ARITHMETIC

Chapter 12

4th
SECONDARY

ESTUDIO DE LOS
ENTEROS POSITIVOS II

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

El estudio de los números primos ha despertado la curiosidad de muchos estudiosos por saber cuál es el más grande número primo. A continuación algunos descubrimientos.

- Lucas en 1877 publicó el número $2^{177} - 1$ que tiene 39 cifras.

- Robinson en 1958 publicó los números
  $81 \times 2^{324} + 1$; $63 \times 2^{326} + 1$; $35 \times 2^{327} + 1$

Cada uno de ellos son números con 100 cifras.

- La Universidad de Illinois (EE. UU.) en 1963 publicó el número $2^{11213} - 1$, que tiene 3376 cifras.

- En 1971, en New York (EE. UU.), se publicó el número primo $2^{19937} - 1$, que tiene 6002 cifras, que fueran calculadas en una computadora.

DESCOMPOSICION CANONICA

Recordemos :

Sea $N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta} \ldots (DC)$

Donde : $a \neq b \neq c, \ primos$

$\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{Z}^{+}$

1 Cantidad de divisores

En general:

$$CD_N = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\theta + 1)$$

2 Suma de divisores

Ejm

$$60 = \underbrace{2^2}_{\substack{2^0\\2^1\\2^2}} \times \underbrace{3^1}_{\substack{3^0\\3^1}} \times \underbrace{5^1}_{\substack{5^0\\5^1}}$$

$$SD_{60} = (1 + 2^1 + 2^2)(1 + 3^1)(1 + 5^1)$$

$$SD_{60} = \left(\frac{2^3-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^2-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right) = 168$$

En general:

$$SD_N = \left(\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\right)\left(\frac{c^{\theta+1}-1}{c-1}\right)$$

1

Del número 3000, halle:
A: cantidad de divisores múltiplos de 20
B: cantidad de divisores múltiplos de 75
Dé como respuesta el valor de A + B.

Resolución :

$$3000 = 2^3 \times 3 \times 5^3 \ldots \quad (\text{D.C})$$

Hallar A

$$3000 = \cancel{2^2 \times 5^1}\,\underbrace{(2^1 \times 3^1 \times 5^2)}$$

$$A = CD_{3000\overset{\circ}{20}} = (1+1)(1+1)(2+1)$$

$$A = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

Hallar B

$$3000 = \cancel{5^2 \times 3^1}\,\underbrace{(2^3 \times 5^1)}$$

$$B = CD_{3000\overset{\circ}{75}} = (3+1)(1+1)$$

$$B = 4 \times 2 = 8$$

$$\therefore \quad A + B = 20$$

RPTA: 20

2

Si 686^n tiene 96 divisores, halle el valor de n.

Resolución :

$$686^n = (2^1 . 7^3)^n$$

$$686^n = 2^n \times 7^{3n} \quad \text{...D.C}$$

$$CD(686^n) = (n+1)(3n+1) = 96$$

$$(n+1)(3n+1) = 6 \times 16$$

$$(5+1)(3 . 5+1)$$

$$\therefore \; n = 5$$

RPTA: 5

3

Si $15^{n} \times 55^{n+1}$ tiene 500 divisores compuestos, halle el valor de n.

Resolución :

$$CD_{totales} = CD_{simples} + CD_{compuestos}$$

$$N = 15^{n}.55^{n+1}$$

$$N = (3^{1}.5^{1})^{n}(5^{1}.11^{1})^{n+1}$$

$$N = 3^{n} \times 5^{n} \times 5^{n+1} \times 11^{n+1}$$

$$N = 3^{n} \times 5^{2n+1} \times 11^{n+1}$$ ...D.C

$$(n+1)(2n+1+1)(n+1+1) = 4 + 500$$

$$(n+1)(2)(n+1)(n+2) = 504$$

$$(2)(n+1)^{2}(n+2) = 504$$

$$(n+1)^{2}(n+2) = 252$$

$$(n+1)^{2}(n+2) = 36 \times 7$$

$$(5+1)^{2}(5+2)$$

$$\therefore n = 5$$

RPTA: 5

4 **Calcule la suma de divisores del número 30^k sabiendo que tiene 27 divisores**

Resolución :

$N = 2^{k} \times 3^{k} \times 5^{k}$ ...D.C

$CD_N = (K+1)(K+1)(K+1)$

$27 = (K+1)^3$

$2 = K$

Pide

$N = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$

$SD_N = \left(\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{2+1}-1}{5-1}\right)$

$SD_N = 7 \times 13 \times 31$

$SD_N = 2821$

RPTA: 2821

5

Calcule la suma de los divisores del número 19600

Resolución :

19600	$100 = 2^2 x\, 5^2$
196	2
98	2
49	7
7	7
1	

$$19600 = 2^4 \times 5^2 \times 7^2$$

$$SD_{19600} = \left(\frac{2^{4+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{5^{2+1}-1}{5-1}\right)\left(\frac{7^{2+1}-1}{7-1}\right)$$

$$SD_{19600} = 31 \times 31 \times 57$$

$$SD_{19600} = 54777$$

RPTA: 54777

6

Aaron encuentra un cofre lleno de monedas de chocolate y al no saber qué hacer con ellas, regala cada día la mitad de las monedas que tiene. Al comenzar el quinto día, se da cuenta de que ya no puede obtener una mitad entera de monedas, por lo cual ahora regalará una parte y se quedará con la tercera parte, lo cual puede hacer por tres días. Finalmente, dos días más regala otra parte y se queda con la quinta parte de las monedas; tras lo cual, al final, se queda con una moneda que se le cae por la alcantarilla. ¿Cuál será la suma de divisores pares de la cantidad de monedas que encontró Aaron?

Resolución :

$$MONEDAS = 2^{4} \times 3^{3} \times 5^{2}$$ ...D.C

Suma de divisores pares

$$2\left(2^{3} \times 3^{3} \times 5^{2}\right)$$

$$SD_N = 2\left(\frac{2^{3+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{3+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{2+1}-1}{5-1}\right)$$

$$SD_N = 2 \times 15 \times 40 \times 31$$

$$SD_N = 37200$$

RPTA: 37200

7

En el último Concurso Nacional de Matemáticas una de las preguntas de la evaluación; era conocer si al aumentar una cierta cantidad de ceros a un número, este se modificaba en cuánto a su cantidad de divisores siendo la pregunta: ¿Cuántos ceros son necesarios colocar a la derecha del número 9 para que el resultado tenga 239 divisores compuestos?

Resolución :

$Sea\ el\ número$:

$$N = \underbrace{900\ldots000}_{"n" ceros}$$

$$N = 9 \times 10^{n}$$

$$= 3^{2} \times (2^{1}.5^{1})^{n}$$

$$N = 2^{n} \times 3^{2} \times 5^{n}$$

...D.C

$$CD_{totales} = CD_{simples} + CD_{compuestos}$$

$$(n+1)(2+1)(n+1) = 4 + 239$$

$$(3)\quad (n+1)^{2} = 243$$

$$(n+1)^{2} = 81$$

$$(n+1) = 9$$

$$\therefore\quad n = 8$$

RPTA: 8 ceros