ALGEBRA

Chapter 15

3th
SECONDARY

Números Complejos

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Benoit Mandelbrot *publicó en 1975 su primer ensayo sobre fractales.*

Su dimensión es fraccionaria.

Su construcción se basa en la iteración de un número complejo, es decir se hace una operación y ésta se repite con el resultado….

$$z \to z^2 + C$$ *(conjunto de Mandelbrot).*

NÚMEROS COMPLEJOS

UNIDAD IMAGINARIA (i):

$i = \sqrt{-1}$;se llama unidad imaginaria $\rightarrow$ $\boxed{i^2 = -1}$

Ejemplos:

- $\sqrt{-9} = \sqrt{9}.\sqrt{-1} = 3i$
- $\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\sqrt{-1} = 5i$
- $\sqrt{-3} = \sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{3}i$

POTENCIAS DE (i):

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^5 = i$

$i^6 = -1$

$i^7 = -i$

$i^8 = 1$

$i^{4k} = 1$

$i^{4k+1} = i$

$i^{4k+2} = -1$

$i^{4k+3} = -i$

Ejemplo:

$$i^{254} = \left(i^4\right)^{63} . i^2 = 1(-1) = -1$$

Teorema:

$$i + i^2 + i^3 + i^4 + \ \ldots\ldots + i^{4k} = 0$$

NÚMEROS COMPLEJOS

Un número complejo z es un par ordenado de números reales a y b, escrito como:

$$z = (a, b)$$

El conjunto de números complejos se denota por C:

$$\boxed{C := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}}$$

a es la ***parte real*** de z: $Re(z) : a$

b es la ***parte imaginaria*** de z: $Im(z) : b$

FORMA BINOMIAL DE z:

Un número complejo $z = (a, b)$ se escribe comúnmente como:

$$\boxed{z = a + bi \; / \; i = \sqrt{-1}}$$

$i = \sqrt{-1}$; se llama unidad imaginaria

a es la **parte real** de z: $Re(z): a$

b es la **parte imaginaria** de z: $Im(z): b$

$$\boxed{i = (0, 1)}$$

PROPIEDADES

$$z = a + bi \;/\; i = \sqrt{-1}$$

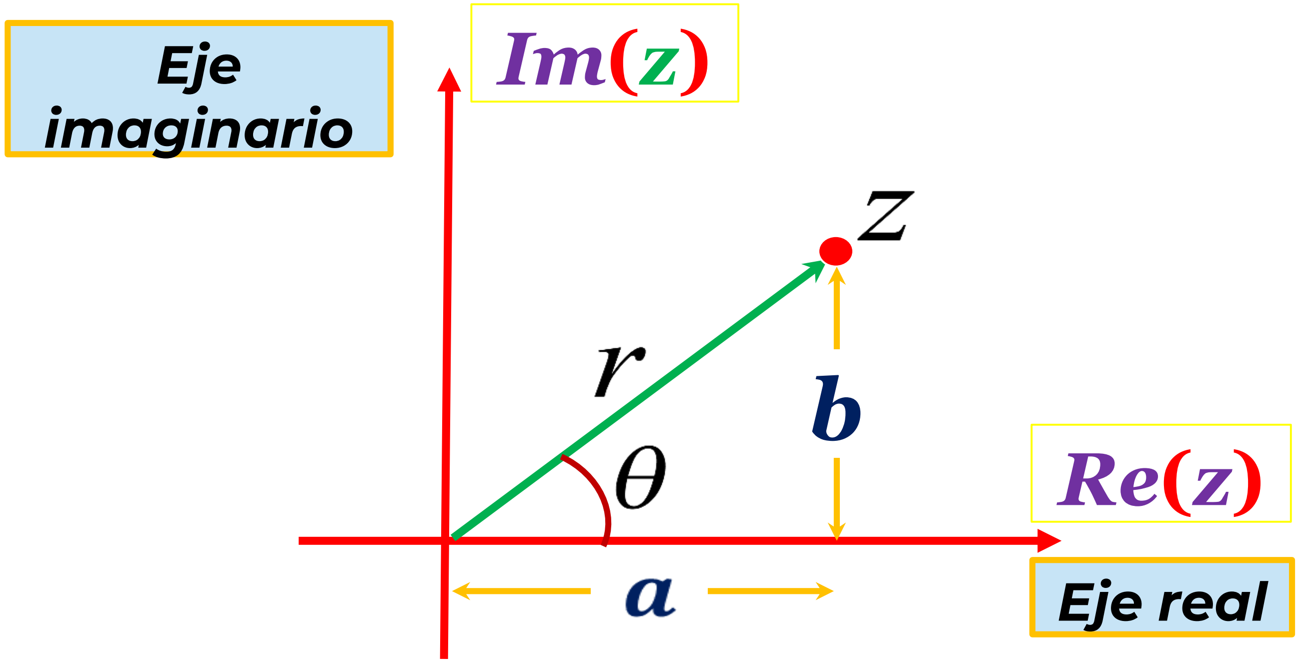
- ✓ Si $a = 0$, $b = 0$, se dice que Z es un COMPLEJO NULO → $z = (0,0) = 0$
- ✓ Si $a = 0$, se dice que Z es un IMAGINARIO PURO → $z = (0,b) = bi$
- ✓ Si $b = 0$, Z se comporta como un NÚMERO REAL → $z = (a,0) = a$

IGUALDAD DE COMPLEJOS:

Si: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ → $\boxed{x_1 = x_2} \wedge \boxed{y_1 = y_2}$

EL PLANO COMPLEJO
(PLANO Z, DE ARGAND O DE GAUSS):

$$\boxed{z = (a, b) = a + bi \ / \ i = \sqrt{-1}}$$



Módulo:

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

Argumento:

$$\boxed{\theta = Arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)}$$

PROPIEDADES

$$z = a + bi \ / \ i = \sqrt{-1}$$

- **Conjugado de Z:**

$$\overline{z} = a - bi$$

- **Opuesto de Z:**

$$op(z) = z^{*} = -a - bi$$

OPERACIONES BÁSICAS :

Sean:
$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$

- **Adición:** $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

- **Multiplicación:**

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di)$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

- **División:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a + bi}{c + di} \times \dfrac{c - di}{c - di}$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}\right) + \left(\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\right)i$$

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 15

SACO OLIVEROS

Efectúe PROBLEMA 1

$$M = \sqrt{-49} + \sqrt{-100} + \sqrt{-9} + 5\sqrt{-144}$$

Recordemos:

UNIDAD IMAGINARIA

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Resolución:

$$M = \sqrt{-49} + \sqrt{-100} + \sqrt{-9} + 5\sqrt{-144}$$

$$M = \underline{\sqrt{49}.\sqrt{-1}} + \underline{\sqrt{100}.\sqrt{-1}} + \underline{\sqrt{9}.\sqrt{-1}} + 5\underline{\sqrt{144}.\sqrt{-1}}$$

$$M = 7i + 10i + 3i + 5.12i$$

$$M = 7i + 10i + 3i + 60i$$

$$\boxed{\therefore \quad M = 80i}$$

Problema 2

Siendo $i=\sqrt{-1}$

Calcule

$$P=i^{79}+i^{99}-i^{51}+i^{82}+i^{41}$$

Recordemos:

POTENCIAS DE i:

$i^{4k}=1$	$i^{4k+2}=-1$
$i^{4k+1}=i$	$i^{4k+3}=-i$

Resolución:

$$P=i^{79}+i^{99}-i^{51}+i^{82}+i^{41}$$

- $i^{79}=i^{76+3}=i^{4k+3}=-i$
- $i^{99}=i^{96+3}=i^{4k+3}=-i$
- $i^{51}=i^{48+3}=i^{4k+3}=-i$
- $i^{82}=i^{80+2}=i^{4k+2}=-1$
- $i^{41}=i^{40+1}=i^{4k+1}=i$

$$P=(-i)+(-i)-(-i)+(-1)+(i)$$

$$P=-i-i+i-1+i$$

$$\boxed{\therefore\ P=-1}$$

Problema 3

Reduzca

$$F=\frac{3i^{259}+5i^{3593}}{20i^{4775}+4i^{8749}};\quad (i=\sqrt{-1})$$

Recordemos:

POTENCIAS DE i:

$$\boxed{i^{4k}=1}\quad \boxed{i^{4k+2}=-1}$$
$$\boxed{i^{4k+1}=i}\quad \boxed{i^{4k+3}=-i}$$

Resolución:

$$F=\frac{3i^{259}+5i^{3593}}{20i^{4775}+4i^{8749}}$$

- $i^{59}=i^{56+3}=i^{4k+3}=-i$
- $i^{93}=i^{92+1}=i^{4k+1}=i$
- $i^{75}=i^{72+3}=i^{4k+3}=-i$
- $i^{49}=i^{48+1}=i^{4k+1}=i$

$$F=\frac{3(-i)+5(i)}{20(-i)+4(i)}=\frac{2\cancel{i}}{-16\cancel{i}}$$

$$\boxed{\therefore\ F=-\frac{1}{8}}$$

Problema 4

Si

$$z_1 = 4 + 7i$$
$$z_2 = -2 + 3i$$

EFECTÚE: $Z = \overline{Z_1} + Z^*_2$

Resolución:

Recordemos:

Sea: $z = a + bi$

Conjugado de z:

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

Opuesto de z:

$$\boxed{z^* = -a - bi}$$

$$Z = \overline{Z_1} + Z^*_2$$

$$z = (4 - 7i) + (2 - 3i)$$

$$z = (6 - 10i)$$

$$\boxed{\therefore \ la\ parte\ Real\ de\ z = 6}$$

Problema 5

Efectúe

$$P = (3+i)^2 - i(6+5i)$$

Recordemos:

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (Binomio al cuadrado):

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

POTENCIAS DE i:

$$\boxed{i^{4k} = 1} \qquad \boxed{i^{4k+2} = -1}$$

$$\boxed{i^{4k+1} = i} \qquad \boxed{i^{4k+3} = -i}$$

Resolución:

$$P = \underbrace{(3+i)^2}_{} - \underbrace{i(6-5i)}_{}$$

$$P = 3^2 + 2(3)(i) + i^2 - 6i + 5\underbrace{i^2}_{}$$

$$P = 9 + \cancel{6i} + \underbrace{i^2}_{} - \cancel{6i} + 5(-1)$$

$$P = 9 + (-1) - 5$$

$$P = 3$$

$$\boxed{\therefore \quad P = 3}$$

Problema 6

Si $z_1 = 5 - 2i$
$z_2 = -3 + 2i$

al efectuar

$$T = \bar{z}_1 . z_2^* + 1 + 4i$$

cuyo valor de T ***en soles es el precio de un galón de pintura para pintar*** 2 ***pizarras; ¿cuánto costará pintar*** 40 ***pizarras?***

Recordemos: **Sea:** $z = a + bi$

Conjugado de z: $\boxed{\bar{z} = a - bi}$

Opuesto de z: $\boxed{z^* = -a - bi}$

Resolución:

$$T = \bar{z}_1 . z_2^* + 1 + 4i$$

$$T = (5 + 2i)(3 - 2i) + 1 + 4i$$

$$T = 15 - 10i + 6i - 4\underbrace{i^2}_{(-1)} + 1 + 4i$$

$$T = 15 - \cancel{10i} + \cancel{6i} + 4 + 1 + \cancel{4i}$$

$\boxed{T = 20}$ ***(Precio de 1 galón de pintura en soles).***

$\Rightarrow$ ***Para pintar 40 pizarras se requieren 20 galones.***

$\boxed{\therefore \textit{ Pintar 40 pizarras costará } 20 \times 20 = S/.400}$

Problema 7

Un docente de la facultad de sistemas hace una encuesta a sus estudiantes acerca de que país tiene la velocidad más rápida de internet si las alternativas fueron

N°	Países
1	Rusia
2	EE.UU
3	Corea del sur

Al finalizar la clase el docente menciona que la respuesta se obtienen al calcular $|z|$ -2, sabiendo que $Z=\frac{5(1+i)}{2-i}+2+i$, ¿Cuál es el país con la velocidad más rápida de internet?

Resolución:

$$z=\frac{5(1+i)}{2-i}+2+i$$

$$z=\frac{5(1+i)}{(2-i)}\cdot\frac{(2+i)}{(2+i)}+2+i$$

$$z=\frac{5(2+i+2i+i^2)}{4-i^2}+2+i$$

$$z=\frac{5(2+i+2i-1)}{4+1}+2+i$$

$$z=\frac{\cancel{5}(1+3i)}{\cancel{5}}+2+i$$

$$z=1+3i+2+i$$

$$\boxed{z=3+4i}$$

Recordemos: *MÓDULO DE Z:*

$$\boxed{|z|=\sqrt{a^2+b^2}}$$

Nos piden: $|z|-2$

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}-2$$

$$|z|=\sqrt{3^2+4^2}-2$$

$$|z|=\sqrt{25}-2$$

Rpta: Corea del Sur