pi} t}{12} = \frac{5\cancel{\pi}}{6} \rightarrow$$

$t = 10$
de agosto

$$\frac{\cancel{\pi} t}{12} = \frac{13\cancel{\pi}}{6} \rightarrow$$

$t = 26$
de agosto



**SACO
OLIVEROS**