



TRIGONOMETRY

Chapter 23

3rd
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS
DEL ÁNGULO DOBLE



 **SACO OLIVEROS**

HELICO-MOTIVACIÓN





IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Se obtienen a partir de las identidades del ángulo compuesto cuando $\beta = \alpha$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \text{sen}\beta$$

$$\text{sen}(\alpha + \alpha) = \text{sen}\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \text{sen}\alpha$$

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha \cos\alpha$$



$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Además utilizando identidad pitagórica :

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$





1) Siendo α un ángulo agudo, tal que $\tan \alpha = \frac{3}{5}$, calcule $\text{sen} 2\alpha$.

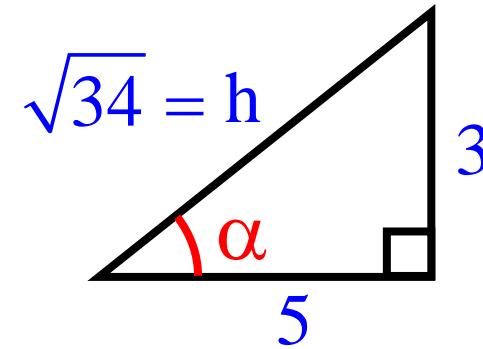
Resolución

Recordar :

$$\text{sen} 2\alpha = 2 \text{ sen} \alpha \cos \alpha$$

Dato:

$$\tan \alpha = \frac{3}{5} = \frac{\text{CO}}{\text{CA}}$$



Luego: $\text{sen} 2\alpha = 2 \text{ sen} \alpha \cos \alpha$

$$\Rightarrow \text{sen} 2\alpha = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{30}{34}$$

$$\therefore \text{sen} 2\alpha = \frac{15}{17}$$





HELICO-PRACTICE

2) Siendo β un ángulo agudo, tal que $\tan\beta = \frac{1}{5}$, calcule $\cos 2\beta$.

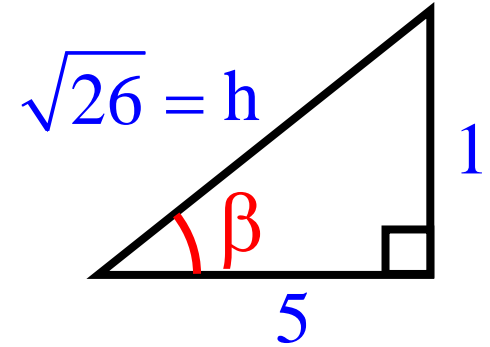
Resolución

Recordar :

$$\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$$

Dato:

$$\tan\beta = \frac{1}{5} = \frac{CO}{CA}$$



Luego: $\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{24}{26}$$

$$\therefore \cos 2\beta = \frac{12}{13}$$





HELICO-PRACTICE

3) Si θ es un ángulo agudo, tal que $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$,
calcule $\cos 2\theta$.

Recordar :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$



Resolución

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2 - 1$$

$$\cos 2\theta = 2 \left(\frac{4}{5} \right) - 1$$

$$\cos 2\theta = \frac{8}{5} - 1$$

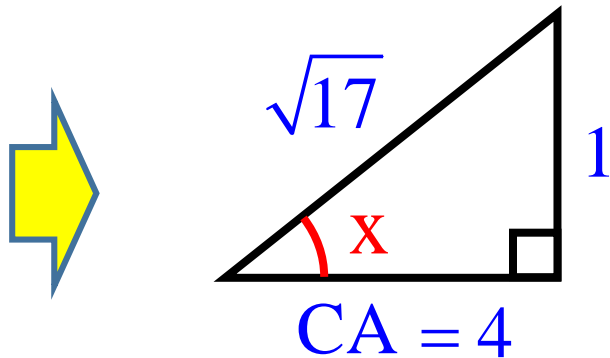
$$\therefore \cos 2\theta = \frac{3}{5}$$



4) Siendo x un ángulo agudo y $\csc x = \sqrt{17}$, calcule $\tan 2x$.

Resolución

$$\csc x = \frac{\sqrt{17}}{1} = \frac{H}{CO}$$



❖ Obtenemos: $\tan x = \frac{1}{4}$

❖ Luego:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \frac{2 \left(\frac{1}{4} \right)}{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^2}$$

$$\tan 2x = \frac{\frac{2}{4}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{16}{30}$$

$$\therefore \tan 2x = \frac{8}{15}$$



5) Calcule $M + N$ si :

$$M = 2 \operatorname{sen} 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$N = \cos^2 18^\circ 30' - \operatorname{sen}^2 18^\circ 30'$$

Resolución

$$M = 2 \operatorname{sen} 15^\circ \cos 15^\circ$$

Recordar :

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$M = \operatorname{sen} 2(15^\circ)$$

$$M = \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$M = \frac{1}{2}$$

$$N = \cos^2 18^\circ 30' - \operatorname{sen}^2 18^\circ 30'$$

Recordar :

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$N = \cos 2(18^\circ 30')$$

$$N = \cos 37^\circ$$

$$N = \frac{4}{5}$$

❖ Luego:

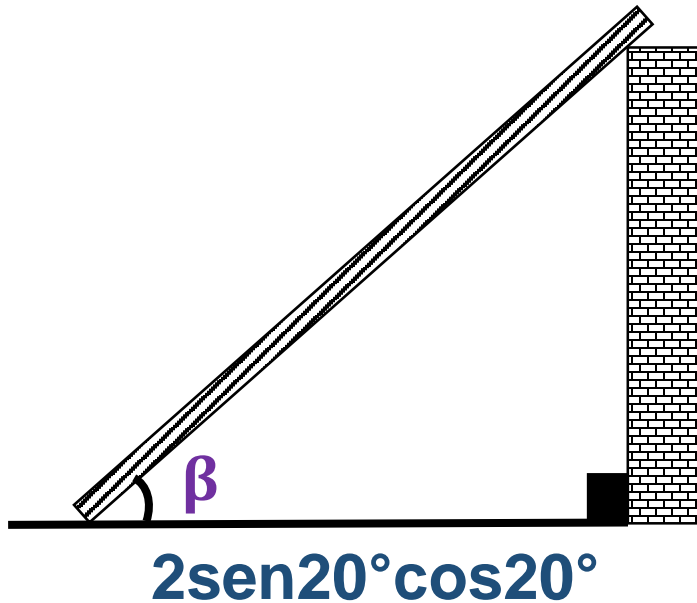
$$M + N = \frac{1}{2} + \frac{4}{5}$$

$$\therefore M + N = \frac{13}{10}$$



HELICO-PRACTICE

- 6) Una barra metálica se encuentra apoyada sobre una pared, tal como se muestra en la figura. Calcule $\tan\beta$.



$$\text{cos}^2 25^\circ - \text{sen}^2 25^\circ$$

Resolución:

$$\tan\beta = \frac{\text{cos}^2 25^\circ - \text{sen}^2 25^\circ}{2\text{sen}20^\circ.\text{cos}20^\circ}$$

$$\tan\beta = \frac{\text{cos}2(25^\circ)}{\text{sen}2(20^\circ)}$$

$$\tan\beta = \frac{\text{cos}50^\circ}{\text{sen}40^\circ} = \frac{\cancel{\text{cos}50^\circ}}{\cancel{\text{cos}50^\circ}}$$

$$\therefore \tan\beta = 1$$





7) En una clase de Trigonometría el profesor Jorge preguntó sobre el resultado a la siguiente expresión:

$$F = 4\text{sen}10^\circ \cdot \cos10^\circ \cdot \cos20^\circ \cdot \cos40^\circ$$

A lo cual cuatro alumnos levantaron la mano para indicar la respuesta, las cuales fueron:

- Andrea: $\cos 40^\circ$
- Beatriz: $2 \cos 40^\circ$
- Carlos: $\cos 80^\circ$
- Daniel: $\cos 80^\circ / 2$

¿Qué alumno acertó en la respuesta?

Resolución:

$$F = 4\text{sen}10^\circ \cdot \cos10^\circ \cdot \cos20^\circ \cdot \cos40^\circ$$



$$2 \cdot 2 \text{sen}10^\circ \cdot \cos10^\circ \cdot \cos20^\circ \cdot \cos40^\circ$$



$$2 \text{sen}20^\circ \cdot \cos20^\circ \cdot \cos40^\circ$$



$$2 F = 2 \text{sen}40^\circ \cdot \cos40^\circ$$



$$F = \frac{\text{sen}80^\circ}{2}$$



Ningún
alumno
acertó

