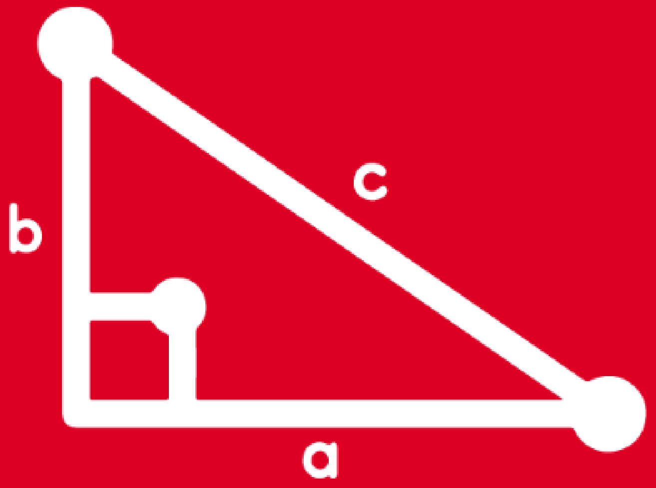
TRIGONOMETRY

Chapter 21

4th
SECONDARY



TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

SACO OLIVEROS

HELICO-MOTIVACIÓN

En el siglo XVI, aparecieron en Europa una serie de identidades conocidas como las *reglas de prostaféresis*; en la actualidad son conocidas como las identidades de **Transformaciones Trigonométricas**, las cuales convierten una suma y diferencia de senos y cosenos a un producto y viceversa.

Para deducir estas identidades se usan las *identidades del ángulo compuesto*:

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x.\cos y+\cos x.\operatorname{sen}y \quad \dots (1)$$

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x.\cos y-\cos x.\operatorname{sen}y \quad \dots (2)$$

Sumando **(1)** y **(2)**:

$$\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=2\operatorname{sen}x.\cos y \quad \dots (*)$$

Hacemos un cambio de variable:

$$\text{Sea}\ \begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{A+B}{2}\ ;\ y=\frac{A-B}{2}$$

Reemplazando en **(*)** , se obtiene:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS I

De suma y diferencia de senos y cosenos a producto

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejemplos:

- $\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}2x\cos x$

- $\cos 80^o+\cos 40^o=2\cos\left(\frac{80^o+40^o}{2}\right)\cos\left(\frac{80^o-40^o}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\cos 80^o+\cos 40^o=2\underbrace{\cos 60^o}_{1/2}\cos 20^o$

$\Rightarrow$ $\cos 80^o+\cos 40^o=\cos 20^o$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS II

$$2\operatorname{sen}\alpha.\cos\beta = \operatorname{sen}(\alpha+\beta) + \operatorname{sen}(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha.\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\operatorname{sen}\alpha.\operatorname{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

Observación:

Si al aplicar las transformaciones trigonométricas obtenemos ángulos negativos, debes usar :

$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}x$ $\quad$ $\cos(-x) = \cos x$

Ejemplos:

- $2\operatorname{sen}4x\cos x = \operatorname{sen}(4x+x) + \operatorname{sen}(4x-x)$

$\Rightarrow$ $2\operatorname{sen}4x\cos x = \operatorname{sen}5x + \operatorname{sen}3x$

- $2\cos 40^\circ\cos 20^\circ = \cos(40^\circ+20^\circ) + \cos(40^\circ-20^\circ)$

$\Rightarrow$ $2\cos 20^\circ\cos 10^\circ = \underbrace{\cos 60^\circ} + \cos 20^\circ$

$\Rightarrow$ $2\cos 20^\circ\cos 10^\circ = \dfrac{1}{2} + \cos 20^\circ$

HELICOPRACTICE 1

Reduzca : $\mathbf{Q} = \dfrac{\cos 50° + \cos 40°}{\operatorname{sen} 35° + \operatorname{sen} 25°}$

Resolución:

$$Q = \frac{\cos 50° + \cos 40°}{\operatorname{sen} 35° + \operatorname{sen} 25°}$$

$$Q = \frac{2\cos\left(\dfrac{50° + 40°}{2}\right)\cos\left(\dfrac{50° - 40°}{2}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\dfrac{35° + 25°}{2}\right)\cos\left(\dfrac{35° - 25°}{2}\right)}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$Q = \frac{\cancel{2}\cos(45°)\cancel{\cos(5°)}}{\cancel{2}\operatorname{sen}(30°)\cancel{\cos(5°)}} \Rightarrow Q = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \mathbf{Q} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

HELICOPRACTICE 2

Halle el valor de “ x ” , siendo este agudo :

$$\cot(x+10°)=\frac{sen4x+sen2x}{cos4x+cos2x}$$

Resolución:

$$\cot(x+10°)=\frac{sen4x+sen2x}{cos4x+cos2x}$$

$$\cot(x+10°)=\frac{\cancel{2}sen(3x)\cancel{cos(x)}}{\underbrace{\cancel{2}cos(3x)}\cancel{cos(x)}}$$

$$\cot(x+10°)=tan(3x)$$

R.T. ángulos complementarios:

$$x+10°+3x=90° \Rightarrow 4x=80°$$

$$\therefore x=20°$$

$$senA+senB=2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$cosA+cosB=2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha}=tan\alpha$$

HELICOPRACTICE 3

Reduzca :

$$K = \frac{sen11x + sen7x + sen3x}{cos11x + cos7x + cos3x}$$

Resolución:

$$K = \frac{sen11x + sen3x + sen7x}{cos11x + cos3x + cos7x}$$

$$K = \frac{2\,sen(7x)\,cos(4x) + sen7x}{2\,cos(7x)\,cos(4x) + cos7x}$$

$$K = \frac{sen7x.\cancel{(2cos4x + 1)}}{cos7x.\cancel{(2cos4x + 1)}}$$

$$\therefore K = tan7x$$

$$senA + senB = 2sen\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$cosA + cosB = 2cos\left(\frac{A+B}{2}\right)cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

HELICOPRACTICE 4

Simplifica: $E=2sen41°.cos19°-sen22°$

Resolución:

Recordar:

$$2senx.cosy = sen(x+y) + sen(x-y)$$

$$E = \underbrace{2sen41°.cos19°}-sen22°$$

$$E = sen(41°+19°)+sen(41°-19°)-sen22°$$

$$E = sen60°+\cancel{sen22°}-\cancel{sen22°}$$

$$\boxed{\therefore E = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

HELICOPRACTICE 5

Reduce: $Q=\dfrac{\overbrace{2sen10°.cos20°}+cos80°}{\underbrace{2sen70°.sen10°}+sen10°}$

Resolución:

Recordar:

$$2senx.cosy = sen(x+y) + sen(x-y)$$

$$2senx.seny = cos(x-y) - cos(x+y)$$

$$Q = \dfrac{sen(10°+20°)+sen(10°-20°) + \overbrace{cos80°}^{sen10°}}{cos(70°-10°)-cos(70°+10°) + \underbrace{sen10°}_{cos80°}}$$

$$Q = \dfrac{sen30°\cancel{-sen10°}\cancel{+sen10°}}{cos60°\cancel{-cos80°}\cancel{+cos80°}}$$

$$Q=\dfrac{\overbrace{sen30°}^{cos60°}}{cos60°}$$

$$Q=\dfrac{cos60°}{cos60°}$$

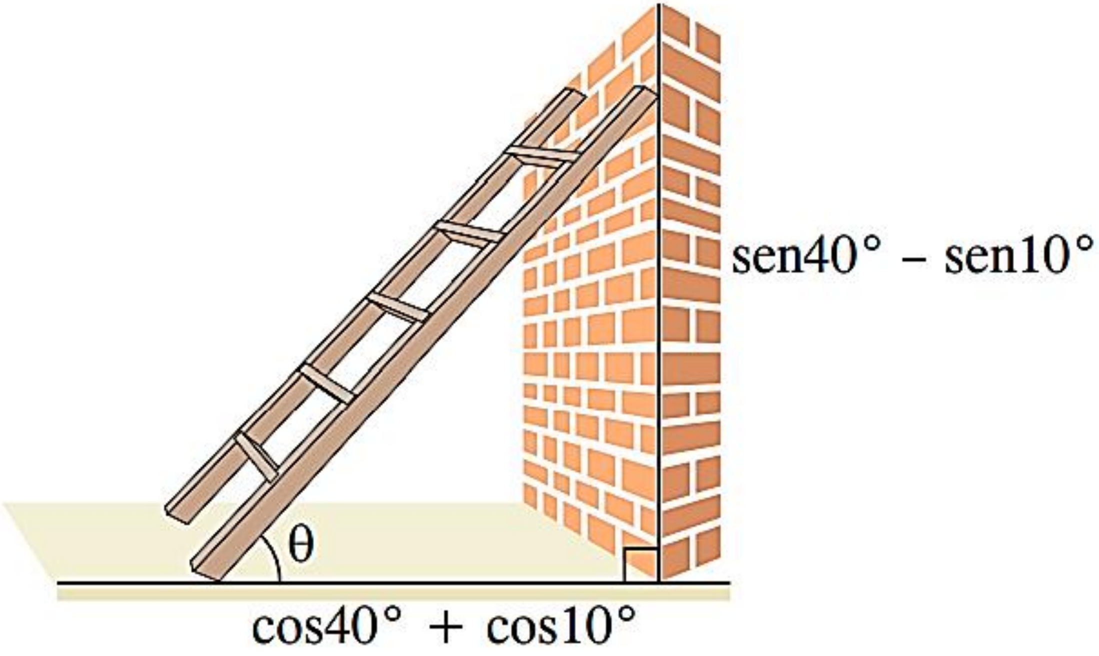
$$\boxed{\therefore Q = 1}$$

HELICOPRACTICE 6

A Elisa se le plantea el siguiente problema, que a partir del gráfico mostrado, determine

$$\mathbf{E = 2sen2\theta + tan3\theta}$$

sabiendo que la escalera y el piso forma el ángulo $\boldsymbol{\theta}$.



Resolución:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}40° - \text{sen}10°}{\cos 40° + \cos 10°}$$

$$\tan\theta = \frac{\cancel{2}\cancel{\cos 25°}\cdot \text{sen}15°}{\cancel{2}\cancel{\cos 25°}\cdot \cos 15}$$

$$\tan\theta = \tan 15° \rightarrow \boxed{\theta = 15°}$$

Reemplazando.

$$\mathbf{E = 2sen2(15°) + tan3(15°)}$$

$$\mathbf{E = 2sen30° + tan45°}$$

$$\mathbf{E} = \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) + 1$$

$$\boxed{\therefore E = 2}$$

HELICOPRACTICE 7

Al copiar de la pizarra, la expresion sen55°.cos5°, Daniel cometio un error y escribio sen35°.sen5°. Calcule la suma de lo que estaba escrito en la pizarra y lo que copio Daniel.

Recordar:

$$\mathbf{2senx.cosy = sen(x+y) + sen(x-y)}$$

$$\mathbf{2senx.seny = cos(x-y) - cos(x+y)}$$

Resolución:

$$D = sen55°.cos5° + sen35°.sen5°$$

$$2D = \underbrace{2sen55°.cos5°} + \underbrace{2sen35°.sen5°}$$

$$2D = sen60° + \cancel{sen50°} + cos30° - \cancel{cos40°}$$

$$2D = sen60° + cos30°$$

$$2D = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow 2D = \sqrt{3}$$

$$\boxed{\therefore D = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$