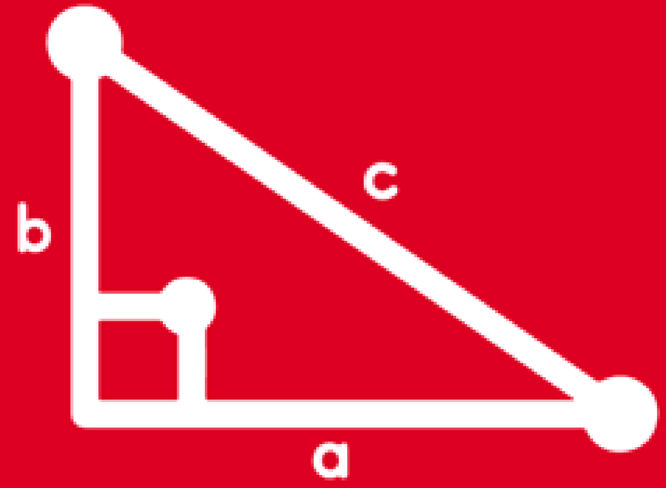
TRIGONOMETRY

Chapter 19

5th
SECONDARY



TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

SACO OLIVEROS

HELICO-MOTIVACIÓN

En el siglo XVI, aparecieron en Europa una serie de identidades conocidas como las reglas de prostaféresis; en la actualidad son conocidas como las identidades de **Transformaciones Trigonométricas**, las cuales convierten una suma y diferencia de senos y cosenos a un producto y viceversa.

Para deducir estas identidades se usan las identidades del ángulo compuesto:

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x.\cos y+\cos x.\operatorname{sen}y \quad \text{... (1)}$$

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x.\cos y-\cos x.\operatorname{sen}y \quad \text{... (2)}$$

Sumando (1) y (2):

$$\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=2\operatorname{sen}x.\cos y \quad \text{... (*)}$$

Hacemos un cambio de variable:

Sea $\begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{A+B}{2} \ ; \ y=\frac{A-B}{2}$$

Reemplazando en (*), se obtiene:

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1er caso: De suma y diferencia de senos y cosenos a producto

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejemplos:

- $\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}2x\cos x$

- $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=2\cos\left(\frac{80^\circ+40^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{80^\circ-40^\circ}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=2\underbrace{\cos 60^\circ}_{1/2}\cos 20^\circ$

$\Rightarrow$ $\cos 80^\circ+\cos 40^\circ=\cos 20^\circ$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

2do caso: De producto de senos y cosenos a suma y diferencia

$$2\,\text{sen}\alpha\cos\beta=\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

Observación:

Si al aplicar las transformaciones trigonométricas obtenemos ángulos negativos, debes usar :

$$\text{sen}(-x)=-\text{sen}x \qquad \cos(-x)=\cos x$$

Ejemplos:

- $2\,\text{sen}3x\cos x=\text{sen}(3x+x)+\text{sen}(3x-x)$

$$\Rightarrow 2\,\text{sen}3x\cos x=\text{sen}4x+\text{sen}2x$$

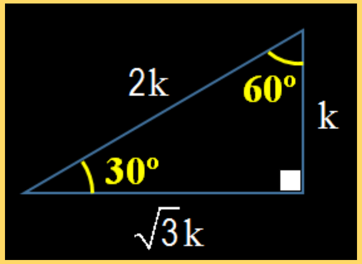
- $2\cos20^\circ\cos10^\circ=\cos(20^\circ+10^\circ)+\cos(20^\circ-10^\circ)$

$$\Rightarrow 2\cos20^\circ\cos10^\circ=\underbrace{\cos30^\circ}+\cos10^\circ$$

$$\Rightarrow 2\cos20^\circ\cos10^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos10^\circ$$

1. Reduzca: $E = \dfrac{\text{sen}40° + \text{sen}20°}{\cos 40° + \cos 20°}$

Recordar:



Recordar:

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{\overbrace{\text{sen}40° + \text{sen}20°}^{\cancel{2}\text{sen}30°\cancel{\cos 10°}}}{\underbrace{\cos 40° + \cos 20°}_{\cancel{2}\cos 30°\cancel{\cos 10°}}}$$

$$E = \frac{\text{sen}30°}{\cos 30°}$$

$$E = \tan 30°$$

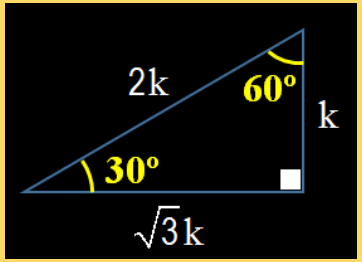
$$E = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

2. Halle el valor del ángulo agudo x en:

$$\frac{\text{sen}9x-\text{sen}3x}{\cos 9x+\cos 3x}=\sqrt{3}$$

Recordar:



Recordar:

$$\text{sen}A-\text{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

RESOLUCIÓN

$$\frac{\overset{\cancel{2}\cancel{\cos 6x}\,\text{sen}3x}{\text{sen}9x-\text{sen}3x}}{\underset{\cancel{2}\cancel{\cos 6x}\cos 3x}{\cos 9x+\cos 3x}}=\sqrt{3}$$

$$\tan 3x=\sqrt{3}$$

$$3x=60^\circ$$

$$\therefore\ \boxed{x=20^\circ}$$

3. Para $x = \dfrac{\pi}{24}$, calcule: $E = \dfrac{\operatorname{sen}6x + \operatorname{sen}4x + \operatorname{sen}2x}{\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x}$

Recordar:

$$\operatorname{sen}A + \operatorname{sen}B = 2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{\overbrace{\operatorname{sen}6x + \operatorname{sen}2x}^{2\operatorname{sen}4x\cos 2x} + \operatorname{sen}4x}{\underbrace{\cos 6x + \cos 2x}_{2\cos 4x\cos 2x} + \cos 4x}$$

$$E = \frac{\operatorname{sen}4x\cancel{(2\cos 2x + 1)}}{\cos 4x\cancel{(2\cos 2x + 1)}}$$

LUEGO:

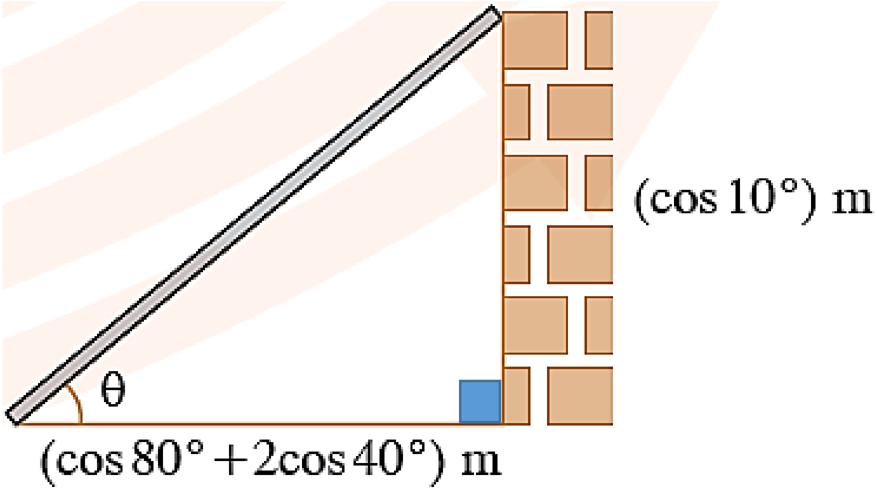
$$E = \tan 4x$$

$$E = \tan\left(4 \times \frac{\pi}{24}\right)$$

$$E = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \boxed{E = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

4. Una barra metálica descansa sobre una pared lisa, tal como se muestra en la figura. Halle el valor de θ.



RESOLUCIÓN

Recordar:

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cot\theta = \frac{\cos 80° + 2\cos 40°}{\cos 10°} = \frac{\overbrace{\cos 80° + \cos 40°}^{2\cos 60° \cos 20°} + \cos 40°}{\cos 10°}$$

$$\cot\theta = \frac{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\cos 20° + \cos 40°}{\cos 10°} = \frac{\overbrace{\cos 40° + \cos 20°}^{2\cos 30° \cancel{\cos 10°}}}{\cancel{\cos 10°}}$$

$$\cot\theta = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \cot\theta = \sqrt{3} \quad \therefore \boxed{\theta = 30°}$$

5. Halle el valor del ángulo α que cumple

$$\operatorname{sen}\alpha = 2\cos 40°.\cos 10° - \cos 50°$$

Recordar:

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

RESOLUCIÓN

$$\operatorname{sen} \propto = 2\cos 40°\ \cos 10° - \cos 50°$$

$$\operatorname{sen} \propto = \cancel{\cos 50°} + \cos 30°\ \cancel{-\cos 50°}$$

$$\operatorname{sen} \propto = \cos 30°$$

R.T. de ángulos complementarios:

$$\Rightarrow \propto + 30° = 90° \quad \therefore \boxed{\propto = 60°}$$

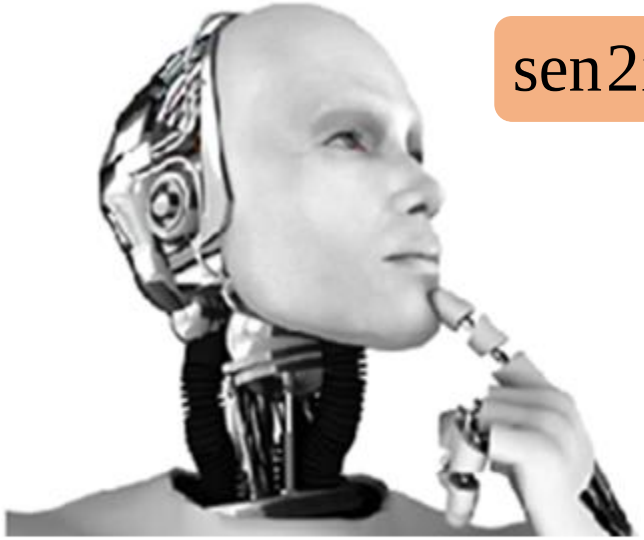
6. Simplifique la expresión: $R = \dfrac{2\cos4x.\cos3x - \cos7x}{\text{sen}2x}$

Recordar:

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$\text{sen}2x = 2\,\text{sen}x\cos x$$

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen}x}$$



RESOLUCIÓN

$$R = \frac{\mathbf{2\cos4x\cos3x} - \cos7x}{\text{sen}2x}$$

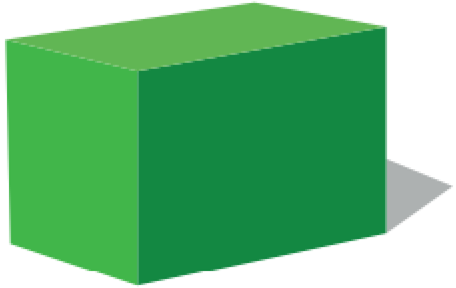
$$R = \frac{\cancel{\mathbf{\cos7x}} + \mathbf{\cos x} - \cancel{\cos7x}}{\mathbf{sen2x}}$$

$$R = \frac{\cancel{\mathbf{\cos x}}}{\mathbf{2senx}\cancel{\mathbf{\cos x}}}$$

$$R = \frac{\mathbf{1}}{2\mathbf{senx}}$$

$$\therefore\ \boxed{\mathbf{R} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{cscx}}$$

7. Se tiene una pequeña pieza de juguete cuyas aristas miden (2cos6x) cm, (2cos4x) cm y (cos2x) cm; tal que 0<x<15°.



Si el volumen de esta pieza, se expresa así: (1+cosAx+cosBx+cosCx) cm^3 considerando a los números A, B y C positivo; dar el valor de A+B+C.

RESOLUCIÓN

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$2\cos^2 x = 1+\cos 2x$$

Volúmen: producto de aristas

Volúmen: $(2\cos6x)(2\cos4x)(\cos2x)cm^3$

Ordenando convenientemente.

Volúmen $= (2\cos6x)(\cos2x)(2\cos4x)cm^3$

Volúmen $= (\cos8x + \cos4x)(2\cos4x)cm^3$

Volúmen $= (2\cos4x.\cos8x + 2\cos^2 4x)\ cm^3$

Volúmen $= (\cos12x + \cos4x + 1 + \cos8x)\ cm^3$

Ordenando

Volúmen $= (1 + \cos4x + \cos8x + \cos12x)\ cm^3$

Comparando:(1+cosAx+cosBx+cosCx) cm3

$A = 4 ; B = 8 ; C = 12$

$\Rightarrow A + B + C = 4 + 8 + 12$ $\therefore$ **Rpta = 24**