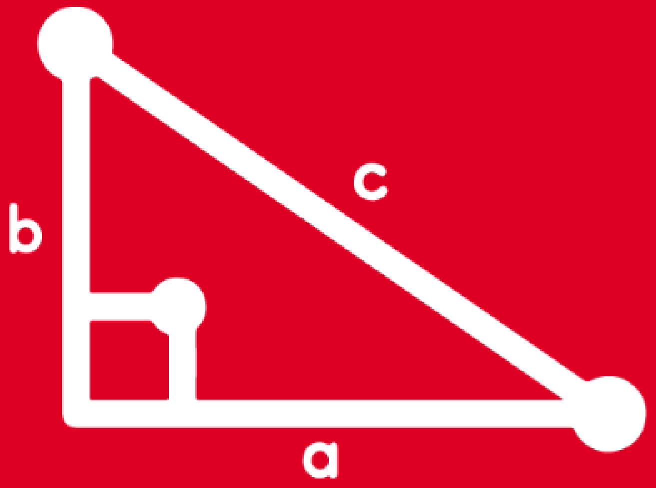
TRIGONOMETRY

Chapter 22

5th
SECONDARY



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

SACO OLIVEROS

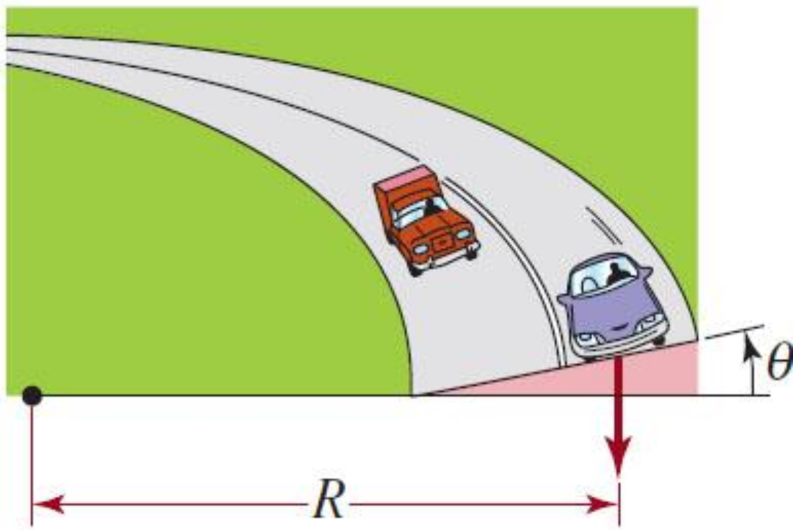
MOTIVATING STRATEGY

En el diseño de carreteras y ferrocarriles, las curvas tienen un peralte (inclinación) para producir una fuerza centrípeta que proporcione seguridad.

El ángulo θ óptimo, se calcula así :

$$\theta = \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{V^2}{R\,.\,g}\right)$$

Donde V es la velocidad promedio del vehículo, R es el radio de la curva y g es la aceleración de la gravedad.



Pregunta :

¿ Cuál es el ángulo θ óptimo del peralte, para una velocidad promedio de 20 m/s , radio de curvatura de 120 m y g = 10 m/s^2 ?

Rpta : **18º 30’**

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Notación : **Se lee :**

arc sen(x) .... arco seno de x

arc cos(x) .... arco coseno de x

arc tan(x) .... arco tangente de x

arc cot(x) .... arco cotangente de x

arc sec(x) .... arco secante de x

arc csc(x) .... arco cosecante de x

PROPIEDAD FUNDAMENTAL :

$$\mathrm{FT}(\theta) = \mathrm{N} \Leftrightarrow \theta = \mathrm{arcFT}(\mathrm{N})$$

Ejemplos:

- Si $\mathrm{sen}\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \mathrm{arc\,sen}\left(\frac{1}{3}\right)$
- Si $\cos\beta = \frac{2}{5} \Rightarrow \beta = \mathrm{arc\,cos}\left(\frac{2}{5}\right)$
- Si $\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \mathrm{arc\,tan}(1) = \frac{\pi}{4}$

Cuadro resumen de las funciones trigonométricas inversas

Función Inversa	Dominio	Rango
$y = \text{arc sen}x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arc cos}x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \text{arc tan}x$	$x \in \mathbb{R}$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arc cot}x$	$x \in \mathbb{R}$	$0 < y < \pi$
$y = \text{arc sec}x$	$x \leq -1 \vee x \geq 1$	$0 \leq y \leq \pi \,;\, y \neq \frac{\pi}{2}$
$y = \text{arc csc}x$	$x \leq -1 \vee x \geq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \,;\, y \neq 0$

Ejemplos :

- $\theta = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

Porque : $-1 \leq \frac{1}{2} \leq 1$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta = \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$$

- $\varphi = \text{arc cot}(-\sqrt{3}) \Rightarrow \cot\varphi = -\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{5\pi}{6}$$

Porque : $-\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

$$0 < \theta = \frac{5\pi}{6} < \pi$$

Propiedades fundamentales

$$\theta = \operatorname{arc\,sen} k \leftrightarrow \operatorname{sen}\theta = k \wedge \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\theta = \operatorname{arc\,cos} k \leftrightarrow \cos\theta = k \wedge \theta \in [0; \pi]$$

$$\theta = \operatorname{arc\,tan} k \leftrightarrow \tan\theta = k \wedge \theta \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$$

$$\theta = \operatorname{arc\,cot} k \leftrightarrow \cot\theta = k \wedge \theta \in \langle 0; \pi\rangle$$

$$\theta = \operatorname{arc\,sec} k \leftrightarrow \sec\theta = k \wedge \theta \in [0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\theta = \operatorname{arc\,csc} k \leftrightarrow \csc\theta = k \wedge \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

Teoremas:

$$\operatorname{arc\,sen}(x) + \operatorname{arc\,cos}(x) = \frac{\pi}{2}\ ;\ x \in [-1;1]$$

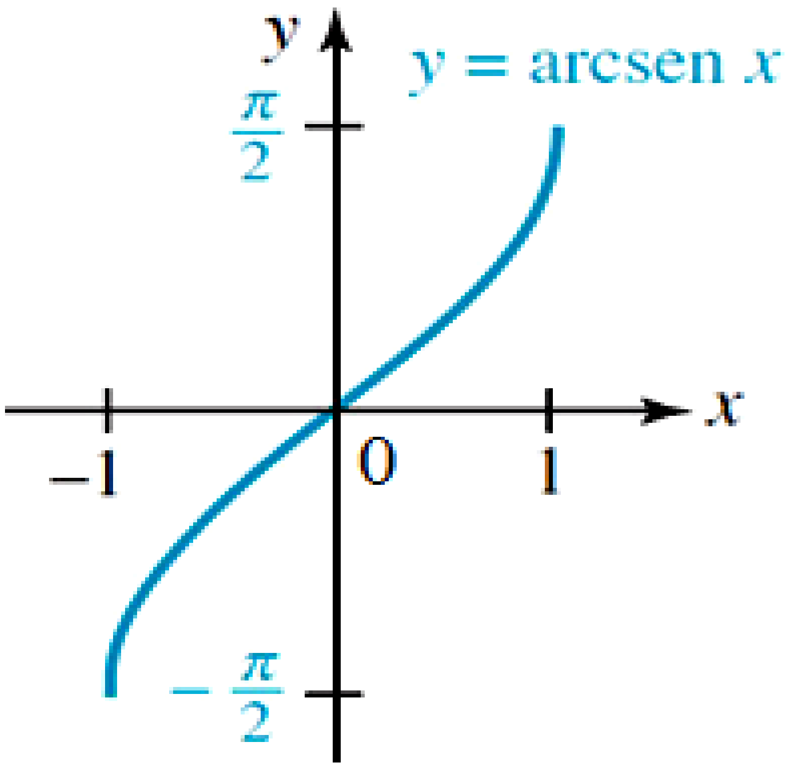
$$\operatorname{arc\,tan}(x) + \operatorname{arc\,cot}(x) = \frac{\pi}{2}\ ;\ x \in R$$

$$\operatorname{arc\,sec}(x) + \operatorname{arc\,csc}(x) = \frac{\pi}{2}\ ;\ x \in R - \langle -1;1\rangle$$

Ejemplos :

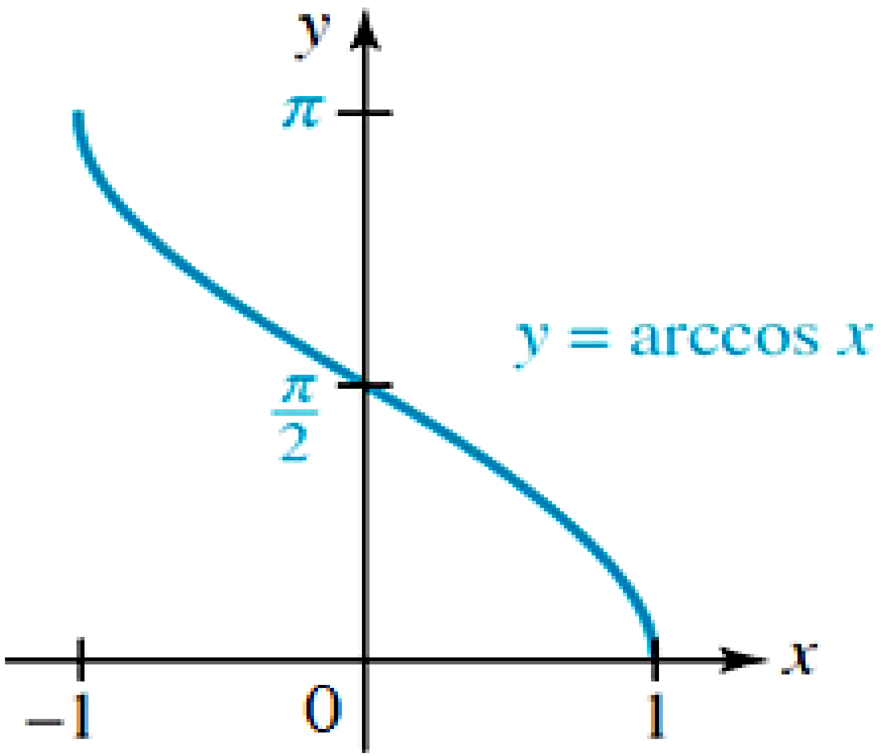
- $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{1}{3}\right) + \operatorname{arc\,cos}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2}$
- $\operatorname{arc\,tan}(4) + \operatorname{arc\,cot}(4) = \frac{\pi}{2}$

1) Función Arcoseno :



- Dominio : $-1 \leq x \leq 1$
- Rango : $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arc sen}(x) \leq \frac{\pi}{2}$

2) Función Arcocoseno :



- Dominio : $-1 \leq x \leq 1$
- Rango : $0 \leq \text{arc cos}(x) \leq \pi$

HELICO PRACTICE 1

Escriba verdadero (V) o falso (F), según corresponda :

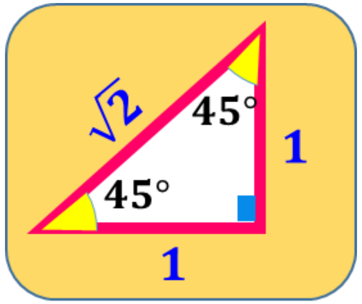
a) $\text{arc sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$ ....( )

b) $\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ ....( )

c) $\text{arc tan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ ....( )

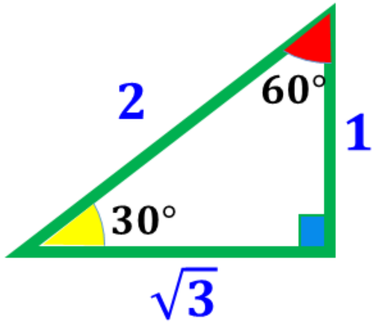
Resolución

a) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .... (V)



b) $\text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ .... (V)

c) $\text{arctan}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ .... (V)



HELICO PRACTICE 2

Halle el valor de $M = \text{arc tan}(1) + \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right)$

Resolución

Sea : $M = \underbrace{\text{arc tan}(1)}_{\alpha} + \underbrace{\text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right)}_{\theta}$

- $\alpha = \text{arc tan}\ (1) \Rightarrow \tan\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$
- $\theta = \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

Luego : $M = \alpha + \theta$

$$M = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{\therefore\ M = \frac{5\pi}{12}}$$

HELICO PRACTICE 3

Halle el valor de $T = \text{sen}\left[\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \cos[\,\text{arc tan}(\,1\,)]$

Resolución

$$T = \text{sen}\underbrace{\left[\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}_{\alpha} + \cos[\underbrace{\text{arc tan}(1)}_{\theta}]$$

- $\alpha = \text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$
- $\theta = \text{arc tan}(1) \Rightarrow \tan\theta = 1 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

Luego:

$$T = \text{sen}\alpha + \cos\theta$$

$$T = \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$T = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{\therefore\ T = \sqrt{2}}$$

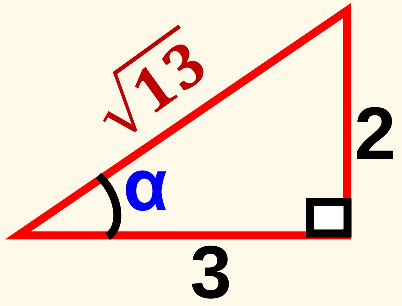
HELICO PRACTICE 4

Halle el valor de $E = \sqrt{13}\ \text{sen}[\ \text{arc tan}(\frac{2}{3})\ ] + \sqrt{5}\ \cos[\ \text{arc tan}(2)\ ]$

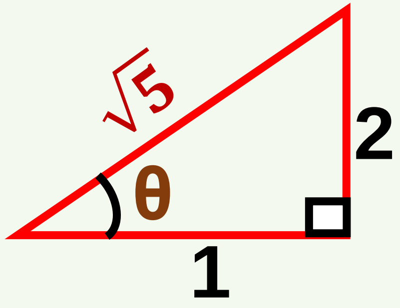
Resolución

$$E = \sqrt{13}\ \text{sen}[\ \underbrace{\text{arc tan}\left(\frac{2}{3}\right)}_{\alpha}\ ] + \sqrt{5}\ \cos[\ \underbrace{\text{arc tan}(2)}_{\theta}\ ]$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{3} = \frac{CO}{CA}$$



$$\tan\theta = \frac{2}{1} = \frac{CO}{CA}$$



Luego : $E = \sqrt{13}\,\text{sen}\alpha + \sqrt{5}\cos\theta = \cancel{\sqrt{13}}\left(\frac{2}{\cancel{\sqrt{13}}}\right) + \cancel{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\right)$

$$\therefore\ E = 3$$

HELICO PRACTICE 5

Halle el valor de x de la siguiente igualdad :

$$3 \text{ arc senx} + 2 \text{ arc cosx} = \frac{7\pi}{6}$$

Resolución

Dato : $3 \text{ arc senx} + 2 \text{ arc cosx} = \frac{7\pi}{6}$

Conviene agrupar así : $\text{arc senx} + 2\,(\underbrace{\text{arc senx} + \text{arc cosx}}) = \frac{7\pi}{6}$

Según teorema : $\text{arc senx} + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{7\pi}{6}$

Luego : $\text{arc senx} + \pi = \frac{7\pi}{6} \Rightarrow \text{arc senx} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\boxed{\therefore\ x = \frac{1}{2}}$$

HELICO PRACTICE 6

El joven Pedro recibía de su padre la propina diaria de

$5\tan\left[\frac{\pi}{4}+\operatorname{arc\,cot}(2)\right]$ soles.

Por sus malas calificaciones escolares, ahora su propina

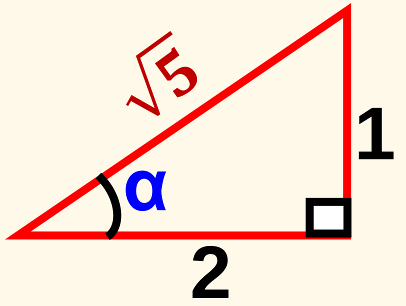
diaria es de $20\operatorname{sen}\left[2\operatorname{arc\,tan}\left(\frac{1}{3}\right)\right]$ soles.

¿Cuánto es la disminución de su propina diaria?

Resolución

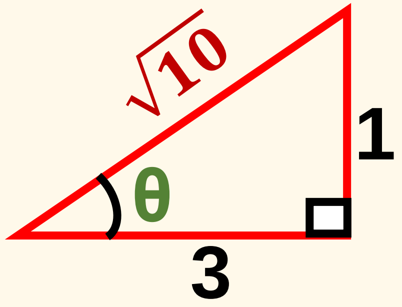
Sea : $\alpha = \operatorname{arc\,cot}(2)$

$$\cot\alpha = \frac{2}{1} = \frac{CA}{CO}$$



Sea : $\theta = \operatorname{arc\,tan}\left(\frac{1}{3}\right)$

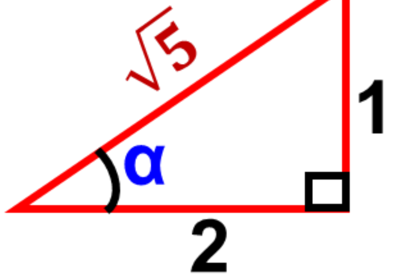
$$\tan\theta = \frac{1}{3} = \frac{CO}{CA}$$



HELICO PRACTICE 6

Resolución

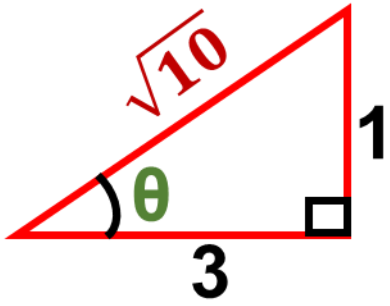
Propina inicial $= 5\tan\left[\frac{\pi}{4}+\alpha\right]$ soles $= 5\left(\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\alpha}\right)$ soles



Propina inicial $= 5\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}}{1-1\cdot\frac{1}{2}}\right)$ soles $= 5\left(\dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$ soles $= 5(\,3\,)$ soles $=$ 15 soles

---

Propina final $= 20\,\text{sen}(2\theta\,)$ soles $= 20\,(\,2\,\text{sen}\theta\,.\cos\theta\,)$ soles



Propina final $= 40\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ soles $= 40\left(\dfrac{3}{10}\right)$ soles $=$ 12 soles

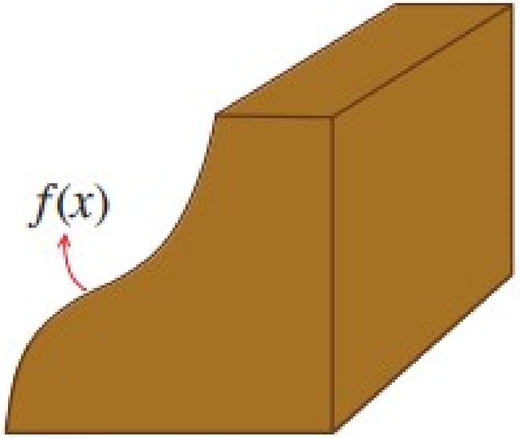
---

Luego : 15 soles – 12 soles = 3 soles

∴ **La propina diaria de Pedro disminuyó en 3 soles .**

HELICO PRACTICE 7

Un arqueólogo descubrió el santuario de una determinada cultura, tal como muestra la figura; por lo cual le pidió a un matemático hallar el dominio de la función que representa el borde de la pared lateral : f(x) = arc sen(x + 2)
¿ Cuál es el dominio de la función ?



Resolución

Recordar :

Función Inversa	Dominio	Rango
$y = \text{arc sen}x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = \text{arc sen}(x + 2)$$

$$\Rightarrow \quad -1 \leq x + 2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \quad -1 - 2 \leq x + \cancel{2} - \cancel{2} \leq 1 - 2$$

$$\Rightarrow \quad -3 \leq x \leq -1$$

$$\boxed{\therefore \ \text{Dom}(f) = [-3 ; -1]}$$

SACO
OLIVEROS