



TRIGONOMETRY

Chapter 23

4th
SECONDARY

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS II



 **SACO OLIVEROS**

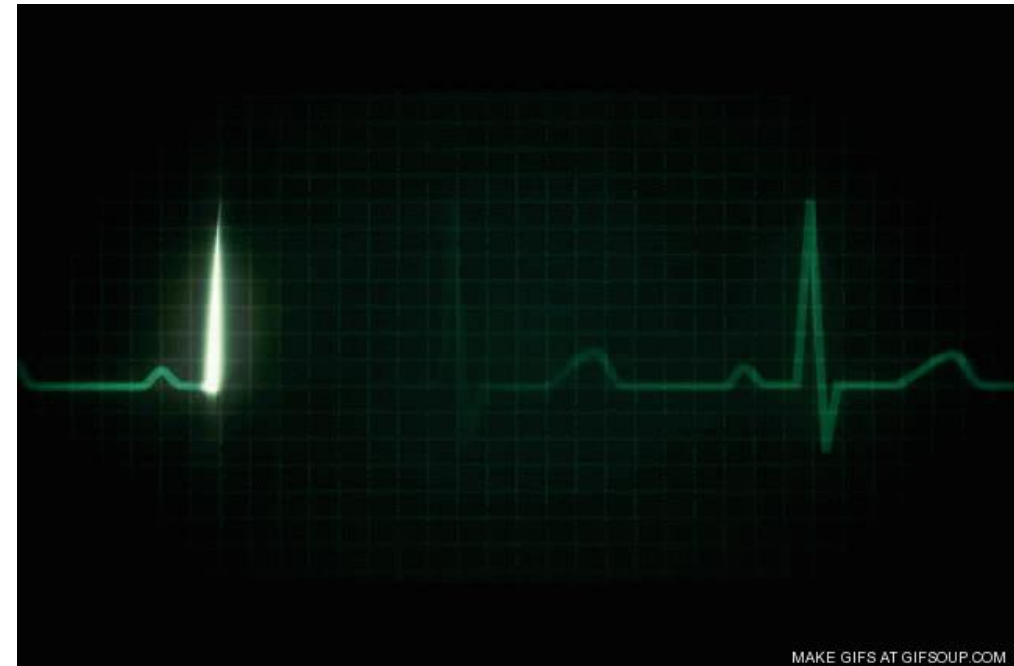
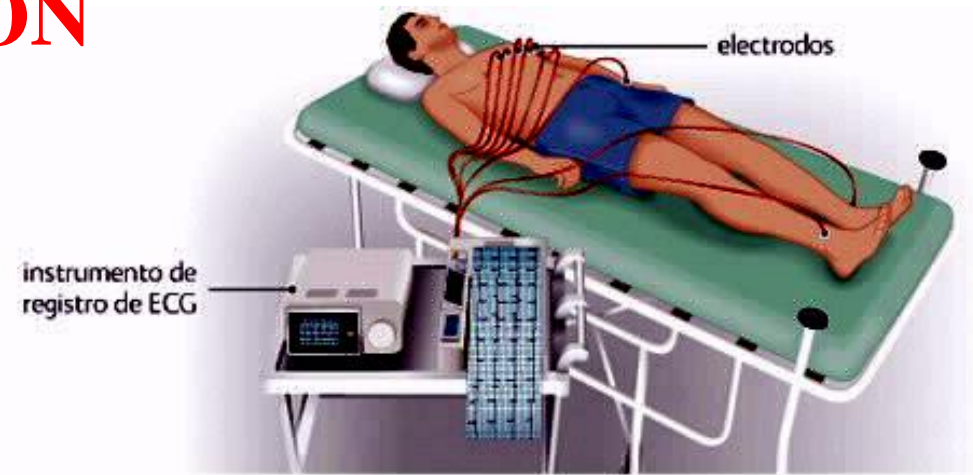
HELICOMOTIVACIÓN

LA TRIGONOMETRÍA DEL CORAZÓN

El **electrocardiograma** (ECG) es la representación gráfica de la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo, para ello se colocan en diversas partes del cuerpo los **electrodos** para obtener la información.

El aparato que genera el ECG, usa a las funciones trigonométricas seno y coseno modificando **las amplitudes** y **los periodos**.

Se recomienda a personas mayores de 40 años realizarse un examen ECG anualmente.



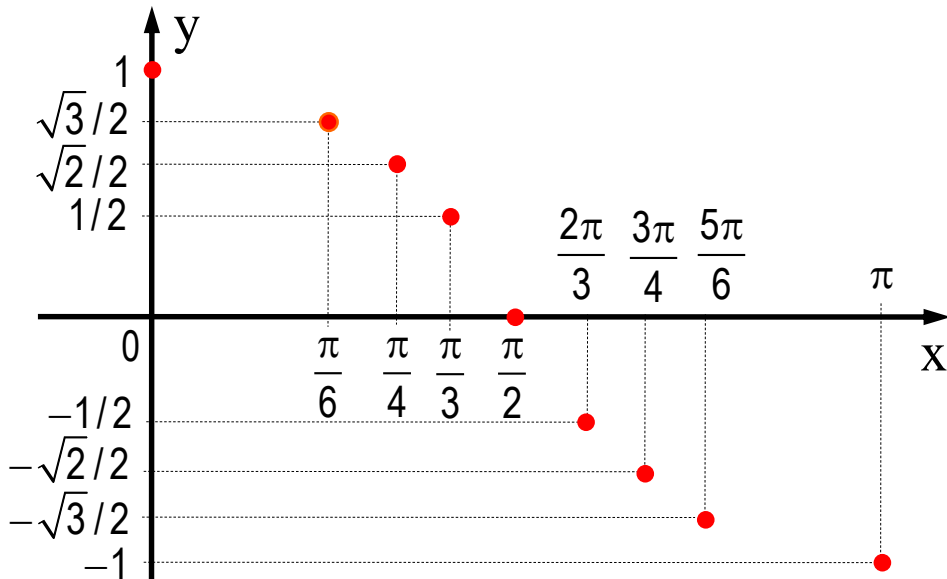


FUNCION COSENO:

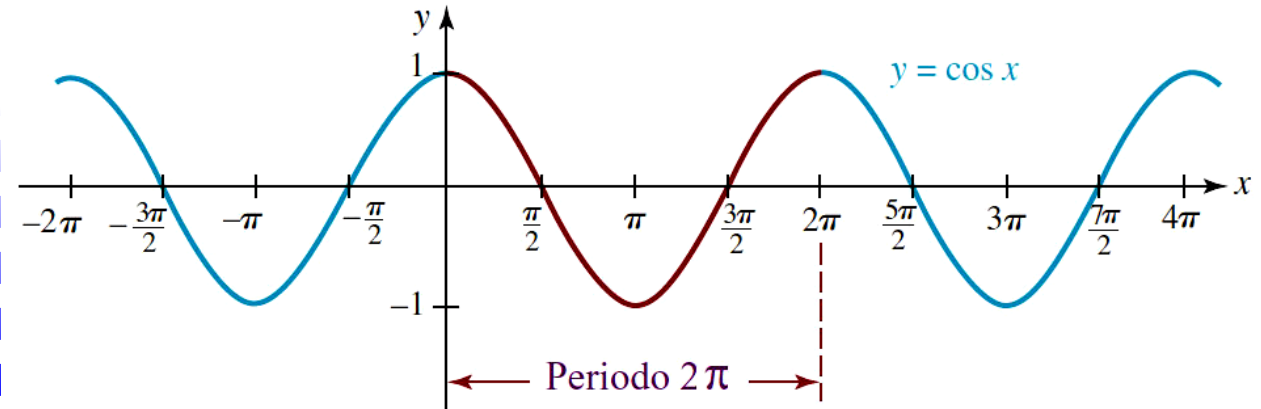
$$F = \{(x; y) / y = \cos x ; x \in \mathbb{R}\}$$

Tabulando algunos valores para x e y :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



Tabulando mas valores y uniendo con una curva dichos puntos, tenemos :



Dominio : $\text{Dom } F = \mathbb{R} ; x \in \mathbb{R}$

Rango : $\text{Ran } F = [-1; 1] \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$

Periodo : $T = 2\pi$

Es una función par : $\cos(-x) = \cos x$

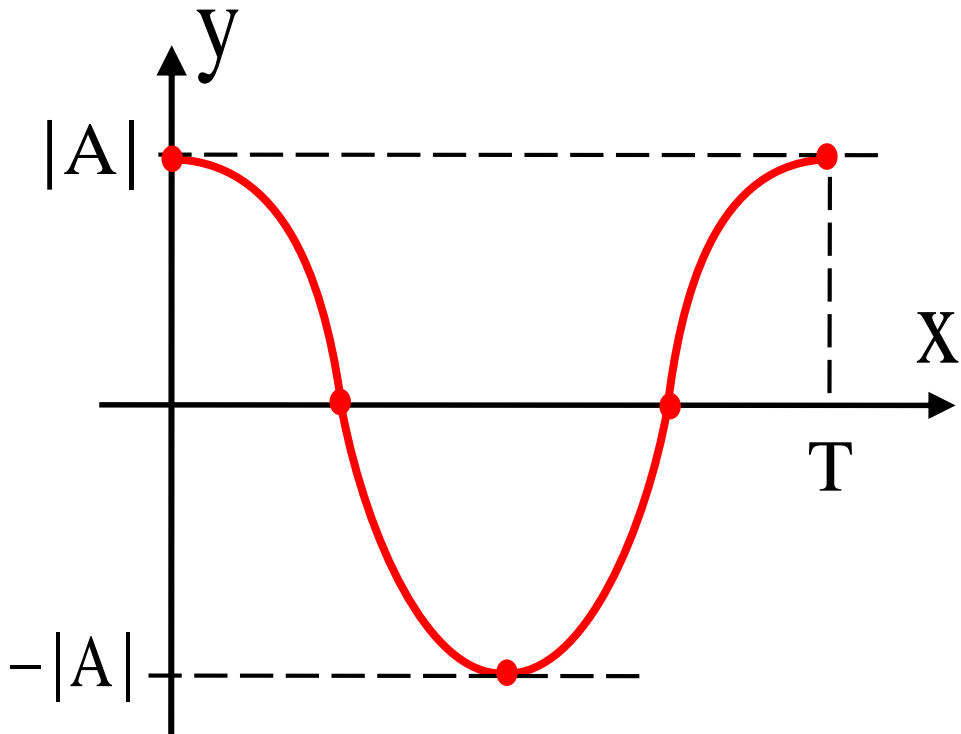
Gráfica simétrica respecto al eje de ordenadas.



OBSERVACION:

Sea la función : $y = A \cdot \cos Bx$

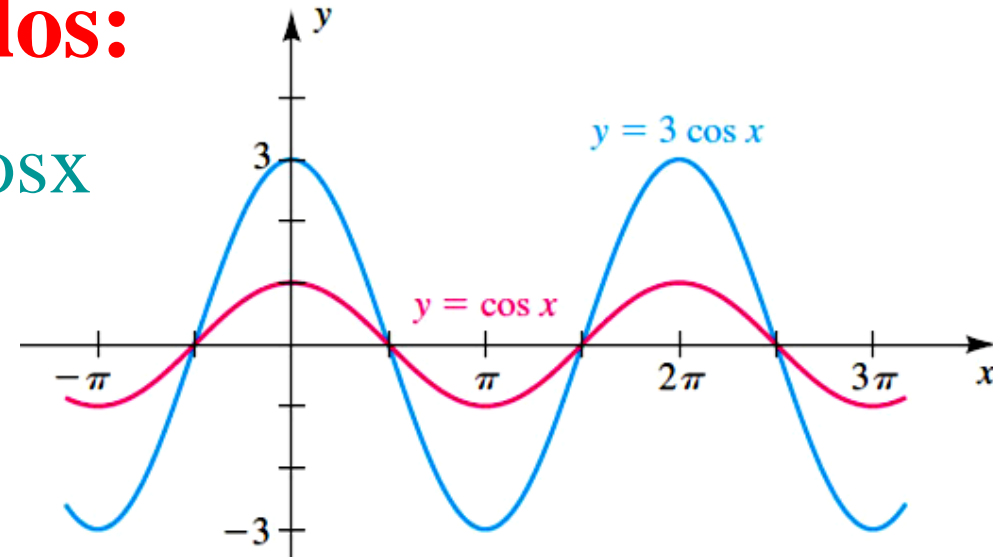
➡ Amplitud : $|A|$; Período : $T = \frac{2\pi}{|B|}$



Ejemplos:

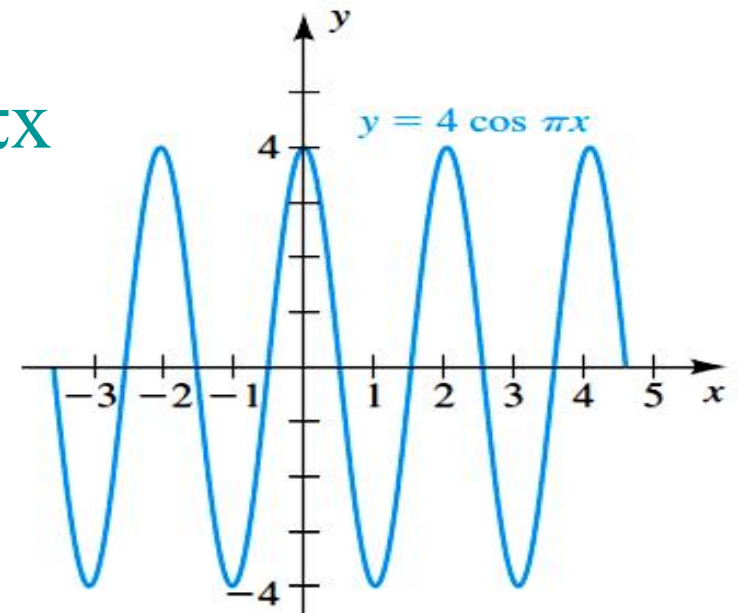
• $y = 3 \cos x$

$$\begin{cases} |A| = 3 \\ T = 2\pi \end{cases}$$



• $y = 4 \cos \pi x$

$$\begin{cases} |A| = 4 \\ T = 2 \end{cases}$$





PROBLEMA 1

Halle el rango de la función

$$f(x) = 2\cos x - 5$$

Resolución:

Recordar:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

Sabemos:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \dots \textcolor{red}{x}(2)$$

$$-2 \leq 2\cos x \leq 2 \quad \dots \textcolor{blue}{-}(5)$$

$$-7 \leq 2\cos x - 5 \leq -3$$

$$\therefore \textcolor{black}{Ran}f = [-7; -3]$$



PROBLEMA 2

Halle el rango de la función

$$g(x) = \frac{5\cos 3x - 2}{3}$$

Resolución:

Tener en cuenta:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos 3x \leq 1$$

Sabemos:

$$-1 \leq \cos 3x \leq 1 \quad \dots x(5)$$

$$-5 \leq 5\cos 3x \leq 5 \quad \dots -(2)$$

$$-7 \leq 5\cos 3x - 2 \leq 3 \quad \dots \div (3)$$

$$-\frac{7}{3} \leq \frac{5\cos 3x - 2}{3} \leq 1$$

\therefore

$$\text{Rang} = \left[-\frac{7}{3}; 1 \right]$$



PROBLEMA 3

Halle el rango de la función
 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x + 3$

Resolución:

Recordar:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Tenemos:

$$f(x) = \underbrace{\cos^2 x - \sin^2 x}_{\cos 2x} + 3$$

$$f(x) = \cos 2x + 3$$

$$\text{Sabemos: } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \dots + (3)$$

$$2 \leq \cos 2x + 3 \leq 4$$

$$\therefore \text{Ran} f = [2; 4]$$



PROBLEMA 4

Calcule $T_1 + T_2$ siendo T_1 y T_2 periodos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente, donde:

$$f(x) = 3\cos 3x$$

$$g(x) = 5\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Resolución:

Recordar:

$$T = \frac{2\pi}{|B|}$$

Del dato:

$$T_1 = \frac{2\pi}{3} \quad y \quad T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

Calculamos:

$$T_1 + T_2 = \frac{2\pi}{3} + 4\pi$$

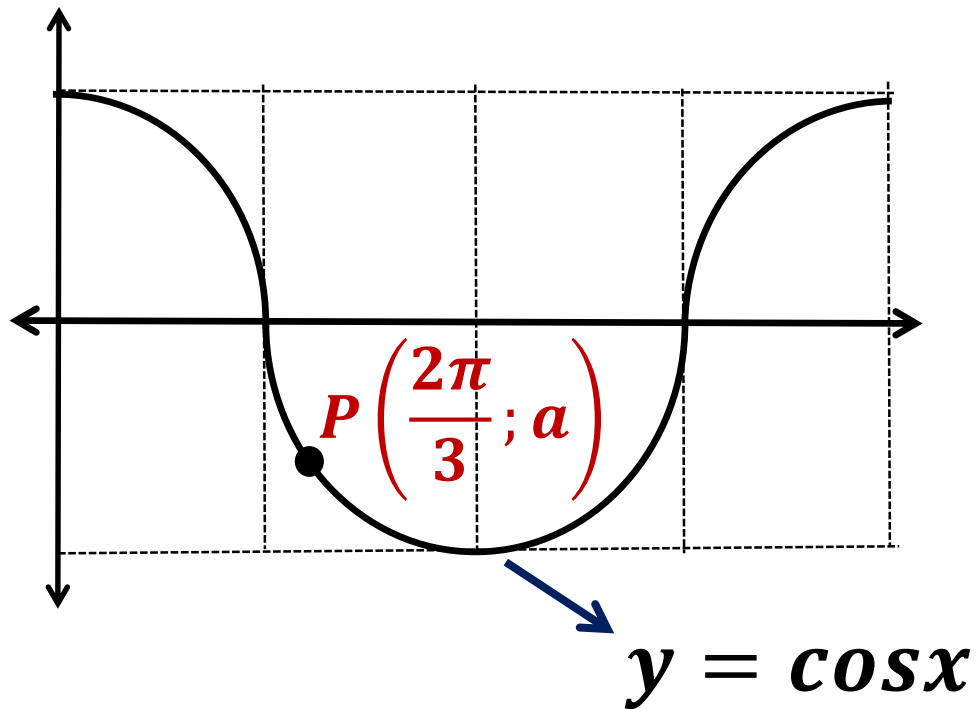
\therefore

$$T_1 + T_2 = \frac{14\pi}{3}$$



PROBLEMA 5

Del gráfico, halle el valor de a .



Resolución:

Del gráfico tenemos:

$$y = \cos x$$

$$a = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos 120^\circ$$

$$a = -\cos 60^\circ$$

\therefore

$$a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



PROBLEMA 6

Las ganancias de una empresa del rubro Metal-Mecánica están definidas por $f(x)=m.\text{sen}x+n$, donde m y n son los costos fijos y variables, además el rango de la función pertenece al intervalo $[-2; 4]$.

Calcule el valor de $A=2n+m$.

Resolución:

$$-1 \leq \text{sen}x \leq 1 \quad \dots \text{por}(m)$$

$$-m \leq m.\text{sen}x \leq m \quad \dots \text{mas}(n)$$

$$-m + n \leq m.\text{sen}x + n \leq m + n$$

$$-2 \leq f(x) \leq 4$$

$$-m + n = 2 \dots \text{(I)} \quad m + n = 4 \dots \text{(II)}$$

$$m = 1 \quad ; \quad n = 3$$

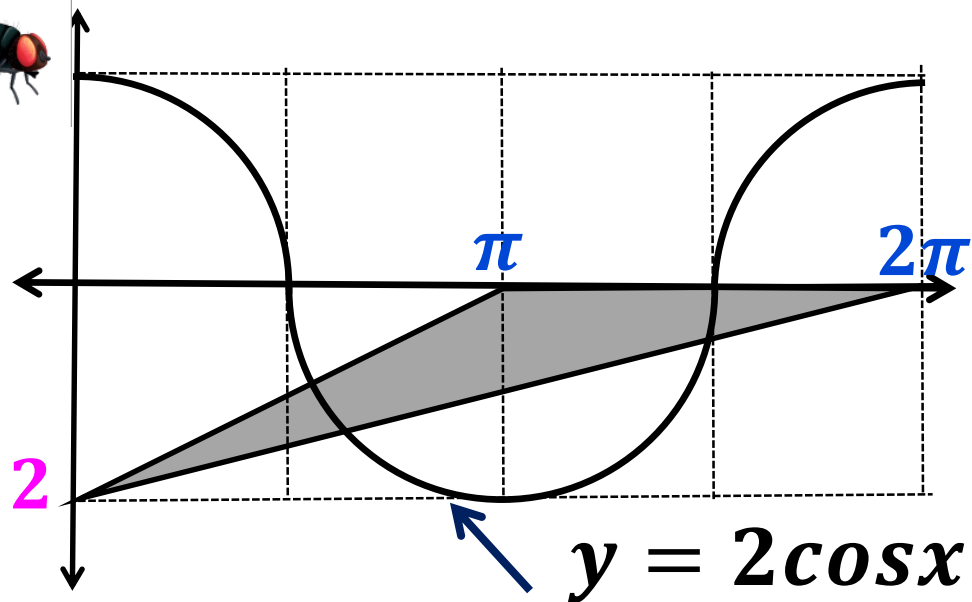
$$A = 2n+m = 2(3)+(1)$$

$$\therefore A = 7$$



PROBLEMA 7

Se logra modelar el movimiento que realiza una mosca, según la gráfica mostrada. Determine el área de la figura sombreada.



Resolución:

Sea la función: $f(x) = y = 2\cos 1x$

Periodo de la función:

$$\rightarrow T = \frac{2\pi}{B} \rightarrow T = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

Amplitud: $A = 2$

Calculamos el área: $S = \frac{\pi \cdot (2)^2}{2}$

$$\therefore S = \pi u^2$$