ALGEBRA

CHAPTER 2

5th
SECONDARY

PRODUCTOS NOTABLES

SACO OLIVEROS

MOTIVATING

STRATEGY

SACO OLIVEROS

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Matemático francés nació en Paris , vivio una infancia con pocos recursos económicos, pero logro superarse por sus dotes académicos

Su primer trabajo fue como ingeniero militar para **Napoleón**, ayudando a construir las defensas en Cherburgo. A los veinticuatro años volvió a París y dos más tarde demostró una conjetura de **Pierre de fermat** que no había podido ser probada por matemáticos tan insignes como **Euler** y Gauss.

Publicó un total de 789 trabajos, entre los temas que abordo destacan:

- Limite y continuidad de una función
- Funciones de variable compleja
- Cálculo integral
- Convergencia de series infinitas
- Ecuaciones diferenciales

Augustin-Louis Cauchy

HELICO

THEORY

SACO OLIVEROS

PRODUCTOS NOTABLES

I) Desarrollo de un Binomio al Cuadrado

Trinomio cuadrado perfecto

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLOS:

1) $(5x+3)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(3) + 3^2$
$= 25x^2 + 30x + 9$

2) $(3x-4)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(4) + 4^2$
$= 9x^2 - 24x + 16$

Observación

Identidad de Legendre

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

II) Diferencia de cuadrados

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplo:

$$(3\mathbf{a}+5\mathbf{b})(3a-5b)=9a^2-25b^2$$

III) Identidad de Stevin

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplos:

$$(x+4)(x+6)=x^2+10x+24$$

$$(x+7)(x-9)=x^2-2x-63$$

IV) Desarrollo de un binomio al cubo

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

identidad de cauchy

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

V) Suma y diferencia de cubos

$$(\mathrm{a}+\mathrm{b})\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$$

$$(\mathrm{a}-\mathrm{b})\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

VI) Desarrollo de un Trinomio al cuadrado

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

VII) Trinomio al cubo

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(a+c)(b+c)$$

$\boldsymbol{Otra\ forma\ usual}$:

$$(a+b+c)^3 = 3(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right) - 2\left(a^3+b^3+c^3\right) + 6abc$$

VIII) Identidades condicionales

$$Si: a + b + c = 0$$

$$se\ cumple:$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

HELICO

PRACTICE

Problema 1

Sabiendo que

$$a + b = 5$$
$$ab = 2$$

Halle el valor de $E = a^2 + b^2 + a^3 + b^3$

Recordar!

Binomio suma al cuadrado

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Identidad de Cauchy

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

Resolución:

*** Primero:**

$$\boxed{\underbrace{(a+b)}_{5}{}^2 = a^2 + \underbrace{2ab}_{} + b^2}$$

$$5 \quad = a^2 + 2(2) + b^2$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = 21}$$

*** Segundo:**

$$\boxed{\underbrace{(a+b)}_{5}{}^3 = a^3 + b^3 + \underbrace{3ab}_{2}\,\underbrace{(a+b)}_{5}}$$

$$125 = a^3 + b^3 + 30$$

$$\boxed{a^3 + b^3 = 95}$$

$$\boxed{E = a^2 + b^2 + a^3 + b^3} \quad = 21 + 95$$

$$E = 116$$

$$\boxed{\therefore E = 116}$$

Problema 2

Halle el valor de:

$$P = \sqrt[8]{80(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)+1}$$

Resolución:

Recordar

Diferencia de cuadrados

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

$$P = \sqrt[8]{\underbrace{(3^4-1)(3^4+1)}(3^8+1)(3^{16}+1)+1}$$

$$P = \sqrt[8]{\underbrace{(3^8-1)(3^8+1)}(3^{16}+1)+1}$$

$$P = \sqrt[8]{\underbrace{(3^{16}-1)(3^{16}+1)}+1}$$

$$P = \sqrt[8]{3^{32}\cancel{-1}+\cancel{1}}$$

$$P = \sqrt[\cancel{8}]{3^{\cancel{32}}} = 3^4$$

$$\boxed{\therefore P = 81}$$

Problema 3

Simplifique:

$$R=(x-4)(x-6)(x+3)(x+5)-(x^2-x-21)^2+90$$

Resolución:

Recordar

Identidad de Stevin

$$\boxed{(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab}$$

Desarrollo de un Binomio al cuadrado

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

Multiplicamos convenientemente:

$$R=\underbrace{(x-4)(x+3)}\underbrace{(x-6)(x+5)}-(x^2-x-21)^2+90$$

$$R=(x^2-x-12)(x^2-x-30)-(x^2-x-21)^2+90$$

Hacemos: $x^2-x=m$

$$R=\underbrace{(m-12)(m-30)}-(m-21)^2+90$$

$$R=\cancel{m^2}-\cancel{42m}+360-(\cancel{m^2}-\cancel{42m}+441)+90$$

$$R=360-441+90$$

$$\boxed{\therefore R=9}$$

Problema 4

Si se sabe que:

$$a + b + c = 12$$
$$ab + ac + bc = 60$$

Halle el valor de:

$$R = a^2 + b^2 + c^2$$

Recordar!

Trinomio al cuadrado

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Resolución:

$$\underbrace{(a+b+c)}_{12}{}^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\underbrace{(ab + ac + bc)}_{60}$$

$$144 = a^2 + b^2 + c^2 + 120$$

$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = 24}$$

$$\boxed{\therefore R = 24}$$

Problema 5

Si: a=$\sqrt{5}+\sqrt{3}-1$ b=$1-\sqrt{3}$ c=$-\sqrt{5}$

Reduzca: $M=\dfrac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)}{12abc(ab+bc+ac)}$

Resolución:

Recordar

Si a+b+c=0

Se cumple:

$$\boxed{a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac)}$$

$$\boxed{a^3+b^3+c^3=3abc}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= \cancel{\sqrt{5}}+\cancel{\sqrt{3}}-\cancel{1} \\ b &= \cancel{1}-\cancel{\sqrt{3}} \\ c &= -\cancel{\sqrt{5}} \end{aligned}\right\}+$$

$$\boxed{a+b+c=0}$$

$$M=\frac{\boxed{(a^3+b^3+c^3)}\boxed{(a^2+b^2+c^2)}}{12abc(ab+bc+ac)}$$

$$M=\frac{(3\cancel{abc})(-2\cancel{(ab+bc+ac)})}{12\cancel{abc}\cancel{(ab+bc+ac)}}$$

$$M=\frac{-6}{12}$$

$$\boxed{\therefore M=-\frac{1}{2}}$$

Problema 6

Jaimito le pregunta a su abuelo por su edad y este le contesta: “Si reduces:

$$M=\frac{(x+5)(x^2-5x+25)-(x-4)(x^2+4x+16)}{3}$$

obtendrás mi edad hace 20 años”.¿Cuál es la edad del abuelo de Jaimito?

Resolución:

Recordar

Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$M=\frac{\boxed{(x+5)(x^2-5x+5^2)}-\boxed{(x-4)(x^2+4x+4^2)}}{3}$$

$$M=\frac{(\cancel{x^3}+5^3)-(\cancel{x^3}-4^3)}{3}$$

$$M=\frac{125+64}{3}=63$$

$\therefore$ *La edad del abuelo es* $63+20=83$ *años*

Problema 7

Un grupo de economistas estimo que el crecimiento de la economía peruana, durante el primer trimestre del año estará dado por los valores numéricos de la expresión: $Pn(a;b;c)=a^n+b^n+c^n$, donde n representa el número de mes y Pn esta expresado como porcentaje de crecimiento del producto bruto interno (a, b y c son constantes).

- Si el país en Enero ($n=1$) alcanzó un crecimiento del 2%
- Si el país en Febrero ($n=2$) alcanzó un crecimiento del 5%
- Si el país en Marzo ($n=3$) alcanzó un crecimiento del 20%

Halle el valor de abc

Recordar:

Otra forma usual del desarrollo del trinomio al cubo

$$(a+b+c)^3=3(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-2(a^3+b^3+c^3)+6abc$$

Resolución:

$$Pn(a;b;c)=a^n+b^n+c^n$$

$$n=1\rightarrow a+b+c=2$$

$$n=2\rightarrow a^2+b^2+c^2=5$$

$$n=3\rightarrow a^3+b^3+c^3=20$$

De:

$$\underbrace{(a+b+c)^3}_{2}=3\underbrace{(a+b+c)}_{2}\underbrace{(a^2+b^2+c^2)}_{5}-2\underbrace{(a^3+b^3+c^3)}_{20}+6abc$$

$$8=30-40+6abc$$

$$8=-10+6abc$$

$$18=6abc$$

$$abc=3$$

$$\boxed{\therefore abc=3}$$