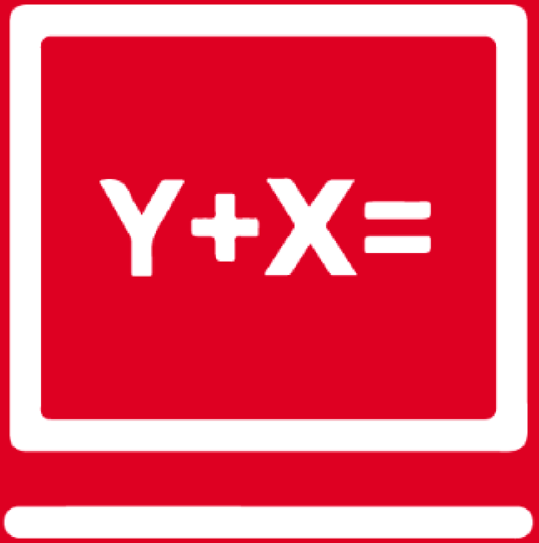
ARITHMETIC

2023

Chapter 17
Sesion 1

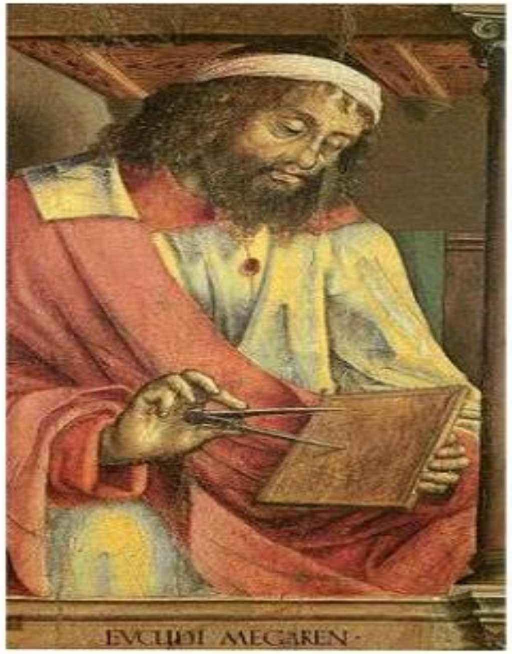


1st
SECONDARY

Maximo Común Divisor

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY



Euclides fue un matemático y geómetra griego (ca. 325 - ca. 265 a. C.), a quien se le conoce como "El Padre de la Geometría".

Su vida es poco conocida, salvo que vivió en Alejandría (actualmente Egipto) durante el reinado de Ptolomeo I. Ciertos autores árabes afirman que Euclides era hijo de Naucrates y se barajan tres hipótesis:

-Euclides fue un personaje matemático histórico que escribió *Los elementos* y otras obras atribuidas a él.

-Euclides fue el líder de un equipo de matemáticos que trabajaba en Alejandría.

-Las obras completas de Euclides fueron escritas por un equipo de matemáticos de Alejandría quienes tomaron el nombre Euclides.

El **algoritmo de Euclides** es un método antiguo y eficaz para calcular el máximo común divisor (**MCD**). El **algoritmo de Euclides** es una ligera modificación que permite además expresar al máximo común divisor como una combinación lineal. Este algoritmo tiene aplicaciones en diversas áreas como álgebra, teoría de números y ciencias de la computación entre otras. Con unas ligeras modificaciones suele ser utilizado en computadoras electrónicas debido a su gran eficiencia.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.)

El MCD es el mayor de los divisores comunes de dos o más números.

Dados los números 24 y 42

- Divisores de 24 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 y 24
- Divisores de 42 : 1 ; 2 ; 3 ; 6 ; 7 ; 14 ; 21 y 42
- Divisores comunes : 1 ; 2 ; 3 y 6
- Mayor Divisor Común = 6 (MCD)

- Divisores del "MCD" → 1; 2; 3 y 6

Propiedad :

Cantidad de Divisores Comunes = Cantidad de Divisores de su M.C.D.

METODOS DE CÁLCULO

A) Descomposición Simultánea

Calcule el MCD de 56; 140 y 168

$$\begin{array}{ccccc|c} 56 & - & 140 & - & 168 & 2 \\ 28 & - & 70 & - & 84 & 2 \\ 14 & - & 35 & - & 42 & 7 \\ 2 & - & 5 & - & 6 & \end{array}$$

$$\underbrace{2 - 5 - 6}_{\text{PESI}}$$

➢ $MCD(56; 140; 168) = 28$

B) Descomposición Canónica

Se escogen los factores comunes, con sus menores exponentes.

Calcule el MCD (A , B) , si :

$A = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$

$B = 2^2 \times 3^5 \times 7^2$

$MCD(A , B) = 2^2 \times 3^2$

➢ $MCD(A , B) = 36$

C) Algoritmo de Euclides (Divisiones Sucesivas)

(Sólo para calcular el MCD de 2 números)

Ejemplo : Calcule el MCD de 750 y 270, por el algoritmo de Euclides e indique los cocientes y residuos sucesivos.

Cocientes sucesivos

q		2	1	3	2	
	750	270	210	60	30	MCD
r		210	60	30	0	

Residuos sucesivos

$$\begin{array}{r|l} 750 & 270 \\ \hline 540 & 2 \\ 210 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 270 & 210 \\ \hline 210 & 1 \\ 60 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 60 \\ \hline 180 & 3 \\ 30 & \end{array}$$

- Cocientes sucesivos :

  2 ; 1 ; 3 ; 2

- Residuos Sucesivos :

  210 ; 60 ; 30 ; 0

PROPIEDADES

Dados A y B $\in \mathbb{Z}^+$ se cumple que :

1

※ Si $A = \overset{\circ}{B}$ (múltiplo de B)

$$MCD(A, B) = B$$

※ Si A y B son PESI

$$MCD(A, B) = 1$$

※ Si $MCD(A, B) = d$,

$$A = d.\alpha \; ; \; B = d.\beta$$

Donde α y β son PESI

2 Dados A, B, C y D $\in \mathbb{Z}^+$

$MCD(A, B, C, D) =$

$$MCD[MCD(A, C), MCD(B, D)] =$$

$$MCD[MCD(A, B), MCD(C, D)]$$

3 Si $MCD(A, B, C) = d$, entonces

$$MCD(An, Bn, Cn) = dn$$

$$MCD\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{d}{n}$$

; $n \in \mathbb{Z}^+$

HELICO PRACTICE

1

Si $A = MCD(60;\ 48;\ 40)$
$B = MCD(70;\ 28;\ 42)$
Calcule $A + B$.

RESOLUTION

$$\begin{array}{c|c} 60 - 48 - 40 & 4 \\ \underbrace{15 - 12 - 10}_{\text{PESI}} & \end{array}$$

$$MCD(60;\ 48;\ 40) = 4$$

$\boxed{A = 4}$

$$\begin{array}{c|c} 70 - 28 - 42 & 2 \\ 35 - 14 - 21 & 7 \\ \underbrace{5 - 2 - 3}_{\text{PESI}} & \end{array} \quad \left.\begin{matrix} 2 \\ 7 \end{matrix}\right\} 14$$

$$MCD(70;\ 28;\ 42) = 14$$

$\boxed{B = 14}$

➢ $A + B = 4 + 14 = 18$

RPTA : 18

HELICO PRACTICE

2

Halle el mayor de los divisores comunes que tienen los números 210 y 330.

RESOLUTION

- Mayor de los divisores comunes → M.C.D.

- Descomposición Simultánea :

$$\begin{array}{rcl|l} \underbrace{\begin{array}{rcl} 210 & - & 330 \\ 21 & - & 33 \\ 7 & - & 11 \end{array}}_{\text{PESI}} & & & \left.\begin{array}{l} 10 \\ 3 \\ \end{array}\right\} 30 \end{array}$$

- Entonces :

MCD(210 ; 330) = 30

RPTA :	30

HELICO PRACTICE

3

Si $\mathbf{A} = 2^2 \times 3 \times 5$ y
$\mathbf{B} = 2 \times 3^2$,
Calcule $\mathbf{MCD(A, B)}$.

RESOLUTION

- Descomposición Canónica :

$$\mathbf{A} = 2^2 \times 3^1 \times 5$$

$$\mathbf{B} = 2^1 \times 3^2$$

$$\mathbf{MCD(A, B)} = 2^1 \times 3^1 = 6$$

RPTA :	6

HELICO PRACTICE

4

Si el MCD de $10k$ y $15k$
Es 30.Calcule $3k$.

RESOLUTION

MCD(10k ; 15k) = 30 (Dato)

$$\left.\begin{array}{cc|c} 10k & 15k & k \\ 10 & 15 & 5 \\ \underbrace{2 \quad 3}_{\text{PESI}} & & \end{array}\right\} 5k$$

➢ Entonces : 5k = 30 $\boxed{k = 6}$

➢ Piden :

3k = 3(6) = 18

RPTA :	18

HELICO PRACTICE

5

Al calcular el MCD de 72 y 108 se obtuvo $2^{a} \times 3^{b}$. Calcule $a+b$.

RESOLUTION

$$\begin{array}{rr|c} 72 - & 108 & 2 \\ 36 - & 54 & 2 \\ 18 - & 27 & 3 \\ 6 - & 9 & 3 \\ 2 - & 3 & \end{array} \quad \left.\right\} 36$$

$\underbrace{2 - 3}_{\text{PESI}}$

$$\mathrm{MCD}(72;108) = 36 = 2^{a} \times 3^{b}$$

- Pero : $36 = 2^{2} \times 3^{2}$

- Entonces :

$$2^{a} \times 3^{b} = 2^{2} \times 3^{2}$$

$\boxed{a = 2}$ $\boxed{b = 2}$

- $a + b = 2 + 2 = 4$

RPTA : 4

HELICO PRACTICE

6

Para el cumpleaños de Leila se cuenta con 75 frunas y 105 sapitos que se decide entregar a cada uno de los niños invitados en sorpresas que contengan la misma cantidad de cada una de estas golosinas y sea la mayor posible, si ella desea que cada uno de sus invitados obtenga una sorpresa. ¿Cuántos niños se verían beneficiados? Ayuda a Leila a resolver esta pregunta utilizando el algoritmo de Euclides.

RESOLUTION

q	1	2	2	
105	75	30	15	MCD
r	30	15	0	

- En cada sorpresa habrán 15 dulces

Total de dulces = 75 + 105 = 180 dulces

- Entonces alcanzará para :

$$\frac{180}{15} = 12 \text{ sorpresas}$$

RPTA :	12 niños

HELICO PRACTICE

7

Álex tiene un negocio de materiales para la elaboración de maquetas por lo cual debe cortar dos listones de madera en trozos de igual longitud y lo más largo posible sin que sobre material. Si los listones miden $140\ \mathrm{cm}$ y $98\ \mathrm{cm}$. ¿Cuantos trozos obtendrá?

RESOLUTION

- Como queremos trozos iguales y la mayor longitud posible entonces aplicaremos MCD.

$$\begin{array}{rr|l} 140 - & 98 & 2 \\ 70 - & 49 & 7 \\ 10 - & 7 & \end{array} \quad \left.\begin{array}{l} 2 \\ 7 \end{array}\right\} 14$$

- Entonces la cantidad de trozos será :

$10 + 7 = 17$

RPTA :	17 trozos