



# TRIGONOMETRY

## Chapter 20

**4th**  
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGOMÉTRICAS  
DEL ÁNGULO TRIPLE



**SACO OLIVEROS**



# Flavio Vega Villanueva

Nació en Carhuaz, Áncash, Perú, el 10 de abril de 1915 y falleció en Lima el 10 de enero del 2011. Fue un matemático y profesor peruano. Se desempeñó durante varias décadas como catedrático de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, en la Facultad de Ciencias.

Fue el décimosexto decano de la Facultad de Ciencias de San Marcos y modernizó la enseñanza de las ciencias básicas, es decir, matemática, física y biología.

Fue miembro fundador y primer secretario de la Sociedad Matemática Peruana (SMP). Fue también miembro de la Asociación Peruana de Computación e Informática y del Colegio de Matemáticos del Perú.





# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO TRIPLE

## Identidades básicas

**1.**  $\text{sen}3x = 3\text{sen}x - 4\text{sen}^3x$

**2.**  $\text{cos}3x = 4\text{cos}^3x - 3\text{cos}x$

**3.**  $\text{tan}3x = \frac{3\text{tan}x - \text{tan}^3x}{1 - 3\text{tan}^2x}$

## Identidades auxiliares

**4.**  $\text{sen}3x = \text{sen}x(2\text{cos}2x + 1)$

**5.**  $\text{cos}3x = \text{cos}x(2\text{cos}2x - 1)$



## Recordemos

$$\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$$

1. Si  $3\operatorname{sen} \alpha = 1$ , calcule  $27\operatorname{sen} 3\alpha$ .

**RESOLUCIÓN**

**Dato:**  $3\operatorname{sen} \alpha - 1 = 0$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$$

Sabemos:

$$\operatorname{sen} 3\alpha = 3\operatorname{sen} \alpha - 4\operatorname{sen}^3 \alpha$$

$$\operatorname{sen} 3\alpha = \cancel{3} \left( \frac{1}{\cancel{3}} \right) - 4 \left( \frac{1}{3} \right)^3$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} 3\alpha = 1 - \frac{4}{27}$$

$$\operatorname{sen} 3\alpha = \frac{27}{27} - \frac{4}{27}$$

$$\operatorname{sen} 3\alpha = \frac{23}{27}$$

$$27\operatorname{sen} 3\alpha = 23$$

$$\therefore 27\operatorname{sen} 3\alpha = 23$$



**2. Si  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , calcule  $\cos 3\alpha$ .**

### RESOLUCIÓN

**Dato:**  $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sabemos:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

### Recordemos

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\Rightarrow \cos 3\alpha = 4\left(\frac{2\sqrt{2}}{27}\right) - \sqrt{2}\left(\frac{27}{27}\right)$$

$$\cos 3\alpha = \frac{8\sqrt{2}}{27} - \frac{27\sqrt{2}}{27}$$

$$\cos 3\alpha = \frac{-19\sqrt{27}}{27}$$

$$\therefore \cos 3\alpha = -\frac{19\sqrt{2}}{27}$$



**3. Si  $\tan\theta = \frac{1}{2}$ , calcule  $\tan 3\theta$ .**

### **RESOLUCIÓN**

**Dato:**  $\tan\theta = \frac{1}{2}$

Sabemos:

$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

$$\tan 3\theta = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

### **Recordemos**

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \tan 3\theta = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$\tan 3\theta = \frac{\frac{22}{16}}{\frac{1}{4}} = \frac{22 \times 4}{16 \times 1} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2}$$

$$\therefore \tan 3\theta = \frac{11}{2}$$



**4.** Si  $m = 4\cos^3 15^\circ - 3\cos 15^\circ$   
 $n = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$   
 calcule  $m^2 + n^2$ .

## RESOLUCIÓN

Por identidades del ángulo triple:

$$\begin{aligned} \bullet \quad m &= \underbrace{4\cos^3 15^\circ - 3\cos 15^\circ}_{\cos 3(15^\circ)} = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow m^2 = \frac{1}{2} \\ \bullet \quad n &= \underbrace{3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ}_{\sin 3(10^\circ)} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \rightarrow n^2 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } m^2 + n^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4 + 2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore m^2 + n^2 = \frac{3}{4}$$

## Recordemos

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$



**5. Simplifique**  $M = 8\cos^3\left(\frac{2\pi}{9}\right) - 6\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + 1$

## RESOLUCIÓN

Tenemos:

$$M = \overset{2(4)}{\underset{\text{green}}{8}}\cos^3\left(\frac{2\pi}{9}\right) - \overset{2(3)}{\underset{\text{green}}{6}}\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + 1$$

Factorizamos **2**:

$$M = 2 \left( 4\cos^3\left(\frac{2\pi}{9}\right) - 3\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) \right) + 1$$

$$M = 2\overset{1}{\cancel{\cos}}\overset{3}{\cancel{3}}\left(\frac{\overset{2}{\cancel{2}}\pi}{\underset{3}{\cancel{9}}}}\right) + 1$$

$$\Rightarrow M = 2\cos\overset{120^\circ}{\left(\frac{2\pi}{3}\right)} + 1$$

$$M = 2\cos(\underbrace{180^\circ - 60^\circ}_{(-) \rightarrow \text{IIC}}) + 1$$

$$M = 2(-\cos 60^\circ) + 1$$

$$M = \overset{1}{\cancel{2}}\left(-\frac{\overset{1}{\cancel{1}}}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right) + 1 = 0$$

$$\therefore \mathbf{M = 0}$$





**6.** De un total de 100 invitados a una fiesta, el  $A\%$  representa la cantidad de varones y el  $B\%$  la cantidad de mujeres. Si en la fiesta hay 12 niños, indique el número de personas que no asistieron.

$$A = 30\sqrt{2}(4\cos^3 15^\circ - 3\cos 15^\circ)$$

$$B = 80(3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ)$$

**Recordemos**

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

## RESOLUCIÓN

Usamos identidades del ángulo triple:

$$\bullet A = 30\sqrt{2} \cos 3(15^\circ) (4\cos^3 15^\circ - 3\cos 15^\circ)$$

$$A = 30\sqrt{2} \cos 45^\circ$$

$$A = 30\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow A\% = 30\%$$

$$\sin 3(10^\circ)$$

$$\bullet B = 80(3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ)$$

$$B = 80 \sin 30^\circ = 80 \left( \frac{1}{2} \right) \Rightarrow B\% = 40\%$$

Asistentes	Cantidad
Varones	30
Mujeres	40
Niños	12
<b>TOTAL</b>	<b>82</b>

$$\Rightarrow 30\% (100) \Rightarrow \text{No asisten} = 100 - 82$$

$$\Rightarrow 40\% (100)$$

$$\therefore \text{No asisten} = 18$$



**7.** El 5 de octubre de 2022 en el Perú se jugó la final para la clasificación al mundial de Qatar 2022. Se fijó el precio de la entrada popular, en soles, mediante la siguiente ecuación  $y = -55 \tan x$ . Determine el precio de una entrada si se sabe que

$$\frac{\text{sen} 3x + \text{sen}^3 x}{\text{cos} 3x - \text{cos}^3 x} = \frac{1}{2}$$

## RESOLUCIÓN

Usamos identidades del ángulo triple en el dato:

$$\frac{3\text{sen} x - 4\text{sen}^3 x + \text{sen}^3 x}{4\text{cos}^3 x - 3\text{cos} x - \text{cos}^3 x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3\text{sen} x - 3\text{sen}^3 x}{3\text{cos}^3 x - 3\text{cos} x} = \frac{1}{2}$$

Factorizamos:

$$\frac{3\text{sen} x (1 - \text{sen}^2 x)}{3\text{cos} x (\text{cos}^2 x - 1)} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\text{sen} x \cdot \text{cos}^2 x}{\text{cos} x \cdot (-\text{sen}^2 x)} = \frac{1}{2}$$

$$-\cot x \cdot \frac{\text{cos} x}{-\text{sen} x} = \frac{1}{2}$$

## Recordemos

$$\text{sen} 3x = 3\text{sen} x - 4\text{sen}^3 x$$

$$\text{cos} 3x = 4\text{cos}^3 x - 3\text{cos} x$$

$$\Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2} \quad ( )^{-1}$$

$$\boxed{\tan x = -2}$$

$$\rightarrow \text{Precio} = (-55)(-2)$$

$$\text{Precio} = 110$$

∴ **La entrada cuesta S/. 110**