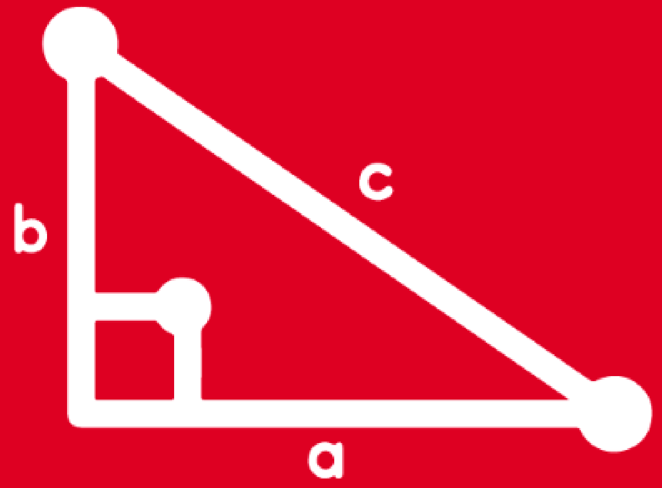
TRIGONOMETRY

Chapter 21

4th
SECONDARY



TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

En el siglo XVI aparecieron en Europa una serie de identidades conocidas como **Reglas de Prostaféresis**, las que actualmente son conocidas como **Identidades de Transformaciones Trigonométricas**; éstas convierten una suma o diferencia de senos y cosenos a productos y viceversa.

Para deducir estas identidades se utilizan las identidades del ángulo compuesto :

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x.\cos y+\cos x.\operatorname{sen}y \quad \text{... (1)}$$

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x.\cos y-\cos x.\operatorname{sen}y \quad \text{... (2)}$$

Sumando (1) y (2) :

$$\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=2\operatorname{sen}x.\cos y \quad \text{... (*)}$$

Hacemos cambios de variables :

Sea $\begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases}$

$$x=\frac{A+B}{2} \;;\; y=\frac{A-B}{2}$$

Reemplazando en (*) , se obtiene :

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1ER CASO : De suma o diferencia de senos y cosenos a produto .

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejemplos :

- $\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}2x\cos x}$

- $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=2\cos\left(\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{80^\circ-40^\circ}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos 80^\circ+\cos 40^\circ=2\underbrace{\cos 60^\circ}_{1/2}\cos 20^\circ$

$\Rightarrow$ $\boxed{\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=\cos 20^\circ}$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

2DO CASO : De producto de senos y cosenos a suma o diferencia .

$$2\,\text{sen}\alpha\cos\beta = \text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

Observación:

Si al aplicar transformaciones trigonométricas obtenemos ángulos negativos, se debe usar :

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

Ejemplos:

- $2\,\text{sen}3x\cos x = \text{sen}(3x+x)+\text{sen}(3x-x)$

$\Rightarrow$ $2\,\text{sen}3x\cos x = \text{sen}4x+\text{sen}2x$

- $2\cos20^\circ\cos10^\circ = \cos(20^\circ+10^\circ)+\cos(20^\circ-10^\circ)$

$\Rightarrow$ $2\cos20^\circ\cos10^\circ = \underbrace{\cos30^\circ}+\cos10^\circ$

$\Rightarrow$ $2\cos20^\circ\cos10^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\cos10^\circ$

HELICO PRACTICE 1

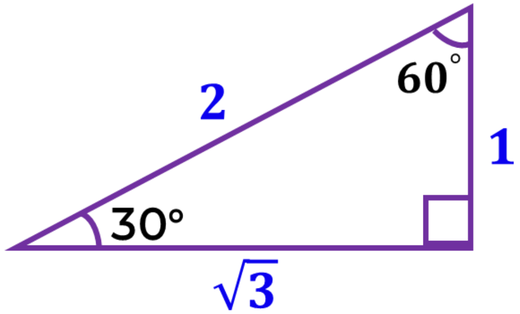
Reduzca $Q = \dfrac{\cos 50° + \cos 40°}{\operatorname{sen} 35° + \operatorname{sen} 25°}$

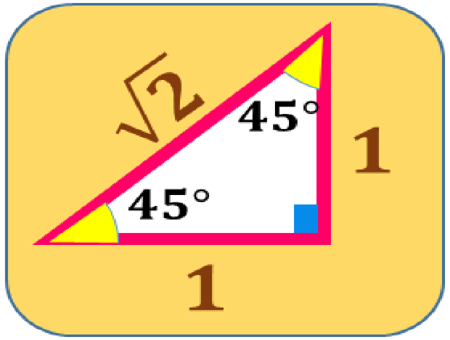
RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$





$$Q = \frac{\cos 50° + \cos 40°}{\operatorname{sen} 35° + \operatorname{sen} 25°}$$

$$Q = \frac{\cancel{2}\cos\left(\frac{50° + 40°}{2}\right).\cancel{\cos\left(\frac{50° - 40°}{2}\right)}}{\cancel{2}\operatorname{sen}\left(\frac{35° + 25°}{2}\right).\cancel{\cos\left(\frac{35° - 25°}{2}\right)}}$$

$$Q = \frac{\cos 45°}{\operatorname{sen} 30°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\therefore\ Q = \sqrt{2}}$$

HELICO PRACTICE 2

Halle el valor de x, siendo este agudo, si $\cot(x + 10°) = \dfrac{\text{sen}4x + \text{sen}2x}{\cos 4x + \cos 2x}$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cot(x + 10°) = \frac{\text{sen}4x + \text{sen}2x}{\cos 4x + \cos 2x}$$

$$\cot(x + 10°) = \frac{\cancel{2}\,\text{sen}\left(\frac{4x+2x}{2}\right).\cancel{\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}}{\cancel{2}\cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right).\cancel{\cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}}$$

$$\cot(x + 10°) = \tan 3x$$

Por CO – RT : $x + 10° + 3x = 90°$

$$\boxed{\therefore x = 20°}$$

HELICO PRACTICE 3

Reduzca $K = \dfrac{\text{sen}11x + \text{sen}7x + \text{sen}3x}{\cos11x + \cos7x + \cos3x}$

Recordar :

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

RESOLUCIÓN

$$K = \frac{\text{sen}11x + \text{sen}3x + \text{sen}7x}{\cos11x + \cos3x + \cos7x}$$

$$K = \frac{2\,\text{sen}7x\,.\,\cos4x + \text{sen}7x}{2\cos7x\,.\,\cos4x + \cos7x}$$

$$K = \frac{\text{sen}7x\,\cancel{(2\cos2x + 1)}}{\cos7x\,\cancel{(2\cos2x + 1)}}$$

$$\therefore\ K = \tan7x$$

HELICO PRACTICE 4

Simplifique $E = 2\ \text{sen}41°.\cos19° - \text{sen}22°$

RESOLUCIÓN

$$E = 2\ \text{sen}41°.\cos19° - \text{sen}22°$$

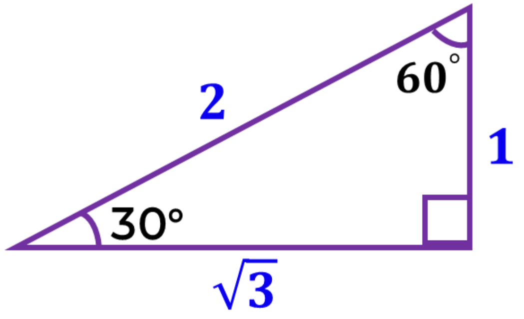
Recordar : $2\ \text{sen}\alpha\ .\ \cos\beta = \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)$

$$E = \text{sen}(41° + 19°) + \text{sen}(41° - 19°) - \text{sen}22°$$

$$E = \text{sen}60° + \cancel{\text{sen}22°} - \cancel{\text{sen}22°}$$

$$E = \text{sen}60°$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$



HELICO PRACTICE 5

Reduzca $Q = \dfrac{2\,\text{sen}10°\,.\,\cos 20° + \cos 80°}{2\,\text{sen}70°\,.\,\text{sen}10° + \text{sen}10°}$

Recordar :

$2\,\text{sen}\alpha\,.\,\cos\beta = \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)$

$2\,\text{sen}\alpha\,.\,\text{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

RESOLUCIÓN

$$Q = \frac{2\,\text{sen}10°\,.\,\cos 20° + \cos 80°}{2\,\text{sen}70°\,.\,\text{sen}10° + \text{sen}10°}$$

$$Q = \frac{\text{sen}(10°+20°) + \text{sen}(10°-20°) + \cos 80°}{\cos(70°-10°) - \cos(70°+10°) + \text{sen}10°}$$

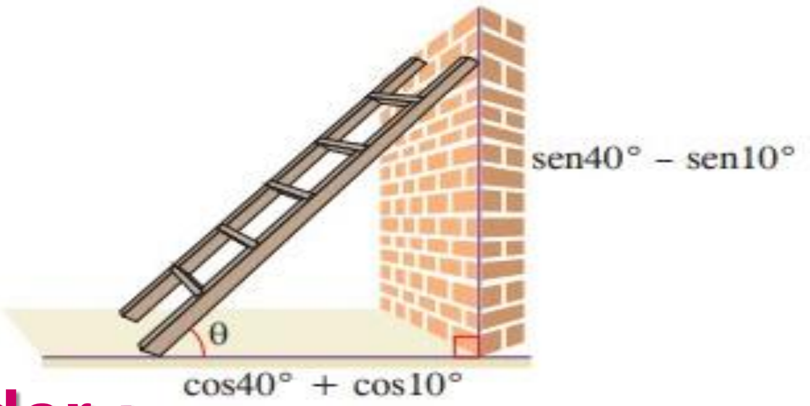
$$Q = \frac{\text{sen}30° + \text{sen}(-10°) + \text{sen}10°}{\cos 60° \cancel{- \cos 80° + \cos 80°}}$$

$$Q = \frac{\text{sen}30° \cancel{- \text{sen}10° + \text{sen}10°}}{\cos 60°} = \frac{\text{sen}30°}{\cos 60°}$$

$$\boxed{\therefore\ Q = 1}$$

HELICO PRACTICE 6

A Elisa se le plantea el siguiente problema : A partir del gráfico mostrado, debe determinar
E = 2 sen2θ + tan3θ, sabiendo que la escalera y el piso forman un ángulo θ.



RESOLUCIÓN

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}40° - \operatorname{sen}10°}{\cos 40° + \cos 10°}$$

$$\tan\theta = \frac{\cancel{2\cos 25°}.\operatorname{sen}15°}{\cancel{2\cos 25°}.\cos 15°} = \tan 15°$$

$\theta = 15°$

Recordar :

$$\operatorname{sen}A - \operatorname{sen}B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Luego: E = 2 sen2(15°) + tan3(15°)

$E = 2\operatorname{sen}30° + \tan 45° = \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) + 1$

$\boxed{\therefore E = 2}$

HELICO PRACTICE 7

Al copiar de la pizarra la expresión sen55°. cos5°, Daniel cometió un error y escribió sen35°. sen5°.
Calcule la suma de lo que estaba escrito en la pizarra y lo que copió Daniel.

RESOLUCIÓN

Calculamos : $S = \text{sen}55°.\cos 5° + \text{sen}35°.\text{sen}5°$

Recordar : $2\,\text{sen}\alpha.\cos\beta = \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)$ $\qquad 2\,\text{sen}\alpha.\text{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

Luego : $2S = 2\,\text{sen}55°.\cos 5° + 2\,\text{sen}35°.\text{sen}5°$

$$2S = \text{sen}60° + \cancel{\text{sen}50°} + \cos 30° - \cancel{\cos 40°}$$

$$2S = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\therefore\ S = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

SACO
OLIVEROS