ALGEBRA

Chapter 9
5th

NÚMEROS COMPLEJOS

SACO OLIVEROS

Helicomotivación

APLICACIONES EN LOS NÚMEROS COMPLEJOS

ABRIR ENLACE:

https://youtu.be/zu4VplA9kks

NÚMEROS COMPLEJOS

I) UNIDAD IMAGINARIA

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Ejemplos:

- $\sqrt{-9} = \sqrt{9}.\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = 3i$
- $\sqrt{-25} = \sqrt{25}.\underbrace{\sqrt{-1}}_{i} = 5i$

II) POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Se cumple: $\boxed{i^{4k} = 1}$ $\boxed{i^{4k+2} = -1}$

$\boxed{i^{4k+1} = i}$ $\boxed{i^{4k+3} = -i}$

$(k \in z^{+})$

Ejemplos:

- $i^{23} = i^{20+3} = i^{4k+3} = -i$
- $i^{2022} = i^{20+2} = i^{4k+2} = -1$

III) NÚMEROS COMPLEJOS

Definición:

$$\boxed{z = (a;b)}$$ $a, b \in Reales$

Forma binómica

$$Z = a + bi$$

a: parte real

bi: parte imaginaria

Ejemplo:

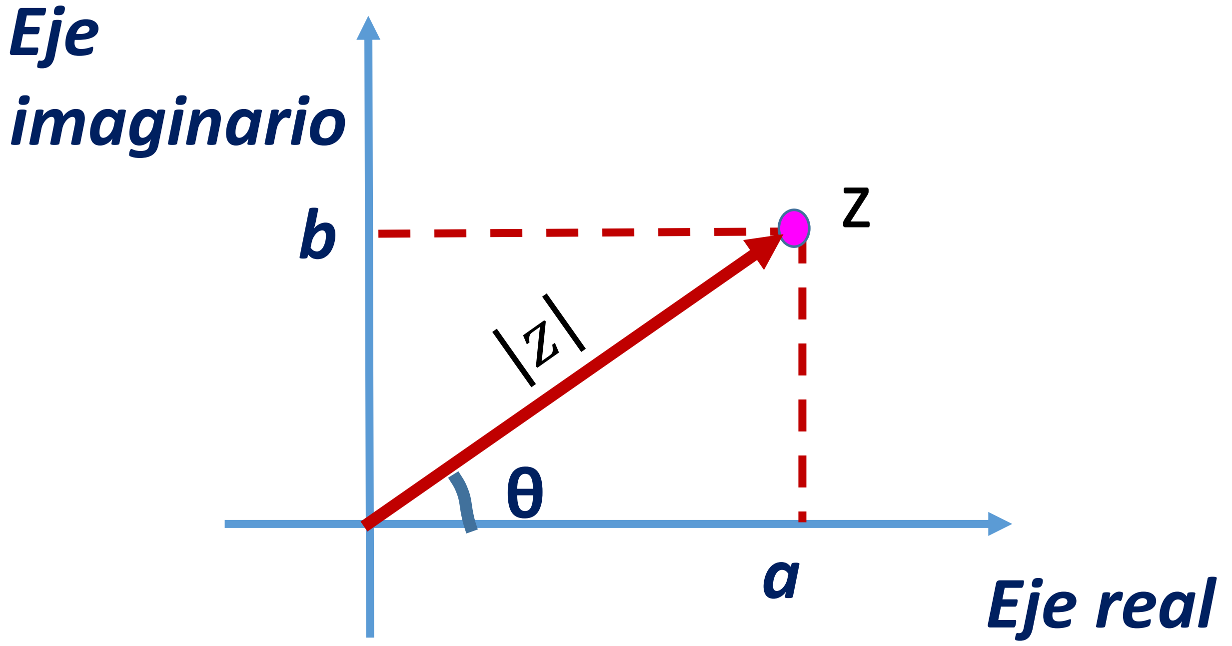
- $z = (3;2) = 3 + 2i$

$Re(Z) = 3$

$Im(Z) = 2$

Representación gráfica:

Dado $z = (a;b) = a + bi$



Modulo: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

argumento: θ

Definiciones:

Sea: $z = a + bi$, entonces se define

1. *complejo conjugado* $(\bar{z})$:

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}$$

2. *complejo opuesto* (z^*):

$$\boxed{z^* = -a - bi}$$

3. *Complejo Real*

Si b=0

$$\boxed{z = a}$$

4. *Complejo imaginario puro*

Si a=0

$$\boxed{z = bi}$$

5. *Complejo nulo*

Si a=0 y b=0

$$\boxed{z = 0}$$

SACO OLIVEROS

Operaciones con Números complejos

Adición y sustracción

Ejemplo:

- $$\left.\begin{aligned} z_1 &= 2+4i \\ z_2 &= 3+2i \end{aligned}\right\} +$$

$$\boxed{z_1 + z_2 = 5 + 6i}$$

- $$\left.\begin{aligned} z_1 &= 2+4i \\ z_2 &= 3+2i \end{aligned}\right\} -$$

$$\boxed{z_1 - z_2 = -1 + 2i}$$

Multiplicación

Sea: $z_1 = 2 + 4i$

$z_2 = 3 + 2i$

$$z_1 . z_2 = (2 + 4i)(3 + 2i)$$

$$z_1 . z_2 = 6 + 4i + 12i + \underbrace{8i^2}_{\boxed{-8}}$$

$$\boxed{z_1 . z_2 = -2 + 16i}$$

OBSERVACIÓN:

$$\boxed{(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2}$$

División:

$$z=\frac{2+4i}{3-2i}$$

$$z=\frac{(2+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}$$

$$z=\frac{-2+16i}{13}$$

$$\boxed{z=\frac{-2}{13}+\frac{16}{13}i}$$

Resultados Importantes:

$$\boxed{(1+i)^2 = 2i}$$

$$\boxed{(1-i)^2 = -2i}$$

$$\boxed{(1\pm i)^4 = -4}$$

$$\boxed{\frac{1-i}{1+i} = -i}$$

$$\boxed{\frac{1+i}{1-i} = i}$$

Z=$\frac{a+bi}{n+mi} \rightarrow \mathbb{C}.\ \textit{imaginario puro}$

$$se\ cumple: \frac{a}{m} = -\frac{b}{n}$$

$$Z = \frac{a+bi}{n+mi} \rightarrow complejo\ real$$

$$se\ cumple: \frac{a}{n} = \frac{b}{m}$$

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1

Reduzca:

$$M = \frac{i^{16}+5i^{21}+4i^{43}+i^{81}}{2i^{440}-i^{320}}$$

Resolución

Recordar:

$$i^{4k} = 1$$
$$i^{4k+1} = i$$
$$i^{4k+2} = -1$$
$$i^{4k+3} = -i$$

$$M = \frac{i^{4k} + 5i^{4k+1} + 4i^{4k+3} + i^{4k+1}}{2i^{4k} - i^{4k}}$$

$$M = \frac{1 \quad +5i \quad +4(-i) \quad +i}{2(1) \; -1}$$

Rpta: $\boxed{M = 1 + 2i}$

PROBLEMA 2

Si

$z_1 = 3 - 2i$

$z_2 = -4 + 3i;$ $\quad$ *Calcule*: $\mathrm{Im}(\overline{z_1}.z_2{}^*)$

Resolución

$si:\ z_1 = 3 - 2\mathrm{i}$

$\boxed{\overline{z_1} = 3 + 2\mathrm{i}}$

$z_2 = -4 + 3\mathrm{i}$

$\boxed{z_2{}^* = 4 - 3\mathrm{i}}$

$$\overline{z_1}.z_2^* = (3 + 2\mathrm{i})(4 - 3\mathrm{i})$$

$$\overline{z_1}.z_2^* = 12 - 9\mathrm{i}\ \ +8\mathrm{i}\ \ -6\underbrace{i^2}_{(-1)}$$

$$\overline{z_1}.z_2^* = 18 - 1\mathrm{i}$$

Rpta: $\boxed{\mathrm{Im}(\overline{z_1}.z_2\,) = -1}$

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 3

Simplifique E si $i = \sqrt{-1}$

$$E = \cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-i}}}}}$$

Resolución

Propiedad:

$$\frac{1+i}{1-i} = i$$

$$E = \cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-i}}}}$$

$$E = \cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-i}}}$$

$$E = \cfrac{1+i}{1-\cfrac{1+i}{1-i}}$$

$$E = \frac{1+i}{1-i} = i$$

Rpta:

$$\boxed{\therefore E = i}$$

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 4

Halle el valor de m para que el complejo:

$z = \frac{m+3i}{2-5i}$ sea imaginario puro

Resolución

Propiedad:

$Si: z = \frac{a+bi}{c+di}$

es imaginario puro

$\rightarrow \frac{a}{d} = -\frac{b}{c}$

$$z = \frac{m+3i}{2-5i}$$

$$\frac{m}{-5} = -\frac{3}{2}$$

Rpta: $m = \frac{15}{2}$

PROBLEMA 5

En la igualdad: $(2+3i)x+(1-2i)y=14+8i$
Además {x,y}⊂ R. Determine x/y

Resolución

$$(2+3i)x+(1-2i)y=14+8i$$

$$2x+3ix+y-2iy=14+8i$$

$$(2x+y)+(3x-2y)i=14+8i$$

$$\begin{cases} 2x+y=14 & \xrightarrow{(\times 2)} \quad 4x+2y=28 \\ 3x-2y=8 & \longrightarrow \quad 3x-2y=8 \end{cases}$$

$$+\quad 7x=36$$

$$\boxed{x=36/7}$$

$$\boxed{y=26/7}$$

$Piden: x/y$

$\Rightarrow x/y=36/26$

Rpta:

$$\boxed{x/y=18/13}$$

PROBLEMA 6

La edad de Ricardo hace 10 años está dado por 5M, donde M se calcula al resolver:

$$\frac{M}{17}=\frac{5+3i}{5-3i}-\frac{3+5i}{3-5i}$$

¿ Cuál es la edad de Ricardo?

Resolución

$$\frac{M}{17}=\underbrace{\frac{5+3i}{5-3i}\times\frac{5+3i}{5+3i}}-\underbrace{\frac{3+5i}{3-5i}\times\frac{3+5i}{3+5i}}$$

$$\frac{M}{17}=\frac{(5+3i)^2}{5^2+3^2}-\frac{(3+5i)^2}{3^2+5^2}$$

$$\frac{M}{17}=\frac{25+\cancel{30i}-9}{34}-\frac{9+\cancel{30i}-25}{34}$$

$$\frac{M}{17}=\frac{32}{34}$$

$M=16$

Luego la edad de Ricardo hace 10 años

$5M=80$

∴ La edad actual de Ricardo es

Rpta: $\boxed{90 \text{ años}}$

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 7

Tres embarcaciones pesqueras, A,B y C, salieron del puerto a la misma hora y en diferentes direcciones .Para indicar su posición exacta las embarcaciones emplean números complejos en el plano complejo, considerando que cada unidad en el plano complejo es equivalente a una milla, y que el puerto esta ubicada en el origen de coordenadas. Transcurrida una hora de su partida se le solicito por radio indicar su posición, a lo que respondieron:

Embarcación A: $-3+4i$

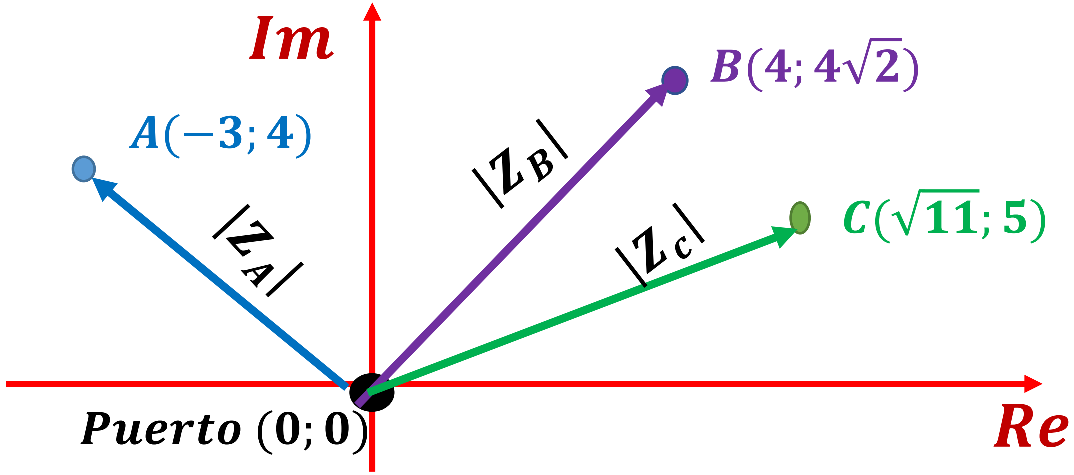
Embarcación B: $4+4\sqrt{2}i$

Embarcación C: $\sqrt{11}+5i$

¿cual de las tres embarcaciones se encuentra mas distante del puerto?

Resolución

Plano complejo



Modulo de Z=(x;y)

$|Z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$|Z_A| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5\ millas$$

$$|Z_B| = \sqrt{4^2+(4\sqrt{2})^2} = \boxed{4\sqrt{3}\ millas}$$

$$|Z_C| = \sqrt{\sqrt{11}^2+5^2} = 6\ millas$$

Rpta: Embarcación B

SACO OLIVEROS