ALGEBRA

Chapter 21

5th
SECONDARY

MATRICES Y DETERMINANTES

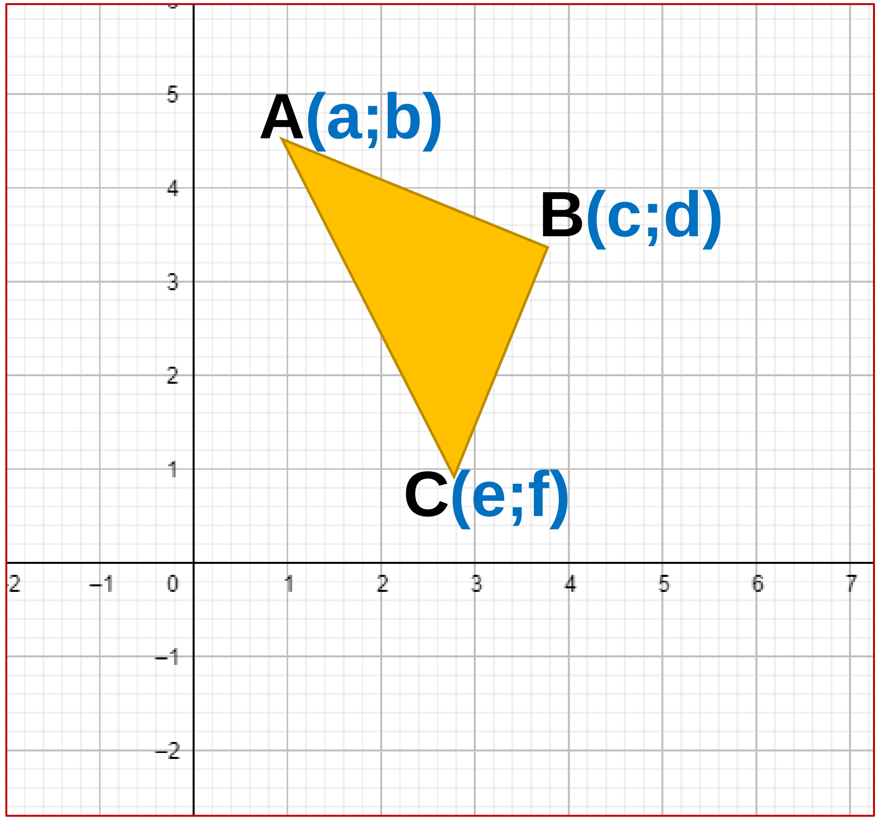
SACO OLIVEROS

HELICO MOTIVATING

¿Sabias que…?

El área de un triángulo se puede calcular a partir de sus vértices

Para tal fin se utiliza los determinantes.



De la imagen, el área sombreada se calcularía así:

$$\text{área} = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}_{\text{determinante}}$$

HELICO THEORY

CHAPTHER 1

MATRICES Y DETERMINANTES

I) MATRICES

Es un arreglo rectangular de elementos distribuidos en filas y columnas

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\dots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3}\dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\text{m columnas}} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}}\right\} \text{n filas}$$

$n \times m$ → El orden de la matriz A

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

El orden de la matriz **B es 3×2**

II) MATRIZ CUADRADA

Son aquellas matrices que tienen el mismo número de filas y columnas.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}_{2x2}$$

Diagonal secundaria

Diagonal Principal

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

TRAZA DE UNA MATRIZ

Es la suma de elementos de la diagonal principal

Ejemplo:

$Traz\,(A) = 5+8 = 13$

III) IGUALDAD DE MATRICES

Sean las matrices

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$$

$$si\ M = N \Rightarrow \begin{cases} a = m \\ b = n \\ c = p \\ d = q \end{cases}$$

Ejemplo:

Hallar x +y si A=B

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & x+1 \\ 5 & 3y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5-x \\ 5 & y-6 \end{pmatrix}$$

Resolución

$$x + 1 = 5 - x$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$3y = y - 6$$

$$\boxed{y = -3}$$

$$\therefore x + y = -1$$

IV) OPERACIONES CON MATRICES

1) ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Ejemplo: Sean las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Hallar:

a) A+B
b) A-B

Resolución

$a)$ $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7+3 & -2+2 \\ 3-1 & 1+4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}}$$

$b)$ $$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7-3 & -2-2 \\ 3-(-1) & 1-4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}}$$

2) MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

2.1) Multiplicación de un escalar por una matriz

$Ejemplo$:

Dada la matriz A

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular 3A

Resolución

$$\mathbf{3A} = \begin{pmatrix} 3(7) & 3(-2) & 3(5) \\ 3(3) & 3(6) & 3(1) \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{3A} = \begin{pmatrix} 21 & -6 & 15 \\ 9 & 18 & 3 \end{pmatrix}$$

2.2)Multiplicación de dos matrices

Sea $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ y $\mathbf{B}=(b_{ij})_{n\times p}$

$\Rightarrow$ $\mathbf{AB}=(c_{ij})_{mxp}$

Observación

Para poder multiplicar A por B el número de columnas de A debe ser igual al número de filas de B

Ejemplo: Dada las matrices Ay B

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

Hallar AB

Resolución:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 3(1)+2(6) & 3(0)+2(5) & 3(3)+2(4) \\ 4(1)+5(6) & 4(0)+5(5) & 4(3)+5(4) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 17 \\ 34 & 25 & 32 \end{pmatrix}_{2\times 3}$$

V) DETERMINANTES $|A|$

Es el valor numérico de una matriz cuadrada. Representa a todos los productos que se pueden formar entre todos sus elementos, de tal modo que en cada producto participen tantos factores como lo indique el orden de la matriz.

Determinantes de Orden 2

Ejemplo:Hallar |A|

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}_{2x2}$$

Resolución

$$|A| = (5)(8) - (9)(3)$$

$$|A| = 13$$

Determinantes de Orden 3

Ejemplo:Hallar |B|

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}_{3x3}$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 6 & 5 \end{matrix}$$

Resolución

$$|B| = (24 + 9 + 0) - (12 + 30 + 0)$$

$$|B| = -9$$

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 1

1. Sea la matriz $A = (a_{ij})_{3x2}$ donde:

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j;\ si\ \ i < j \\ i.j\ \ ;\ si\ \ i = j \\ i + j;\ si\ \ i > j \end{cases}$$

Determina la suma de los elementos de la matriz A

Resolución

Sea la Matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3x2}$$

filas

columnas

De la condición: i<j

$$a_{12} = 1 - 2 \ \ = -1$$

De la condición: i=j

$$\begin{cases} a_{11} = 1.1 \ = 1 \\ a_{22} = 2.2 \ = 4 \end{cases}$$

De la condición: i>j

$$\begin{cases} a_{21} = 2 + 1 \ \ = 3 \\ a_{31} = 3 + 1 \ \ = 4 \\ a_{32} = 3 + 2 \ \ = 5 \end{cases}$$

Reemplazando se obtiene:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore\ Suma\ de\ elementos\ de\ A = 16}$$

2. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 2x+1 & y \\ 3-y & x \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 5-y & 2-x \\ 3-y & 2 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Se sabe que A=B. Evalúe: 2A+3C.

Resolución

Del dato: A=B

$$\begin{pmatrix} 2x+1 & \boxed{y} \\ 3-y & \boxed{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-y & \boxed{2-x} \\ 3-y & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

➡ x=2 ;y=0

Reemplazando obtenemos A

➡ $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

Piden 2A + 3C

$$2A+3C= 2\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2A+3C= \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 15 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore 2A+3C = \begin{pmatrix} 4 & 15 \\ 18 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}7 & 8\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calcule: Traz(AB)

Resolución

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$1(7)+2(1)=9$ $\quad$ $1(8)+2(0)=8$

$4(7)+5(1)=33$ $\quad$ $4(8)+5(0)=32$

$$\begin{pmatrix}9 & 8\\ 33 & 32\end{pmatrix}$$

Piden Traz(AB)

Traz(AB)= 9+32

$$\therefore Traz(AB) = 41$$

4. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 4 & -1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}11 & 1\\ 10 & 5\end{pmatrix}$$

Resuelva: $3(X-2A)=5(B-C)+2(X-A-B)$

Resolución

$$3(X-2A)=5(B-C)+2(X-A-B)$$

Efectuamos y despejamos X

$$3X-6A=5B-5C+2X-2A-2B$$

$$\boxed{X=4A+3B-5C}$$

Reemplazando:

$$X=4\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2 & 7\\ 4 & -1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}11 & 1\\ 10 & 5\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}12 & 20\\ -8 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 21\\ 12 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}55 & 5\\ 50 & 25\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore X=\begin{pmatrix}-49 & 36\\ -46 & -24\end{pmatrix}}$$

5. Halle el valor de x, si:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2(x+1) \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & x+2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

Resolución

Observación:

Se cumple

$$\boxed{\begin{vmatrix} ma & mb \\ c & d \end{vmatrix} = m\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & 2(x+1) \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & x+2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & x+2 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}$$

(x+1) (5-6) =-4(x-1)-1(x+2)

-x-1 = -4x+4-x-2

4x = 3

$$\boxed{\therefore x = 3/4}$$

6 Al resolver la ecuación:

$$\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}\begin{vmatrix} x-1 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 2x-10$$

Se encuentra la edad de Juan hace 20 años. ¿Cuál es la edad de Juan?

Resolución

Observación:

Se cumple

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c-a & d-b \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{array}\begin{vmatrix} x-1 & x & x \\ x-(x-1) & x+2-x & x-x \\ x-(x-1) & x-x & x+3-x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & x \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{(6(x-1)+0+0) \quad -(2x+0+3x)}_{x-6}$$

$$\begin{array}{ccc} x-1 & x & x \\ 1 & 2 & 0 \end{array}$$

x-6 = 2x-10 (por dato)

$\boxed{x=4}$

$\therefore$ *Juan tiene 24 años*

7. Con respecto a tres familias se van a una confitería cierto día, se sabe lo siguiente:
la primera familia consumió 4 alfajores, un suspiro a la limeña y 3 helados de barquillo; la
Segunda consumió 2 alfajores, 2 suspiros a la limeña y 4 helados de barquillo; y la tercera
Consumió 3 alfajores, 3 suspiros a la limeña y 3 helados de barquillo. Calcule el determinante
De la matriz de orden 3x3 que expresa la información sobre las compras en la confitería, por Familia y por producto.

Resolución

$$\begin{array}{c c} 1° & \\ 2° & \\ 3° & \end{array} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{matrix}$$

$$= (24+18+12)\ -(18+48+6)$$

$$\boxed{54 - 72 = -18}$$