



TRIGONOMETRY

Chapter 12

5th
SECONDARY

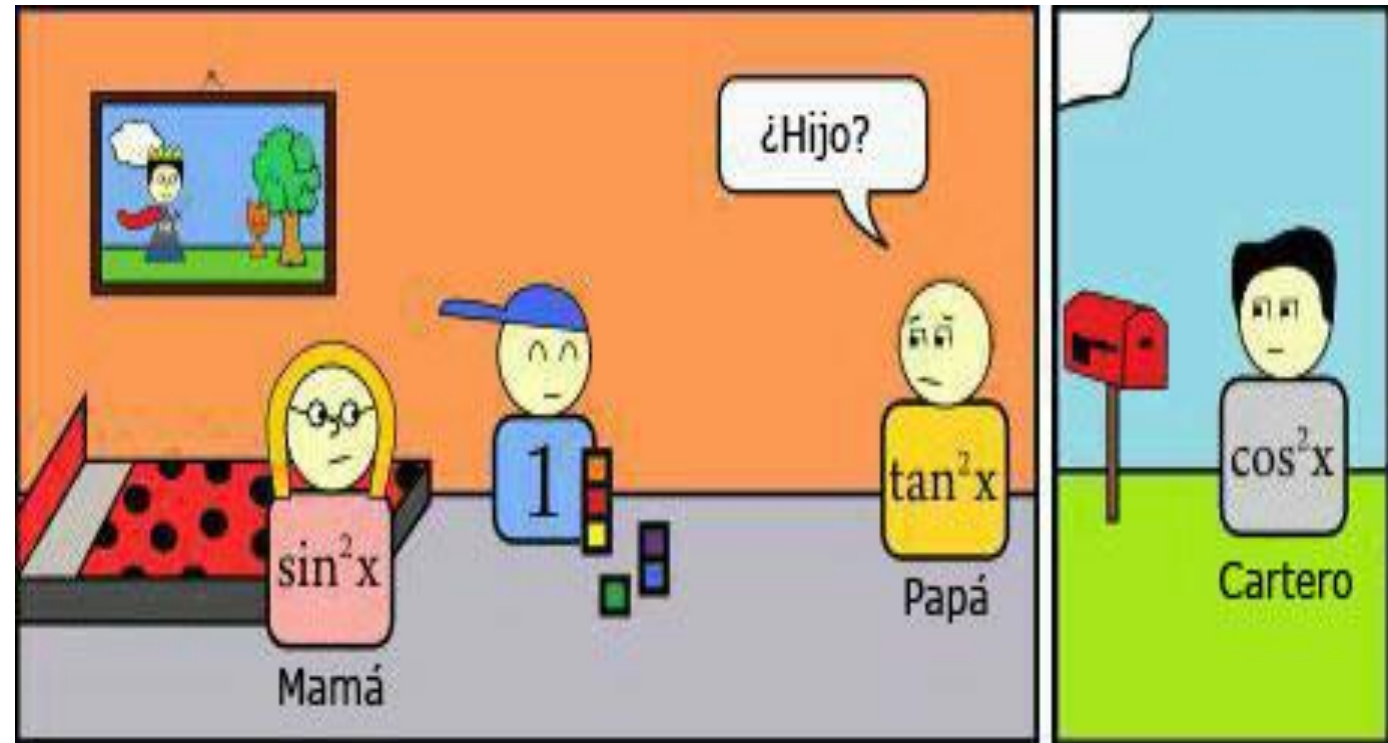
**Identidades
trigonométricas II**



 **SACO OLIVEROS**

En este capítulo, continuaremos con el uso de las **identidades trigonométricas auxiliares** que nos permitirá simplificar las expresiones trigonométricas

¿Cuál es tu comentario acerca del dibujo? 😁





IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

1. $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

2. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$

3. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

4. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

5. $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$

$$(1 + \sin x - \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 - \cos x)$$

$$(1 - \sin x + \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 + \cos x)$$

$$(1 - \sin x - \cos x)^2 = 2(1 - \sin x)(1 - \cos x)$$



1. Reduzca: $G = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 3}{\sin^6 x + \cos^6 x + 5} + \frac{4}{3}$

RESOLUCIÓN

Tenemos:

$$G = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 3}{\sin^6 x + \cos^6 x + 5} + \frac{4}{3}$$

$$G = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x + 3}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x + 5} + \frac{4}{3}$$

$$G = \frac{4 - 2\sin^2 x \cos^2 x}{6 - 3\sin^2 x \cos^2 x} + \frac{4}{3}$$

Identidades auxiliares

3. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$

4. $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

$$G = \frac{2(2 - \sin^2 x \cos^2 x)}{3(2 - \sin^2 x \cos^2 x)} + \frac{4}{3}$$

$$G = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \Rightarrow G = \frac{6}{3} \quad \therefore G = 2$$



2. Simplifique la expresión: $T = \left(\frac{\sec^2 x + \csc^2 x}{\tan x + \cot x} \right) \cos x$

RESOLUCIÓN

Tenemos:

$$T = \left(\frac{\sec^2 x + \csc^2 x}{\tan x + \cot x} \right) \cos x$$

$$T = \left(\frac{\cancel{\sec^2 x} \cdot \cancel{\csc^2 x}}{\cancel{\sec x} \cdot \cancel{\csc x}} \right) \cos x$$

Identidades auxiliares

1. $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

2. $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$

$$T = (\sec x \cdot \csc x) \cos x$$

Ordenamos:

$$T = \underbrace{\cos x \cdot \sec x \cdot \csc x}_1$$

$$\therefore T = \csc x$$



3. Simplifique la expresión: $W = \frac{1 - \cot\theta + \sec\theta \cdot \csc\theta}{1 - \tan\theta + \sec\theta \cdot \csc\theta}$

RESOLUCIÓN

Tenemos:

$$W = \frac{1 - \cot\theta + \textcolor{blue}{\sec\theta \cdot \csc\theta}}{1 - \tan\theta + \textcolor{red}{\sec\theta \cdot \csc\theta}}$$

Identidad auxiliar

1. $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

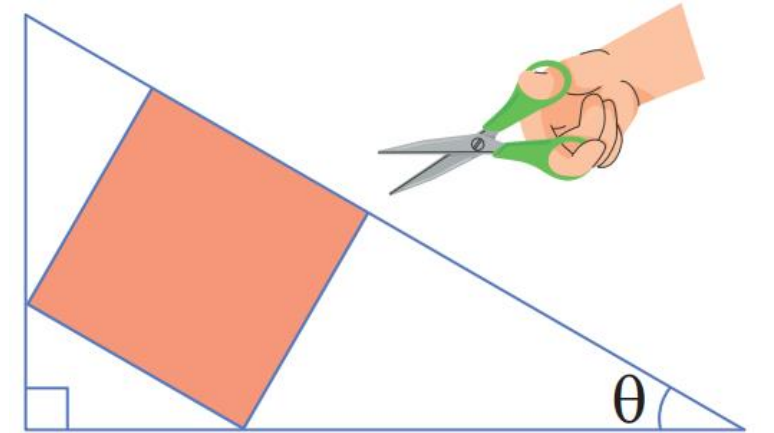
$$W = \frac{1 - \cancel{\cot\theta} + \textcolor{blue}{\tan\theta} + \cancel{\cot\theta}}{1 - \cancel{\tan\theta} + \textcolor{red}{\tan\theta} + \cancel{\cot\theta}}$$

$$W = \frac{1 + \tan\theta}{1 + \cot\theta} \rightarrow W = \frac{1 + \frac{\textcolor{blue}{\text{sen}\theta}}{\textcolor{blue}{\cos\theta}}}{1 + \frac{\textcolor{violet}{\cos\theta}}{\textcolor{violet}{\text{sen}\theta}}}$$

$$W = \frac{\frac{\cancel{\cos\theta} + \cancel{\text{sen}\theta}}{\cancel{\cos\theta}}}{\frac{\cancel{\text{sen}\theta} + \cancel{\cos\theta}}{\cancel{\text{sen}\theta}}} = \frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta}$$

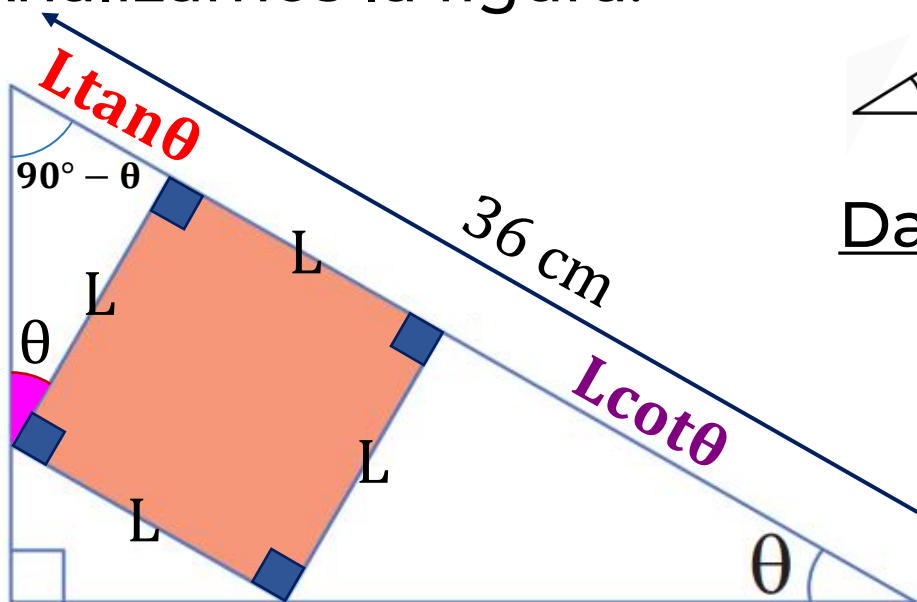
$$\therefore W = \tan\theta$$

4. De un papel que tiene la forma de un triángulo rectángulo, se cortará un cuadrado sombreado como indica la figura. Calcule el área de dicho cuadrado, si $\sin\theta \cdot \cos\theta = 2/7$ y la hipotenusa de dicho triángulo mide 36 cm.

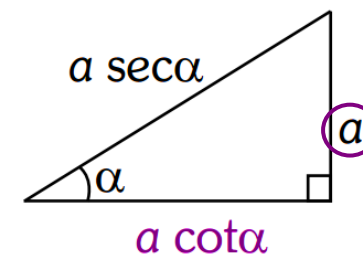
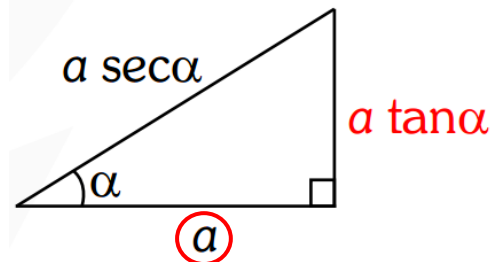


RESOLUCIÓN

Analizamos la figura:



¡Recordamos!



Dato 1: Hipotenusa = 36 cm

$$L \tan\theta + L \cot\theta + L = 36 \text{ cm}$$

$$L(\tan\theta + \cot\theta + 1) = 36 \text{ cm}$$

$$\sec\theta \cdot \csc\theta$$

$$L(\sec\theta \cdot \csc\theta + 1) = 36 \text{ cm}$$

Dato 2:

$$\begin{aligned} \sin\theta \cdot \cos\theta &= 2/7 \\ \text{inversa} \\ \csc\theta \cdot \sec\theta &= 7/2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{7}{2} + 1\right) = 36 \text{ cm}$$

$$L = 8 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow \text{Área } \square = (8 \text{ cm})^2$$

$$\therefore \text{Área } \square = 64 \text{ cm}^2$$



5. De la condición: $\text{sen}x + \text{cos}x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Determine: $F = \text{sen}^4x + \text{cos}^4x$

RESOLUCIÓN

A partir de: $F = \text{sen}^4x + \text{cos}^4x$

$$F = 1 - 2\text{sen}^2x\text{cos}^2x \dots (*)$$

Dato: $\text{sen}x + \text{cos}x = \sqrt{\frac{2}{3}} \dots ()^2$

$$\Rightarrow (\text{sen}x + \text{cos}x)^2 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$\underbrace{\text{sen}^2x + \text{cos}^2x}_1 + 2\text{sen}x\text{cos}x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\text{sen}x\text{cos}x = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2\text{sen}x\text{cos}x = \frac{2}{3} - 1$$

$$\Rightarrow 2\text{sen}x\text{cos}x = -\frac{1}{3}$$

Identidad auxiliar

$$3. \text{sen}^4x + \text{cos}^4x = 1 - 2\text{sen}^2x\text{cos}^2x$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Rightarrow \text{sen}x\text{cos}x = -\frac{1}{6}$$

Reemplazamos en (*):

$$F = 1 - 2\left(-\frac{1}{6}\right)^2$$

$$\therefore F = \frac{17}{18}$$



6. Si se cumple que: $\text{sen}x - \text{cos}x = \frac{1}{3}$

Calcule: $E = (1 + \text{sen}x)(1 - \text{cos}x)$

RESOLUCIÓN

A partir de:

$$E = (1 + \text{sen}x)(1 - \text{cos}x) \dots \times 2$$

$$\Rightarrow 2E = \underbrace{2(1 + \text{sen}x)(1 - \text{cos}x)}$$

$$2E = (1 + \underbrace{\text{sen}x - \text{cos}x})^2$$

Dato $\rightarrow \frac{1}{3}$

Identidad auxiliar

5. $(1 + \text{sen}x - \text{cos}x)^2 = 2(1 + \text{sen}x)(1 - \text{cos}x)$

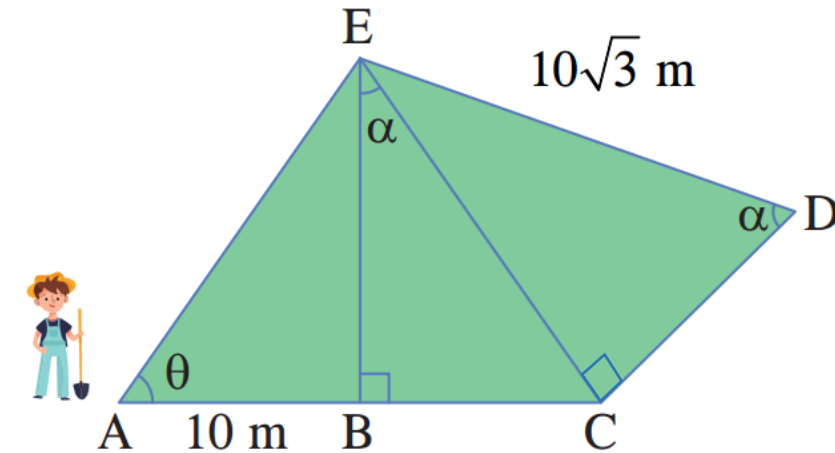
$$\Rightarrow 2E = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow 2E = \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2E = \frac{16}{9}$$

$$\therefore E = \frac{8}{9}$$

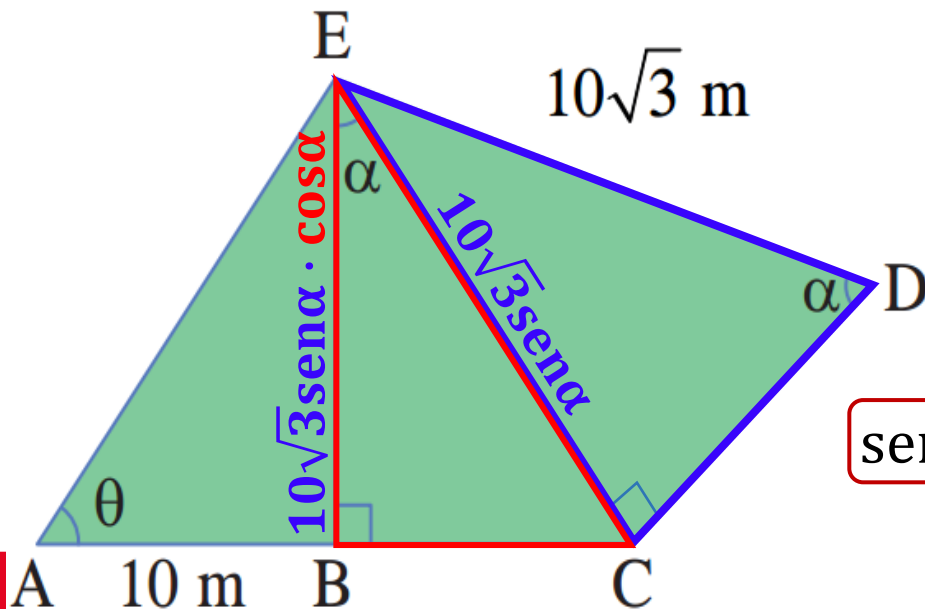


7. El joven Philip recibió como herencia una pequeña huerta; la cual es dividida en tres partes para sembrar distintas plantas, tal como muestra la figura. Con los datos obtenidos de la figura, obtenga el valor de $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + \tan^2 \theta$.

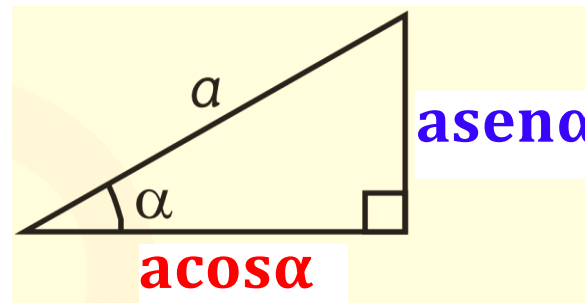


RESOLUCIÓN

Analizamos la figura:



¡Recordamos!



En el $\triangle ABC$:

$$\tan \theta = \frac{10\sqrt{3} \text{ sen } \alpha \cdot \cos \alpha}{10}$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \text{ sen } \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\tan^2 \theta = 3 \text{ sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

Calculamos:

$$\boxed{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha} + \boxed{\tan^2 \theta} = 1 - 3 \text{ sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 3 \text{ sen}^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

$$\therefore \boxed{\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + \tan^2 \theta = 1}$$