ALGEBRA

CHAPTER 5

5th
OF SECONDARY

COCIENTES NOTABLES

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

SACO OLIVEROS

Michael Francis Atiyah

Matemático del siglo XX

La Matemática no solo se desarrollo en el pasado, también se sigue desarrollando en la actualidad, siendo uno de esos autores:

Michael Francis Atiyah es un matemático británico nacido en 1929 que pasa por ser unos de los matemáticos más importantes del siglo XX y de lo que llevamos del XXI. Sus contribuciones se centran principalmente en Geometría y Topología, siendo las más importantes la creación, de la denominada en Topología **teoría K** y muy relacionado con el número de soluciones independientes en ecuaciones diferenciales.

HELICO THEORY

COCIENTES NOTABLES

I) Definición

Son aquellos cocientes que se pueden obtener en formas directa sin la necesidad de efectuar la operación de división.

Forma general

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$$

n: Número de términos del C.N.

Además: $n \in N, n \geq 2$

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} \qquad \frac{x^n - y^n}{x + y}$$

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} \qquad \frac{x^n + y^n}{x - y}$$

II) CASOS DE COCIENTES NOTABLES (Si la división es exacta)

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}.y + x^{n-3}.y^2 + \cdots + y^{n-1}$$

Para todo "n" entero positivo

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}.y + x^{n-3}.y^2 - \cdots - y^{n-1}$$

Para todo "n" PAR

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}.y + x^{n-3}.y^2 - \cdots + y^{n-1}$$

Para todo "n" IMPAR

III) PROPIEDAD

$$Sea: \frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q}$$

Genera cociente notable si:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = n \ (\#\ términos\ del\ C.N)$$

IV) TÉRMINO DE LUGAR k: (t_k)

CASO 1:

$$\frac{x^a - y^b}{x^p - y^q}$$

$$t_k = +(x^p)^{n-k}.(y^q)^{k-1}$$

K= 1,2,3,…,n

Término de lugar k o posición k

CASO 2 :

$$\frac{x^a - y^b}{x^p + y^q}$$

CASO 3 :

$$\frac{x^a + y^b}{x^p + y^q}$$

Para ambos casos:

$$t_k = (signo)(x^p)^{n-k}.(y^q)^{k-1}$$

$+ \; si \; k \; es \; IMPAR$

$- \; si \; k \; es \; PAR$

Cálculo del Término Central (Tc)

Sea: $\dfrac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$

Si n es impar ⇒ Lugar(Tc)= K $= \dfrac{n+1}{2}$ $\quad T_c = T_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$

Si n es par ⇒

Lugar(Tc1)= K $= \dfrac{n}{2}$ $\quad T_{c1} = T_{\left(\frac{n}{2}\right)}$

Lugar(Tc2)= K $= \dfrac{n+2}{2}$ $\quad T_{c2} = T_{\left(\frac{n+2}{2}\right)}$

HELICO PRACTICE

PROBLEMA 1 **Indique el número de términos en el cociente notable:** $\frac{x^{10a+4}-y^{13a+7}}{x^3-y^4}$

Resolución

$$El\ nº\ de\ términos = \boxed{\frac{10a+4}{3} = \frac{13a+7}{4}} \ldots\ldots \alpha$$

$$4(10a+4) = 3(13a+7)$$

$$40a+16 = 39a+21$$

$$a = 5$$

$Reemplazando: a = 5\ en\ \alpha,$

$$nºtérminos = \frac{10(5)+4}{3}$$

$$nºtérminos = 18$$

$$\boxed{\therefore nºtérminos = 18}$$

PROBLEMA 2 Indique el grado absoluto del término de lugar 18 en el cociente notable:

$$\frac{x^{40}-y^{200}}{x^2+y^{10}}$$

Resolución

$$n=\frac{40}{2} \Rightarrow \boxed{n=20}$$

$$t_{18}=? \Rightarrow \boxed{k=18}$$

Estamos en el 2^{do} *caso de C.N*

$$\Rightarrow t_{18}=(signo)(x^2)^{n-k}(y^{10})^{k-1}$$

Como $\boldsymbol{k}$ *es PAR* $\Rightarrow \boxed{signo\ es\ -}$

$$\Rightarrow t_{18}=-(x^2)^{20-18}(y^{10})^{18-1}$$

$$\Rightarrow t_{18}=-x^4y^{170}$$

Piden: G.A

$$\boxed{\therefore G.A=174}$$

PROBLEMA 3 ¿Qué lugar ocupa en el desarrollo del cociente notable: $\frac{x^{160}-y^{280}}{x^4-y^7}$ el término de grado absoluto 252 ?

Resolución

$$n = \frac{160}{4} \Rightarrow \boxed{n = 40}$$

$$t_k = (signo)(x^4)^{n-k}(y^7)^{k-1}$$

Estamos en el 1^{er} *caso de C.N*

El signo siempre es +, así k sea PAR o IMPAR

$$t_k = (x^4)^{40-k}(y^7)^{k-1}$$

$$t_k = (x)^{160-4k}(y)^{7k-7}$$

$$160 - 4k + 7k - 7 = 252\ (Dato)$$

$$3k = 99$$

$$k = 33$$

$$\therefore \text{Ocupa el lugar } 33$$

PROBLEMA 4 Halle el término central en el desarrollo del cociente notable: $\dfrac{x^{5p+1}+y^{5p-6}}{x^{p-1}+y^{p-2}}$

Resolución

$$\frac{x^{5p+1}+y^{5p-6}}{x^{p-1}+y^{p-2}} = \frac{x^{21}+y^{14}}{x^{3}+y^{2}}$$

$$N°\,de\ t\acute{e}rminos(n) = \frac{5p+1}{p-1} = \frac{5p-6}{p-2} = 7$$

$$(5p+1)(p-2) = (p-1)(5p-6)$$

$$5p^2-9p-2 = 5p^2-11p+6$$

$$2p = 8$$

$$\boxed{p = 4}$$

$$\text{Lugar(Tc)} = \frac{n+1}{2}$$

$sabemos\ n = 7$

$$k = Lugar(Tc) = 4$$

$$\boxed{T_k = (signo)\left(x^3\right)^{n-k}\left(y^2\right)^{k-1}}$$

$K\ es\ Par\ ,el\ signo\ es(-)$

$$T_4 = -(x^3)^{7-4}(y^2)^{4-1}$$

$$T_4 = -x^9y^6$$

$$T_C = -x^9y^6$$

$$\therefore T_C = -x^9y^6$$

PROBLEMA 5 En el cociente notable: $\frac{(x+1)^{20}-(x-1)^{20}}{4x}$, determine el valor numérico del séptimo término para x=2

Resolución

$$\frac{(x+1)^{20}-(x-1)^{20}}{4x} = \frac{(x+1)^{20}-(x-1)^{20}}{(x+1)^{2}-(x-1)^{2}}$$

recuerda:

$$\boxed{(x+1)^2-(x-1)^2=4x}$$

(Identidad legendre)

Cálculo de T_7

$$\boxed{n=10}$$

$$\boxed{k=7}$$

$$T_k=(signo)[(x+1)^2]^{n-k}[(x-1)^2]^{k-1}$$

$$T_7=+[(x+1)^2]^{10-7}[(x-1)^2]^{7-1}$$

$$T_7=(+)(x+1)^6(x-1)^{12}$$

$$V.N(T_7)\ para\ x=2$$

$$V.N(T_7)=(3)^6(1)^{12}$$

$$\therefore V.N=729$$

PROBLEMA 6 El número de veces que postuló el alumno Ricardo a la UNI está dado por la cantidad de términos que tiene el cociente de: $\frac{x^{68}+x^{66}+x^{64}+\cdots+x^{2}+1}{x^{12}+x^{10}+x^{8}\ldots+x^{2}+1}$

¿Cuántas veces postuló Ricardo?

Resolución

$$\frac{x^{68}+x^{66}+x^{64}+\cdots+x^{2}+1}{x^{12}+x^{10}+x^{8}\ldots+x^{2}+1} = \frac{\dfrac{x^{70}-1}{\cancel{x^{2}-1}}}{\dfrac{x^{14}-1}{\cancel{x^{2}-1}}} = \frac{x^{70}-1}{x^{14}-1} \Rightarrow N°de\ términos = \frac{70}{14}$$

$$N°de\ términos = 5$$

Recuerda

$$\frac{x^{20}-1}{x^{4}-1} = x^{16}+x^{12}+x^{8}+x^{4}+1$$

$$N°de\ términos = \frac{20}{4} = 5$$

$\therefore$ *Ricardo postuló 5 veces*

PROBLEMA 7 Al desarrollar el cociente notable: $\frac{x^{ab}-y^{b}}{x^{a}-y}$, se tiene qu el grado absoluto del quinto término es 95 y los grados absolutos de los términos disminuyen de 6 en 6. Si el precio de un polo deportivo es (ab-36) dólares, pero en oferta de verano se hace un descuento del 30%.¿Cuál es el precio de oferta del polo deportivo?

Resolución

$Propiedad$:

$\boldsymbol{Dado}$: $\frac{x^{m} \pm y^{n}}{x^{p} \pm y^{q}}$

Si genera un $C.N$, se cumple: Los G.A de los términos aumentan o disminuyen a una razón constante (r)

$$\boxed{r = q - p}$$

$\boldsymbol{Del\ dato}$

$\boldsymbol{r = -6 \quad = 1 - a}$

$\boxed{\boldsymbol{a = 7}}$

$\boldsymbol{Calculo\ del\ T_5}$

$\boldsymbol{n = \ b}$

$\boldsymbol{k = 5}$

$$\boldsymbol{T_5 = +(x^a)^{b-5}(y)^{5-1}}$$

$$\boldsymbol{T_5 = +(x^7)^{b-5}y^4}$$

$\boldsymbol{GA(T_5) = 95}$

$\boldsymbol{7(b-5)+4 = 95}$

$\boxed{\boldsymbol{b = 13}}$

$\boldsymbol{el\ precio\ del\ polo\ es}$:

$\boldsymbol{(7)(13) - 36 = \ 55}$

$\boldsymbol{Descuento\ 30\%}$

$\boldsymbol{0,30(55) = 16,5}$

$\boldsymbol{Precio\ de\ oferta}$: $\boldsymbol{55 - 16,5}$

∴Precio de oferta: $ 38,5