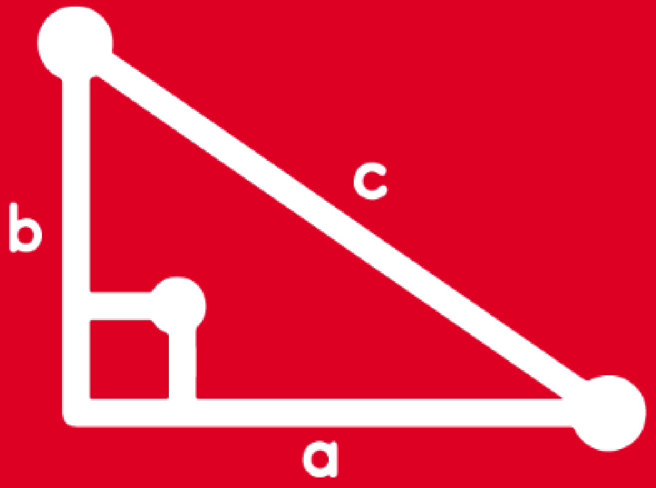
TRIGONOMETRY

Chapter 18

5th
SECONDARY



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ANGULO TRIPLE

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

Para deducir las identidades del **cos(2x)**, **cos(3x)**, **cos(4x)**, **cos(5x)** etc; se puede usar la siguiente expresión:

$$\cos(nx) = 2\cos(x)\cos(nx - x) - \cos(nx - 2x)$$

* Para n = 2

$$\Rightarrow \cos(2x) = 2\cos(x)\cos(2x - x) - \cos(2x - 2x)$$
$$\Rightarrow \cos(2x) = 2\cos(x)\cos(x) - \cos(0x)$$
$$\therefore \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$$

* Para n = 3

$$\Rightarrow \cos(3x) = 2\cos(x)\cos(3x - x) - \cos(3x - 2x)$$
$$\Rightarrow \cos(3x) = 2\cos(x)\cos(2x) - \cos(x)$$
$$\Rightarrow \cos(3x) = 2\cos(x)\left[2\cos^2(x) - 1\right] - \cos(x)$$
$$\therefore \cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO TRIPLE

Para el seno :

$$\mathrm{sen}3x = 3\mathrm{sen}x - 4\mathrm{sen}^3x$$

Para el coseno :

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

Para la tangente :

$$\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$$

Aplicaciones:

- $3\mathrm{sen}10° - 4\mathrm{sen}^3 10° = \mathrm{sen}30° = \boxed{\frac{1}{2}}$
- $4\cos^3 15° - 3\cos 15° = \cos 45° = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$
- $\dfrac{3\tan 20° - \tan^3 20°}{1 - 3\tan^2 20°} = \tan 60° = \boxed{\sqrt{3}}$

IDENTIDADES AUXILIARES

1. $\boxed{\operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}x\left(2\cos 2x + 1\right)}$

2. $\boxed{\cos 3x = \cos x\left(2\cos 2x - 1\right)}$

Demostración de 1

Sea : $\operatorname{sen}3x = 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}x\left(3 - 4\operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$\operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}x\left(3 - 2 \times 2\operatorname{sen}^2 x\right)$$

$$\operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}x\left(3 - 2 \times (1 - \cos 2x)\right)$$

$$\operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}x\left(3 - 2 + 2\cos 2x\right)$$

$$\therefore\ \operatorname{sen}3x = \operatorname{sen}x\left(2\cos 2x + 1\right)$$

IDENTIDADES AUXILIARES

3. $\boxed{4\,\mathrm{sen}x\,\mathrm{sen}(60°-x)\,\mathrm{sen}(60°+x)=\mathrm{sen}3x}$

4. $\boxed{4\cos x\cos(60°-x)\cos(60°+x)=\cos 3x}$

5. $\boxed{\tan x\tan(60°-x)\tan(60°+x)=\tan 3x}$

Aplicación: Calcular $E=8\,\mathrm{sen}10°\,\mathrm{sen}50°\,\mathrm{sen}70°$

Resolución

Damos forma: $E=2\times\underbrace{4\,\mathrm{sen}10°\,\mathrm{sen}(60°-10°)\,\mathrm{sen}(60°+10°)}$ ➡ $E=2\times\dfrac{1}{2}$

Usamos **Ident. aux. 3** $\longrightarrow$ $\mathrm{sen}(3\times10°)=\mathrm{sen}(30°)$ $\therefore$ $\boxed{E=1}$

HELICO-PRACTICE 1

Reduzca $E = \dfrac{4\cos^3 15° - 3\cos 15°}{3\text{sen}10° - 4\text{sen}^3 10°}$

Resolución

RECORDAMOS:

$$\boxed{\text{sen}3x = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3 x}$$

$$\boxed{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$$

$$E = \frac{\overbrace{4\cos^3 15° - 3\cos 15°}^{\cos 3(15°)}}{\underbrace{3\text{sen}10° - 4\text{sen}^3 10°}_{\text{sen}3(10°)}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\cos 45°}{\text{sen}30°}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}}{\dfrac{1}{\cancel{2}}}$$

$$\therefore \boxed{E = \sqrt{2}}$$

HELICO-PRACTICE 2

Si se cumple que: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{3}$; calcule sen3θ.

Resolución

RECORDAMOS:

$$\operatorname{sen}3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$$

Del dato:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{3}$$

Reemplazamos en:

$$\operatorname{sen}3\theta = 3\left(\frac{1}{3}\right) - 4\left(\frac{1}{3}\right)^3$$

$$\operatorname{sen}3\theta = 1 - \frac{4}{27}$$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen}3\theta = \frac{23}{27}}$$

HELICO-PRACTICE 3

Simplifique la expresión: $E = \dfrac{\cos 3x - \cos x}{4\text{sen}^2 x}$

Resolución

RECORDAMOS

$$\boxed{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x}$$

Reemplazamos en cos3x:

$$E = \frac{4\cos^3 x - 3\cos x - \cos x}{4\text{sen}^2 x}$$

$$E = \frac{4\cos^3 x - 4\cos x}{4\text{sen}^2 x}$$

Factorizamos **“4cosx”**:

$$E = \frac{4\cos x(\cos^2 x - 1)}{4\text{sen}^2 x}$$

Usamos la identidad

$$\text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$E = \frac{\cancel{4}\text{senx}(-\cancel{\text{sen}^2 x})}{\cancel{4}\cancel{\text{sen}^2}x}$$

$$\therefore \boxed{E = -\text{senx}}$$

HELICO-PRACTICE 4

De la condición $\text{senx} + \text{cosx} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcule sen6x.

Resolución

Dato: $\text{senx} + \text{cosx} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Elevamos al cuadrado:

$$\underbrace{(\textbf{senx} + \textbf{cosx})^2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\mathbf{1 + sen2x} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{sen2x} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

Calculamos:

$$\text{sen6x} = 3\text{sen2x} - 4\text{sen}^3 2\text{x}$$

$$\text{sen6x} = 3\left(-\frac{1}{4}\right) - 4\left(-\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\text{sen6x} = -\frac{3}{4} - \overset{1}{\cancel{4}}\left(\frac{-1}{\underset{16}{\cancel{64}}}\right)$$

$$\text{sen6x} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{16}$$

RECORDAR:

$$\boxed{(\text{senx} + \text{cosx})^2 = 1 + \text{sen}(2\text{x})}$$

$$\boxed{\text{sen}3\theta = 3\text{sen}\theta - 4\text{sen}^3\theta}$$

$\therefore$ $$\boxed{\text{sen6x} = -\frac{11}{16}}$$

HELICO-PRACTICE 5

De la siguiente identidad: $\frac{3\text{sen}3x}{\text{sen}x} + \frac{2\cos 3x}{\cos x} = A + B\cos(Cx)$

calcule A + B + C.

Resolución

RECORDAMOS:

$\boxed{\text{sen}3x = \text{sen}x(2\cos 2x + 1)}$

$\boxed{\cos 3x = \cos x(2\cos 2x - 1)}$

Dato: $\frac{3\,\textbf{sen3x}}{\text{senx}} + \frac{2\,\textbf{cos3x}}{\cos x} = A + B\cos(Cx)$

$$\frac{3\cancel{\text{sen}x}(2\cos 2x + 1)}{\cancel{\text{sen}x}} + \frac{2\cancel{\cos x}(2\cos 2x - 1)}{\cancel{\cos x}} = A + B\cos(Cx)$$

$$3(2\cos 2x + 1) + 2(2\cos 2x - 1) = A + B\cos(Cx)$$

$$6\cos 2x + 3 + 4\cos 2x - 2 = A + B\cos(Cx)$$

$$1 + 10\cos 2x += A + B\cos(Cx)$$

Comparamos:

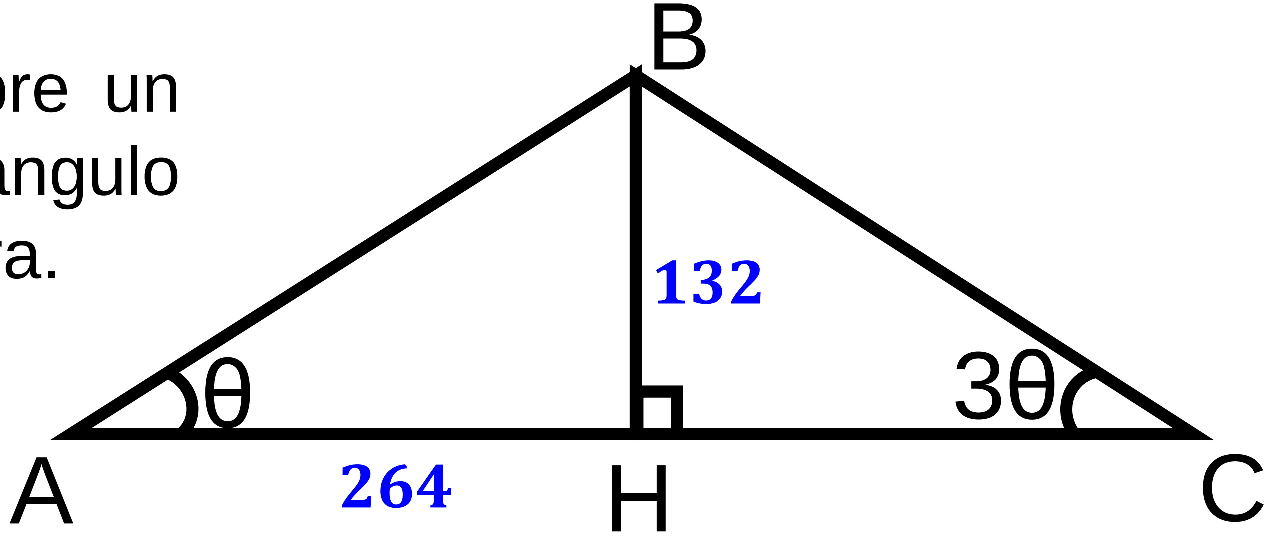
$A = 1\,;\ B = 10\,;\ C = 2$

$\therefore\ \boxed{A + B + C = 13}$

HELICO-PRACTICE 6

Se construye un centro comercial sobre un terreno que tiene la forma de un triángulo ABC como el que se muestra en la figura.

Si BH = 132 m y AH = 264 m, ¿cuál es la longitud de HC?



Resolución

De gráfico:

$\blacktriangle$AHB: $\tan\theta = \dfrac{\cancel{132}}{\cancel{264}}$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{2}$

$\blacktriangle$BHC: $\tan 3\theta = \dfrac{132}{HC}$ ... (*)

Luego: $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$

$$\Rightarrow \tan 3\theta = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} = \left.\frac{\frac{11}{8}}{\frac{1}{4}}\right]$$

$\Rightarrow \tan 3\theta = \dfrac{11}{2}$

En (*): $\dfrac{11}{2} = \dfrac{132}{HC}$

$\therefore$ $\boxed{HC = 24m}$

HELICO-PRACTICE 7

Una mariposa vuela a cierta altura en el instante t del tiempo en segundos $0 \leq t \leq 6$; la altura h (en metros) está determinada por

$$h = 8\text{sen}\left(\frac{t\pi}{18}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{t\pi}{18}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{t\pi}{18}\right)$$

Halle en que tiempo la mariposa se encuentra a una altura de 1,73 m por primera vez.

Resolución

RECORDAMOS

$$\boxed{4\,\text{sen}x\,\text{sen}(60° - x)\,\text{sen}(60° + x) = \text{sen}3x}$$

Damos forma a la función **"h"**:

$$h = 2 \cdot \underbrace{4\text{sen}\left(\frac{t\pi}{18}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{t\pi}{18}\right)\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{t\pi}{18}\right)}$$

$$h = 2 \cdot \text{sen}\overset{1}{\cancel{3}}\left(\frac{t\pi}{\underset{6}{\cancel{18}}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad h = 2\text{sen}\left(\frac{t\pi}{6}\right)$$

$$\overset{\sqrt{3}}{1,73} = 2\text{sen}\left(\frac{t\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\left(\frac{t\pi}{6}\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \text{sen}\left(\frac{t\pi}{6}\right)$$

$$\frac{\cancel{\pi}}{3} = \frac{t\cancel{\pi}}{6}$$

Resolvemos:

$$\therefore \boxed{t = 2\text{ s}}$$