

TRIGONOMETRY

Chapter 02

5th
SECONDARY

PROPIEDADES DE LAS
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS
DE ÁNGULOS AGUDOS



SACO OLIVEROS

TEOREMA DE PITÁGORAS



I) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS DE UN ÁNGULO AGUDO (RTR)

Para un mismo ángulo agudo α se cumple :

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = \frac{\text{CO}}{\text{H}} \cdot \frac{\text{H}}{\text{CO}} = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = \frac{\text{CA}}{\text{H}} \cdot \frac{\text{H}}{\text{CA}} = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = \frac{\text{CO}}{\text{CA}} \cdot \frac{\text{CA}}{\text{CO}} = 1$$

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = 1$$

Ejemplo :

$$E = \frac{7 \text{ sen}35^\circ \text{ csc}35^\circ - 3 \text{ tan}49^\circ \text{ cot}49^\circ}{2 \text{ cos}62^\circ \text{ sec}62^\circ} = \frac{7(1) - 3(1)}{2(1)} = \frac{7-3}{2} = 2$$

II) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS AGUDOS COMPLEMENTARIOS (CO – RT)

Definición de CO – RT

Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; $0^\circ < \beta < 90^\circ$
 $\alpha + \beta = 90^\circ$



$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\text{tan}\alpha = \cot\beta$$

$$\text{sec}\alpha = \csc\beta$$

CO – RT



Ejemplos :

$$\text{sen}35^\circ = \cos55^\circ \text{ porque } 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$$

$$\text{tan}(a + 42^\circ) = \cot(48^\circ - a)$$

$$\text{porque } \cancel{a} + 42^\circ + 48^\circ - \cancel{a} = 90^\circ$$

HELICO PRACTICE 1

Las edades de Juan e Iván son m y n años respectivamente.- Si dichos valores se pueden calcular al resolver las siguientes expresiones :

$$\cos(2m + 30)^\circ \cdot \sec 70^\circ = 1 \quad \wedge \quad \tan(3n)^\circ = \cot 54^\circ$$

- a) ¿ Cuáles son las edades de Juan e Iván ?
b) ¿Cuál es la suma de ambas edades ?

RESOLUCIÓN

$$\cos(2m + 30)^\circ \cdot \sec 70^\circ = 1$$

Por RTR :

$$(2m + 30)^\circ = 70^\circ$$

$$2m = 40 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 20}$$

$$\tan(3n)^\circ = \cot 54^\circ$$

Por CO – RT :

$$(3n)^\circ + 54^\circ = 90^\circ$$

$$(3n)^\circ = 36^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 12}$$

Luego :

a) Juan = 20 años

Iván = 12 años

b) Suma = 32 años

HELICO PRACTICE 2

Si α es la medida de un ángulo agudo, tal que :

$$\tan(45^\circ + 2\alpha) \cdot \cot(60^\circ - \alpha) = 1,$$

$$\text{efectúe } M = (\sec 12\alpha + \tan 9\alpha)^2$$

RESOLUCIÓN

$$\tan(45^\circ + 2\alpha) \cdot \cot(60^\circ - \alpha) = 1$$

Por RTR :

$$45^\circ + 2\alpha = 60^\circ - \alpha$$

$$3\alpha = 15^\circ$$

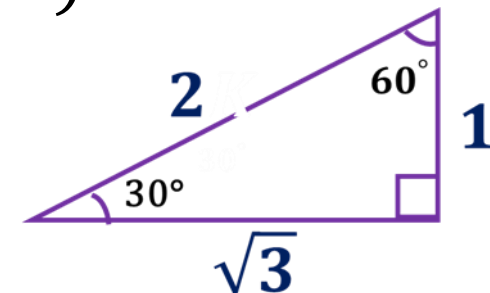
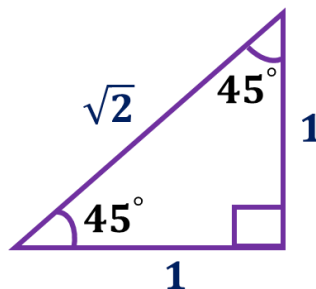
$$\alpha = 5^\circ$$

Luego : $M = (\sec 12\alpha + \tan 9\alpha)^2$

$$M = (\sec 60^\circ + \tan 45^\circ)^2$$

$$M = (2 + 1)^2$$

$$\therefore M = 9$$



HELICO PRACTICE 3

Siendo α y β la medida de dos ángulos agudos, los cuales cumplen que : $\operatorname{sen}\alpha - \cos 2\beta = 2 \operatorname{sen} 30^\circ - 1$

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc 4\beta = \tan 45^\circ$$

Calcule $\tan(\alpha - \beta)$

RESOLUCIÓN

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc 4\beta = \tan 45^\circ = 1$$

Por RTR : $\alpha = 4\beta$

$$\operatorname{sen}\alpha - \cos 2\beta = 2 \operatorname{sen} 30^\circ - 1$$

$$\operatorname{sen}\alpha - \cos 2\beta = 2 \left(\frac{1}{2} \right) - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos 2\beta$$

Por CO - RT :

$$\alpha + 2\beta = 90^\circ$$

$$4\beta + 2\beta = 90^\circ$$

$$6\beta = 90^\circ$$

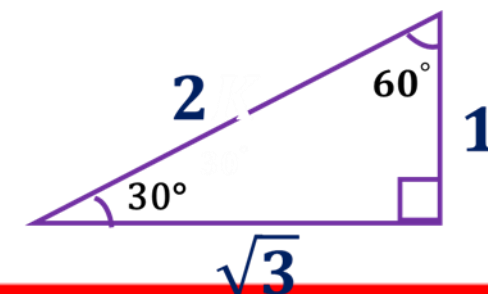
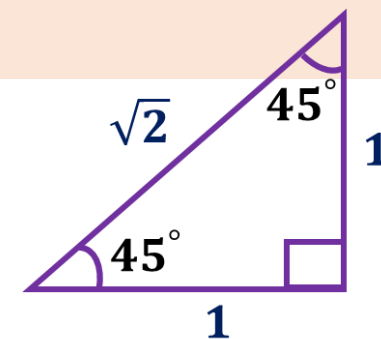
$$\beta = 15^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Luego :

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan 45^\circ$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = 1$$



HELICO PRACTICE 4

Determine la medida del ángulo agudo x , que cumple : $(\tan 10^\circ)^{\sin(20^\circ + x)} = (\cot 80^\circ)^{\cos(x - 2^\circ)}$

RESOLUCIÓN

Por CO – RT : $\tan 10^\circ = \cot 80^\circ$

Dato :

$$(\tan 10^\circ)^{\sin(20^\circ + x)} = (\cot 80^\circ)^{\cos(x - 2^\circ)}$$

$$\sin(20^\circ + x) = \cos(x - 2^\circ)$$

Por CO – RT :

$$20^\circ + x + x - 2^\circ = 90^\circ$$

$$2x = 72^\circ$$

$$\therefore x = 36^\circ$$



HELICO PRACTICE 5

Si θ es la medida de un ángulo agudo que cumple :

$$\sec\theta = \frac{3 \operatorname{sen}70^\circ + \cos20^\circ}{5 \operatorname{sen}70^\circ - 2 \cos20^\circ}, \text{ efectúe } E = \sqrt{7}(\tan\theta + \cot\theta)$$

Por CO – RT :

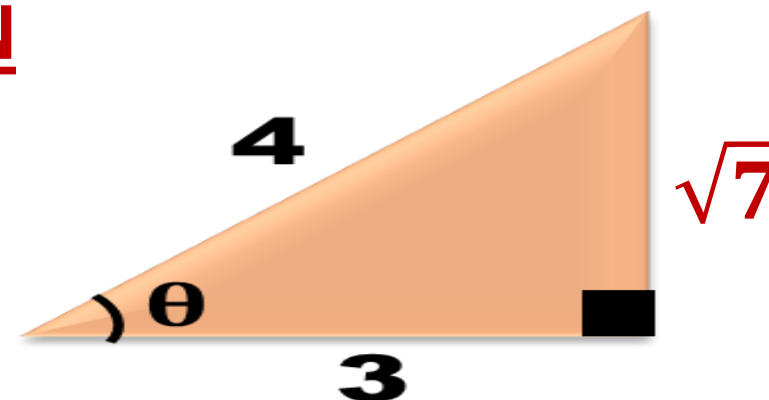
$$\operatorname{sen}70^\circ = \cos20^\circ$$

Luego :

$$\sec\theta = \frac{3 \cos20^\circ + 1 \cos20^\circ}{5 \cos20^\circ - 2 \cos20^\circ}$$

$$\sec\theta = \frac{4 \cos20^\circ}{3 \cos20^\circ} = \frac{4}{3}$$

RESOLUCIÓN



$$E = \sqrt{7}(\tan\theta + \cot\theta)$$

$$E = \sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

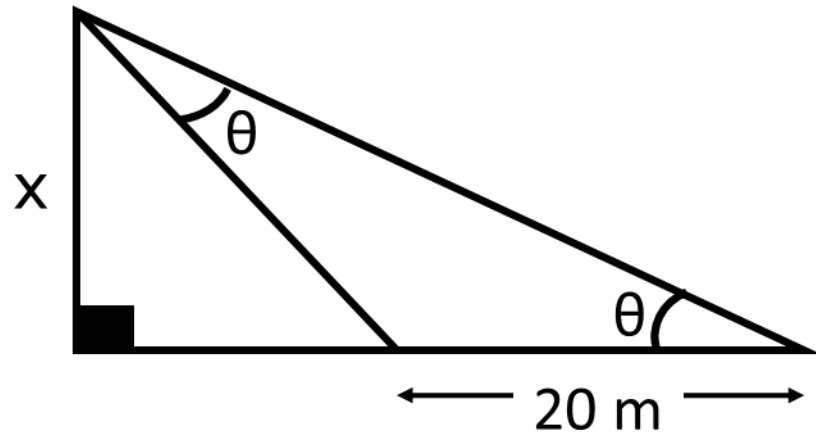
$$E = \frac{7}{3} + 3$$

$$\therefore E = \frac{16}{3}$$

HELICO PRACTICE 6

Halle el valor de x , si en el gráfico se cumple :

$$\tan(30^\circ - \theta) - \cot(30^\circ + 3\theta) = 0$$



RESOLUCIÓN

Dato :

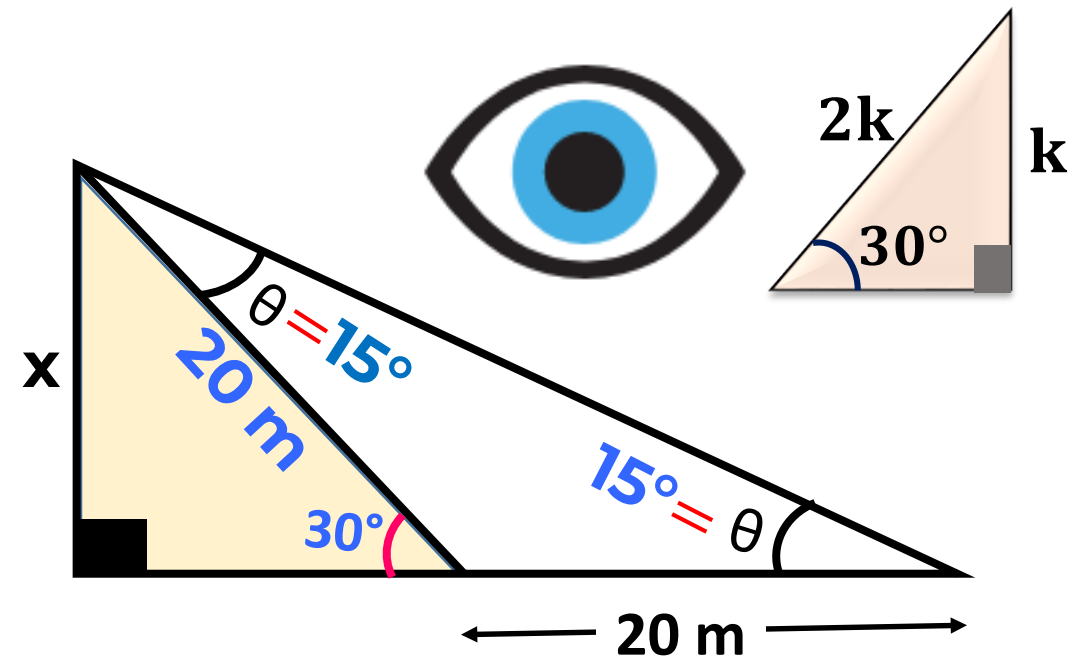
$$\tan(30^\circ - \theta) - \cot(30^\circ + 3\theta) = 0$$

$$\tan(30^\circ - \theta) = \cot(30^\circ + 3\theta)$$

Por CO – RT :

$$30^\circ - \theta + 30^\circ + 3\theta = 90^\circ$$

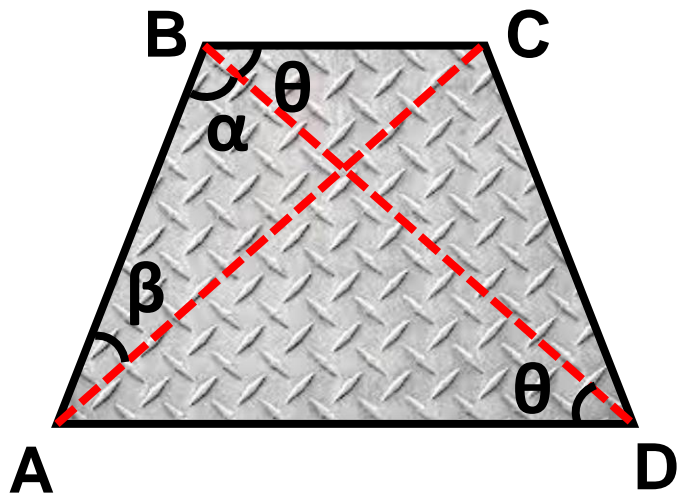
$$2\theta = 30^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ$$



$$\therefore x = 10 \text{ m}$$

HELICO PRACTICE 7

Miguel trabaja en un taller y tiene una pequeña pieza metálica ABCD, en la cual desea hacer los cortes \overline{AC} y \overline{BD} tal como muestra la figura.



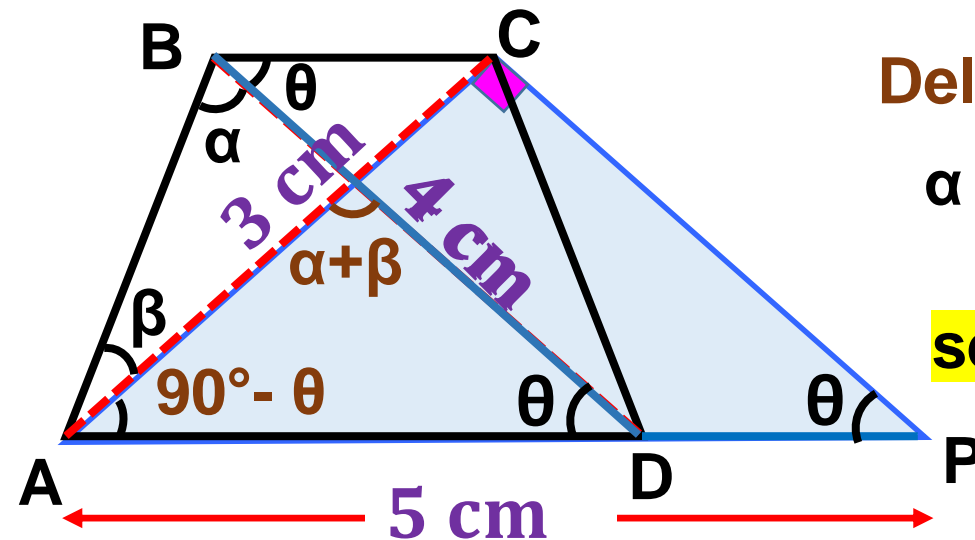
Si se cumple: $AC = 3 \text{ cm}$, $BD = 4 \text{ cm}$ y $AD + BC = 5 \text{ cm}$.- Calcule :

$$E = \frac{\tan(\alpha + \beta - \theta)}{\cot \theta} + \operatorname{sen} \alpha \cdot \sec \beta$$

RESOLUCIÓN

$$m\angle CBD = m\angle ADB \Rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

$$BC = DP \Rightarrow AD + DP = 5 \text{ cm}$$



Del gráfico :

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

Calculamos E :

$$E = \frac{\tan(90^\circ - \theta)}{\cot \theta} + \cos \beta \cdot \sec \beta = \frac{\cot \theta}{\cot \theta} + 1$$

$$E = 1 + 1$$

$$\therefore E = 2$$



SACO
OLIVEROS