GEOMETRY

Chapter 16

4th

SECONDARY

RECTAS, PLANOS Y ÁNGULO DIEDRO

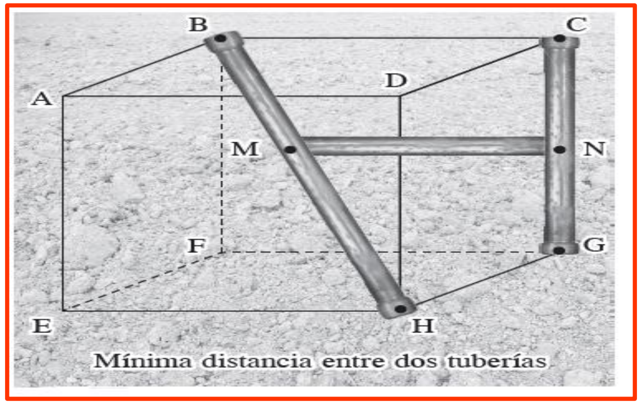
SACO OLIVEROS

En geometría del espacio estudiamos a los puntos, rectas y planos que determinan a las figuras geométricas en el espacio y sólidos geométricos, por ejemplo:

Planos perpendiculares

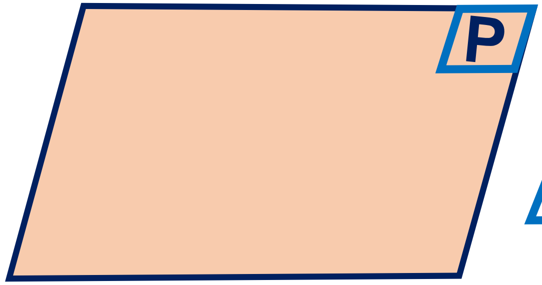
Angulo diedro

Planos paralelos y planos secantes



Rectas alabeadas

RECTAS, PLANOS Y ÁNGULO DIEDRO



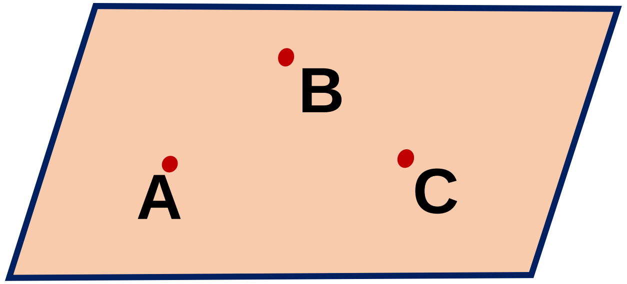
Notación:

▱**P : Plano P**

DETERMINACIÓN DE UN PLANO

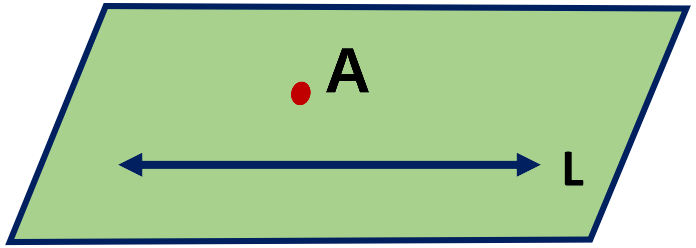
Existen 4 postulados de determinación de un plano en el espacio.

1. Tres puntos no colineales



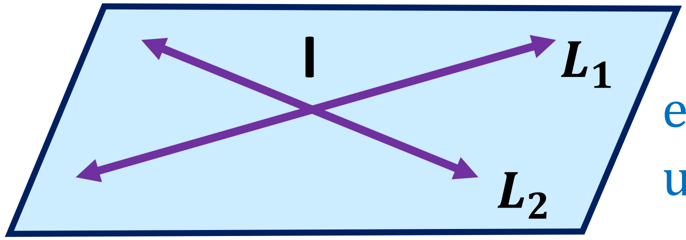
A, B y C determinan un plano.

2. Una recta y un punto exterior a ella



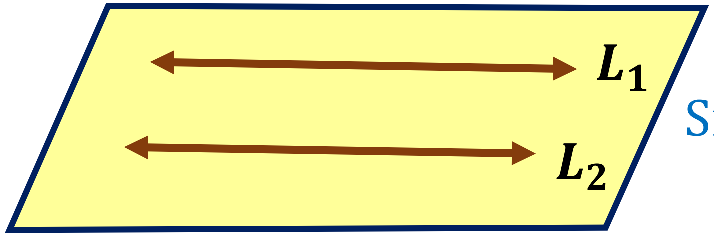
Si $A \notin \overleftrightarrow{L}$, entonces A y $\overleftrightarrow{L}$ determinan un plano.

3. Dos rectas secantes



Si $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son secantes entonces $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ determinan un plano.

4. Dos rectas paralelas

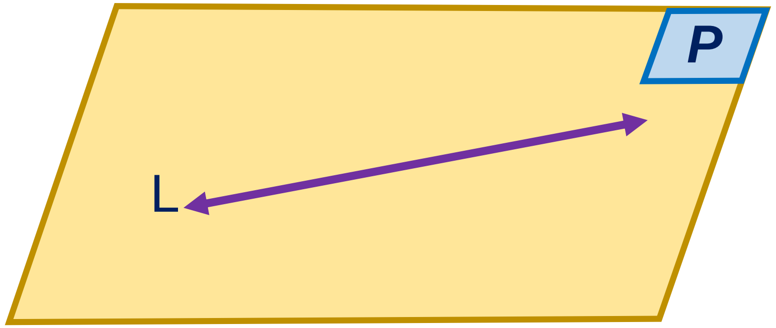


Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, entonces $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ determinan un plano.

POSICIONES RELATIVAS ENTRE RECTAS Y PLANOS

1. Recta contenida en un plano

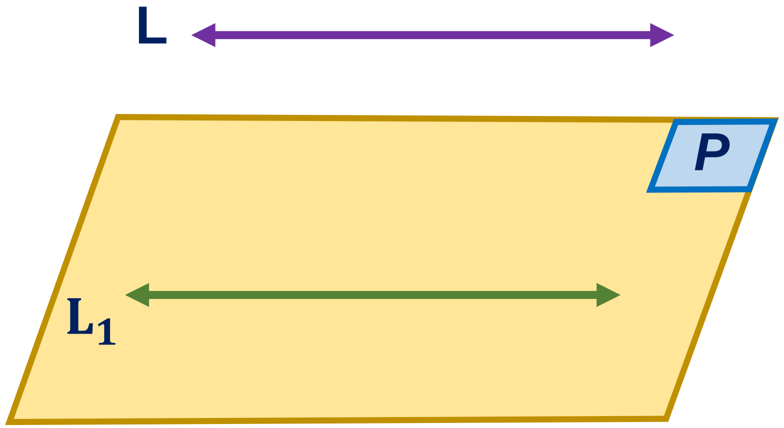
Una recta está contenida en un plano, si todos los puntos de la recta pertenecen al plano.



$\overleftrightarrow{L} \subset P$

2. Recta paralela a un plano

Una recta y un plano son paralelos si no tienen puntos en común.



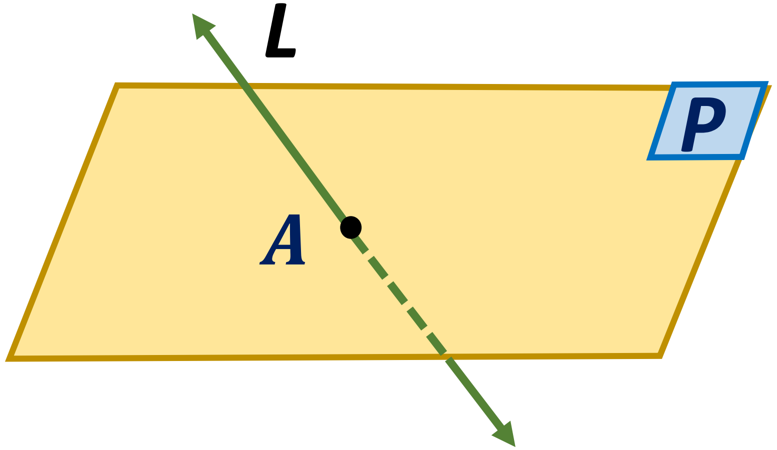
Si: $\overleftrightarrow{L} \not\subset P$

$\overleftrightarrow{L_1} \subset P$ y

$\overleftrightarrow{L} \,//\, \overleftrightarrow{L_1}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \,//\, P$

3. Recta secante a un plano



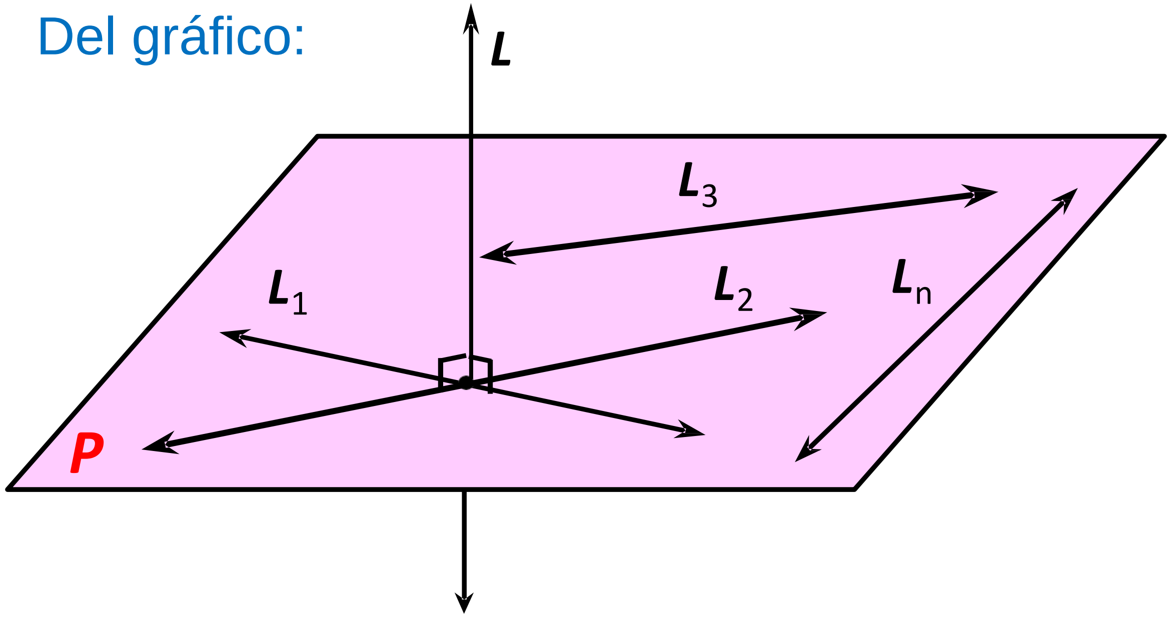
Un plano y una recta son secantes, si tienen solo un punto común.

$L \cap P = \{A\}$

RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

Si una recta es perpendicular a un plano, entonces se dice que la recta es perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.

Del gráfico:



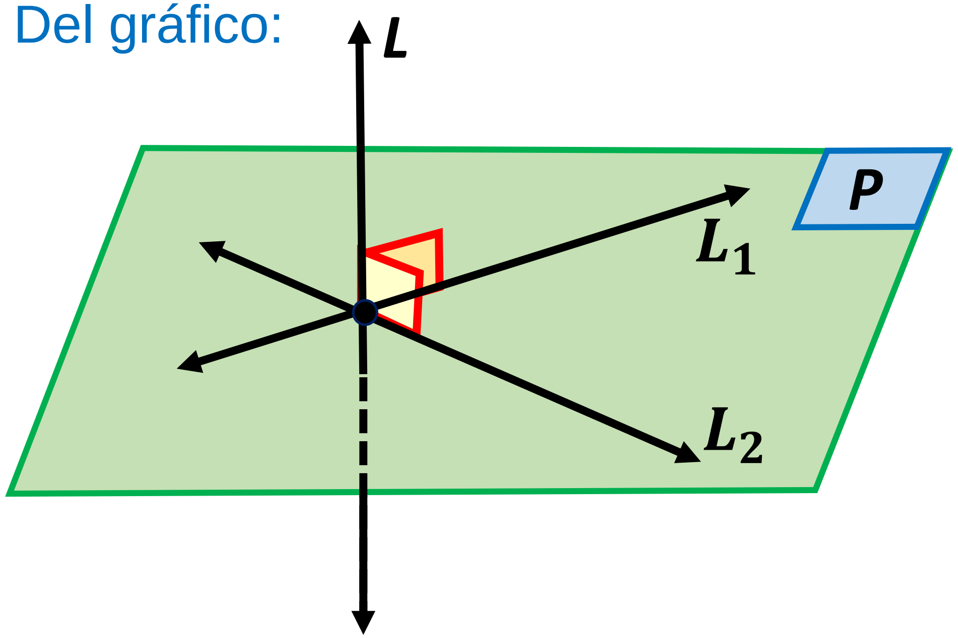
Si $L \perp \square P$ $\rightarrow$ $\boxed{L \perp L_i}$

$i = 1; 2; 3; \ldots; n$

TEOREMA:

Si una recta es perpendicular a dos rectas secantes, entonces la recta es perpendicular al plano que las contiene.

Del gráfico:



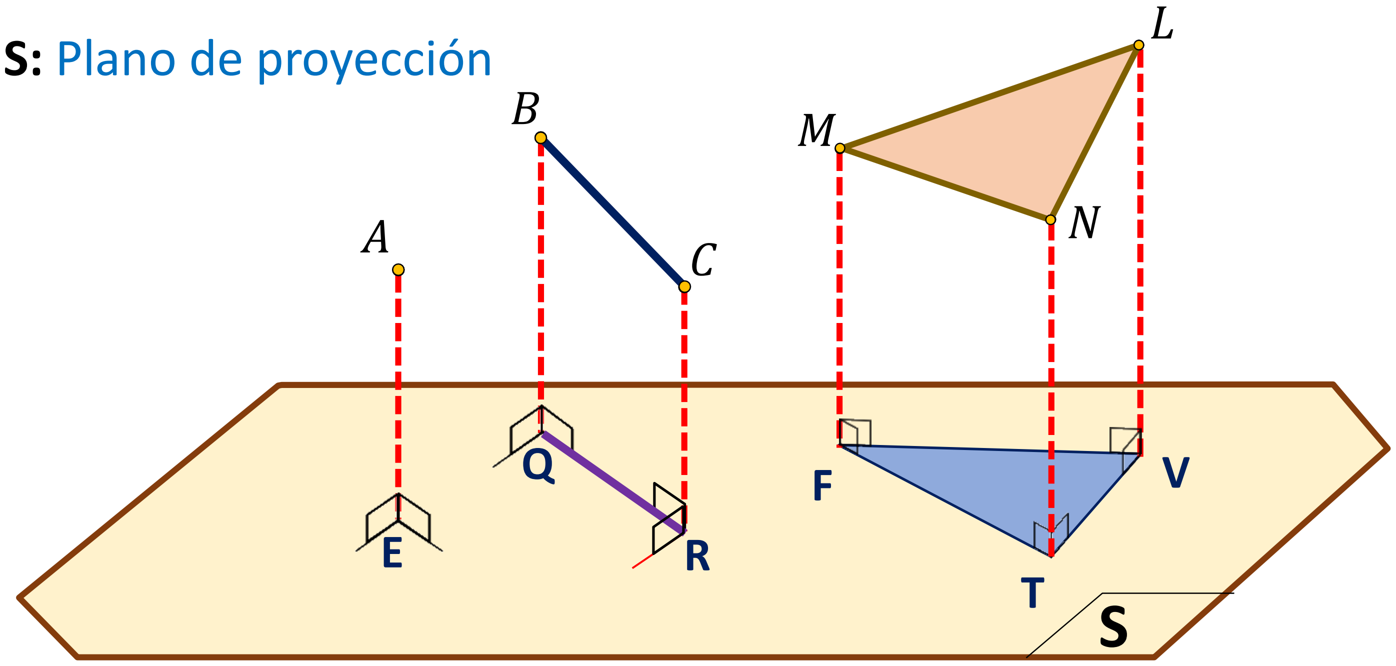
$$Si : L \perp L_1 \ y \ L \perp L_2$$

$$\rightarrow \boxed{L \perp \square \ \mathrm{P}}$$

PROYECCIÓN ORTOGONAL SOBRE UN PLANO

Del gráfico:

S: Plano de proyección

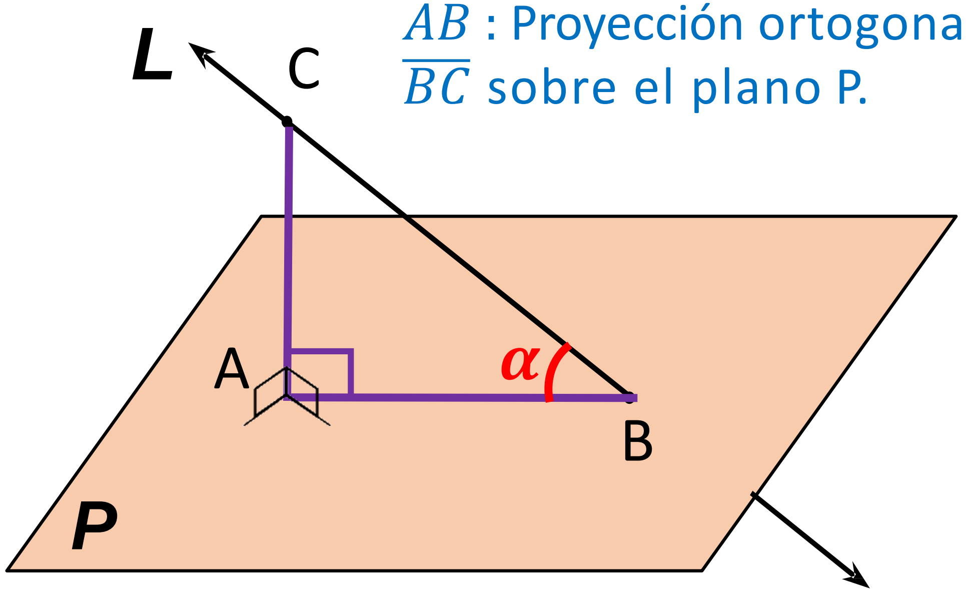


- ✓ E : Proyección ortogonal de A sobre el plano S.
- ✓ $\overline{QR}$: Proyección ortogonal de $\overline{BC}$ sobre el plano S.
- ✓ ΔFTV: Proyección ortogonal de ΔMNL sobre el plano S.

ÁNGULO FORMADO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

Del gráfico:

$\overline{AB}$: Proyección ortogonal de $\overline{BC}$ sobre el plano P.

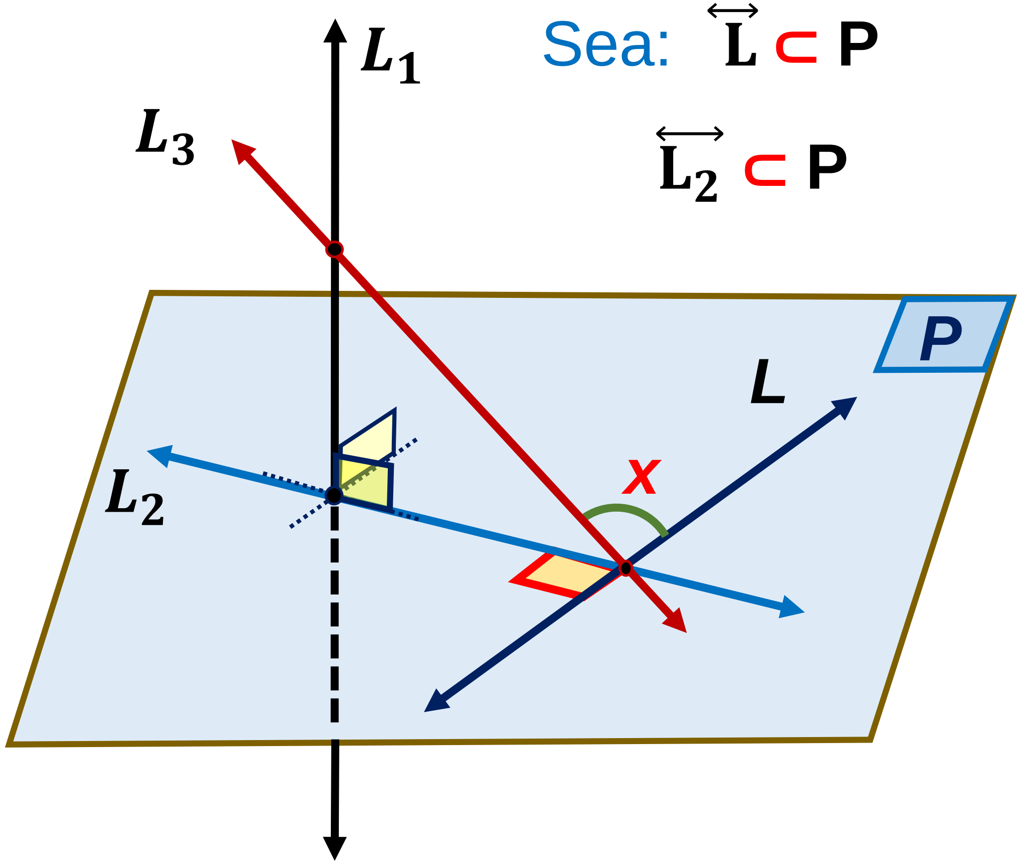


El ángulo que forma una recta con un plano, es el que forma la recta con su proyección en el plano.

$$m\measuredangle(\overleftrightarrow{L};\ \text{P}) = \alpha$$

TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Del gráfico:



Sea: $\overleftrightarrow{L} \subset P$

$\overleftrightarrow{L_2} \subset P$

$Si: \overleftrightarrow{L_1} \perp P$

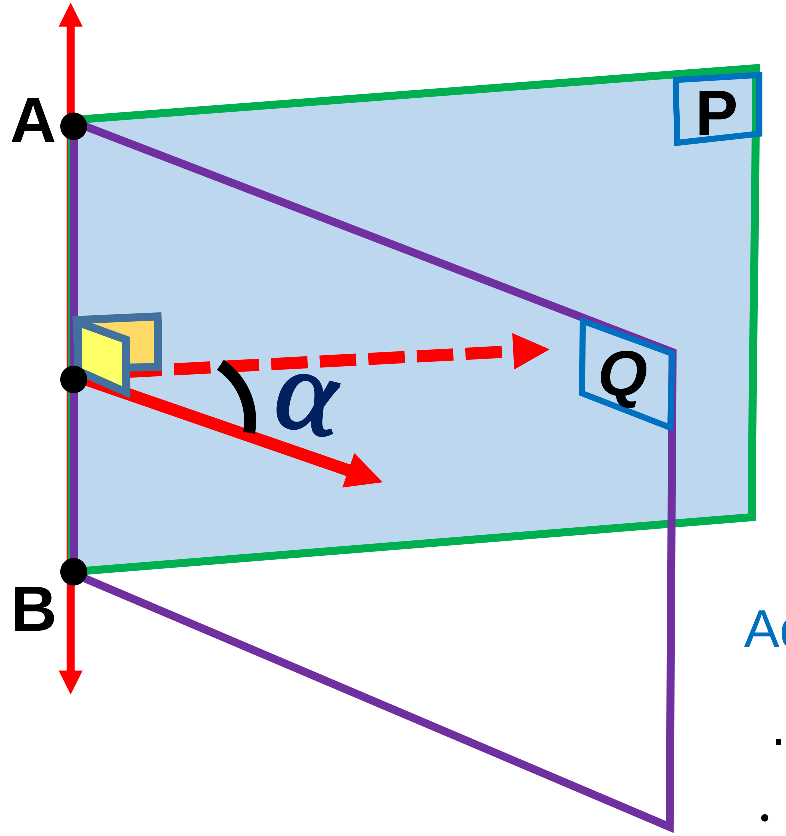
$y\ \overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{L}$

$\boxed{\overleftrightarrow{L_3} \perp \overleftrightarrow{L}}$

$\therefore\ x = 90°$

ÁNGULO DIEDRO

Es la figura formada por dos semiplanos que tienen su arista común.



En la figura

. P y Q son las caras del diedro.

. $\overleftrightarrow{AB}$ es la arista del diedro.

Notación

. Ángulo diedro: P – $\overleftrightarrow{AB}$ – Q

. Diedro AB

Además

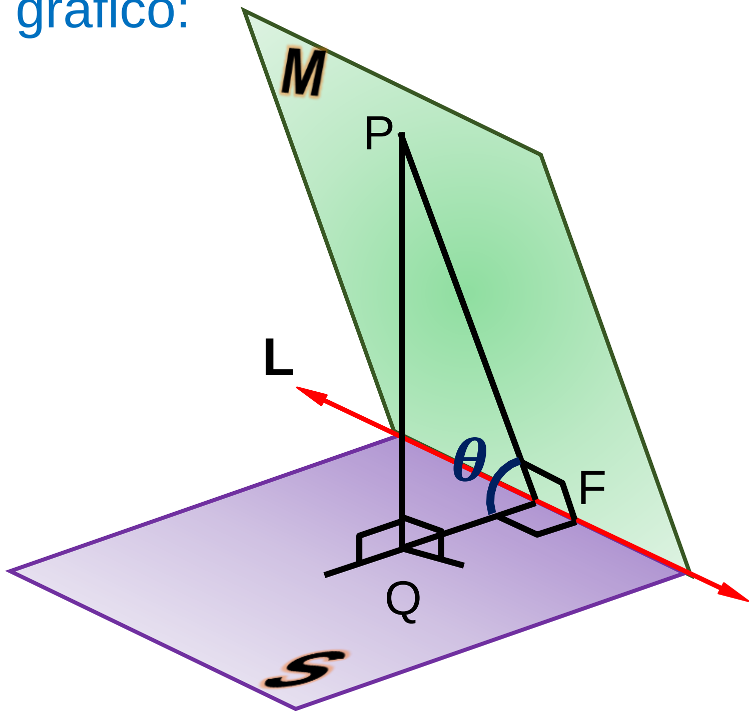
. md $\overline{AB}$: medida del diedro $\overline{AB}$

. md $\overline{AB}$ = α

NOTA:

Para ubicar la medida de un ángulo diedro, se recomienda utilizar el teorema de las tres perpendiculares.

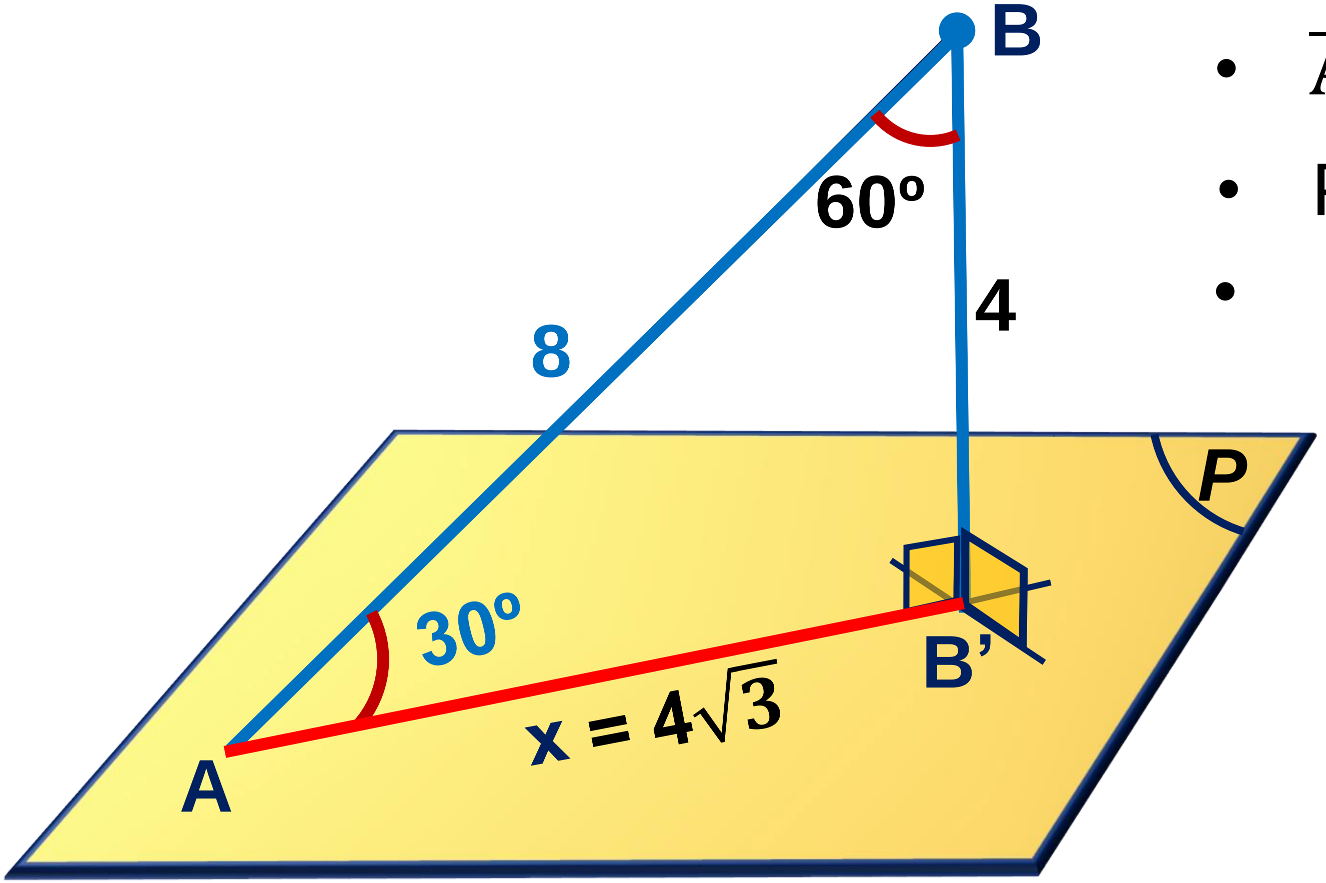
Del gráfico:



θ: medida de P – $\overleftrightarrow{L}$ - Q

1. En la figura, $\overline{AB}$ forma con el plano P un ángulo de medida 30° y AB = 8 u. Halle la longitud de la proyección del $\overline{AB}$ sobre el plano P.

RESOLUCIÓN:

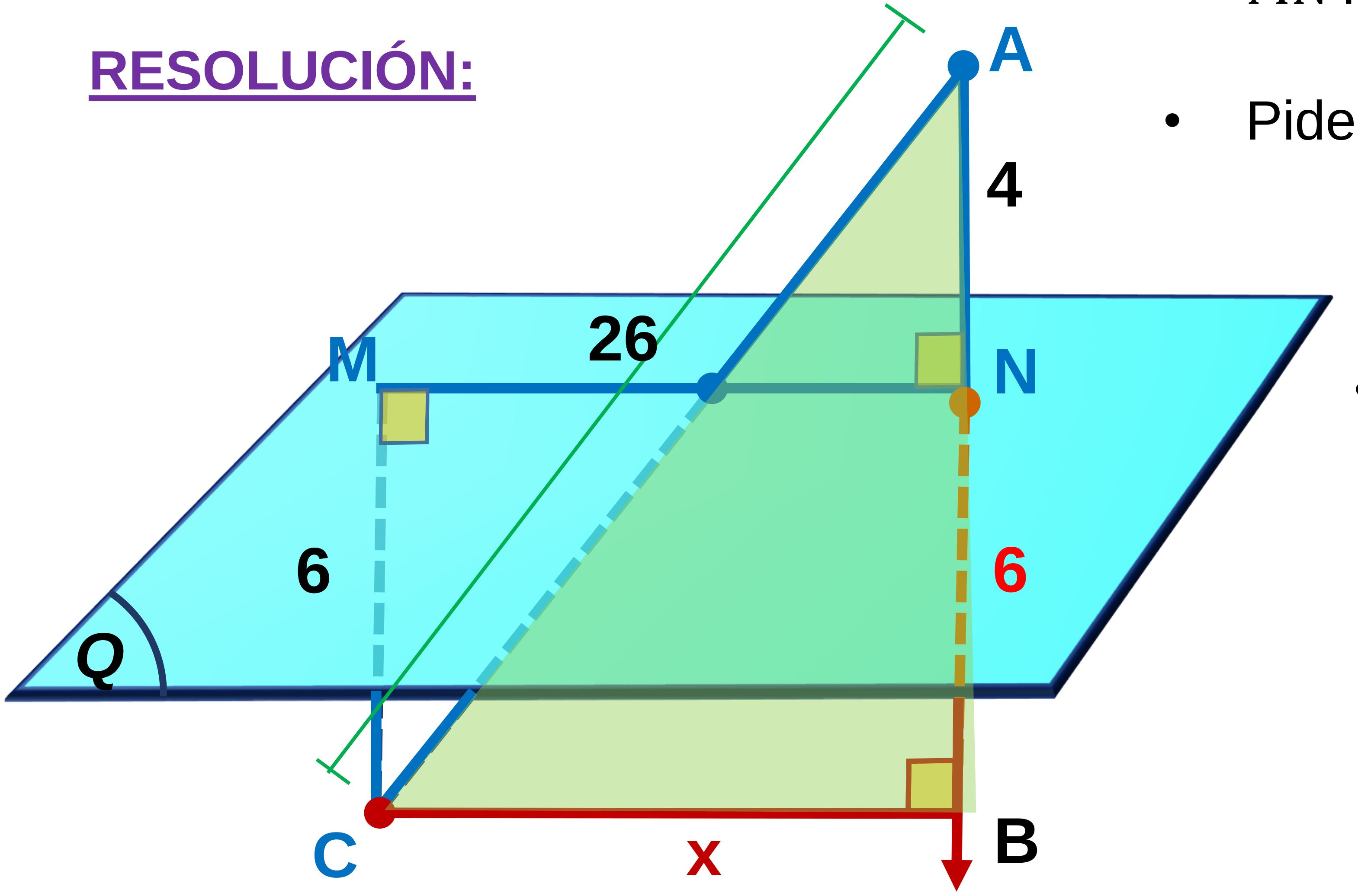


- $\overline{AB`}$: Proyección del $\overline{AB}$ sobre el plano P.
- Piden : x.
- ◺ AB`B : Notable de 30° y 60°

$$\boxed{x = 4\sqrt{3}\ u}$$

2. Halle la longitud de la proyección de $\overline{AC}$ sobre el plano Q, si AN = 4 u, MC = 6 u y AC = 26 u.

RESOLUCIÓN:

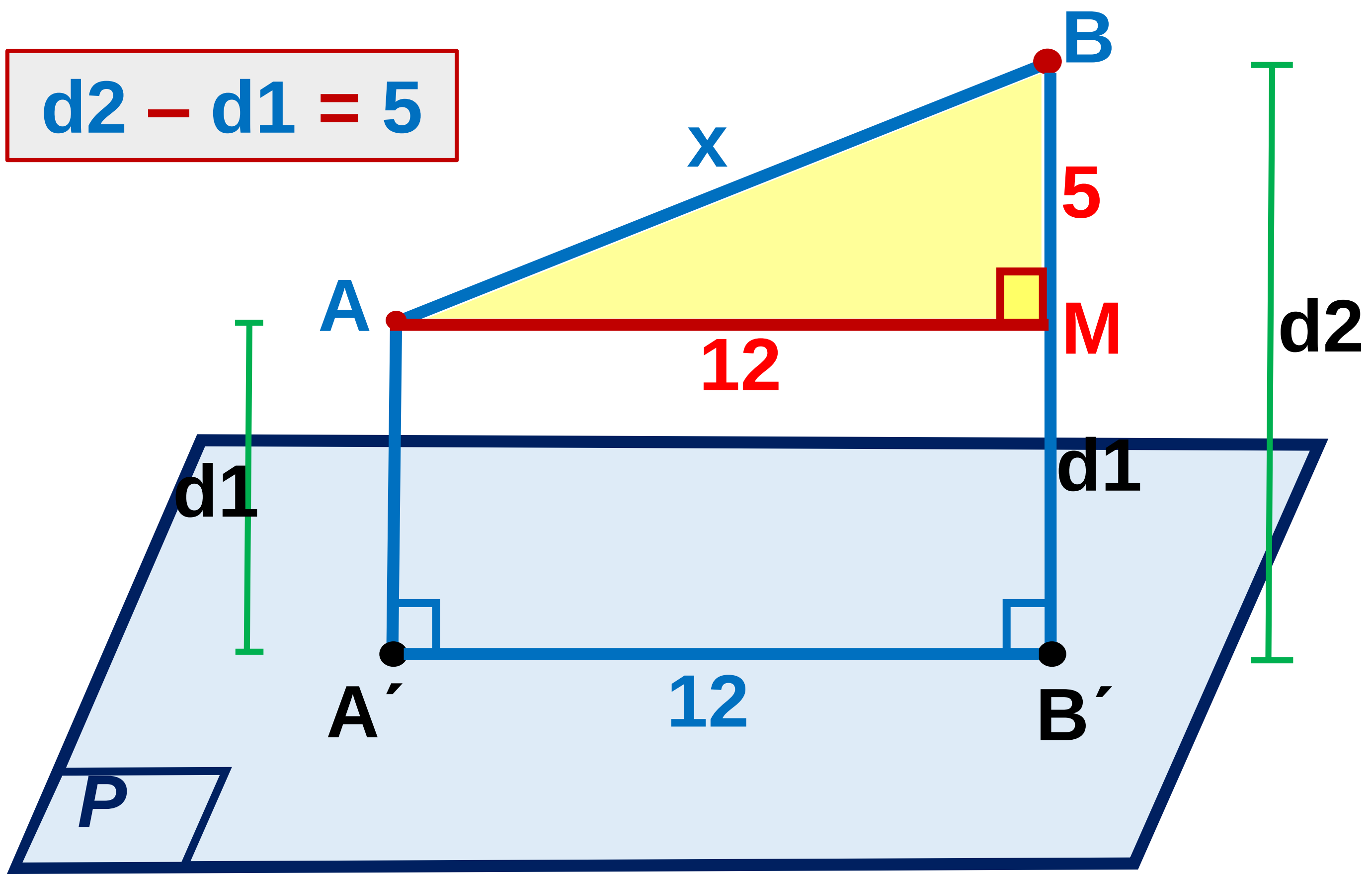


- $\overline{MN}$: Proyección del $\overline{AC}$ sobre el plano Q.
- Piden : MN.
  - Sea $\overline{CB} \perp \overrightarrow{AN}$ ($B \in \overrightarrow{AN}$).
- MC = NB = 6 ∧ MN = CB
- ◺ ABC : T. Pitágoras

$$26^2 = 10^2 + (CB)^2$$
$$676 = 100 + (CB)^2$$
$$576 = (CB)^2$$
$$24 = CB$$

MN = 24 u

3 . En la figura, A'B' = 12 u y la diferencia de las distancias de B y A al plano P es 5 u, halle AB.



RESOLUCIÓN:

- Piden: x.
- Se traza $\overline{AM} \perp \overline{BB`}$
- En $\overline{BB`}$:

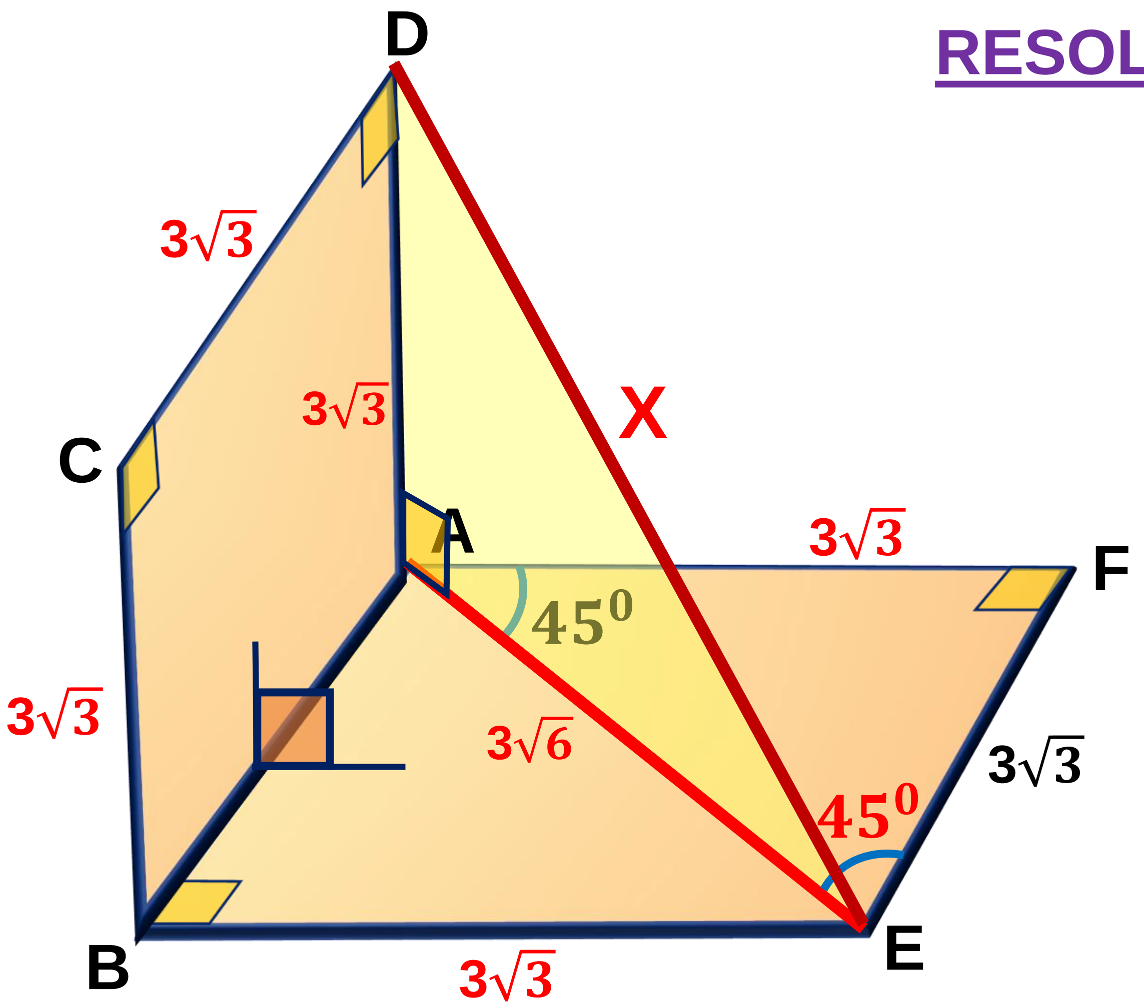
$$BM + d1 = d2$$
$$BM = d2 - d1$$
$$BM = 5$$

- ◺ AMB : T. Pitágoras

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$
$$x^2 = 169$$

$\boxed{x = 13 \text{ u}}$

4.- Se tienen los cuadrados ABCD y ABEF contenidos en planos perpendiculares. Si EF = $3\sqrt{3}$ u, calcule DE.



RESOLUCIÓN:

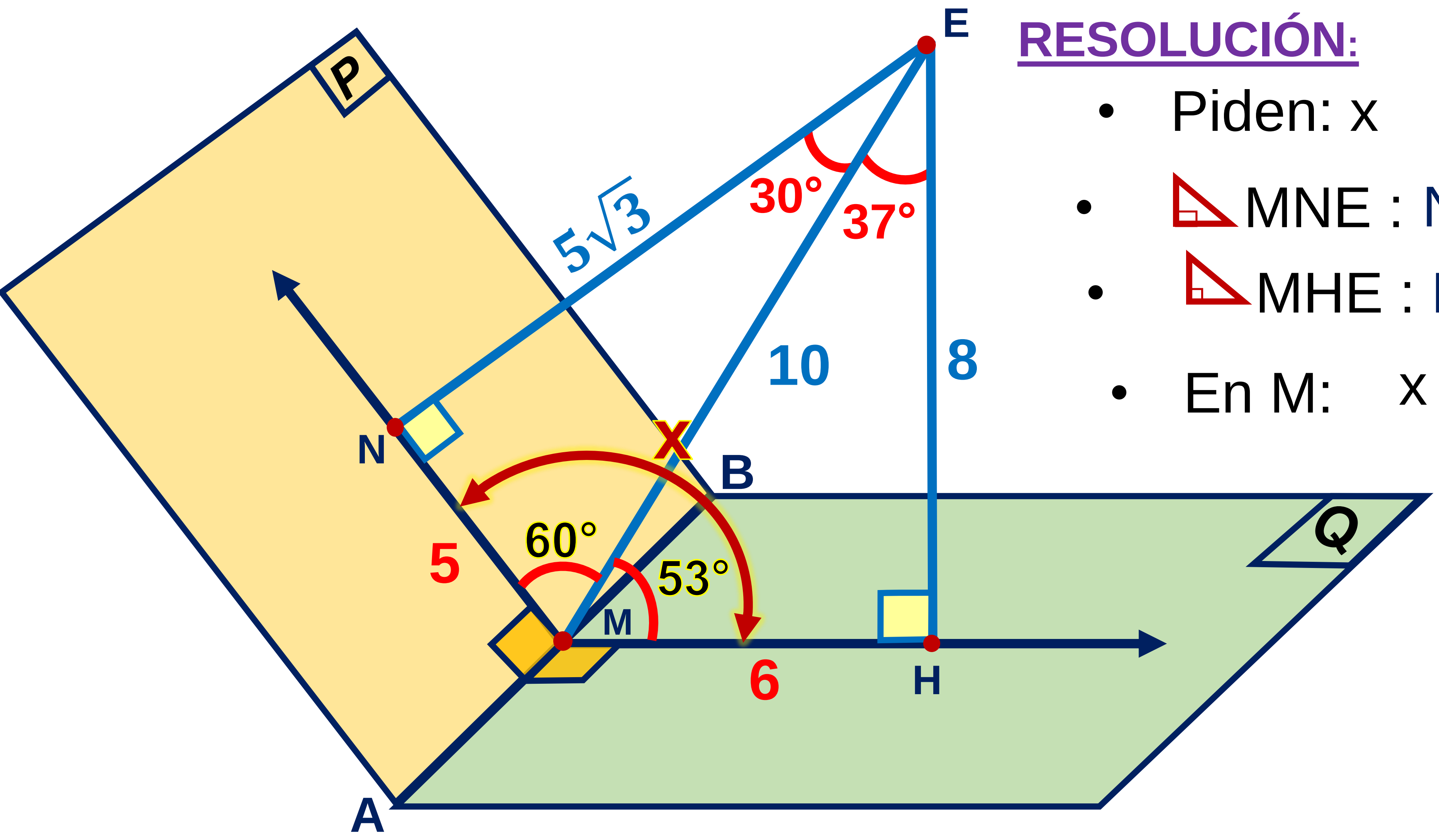
- Piden : x.
- Por dato.

  ABCD y ABEF : Cuadrados
- Se traza $\overline{AE}$.
- ◺ AFE : Notable de 45° y 45°
- ◺ DAE : T. Pitágoras

$$x^2 = (3\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{6})^2$$
$$x^2 = 27 + 54$$
$$x^2 = 81$$

$\boxed{x = 9\ u}$

5.- Halle la medida del ángulo diedro P-AB-Q mostrado.

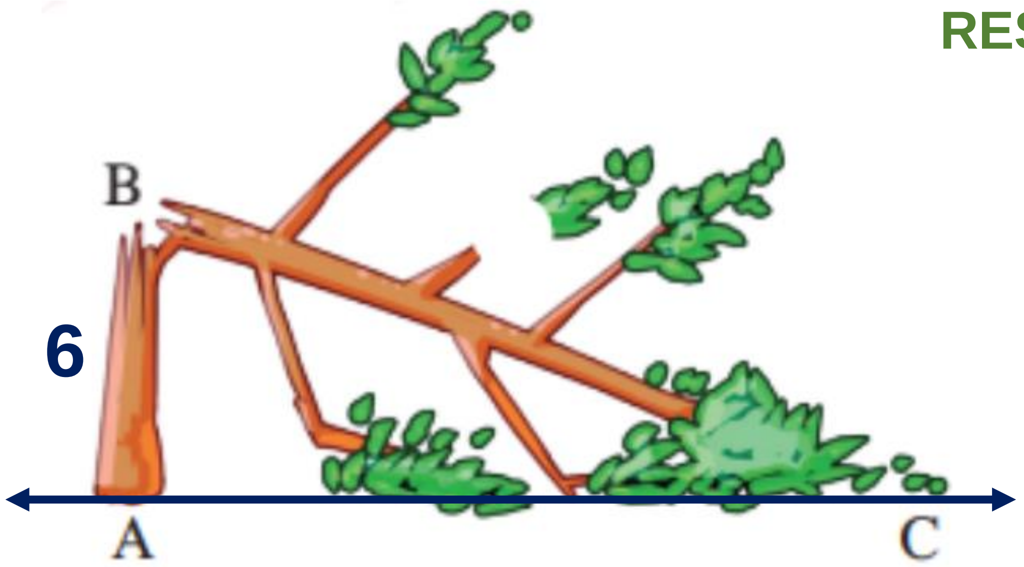


RESOLUCIÓN:

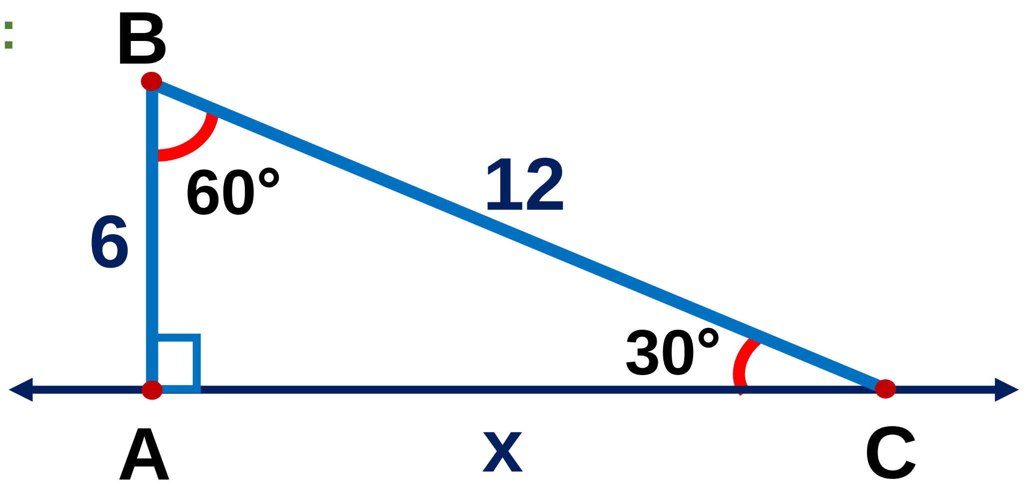
- Piden: x
- ◺MNE : Notable de 30° y 60°
- ◺MHE : Notable de 37° y 53°
- En M: $x = 53° + 60°$

$$\boxed{x = 113°}$$

6. Debido a una tormenta tropical un árbol de 18 m de altura es alcanzado por un rayo y se parte a 6 m del suelo como se muestra en la figura. Calcule la longitud de la proyección del tramo BC sobre el suelo.



RESOLUCIÓN:



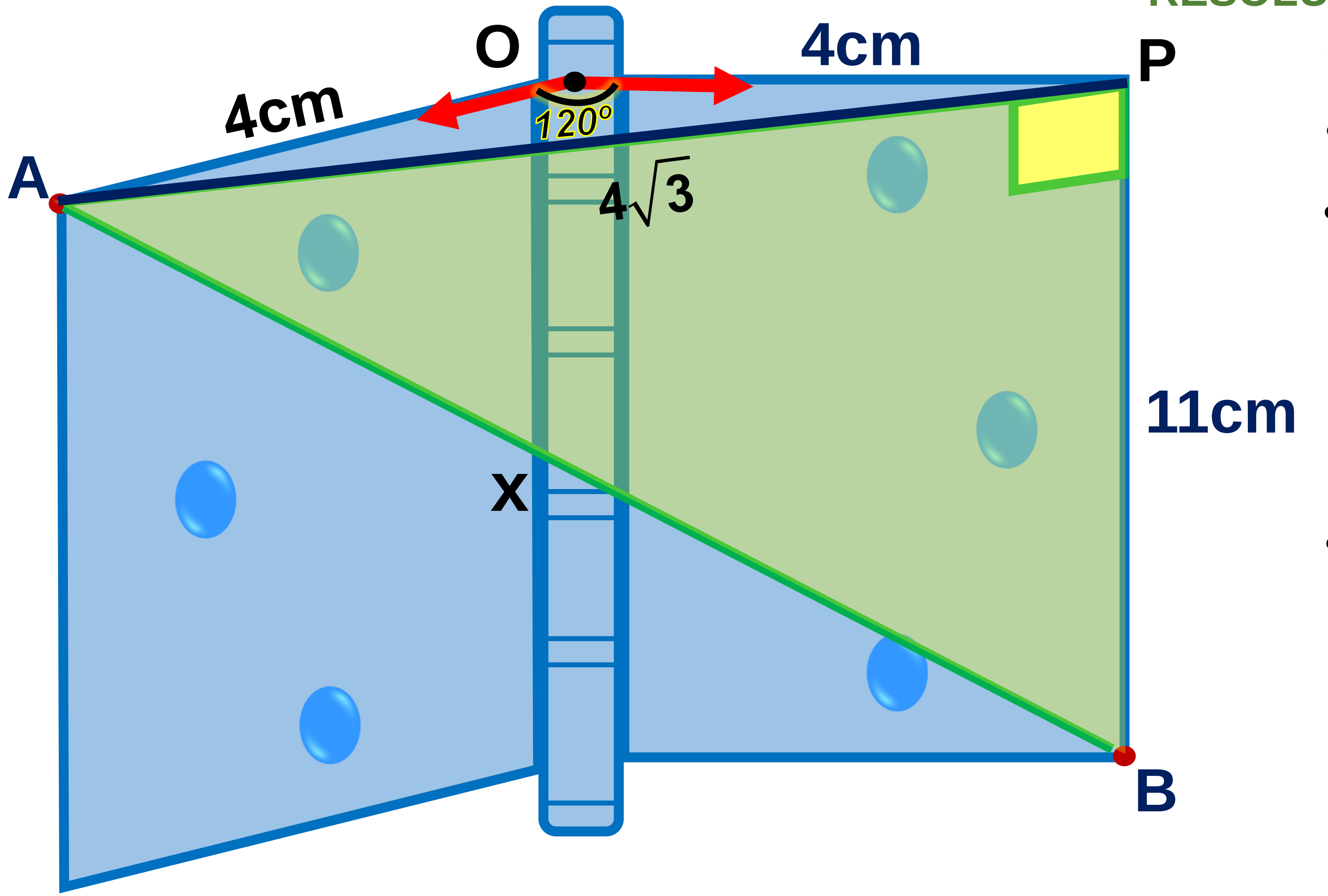
$\overline{AC}$: proyección de $\overline{BC}$ sobre el suelo

Piden: AC = x

⊿ ABC : notable de 30° y 60°

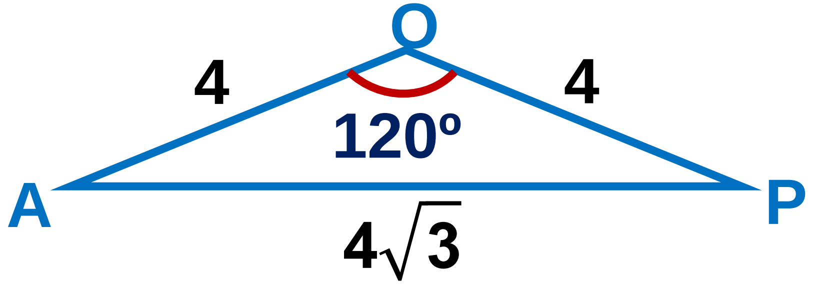
$$\boxed{x = 6\sqrt{3}\ m}$$

7. En la figura se muestra una bisagra la cual se abre formándose un ángulo diedro de 120°. Halle la distancia de A hacia B.



RESOLUCIÓN:

- Piden: x
- Se traza $\overline{AP}$.
- △AOP :



- ◺APB : T. Pitágoras.

$x^2 = (4\sqrt{3})^2 + 11^2$

$x^2 = 169$

$\boxed{x = 13}$