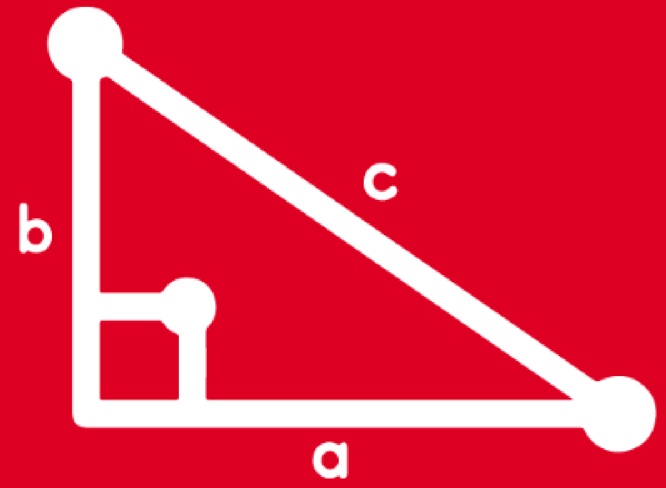
TRIGONOMETRY

Chapter 19

2nd
SECONDARY



ÁNGULOS COTERMINALES

SACO OLIVEROS

Helicomotivación

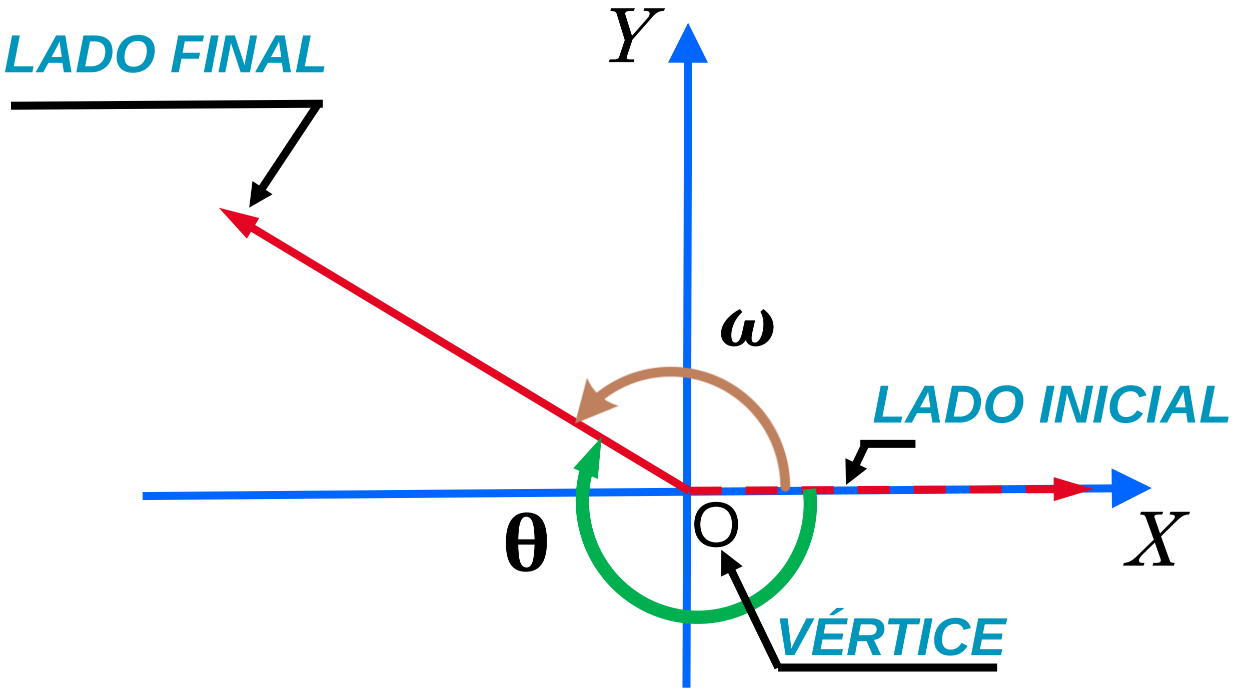
El Canadarm 2 , es un brazo manipulador robótico de la Estación Espacial Internacional. Este manipulador es operado controlando los ángulos de sus articulaciones.

Para obtener la posición final del astronauta en el extremo del brazo , se requiere un uso repetido de las razones trigonométricas de esos ángulos que se forman por los varios movimientos que se realizan.

ω

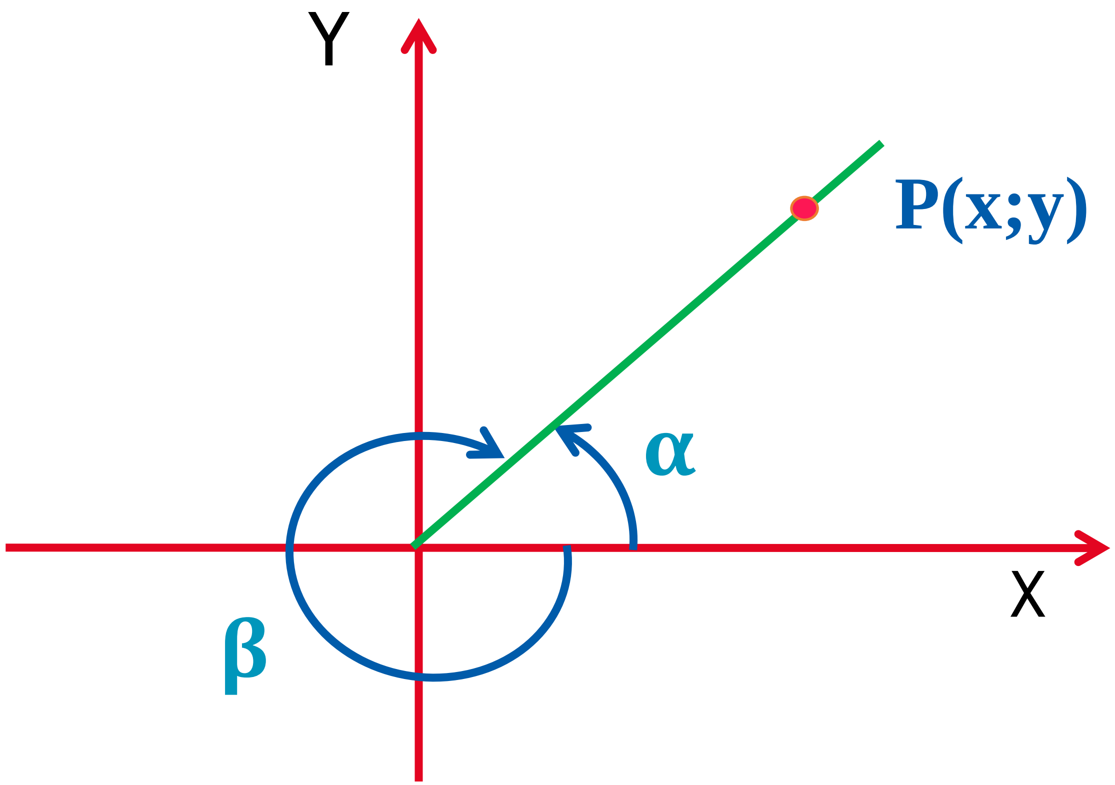
ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial, vértice y lado final (terminal). Solo se diferencian en su medida.



De la figura: θ y ω son las medidas de dos ángulos coterminales.

Siendo α y β las medidas de dos ángulos coterminales, se verifica lo siguiente:



$$\alpha - \beta = 360°\, n \,;\, n \in Z$$

$$R.T.(\alpha) = R.T.(\beta)$$

Es decir:

senα = senβ

cosα = cosβ

tanα = tanβ

cotα = cotβ

secα = secβ

cscα = cscβ

1 Indique cuáles de los siguientes pares de ángulos son coterminales.

I. 350° y –70°
II. 780° y 60°
III. 510° y 170°

Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son x e y, se cumple:

$$x - y = 360° n;\ n \in Z$$

RESOLUCIÓN

I. 350°- (-70°) = 350°+70° = 420°

No son ángulos coterminales.

II. 780°- 60° = 720° = 2(360°)

Sí son ángulos coterminales.

III. 510° - 170° = 340°

No son ángulos coterminales.

∴ En la opción II encontramos ángulos coterminales.

2

Siendo α y 53° las medidas de dos ángulos coterminales, efectúe:

$$P = 15\text{sen}\alpha - 8\cot\alpha$$

Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son α y 53° se cumple:

$$\text{R.T.}(\alpha) = \text{R.T.}(53°)$$

RESOLUCIÓN

Como α y 53° son coterminales, entonces:

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}53°$$

$$\cot\alpha = \cot 53°$$

Reemplazamos en P:

$$P = 15\text{sen}53° - 8\cot 53°$$

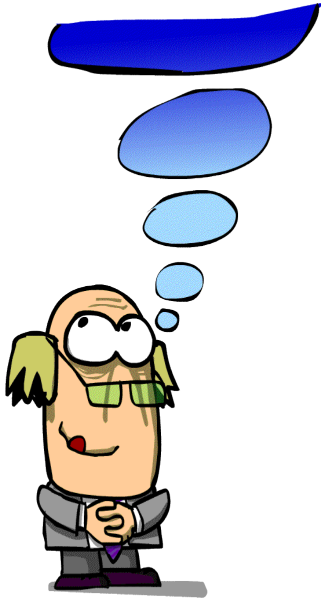
$$P = 15\left(\frac{4}{5}\right) - 8\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$P = 12 - 6$$

$$\therefore \boxed{P = 6}$$

3 Si los ángulos θ y α son coterminales, reduzca

$$M = \frac{8\cot\alpha}{\cot\theta} - \frac{3\sec\theta}{\sec\alpha} + 2$$



Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son θ y α se cumple:

$$R.T.(\theta) = R.T.(\alpha)$$

RESOLUCIÓN

Como θ y α son coterminales, entonces:

$$\cot\theta = \cot\alpha$$

$$\sec\theta = \sec\alpha$$

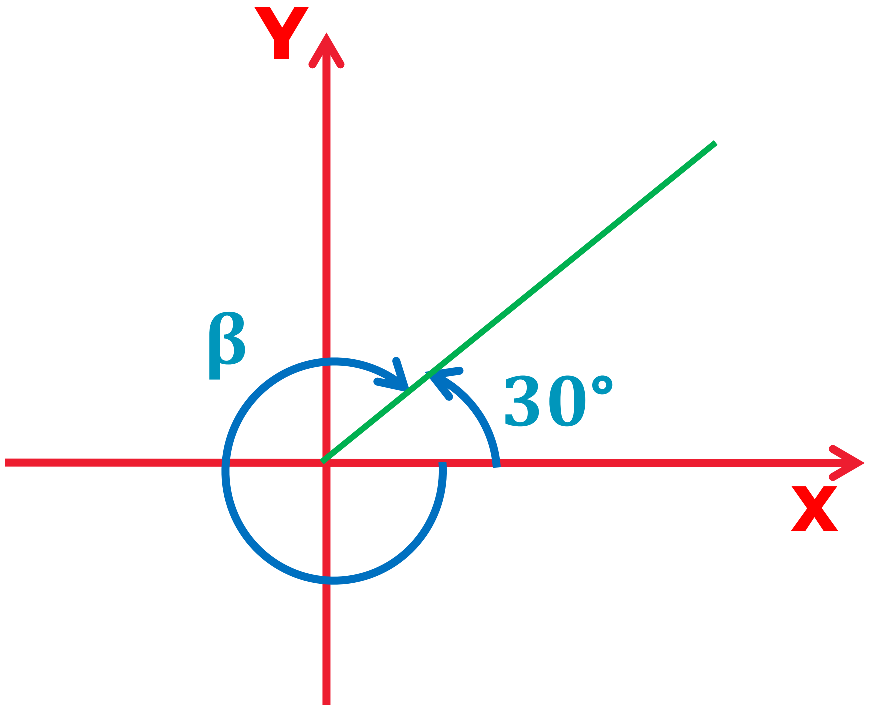
Reemplazamos en M:

$$M = \frac{8\cancel{\cot\theta}}{\cancel{\cot\theta}} - \frac{3\cancel{\sec\theta}}{\cancel{\sec\theta}} + 2$$

$$M = 8 - 3 + 2$$

$$\therefore \boxed{M = 7}$$

4 Del gráfico



Efectúe $E = \sqrt{3}\sec\beta - \cot^2\beta$

RESOLUCIÓN

Del gráfico, β y 30° son ángulos coterminales, por lo tanto:

$$\sec\beta = \sec 30°$$

$$\cot\beta = \cot 30°$$

Reemplazamos en E:

$$E = \cancel{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\cancel{\sqrt{3}}}\right) - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 - 3$$

$$\therefore \boxed{E = -1}$$

5 Siendo θ y β ángulos coterminales, reduzca:

$$F = (3\text{sen}\theta + 4\text{sen}\beta)\csc\theta$$

Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son θ y β, se cumple:

$$R.T.(\theta) = R.T.(\beta)$$

RESOLUCIÓN

Como θ y β son coterminales, entonces:

$$\text{sen}\theta = \text{sen}\beta$$

Reemplazamos en F:

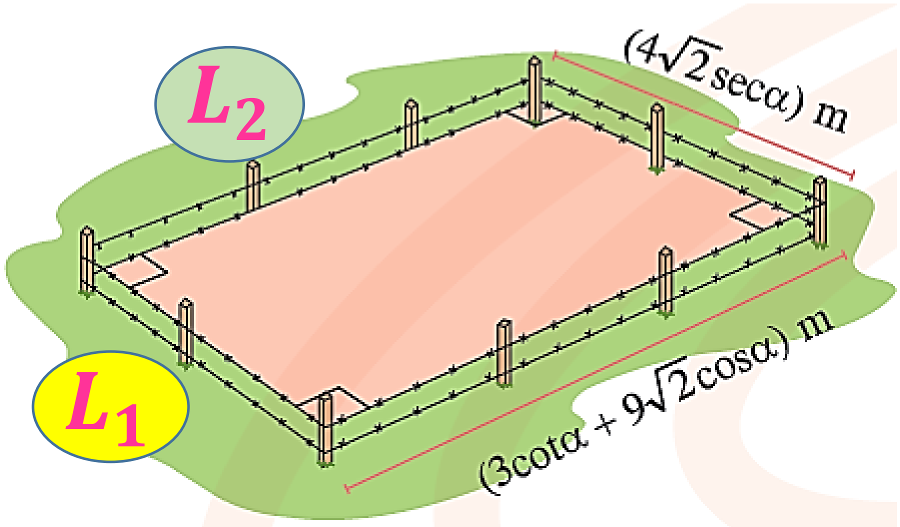
$$F = (3\text{sen}\theta + 4\text{sen}\theta)\csc\theta$$

$$F = 7\text{sen}\theta\csc\theta$$

1

$$\therefore \boxed{F = 7}$$

6 David compró un terreno en forma de rectángulo, tal como se muestra en la figura



Si α y 45° son las medidas de dos ángulos coterminales, ¿cuál es el área de dicho terreno?

RESOLUCIÓN

Como α y 45° son coterminales, luego

$\boxed{\sec\alpha = \sec 45°}$ $\boxed{\cot\alpha = \cot 45°}$

Así:

$$L_1 = 4\sqrt{2}\sec 45° = 8\text{m}$$

$$\sqrt{2}$$

$$L_2 = 3(\tan 45°) + 9\sqrt{2}(\cos 45°)$$

$$L_2 = 3(1) + 9\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right) = 12\text{m}$$

Calculamos: Área del terreno = $L_1 \times L_2$

$$\boxed{\text{Área del terreno} = 96\text{m}^2}$$

7

Como parte de un reto, una profesora planteó el siguiente ejercicio en pizarra para sus alumnos

α es la medida de un ángulo en posición normal cuyo lado final pertenece al tercer cuadrante y $\csc\alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

Si α y β son coterminales y $\cot\beta = \dfrac{k-1}{k+2}$. Calcule el valor de k.

La respuesta de 4 alumnos fueron las siguientes

- Alejandro : 5
- Carlos : 7
- Juamar : -8
- Micaela : -6

Quien respondió correctamente

RESOLUCIÓN

Como $\alpha \in$ IIIC entonces $\Rightarrow x<0\ ;\ y<0$

$$\boxed{\csc\alpha = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{13}}{-3}}$$

$r = \sqrt{13}\ ;\quad y = -3$

Radio vector: $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

$$x^2 + (-3)^2 = \sqrt{13}^{\,2}$$

$$x^2 + 9 = 13$$

$$x^2 = 4$$

$x = 2\ ;\quad x = -2$

$\boxed{x=-2\ ,\ x \in \text{IIIC}}$

Como α y β son coterminales, luego

$$\boxed{\text{R.T.}(\alpha) = \text{R.T.}(\beta)}$$

$$\boxed{\cot\alpha = \cot\beta}$$

$$\boxed{\cot\alpha = \cot\beta = \frac{x}{y}}$$

$$\boxed{\cot\beta = \frac{x}{y} = \frac{\cancel{-}2}{\cancel{-}3} = \frac{k-1}{k+2}}$$

$2k + 4 = 3k - 3$

$3 + 4 = 3k - 2k$

$\Rightarrow k = 7$

Carlos respondió correctamente