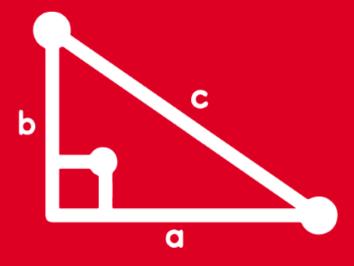
TRIGONOMETRY Chapter 18





IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

DE ÁNGULOS COMPUESTOS

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

- ¿ A qué es igual sen 83° ?
- ¿ A qué es igual cos105° ?

¿ A qué es igual tan8°?



Los ángulos 83°, 105° y 8° no son notables! ... pero 30°, 37°, 45°, 53° y 60° si son notables!

```
sen83° = sen ( 53° + 30° )
cos105° = cos ( 60° + 45° )
tan8° = tan ( 45° - 37° )
```

En este capítulo desarrollaremos las identidades de ángulos compuestos para calcular sus razones trigonométricas. ©

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS BÁSICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

Para la suma de dos ángulos:

$$sen(x + y) = senx.cosy + cosx.seny$$

$$cos(x + y) = cosx.cosy - senx.seny$$

$$tan(x + y) = \frac{tanx + tany}{1 - tanx.tany}$$

Para la resta de dos ángulos :

$$sen(x - y) = senx.cosy - cosx.seny$$

$$cos(x - y) = cosx.cosy + senx.seny$$

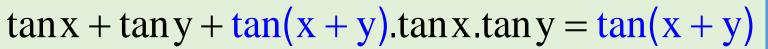
$$tan(x-y) = \frac{tanx - tany}{1 + tanx.tany}$$

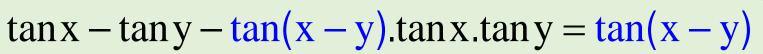
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES DE ÁNGULOS COMPUESTOS



$$sen(x + y).sen(x - y) = sen^{2}x - sen^{2}y$$

$$\cos(x + y).\cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y$$







IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS PARA TRES ÁNGULOS



Si
$$A + B + C = 180^{\circ}$$

 \Rightarrow tanA + tanB + tanC = tanA.tanB.tanC

 \Rightarrow cotA.cotB + cotB.cotC + cotC.cotA = 1

Si
$$A + B + C = 90^{\circ}$$

 \Rightarrow cotx + coty + cotz = cotx.coty.cotz

 \Rightarrow tanx.tany + tany.tanz + tanz.tanx = 1



Calcule cos16°

RESOLUCIÓN

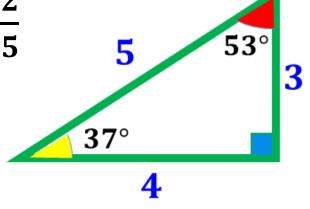
Recordar: cos(x-y) = cosx.cosy + senx.seny

$$\cos 16^{\circ} = \cos(53^{\circ} - 37^{\circ})$$

Luego: $\cos 16^{\circ} = \cos 53^{\circ} \cdot \cos 37^{\circ} + \sin 53^{\circ} \cdot \sin 37^{\circ}$

$$\cos 16^{\circ} = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{25} + \frac{12}{25}$$

$$\therefore \cos 16^\circ = \frac{24}{25}$$



Reduzca
$$R = \sqrt{2}\cos(x - 45^{\circ}) - \sin x$$

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$cos(x - y) = cosx.cosy + senx.seny$$

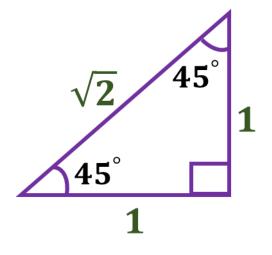
$$R = \sqrt{2} \cos(x - 45^{\circ}) - \sin x$$

$$R = \sqrt{2} \left[\cos x \cdot \cos 45^{\circ} + \sin x \cdot \sin 45^{\circ} \right] - \sin x$$

$$R = \sqrt{2} \left[\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right] - \sin x$$

$$R = \cos x + \sin x - \sin x$$

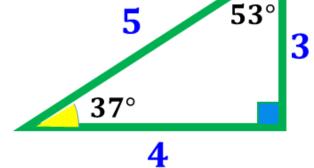
$$\therefore \mathbf{R} = \mathbf{cosx}$$



Si
$$tan\theta = \frac{5}{12}$$
; calcule $tan(37^{\circ} + \theta)$

RESOLUCIÓN

Recordar: $tan(x+y) = \frac{tanx + tany}{1 - tanx \cdot tany}$

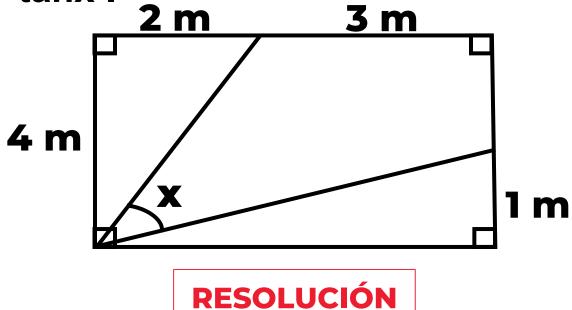


Luego:
$$tan(37^{\circ} + \theta) = \frac{tan37^{\circ} + tan\theta}{1 - tan37^{\circ} \cdot tan\theta} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{\frac{9 + 5}{12}}{\frac{16}{16} - \frac{5}{16}}$$

$$\tan(37^{\circ} + \theta) = \frac{\frac{14}{12}}{\frac{11}{16}} = \frac{14.16}{12.11}$$

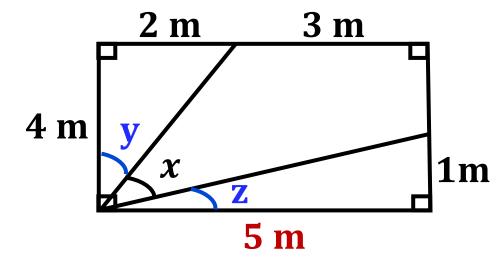
∴
$$\tan(37^{\circ} + \theta) = \frac{56}{33}$$

A partir del gráfico, determine tanx.



Según gráfico : $x + y + z = 90^{\circ}$

 \Rightarrow cotx + coty + cotz = cotx . coty . cotz



$$\cot x + \frac{4}{2} + \frac{5}{1} = \cot x \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{1}$$

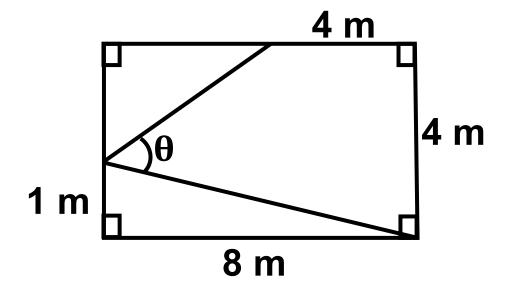
$$7 = 9 \cot x$$

 $\cot x + 7 = 10 \cot x$

$$\frac{7}{9} = \cot x$$

$$\therefore \tan x = \frac{9}{7}$$

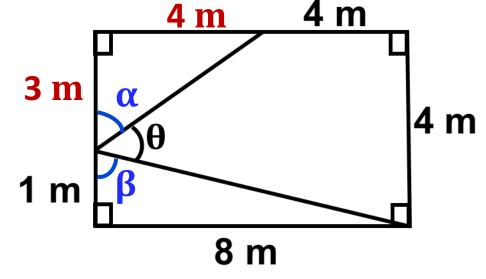
Del gráfico, determine $cot\theta$.



RESOLUCIÓN

Según gráfico : $\alpha + \beta + \theta = 180^{\circ}$

 \Rightarrow tanα + tanβ + tanθ = tanα.tanβ.tanθ



$$\frac{4}{3} + \frac{8}{1} + \tan\theta = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{1} \cdot \tan\theta$$

$$\frac{1}{1}\left(\frac{28}{3} + \tan\theta = \frac{32}{3} \cdot \tan\theta\right) (3)$$

$$28 + 3 \tan \theta = 32 \tan \theta$$

$$\frac{28}{28} = 29 \tan \theta$$

$$\frac{28}{28} = \tan \theta$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{29}{28}$$

Al copiar de la pizarra la expresión tan30° + tan70° + tan80°, un estudiante cometió un error y escribió tan70°. tan80°.

Calcule la razón entre lo que estaba escrito en la pizarra y lo que copió el alumno.

RESOLUCIÓN

Sabemos que : $30^{\circ} + 70^{\circ} + 80^{\circ} = 180^{\circ}$

Nos piden la razón geométrica:

$$R = \frac{\tan 30^{\circ} + \tan 70^{\circ} + \tan 80^{\circ}}{\tan 70^{\circ} \cdot \tan 80^{\circ}}$$

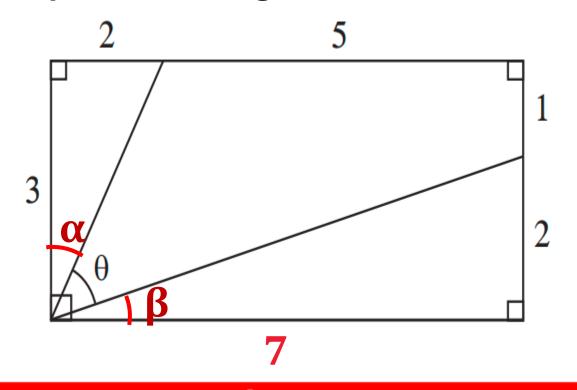
$$R = \frac{\tan 30^{\circ}. \tan 70^{\circ}. \tan 80^{\circ}}{-\tan 70^{\circ}. \tan 80^{\circ}}$$

$$R = tan30^{\circ}$$

$$\therefore \mathbf{R} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

 \Rightarrow tan30° + tan70° + tan80° = tan30°. tan70°. tan80°

Se tiene una plancha metálica rectangular, a la cual se desea realizar dos cortes que parten de un vértice, tal que formen un ángulo θ como se aprecia en la figura.- Calcule 2 tan θ .



RESOLUCIÓN

Según gráfico : $\theta + \alpha + \beta = 90^{\circ}$

$$\Rightarrow \cot\theta + \cot\alpha + \cot\beta = \cot\theta \cdot \cot\alpha \cdot \cot\beta$$

$$\cot\theta + \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = \cot\theta \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2}$$

$$\left(\cot\theta+5=\frac{21}{4}\cdot\cot\theta\right)\left(4\right)$$

$$4\cot\theta + 20 = 21\cot\theta$$

$$20 = 17 \cot \theta$$

$$\frac{20}{17} = \cot \theta$$

$$\tan\theta = \frac{17}{20}$$

$$\therefore 2 \tan \theta = \frac{17}{10}$$

