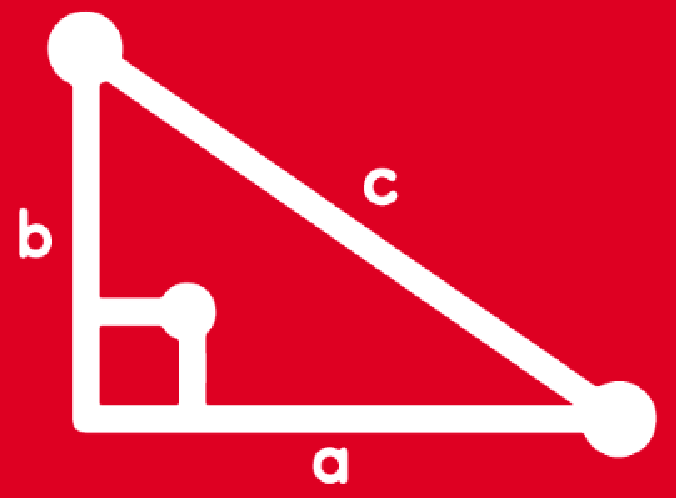
TRIGONOMETRY

Chapter 24

5th
SECONDARY



RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

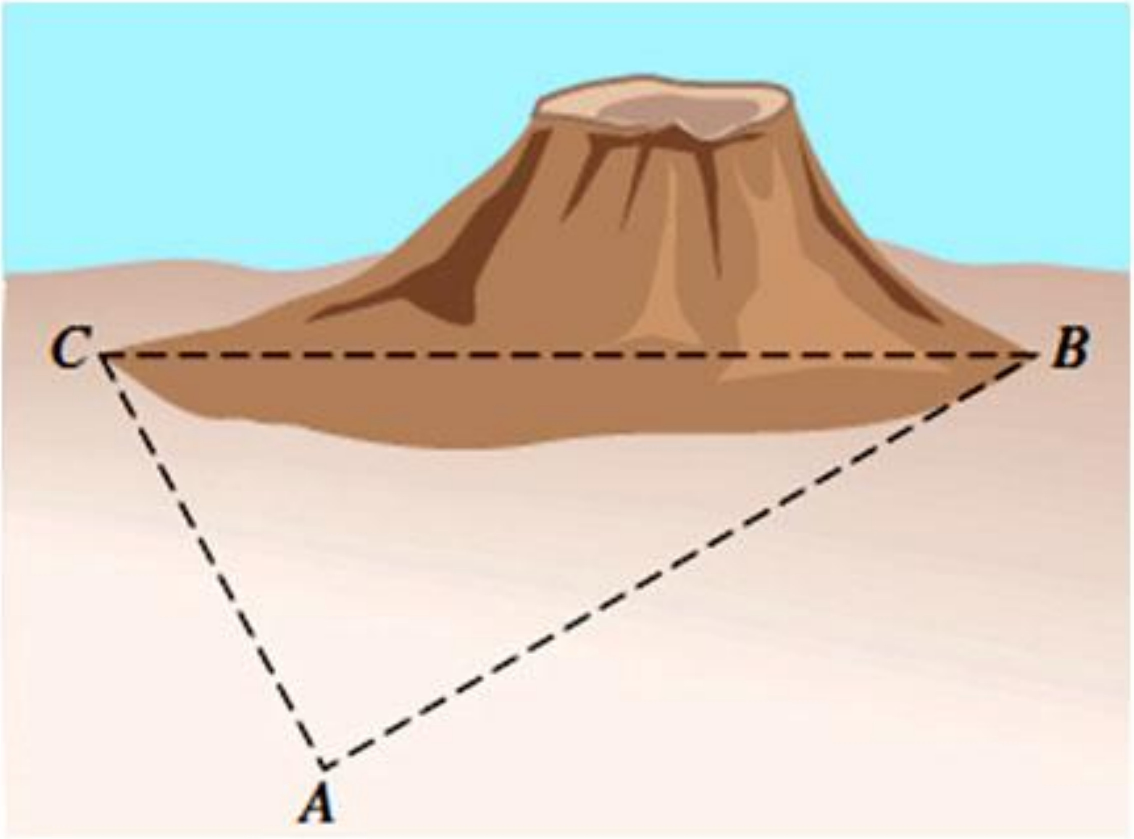
SACO OLIVEROS

MEDIDA DE LA BASE DE UN VOLCÁN

La **Ley de Senos** y la **Ley de Cosenos** se usan para calcular los lados y ángulos de un triángulo.

Ejemplo:

Un geólogo desea determinar la distancia BC a través de la base del cono de ceniza volcánica . Para ello logra medir las distancias AC y AB obteniendo los valores de 8 km y 10 km respectivamente , además la medida del ángulo BAC es 53º.



¿ Podrías calcular la deseada distancia BC ?

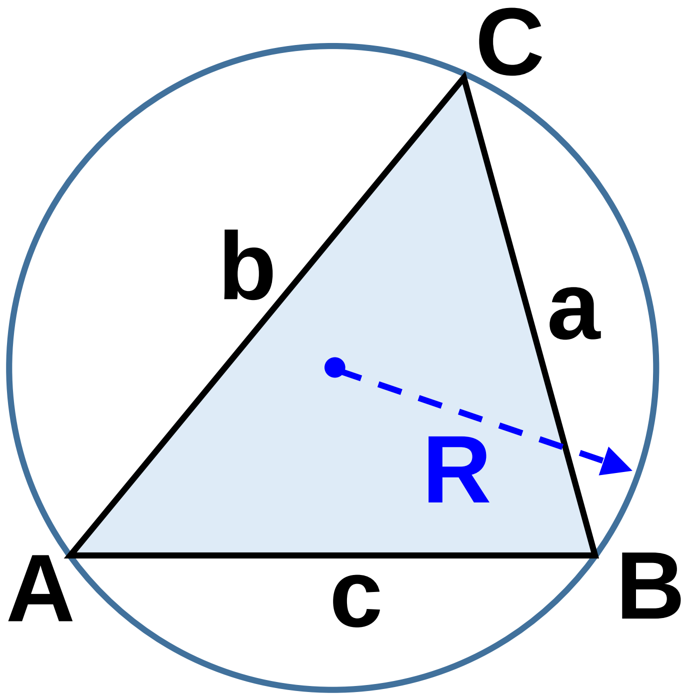
RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1) LEY DE SENOS :

En todo triángulo, las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}=\frac{c}{\text{sen}C}=2R$$

R es el circunradio del Δ ABC



También :

$$a = 2R\text{sen}A$$

$$b = 2R\text{sen}B$$

$$c = 2R\text{sen}C$$

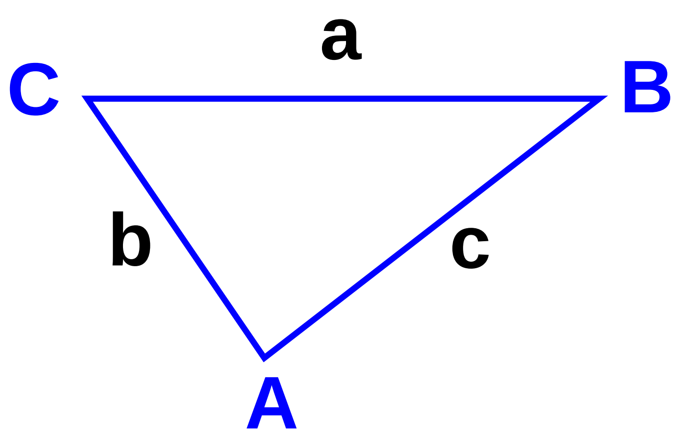
2) LEY DE COSENOS :

En todo triángulo, un lado al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que éstos forman.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos A \quad \ldots (*)$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\,.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,.\cos C$$



… Según la HELICOMOTIVACIÓN :

$$b = 8 \;;\; c = 10 \;;\; A = 53^o \;;\; ¿a?$$

Usando (*) :

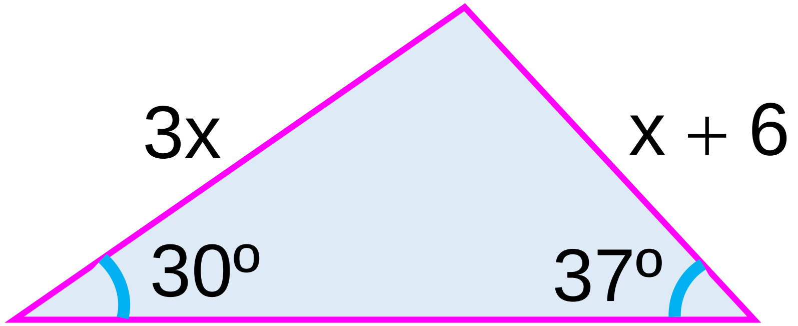
$$a^2 = (8)^2 + (10)^2 - 2(8)(10).\cos 53^o$$

$$a^2 = 68 \quad \Rightarrow a = \sqrt{68} = 8{,}25$$

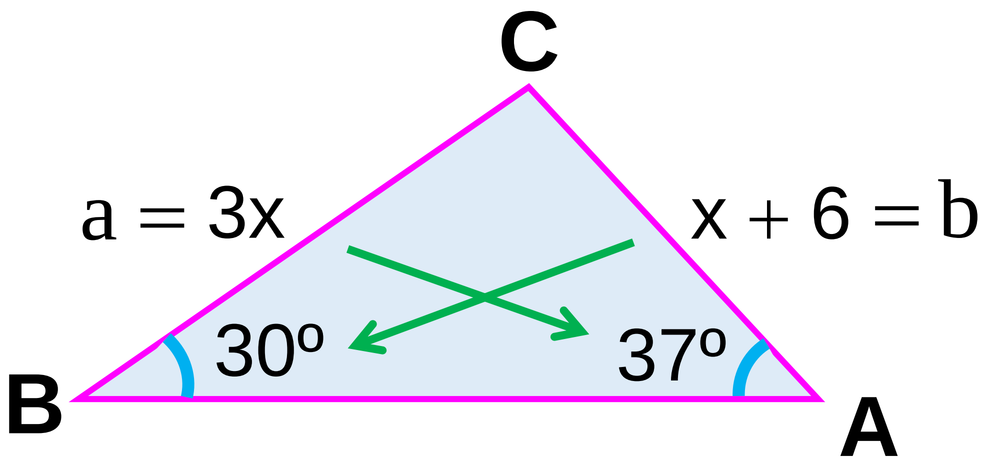
$\therefore$ **La distancia BC mide 8, 25 km**

HELICO PRACTICE 1

De la figura, halle el valor de x.



Resolución



Ley de senos : $\dfrac{a}{\text{sen}A} = \dfrac{b}{\text{sen}B}$

$$\Rightarrow \frac{3x}{\text{sen}37^0} = \frac{x+6}{\text{sen}30^0}$$

$$\Rightarrow 3x \cdot \frac{1}{2} = (x+6) \cdot \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 5x = 2(x+6)$$

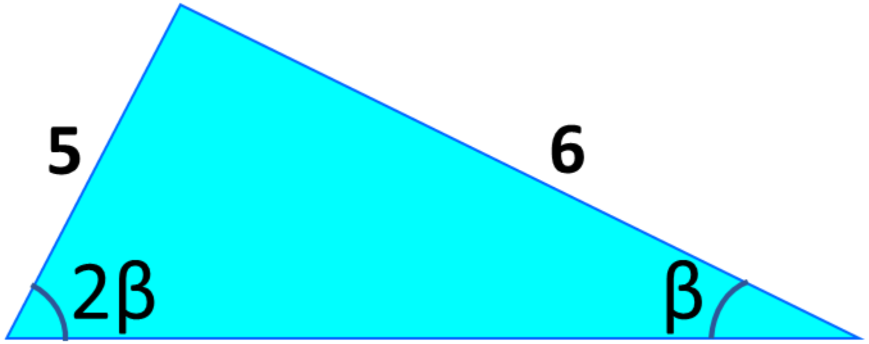
$$\Rightarrow 5x = 2x + 12$$

$$\Rightarrow 3x = 12$$

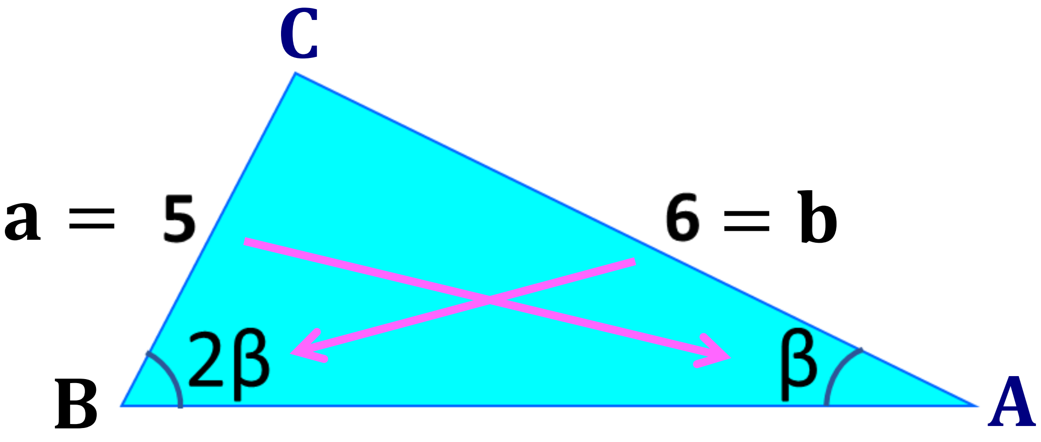
$$\boxed{\therefore\ x = 4}$$

HELICO PRACTICE 2

De la figura, calcule $T = \sec(\beta + 7°)$.



Resolución

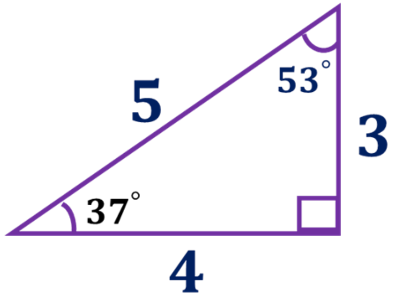


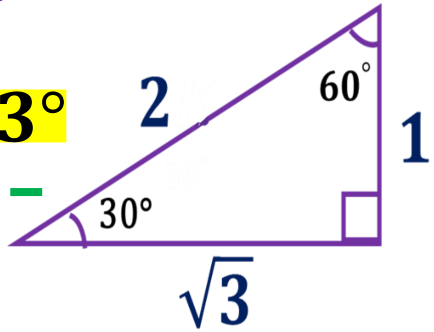
Ley de senos : $\dfrac{a}{\operatorname{sen}A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}B}$

$\Rightarrow \dfrac{5}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{6}{\operatorname{sen}2\beta}$

$\dfrac{5}{\cancel{\operatorname{sen}\beta}} = \dfrac{6}{2\,\cancel{\operatorname{sen}\beta}\,.\cos\beta}$

$\cos\beta = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \beta = 53°$





Luego :

$T = \sec(\beta + 7°) = \sec(53° + 7°)$

$T = \sec 60°$

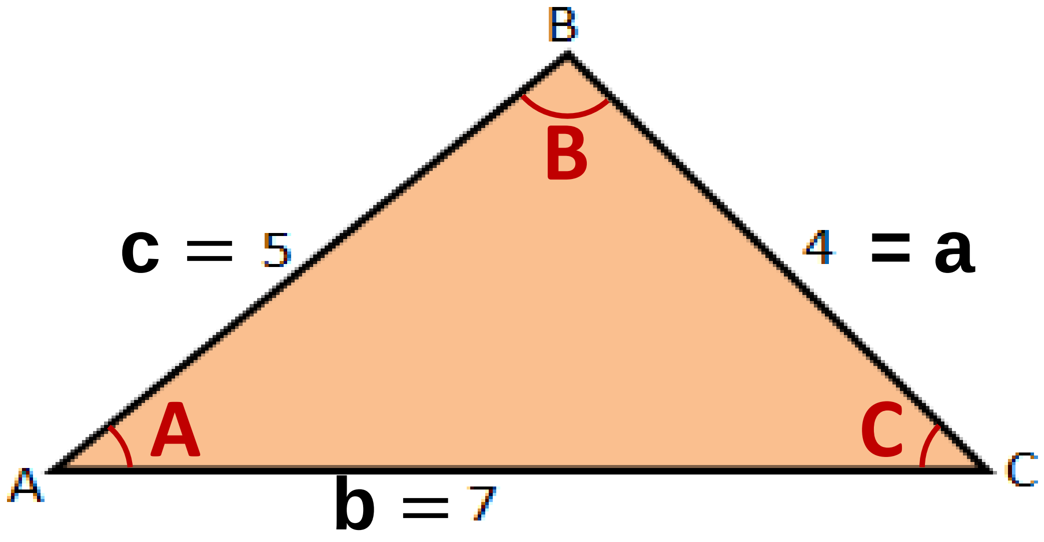
$\boxed{\therefore\ T = 2}$

HELICO PRACTICE 3

En un triángulo ABC se cumple que AB = 5 u, BC = 4 u y AC = 7 u .

Calcule $E = \dfrac{\operatorname{sen}B\,(\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}C)}{\operatorname{sen}^2 C}$

Resolución



Según Ley de Senos :

$$\frac{4}{\operatorname{sen}A} = \frac{7}{\operatorname{sen}B} = \frac{5}{\operatorname{sen}C} = 2R$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sen}A = \frac{4}{2R} \;;\; \operatorname{sen}B = \frac{7}{2R} \;;\; \operatorname{sen}C = \frac{5}{2R}$$

Reemplazamos en E :

$$E = \frac{\frac{7}{2R}\left(\frac{4}{2R} + \frac{5}{2R}\right)}{\left(\frac{5}{2R}\right)^2} = \frac{\frac{7}{2R}\left(\frac{9}{2R}\right)}{\frac{25}{4R^2}} = \frac{\frac{63}{\cancel{4R^2}}}{\frac{25}{\cancel{4R^2}}}$$

$$\boxed{\therefore\; E = \frac{63}{25}}$$

HELICO PRACTICE 4

Determine la longitud de la circunferencia circunscrita al Δ ABC si : $\dfrac{2a}{\text{sen}A} + \dfrac{3b}{\text{sen}B} - \dfrac{c}{\text{sen}C}$ = 16 m .

Resolución

Dato : $\dfrac{2a}{\text{sen}A} + \dfrac{3b}{\text{sen}B} - \dfrac{c}{\text{sen}C} = 16\text{ m}$

Recordamos la Ley de Senos :

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} = 2R$$

Luego reemplazamos en dato :

$$2\,(2R) + 3\,(2R) - 2R = 16\text{ m}$$

$$4R + 6R - 2R = 16\text{ m}$$

$$8R = 16\text{ m} \quad \Rightarrow \quad R = 2\text{ m}$$

Luego : $L_{\odot} = 2\pi R$

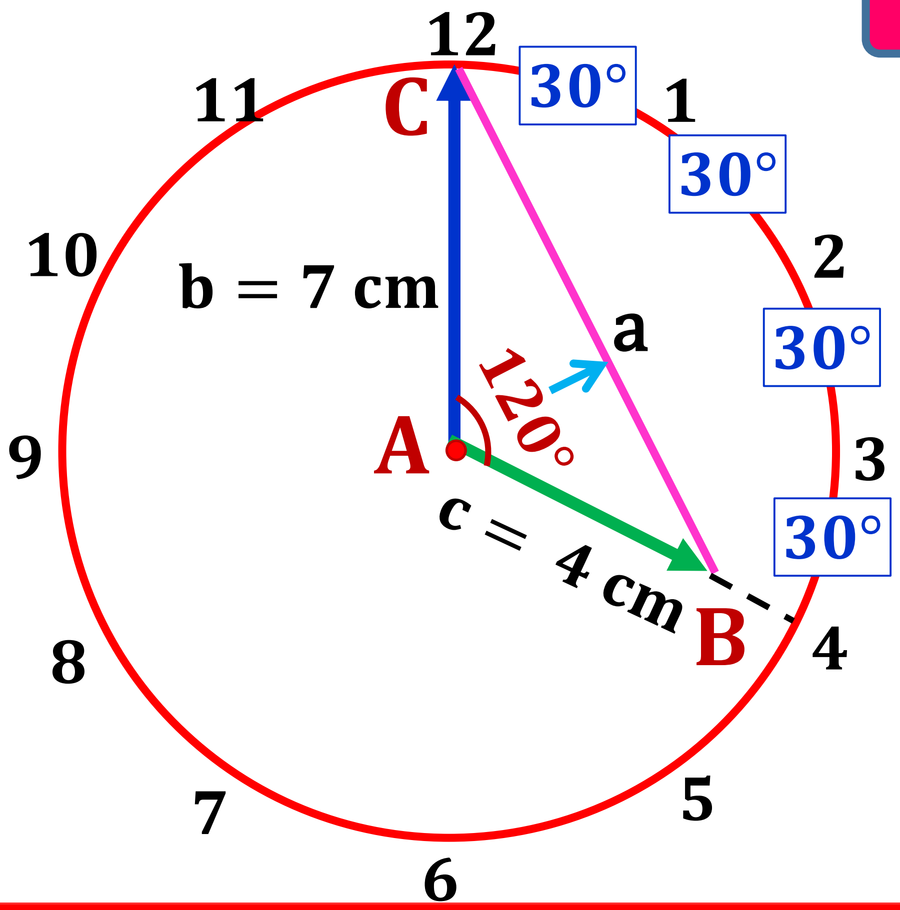
$$L_{\odot} = 2\pi\,(2\text{ m})$$

$$\therefore\ L_{\odot} = 4\pi\text{ m}$$

HELICO PRACTICE 5

Las manecillas de un reloj (horario y minutero) miden 4 cm y 7 cm respectivamente.- Determine la distancia entre sus puntas a las 4 de la tarde.

Resolución



Ley de Cosenos : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,.\cos A$

$$a^2 = 7^2 + 4^2 - 2(7)(4)\cos 120°$$

$$a^2 = 49 + 16 - 56(-\cos 60°)$$

$$a^2 = 65 - 56\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 = 65 + 28$$

$$\boxed{\therefore\ a = \sqrt{93}\ \text{cm}}$$

HELICO PRACTICE 6

Halle la medida del ángulo A en un triángulo ABC de lados a, b y c; si se cumple que $(a-b)(a+b)=c^2+\sqrt{3}\,bc$.

Resolución

Dato :

$$(a-b)(a+b)=c^2+\sqrt{3}\,bc$$

$$a^2-b^2=c^2+\sqrt{3}\,bc$$

$$a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}\,bc$$

Según Ley de Cosenos :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\,.\cos A$$

Luego : $a^2=a^2$

$$\cancel{b^2}+\cancel{c^2}+\sqrt{3}\,bc=\cancel{b^2}+\cancel{c^2}-2bc\cos A$$

$$2\cancel{bc}\cos A=-\sqrt{3}\,\cancel{bc}$$

$$\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\cos 30^\circ \quad ; \quad A\in IIC$$

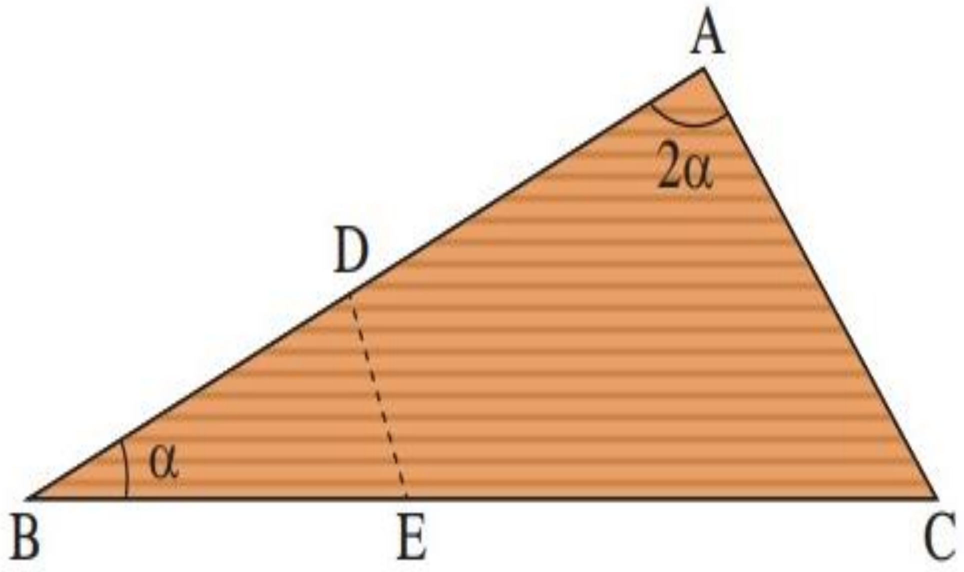
$$\Rightarrow A=180^\circ-30^\circ$$

$$\boxed{\therefore A=150^\circ}$$

HELICO PRACTICE 7

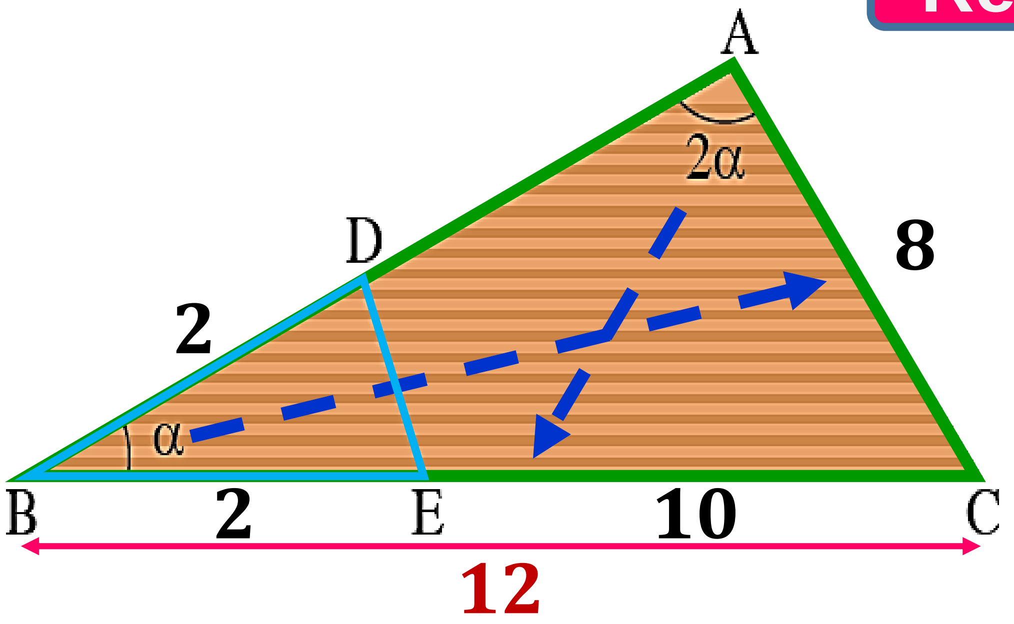
El carpintero José tiene una pequeña pieza triangular ABC de madera, a la cual desea dividir en dos partes mediante un corte $\overline{DE}$.

Si $AC = 8$ cm, $CE = 10$ cm y $BE = BD = 2$ cm; determine la longitud del corte $\overline{DE}$.



HELICO PRACTICE 7

Resolución



ΔABC : Ley de Senos

$$\frac{\cancel{12}^{\,3}}{\boxed{\text{sen}2\alpha}} = \frac{\cancel{8}^{\,2}}{\text{sen}\alpha}$$

$$\frac{3}{2\,\cancel{\text{sen}\alpha}\cos\alpha} = \frac{2}{\cancel{\text{sen}\alpha}}$$

$$3 = 4\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}$$

ΔBDE : Ley de Cosenos

$$DE^2 = 2^2 + 2^2 - 2(2)(2)\cos\alpha$$

$$DE^2 = 4 + 4 - 8\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$DE^2 = 8 - 6$$

$$\therefore DE = \sqrt{2}\ \text{cm}$$

SACO
OLIVEROS