GEOMETRÍA

Capítulo 14

5th
SECONDARY

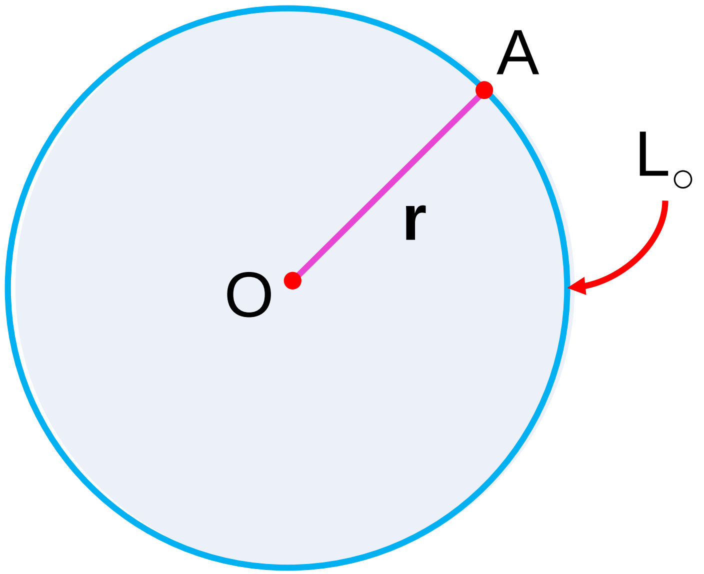
ÁREA DE REGIONES CIRCULARES

SACO OLIVEROS

ÁREAS DE REGIONES CIRCULARES

Círculo

Es la unión de la circunferencia y su interior.



O : Centro

$\overline{OA}$: radio

S : Área del círculo

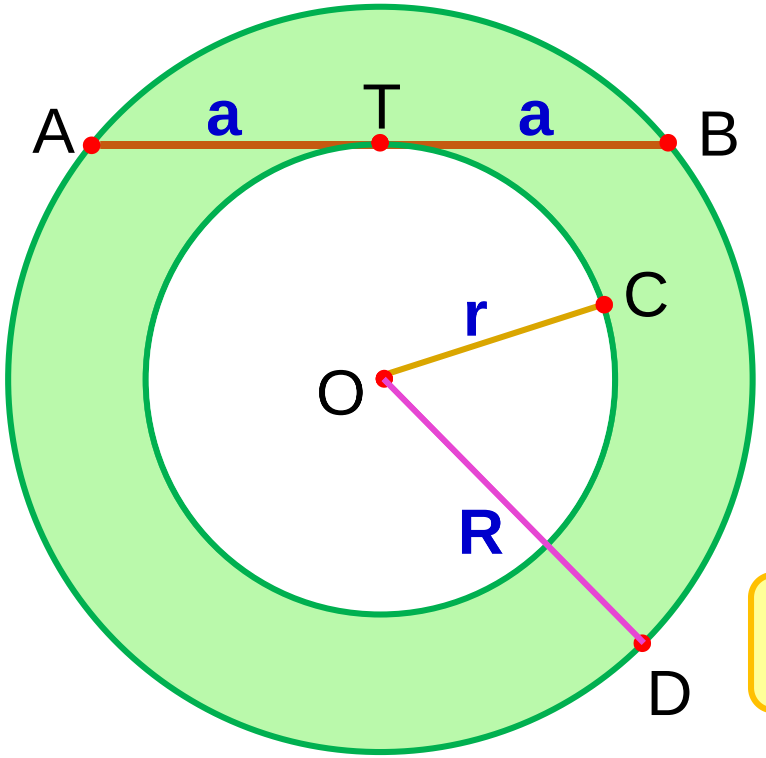
L : longitud de la circunferencia

$$S = \pi \cdot r^2$$

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Corona circular

Es la región comprendida entre dos circunferencias concéntricas.



O : Centro

T : Punto de tangencia

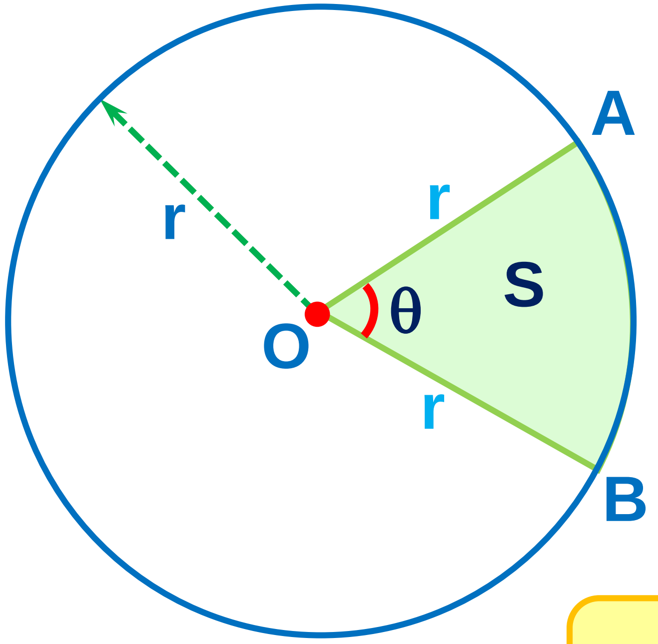
S : Área de la corona circular

$$S = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

$$S = \pi \cdot (a)^2$$

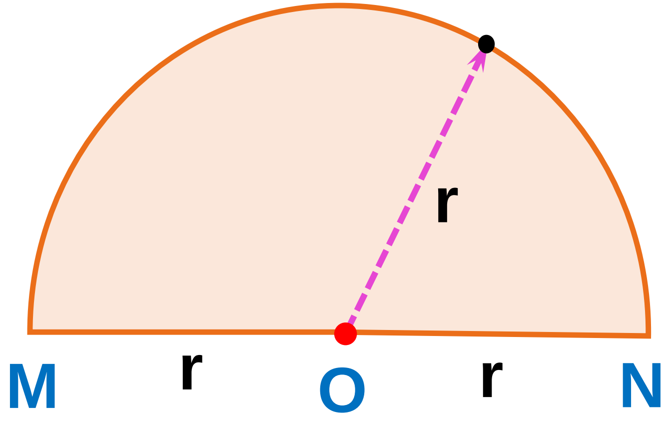
Sector circular

Es una parte del círculo limitado por dos radios y su arco correspondiente.



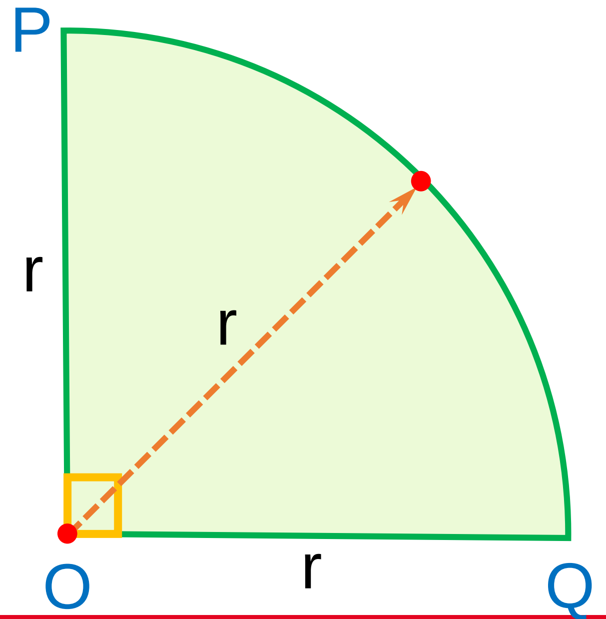
$$S_{\text{sector}} = \frac{\theta \cdot r^2 \cdot \pi}{360°}$$

Semicírculo



$$S_{\text{semicírculo}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$$

Cuadrante

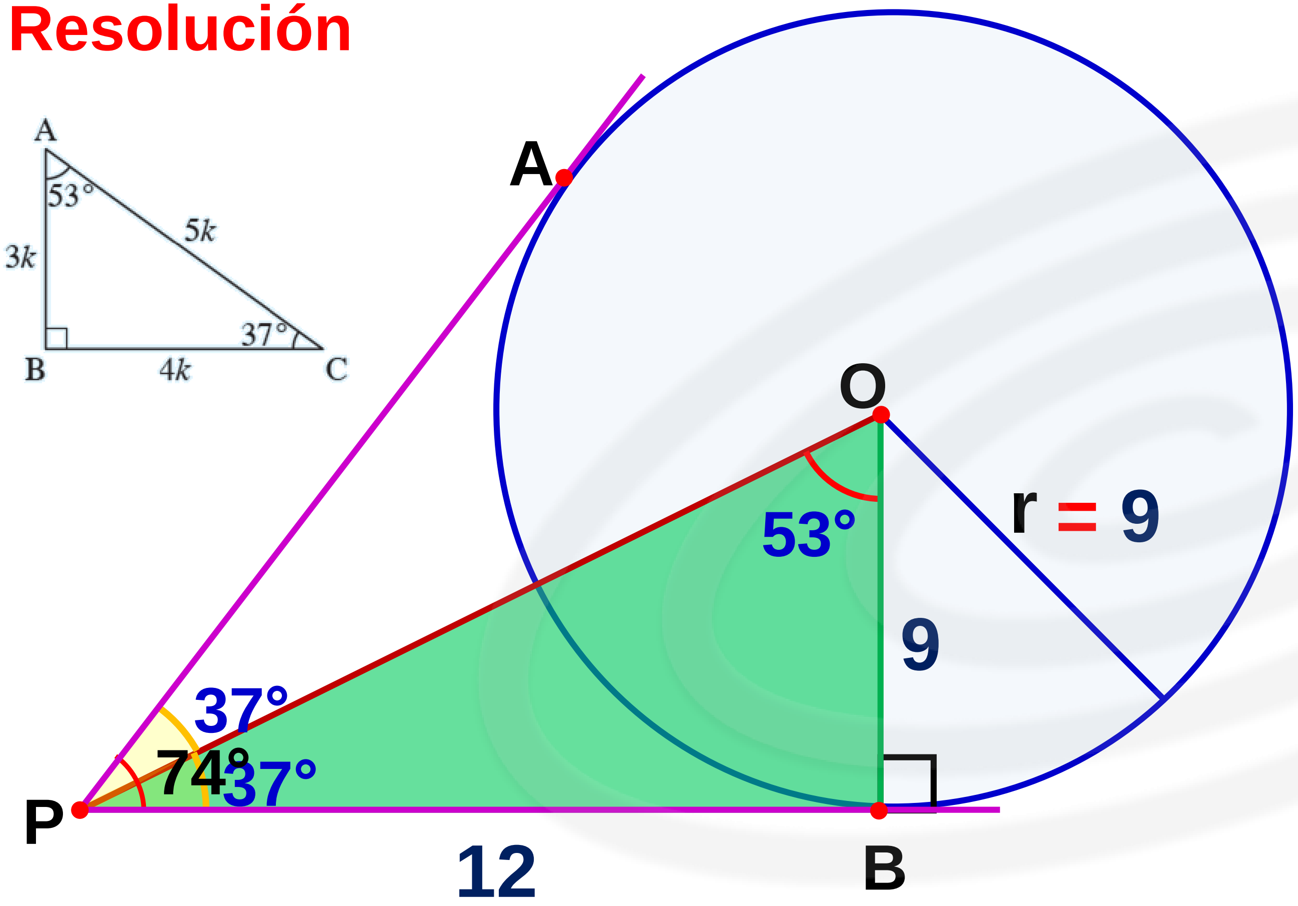


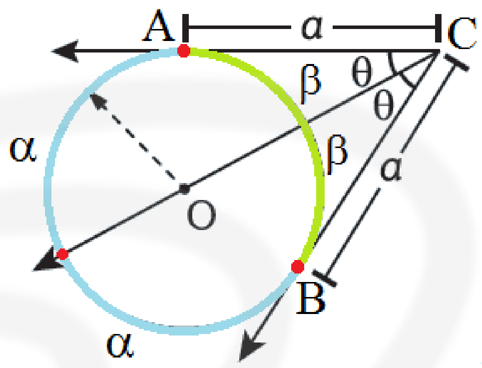
O : Centro

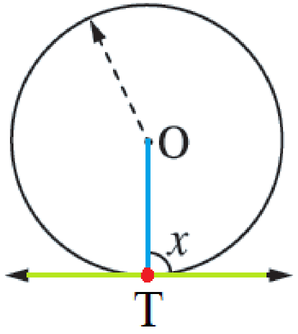
$$S_{\text{cuadrante}} = \frac{r^2 \cdot \pi}{4}$$

1. Halle el área del círculo si A y B son puntos de tangencia.

Resolución







$x = 90°$

- Se traza $\overline{OP}$ (bisectriz).
- Por teorema: m∡PBO = 90°
- $\triangle$ PBO : notable de 37° y 53°

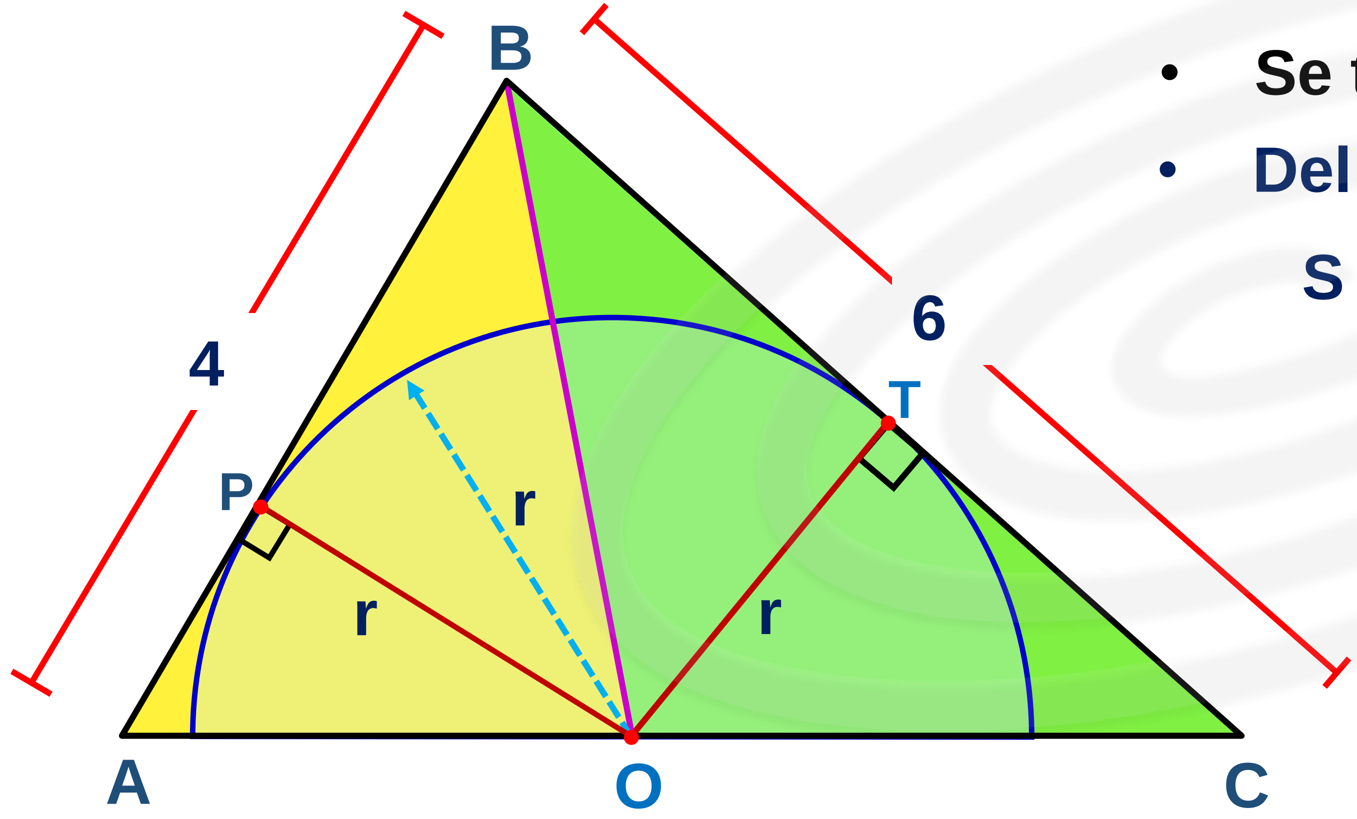
$\Rightarrow S = \pi \cdot (9)^2$

$$S = 81\pi\ u^2$$

$$S = \pi \cdot r^2$$

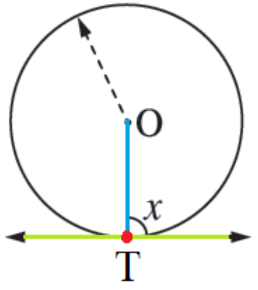
2. Se tiene un triángulo ABC donde AB = 4 u y BC = 6 u. Luego se inscribe un semicírculo cuyo diámetro esté contenido en $\overline{AC}$ y sea tangente de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Halle el área del semicírculo si el área de la región triangular ABC es 10 u².

Resolución



* P y T : Puntos Tangencias

- Se trazan: $\overline{OP}$ y $\overline{OT}$.
- Se traza $\overline{BO}$
- Del gráfico:



$x = 90°$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta BCO}$$

$$10 = \frac{(\cancel{4})(r)}{\cancel{2}} + \frac{(\cancel{6})(r)}{\cancel{2}}$$

$$10 = 2r + 3r$$

$$10 = 5r$$

$$\boxed{r = 2}$$

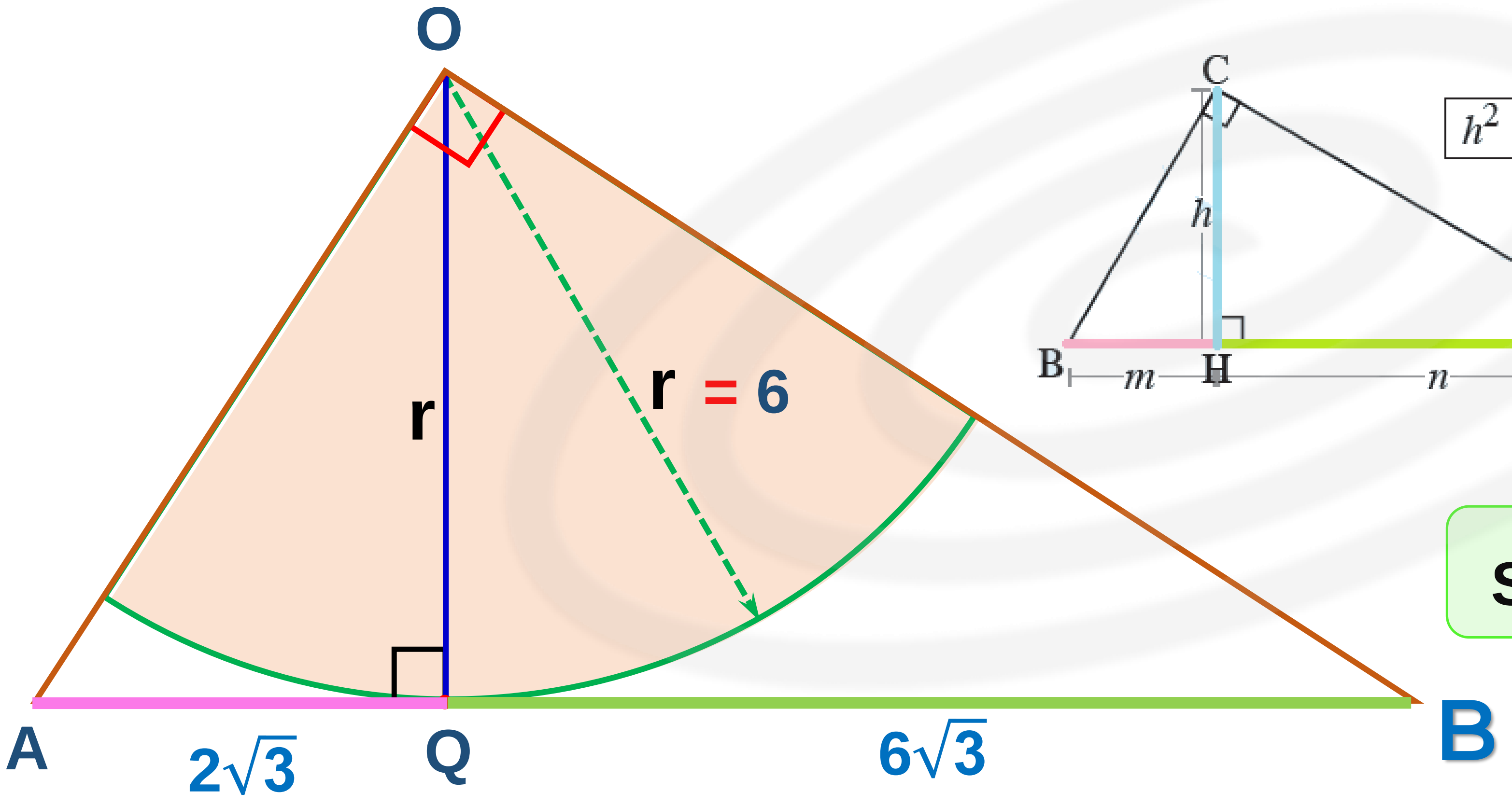
$$\boxed{S_{\frown} = \frac{\pi \cdot r^2}{2}}$$

$$S_{\frown} = \frac{\pi \cdot (2)^2}{2}$$

$$\boxed{S = 2\,\pi\, u^2}$$

3. Se tiene un triángulo rectángulo AOB, recto en O, haciendo centro en O se traza un arco de circunferencia tangente a $\overline{AB}$ en Q. Si AQ = $2\sqrt{3}$ u y QB = $6\sqrt{3}$ u, halle el área del cuarto de círculo de centro O.

Resolución



- Por teorema: m∡OQA = 90°

- $r^2 = (2\sqrt{3})(6\sqrt{3})$

$r^2 = 36$

$\boxed{r = 6}$

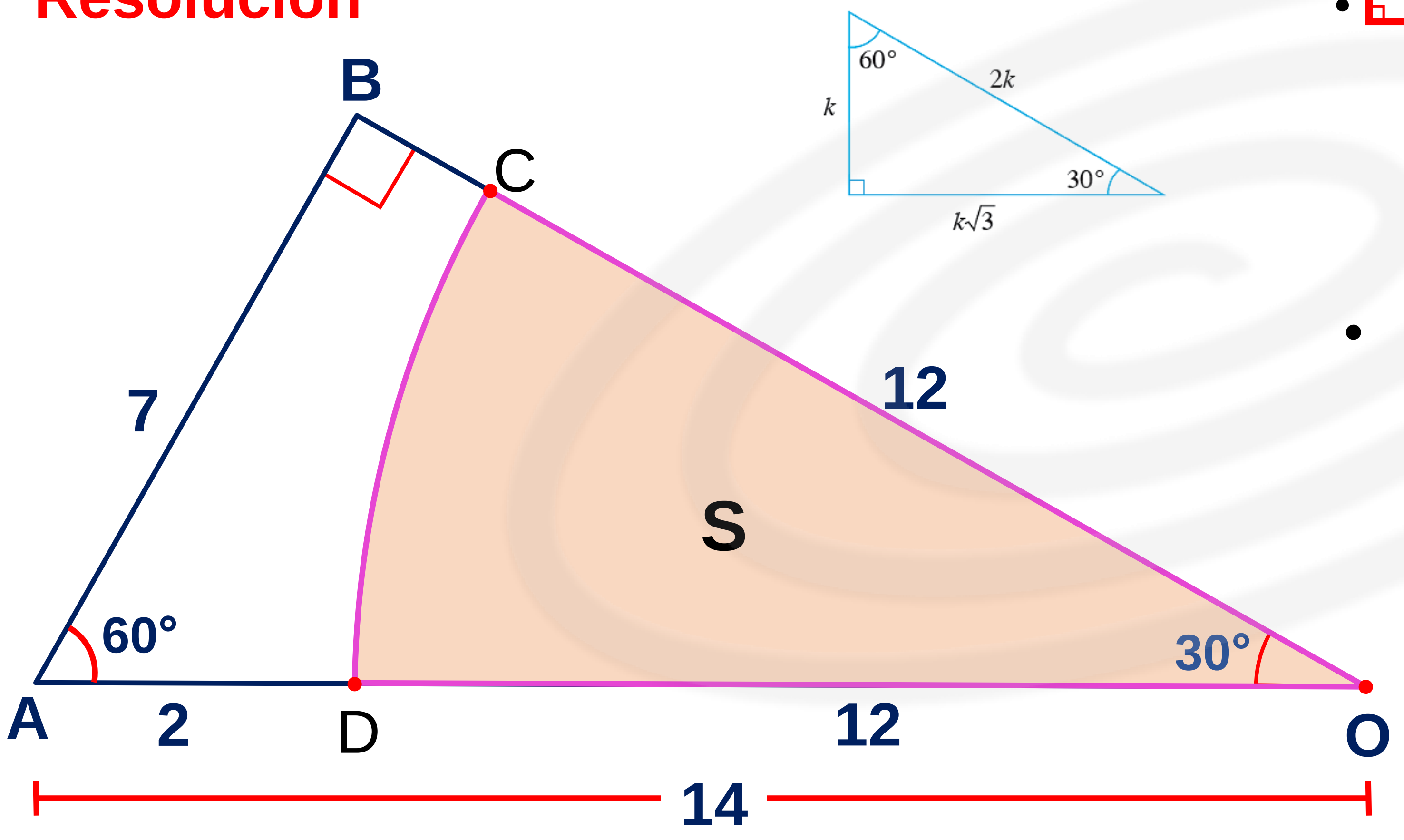
$$S = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

$$S = \frac{\pi \cdot (6)^2}{4}$$

$$\boxed{S = 9\pi\ u^2}$$

4. Se tiene un triángulo rectángulo ABO, recto en B, luego, haciendo centro en O, se traza el arco CD (C en $\overline{BO}$ y D en $\overline{AO}$). Si m<BAD = 60°, AB = 7 y AD = 2, halle el área del sector circular COD.

Resolución



- COD: Notable de 30° y 60°

AO = 14

OD = OC = 12

- Nos piden:

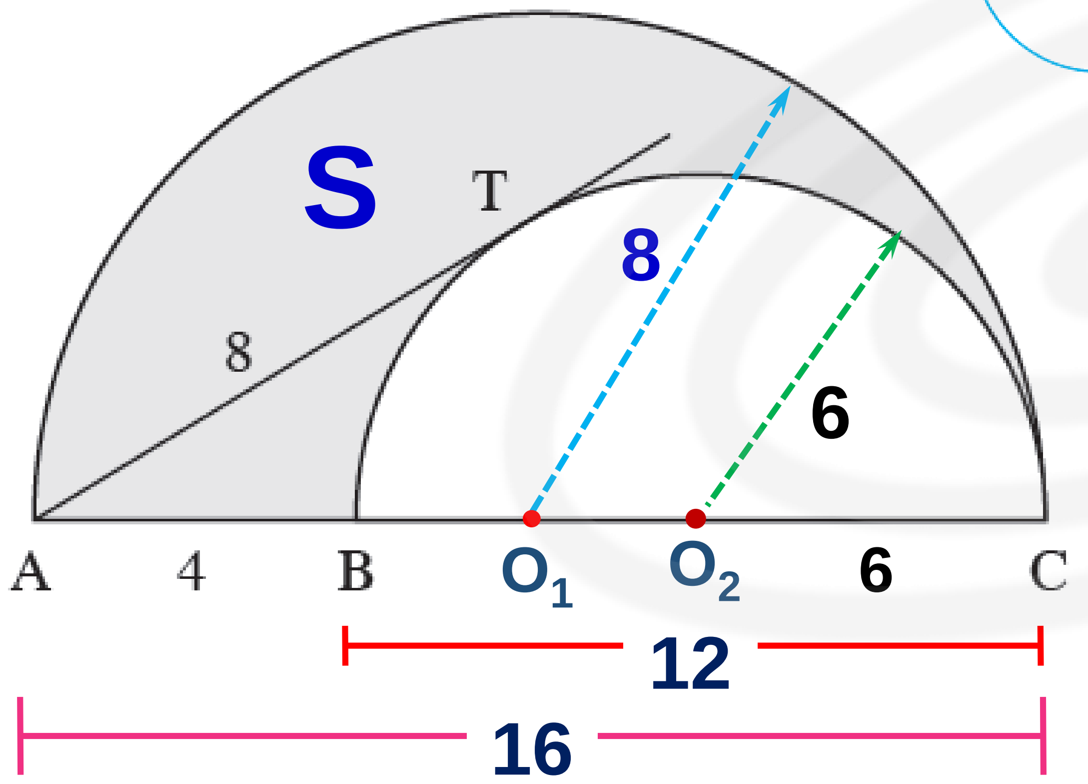
$$S = \frac{\theta \cdot r^2 \cdot \pi}{360^\circ}$$

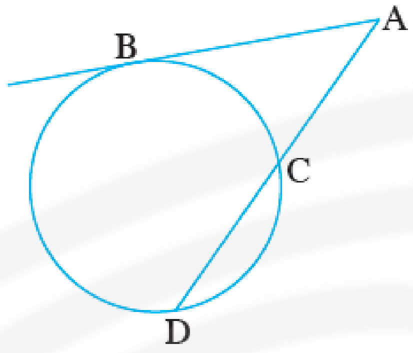
$$S = \frac{30^\circ.(12)^2.\pi}{360^\circ}$$

$$\boxed{S = 12\,\pi\ u^2}$$

5. Halle el área de la región sombreada si $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son diámetros, y T es punto de tangencia.

Resolución





Teorema de la tangente

$(AB)^2 = (AD)(AC)$

$(AT)^2 = (AC)(AB)$

$8^2 = (AC)(4)$

$\boxed{16 = AC}$

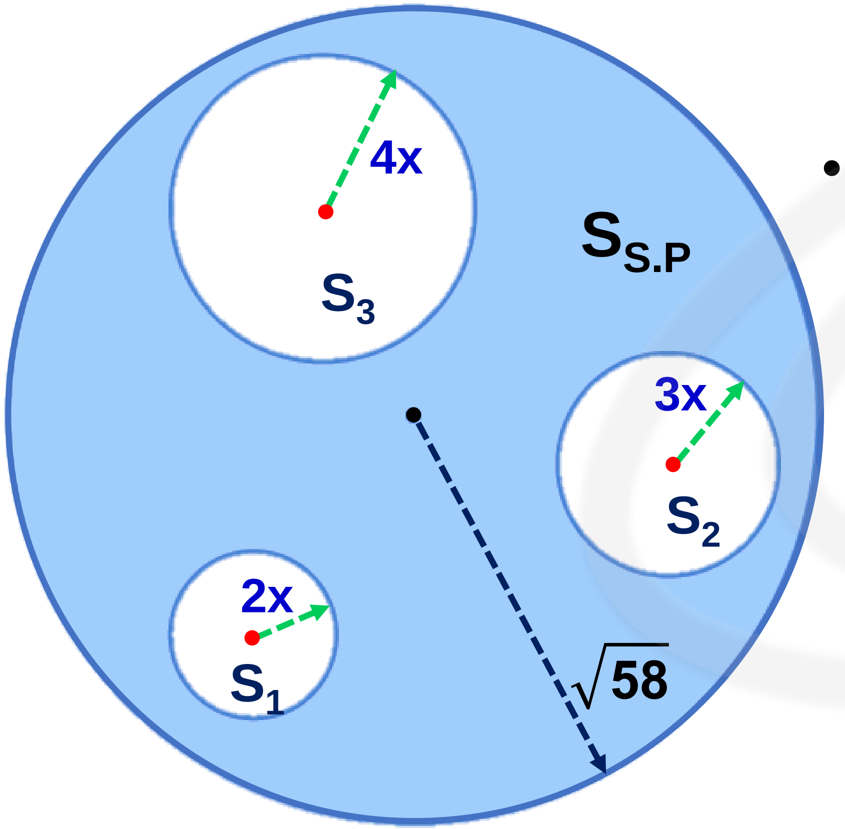
Recordemos: $S_{\frown} = \dfrac{\pi \cdot r^2}{2}$

$$S = \frac{\pi.(8)^2}{2} - \frac{\pi.(6)^2}{2}$$

$$= 32\pi - 18\pi$$

$$\boxed{S = 14\,\pi\,u^2}$$

6. En la figura se muestra el diseño de una nueva regla de plástico, para dibujar circunferencias. Si los radios de las tres circunferencias menores son 2x cm, 3x cm y 4x cm, y el radio de la circunferencia del contorno mayor de dicha regla es $\sqrt{58}$cm, y además la suma de las áreas de los tres círculos menores es igual al área de la superficie de plástico que abarca una de las caras de dicha regla; halle el valor de x.



$S_{S.P}$: área de la superficie plástica

Resolución

Piden: x

- **Del dato.**

$$S_1 + S_2 + S_3 = S_{S.P}$$

$$\pi(2x)^2 + \pi(3x)^2 + \pi(4x)^2 = \underbrace{[\pi(\sqrt{58})^2 - \pi(2x)^2 - \pi(3x)^2 - \pi(4x)^2]}_{S_{S.P}}$$

$$\pi 29x^2 = 58\pi - \pi 29x^2$$

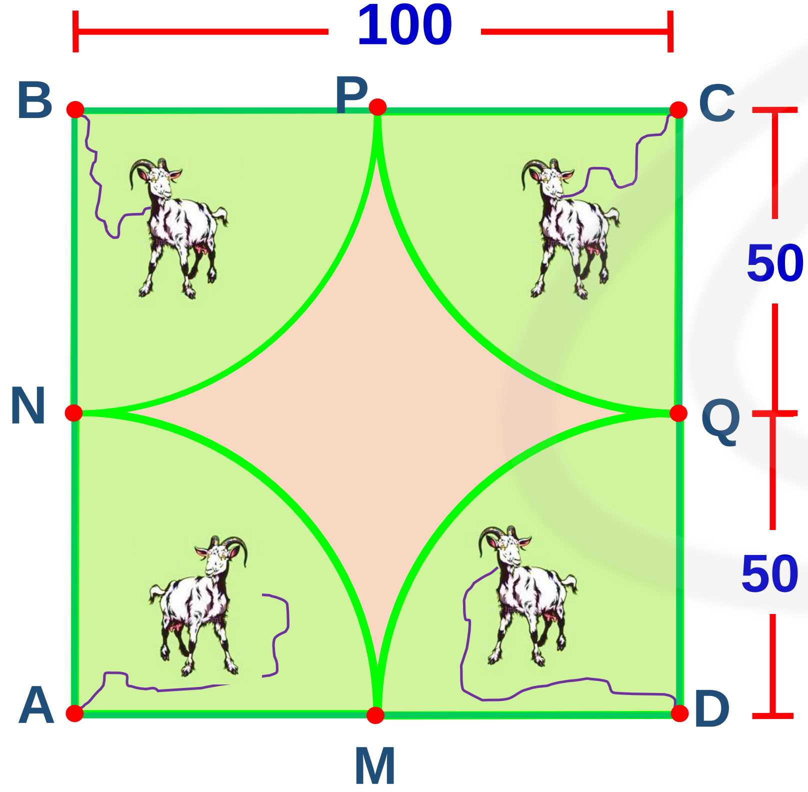
$$\cancel{58}\pi x^2 = \cancel{58}\pi$$

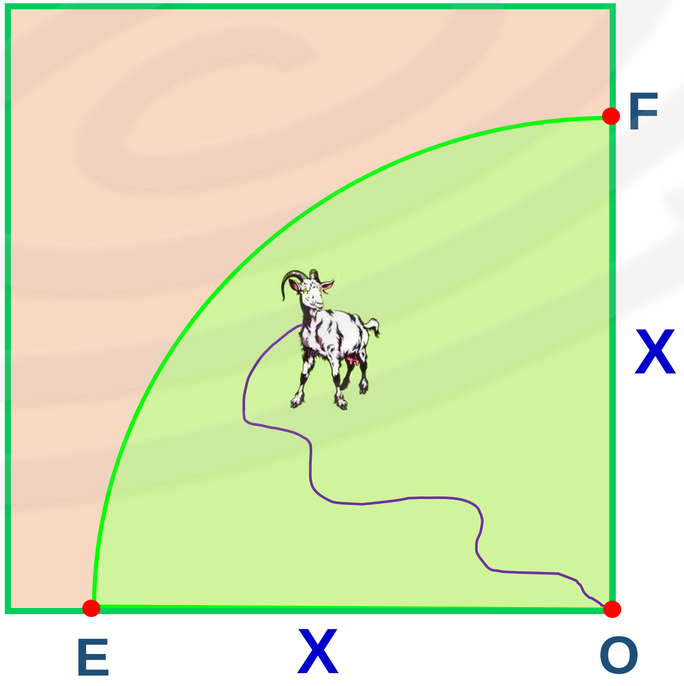
$$x^2 = 1$$

$$\boxed{x = 1cm}$$

8. Un prado cuyo contorno tiene forma de un cuadrado de 100 m de lado hay cuatro cabras, cada una atada a una esquina con una cuerda de 50 m, lo que permite comer una cierta parte de la hierba, quedando en el centro una parte que ninguna de ellas alcanza. El propietario tras vender 3 cabras, alargó la cuerda de la que quedaba en una de las esquinas, de tal forma que el área de la superficie sobre la que podía pastar era equivalente al área sobre la que pastaban anteriormente las cuatro. ¿Qué longitud tiene la nueva cuerda?

Resolución:





- **Del dato.**

$$S_{\bigcirc} = S_{\text{cuadrante}}$$

$$50^2 . \pi = \frac{\pi . x^2}{4}$$

$$50^2 = \frac{x^2}{4}$$

$$50 = \frac{x}{2}$$

$$X = 100 \text{ m}$$