



TRIGONOMETRY

Chapter 06

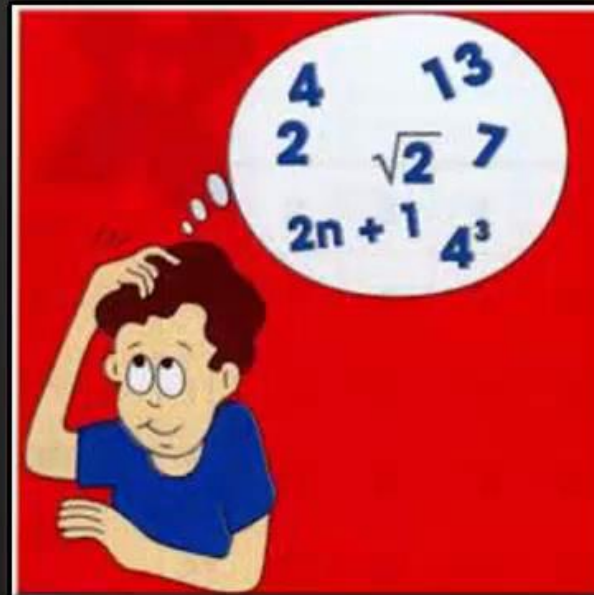
4th
SECONDARY

Propiedades de las razones trigonométricas



 **SACO OLIVEROS**

¿CUÁL ES EL RECÍPROCO DE UN NÚMERO?





PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Razones trigonométricas recíprocas

Si α es ángulo agudo se cumple que:

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{csc}\alpha = 1$$

$$\operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{sec}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tan}\alpha \cdot \operatorname{cot}\alpha = 1$$

Ejemplos:

- $\operatorname{sen}40^\circ \cdot \operatorname{cos}40^\circ = 1$
- $\operatorname{cot}74^\circ \cdot \operatorname{tan}74^\circ = 1$

Razones trigonométricas de ángulos complementarios

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$ se cumple:

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{cos}\beta$$

$$\operatorname{tan}\alpha = \operatorname{cot}\beta$$

$$\operatorname{sec}\alpha = \operatorname{csc}\beta$$

Ejemplos:

- $\operatorname{sen}65^\circ = \operatorname{cos}25^\circ$
- $\operatorname{sec}36^\circ = \operatorname{csc}54^\circ$



1. Halle el valor de θ si

$$\operatorname{sen}(4\theta - 18^\circ) \cdot \operatorname{csc}(2\theta + 10^\circ) = 1$$

Recordamos

s

Propiedad de las RT recíprocas

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{csc}\alpha = 1$$

$$\operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{sec}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tan}\alpha \cdot \operatorname{cot}\alpha = 1$$

Resolución

Por propiedad de las razones trigonométricas recíprocas:

$$\rightarrow 4\theta - 18^\circ = 2\theta + 10^\circ$$

$$2\theta = 28^\circ$$

$$\therefore \theta = 14^\circ$$



2. Halle el valor de α si

$$\sec(\alpha + 10^\circ) = \csc(2\alpha + 20^\circ)$$

Recordamos

s

Propiedad de las RT de ángulos complementarios

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces:

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

Resolución

Por propiedad de las RT de ángulos complementarios:

$$\rightarrow \alpha + 10^\circ + 2\alpha + 20^\circ = 90^\circ$$

$$3\alpha + 30^\circ = 90^\circ$$

$$2\alpha = 60^\circ$$

$$\therefore \alpha = 30^\circ$$



3. Si $\text{sen}3x = \text{cos}7x$, efectúe

$$E = \text{tan}5x + \text{cos}6x \cdot \text{csc}4x$$

Recordamos

s

Propiedad de las RT de ángulos complementarios

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces:

$$\text{sen}\alpha = \text{cos}\beta$$

$$\text{tan}\alpha = \text{cot}\beta$$

$$\text{sec}\alpha = \text{csc}\beta$$

Resolución

Por propiedad de las RT de ángulos complementarios:

$$\rightarrow 3x + 7x = 90^\circ$$

$$10x = 90^\circ$$

$$x = 9^\circ$$

Reemplazamos en:

¡Co-razón!

$$E = \text{tan}45^\circ + \text{cos}54^\circ \cdot \text{csc}36^\circ$$

sec54°

$$E = 1 + \boxed{\text{cos}54^\circ \cdot \text{sec}54^\circ} \dots \text{RT recíprocas}$$

$$E = 1 + 1 \quad \therefore \boxed{E = 2}$$



4. Efectúe $P = (5\text{sen}20^\circ + 3\text{cos}70^\circ)(4\text{csc}20^\circ - 2\text{sec}70^\circ)$

Resolución

De la expresión: $P = (5\text{sen}20^\circ + 3\text{cos}70^\circ)(4\text{csc}20^\circ - 2\text{sec}70^\circ)$

Diagram illustrating complementary angles (Complementarios) and their reciprocal relationships (¡Co-razones!):

- 20° and 70° are complementary angles.
- $\text{sen}20^\circ$ and $\text{cos}70^\circ$ are co-secants (¡Co-razones!).
- $\text{csc}20^\circ$ and $\text{sec}70^\circ$ are co-secants (¡Co-razones!).

Por propiedad de RT de ángulos complementarios:

$$\begin{aligned} \text{sen}20^\circ &= \text{cos}70^\circ \\ \text{csc}20^\circ &= \text{sec}70^\circ \end{aligned}$$

Reemplazamos en:

$$\rightarrow P = (5\text{cos}70^\circ + 3\text{cos}70^\circ)(4\text{sec}70^\circ - 2\text{sec}70^\circ)$$

$$P = (8\text{cos}70^\circ)(2\text{sec}70^\circ)$$

$$P = 16 \cdot \underbrace{\text{cos}70^\circ \cdot \text{sec}70^\circ}_1 \dots \text{RT recíprocas}$$

$$\therefore \boxed{P = 16}$$



5. Si $\text{sen}\alpha \cdot \sec 2\alpha = 1$, efectúe

$$A = \cos 2\alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$$

Resolución

De la condición:

$$\text{sen}\alpha \cdot \sec 2\alpha = 1$$

No son
RT recíprocas

¡Co-razón!

$$\cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sec 2\alpha = 1 \dots \text{RT recíprocas}$$

$$\rightarrow 90^\circ - \alpha = 2\alpha$$

$$90^\circ = 3\alpha$$

$$\boxed{30^\circ = \alpha}$$

Reemplazamos en:

$$A = \cos 60^\circ + \sqrt{3} \cos 30^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} + \overset{3}{\boxed{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{4}{2}$$

$$\therefore \boxed{A = 2}$$



6. Las edades de Mitsumo y Nicole están dadas por las siguientes relaciones: Mitsumo x años y Nicole y años.

- $\tan 2x^\circ \cdot \tan 3x^\circ = 1 \dots \text{(I)}$
- $\sin(x + 5)^\circ = \cos(y + 10)^\circ \dots \text{(II)}$

Indique la edad de cada una de ellas.

Resolución

De (I): $\tan 2x^\circ \cdot \tan 3x^\circ = 1$

¡Co-razón!

$\cot(90^\circ - 2x^\circ) \cdot \tan 3x^\circ = 1 \dots \text{RT recíprocas}$

$\rightarrow 90^\circ - 2x^\circ = 3x^\circ$

$90^\circ = 5x^\circ$

$18 = x$

No son
RT recíprocas

De (II): $\sin(18 + 5)^\circ = \cos(y + 10)^\circ$

$\sin 23^\circ = \cos(y + 10)^\circ \dots \text{RT complementarias}$

$\rightarrow 23^\circ + (y + 10)^\circ = 90^\circ$

$(y + 10)^\circ = 67^\circ$

$y = 57$

∴ Mitsumo: 18 años
Nicole: 57 años



7. Lucía desea comprar un departamento para lo cual accederá a un préstamo hipotecario. Ella tiene dos opciones y cada uno de los bancos cobra cierta tasa de interés, tal como se muestra

Banco BCP $\rightarrow x\%$

Banco Scotiabank $\rightarrow y\%$

Donde

➤ $\cos(30 - x)^\circ \cdot \sec(2x)^\circ = 1 \dots \text{(I)}$

➤ $\tan(2x)^\circ = \cot(5y)^\circ \dots \text{(II)}$

Indique en cuál de los bancos le conviene solicitar el préstamo.

Resolución

De **(I)**: $\cos(30 - x)^\circ \cdot \sec(2x)^\circ = 1$

RT recíprocas: $(30 - x)^\circ = (2x)^\circ$

$\Rightarrow 30 = 3x \Rightarrow 10 = x$

* Tasa de interés de BCP: 10%

De **(II)**: $\tan(2x)^\circ = \cot(5y)^\circ$

RT de ángulos complementarios:

$(2x)^\circ + (5y)^\circ = 90^\circ$

$20 + 5y = 90 \Rightarrow y = 14$

*Tasa de interés de Scotiabank: 14%



Le conviene a Lucía optar por el crédito del Banco BCP.