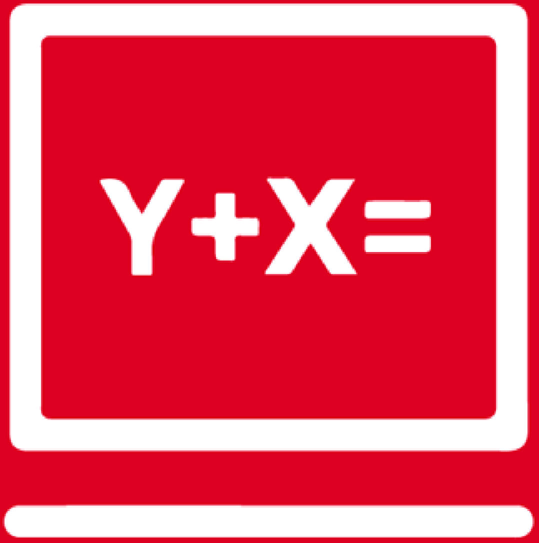
ARITHMETIC

Chapter 17

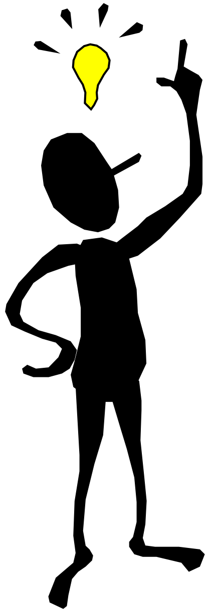
5th
SECONDARY



Clasificación de los Números Enteros Positivos

SACO OLIVEROS

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100



¿Que tienen en común los números de los recuadros **azules**?

Clasificación de los Z^+ de acuerdo a la cantidad de sus divisores

$\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; 4; 5; ...\}$

※ Números Simples

- La unidad
- Números primos o Primos absolutos

Admiten exactamente dos divisores los cuales son la unidad y el mismo número. Estos son: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...

※ Números Compuestos

Son aquellos números que admiten más de dos divisores.
Estos son: 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; ...

Ejm Analicemos los divisores de 12

$Div_{12} = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

Div_{primos} = 2 y 3

$Div_{simples}$ = 1; 2 y 3

$Div_{compuestos}$ = 4; 6 y 12

$Div_{propios}$ = 1; 2; 3; 4 y 6

Números primos relativos, coprimos o primos entre si (PESI)

El único divisor común que comparten todos ellos es la unidad.

Ejm

#	Divisores
28	1; 2; 4; 7; 14; 28
45	1; 3; 5; 9; 15; 45
34	1; 2; 17; 34

28; 45 y 34 son (PESI)

Teorema fundamental de la aritmética (*teorema de Gauss*)

Ejm $120 = 2^3 . 3^1 . 5^1$...(DC)

En general :

Todo número entero mayor que la unidad, se puede descomponer como

$$N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta} \text{...(DC)}$$

Donde :

a;b; c factores primos

$\alpha; \beta; \theta \in Z^+$

Estudio de los divisores de un número entero positivo

1 Cantidad de divisores

Ejm 600 = $2^3 \times 3^1 \times 5^2$

Divisores de cada columna

2^3	3^1	5^2
2^0	3^0	5^0
2^1	3^1	5^1
2^2		5^2
2^3		

$4 \times 2 \times 3 = 24$

$CD_{600} = (3+1)(1+1)(2+1) = 24$ div

En conclusión:

Descomponemos canónicamente al número.

$$N = a^{\alpha} \cdot b^{\beta} \cdot c^{\theta} \ldots (D.C)$$

La cantidad de divisores estará dada por

$$\boxed{CD_N = (\alpha+1)(\beta+1)(\theta+1)}$$

2 Suma de divisores (SD_N)

Ejm 600 = $\underbrace{2^2}_{} \times \underbrace{3^1}_{} \times \underbrace{5^1}_{}$

$$\begin{array}{ccc} 2^0 & 3^0 & 5^0 \\ 2^1 & 3^1 & 5^1 \\ 2^2 & & \end{array}$$

$$SD_{60} = (1 + 2^1 + 2^2)(1 + 3^1)(1 + 5^1)$$

$$SD_{60} = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^2 - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^2 - 1}{5 - 1}\right) = 168$$

En general:

$$SD_N = \left(\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}\right)\left(\frac{c^{\theta+1} - 1}{c - 1}\right)$$

3 Suma de las inversas de los divisores de un número (SID_N)

$$SID_N = \frac{SD_N}{N}$$

4 Producto de los divisores de un número (PD_N)

$$PD_N = \sqrt{N^{CD_N}}$$

1. Si los números $\overline{2n}$; 36 y 51 son PESI, calcule la suma de valores que puede tomar **n**.

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

$\overline{2n}$; 36 y 51 son **PESI**

Donde:

$\overline{2n} \neq \overset{\circ}{3}$

$\overline{2n}$ = 20; 22; 23; 25; 26; 28; 29.

Piden:

suma de valores de **n**

$\therefore 0 + 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 = 33$

∴ La suma de valores de n es 33

2. Determine la cantidad de divisores de $N=63^2 \times 28^3$.

RESOLUCIÓN

Descomponiendo en forma canónica

$$N = 63^2 \cdot 28^3$$

$$N = \left(3^2 \cdot 7^1\right)^2 \left(2^2 \cdot 7^1\right)^3$$

$$N = 3^4 \cdot 7^2 \cdot 2^6 \cdot 7^3$$

$$N = 2^{6} \cdot 3^{4} \cdot 7^{5}$$

Recordemos:

$$C.D_{totales} = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\theta + 1)\ldots$$

Reemplazando:

$$C.D_N = (6 + 1)(4 + 1)(5 + 1)$$

$$C.D_N = 7 \cdot 5 \cdot 6$$

$$C.D_N = 210$$

∴ **N tiene 210 divisores**

3. Si el número $R=51^{b+1}\times 85^{b}$ tiene 500 divisores compuestos. Halle el valor de **b**.

RESOLUCIÓN

Descomponiendo en forma canónica

$$R = 51^{b+1} \cdot 85^{b}$$

$$R = \left(3^{1} \cdot 17^{1}\right)^{b+1}\left(5^{1} \cdot 17^{1}\right)^{b}$$

$$R = 3^{b+1} \cdot 17^{b+1} \cdot 5^{b} \cdot 17^{b}$$

$$R = 3^{b+1} \cdot 5^{b} \cdot 17^{2b+1}$$

Donde:

$$C.D_{simples} = 3\text{ primos} + 1 = 4$$

Recordemos

$$C.D_{totales} = C.D_{simples} + C.D_{compuestos}$$

$$(b+2)(b+1)(2b+2) = 4 + 500$$

$$(b+2)(b+1)(2)(b+1) = 504$$

$$(2)(b+1)^{2}(b+2) = 504$$

$$(b+1)^{2}(b+2) = 252 = 36 \cdot 7$$

Piden: $b = 5$

$\therefore$ **El valor de b es 5**

4. ¿Cuántos ceros se deben colocar a la derecha del número 75 para que el resultado tenga 92 divisores compuestos?

RESOLUCIÓN

Sea el número: $N = 75\underbrace{00...000}_{\text{"n" ceros}}$

Descomponiendo en forma canónica

$$N = 75 \cdot 10^n$$

$$N = 3 \cdot 5^2 \cdot (2^1 \cdot 5^1)^n$$

$$N = 2^n \cdot 3^1 \cdot 5^{n+2}$$

Recordemos:

$$C.D_{totales} = C.D_{simples} + C.D_{compuestos}$$

$$(n+1)(1+1)(n+3) = 4 + 92$$

$$(2)(n+1)(n+3) = 96$$

$$(n+1)(n+3) = 48 = 6 \cdot 8$$

Piden: $n = 5$

∴ **Se deben colocar 5 ceros**

5. En las celebraciones de aniversario del distrito de Lince se le preguntó al alcalde, ¿Cuántos años de fundación tiene el parque Andrés Avelino Cáceres? y este manifestó que los años de fundado son iguales al menor número que tiene 15 divisores. Determine los años de fundación.

RESOLUCIÓN

Sea la descomposición canónica de N $N_{min} = 2^a \cdot 3^b$

Donde:

$C.D_{(N)} = (a+1)(b+1) = 15$

	a+1	b+1	
solución 1	2	4	$N = 2^2 \cdot 3^4 = 324$
solución 2	4	2	$N = 2^4 \cdot 3^2 = \boxed{144}$ menor número

Piden: años de fundado = 144
del menor número

∴ **Tiene 144 años de fundado**

6. ¿En un colegio de comas hay T profesores, si T coincide con el número de divisores positivos múltiples de 4 pero no de 6, del número 14112. Halle el número de profesores de Aritmética si es igual a la cantidad de divisores simples de T.

RESOLUCIÓN

Descomponiendo en forma canónica

$14112 = 2^5 . 3^2 . 7^2$

Hallando divisores $\overset{\circ}{4}$

$2^2 \times \boxed{(2^3 . 3^2 . 7^2)}$

$C.D_{14112\overset{\circ}{4}} = (3+1)(2+1)(2+1)$

$C.D_{14112\overset{\circ}{4}} = 36$

7. Si: $N=15^{k+1}+15^{k}$ tiene 320 divisores. Halle el valor de k.

RESOLUCIÓN

Descomponiendo en forma canónica

$$N = 15^{k} . 15^{1} + 15^{k}$$

$$N = 15^{k} (15^{1} + 1)$$

$$N = 15^{k} (16)$$

$$N = 2^{4} . 3^{k} . 5^{k}$$

$$C.D_{(N)} = (4 + 1)(k + 1)(k + 1) = 320$$

$$5(k+1)^{2} = 320$$

$$(k+1)^{2} = 64$$

$$k = 7$$

$$\boxed{K = 7}$$