

# ALGEBRA

## Chapter 20

### 4th

#### FUNCIONES I



# HELICO

---

# MOTIVATING

# SABIAS QUE

La noción actual de función empezó a desarrollarse en el siglo XIV cuando filósofos escolásticos medievales comenzaron a ver cómo podían medir y representar gráficamente las variaciones de ciertas magnitudes como la velocidad de un cuerpo en movimiento o el cambio de temperatura que experimenta un objeto metálico en diferentes puntos. La persona que quizás influyó en su inicio fue Nicole Oresme (1323-1382), en París. Fue el primero en utilizar diagramas para representar en el plano magnitudes variables, marcando los valores de la variable independiente en una línea recta y los valores de la variable dependiente a lo largo de una recta perpendicular a la primera. La relación matemática expresada de forma explícita aparece en particular en los trabajos de mecánica de Galileo. En 1667 Gregory define a la función como una cantidad obtenida de las otras cantidades mediante operaciones algebraicas sucesivas o mediante cualquier otra operación que se pueda imaginar (límite)- Esto ayudó a que la matemática avanzara considerablemente y se iniciara una interrelación entre el álgebra, el cálculo y la geometría.

Leibniz (1714) empleó el término función para designar cantidades que dependen de una variable, es decir que se sirve de la palabra para designar toda cantidad que varía de un punto a otro de una curva, por ejemplo, la longitud de la tangente o de la subtangente y de la normal. Se debió a él el análisis de los puntos máximos y mínimos de una curva, y crear un método general para obtener la recta tangente a las curvas en un punto determinado.

Podemos decir entonces que la función se originó por el interés en el cambio. Por el tiempo es una variable natural que está constantemente cambiando, aparentemente de modo uniforme; y a medida que el tiempo pasa todas las cosas cambian. Entonces es natural que al hombre se le ocurriera, entre tantos otros inventos, medir cómo y cuánto varía la posición de un objeto que es lanzado hacia arriba a medida que transcurre el tiempo. En la actualidad, es usual encontrar información presentada en forma de gráficos que nos muestran relaciones entre distintas variables, como: la recaudación impositiva en el transcurso de un año, el crecimiento de una población en un período determinado de tiempo, entre otras. Muchas de estas relaciones son funciones, se trabajará con un tipo particular de función: la función lineal.

# HELICO THEORY

## CHAPTER 20

---

# FUNCIONES I

## DEFINICIONES PREVIAS

### Par Ordenado

Es un conjunto de los elementos  $a$  y  $b$  con un orden determinado, que se simboliza de la siguiente forma:  $(a ; b)$ . Donde  $a$  es la primera componente y  $b$  es la segunda componente .

Ejemplos:

$$(1; 7) \quad \left(\frac{1}{2}; 3\right)$$

### Igualdad de pares ordenados

$$(a; b) = (c; d) \longleftrightarrow (a = c \wedge b = d)$$

TENER EN CUENTA

$$(a; b) \neq (b; a)$$

## Producto Cartesiano

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , se llama conjunto producto o producto cartesiano de  $A$  y  $B$ , denotado por  $A \times B$ , al conjunto de todos los pares ordenados  $(a ; b)$ , donde  $a \in A$  y  $b \in B$ .

$$A \times B = \{ (a ; b) \in A \times B / a \in A \text{ y } b \in B \}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = \{ 2; 5 \} \text{ y } B = \{ 3; 4; 6 \}$$

$$A \times B = \{ (2; 3), (2; 4), (2; 6), (5; 3), (5; 4), (5; 6) \}$$

TENER EN CUENTA

$$A \times B \neq B \times A$$

$$n(A \times B) = n(A) \times n(B)$$

$$A^2 = A \times A$$

### Relaciones

Una relación  $R$ , del conjunto  $A$  al conjunto  $B$ , es todo subconjunto del producto cartesiano  $A \times B$ , es decir  $R$  es una relación de  $A$  a  $B$  si y solo si  $R \subset A \times B$ .

### Ejemplo:

Sea  $A = \{2; 5; 7\}$  y  $B = \{3; 4\}$

$$R = \{ (x; y) \in A \times B / x + y > 8 \}$$

$$A \times B = \{ (2; 3), (2; 4), (5; 3), (5; 4), (7; 3), (7; 4) \}$$

$$R = \{ (5; 4), (7; 3), (7; 4) \}$$

### Dominio de una Relación

Son todas las primeras componentes que definen la Relación.  $\{ \text{Dom}(R) \text{ o } \text{Dom}R \}$

### Rango de una Relación (imagen)

Son todas las segundas componentes que definen la Relación.  $\{ \text{Ran}(R) \text{ o } \text{Ran}R \}$

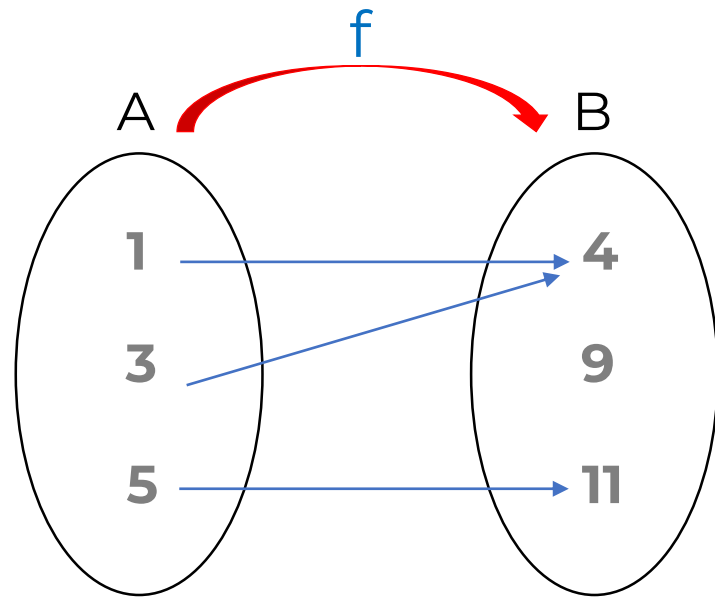
### Tomando el ejemplo anterior

$$\text{Dom}(R) = \{ 5; 7 \}$$

$$\text{Ran}(R) = \{ 3; 4 \}$$

### **FUNCIÓN**

Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$  no vacíos, una función  $F$  es aquella correspondencia de  $F : A \rightarrow B$  tal que para algún elemento  $x \in A$  le corresponde a lo más, un elemento  $y \in B$ .



**f ES UNA FUNCION**

$$f = \{ (1; 4), (3; 4), (5; 11) \}$$

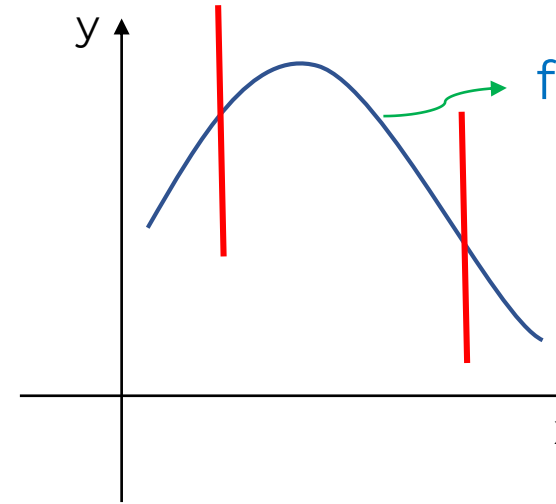
Además:

$$f(1) = 4$$

$$f(3) = 4$$

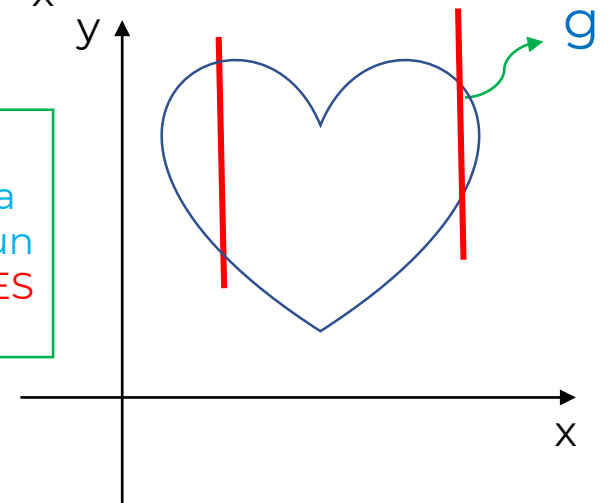
$$f(5) = 11$$

Si tenemos una gráfica en el plano cartesiano



Si al trazar segmentos verticales intersectando a f, lo hacen en un solo punto entonces f ES FUNCION

Si al trazar segmentos verticales intersectando a g, lo hacen en mas de un punto entonces g NO ES FUNCION



# HELICO PRACTICE

CHAPTER 20

---



## HELICO | PRACTICE

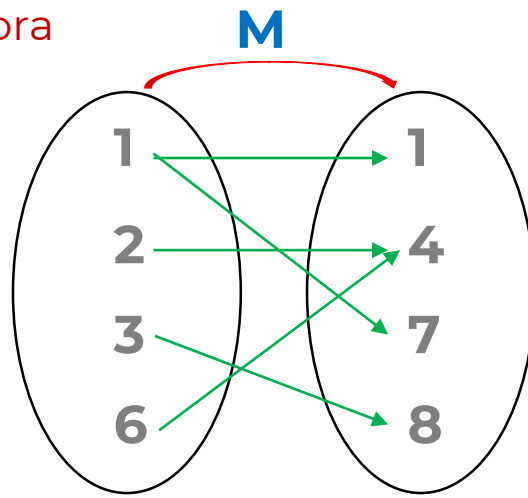
1. Se tiene el conjunto :  
 $M = \{(1;1), (2;4), (6;4), (1;7), (3;8)\}$  Calcule:  
I. Dominio y Rango de M  
II. ¿M es Función? Justifique gráficamente

### RESOLUCIÓN

➡  $\text{Dom}(M) = \{1; 2; 3; 6\}$

➡  $\text{Ran}(M) = \{1; 4; 7; 8\}$

Ahora



Como el elemento 1 tiene dos imágenes

M no es función

### RECORDAR

#### Dominio de una Relación

Son todas las primeras componentes que definen la Relación.  $\{ \text{Dom}(R) \text{ o } \text{Dom}R \}$

#### Rango de una Relación (imagen)

Son todas las segundas componentes que definen la Relación.  $\{ \text{Ran}(R) \text{ o } \text{Ran}R \}$

## HELICO | PRACTICE

2. Sea  $A = \{2; 3; 4\}$   $B = \{1; 5\}$ . Obtenga  
 $R = \{(a; b) \in A \times B / a > b\}$   
Luego indique su número de términos

### RESOLUCIÓN

$$R = \{(a; b) \in A \times B / a > b\}$$

$$A \times B = \{(2; 1), (2; 5), (3; 1), (3; 5), (4; 1), (4; 5)\}$$

Los pares ordenados  $(a; b)$  donde  $a > b$

$$R = \{(2; 1), (3; 1), (4; 1)\}$$

El número de elementos de  $R$  es 3

## HELICO | PRACTICE

3. Si el siguiente conjunto:  
 $H = \{(5; b-8), (6; a+1), (4; 7), (5; 2b-9), (6; 3a-3)\}$   
representa una función. Calcule:  $a + b$

### RESOLUCIÓN

Como H es función

$$(5; b - 8) = (5; 2b - 9)$$

$$\Rightarrow b - 8 = 2b - 9$$

$$b = 1$$

Como H es función

$$(6; a + 1) = (6; 3a - 3)$$

$$\Rightarrow a + 1 = 3a - 3$$

$$a = 2$$

### RECORDAR

H será función  $H : A \rightarrow B$  si y solo si para un elemento  $x \in A$  le corresponde a lo más, un elemento  $y \in B$ .

Igualdad de pares ordenados

$$(a; b) = (c; d)$$



$$(a = c \wedge b = d)$$

Nos piden

$$a + b = 3$$

## HELICO | PRACTICE

4. Sea la función:  $M = \{(1;8), (2;-3), (5;1), (7;-2), (4;2)\}$

Calcular:  $Q = \frac{M(2) + M(1) + M^2(7)}{M(4) + M(5)}$

### RESOLUCIÓN

Reemplazando

$$Q = \frac{(-3) + (8) + (-2)^2}{(2) + (1)}$$

$$Q = \frac{9}{3}$$

$$Q = 3$$

RECORDAR

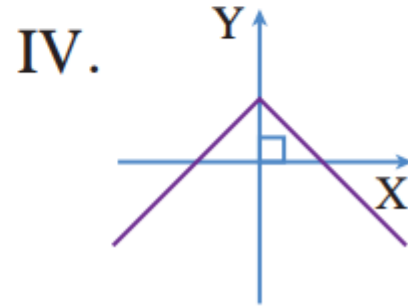
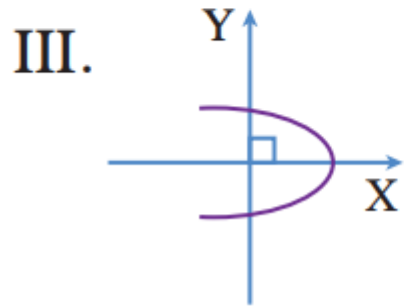
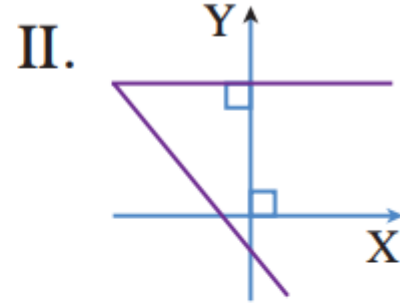
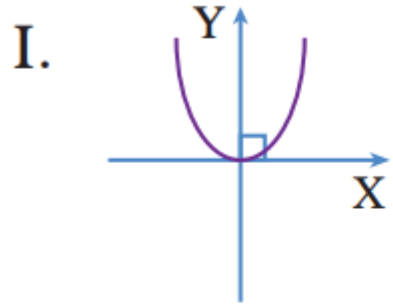
$$f = \{ (1; 4), (3; 4), (5; 11) \}$$

$$f(1) = 4$$

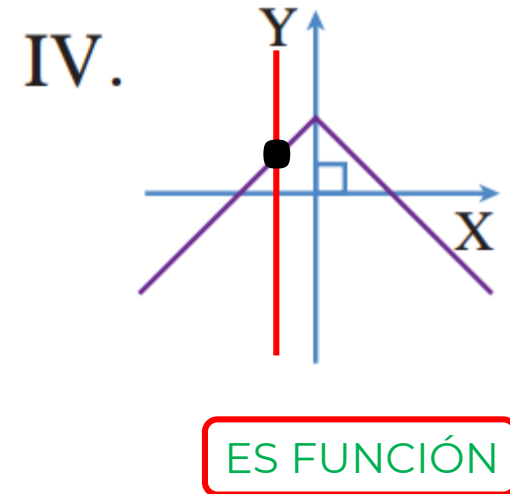
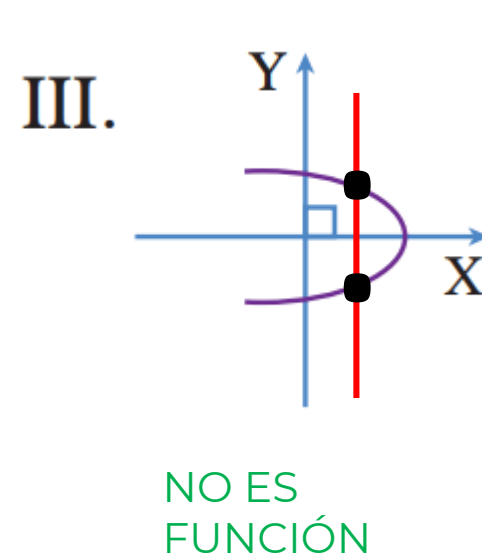
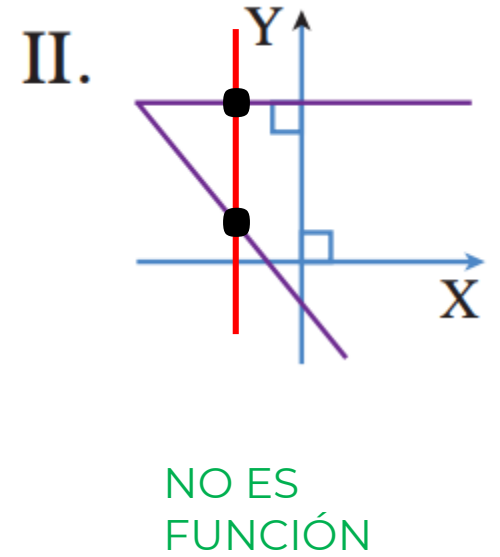
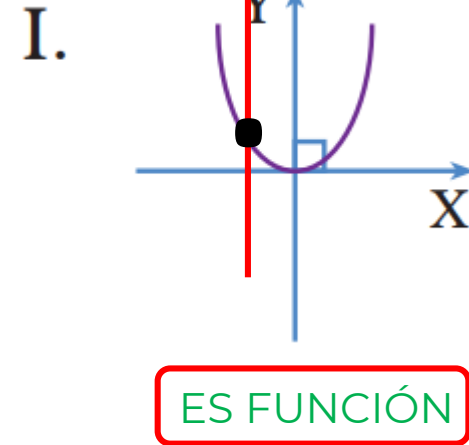
$$f(3) = 4$$

$$f(5) = 11$$

5. Indique qué gráficos representan una función.



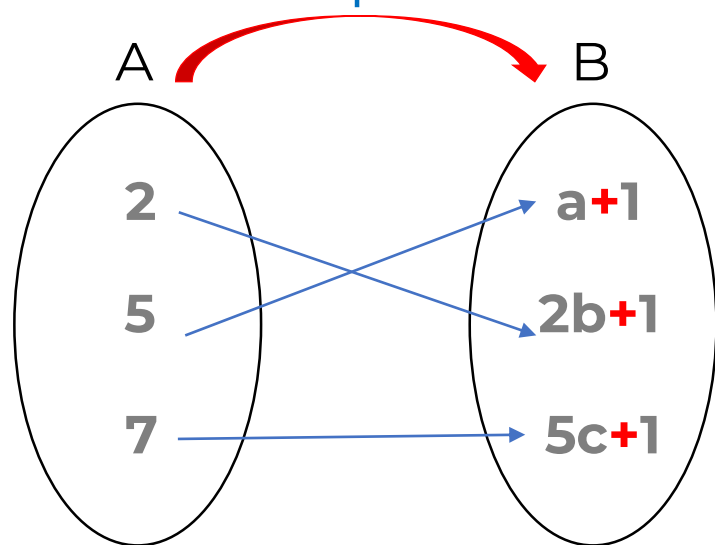
**RESOLUCIÓN**



## HELICO | PRACTICE

6. La edad de Carlos es  $2T$  años; donde  $T$  está dado por el resultado del siguiente problema

“Dada la función  $f$



Además  $f(x) = 3x$ . Calcule:  $T = a + b + c$   
¿Qué edad tendrá Carlos dentro de 8 años?

### RESOLUCIÓN

Sabemos que:

$$f(x) = 3x$$

$$f(2) = 6$$

$$f(5) = 15$$

$$f(7) = 21$$

En el gráfico

$$f(2) = 2b + 1$$

$$f(5) = a + 1$$

$$f(7) = 5c + 1$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2b + 1 = 6 & a + 1 = 15 & 5c + 1 = 21 \end{matrix}$$

$$b = \frac{5}{2}$$

$$a = 14$$

$$c = 4$$

$$\Rightarrow T = \frac{41}{2} \quad \Rightarrow 2T = 41$$

La edad de Carlos es 49 años

## HELICO | PRACTICE

7. Si:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1; \text{ si } x < -1 \\ 4; \text{ si } -1 \leq x < 5 \\ -x + 2; \text{ si } x \geq 5 \end{cases}$$

Calcule

$$M = \frac{f(0) + f(-3) - f(9)}{3}$$

Además, si  $3M$  es el costo 3 kg de mandarina, ¿cuál será el costo(soles) de 12 kg de mandarina?

### RESOLUCIÓN

Reemplazando

$$M = \frac{4 + (-5) - (-7)}{3}$$

$$M = \frac{6}{3}$$

$$3M = 6$$

12 kg de mandarina costará 24 soles