ALGEBRA

Chapter 18

5th of SECONDARY

FUNCIONES III

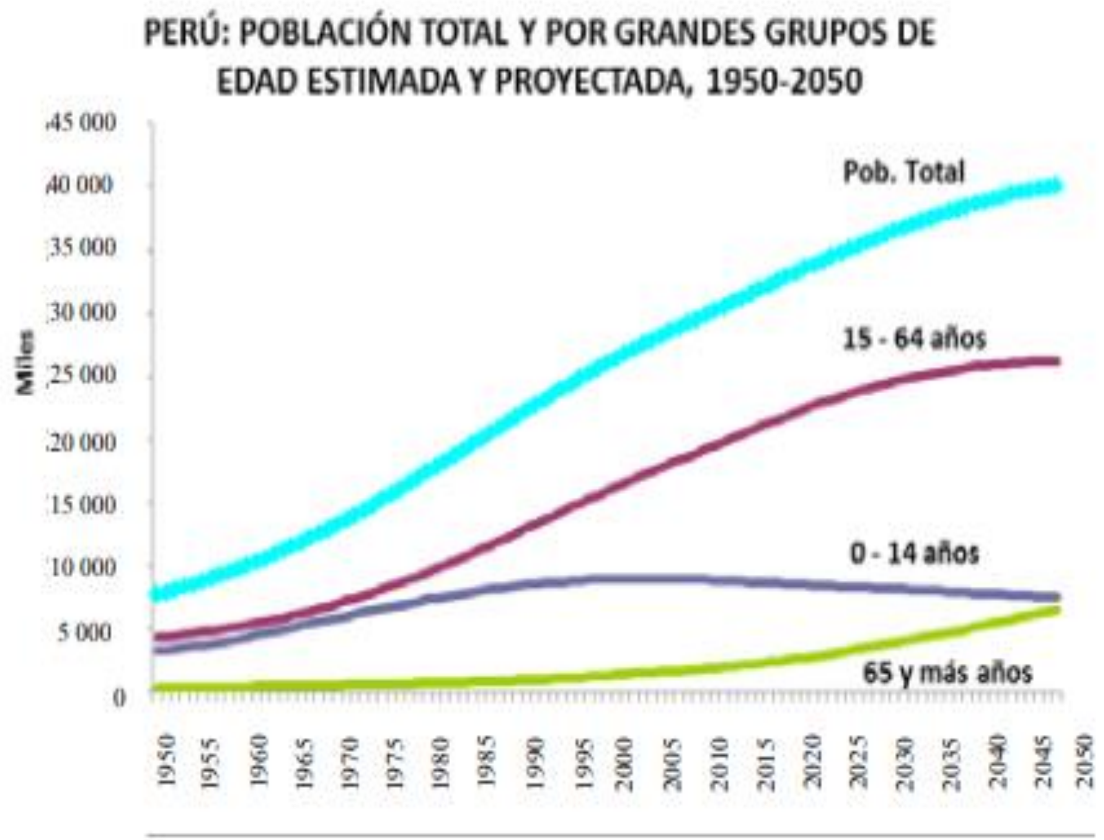
SACO OLIVEROS

HELICOMOTIVATION

¿Cuál será la población en el Perú en el año 2050?

El INEI cuenta con un registro con información de el número de habitantes en función de los años, en base al cual se ha podido elaborar el siguiente gráfico:

En el cual se puede apreciar que para el año 2050 seremos aproximadamente 40 millones de peruanos



Elaboración propia
Fuente: INEI - Estimaciones y Proyecciones de la Población 1950 - 2050

HELICO THEORY

FUNCIONES III

I) FUNCIÓN INYECTIVA

Sea la función $f: A \rightarrow B$,diremos que f es inyectiva si y sólo si:

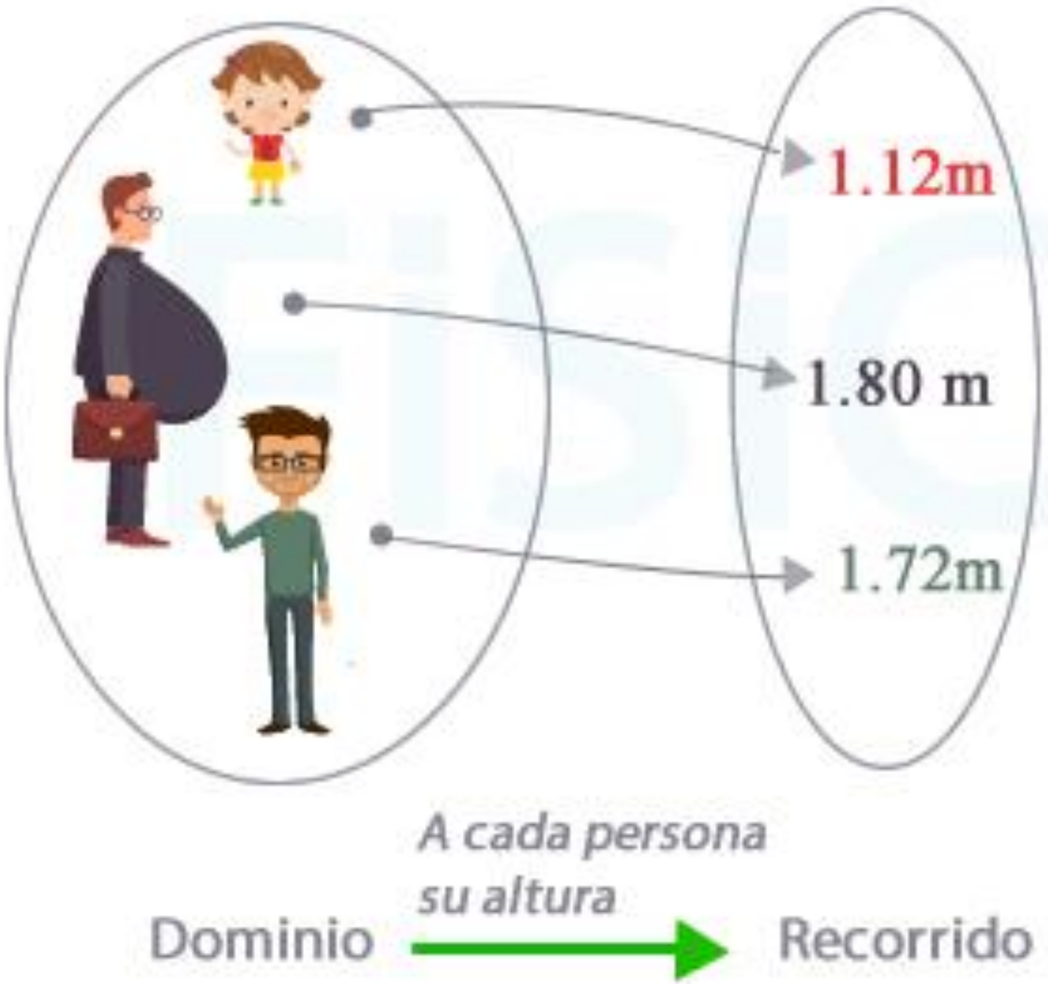
$\underbrace{a \neq b}_{p}$ $\underbrace{\text{implica}}_{\Longrightarrow}$ $\underbrace{f(a) \neq f(b)}_{q}$ para todo $a; b \in Dom\ f$

que es equivalente a la siguiente definición:

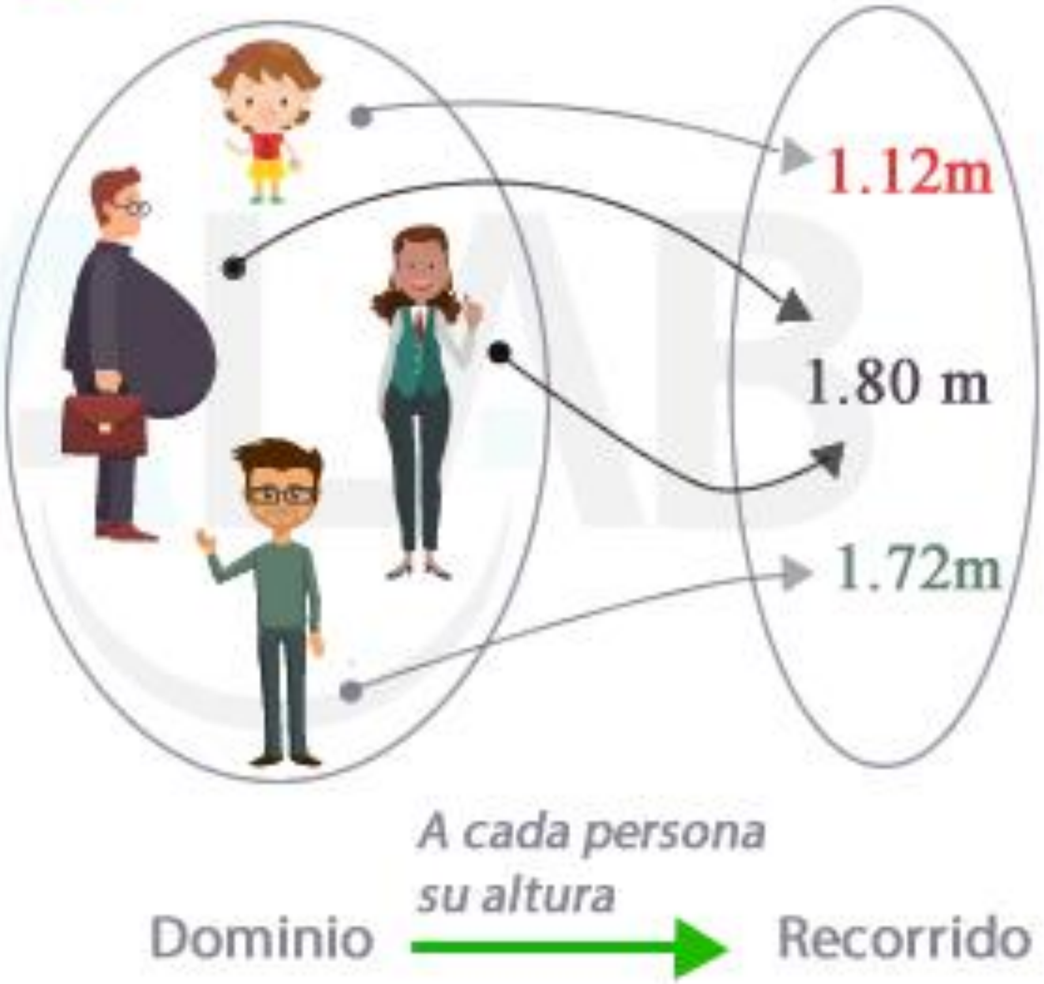
$\underbrace{f(a) = f(b),}_{\sim q}$ $\underbrace{\text{implica}}_{\Longrightarrow}$ $\underbrace{a = b}_{\sim p}$

la cual usaremos en los ejercicios

Función inyectiva



Función no inyectiva



FORMA PRÁCTICA DE IDENTIFICAR UNA FUNCIÓN INYECTIVA

Sea $F = \{(1;3),(4;6),(0;8),(3;6)\}$

$3 \quad 6 \quad 8 \quad 6$

F no es inyectiva

porque en $(4;6)$ y $(3;6)$ se repite el 6 dos veces

Sea $G = \{(6;7),(0;2),(2;8),(1;1),(3;5),(9;3)\}$

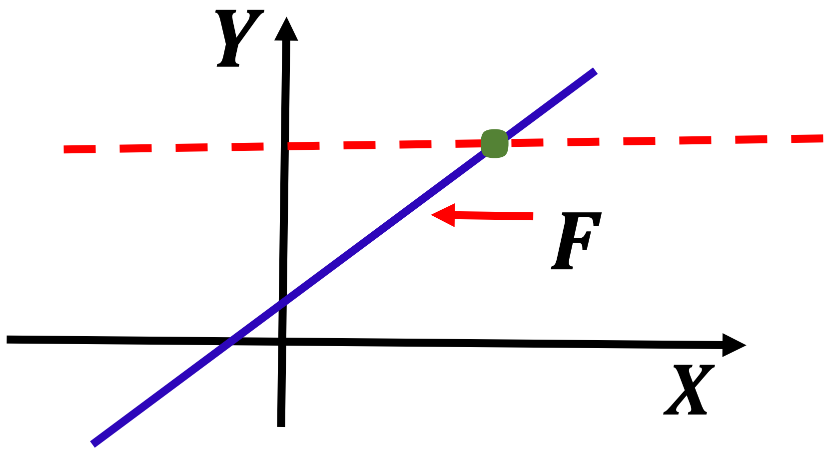
$7 \quad 2 \quad 8 \quad 1 \quad 5 \quad 3$

G si es inyectiva,

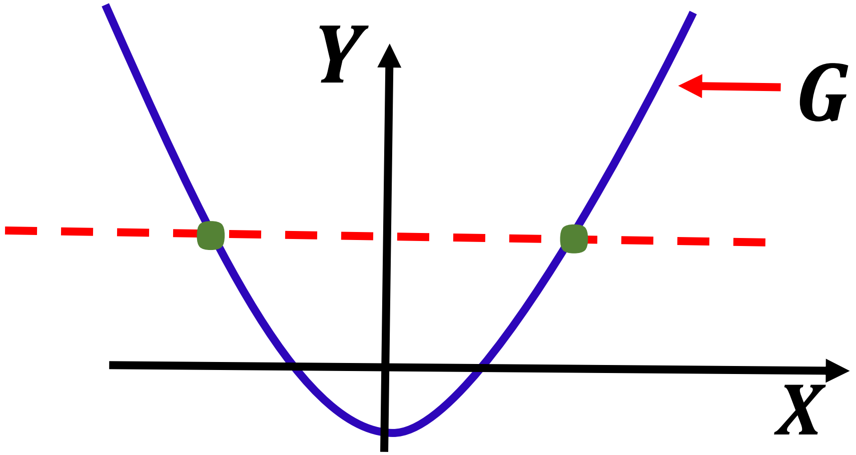
ninguno de las segundos componentes se repite

OBSERVACIÓN

Para gráficas de funciones, se dirá que una gráfica es inyectiva si al trazar una recta horizontal lo corta sólo en un punto.



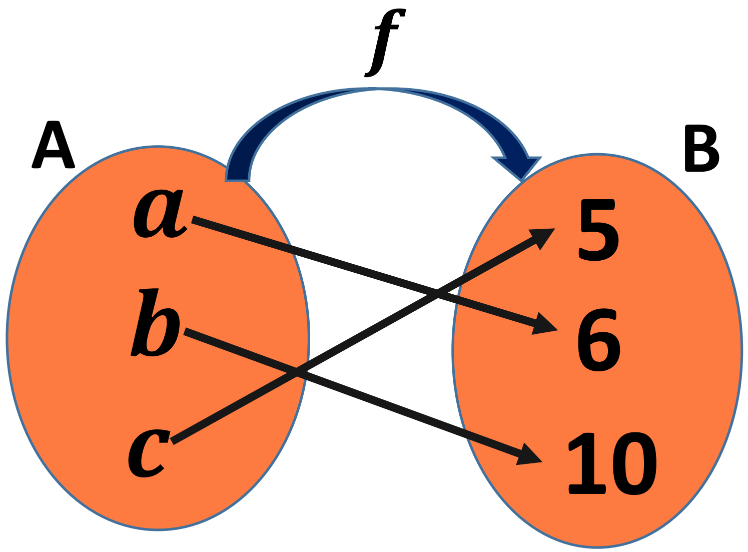
F es inyectiva

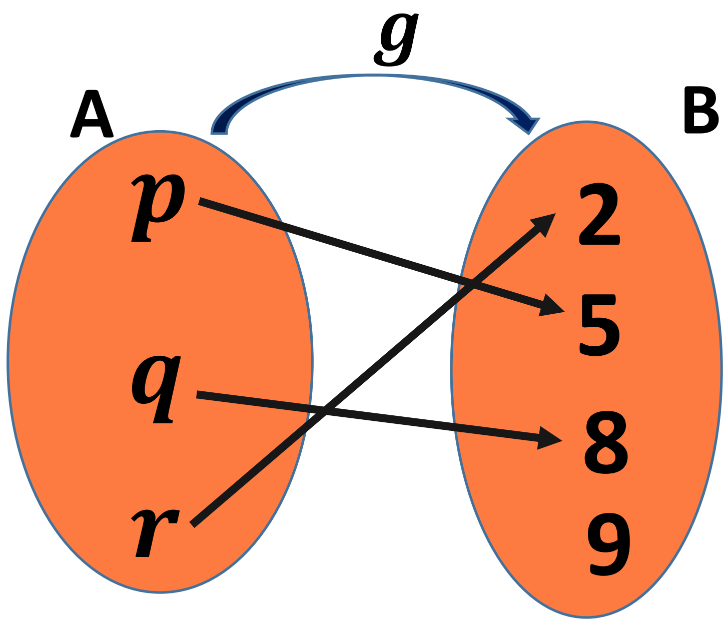


G no es inyectiva

II) FUNCIÓN SOBREYECTIVA

Sea la función $f: A \to B$,diremos que f es sobreyectiva si y sólo si: $Rang(f) = B$





f es sobreyectiva, pues:

$$Rang(f) = B$$

g no es sobreyectiva, pues:

$$Rang(g) \neq B$$

III) FUNCIÓN BIYECTIVA

La función $f: A \to B$ es biyectiva si y sólo si f es inyectiva y sobreyectiva

IV) FUNCIÓN INVERSA

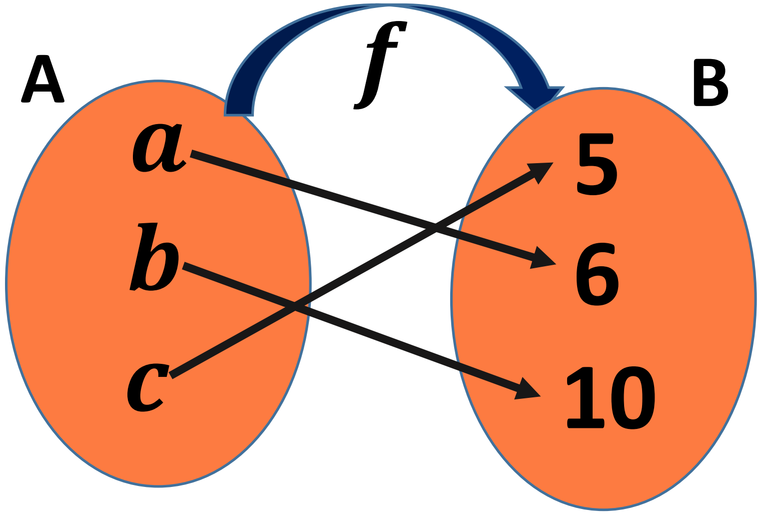
Si $f: A \to B$ es una función biyectiva ,entonces existe $f^{-1}: B \to A$ llamada inversa de f,
definida por la condición $y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

PROPIEDAD:

$$Dom(f^{-1}) = Ran(f)$$

$$Ran(f^{-1}) = Dom(f)$$

Ejemplo de función inversa



$$Dom\ f = \{a; b; c\}$$

$$Ran\ f = \{6; 10; 5\}$$

$$f = \{(a; 6), (b; 10), (c; 5)\}$$

f es Inyectiva y f es Sobreyectiva

$\Rightarrow f$ es Biyectiva $\Rightarrow$ existe f^{-1}

$$f^{-1} = \{(6; a), (10; b), (5; c)\}$$

Además se observa:

$$\boxed{Dom(f^{-1}) = \{5; 6; 10\}} = Ran\ f$$

$$\boxed{Ran(f^{-1}) = \{a; b; c\}} = Dom\ f$$

V) ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Sean f y g funciones, $f+g$, $f-g$, $f.g$ existen si y sólo si $Dom(f) \cap Dom(g) \neq \phi$

PROPIEDADES

$$f+g=\{(x;f(x)+g(x))/\,x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

$$f-g=\{(x;f(x)-g(x))/\,x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

$$f.g=\{(x;f(x)g(x))/\,x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$$

Ejemplo de álgebra de funciones

Sean $F = \{(-1; -2), (\cancel{0; 0}), (1; 2), (\cancel{2; 4}), (4; 6)\}$

$G = \{(-1; -3), (1; 3), (4; 12), (\cancel{6; 18})\}$ $\quad Halle: F + G$

Resolución

Paso 1: $Dom(F) \cap Dom(G) = \{-1; 1; 4\}$

Paso 2:

$$F + G = \{(-1; F(-1) + G(-1)), (1; F(1) + G(1)), (4; F(4) + G(4))\}$$

$$F + G = \{(-1;\ -2 + -3), (1;\ 2 + 3), (4;\ 6 + 12)\}$$

$$F + G = \{(-1; -5), (1; 5), (4; 18)\}$$

HELICO PRACTICE

PROBLEMA 1 Sean las funciones

$F = \{(5;1),(0;2),(-2;1),(3;4)\}$

$G = \{(2;9),(3;4),(4;8),(0;5)\}$ ¿F y G son inyectivas?

Resolución

$F = \{(\cancel{5};1),(\cancel{0};2),(-\cancel{2};1),(\cancel{3};4)\}$

$\quad\quad\quad 1 \quad\quad 2 \quad\quad\quad 1 \quad\quad 4$

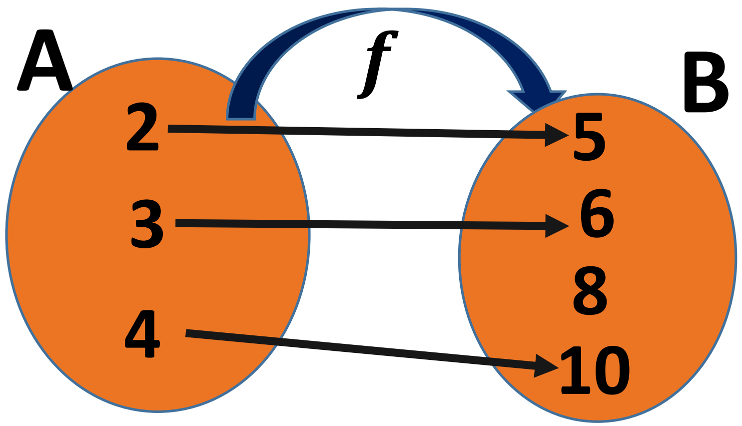
$\therefore$ **F no es inyectiva**

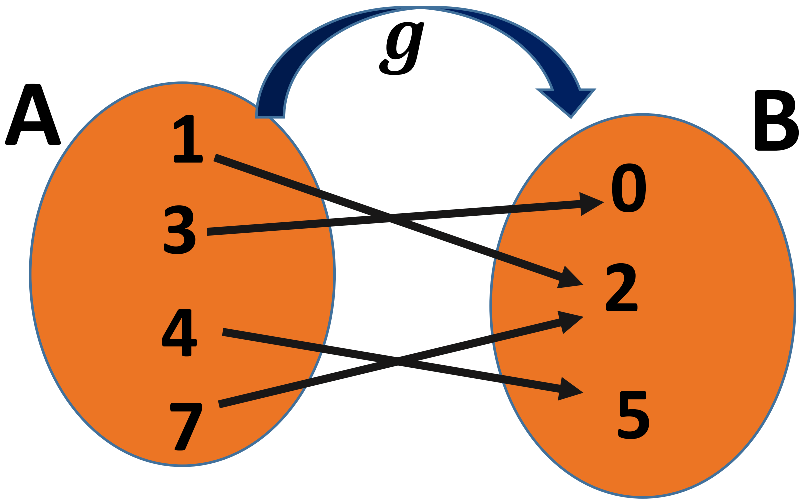
$G = \{(\cancel{2};9),(\cancel{3};4),(\cancel{4};8),(\cancel{0};5)\}$

$\quad\quad\quad 9 \quad\quad 4 \quad\quad 8 \quad\quad 5$

$\therefore$ **G es inyectiva:**

PROBLEMA 2 Sean las funciones:





¿f y g son sobreyectivas?

Resolución

$$\{5; 6; 10\} \neq \{5; 6; 8; 10\}$$

$$Ran(f) \neq B$$

$\therefore$ f **no es Sobreyectiva**

$$\{0; 2; 5\} = \{0; 2; 5\}$$

$$Ran(g) = B$$

$\therefore$ g **es Sobreyectiva**

PROBLEMA 3 Sean A={0;4;8;10} B={3;5;9;12} y las funciones f:A→B y g:A→B tal que:

f={(0;5),(4;3),(8;12),(10;9)} g={(8;12),(10;3),(0;5),(4;12)}

¿Existen f^{-1} y g^{-1}? En caso existan, halle sus respectivos dominios y rangos

Resolución

f es inyectiva

f es Sobreyectiva ➡ f es biyectiva

➡ existe f^{-1}

f^{-1}= {(5;0),(3;4),(12;8),(9;10)}

➡ Dom(f^{-1})= {5;3;12;9}

➡ Ran(f^{-1})= {0;4;8;10}

g no es inyectiva

"se repite el 12"

g no es Sobreyectiva

"falta el 9"

➡ g no es biyectiva

➡ no existe g^{-1}

PROBLEMA 4 Dadas las funciones:

$$f = \{\cancel{(-3;2)}, \cancel{(0;0)}, (2;4), (3;-1), (4;3)\}$$

$$g = \{(2;0), (3;4), (4;7), \cancel{(6;2)}\}.$$ Halle $f+g$ y f-g

Resolución

$$Dom\ f = \{-3;0;2;3;4\}$$

$$Dom\ g = \{2;3;4;6\}$$

$$Dom(f \pm g) = \{2;3;4\}$$

$$f+g = \{(2; \overset{4\ +\ 0}{f(2)+g(2)}); (3; \overset{-1\ +\ 4}{f(3)+g(3)}); (4; \overset{3\ +\ 7}{f(4)+g(4)})\}$$

$$\boxed{f+g = \{(2;4);(3;3)(4;10)\}}$$

$$f-g = \{(2; \overset{4\ -\ 0}{f(2)-g(2)}); (3; \overset{-1\ -\ 4}{f(3)-g(3)}); (4; \overset{3\ -\ 7}{f(4)-g(4)})\}$$

$$\boxed{f-g = \{(2;4);(3;-5)(4;-4)\}}$$

PROBLEMA 5 Halle $f \cdot g$ y $Ran(f \cdot g)$. Dadas:

$$f = \{(1;4), \cancel{(4;5)}, (2;3), (3;2)\}$$
$$g = \{\cancel{(0;2)}, (1;2), (2;-1), (3;0), \cancel{(5;2)}\}$$

Resolución

Hallamos el Dominio

$$Dom\ f = \{1;4;2;3\}$$
$$Dom\ g = \{0;1;2;3;5\}$$

$$Dom(f.g) = \{1;2;3\}$$

El álgebra de funciones

$$f.g = \{(1;\underbrace{f(1).g(1)}_{4.2});(2;\underbrace{f(2).g(2)}_{3.(-1)});(3;\underbrace{f(3).g(3)}_{2.0})\}$$

$$f.g = \{(1;8);(2;-3);(3;0)\}$$

$$\therefore\ \boxed{Ran\ (f.g) = \{8;-3;0\}}$$

PROBLEMA 6 Si Javier compra "a" hamburguesas al costo de "b" soles cada una, donde a y b se obtienen de la función inyectiva :
$F=\{(4a-1;5),(3b-7;8),(11;5),(23;8),(10;1),(8;2)\}$, ¿Cuánto gastó Javier por dicha compra?

Resolución

Observación:

$Si: (b;a)\ y\ (c;a) \in Funcion\ Inyectiva \quad \rightarrow b=c$

$(4a-1;5)=(11;5) \quad \rightarrow 4a-1=11 \quad \rightarrow a=3$

$(3b-7;8)=(23;8) \quad \rightarrow 3b-7=23 \quad \rightarrow b=10$

Javier compra: $a=3\ hamburguesas$

$b=10\ soles\ cada\ una$

$\therefore\ Gasto\ Total\ es:$ $\boxed{30\ soles}$

PROBLEMA 7 Sea f una función lineal, creciente y sobreyectiva tal como f: Dom(f) = [2;20] → $[10;64]$.Carlos compró en una librería $f^*(40)$lapiceros pagando por cada uno de ellos $f^*(19)$soles, ¿Cuánto recibió de vuelto Carlos ,si pagó con un billete de 100 soles?

Resolución

Sea $f^*(x) = ax+b$

Por ser f creciente y sobreyectiva se cumple:

$f(2)=10 \longleftrightarrow f^*(10)=2 \Rightarrow 10a+b=2$

$f(20)=64 \longleftrightarrow f^*(64)=20 \Rightarrow 64a+b=20$

resolviendo:

$a=1/3 \qquad b=-4/3$

$$f^*(x) = \frac{x-4}{3}$$

$$f^*(40) = \frac{40-4}{3} = 12 \text{ lapiceros}$$

$$f^*(19) = \frac{19-4}{3} = 5 \text{ soles cada lapicero}$$

$\boxed{\text{Vuelto} = 40 \text{ soles}}$