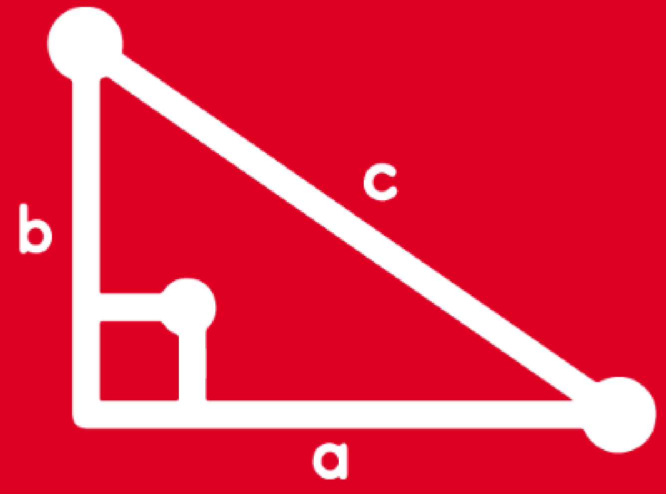
TRIGONOMETRY

Chapter 22

5th
SECONDARY



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

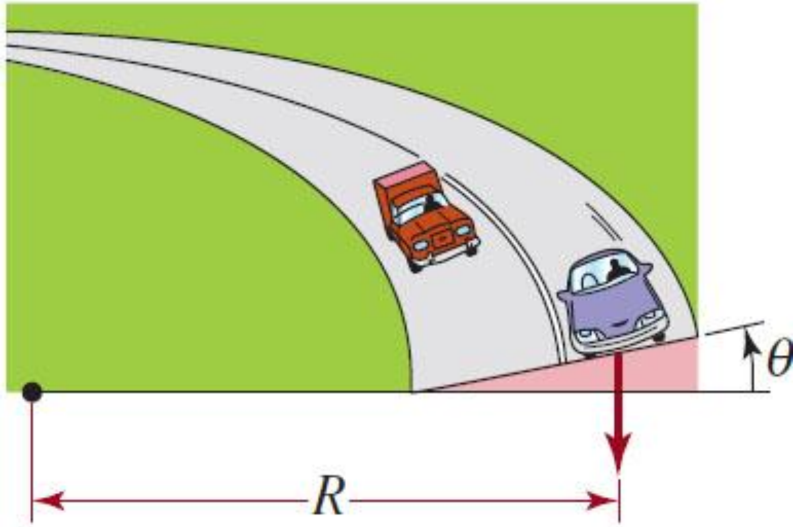
SACO OLIVEROS

HELICOMOTIVACIÓN

En el diseño de las carreteras y los ferrocarriles, las curvas tienen un peralte (inclinación) para producir una fuerza centrípeta que proporcione seguridad. El ángulo θ optimo, se calcula así:

$$\theta = \arctan\left(\frac{V^2}{R.g}\right)$$

Donde **V** es la velocidad promedio del vehículo, **R** es el radio de la curva y **g** la aceleración de la gravedad.



Pregunta:

Calcule el ángulo θ del peralte, para una velocidad promedio de 20 m/s , radio de la curva de 120 m y g = 10 m/s^2

Rpta: 18º30’

HELICOTEORÍA - 1

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICA INVERSAS

Notación: **Se lee:**

arcsen(x) …… arcoseno de x

arccos(x) …… arcocoseno de x

arctan(x) …… arcotangente de x

arccot(x) …… arcocotangente de x

arcsec(x) …… arcosecante de x

arccsc(x) …… arcocosecante de x

PROPIEDAD FUNDAMENTAL

$$\boxed{FT(\theta) = N \iff \theta = arcFT(N)}$$

Ejemplos:

- $\text{Si: } sen\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha = arcsen\left(\dfrac{1}{3}\right)$
- $\text{Si: } \cos\beta = \dfrac{2}{5} \Rightarrow \beta = \arccos\left(\dfrac{2}{5}\right)$
- $\text{Si: } \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$

HELICOTEORÍA - 2

Ejemplos:

- $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{3}{4}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{4}$
- $\beta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow \tan\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$
- $\theta = \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$
- $\phi = \arctan\left(\sqrt{3}\right) \Rightarrow \tan\phi = \sqrt{3} \Rightarrow \phi = \dfrac{\pi}{3}$

Propiedad 1:

$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2} \; ; \; x \in [-1;1]$$

$$\arctan(x) + \operatorname{arccot}(x) = \frac{\pi}{2} \; ; \; x \in R$$

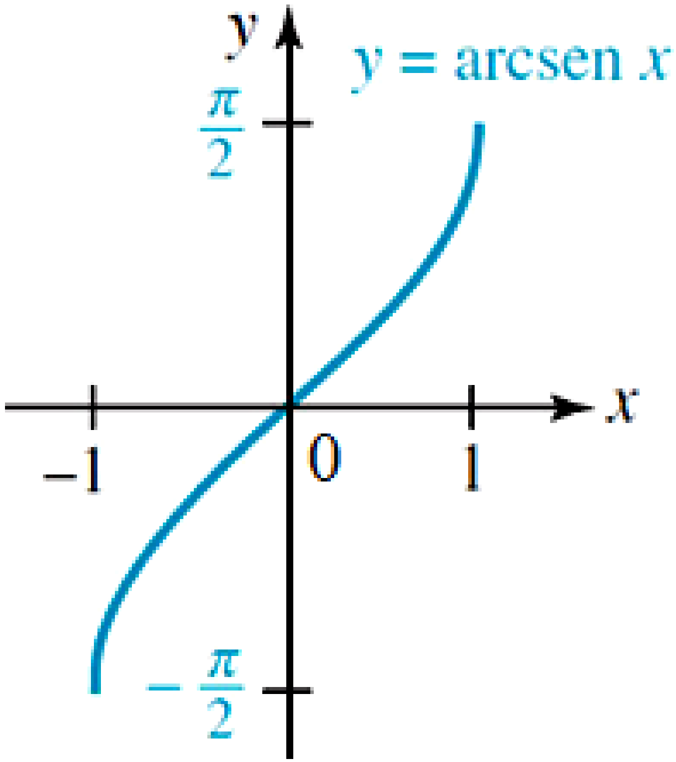
$$\operatorname{arcsec}(x) + \operatorname{arccsc}(x) = \frac{\pi}{2} \; ; \; x \in R - \langle -1;1 \rangle$$

Ejemplos:

- $\arcsin\left(\dfrac{1}{3}\right) + \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
- $\arctan(4) + \operatorname{arccot}(4) = \dfrac{\pi}{2}$

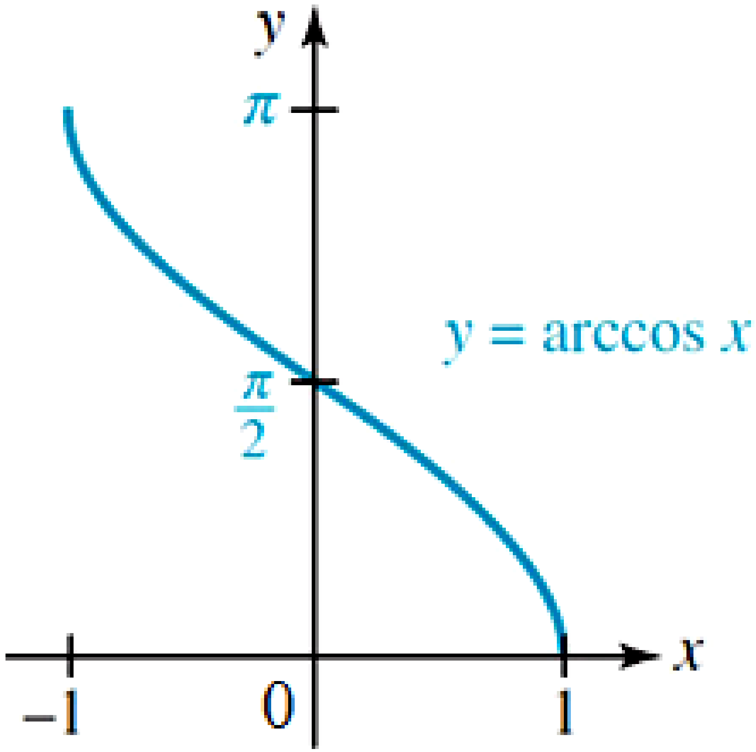
HELICOTEORÍA - 3

1. Función Arcoseno:



- **Dominio:** $-1 \leq x \leq 1$
- **Rango:** $-\frac{\pi}{2} \leq \text{arcsen}(x) \leq \frac{\pi}{2}$

2. Función Arcocoseno:



- **Dominio:** $-1 \leq x \leq 1$
- **Rango:** $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$

PROBLEMA 1

Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda

a. $\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ ....( )

b. $\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ ....( )

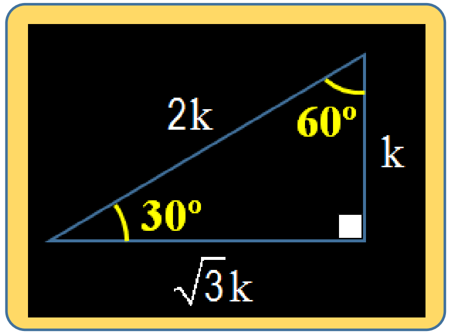
c. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$ ....( )

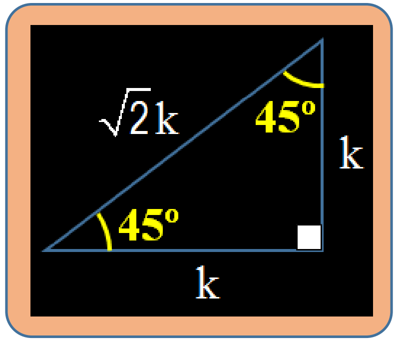
Resolución:

a. $\arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ....(V)

b. $\arcsen\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ ....(V)

c. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$ ....(V)





PROBLEMA 2

Halle el valor de: $M = \arctan(1) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

Resolución:

Piden:

$$M = \underbrace{\arctan(1)}_{\alpha} + \underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)}_{\theta}$$

- $\alpha = \arctan(1) \Rightarrow \tan\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$
- $\theta = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

Luego:

$$M = \alpha + \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \boxed{M = \frac{5\pi}{12}}$$

PROBLEMA 3

Halle el valor de: $T = \operatorname{sen}\left[\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] + \cos[\arctan(1)]$

Resolución:

$$T = \operatorname{sen}\underbrace{\left[\arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]}_{\alpha} + \cos[\underbrace{\arctan(1)}_{\theta}]$$

- $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{4}$

- $\theta = \arctan(1) \Rightarrow \tan\theta = 1$

$$\rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Piden: $T = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$T = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

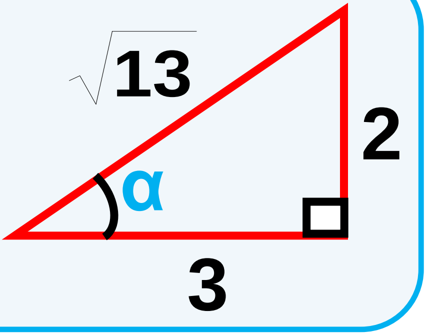
$$\therefore \boxed{T = \sqrt{2}}$$

PROBLEMA 4

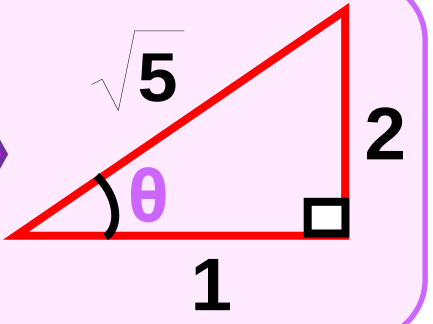
Halle el valor de: $E = \sqrt{13}\ \text{sen}[\arctan(\frac{2}{3})] + \sqrt{5}\cos[\arctan(2)]$

Resolución: $E = \sqrt{13}\ \text{sen}[\underbrace{\arctan(\tfrac{2}{3})}_{\alpha}] + \sqrt{5}\cos[\underbrace{\arctan(2)}_{\theta}]$

$\tan\alpha = \frac{2}{3} = \frac{Co}{Ca}$



$\tan\theta = \frac{2}{1} = \frac{Co}{Ca}$



Reemplazando:

$E = \sqrt{13}\,\text{sen}(\alpha) + \sqrt{5}\cos(\theta)$ $\Rightarrow$ $E = \cancel{\sqrt{13}}\left(\frac{2}{\cancel{\sqrt{13}}}\right) + \cancel{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\right)$

$\therefore \boxed{E = 3}$

PROBLEMA 5

Halle el valor de x de la siguiente igualdad :

$$3\operatorname{arcsen}x + 2\arccos x = \frac{7\pi}{6}$$

Resolución:

$$3\operatorname{arcsen}x + 2\arccos x = \frac{7\pi}{6}$$

$$\operatorname{arcsen}x + 2\underbrace{(\operatorname{arcsen}x + \arccos x)}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{7\pi}{6}$$

$$\operatorname{arcsen}x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsen}x + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \operatorname{arcsen}x = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

PROBLEMA 6

El joven Pedro recibe de su padre la propina diaria de $5tan\left[\frac{\pi}{4}+\operatorname{arccot}(2)\right]$ soles. Por sus malas calificaciones escolares, ahora su propina diaria es de $20sen\left[2\arctan(\frac{1}{3})\right]$ soles. ¿Cuánto es la disminución de su propina diaria?

Resolución:

De la expresión $5tan\left[\frac{\pi}{4}+\operatorname{arccot}(2)\right]$

Hacemos $\alpha=\operatorname{arccot}(2)$ $\rightarrow$ $\cot(\alpha)=2$

$\rightarrow$ $\tan(\alpha)=\frac{1}{2}$

Entonces $5tan\left[\frac{\pi}{4}+\alpha\right]=5\left(\frac{tan\frac{\pi}{4}+tan\alpha}{1-tan\frac{\pi}{4}.tan\alpha}\right)$

$=5\left(\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right)$ $=5(3)$ $=15$ (propina diaria)

Ahora laboramos $20sen\left[2\arctan(\frac{1}{3})\right]$

Hacemos $\beta=arctan\frac{1}{3}$ $\rightarrow$ $tan\alpha=\frac{1}{3}=\frac{CO}{CA}$

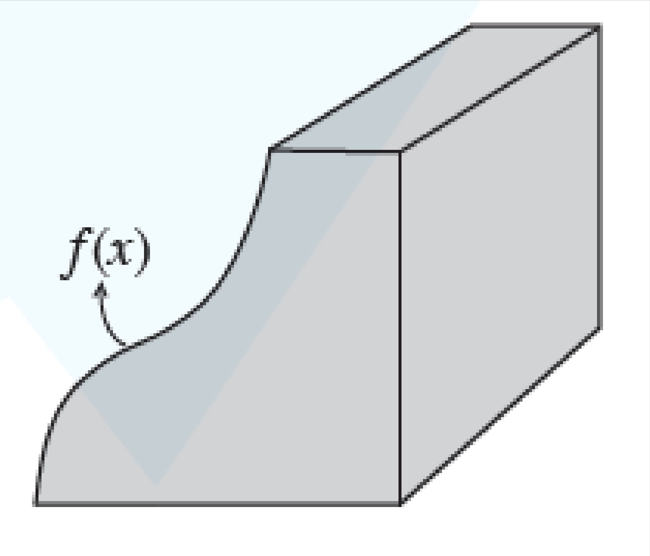
$\rightarrow$ $H=\sqrt{10}$

$20sen2\beta=20(2sen\beta\cdot cos\beta)=20\left(2\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

$=20\left(\frac{3}{5}\right)$ $=12$ (propina por sus malas calificaciones)

$Luego=15-12=3$ $\therefore$ Su propina disminuye 3 soles

PROBLEMA 7

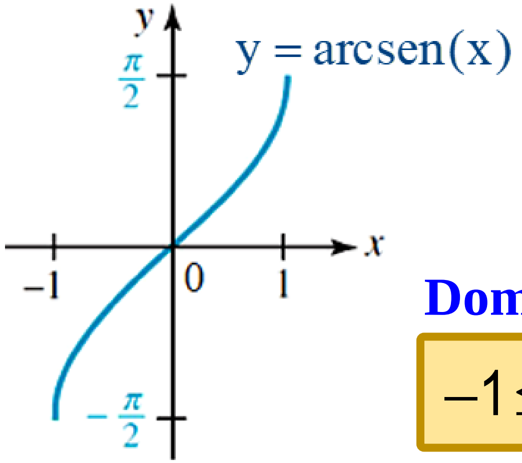


Un arqueólogo descubrió un santuario de una determinada cultura, tal como se muestra la figura.

Para lo cual le pide a un matemático hallar el dominio de la función que representa la pared lateral : ***f(x) = arcsen(x+2)***

¿Cuál es el dominio de la función?

Resolución:



Dominio:

$-1 \leq x \leq 1$

$$\textit{El dominio de } f(x) = arcsen(x+2); \textit{ cumple}:$$

$$-1 \leq x + 2 \leq 1 \quad (-2)$$

$$-3 \leq x \leq -1$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Dom } f = [-3; -1]}$