MATHEMATICAL REASONING

Chapter 13

5th
SECONDARY

SERIES II

SACO OLIVEROS

HELICO THEORY

SERIE NUMÉRICA

SERIE ARITMÉTICA

Es la adición indicada de los términos de una Sucesión Aritmética.

Por ejemplo

Calcule el valor de la serie.

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & & 1° & & 2° & & 3° & & \dots & & 9° & & 10° \\ S & = & 5 & + & 8 & + & 11 & + & \cdots & + & 29 & + & 32 \end{array}$$

EN GENERAL

$$\boxed{S.A. = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right) n}$$

Donde, t_1 : Primer sumando

t_n : Último sumando

n : Cantidad de sumandos

$$S = \left(\frac{5 + 32}{\cancel{2}}\right) \cancel{10}^{\,5}$$

$$S = (37)5$$

$$S = 185$$

HELICO THEORY

SERIE NUMÉRICA

SERIE DE LOS PRIMEROS NÚMEROS CUADRADOS

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} (k^2) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 \longrightarrow \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

SERIE DE LOS PRIMEROS NÚMEROS CÚBICOS

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} (k^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 \longrightarrow \boxed{S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

HELICO THEORY

SERIE NUMÉRICA

Si la serie polinomial es de grado mayor que 2 haremos lo siguiente:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} & & 1° & & 2° & & 3° & & 4° & & \ldots & & n° \\ S_n & = & t_1 & + & t_2 & + & t_3 & + & t_4 & + & \ldots & + & t_n \\ & & & +a & & +b & & +c & & +d & & & \\ & & & & +m & & +n & & +p & & & & \\ & & & & & +r & & +r & & & & & \end{array}$$

$$\boxed{S_n = t_1 C_1^n + aC_2^n + mC_3^n + rC_4^n}$$

HELICO THEORY

SERIE NUMÉRICA

SERIE DE PRODUCTOS

- PRODUCTOS BINARIOS

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k(k+1) = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

- PRODUCTOS TERNARIOS

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} k(k+1)(k+2) = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1)\times(n+2)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

HELICO THEORY

SERIE NUMÉRICA

SERIE DE INVERSAS DE PRODUCTOS

- INVERSA DE PRODUCTOS BINARIOS

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}$$

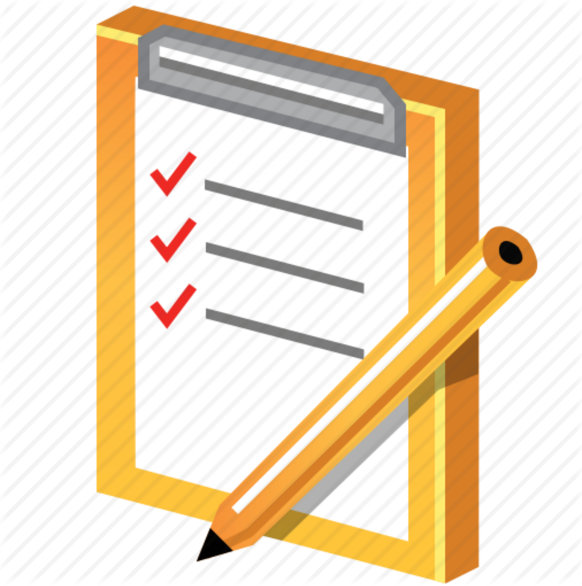
$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

- INVERSA DE PRODUCTOS TERNARIOS

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)\times(n+2)}$$

$$S_n = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

HELICO PRACTICE



PROBLEMA 1

Halle el valor de la siguiente serie:

$$M = \underbrace{9 + 14 + 19 + 24 + \cdots}_{\text{20 términos}}$$

Resolución:

$$\overset{4}{} \quad 9 + 14 + 19 + 24 + \cdots$$

$+5 \quad +5 \quad +5 \quad +5$

$$t_n = 5n + 4$$

$$t_{20} = 5(20) + 4$$

$$t_{20} = 104$$

Recordemos:

$$S = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right) n$$

$$S = \left(\frac{9 + 104}{\cancel{2}}\right)\overset{10}{\cancel{20}}$$

$$S = (113)10$$

$$S = 1130$$

$$\therefore \quad M = 1130$$

PROBLEMA 2

Felipe comió caramelos de limón durante todo el mes de marzo; así el primer día comió 1 caramelo, el segundo día 4 caramelos, el tercer día 7 caramelos y así sucesivamente. ¿Cuántos caramelos comió Felipe en el periodo mencionado?

Resolución:

$$-2 \quad \overbrace{1 + 4 + 7 + 10 + \cdots}^{\text{31 sumandos}}$$

$$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$$

$$t_n = 3n - 2$$

$$t_{31} = 3(31) - 2$$

$$t_{31} = 91$$

$$S = \left(\frac{1 + 91}{2}\right)31$$

$$S = (46)31$$

$$S = 1426$$

$$\therefore \quad 1426$$

PROBLEMA 3

Halle el valor de la siguiente serie:

$$\underbrace{9 + 15 + 23 + 33 + \dots}_{\text{20 términos}}$$

Resolución:

$$\begin{array}{lllllll} & & 9; & 15; & 23; & 33; & \dots \\ c \rightarrow +5 & & & & & & \\ a+b \rightarrow +4 & & +6 & & +8 & & +10 \\ 2a \rightarrow +2 & & & +2 & & +2 & \end{array}$$

$$t_n = an^2 + bn + c$$

$$t_n = n^2 + 3n + 5$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\frac{n(n+1)}{2} + 5n$$

$$S_{20} = \frac{20(21)(41)}{6} + 3\frac{20(21)}{2} + 5(20)$$

$$S_{20} = 2870 + 630 + 100$$

$$S_{20} = 3600$$

$\therefore$ 3600

PROBLEMA 4

Halle el valor de la siguiente serie:

$$\underbrace{S = 3 + 12 + 33 + 72 + 135 + \ldots}_{15 \text{ términos}}$$

Resolución:

Dándole forma convenientemente:

$3 \longrightarrow 1^3 + 2$

$12 \longrightarrow 2^3 + 4$

$33 \longrightarrow 3^3 + 6$

$72 \longrightarrow 4^3 + 8$

$135 \longrightarrow 5^3 + 10$

$$t_n = n^3 + 2n$$

$$S_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + 2\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{15} = \left(\frac{15(1\cancel{6}^{8})}{\cancel{2}}\right)^2 + 2\,\frac{15(16)}{2}$$

$$S_{15} = 120^2 + 240$$

$$S_{15} = 14400 + 240$$

$$S_{15} = 14640$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{14640}}$$

PROBLEMA 5

Calcula el valor de la serie M.

$$M=\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\frac{1}{11\times 14}+\cdots+\frac{1}{62\times 65}$$

Resolución:

$$M=\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\frac{1}{11\times 14}+\cdots+\frac{1}{62\times 65}$$

Multiplicamos por 3 a ambos términos (numerador y denominador):

$$M=\frac{3}{3}\left(\frac{1}{5\times 8}+\frac{1}{8\times 11}+\frac{1}{11\times 14}+\cdots+\frac{1}{62\times 65}\right)$$

$$M=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{5\times 8}+\frac{3}{8\times 11}+\frac{3}{11\times 14}+\cdots+\frac{3}{62\times 65}\right)$$

$$M=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\cancel{\frac{1}{8}}+\cancel{\frac{1}{8}}-\cancel{\frac{1}{11}}+\cancel{\frac{1}{11}}-\cancel{\frac{1}{14}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{62}}-\frac{1}{65}\right)$$

$$M=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{65}\right)$$

$$M=\frac{1}{\cancel{3}}\left(\frac{\cancel{60}^{\,20}}{5\times 65}\right)$$

$$\therefore\ M=\frac{4}{65}$$

PROBLEMA 6

La cantidad de visitas que tuvo una nueva página durante los doce primeros días de su creación tuvo un crecimiento serial; así, el primer día solo tuvo 6 visitas, el segundo día, 24 nuevas visitas; el tercer día, se contaron 60 visitas nuevas y el cuarto día tuvo el doble de visitas nuevas que el día anterior, y esto continuó sucesivamente. ¿Cuántas visitas registró en total durante esos primeros doce días?

RESOLUCIÓN

Del enunciado obtenemos la siguiente serie:

$$P = \underbrace{6 + 24 + 60 + 120 + \ldots}_{12\ \text{términos}}$$

Resolución:

Dándole forma convenientemente:

$6 \longrightarrow 1 \times 2 \times 3$

$24 \longrightarrow 2 \times 3 \times 4$

$60 \longrightarrow 3 \times 4 \times 5$

$120 \longrightarrow 4 \times 5 \times 6$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$12 \times 13 \times 14$

$$P = 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \cdots + 12 \times 13 \times 14$$

Recordemos:

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

$$S_{12} = \frac{12(12+1)(12+2)(12+3)}{4}$$

$$S_{12} = \frac{\overset{3}{\cancel{12}}(13)(14)(15)}{\cancel{4}}$$

$$S_{12} = 39(210)$$

$\therefore$ 8190

PROBLEMA 7

Un coleccionista de estampillas compró las mismas diariamente durante la primera mitad del mes de febrero del año 2021, más luego de ella se detuvo, pues ahí se dio cuenta que gastaba mucho dinero en ellas y no le alcanzaría para pagar sus gastos personales y de estudios del mes, prometiendo continuar su colección con compras mes a mes y ya no de forma diaria.

La siguiente lista consigna las cantidades que fue comprando el coleccionista día a día:

7; 14; 23; 34; …

Si el patrón no cambio durante el proceso, halle el número total de estampillas que adquirió en el mes de febrero.

Resolución:

$$\overbrace{7;\ 14;\ 23;\ 34;\ \ldots}^{14\text{ sumandos}}$$

$c \rightarrow$	2				
$a+b \rightarrow$	$+5$	$+7$	$+9$	$+11$	
$2a \rightarrow$	$+2$	$+2$	$+2$		

$$\boldsymbol{t_n = an^2 + bn + c}$$

$$t_n = n^2 + 4n + 2$$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + 2n$$

$$S_{14} = \frac{14(15)(29)}{6} + 4\frac{14(15)}{2} + 2(14)$$

$$S_{14} = 1015 + 420 + 28$$

$$S_{14} = 1463$$

$\therefore$ 1463

Muchas gracias