MATHEMATICAL REASONING

Chapter 12

5th
SECONDARY

SERIES

SACO OLIVEROS

Se denomina "series numéricas" a la adición indicada de los términos de una sucesión numérica.

EJEMPLO

SUCESIÓN:

$2; 4; 6; 8 ;...;T_n$

SERIE:

$2 + 4 + 6 + 8 + ... +T_n$

TIPOS DE SERIES

SERIE ARITMÉTICA

$$\sum_{k=1}^{k=n} t_k = t_1 \underbrace{+}_{+r} t_2 \underbrace{+}_{+r} t_3 + \cdots + t_n$$

$$S = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right) n$$

EJEMPLO:

CALCULE S = 2 + 4 + 6 + 8 + … [40 TÉRMINOS]

$$S = \left(\frac{2+80}{2}\right) 40 = 1640$$

TIPOS DE SERIES

SERIE GEOMÉTRICA

$$S = \underbrace{t_1 + t_2}_{xq} + t_3 + \cdots + t_n$$

xq xq

$$s = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

EJEMPLO:

CALCULE S = 3 + 6 + 12 + 24 + ... [40 TÉRMINOS]

x 2 x 2 x 2

$$s = \frac{3(2^{40} - 1)}{2 - 1} = 3(2^{40} - 1)$$

TIPOS DE SERIES

SERIE GEOMÉTRICA INFINITA:

$$S = \underbrace{t_1 + t_2}_{\times q} + \underbrace{\;t_3}_{\times q} + \cdots$$

$$s = \frac{T_1}{1-q}$$

$0 < |q| < 1$

EJEMPLO:

CALCULE S = 24 + 12 + 6 + 3 + ...

x 1/2 x 1/2 x 1/2

$$s = \frac{24}{1-\frac{1}{2}} = 48$$

TIPOS DE SERIES

DE LOS PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

$$\sum_{k=1}^{k=n} (k) = 1+2+3+\ldots+n = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

EJEMPLO:

CALCULE S=1+2+3+4+… (40 TÉRMINOS)

$$S = \frac{40(40+1)}{2} = 820$$

DE LOS PRIMEROS NÚMEROS PARES

$$\sum_{k=1}^{k=n} (2k) = 2+4+6+8+\ldots+(2n) = \boxed{n(n+1)}$$

EJEMPLO:

CALCULE S=2+4+6+8+… (40 TÉRMINOS)

S= 40(41) =1640

TIPOS DE SERIES

DE LOS PRIMEROS NÚMEROS IMPARES

$$\sum_{k=1}^{k=n}(2K-1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = \boxed{n^2}$$

EJEMPLO:

CALCULE S= $1+3+5+7+\cdots$ (40 TÉRMINOS)

S= 40^2 = 1600

DE LOS CUADRADOS DE LOS PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

$$\sum_{k=1}^{k=n}(k^2) = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

EJEMPLO:

CALCULE S= $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$

S= $\frac{10(11)(21)}{6}$ = 385

TIPOS DE SERIES

DE LOS CUBOS DE LOS PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

$$\sum_{k=1}^{k=n}(k^3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \boxed{\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

EJEMPLO:

CALCULE $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3$

$$S = \left[\frac{10(11)}{2}\right]^2 = 3025$$

PROBLEMA 1

Halle el valor de A.

$$A = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 40$$

RESOLUCIÓN

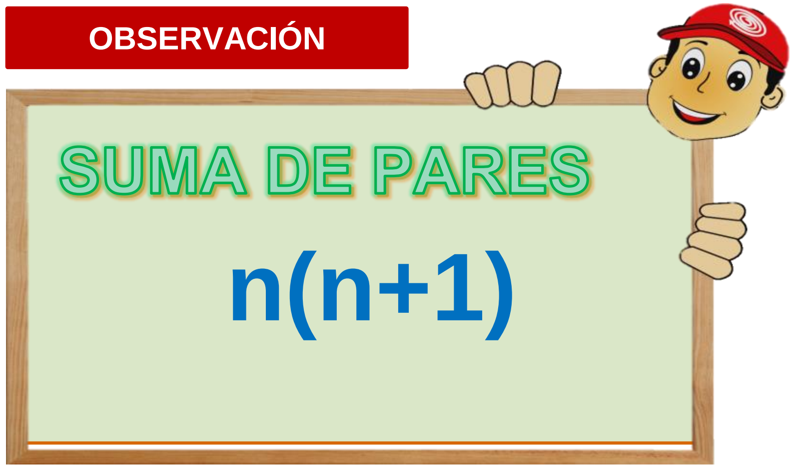
$$A = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + \underbrace{40}_{2n}$$

$$2n = 40$$

$$n = 20$$

$$A = 20(20 + 21)$$

OBSERVACIÓN



RESPUESTA: 420

PROBLEMA 2

Halle el valor de Z.

$$Z = \underbrace{4 + 7 + 10 + 13 + \cdots}_{40 sumandos}$$

RESOLUCIÓN

$$\cancel{1},\ 4\ ,7\ ,10\ ,13\ ,\ldots$$

$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$

$$t_n = 3.n + 1$$

$$t_{40} = 3(40) + 1$$

$$t_{40} = 121$$

OBSERVACIÓN

SERIE ARITMÉTICA

$$\mathbf{S} = \left(\frac{t_1 + t_n}{2}\right)\mathbf{n}$$

$$A = \left(\frac{t_1 + t_{40}}{2}\right)40 = \left(\frac{4 + 121}{2}\right)40$$

$$\boxed{\text{RESPUESTA: 2500}}$$

PROBLEMA 3

Halle el valor de B.

$$B = \underbrace{2 + 12 + 36 + 80 + 150 + \cdots}_{\text{20 términos}}$$

RESOLUCIÓN

Dando forma convenientemente:

$$B = (1^2+1^3) + (2^2+2^3) + (3^2+3^3) \ldots + (20^2+20^3)$$

$$B = (1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2) + (1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3)$$

$$B = \frac{20(20+1)(2(20)+1)}{6} + \left[\frac{20(20+1)}{2}\right]^2 = 2\,870 + 44\,110 = 46\,980$$

Suma de cuadrados:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Suma de cubos:

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

RESPUESTA: 46 980

PROBLEMA 4

Efectúe

$$\sum_{k=1}^{k=20}(5k-1)$$

OBSERVACIÓN

SERIE ARITMÉTICA

$$S=\left(\frac{t_1+t_n}{2}\right)n$$

RESOLUCIÓN

$$\sum_{k=1}^{k=20} 5k-1 = (5(1)-1)+(5(2)-1)+(5(3)-1)+\ \dots+(5(20)-1)$$

$$4\ +9+14+\ \dots+99$$

$$\left(\frac{4+99}{2}\right)20$$

RESPUESTA: 1030

PROBLEMA 5

Halle el valor de S.

$$S = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

RESOLUCIÓN

$$S = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

$\times\frac{1}{5}$ $\times\frac{1}{5}$ $\times\frac{1}{5}$

OBSERVACIÓN

SERIE GEOMÉTRICA INFINITA:

$$s = \frac{T_1}{1-q}$$

$$s = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$$

RESPUESTA: $\frac{1}{4}$

PROBLEMA 6

El responsable de logística del colegio Saco Oliveros, determina que la cantidad de carpetas en una sede está dada por la siguiente expresión:

$$N.^\circ\ de\ carpetas = \sum_{k=1}^{10}(2k^3 - 3k^2 + k + 6)$$

Indique la cantidad de carpetas de dicha sede.

RESOLUCIÓN

$$\sum_{k=1}^{10}(2k^3 - 3k^2 + k + 6)$$

$$\sum_{k=1}^{10}2k^3 - \sum_{k=1}^{10}3k^2 + \sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}6$$

$$2\sum_{k=1}^{10}k^3 - 3\sum_{k=1}^{10}k^2 + \sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}6$$

$$2\left(\frac{10(11)}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{10(11)(21)}{6}\right) + \frac{10(11)}{2} + 6(10)$$

RESPUESTA: 7 320

PROBLEMA 7

La masa de un péndulo recorre 24 cm en su primera oscilación. En cada una de las siguientes oscilaciones disminuye $\frac{3}{8}$ de la distancia recorrida en la oscilación anterior. Determine el espacio total recorrido por la masa hasta el momento de detenerse.

RESOLUCIÓN

$$s = 24 + \frac{5}{8}(24) + \frac{5}{8}\left[\frac{5}{8}(24)\right] + \cdots$$

$\times\frac{5}{8}$ $\times\frac{5}{8}$

$$s = \frac{24}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{\frac{24}{1}}{\frac{3}{8}}$$

RESPUESTA: 64