ALGEBRA

Chapter 18

2th
SECONDARY

RACIONALIZACIÓN SESIÓN II

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

La raíz cuadrada de 2 es un número racional?

Mi calculadora dice que la raíz cuadrada de 2 es 1,4142135623730950488016887242097, ¡pero eso no es todo! de hecho sigue indefinidamente, sin que los números se repitan. No se puede escribir una fracción que sea igual a la raíz cuadrada de 2.

Así que la raíz de 2 es un número irracional. Muchas raíces cuadradas, cúbicas, etc. también son números irracionales.

Ejemplos:

$\sqrt{3}$=1,7320508075688772935274463415059 (etc.)...

$\sqrt{99}$=9,9498743710661995473447982100121 (etc.)...

pero $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt[3]{27} = 3$, así que no todas las raíces son irracionales.

HELICO THEORY

Es el proceso mediante el cual se transforma el denominador de una fracción que tiene raíz a otra que no lo tiene, para ello hacemos uso del factor racionalizante.

Casos

	Expresión irracional	Factor racionalizante (FR)	Expresión racional
1.	$\sqrt[n]{A^k}$	$\sqrt[n]{A^{n-k}}; n > k$	A
2.	$(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$	$(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})$	$a - b$

RACIONALIZACIÓN

Caso I: $\dfrac{N}{\sqrt[n]{a^m}}$

$$\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{N}{\sqrt[n]{a^m}} \times \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^{n-m}}}$$

$$\frac{N}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{N.\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}$$

Ejemplo.: Racionalizar $\dfrac{12}{\sqrt[3]{2}}$

Resolución:

$$\frac{12}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$$

$$\frac{12}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12.\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$\frac{12}{\sqrt[3]{2}} = 6\sqrt[3]{4}$$

Caso II:

$$\frac{N}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

$$\frac{N}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{N}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}}$$

$$\frac{N}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{N\left(\sqrt{a} \mp \sqrt{b}\right)}{a - b}$$

Ejemplo.: Racionalizar $\frac{7}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Resolución:

$$\frac{7}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$$

$$\frac{7}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{7\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)}{5 - 2}$$

$$\frac{7}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{7\left(\sqrt{5} - \sqrt{2}\right)}{3}$$

HELICO PRACTICE

PROBLEMA 1

Calcule

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \frac{6\sqrt{14}}{7}$$

Resolución:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \frac{6\sqrt{14}}{7}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} + \frac{6\sqrt{14}}{7}$$

$$A = \frac{\sqrt{14}}{7} + \frac{6\sqrt{14}}{7} = \frac{\cancel{7}\sqrt{14}}{\cancel{7}} = \sqrt{14}$$

Racionalización - 1er Caso

$$\frac{A}{\sqrt[m]{x^n}} = \frac{A}{\sqrt[m]{x^n}} \times \frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^{m-n}}} = \frac{A\sqrt[m]{x^{m-n}}}{x}$$

Nota: $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}$

$\sqrt{7} \times \sqrt{7} = (\sqrt{7})^2 = 7$

Recuerda

Rpta: $\boxed{A = \sqrt{14}}$

PROBLEMA 2

Transforme a una fracción racionalizada.

$$B = \frac{5}{\sqrt[5]{5}} + 3\sqrt[5]{625}$$

Resolución:

$$B = \frac{5}{\sqrt[5]{5}} + 3\sqrt[5]{625}$$

$$B = \frac{5}{\sqrt[5]{5}} \times \frac{\sqrt[5]{\boxed{5^4}}}{\sqrt[5]{5^4}} + 3\sqrt[5]{625}$$

$$B = \frac{\cancel{5}\sqrt[5]{625}}{\cancel{5}} + 3\sqrt[5]{625}$$

$$B = \sqrt[5]{625} + 3\sqrt[5]{625}$$

Rpta: $\boxed{B = 4\sqrt[5]{625}}$

Racionalización - 1er Caso

$$\frac{A}{\sqrt[m]{x^n}} = \frac{A}{\sqrt[m]{x^n}} \times \frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^{m-n}}} = \frac{A\sqrt[m]{x^{m-n}}}{x}$$

Nota: $\sqrt[5]{5} \times \sqrt[5]{5^4} = \sqrt[5]{5^5} = 5$

$5^4 = 625$

Recuerda

PROBLEMA 3

Efectúe

$$F = \frac{10}{\sqrt{6}-1} - 2\sqrt{6} + 10$$

Resolución:

$$F = \frac{10}{\sqrt{6}-1} - 2\sqrt{6} + 10$$

$$F = \underbrace{\frac{10}{\sqrt{6}-1} \times \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}+1}} - 2\sqrt{6} + 10$$

Diferencia de Cuadrados

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$F = \frac{\cancel{10}^{\,2}(\sqrt{6}+1)}{\cancel{5}_{\,1}} - 2\sqrt{6} + 10 = \cancel{2\sqrt{6}} + 2 - \cancel{2\sqrt{6}} + 10$$

Racionalización - 2do Caso

$$\frac{A}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} = \frac{A}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}}{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}} = \frac{A\sqrt{x} \mp \sqrt{y}}{x-y}$$

Nota: $(\sqrt{6}-1) \times (\sqrt{6}+1) = (\sqrt{6})^2 - 1^2 = 5$

Rpta: $\boxed{F = 12}$

PROBLEMA 4

Simplifique

$$Q=\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\sqrt{3}$$

Resolución:

$$Q=\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\sqrt{3}$$

$$Q=\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\sqrt{3}$$

$$Q=\frac{\cancel{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})}{\cancel{3}}-\frac{\cancel{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\cancel{4}}+\sqrt{3}$$

Diferencia de Cuadrados

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$Q=\sqrt{6}-\sqrt{3}-(\sqrt{6}+\sqrt{2})+\sqrt{3}$$

$$Q=\cancel{\sqrt{6}}-\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{\sqrt{6}}-\sqrt{2}+\cancel{\sqrt{3}}$$

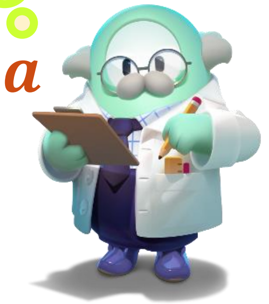
Racionalización - 2do Caso

$$\frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}=\frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}=\frac{A\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{x-y}$$

Nota: $(\sqrt{6}+\sqrt{3})\times(\sqrt{6}-\sqrt{3})=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2=3$

$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\times(\sqrt{6}+\sqrt{2})=(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2=4$

Recuerda



Rpta: $\boxed{F=-\sqrt{2}}$

PROBLEMA 5

Efectúe y racionalice.

$$H=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Resolución:

$$H=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$H=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$H=\frac{(\sqrt{7}+\sqrt{3}).\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$$

Racionalización - 1er Caso

$$\frac{A}{\sqrt[m]{x^n}}=\frac{A}{\sqrt[m]{x^n}}\times\frac{\sqrt[m]{x^{m-n}}}{\sqrt[m]{x^{m-n}}}=\frac{A\sqrt[m]{x^{m-n}}}{x}$$

Nota: $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\sqrt{4}=2$

Recuerda

Rpta: $H=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{6}}{2}$

PROBLEMA 6

Simplifique $Q=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ el resultado representa el número de canicas negras que Rebeca tiene. Si son 25% del total, ¿cuántas canicas tiene?

Resolución:

$$Q=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

$$Q=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$Q=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

Identidad de Legendre

$$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$

$$Q=2(3+2)=12$$

Racionalización - 2do Caso

$$\frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}=\frac{A}{\sqrt{x}\pm\sqrt{y}}\times\frac{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}=\frac{A\sqrt{x}\mp\sqrt{y}}{x-y}$$

Nota: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\times(\sqrt{3}+\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=1$

Recuerda

$\frac{1}{4}\times$ Total canicas $=12$

Total canicas $=48$

Rpta:

48 canicas

PROBLEMA 7

Racionalice e indique el denominador racionalizado de

$$J = \frac{1}{(\sqrt{7} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + 1)}$$

Sabiendo que este denominador duplicado representa el número de manzanas que hoy comió Jorge, ¿Cuántas manzanas fueron?

Resolución:

$$J = \frac{1}{\underline{(\sqrt{7} - \sqrt{5})}\underline{(\sqrt{3} + 1)}} \times \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - 1)}{\underline{(\sqrt{7} + \sqrt{5})}\underline{(\sqrt{3} - 1)}}$$

$$J = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - 1)}{(7 - 5)(3 - 1)} = \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{3} - 1)}{4}$$

Racionalización - 2do Caso

$$\frac{A}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} = \frac{A}{\sqrt{x} \pm \sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}}{\sqrt{x} \mp \sqrt{y}} = \frac{A\sqrt{x} \mp \sqrt{y}}{x - y}$$

Nota: $(\sqrt{7} - \sqrt{5}) \times (\sqrt{7} + \sqrt{5}) = (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{5})^2 = 2$

$(\sqrt{3} + \sqrt{1}) \times (\sqrt{3} - \sqrt{1}) = (\sqrt{3})^2 - (1)^2 = 2$

Recuerda

Rpta: Hoy el consumió 8 manzanas