ÁLGEBRA

CHAPTER 1

5th

of Secondary

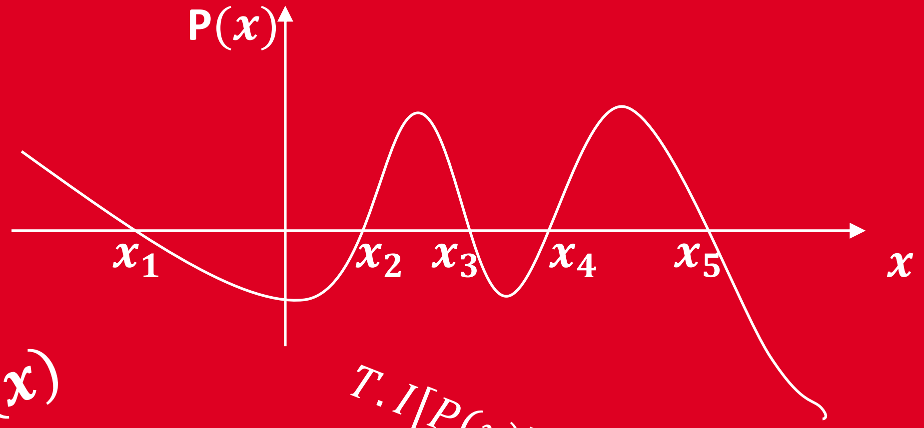
Polinomios

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

$\sum coeficientes\ P(x) = P(1)$

$P(x) \equiv 0$

G.A(P)



G.R(x)

$T.I[P(x)] = P(0)$

SACO OLIVEROS

MOTIVATING

STRATEGY

SACO OLIVEROS

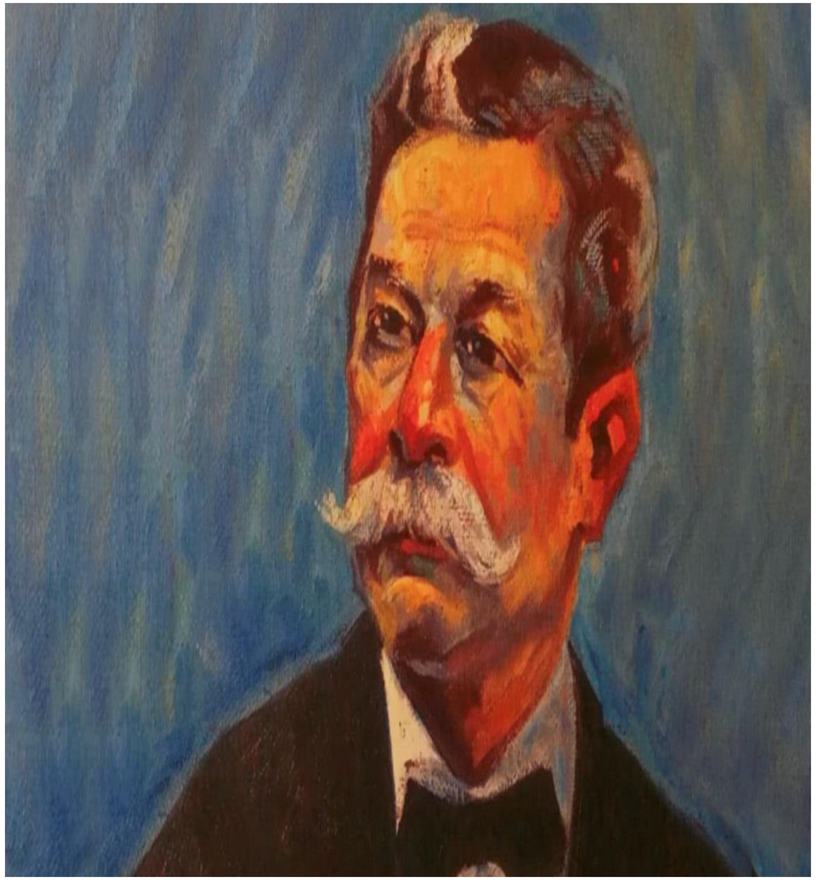
POLINOMIO DE VILLARREAL

Federico Villareal fue ingeniero, matemático, físico y astrónomo; fue tan extraordinario en su época, que llego a ser comparado con el mismísimo Isaac Newton. Pero ¿por qué?

En 1873, el joven Villareal de 23 años, que para entonces era profesor de secundaria en un colegio de su natal Lambayeque, descubre un método para elevar un polinomio a una potencia cualquiera. El método no tuvo ninguna popularidad hasta que llego a los oídos de otro matemático peruano Cristóbal de Losada, dándose cuenta que era un gran descubrimiento lo bautizo como el ***"Polinomio de Villarreal".***

El método de Villareal no volvió a ser escuchado hasta el 21 de octubre de 1879, año en que Villareal lo inserta en su tesis para obtener el grado de bachiller en la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, la cual tituló: "Fórmulas y métodos que deben completarse en matemáticas puras".

Según Basadre: ***"Es tan perfecto, que aun para el caso de un binomio resulta más fácil, seguro y rápido que el método del binomio de Newton"***.
El mismo Villarreal consideró este método como su obra maestra .El método no ha obtenido fama hasta el día de hoy y probablemente nunca la obtenga, pero lo mejor de esto es que tuvimos un matemático como Villarreal que pese a no ser tan famoso como Newton descubrió un método mejor que el suyo.



FUENTES:
HTTP://WWW.UNFV.EDU.PE/SITE/BIOGRAFIA-FEDERICO-VILLARREAL
HTTPS://APRENDIENDOMATE.WORDPRESS.COM/2009/04/05/EL-POLINOMIO-VILLARREAL/
BASADRE GROHMANN, JORGE: *HISTORIA DE LA REPÚBLICA DEL PERÚ (1822 – 1933)*

HELICO

THEORY

SACO OLIVEROS

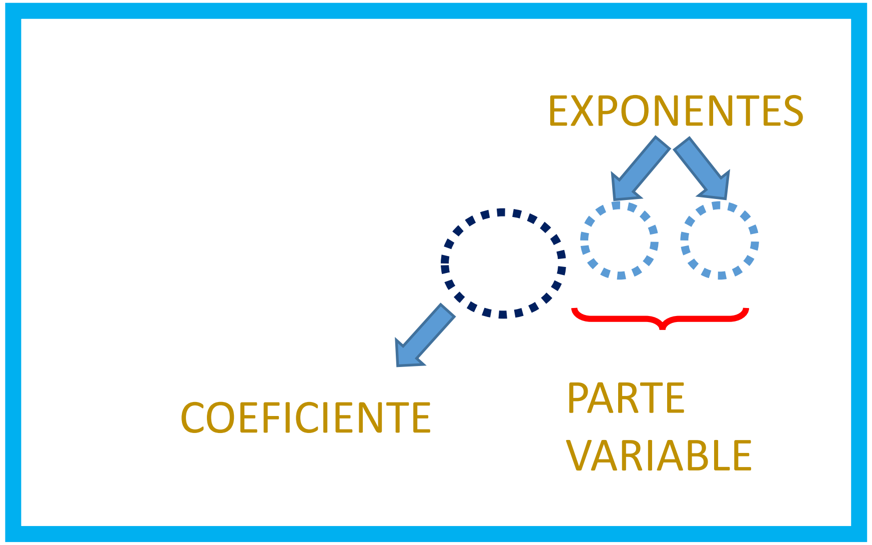
POLINOMIOS

I. DEFINICIÓN

Es aquella expresión algebraica racional entera (donde los exponentes de las variables son enteros positivos).

Ejemplo:

$$Q(x;y) = -3x^5y^6 + 8mx^7y^9 + 5$$



- Variables: $x;y$
- Coeficientes: $-3;8m;5$
- Término independiente: 5

II. POLINOMIO EN UNA VARIABLE DEFINIDA EN $\mathbb{R}$

Es aquella expresión algebraica que se reduce a la forma general típica

$$P(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

Donde:

- $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$: Coeficientes reales
- x : Variable
- n: Grado del polinomio
- a_0: Coeficientes principal
- a_n: Término independiente

Polinomio Mónico

Si el coeficiente principal de $P(x)$, es decir $a_0 = 1$

Ejemplo:

Sea $\mathrm{T}(x) = 1x^3 - 5x + 2$

El polinomio T es mónico, ya que su coeficiente principal es 1

III. VALOR NUMÉRICO

Es el valor que se obtiene al reemplazar la variable de un polinomio por un número determinado.

Ejemplo:

Sea $P(x) = x^4 + x^3 + 8$. Calcule $P(-3)$.

Resolución:

$$P(-3) = (-3)^4 + (-3)^3 + 8$$

$$P(-3) = 81 - 27 + 8$$

$$\boxed{P(-3) = 62}$$

Ejemplo:

Sea $P(x+2) = x^3 - 5x + 2$. Halle $P(5)$.

Resolución:

$x + 2 = 5$
$x = 3$

$$P(3+2) = (3)^3 - 5(3) + 2$$

$$P(5) = 27 - 15 + 2$$

$$\boxed{P(5) = 14}$$

PROPIEDADES

SUMA DE COEFICIENTES: $\sum Coeficientes = P(1)$

TÉRMINO INDEPENDIENTE: $T.I\,[P(x)] = P(0)$

IV. GRADO DE UN POLINOMIO

Es una característica de los polinomios relacionada a los exponentes de su variables .

GRADO
- Grado Relativo (G.R) → Con respecto a una variable específica
- Grado Absoluto (G.A) → Con respecto a todas sus variables

PARA MONOMIOS

$$M(x;y) = 2x^{3}y^{9}$$

- $G.R(x) = 3$
- $G.R(y) = 9$
- $G.A(M) = 12$

PARA POLINOMIOS

$$P(x;y) = \underbrace{2x^{13}y^{7}}_{20} + \underbrace{x^{6}y^{18}}_{24}$$

GRADO → 20 24

- $G.R(x) = 13$
- $G.R(y) = 18$
- $G.A(P) = 24$

V. POLINOMIOS ESPECIALES

1. Polinomio Ordenado

Es aquel polinomio cuyos exponentes de la variable que se toma como referencia, guardan un cierto orden, ya sea ascendente(creciente) o descendente(decreciente).

EJEMPLO:

- $Q(x) = 4x - 5x^2 + 6x^5 + 3x^{10}$

ORDENADO ASCENDENTEMENTE

- $R(x, y) = 5x^2y^5 + 2x^4y^3 + 3x^7y^2$

ORDENADO ASCENDENTEMENTE CON RESPECTO A "x"
ORDENADO DESCENDENTEMENTE CON RESPECTO A "y"

2. Polinomio Completo

Es aquel polinomio que contiene todos los exponentes de la variable que se toma como referencia (con coeficientes no nulos), desde el mayor exponente hasta el exponente cero, sin interesar el orden.

EJEMPLO:

- $Q(x) = 3x - 2x^2 + 6 + 3x^3$

POLINOMIO COMPLETO

OBSERVACIÓN:

- $R(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$

POLINOMIO COMPLETO y ORDENADO ASCENDENTEMENTE

3. Polinomio Homogéneo

Es aquel polinomio cuyos términos están constituido por más de una variable que presentan el mismo grado.

EJEMPLO:

- $P(x,y) = \underbrace{2\,x^{8}\,y^{5}} - \underbrace{7\,x^{4}\,y^{9}} - \underbrace{3x^{7}\,y^{6}}$

GRADO ⇒ 13 = 13 = 13

⇒ **POLINOMIO HOMOGÉNEO**

4. Polinomios Idénticos

Son aquellos polinomios cuyos términos semejantes presentan el mismo coeficiente.

EJEMPLO:

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ y $Q(x) = mx^2 + nx + p$ son idénticos ($P(x) \equiv Q(x)$)entonces se cumple que:

$a = m$ $\quad$ $b = n$ $\quad$ $c = p$

OBSERVACIÓN:

También se dice que son idénticos si sus valores numéricos resultan iguales, para cualquier valor asignado a sus variables, se denota por:

$$P(x,y) \equiv Q(x,y) \leftrightarrow P(a,b) = Q(a,b), \forall a, b \in \mathbb{R}$$

5. Polinomio Idénticamente Nulo

Un polinomio es idénticamente nulo, si todos sus coeficientes son iguales a cero .

EJEMPLO:

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ es idénticamente nulo (se denota: $P(x) \equiv 0$) entonces se cumple que:

$$\boxed{a = 0} \quad ; \quad \boxed{b = 0} \quad ; \quad \boxed{c = 0}$$

HELICO

PRACTICE

1. Sea el polinomio:

$$P(x,y) = 2x^{m+1}y^{n} - x^{m-2}y^{n+2} + 3x^{m+3}y^{n+1}$$

además: $G.R(x) = 12$ y $G.A = 18$. Calcule: $G.R(y)$

RESOLUCIÓN :

$$P(x,y) = \underbrace{2x^{m+1}y^{n}}_{m+n+1} - \underbrace{x^{m-2}y^{n+2}}_{m+n} + \underbrace{3x^{m+3}y^{n+1}}_{m+n+4}$$

GRADO ⇨ $m+n+1$ $\quad m+n \quad m+n+4$

POR DATO:

- $G.R(x) = 12 = m+3$

➡ $m = 9$ ... (I)

- $G.A(P) = 18 = m+n+4$

➡ $m+n = 14$ ... (II)

REEMPLAZANDO (I) EN (II) :

$9 + n = 14$

$\boxed{n = 5}$

PIDEN CALCULAR EL GR(y) :

- $G.R(y) = n+2$

$$\boxed{\therefore G.R(y) = 7}$$

2. Si el polinomio es homogéneo

$$P(x,y) = 3x^{m+1}y^{n+3} + 2^{10}x^a y^b - x^{2m}y^{n+2}$$

Halle el valor de $m + m^2 + m^3$

RESOLUCIÓN :

COMO ES UN POLINOMIO HOMOGÉNEO

$$P(x,y) = 3\underbrace{x^{m+1}y^{n+3}} + 2^{10}\underbrace{x^a y^b} - \underbrace{x^{2m}y^{n+2}}$$

GRADO $\boxed{m+n+4}$ $a+b$ $\boxed{2m+n+2}$

$m + n + 4 = 2m + n + 2$

$m = 2$

$m + m^2 + m^3 = 2 + (2)^2 + (2)^3$

$\therefore\ m + m^2 + m^3 = \mathbf{14}$

3. Dado el polinomio

$P(x) = 7 + (3n-2)x^{m-6} + (m+1)x^{n-4} - (2p+1)x^{p-2}$ es completo y ordenado.

Calcule la suma de coeficientes de $P(x)$

RESOLUCIÓN :

COMO ES UN POLINOMIO COMPLETO Y ORDENADO

GRADO 0

$$P(x) = 7 + (3n-2)x^{\overset{1}{m-6}} + (m+1)x^{\overset{2}{n-4}} - (2p+1)x^{\overset{3}{p-2}}$$

ASCENDENTE

$$\begin{cases} m-6=1 \Rightarrow \boxed{m=7} \\ n-4=2 \Rightarrow \boxed{n=6} \\ p-2=3 \Rightarrow \boxed{p=5} \end{cases}$$

NOS PIDEN:

$$\sum coeficientes = 7 + 3n - 2 + m + 1 - (2p+1)$$

$$\sum coeficientes = 5 + m + 3n - 2p$$

$$\sum coeficientes = 5 + 7 + 3(6) - 2(5)$$

$$\therefore \sum coeficientes = 20$$

4. Si se cumple que

$$26x - 27 \equiv a(4x-3) + b(2x-3)$$

calcule $(a-b)^{ab}$

RESOLUCIÓN :

$$26x - 27 \equiv a\,(4x - 3) + b\,(2x - 3)$$

$$26x - 27 \equiv 4ax - 3a + 2bx - 3b$$

$$26x - 27 \equiv (4a + 2b)x - (3a + 3b)$$

$$\begin{cases} 4a + 2b = 26 \xrightarrow{(\div 2)} \\ 3a + 3b = 27 \xrightarrow{(\div 3)} \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = 13 \\ a + b = 9 \end{cases}$$

$$\boxed{a = 4}$$

$$\boxed{b = 5}$$

$Piden:$ $(a-b)^{ab}$

$$(4-5)^{(4)(5)}$$

$$(-1)^{20}$$

$$\boxed{\therefore Rpta = 1}$$

5. Si

$$P(x) = (a+b-3)x^2 + (b+c-6)x + a + c - 7$$

Es idénticamente nulo, calcule $a^2+b^2+c^2$

RESOLUCIÓN :

COMO ES UN POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO

$$P(x) = \underbrace{(a+b-3)}_{=0}x^2 + \underbrace{(b+c-6)}_{=0}x + \underbrace{(a+c-7)}_{=0}$$

$$\begin{cases} a+b-3=0 \\ b+c-6=0 \\ a+c-7=0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a+b&=3 \\ b+c&=6 \quad + \\ a+c&=7 \end{aligned}$$

$$2a+2b+2c=16$$

$$\boxed{a+b+c=8}$$

Luego $\underbrace{a+b}+c=8$

$$3+c=8$$

$$\boxed{c=5}$$

También $b+c=6$ y $a+c=7$

$$b+5=6 \qquad a+5=7$$

$$\boxed{b=1} \qquad \boxed{a=2}$$

Reemplazando

$$a^2+b^2+c^2 = 2^2+1^2+5^2$$

$$\boxed{\therefore a^2+b^2+c^2 = \mathbf{30}}$$

6. Si se cumple:

$$P(x-2)=3x-5 \quad \ldots \quad (\mathrm{I})$$
$$P(Q(x))=27x+4 \quad \ldots (\mathrm{II})$$

Además $Q(2)$ es la edad de Jorge. ¿Qué edad tendrá Jorge dentro de 5 años?

RESOLUCIÓN :

Cambiando x por $\mathrm{Q(x)}+2$ y reemplazando en la ecuación (I):

$$P(Q(x)+2-2)=3[Q(x)+2]-5$$

$$P\big(Q(x)\big)=3Q(x)+1$$

Reemplazando la ecuación (II)

$$27x+4=3Q(x)+1 \quad 27x+3=3Q(x) \quad \boxed{Q(x)=9x+1}$$

Edad actual de Jorge : $Q(2)=9(2)+1=19$

$\therefore$ ***Dentro de 5 años su edad será 24 años***

7. En la siguiente tabla se muestran las ventas que realizó Paco en el día "n" del mes "m" del año2020

	Precio Unitario (S/)	Cantidad
Cuaderno	x^{2m+n-4}	y^{m+n+2}
Regla	x^{2m+n-6}	y^{m+n+1}
Lapicero	x^{2m+n-2}	y^{m+n}

Si P(x;y) representó el ingreso total en soles y GR(x)-GR(y)=6; GA(P) =38.¿en qué fecha se realizó dichas ventas?

RESOLUCIÓN :

$$\boxed{Ingreso = Precio.Cantidad}$$

Construimos el polinomio Ingreso total P(x;y)

$$P(x,y) = Ingreso_{cuaderno} + Ingreso_{regla} + Ingreso_{Lapicero}$$

$$P(x,y) = \underbrace{x^{2m+n-4}.\,y^{m+n+2}}_{3m+2n-2} + \underbrace{x^{2m+n-6}.\,y^{m+n+1}}_{3m+2n-5} + \underbrace{x^{2m+n-2}.\,y^{m+n}}_{3m+2n-2}$$

GRADO ⇒ $3m + 2n - 2$ $\quad 3m + 2n - 5$ $\quad 3m + 2n - 2$

POR DATO: $GR(x) - GR(y) = 6$

$$(2m + n - 2) - (m + n + 2) = 6$$

$$m - 4 = 6$$

$$\boxed{m = 10}$$

También: $GA(P) = 38$

$$3m + 2n - 2 = 38$$

$$3(10) + 2n - 2 = 38 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

$$\boxed{\therefore\ \mathbf{5\ de\ octubre\ del\ 2020}}$$