ARITHMETIC

2023

Chapter 9

Y+X=

4th
SECONDARY

Divisibilidad I

SACO OLIVEROS

HISTORIA DE LA DIVISIBILIDAD

Desde hace mucho tiempo, el hombre se ha visto ante la necesidad de tener que repartir cantidades de cosas entre personas, dándole a cada una el mismo número de unidades.
A través de la práctica el hombre descubrió que este problema a veces sí tenía solución y a veces no. Esto causo la búsqueda de cierta forma de resolver estos problemas dando inicio a la divisibilidad

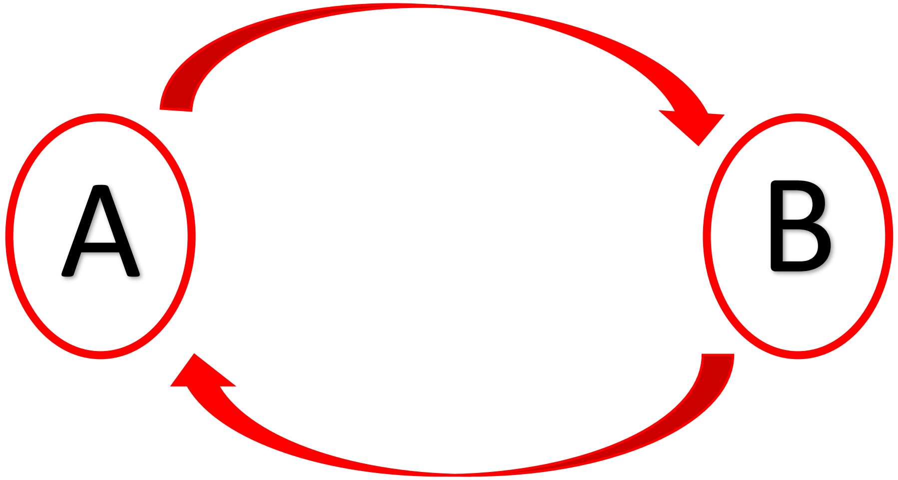
La divisibilidad de los números es conocida desde tiempos remotos.
Así, los hindúes ya conocían la divisibilidad por tres, siete y nueve y los egipcios conocían los números pares e impares.
El matemático griego Euclides demostró los teoremas básicos de la divisibilidad de números enteros.
Ya posteriormente, el matemático francés Pascal (1623-1662) propuso las reglas para conocer la divisibilidad de cualquier número.

DIVISIBILIDAD I

Si la división de A entre B es exacta,entonces :

A es **MÚLTIPLO DE B**

A es **DIVISIBLE por B**



B es **DIVISOR de A**

Ejemplos:

Marque V o F ,según el caso :

* 24 es múltiplo de 6. (V)

* 8 es divisible por 2. (V)

* 6 es múltiplo de 12. (F)

* 14 es múltiplo de 3. (F)

* 0 es múltiplo de 7. (V)

HELICO THEORY

➢ **Múltiplo de un número :** Es todo aquella cantidad que contiene a otra cantidad, un número entero de veces.

Ejemplos:

* **Múltiplos de 6 :** 0 , 6 , 12 , 18 , 24 , ...

Múltiplos Positivos de 6 : 6 , 12 , 18 , 24 , 30 ,...

* **Múltiplos de 4 :** 0 , 4 , 8 , 12 , 16 , 20 ,...

Múltiplos positivos de 4 : 4 , 8 , 12 , 16 , 20 , ...

HELICO THEORY

TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

En general : $\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & k \end{array}$

Donde : $\boxed{A = B \times k}$

$A \in \mathbb{Z}; B \in \mathbb{Z}+; k \in \mathbb{Z}$

Módulo

Notación:

$\boxed{\overset{\circ}{A} = A \,.\, k}$ $\quad (k \in \mathbb{Z})$

$\overset{\circ}{A} \rightarrow$ **MÚLTIPLO DE A.**

NÚMEROS NO DIVISIBLES

POR DEFECTO

$$\begin{array}{r|l} 123 & 12 \\ \cline{2-2} 120 & 10 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

$$123 = \underbrace{12(10)} + 3$$

$$123 = \overset{\circ}{12} + 3$$

POR EXCESO

$$\begin{array}{r|l} 123 & 12 \\ \cline{2-2} 132 & 11 \\ \cline{1-1} 9 & \end{array}$$

$$123 = \underbrace{12(11)} - 9$$

$$123 = \overset{\circ}{12} - 9$$

$$3 + 9 = 12$$

$$r_d + r_e = d$$

- $\overset{\circ}{9} + 4 = \overset{\circ}{9} - 5$
- $\overset{\circ}{7} + 6 = \overset{\circ}{7} - 1$
- $\overset{\circ}{10} + 8 = \overset{\circ}{10} - 2$
- $\overset{\circ}{11} - 4 = \overset{\circ}{11} + 7$

Propiedades

- $\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} + \cdots + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
- $\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$
- $\overset{\circ}{n}^{k} = \overset{\circ}{n},\ \forall k \in \mathbb{Z}^{+}$
- $\overset{\circ}{n}k = \overset{\circ}{n}$
- $(\overset{\circ}{n} + r)^{k} = \overset{\circ}{n} + r^{k}$
- $(\overset{\circ}{n} - r)^{k} = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + r^{k} \leftrightarrow k\text{: par} \\ \overset{\circ}{n} - r^{k} \leftrightarrow k\text{: impar} \end{cases}$
- $(\overset{\circ}{n} + a)(\overset{\circ}{n} + b) \ldots (\overset{\circ}{n} + p) = \overset{\circ}{n} + a \times b \times \cdots \times p$

* SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE VARIOS MÓDULOS:

A

$$\left.\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{a} \\ N = \overset{\circ}{b} \\ N = \overset{\circ}{c} \end{array}\right\} N = \overset{\circ}{\overline{MCM(a,\ b,\ c)}}$$

B

$$\left.\begin{array}{l} N = \overset{\circ}{a} \pm r \\ N = \overset{\circ}{b} \pm r \\ N = \overset{\circ}{c} \pm r \end{array}\right\} N = \overset{\circ}{\overline{MCM(a,\ b,\ c)}} \pm r$$

Ejemplo :

¿ Cuántos múltiplos de 13 existen entre 70 y 826 ?

Resolution:

$$\overset{\circ}{13} = 13.k$$

$$70 < 13.k < 826$$

$$5,3\ldots < k < 63,5\ldots$$

$$k : 6 ; 7 ; 8 ; \ldots ; 63$$

$$\text{Múltiplos} = \left(\frac{63 - 6}{1}\right) + 1 = 58$$

RPTA :	58 múltiplos

HELICO PRACTICE

1

¿Cuántos múltiplos de 7, terminados en 4 existen entre 115 y 993?

Resolution

$\overset{\circ}{7} = 7.k = \ldots 4$

$k \rightarrow \ldots 2$

Pero : $\dfrac{115}{7} < \dfrac{\cancel{7}k}{\cancel{7}} < \dfrac{993}{7}$

$14{,}4 < k < 141{,}8$

Entonces : $k \rightarrow 22 ; 32 ; 42 ; 52 ;\ldots ; 132$

Múltiplos de 7 $= \left(\dfrac{132 - 22}{10}\right) + 1 = 12$

RPTA :	12 múltiplos

2

De la secuencia del 1 al 800

- **¿cuántos son múltiplos de 4?**
- **¿cuántos son múltiplos de 7?**
- **¿cuántos son múltiplos de 6 pero no de 5?**

Dé como respuesta la suma de los resultados

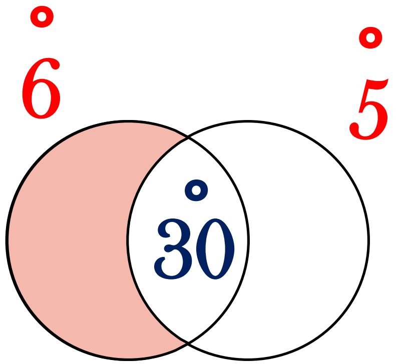
POR DATO : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ... ; 800

$\overset{\circ}{4}$: $A = \dfrac{800}{4} = 200$

$\overset{\circ}{7}$: $B = \dfrac{800}{7} = \boxed{114},2 = 114$

Resolution:

$* \ \overset{\circ}{6}$ pero no $\overset{\circ}{5}$



- $\overset{\circ}{6} = \dfrac{800}{6} = 133,3$

$= 133$ múltiplos.

M.C.M.(6,5) = 30

- $\overset{\circ}{30} = \dfrac{800}{30} = 26,6 = 26$ múltiplos

- Entonces los múltiplos de 6 ,pero no de 5 :

133 – 26 = 107

- Suma de Resultados :

= 200 + 114 + 107 = 421

RPTA :	421

3

Reduzca

$$F = (\overset{\circ}{13} + 2)^3(\overset{\circ}{13} - 6) + (\overset{\circ}{13} + 4)^2(\overset{\circ}{13} - 2)(\overset{\circ}{13} + 1)$$

Resolution:

$$(\overset{\circ}{13} + 8)(\overset{\circ}{13} - 6) + (\overset{\circ}{13} + 16)(\overset{\circ}{13} - 2)(\overset{\circ}{13} + 1)$$

$$(\overset{\circ}{13} - 48) + (\overset{\circ}{13} - 32)$$

$$\overset{\circ}{13} - 48 + \overset{\circ}{13} - 32$$

$$\overset{\circ}{13} - 80 = \overset{\circ}{13} - 2 = \overset{\circ}{13} + 11$$

RPTA :	$\overset{\circ}{13} + 11$

4

Halle el residuo que se obtiene al dividir 688^{857} entre 7.

Resolution:

$$688^{857} = (\overset{\circ}{7} + 2)^{857}$$

$$= \overset{\circ}{7} + 2^{857}$$

$$= \overset{\circ}{7} + (2^3)^{285} . 2^2$$

$$= \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1)^{285} . 2^2$$

$$= \overset{\circ}{7} + (\overset{\circ}{7} + 1) . 4$$

$$= \overset{\circ}{7} + \overset{\circ}{7} + 4$$

$$= \overset{\circ}{7} + 4$$

RPTA :	4

5

Si $\overline{ab}^{a} = \overset{\circ}{9} + 4$; $\overline{ab}^{b} = \overset{\circ}{9} + 5$ halle el residuo que se obtiene al dividir $\overline{ab}^{\overline{ab}}$ entre 9.

Resolution :

$$\overline{ab}^{\overline{ab}} = (\overline{ab})^{10a+b} = (\overline{ab})^{10a}(\overline{ab})^{b}$$

$$= (\overline{ab}^{a})^{10}(\overline{ab})^{b}$$

$$= (\overset{\circ}{9} + 4)^{10}(\overset{\circ}{9} + 5)$$

$$= (\overset{\circ}{9} + 4)(\overset{\circ}{9} + 5)$$

$$= \overset{\circ}{9} + 20$$

$$= \overset{\circ}{9} + 2$$

RPTA :	2

6

En un congreso participaron 600 personas. De los asistentes varones se observó que 3/7 eran abogados, los 4/9 eran médicos y los 2/5 eran economistas. ¿Cuántas damas asistieron al congreso?

Resolution:

Total: 600 personas

$$\text{Varones:} \left.\begin{array}{l} \overset{\circ}{7} \\ \overset{\circ}{9} \\ \overset{\circ}{5} \end{array}\right\}$$

$$\text{Varones} = \overset{\circ}{\overline{\text{M.C.M.}(7\,;9\,;5)}}$$

$$\text{Varones} = \overset{\circ}{315}$$

$$\text{Varones} = 315$$

DATO :

$$\text{Varones} + \text{Mujeres} = 600$$

$$315 + \text{Mujeres} = 600$$

$$\text{Mujeres} = 285$$

RPTA :	285

7

En una fiesta donde asistieron 280 personas entre damas caballeros y niños, la cantidad de caballeros que no bailaban en un momento dado era igual a la cuarta parte del número de damas; la cantidad de niños asistentes era igual a la sétima parte del número de damas. Si la quinta parte de las damas estaban vestidas de negro.¿Cuántas damas no bailaban en dicho momento?

Resolution

TOTAL : 280 personas

Damas: $\dot{4}$, $\dot{7}$, $\dot{5}$

$$\textbf{Damas} = \overset{\circ}{\overline{\text{mcm}(4;5;7)}}$$

$$\textbf{Damas} = \overset{\circ}{140}\ (\underline{140};280;420\ ;...)$$

- **Damas** $= 140$
- **Niños** $= \dfrac{140}{7} = 20$

- **Caballeros** = 280 - (140+20) =**120**
- Caballeros que no bailan $= \dfrac{140}{4}$ = **35**
- Caballeros que bailan = 120 – 35 = **85**
- Damas que bailan = **85**
- Damas que no bailan = 140 - 85 = **55**

RPTA :	55