MATHEMATICAL REASONING

Chapter 18

5th
SECONDARY

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SACO OLIVEROS

❑ !SABÍAS QUÉ!

El **puente Hong Kong-Zhuhai-Macao** consta de una serie de puentes y túneles de 55 km que conectan Hong Kong con Macao y Zhuhai, las tres ciudades principales de China. La longitud total del puente y el túnel es de unos 55 km. El puente principal mide unos 30 km y el túnel mide 6,7 km, para permitir el paso de las embarcaciones.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Es un tema que incluye diversas situaciones problemáticas en la que se pide calcular un máximo valor o un mínimo valor.

SITUACIONES LÓGICAS CREATIVAS

- PROBLEMAS CON PALITOS
- PROBLEMAS CON FICHAS Y/O MONEDAS
- PARENTESCOS
- CERTEZAS
- OTROS

PROBLEMAS APLICATIVOS

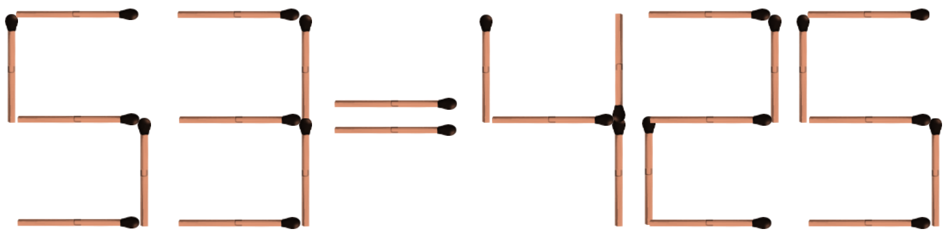
- SITUACIONES ALGEBRÁICAS
- SITUACIONES ARITMÉTICAS
- SITUACIONES GEOMÉTRICAS

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

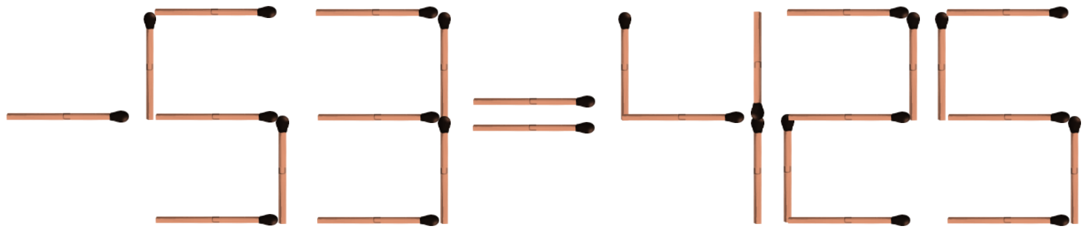
SITUACIONES LÓGICAS CREATIVAS

Ejemplo 1:

En la igualdad mostrada, para que se verifique deben moverse x cerillos, como mínimo. ¿Cuál es el valor de x?



Resolución:



$\therefore \quad x = 3$

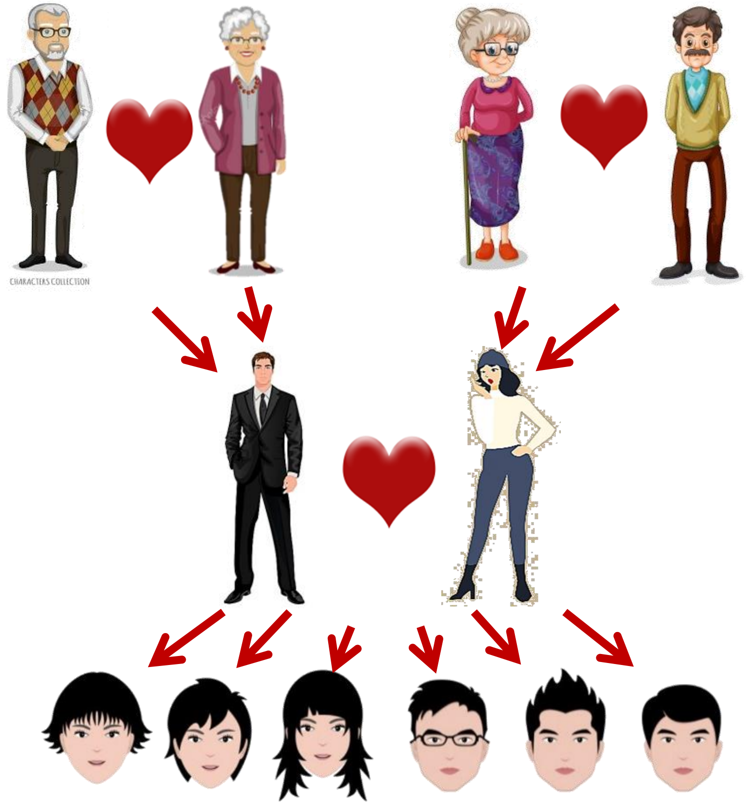
MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SITUACIONES LÓGICAS CREATIVAS

Ejemplo 2:

Dos abuelas, 2 abuelos, 3 padres, 3 madres, 2 suegras, 2 suegros, 4 hijas, 4 hijos, 1 yerno, 1 nuera, 3 hermanas y 3 hermanos consumieron en una cena familiar 3 aceitunas cada uno. ¿Cuántas aceitunas se consumieron como mínimo en esta reunión familiar?

Resolución:



Como cada uno come 3 aceitunas,

$12 \times 3 = 36$

$\therefore$ 36

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SITUACIONES ALGEBRÁICAS

- **COMPLETANDO CUADRADOS**

Se sabe que:

$$x^2 \geq 0; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$x_{mín} = 0$$

Para maximizar o minimizar una expresión cuadrática la idea es completar cuadrados

Ejemplo 1

Calcule el mínimo valor de

$$M = x^2 + 6x + 15; \quad x \in \mathbb{R}$$

Resolución

$$M = \underbrace{x^2 + 2x(\mathbf{3}) + (\mathbf{3})^2} + (\mathbf{6})$$

$$M = (x+3)^2 + 6$$

$$M_{mín} = \cancel{(x+3)^2} + 6$$

$$\therefore M_{mín} = 6$$

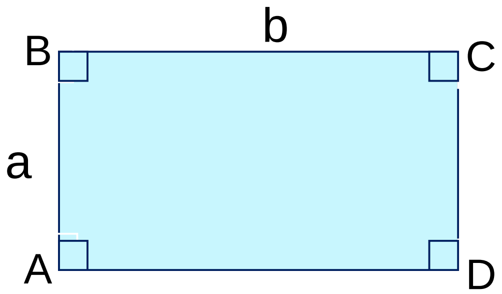
MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SITUACIONES ARITMÉTICAS

Ejemplo:

El perímetro de un rectángulo es 36m. Halle el área máxima de dicha región rectangular.

Resolución



Perímetro $= 2a + 2b = 36$

$\rightarrow \quad a + b = 18$

Piden el área máxima, es decir

$$ab \Rightarrow Máximo$$

Algunos valores de ab serían:

$$1 \times 17 = 17$$
$$2 \times 16 = 32$$
$$3 \times 15 = 45$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$9 \times 9 = 81$$

El máximo valor de un producto conociendo la suma constante de dichos valores, se obtiene cuando los números son iguales.

$$\therefore A_{máxima} = 81u^2$$

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

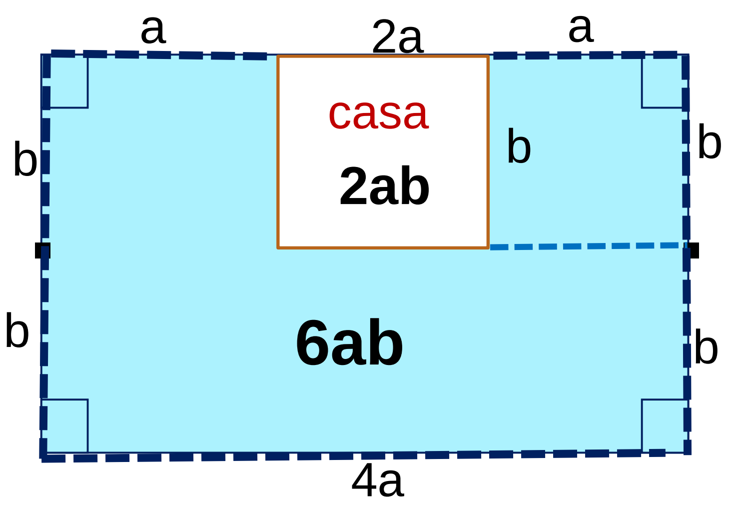
- **MEDIA ARITMÉTICA(MA) Y MEDIA GEOMÉTRICA(MG)**

$$\boxed{MA \geq MG}$$

Ejemplo:

Se desea cercar el jardín mostrado en el gráfico(sombreado), para lo cual se utiliza 32cm de cerca. ¿Cuál es el área máxima que puede tener el jardín?

Colocando la cerca



Resolución:

Cerca: $6a + 4b = 32$

$3a + 2b = 16$

Área(máxima) $=$ 6ab

$$\boxed{MA \geq MG}$$

$$\frac{3a+2b}{2} \geq \sqrt{3a.2b}$$

$$8 \geq \sqrt{6ab}$$

$$64 \geq 6ab$$

$$6ab \leq 64$$

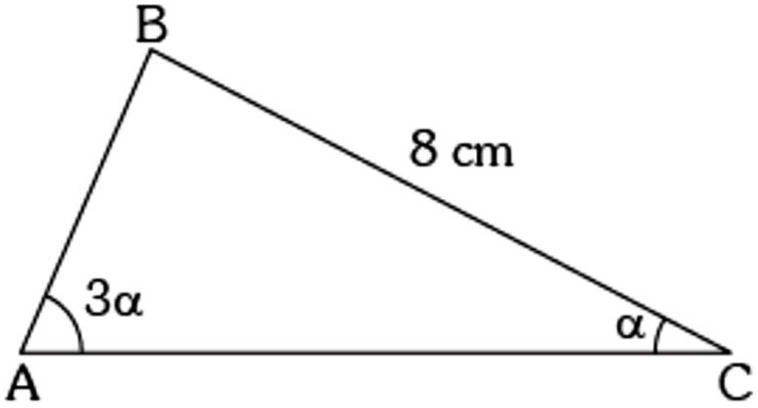
$\therefore$ Área(máxima) $= 64cm^2$

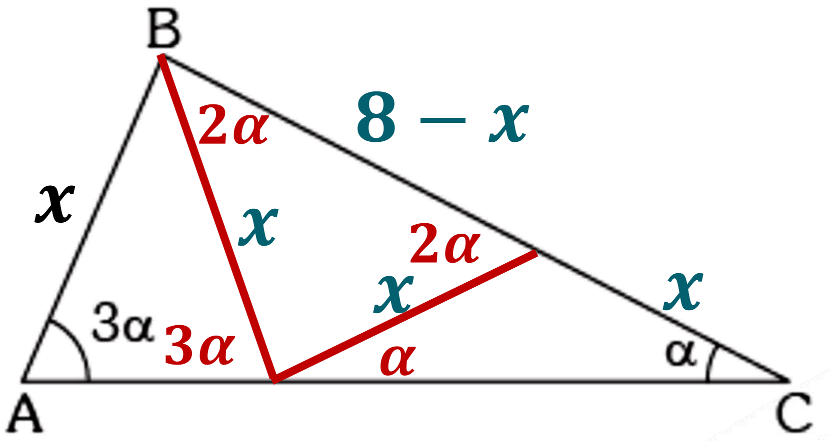
MÁXIMOS Y MÍNIMOS

SITUACIONES GEOMÉTRICAS

Ejemplo:

En la figura, halle el mínimo valor entero de AB.





Por teorema de existencia de triángulos:

$2x > 8 - x \quad \rightarrow x > 2{,}6\ldots$

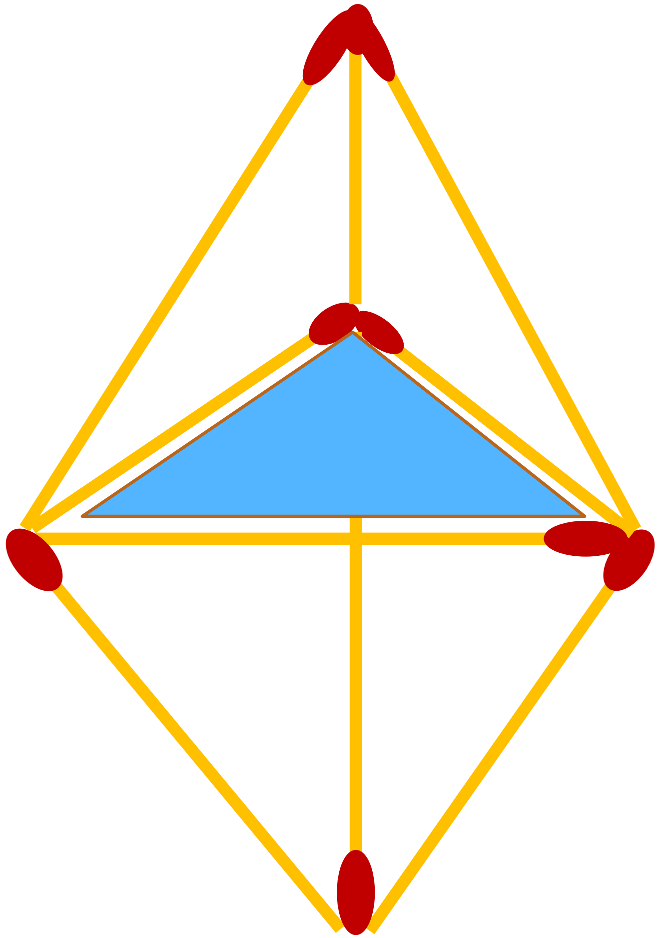
$\therefore\ x_{mínimo\ entero} = 3$

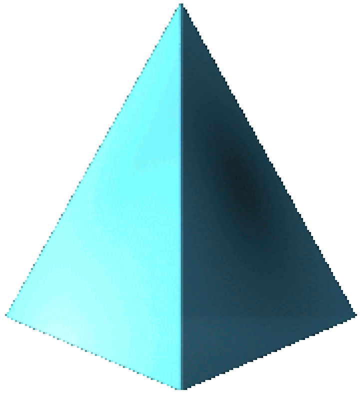
RESOLUCIÓN DE LA PRÁCTICA

PROBLEMA 1

¿Cuántos cerillos son necesarios para construir 7 triángulos equiláteros, de manera que cada lado del triángulo sea un cerillo completo y la cantidad de cerillos sea mínima?

Resolución:

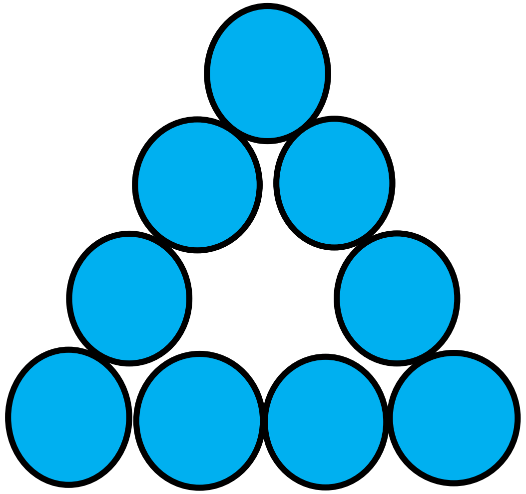




$\therefore$ $\underline{\underline{9 \; palitos}}$

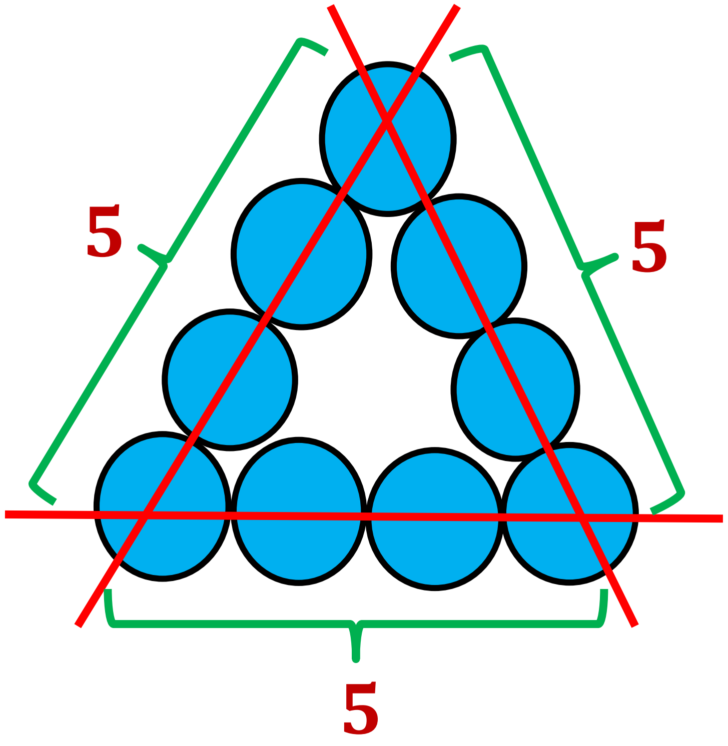
PROBLEMA 2

A partir de la disposición triangular mostrada, ¿cuántas monedas debemos cambiar de posición, como mínimo, para poder contar 5 monedas por cada lado del triángulo?



Resolución:

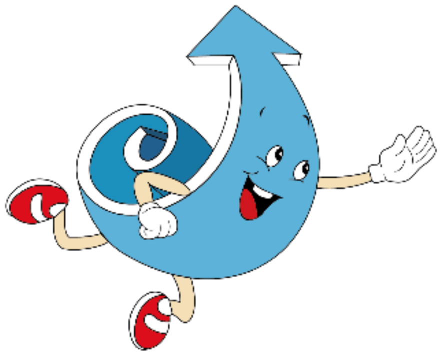
Ubicando las monedas convenientemente



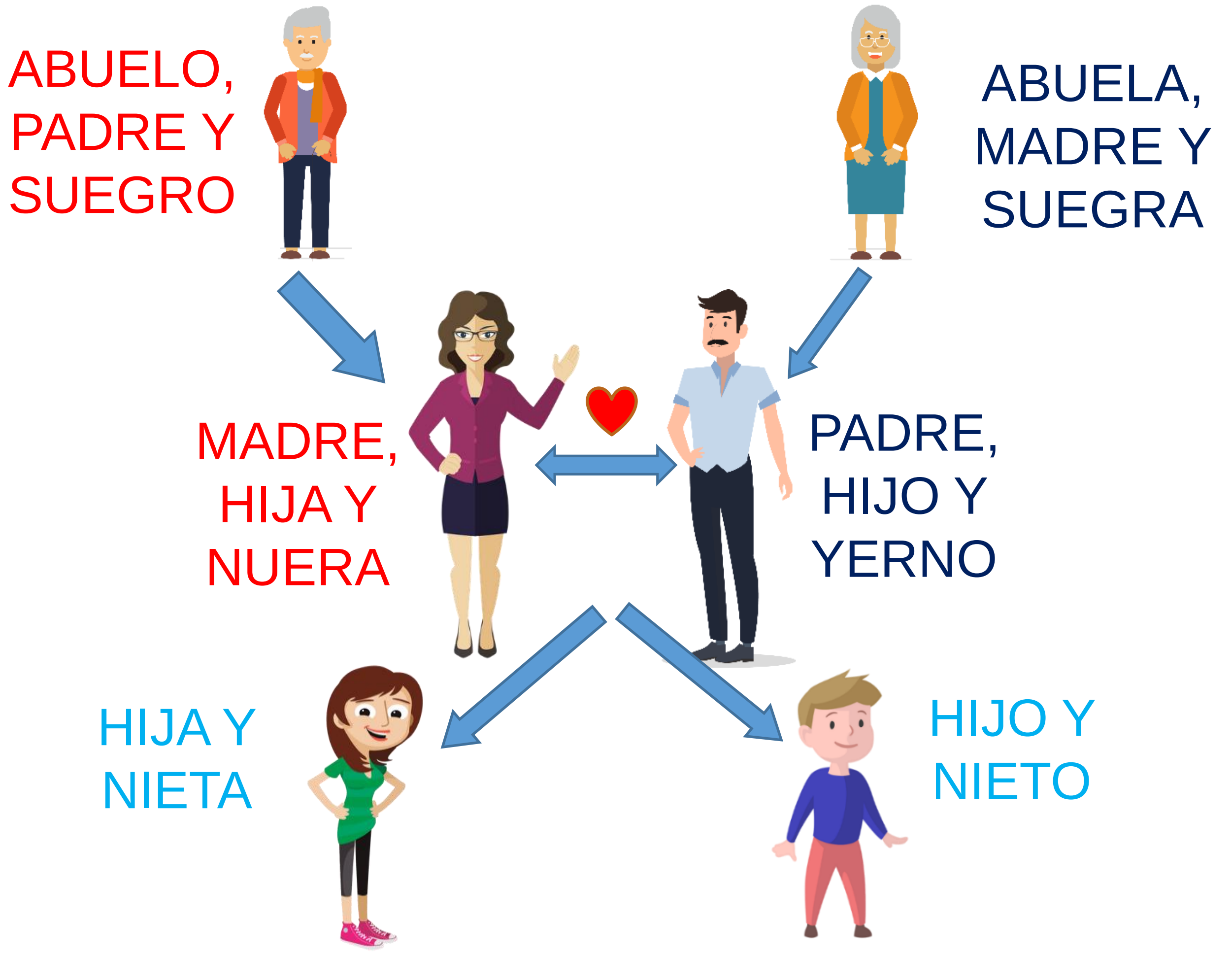
$\therefore \quad 3\,monedas$

PROBLEMA 3

¿Cuántas personas forman una familia, como mínimo, en la que se puede contar 2 padres, 2 madres, 2 hijos, 2 hijas, 1 nieto, 1 nieta, 1 abuelo,1 abuela, 1 suegro,1 suegra y una nuera?



Resolución:



$\therefore$ $\underline{\underline{6\ personas}}$

PROBLEMA 4

Calcule el máximo valor de M en:

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathbf{12}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{13}}$$

Resolución:

Para que M tenga el máximo valor el denominador $\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} - \mathbf{6}\boldsymbol{x} + \mathbf{13}$ debe ser mínimo

Calculamos el mínimo valor del denominador(D) completando cuadrados

$$D = \underbrace{x^2 - 2x(\mathbf{3}) + (\mathbf{3})^2} + (\mathbf{4})$$

$$D = (x-3)^2 + 4$$

$$D_{mín.} = \cancel{(x-3)^2} + 4$$

$$D_{mín.} = 4$$

PIDEN:

$$M_{máx.} = \frac{12}{4}$$

$$\therefore \quad 3$$

PROBLEMA 5

Calcule el mínimo valor que puede asumir F.

$$F = 3x^2 - 8x + 10$$

Resolución:

$$F = 3x^2 - 8x + 10$$

$$F = 3\left[x^2 - \frac{8}{3}x\right] + 10$$

$$F = 3\left[x^2 - 2x\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2\right] + 10$$

$$F = 3\underbrace{\left[x^2 - 2x\left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^2\right]} - 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 10$$

$$F_{min} = 3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 - 3\left(\frac{16}{9}\right) + 10 = -\frac{16}{3} + 10$$

$$\therefore \frac{14}{3}$$

OTRA FORMA:

Calcule el mínimo valor que puede asumir F en:

$$F = 3x^2 - 8x + 10$$

NOTA:

También podemos desarrollar este problema utilizando el operador derivada.

$x' \longrightarrow$ Derivada de x

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$c' = 0$

$c' \longrightarrow$ Derivada de una constante

Resolución:

$$F = 3x^2 - 8x + 10$$
$$F' = 6x - 8 = 0$$
$$x = \frac{4}{3}$$

Reemplazando:

$$F_{min} = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{3}\right) + 10$$

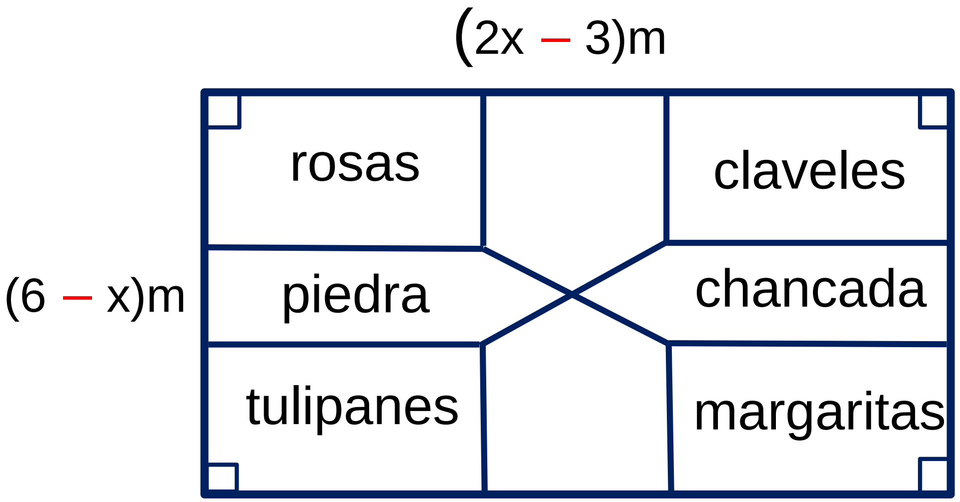
$$F_{min} = 3\left(\frac{16}{9}\right) - \frac{32}{3} + 10$$

$$F_{min} = \frac{16}{3} - \frac{32}{3} + 10 = -\frac{16}{3} + 10$$

$$\therefore \quad \frac{14}{3}$$

PROBLEMA 6

Un arquitecto dejó sobre su escritorio el plano de un futuro jardín cerca a su casa. Su hijo quiso jugarle una broma y cambió el plano por un dibujo (ver figura) y le pregunto mediante una nota: "¿Cuál sería el área máxima de dicho jardín?



Resolución:

$$S = (6 - x)(2x - 3)$$

$$2S = (12 - 2x)(2x - 3)$$

$$\boxed{MA \geq MG}$$

$$\frac{(12 - 2x) + (2x - 3)}{2} \geq \sqrt{(12 - 2x)(2x - 3)}$$

$$\frac{9}{2} \geq \sqrt{2S}$$

$$\frac{81}{4} \geq 2S$$

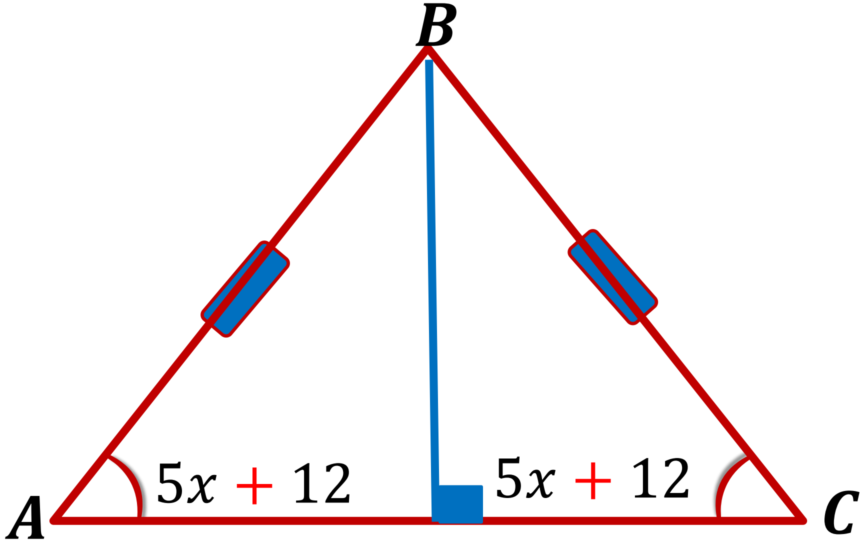
$$\frac{81}{8} \geq S$$

$$S_{max} = 10{,}125m^2$$

PROBLEMA 7

Un carpintero desea construir un gabinete de forma triangular, donde los lados laterales tengan la misma longitud. Si la medida de los ángulos iguales que forman los lados laterales con la base es de (5x+12)°, ¿cuál es el máximo valor entero de x que permite la construcción que desea el carpintero?

Resolución:



$$5x+12<90°$$

$$5x<78°$$

$$x<15{,}6$$

$$x_{máximo\ entero}=15$$

$\therefore$ 15