

TRIGONOMETRY

Chapter 06

4th

SECONDARY

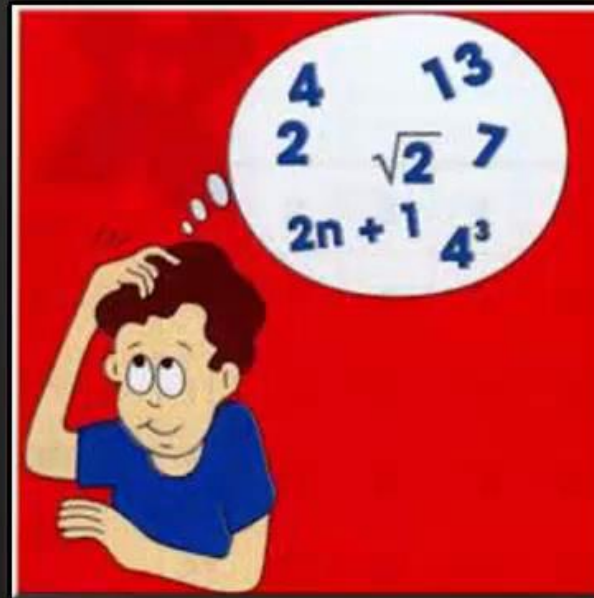
PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



SACO OLIVEROS

HELICO - MOTIVACIÓN

¿CUÁL ES EL RECÍPROCO DE
UN NÚMERO?



PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS

Si α es ángulo agudo se cumple que :

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{csc}\alpha = 1$$

$$\operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{sec}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tan}\alpha \cdot \operatorname{cot}\alpha = 1$$

Ejemplos :

- $\operatorname{sen}40^\circ \cdot \operatorname{cos}40^\circ = 1$
- $\operatorname{cot}74^\circ \cdot \operatorname{tan}74^\circ = 1$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, se cumple :

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{cos}\beta$$

$$\operatorname{tan}\alpha = \operatorname{cot}\beta$$

$$\operatorname{sec}\alpha = \operatorname{csc}\beta$$

Ejemplos :

- $\operatorname{sen}65^\circ = \operatorname{cos}25^\circ$
- $\operatorname{sec}36^\circ = \operatorname{csc}54^\circ$

HELICO PRACTICE 1

Halle el valor de θ si

$$\operatorname{sen}(4\theta - 18^\circ) \cdot \operatorname{csc}(2\theta + 10^\circ) = 1$$

Recordamos :

Propiedad de las RTR :

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{csc}\alpha = 1$$

$$\operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{sec}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tan}\alpha \cdot \operatorname{cot}\alpha = 1$$



Ángulos agudos iguales

RESOLUCIÓN

$$\operatorname{sen}(4\theta - 18^\circ) \cdot \operatorname{csc}(2\theta + 10^\circ) = 1$$

Luego :

$$4\theta - 18^\circ = 2\theta + 10^\circ$$

$$2\theta = 28^\circ$$

$$\therefore \theta = 14^\circ$$

HELICO PRACTICE 2

Halle el valor de α si

$$\sec(\alpha + 10^\circ) = \csc(2\alpha + 20^\circ)$$

Recordamos :

Propiedad de las RT de Ángulos

Agudos Complementarios :

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces :

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$



**Co – Razones Trigonométricas
(CO – RT)**

RESOLUCIÓN

$$\sec(\alpha + 10^\circ) = \csc(2\alpha + 20^\circ)$$

Luego :

$$\alpha + 10^\circ + 2\alpha + 20^\circ = 90^\circ$$

$$3\alpha = 60^\circ$$

$$\therefore \alpha = 20^\circ$$

HELICO PRACTICE 3

Si $\text{sen}3x = \text{cos}7x$, efectúe

$$E = \tan5x + \cos6x \cdot \csc4x$$

Recordamos :

Propiedad de las RT de Ángulos

Agudos Complementarios :

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces :

$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$



Co – Razones Trigonométricas
(Co – RT)

RESOLUCIÓN

$$\text{sen}3x = \text{cos}7x$$

Luego : $3x + 7x = 90^\circ$

$$10x = 90^\circ \rightarrow x = 9^\circ$$

Calculamos E :

$$E = \tan5(9^\circ) + \cos6(9^\circ) \cdot \csc4(9^\circ)$$

$$E = \tan45^\circ + \cos54^\circ \cdot \csc36^\circ$$

Por Co - RT : $E = 1 + \underbrace{\text{sen}36^\circ \cdot \csc36^\circ}_1$

Por RTR : $E = 1 + 1$

$$\therefore E = 2$$

HELICO PRACTICE 4

Efectúe $P = (5 \operatorname{sen} 20^\circ + 3 \operatorname{cos} 70^\circ)(4 \operatorname{csc} 20^\circ - 2 \operatorname{sec} 70^\circ)$

RESOLUCIÓN

Recordamos :

Propiedad de las RT de Ángulos

Agudos Complementarios :

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, entonces :

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \beta$$

$$\operatorname{tan} \alpha = \operatorname{cot} \beta$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \operatorname{csc} \beta$$



**Co – Razones Trigonométricas
(Co – RT)**

Por Co – RT : $\operatorname{sen} 20^\circ = \operatorname{cos} 70^\circ$

$$\operatorname{csc} 20^\circ = \operatorname{sec} 70^\circ$$

Reemplazamos en P, todo con 20° :

$$P = (5 \operatorname{sen} 20^\circ + 3 \operatorname{sen} 20^\circ)(4 \operatorname{csc} 20^\circ - 2 \operatorname{csc} 20^\circ)$$

$$P = (8 \operatorname{sen} 20^\circ)(2 \operatorname{csc} 20^\circ)$$

$$P = 16 \underbrace{\operatorname{sen} 20^\circ \cdot \operatorname{csc} 20^\circ}_{(1)}$$

Por RTR :

$$P = 16 (1)$$

$$\therefore P = 16$$

HELICO PRACTICE 5

Si $\text{sen}\alpha \cdot \sec 2\alpha = 1$, efectúe $A = \cos 2\alpha + \sqrt{3} \cos \alpha$

RESOLUCIÓN

Recordamos :

Propiedad de las RTR :

$$\text{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1$$

$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$



Ángulos agudos iguales

$$\text{sen}\alpha \cdot \sec 2\alpha = 1 \quad \dots (\text{no son RTR})$$

$$\text{sen}\alpha = \frac{1}{\sec 2\alpha}$$

Por RTR : $\text{sen}\alpha = \cos 2\alpha$

Por Co - RT : $\alpha + 2\alpha = 90^\circ \rightarrow \alpha = 30^\circ$

Reemplazamos α en A :

$$A = \cos 2(30^\circ) + \sqrt{3} \cos 30^\circ$$

$$A = \cos 60^\circ + \sqrt{3} \cos 30^\circ = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$A = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$$

$$\therefore A = 2$$

HELICO PRACTICE 6

Las edades de Mitsuo y Nicole están dadas por las siguientes relaciones :

⊗ Mitsuo tiene x años .

⊗ Nicole tiene y años .

Donde : $\tan 2x^\circ \cdot \tan 3x^\circ = 1$;

$$\sin(x + 5)^\circ = \cos(y + 10)^\circ$$

Indique la edad de cada una de ellas .

RESOLUCIÓN

Dato : $\tan 2x^\circ \cdot \tan 3x^\circ = 1$

Por CO - RT : $\cot(90 - 2x)^\circ \cdot \tan 3x^\circ = 1$

Por RTR : $(90 - 2x)^\circ = 3x^\circ$

$$90 = 5x$$

$$\Rightarrow x = 18$$

Dato : $\sin(x + 5)^\circ = \cos(y + 10)^\circ$

$$\sin 23^\circ = \cos(y + 10)^\circ$$

Por CO - RT :

$$23^\circ + (y + 10)^\circ = 90^\circ$$

$$y + 33 = 90$$

$$\Rightarrow y = 57$$

∴ Mitsuo tiene 18 años y Nicole tiene 57 años .

HELICO PRACTICE 7

Lucía desea comprar un departamento, para lo cual accederá a un préstamo hipotecario.- Ella tiene dos opciones y cada uno de los bancos cobra cierta tasa de interés, tal como se muestra :

Banco BCP $\rightarrow x\%$

Banco Scotiabank $\rightarrow y\%$

Donde :

$$\triangleright \cos(30 - x)^\circ \cdot \sec(2x)^\circ = 1$$

$$\triangleright \tan(2x)^\circ = \cot(5y)^\circ$$

Indique en cuál de los bancos le conviene solicitar el préstamo.

RESOLUCIÓN

Dato : $\cos(30 - x)^\circ \cdot \sec(2x)^\circ = 1$

Por RTR : $(30 - x)^\circ = (2x)^\circ$

$$\Rightarrow 30 = 3x \Rightarrow 10 = x$$

* Tasa de interés BCP = 10%

Dato : $\tan(2x)^\circ = \cot(5y)^\circ$

Por Co - RT : $(2x)^\circ + (5y)^\circ = 90^\circ$

$$20 + 5y = 90 \Rightarrow y = 14$$

* Tasa de interés Scotiabank = 14%

A Lucía le conviene solicitar el préstamo en el Banco BCP .



SACO
OLIVEROS