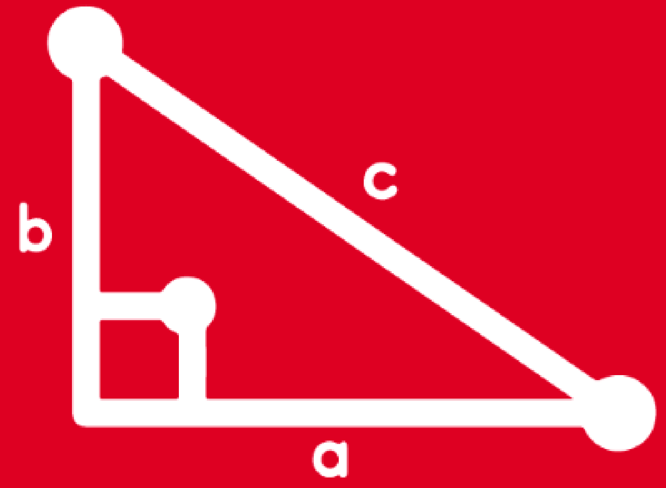
TRIGONOMETRY

Chapter 14



5th
SECONDARY

Identidades trigonométricas del ángulo compuesto II

SACO OLIVEROS

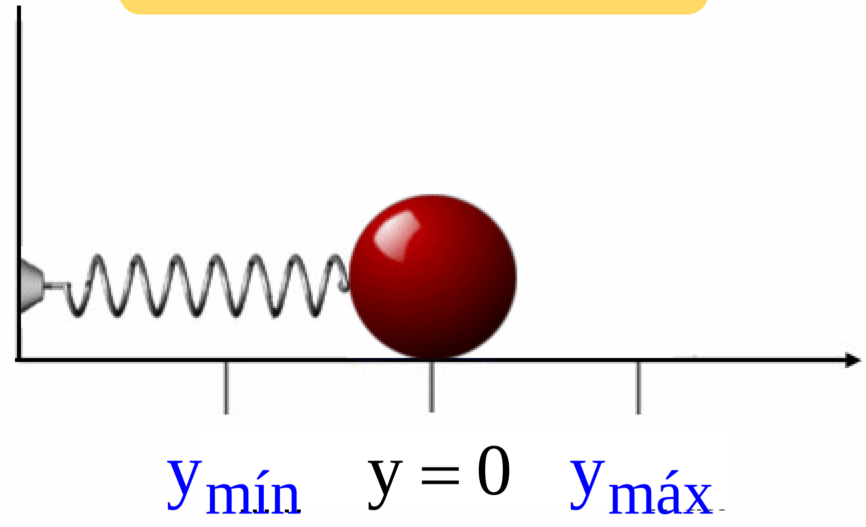
Los fenómenos periódicos son aquellos que se **repiten** en el tiempo de forma idéntica.

Así tenemos fenómenos periódicos como el movimiento de rotación de la tierra , el sonido , la corriente alterna , la luz , las mareas , los latidos del corazón entre otros.

Para un mejor estudio de estos fenómenos , se usan a **las funciones trigonométricas seno y coseno**.

Ejemplo: La elongación de un resorte **y** (cm), se puede modelar por la ecuación:

$$\mathbf{y} = 3\operatorname{sen}x + 4\cos x$$



¿Puedes calcular la máxima elongación del resorte?

Rpta: **5 cm**

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

1. $\boxed{\operatorname{sen}(x+y).\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}^2y}$

2. $\boxed{\cos(x+y).\cos(x-y)=\cos^2x-\operatorname{sen}^2y}$

Ejemplo: Reducir la expresión

$$E=\operatorname{sen}(30^\circ+\alpha).\operatorname{sen}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{sen}^2\alpha$$

Resolución:

$$E=\underbrace{\operatorname{sen}(30^\circ+\alpha).\operatorname{sen}(30^\circ-\alpha)}+\operatorname{sen}^2\alpha$$

IA 1.

$$E=\operatorname{sen}^2 30^\circ-\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha}+\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha} \Rightarrow E=(1/2)^2 \qquad \therefore \boxed{E=1/4}$$

3. $\tan x + \tan y + \tan(x+y).\tan x.\tan y = \tan(x+y)$

4. $\tan x - \tan y - \tan(x-y).\tan x.\tan y = \tan(x-y)$

Ejemplo:

Calcule $E = \tan 20° + \tan 17° + \frac{3}{4}.\tan 20°.\tan 17°$

Resolución:

$$E = \tan 20° + \tan 17° + \frac{3}{4}.\tan 20°.\tan 17°$$

$$E = \underbrace{\tan 20° + \tan 17° + \tan(20°+17°).\tan 20°.\tan 17°}$$

IA 3.

$$E = \tan(20°+17°) \Rightarrow E = \tan(37°)$$

$$\therefore \boxed{E = 3/4}$$

Recuerda :

$$\tan(37°) = \frac{3}{4}$$

5. Para x variable :

$$\underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{mínimo}} \leq a.\operatorname{sen}x + b.\cos x \leq \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{máximo}}$$

Ejemplos:

$$-5 \leq 3\operatorname{sen}x + 4\cos x \leq 5$$

$$-2 \leq \sqrt{3}\operatorname{sen}x + \cos x \leq 2$$

$$-13 \leq 12\operatorname{sen}x - 5\cos x \leq 13$$

Importante: $-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen}x \pm \cos x \leq \sqrt{2}$

6. Si: $A+B+C=180^{\circ}$

$\Rightarrow \tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C$

$\Rightarrow \cot A.\cot B+\cot B.\cot C+\cot C.\cot A=1$

7. Si: $x+y+z=90^{\circ}$

$\Rightarrow \cot x+\cot y+\cot z=\cot x.\cot y.\cot z$

$\Rightarrow \tan x.\tan y+\tan y.\tan z+\tan z.\tan x=1$

Ejemplo: Calcule

$$E=\frac{\tan 40^{\circ}+\tan 60^{\circ}+\tan 80^{\circ}}{\tan 40^{\circ}.\tan 60^{\circ}.\tan 80^{\circ}}$$

Resolución:

$$E=\frac{\tan 40^{\circ}+\tan 60^{\circ}+\tan 80^{\circ}}{\tan 40^{\circ}.\tan 60^{\circ}.\tan 80^{\circ}}\ \ldots\ (*)$$

OBS: $40^{\circ}+60^{\circ}+80^{\circ}=180^{\circ}$

Usando **IA 6.** en **(*)**, tenemos:

$$E=\frac{\tan 40^{\circ}.\tan 60^{\circ}.\tan 80^{\circ}}{\tan 40^{\circ}.\tan 60^{\circ}.\tan 80^{\circ}}$$

$\therefore\ \boxed{E=1}$

Reduzca $F = \operatorname{sen}(x + 45°).\operatorname{sen}(x - 45°) + \cos^2 x$

Resolución:

$$\operatorname{sen}(x + y)\cdot\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$$

$$F = \operatorname{sen}(x + 45°).\operatorname{sen}(x - 45°) + \cos^2 x$$

$$F = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 45° + \cos^2 x$$

$$F = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} - \underbrace{\operatorname{sen}^2 45°}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$F = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)$$

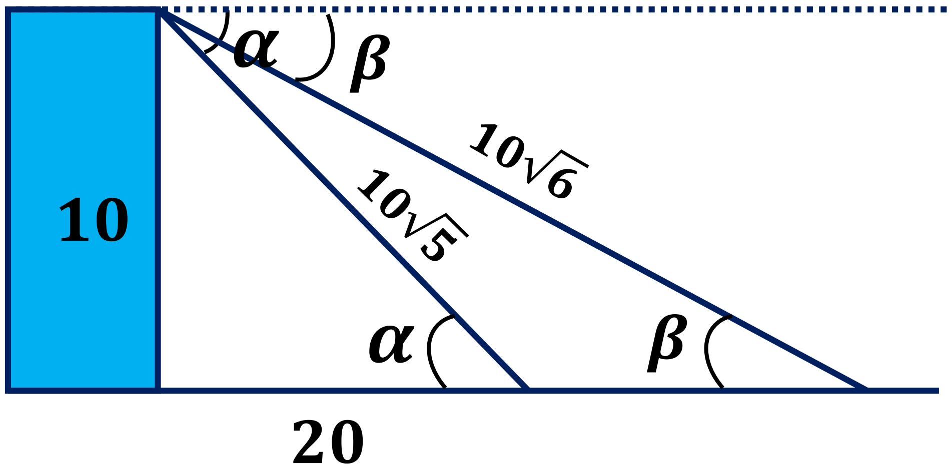
$$\therefore \boxed{F = \left(\frac{1}{2}\right)}$$

Desde la azotea de una casa de 10m de altura, se observa dos marcas en el suelo con ángulos de depresión $\alpha\ y\ \beta$. Las visuales generadas miden respectivamente $10\sqrt{5}$ y $10\sqrt{6}$ m; calcule:

$$30\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

Resolución:

$$30\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 30(cos^2\alpha - sen^2\beta)$$



$$= 30\left(\left(\frac{20}{10\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{10}{10\sqrt{6}}\right)^2\right)$$

$$= 30\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{6}\right)$$

$\cos(x + y)\cdot\cos(x - y) = \cos^2 x - \text{sen}^2 y$

$\therefore$ Rpta: 19

Efectúe: $J=(\sqrt{3}+\tan 13°)(\sqrt{3}+\tan 17°)$

Resolución:

$\tan x+\tan y+\tan(x+y)\cdot\tan x\cdot\tan y=\tan(x+y)$

$$J=(\sqrt{3}+\tan 13°)(\sqrt{3}+\tan 17°).$$

$$J=\sqrt{3}^{2}+\sqrt{3}\tan 17°+\sqrt{3}\tan 13°+\tan 13°.\tan 17° \times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$J=3+\sqrt{3}\left[\tan 17°+\tan 13°+\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\tan 30°}\tan 17°.\tan 13°\right]$$

$$J=3+\sqrt{3}\,[\tan 30°]$$

$$J=3+\cancel{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)$$

$$\therefore\ \boxed{J=4}$$

Determine el mínimo valor de:

$$F = 2\operatorname{sen}x + \sqrt{2}\cos(45° - x) + 3\cos x.$$

Resolución:

$$F = 2\operatorname{sen}x + \sqrt{2}\,\mathbf{(\cos 45°\cos x + \operatorname{sen}45°\operatorname{sen}x)} + 3\cos x$$

$$F = 2\operatorname{sen}x + \cancel{\sqrt{2}}.\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}.\cos x + \cancel{\sqrt{2}}.\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}.\operatorname{sen}x + 3\cos x$$

$$F = 2\operatorname{sen}x + \cos x + \operatorname{sen}x + 3\cos x$$

$$\underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{mínimo}} \le a\operatorname{sen}x + b\cos x \le \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{máximo}}$$

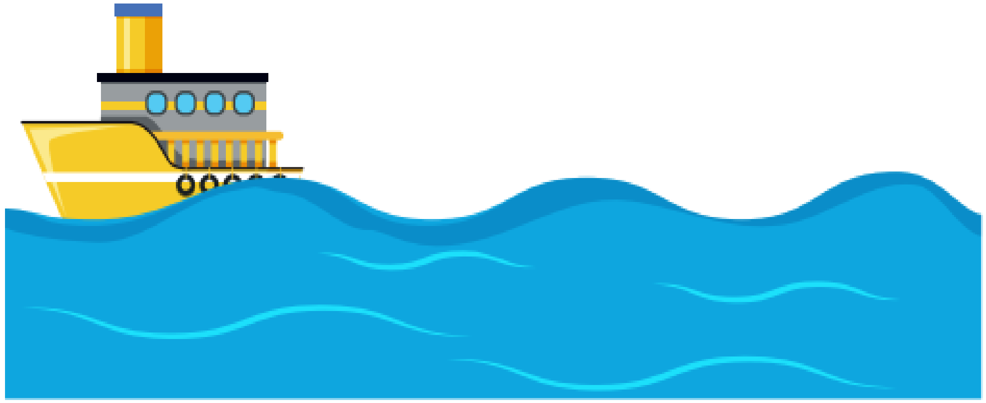
$$F = 3\operatorname{sen}x + 4\cos x$$

Nos piden F**mín** : $F_{mín} = -\sqrt{3^2 + 4^2}$

$\therefore$ $\boxed{F_{mín} = -5}$

Un cuerpo particular en el océano; tiene un cambio vertical en el agua debido a la acción de las olas (marea), dicho cambio está dado por:

$$y = 0,4\left[\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right]$$



Donde "y" está en metros y t en segundos, Calcule la altura máxima de la marea.

Resolución:

$$y = 0.4\left[\sqrt{3}sen\left(\frac{\pi t}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right]$$

$$\underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{\textbf{mínimo}} \le \ \boldsymbol{asenx + bcosx} \ \le \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\textbf{máximo}}$$

$$L_{máximo} = 0.4 * \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}$$

$$L_{máximo} = 0.4 * \sqrt{4}$$

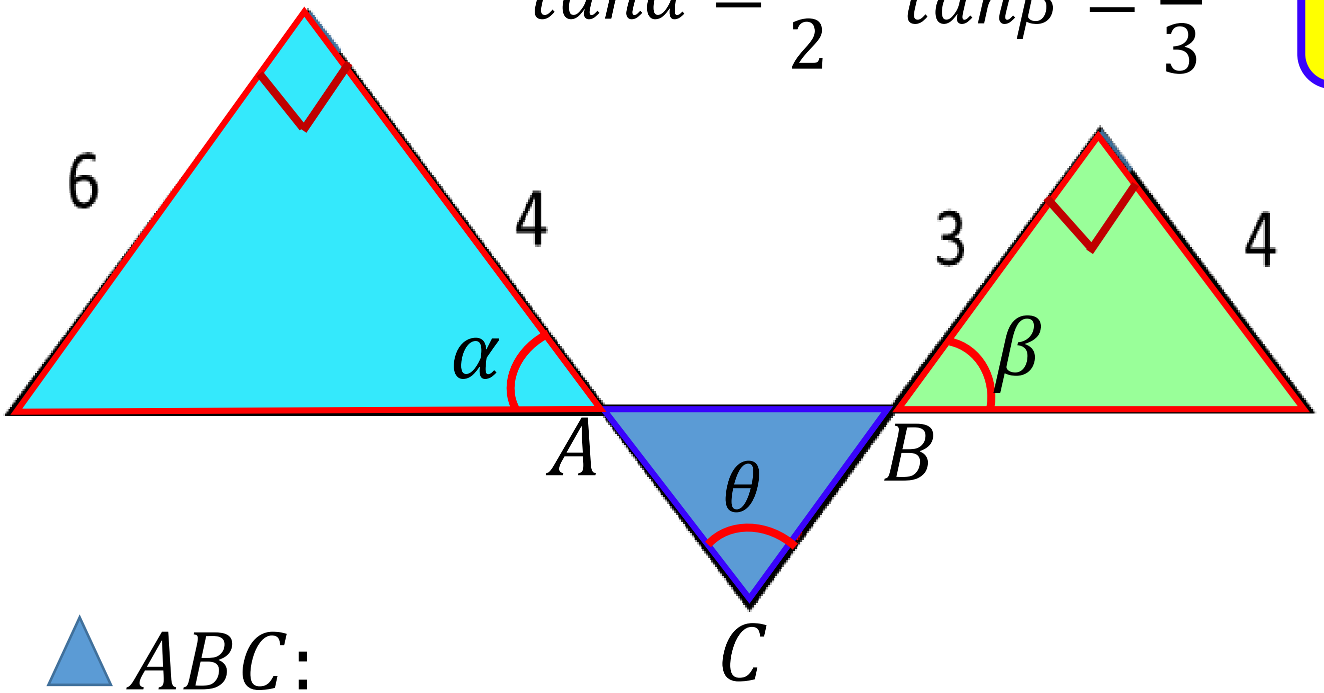
$$L_{máximo} = 0.4 * 2 = 0.8$$

$$\therefore \boxed{L_{máximo} = 0.8m = 80cm}$$

Del gráfico, calcule el valor de tanθ.

Resolución:

$$tan\alpha = \frac{3}{2} \quad tan\beta = \frac{4}{3}$$



$\triangle ABC$:

$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

$$tan\alpha + tan\beta + tan\theta = tan\alpha tan\beta tan\theta$$

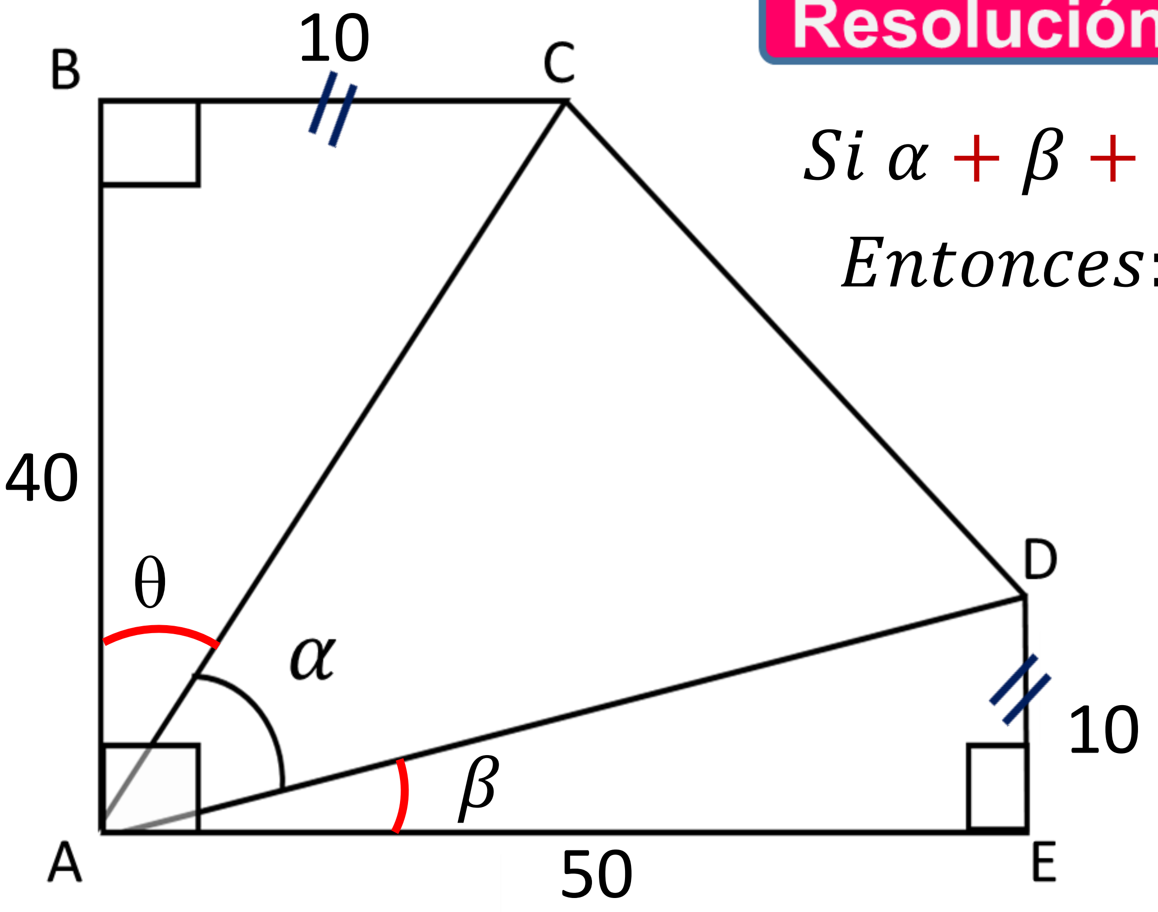
Si $x + y + z = 180°$, se cumple:
$tanx + tany + tanz = tanx.tany.tanz$

$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + tan\theta = \frac{\cancel{3}}{2} . \frac{4}{\cancel{3}} . tan\theta$$

$$\frac{17}{6} + tan\theta = 2.tan\theta$$

$$\therefore \boxed{tan\theta = \frac{17}{6}}$$

En la carpintería del señor José, se tiene un trozo de madera ABCD, tal que BC = DE = 10 cm; AB = 40 cm y AE = 50 cm (ver figura). Luego de hacer los cortes AC y AD, ¿puedes indicar el valor de 19cotα.



Resolución:

Si $x + y + z = 90°$, se cumple:
$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x \cdot \cot y \cdot \cot z$

$$Si\ \alpha + \beta + \theta = 90°$$

$$Entonces:\ \cot\alpha + \cot\beta + \cot\theta = \cot\alpha \cdot \cot\beta \cdot \cot\theta$$

$$\cot\alpha + 5 + 4 = \cot\alpha \cdot 5 \cdot 4$$

$$\cot\alpha + 9 = 20\cot\alpha$$

$$9 = 19\cot\alpha$$

$$\therefore\ 19\cot\alpha = 9$$