

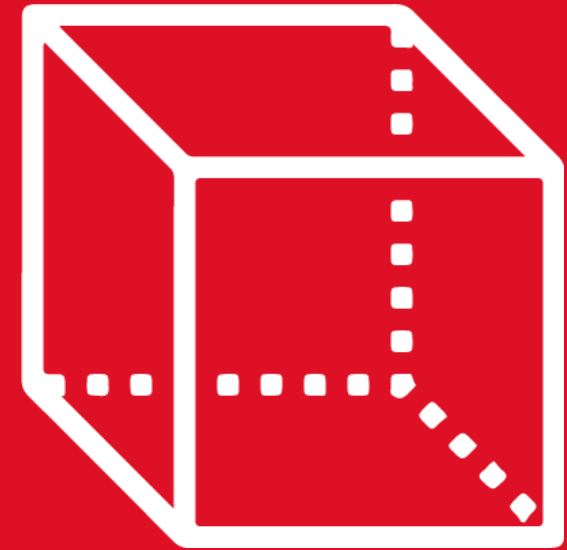


GEOMETRÍA

Capítulo 2

2st
SECONDARY

Ángulos

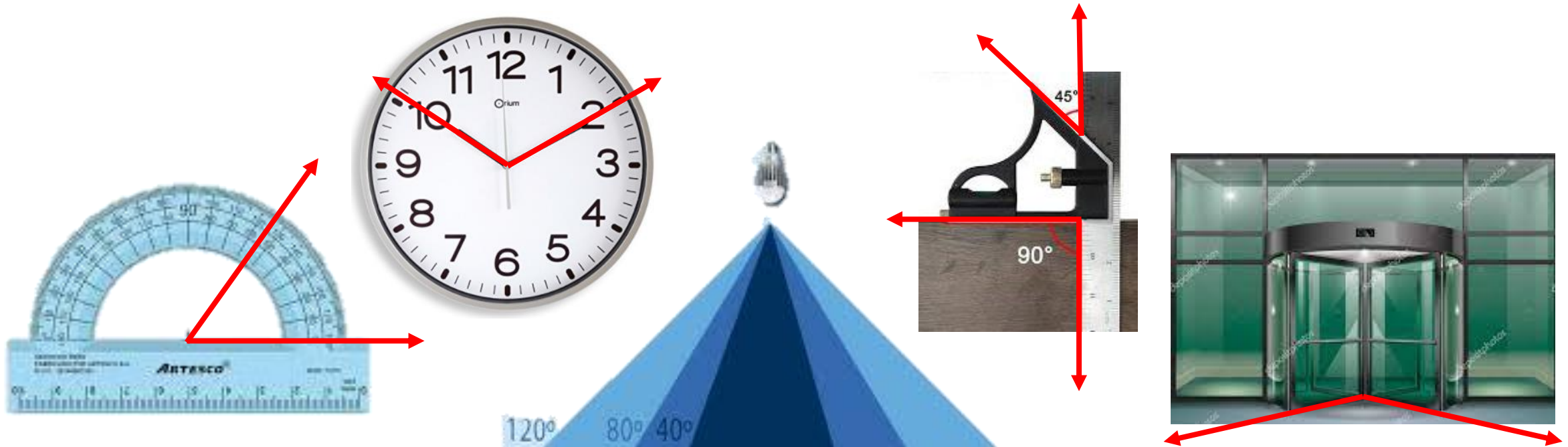


 **SACO OLIVEROS**



El transportador es un instrumento de plástico, que nos ayuda a medir la abertura o amplitud de los ángulos, en nuestra vida cotidiana podemos observar muchos ángulos, por ejemplo el reloj de pared, sus agujas forman un ángulo.

Para grabar un video, las líneas de iluminación deben formar un ángulo adecuado. Las escuadras de carpintería nos ayudan a medir ángulos, la puerta giratoria forman un ángulo recto,...etc. Éste es el tema que estudiaremos a continuación. **Ángulos**





Definición: Es la reunión de dos rayos no colineales que tienen el mismo origen.

ELEMENTOS

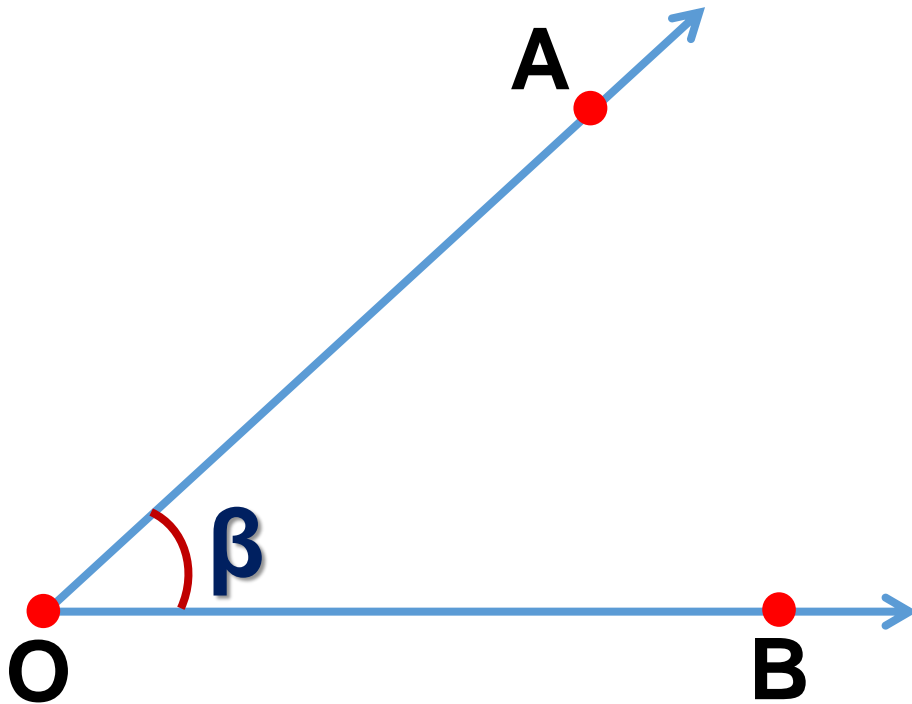
- Vértice : O
- Lados : \overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OB}

NOTACIÓN

$\sphericalangle AOB$: Ángulo AOB.

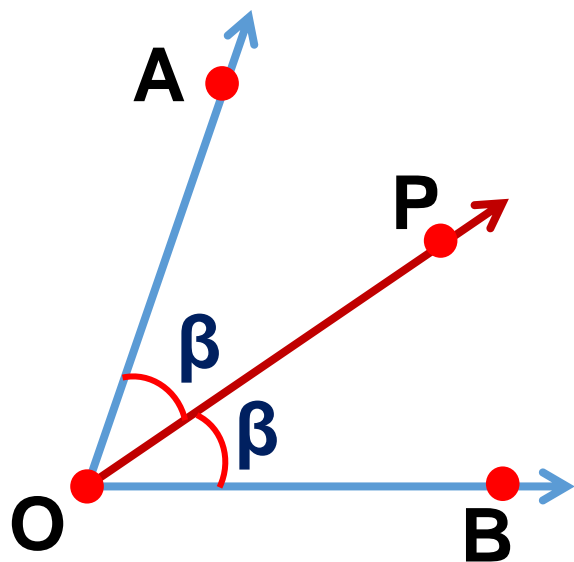
$m\sphericalangle AOB$: medida del ángulo AOB.

$$m\sphericalangle AOB = \beta$$

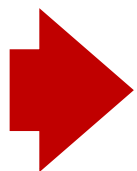


BISECTRIZ

Es aquel rayo cuyo origen es el vértice de un ángulo y que divide a este en dos ángulos de igual medida.



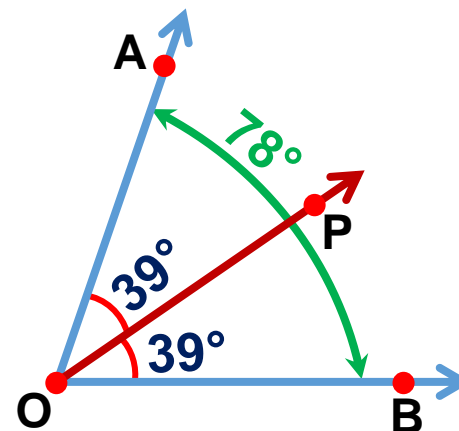
Si : \overrightarrow{OP} es bisectriz del $\angle AOB$



$$m\angle AOP = m\angle BOP$$

Ejemplos:

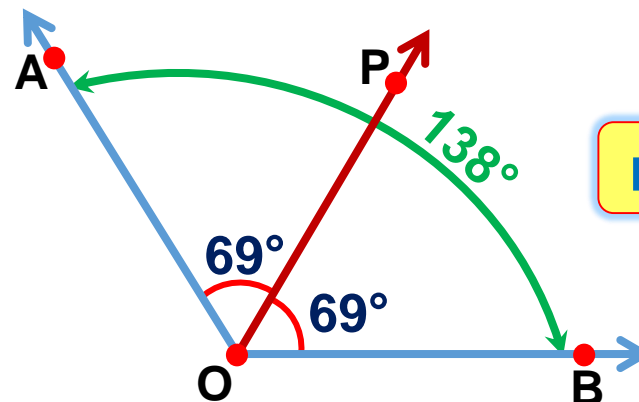
1. Calcule la $m\angle POB$, si \overrightarrow{OP} es bisectriz.



$$m\angle AOP = m\angle POB$$

$$m\angle POB = 39^\circ$$

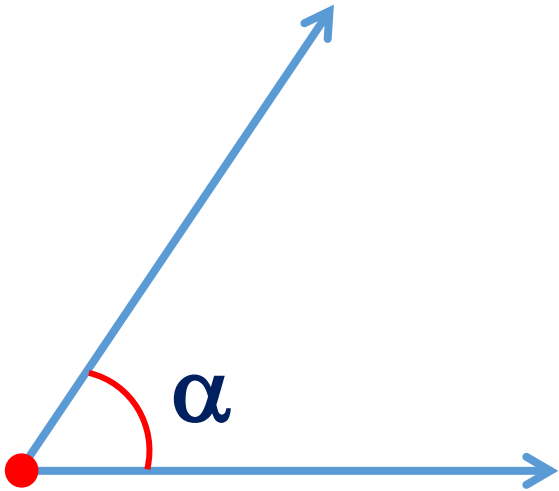
2. Calcule la $m\angle AOB$, si \overrightarrow{OP} es bisectriz.



$$m\angle AOP = m\angle POB$$

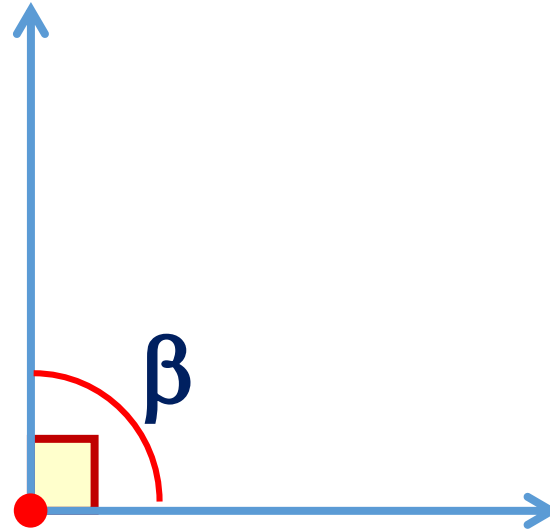
$$m\angle AOB = 138^\circ$$

- De acuerdo a su medida.



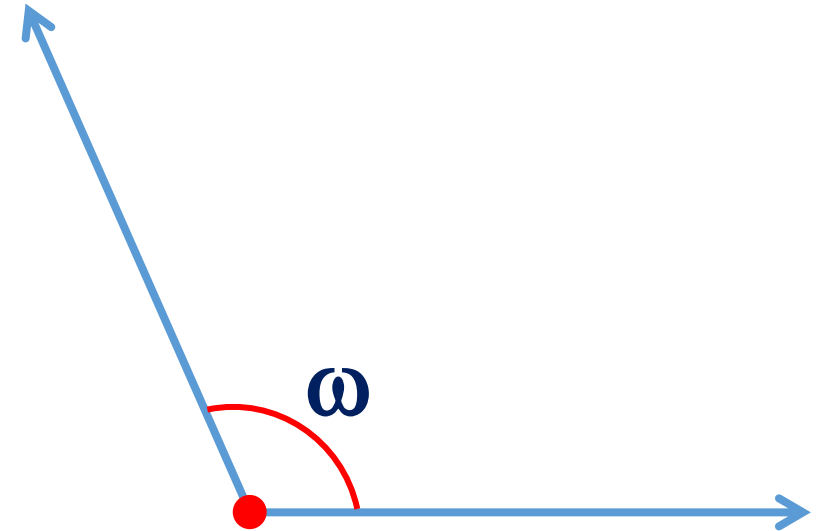
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

∠ Agudo



$$\beta = 90^\circ$$

∠ Recto



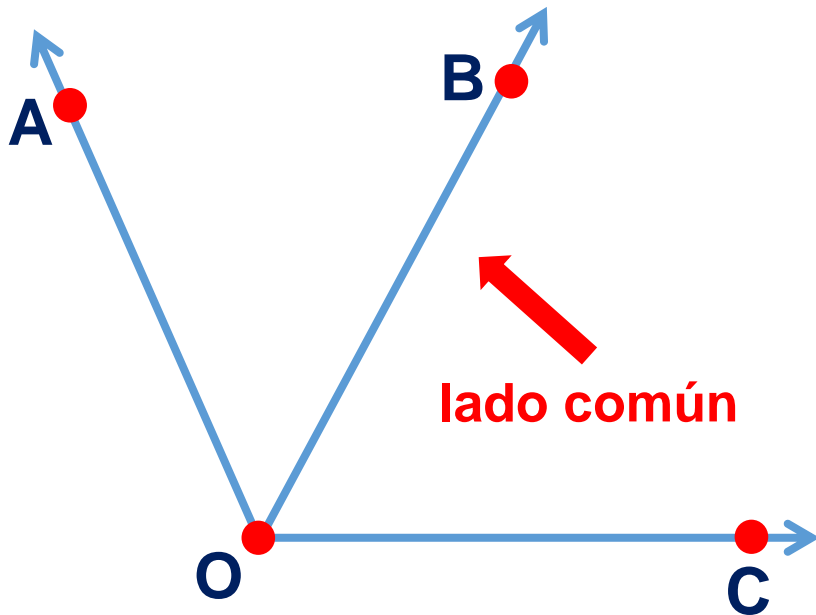
$$90^\circ < \omega < 180^\circ$$

∠ Obtuso

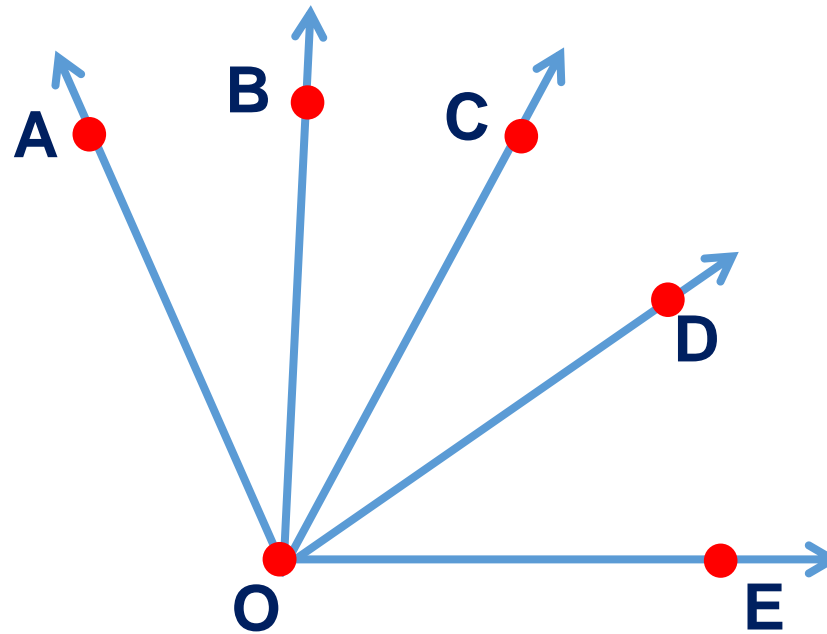


- Según la posición de sus lados

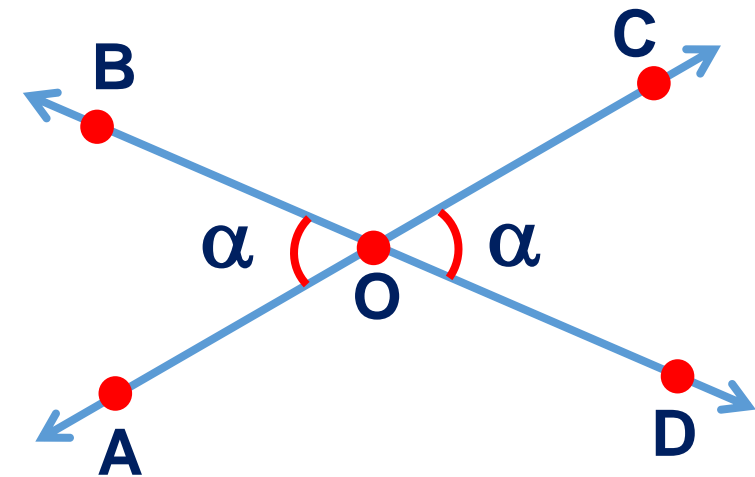
Ángulos adyacentes

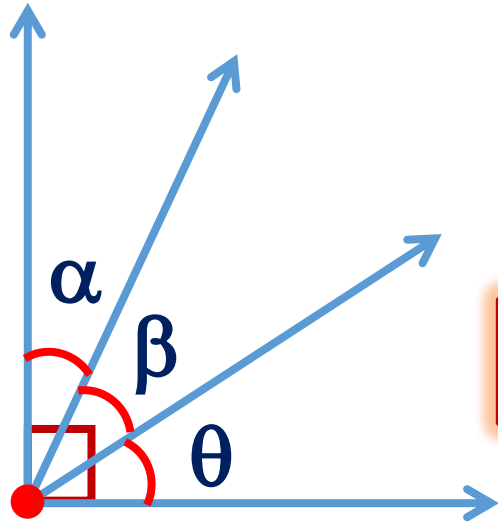


Ángulos consecutivos

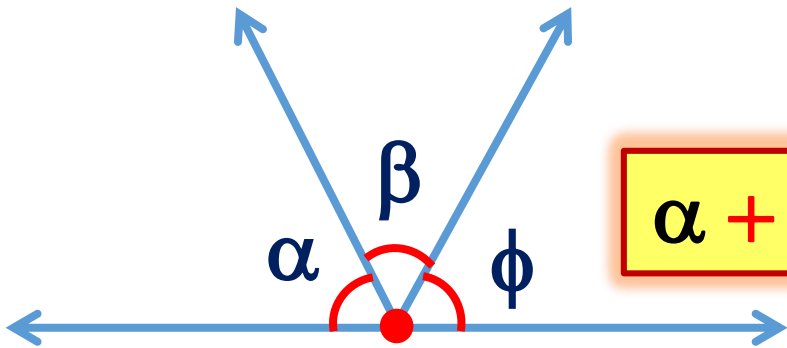


Ángulos opuestos por el vértice

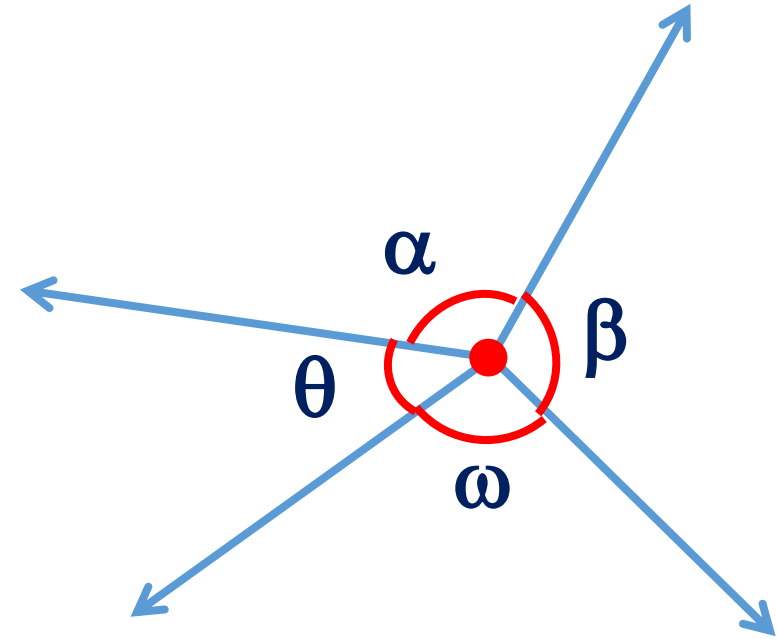




$$\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$$

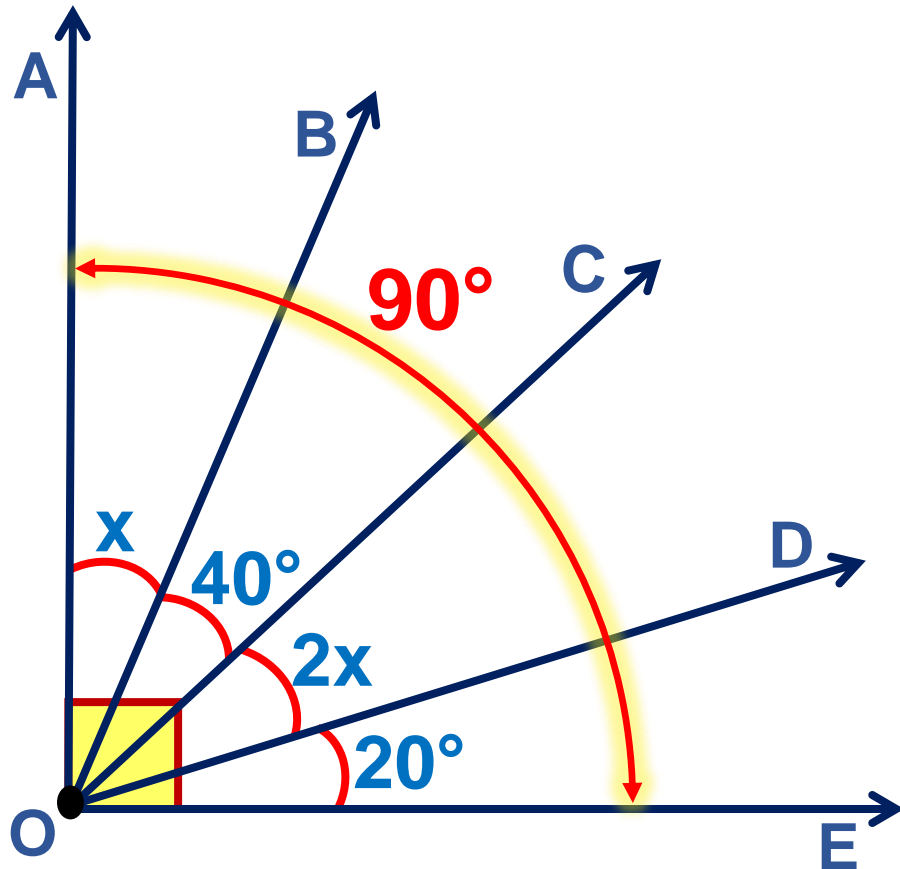


$$\alpha + \beta + \phi = 180^\circ$$



$$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360^\circ$$

1. Se tiene los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD y DOE, tal que $m\angle AOB = x$, $m\angle BOC = 40^\circ$, $m\angle COD = 2x$, $m\angle DOE = 20^\circ$ y $m\angle AOE = 90^\circ$. Halle el valor de x .



Resolución

- Piden: x
- Del gráfico:

$$x + 40^\circ + 2x + 20^\circ = 90^\circ$$

$$3x + 60^\circ = 90^\circ$$

$$3x = 30^\circ$$

$$x = 10^\circ$$



2. Si $m\angle AOB + m\angle BOC = 120^\circ$, halle el valor de β .

Resolución

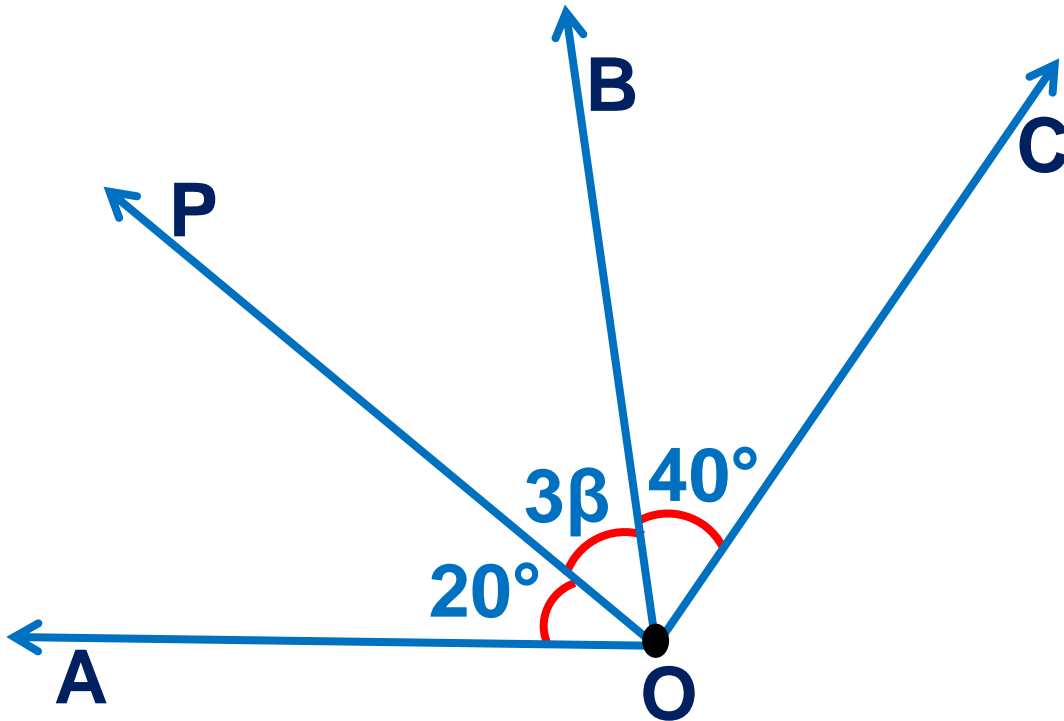
- Piden: β
- Dato:

$$m\angle AOB + m\angle BOC = 120^\circ$$

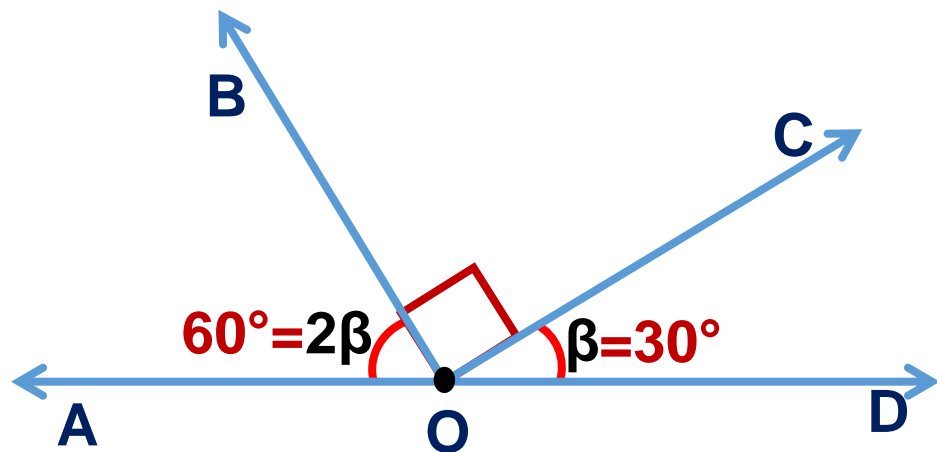
$$20^\circ + 3\beta + 40^\circ = 120^\circ$$

$$3\beta = 60^\circ$$

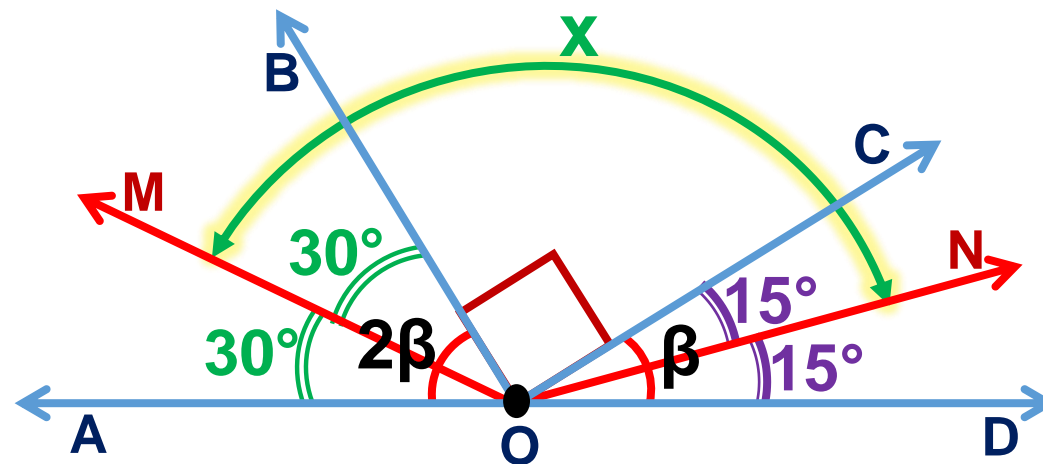
$$\beta = 20^\circ$$



3. En la figura, calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOB y COD.



Resolución



• Piden: $m\angle MON = x$

$$2\beta + 90^\circ + \beta = 180^\circ$$

$$3\beta = 90^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

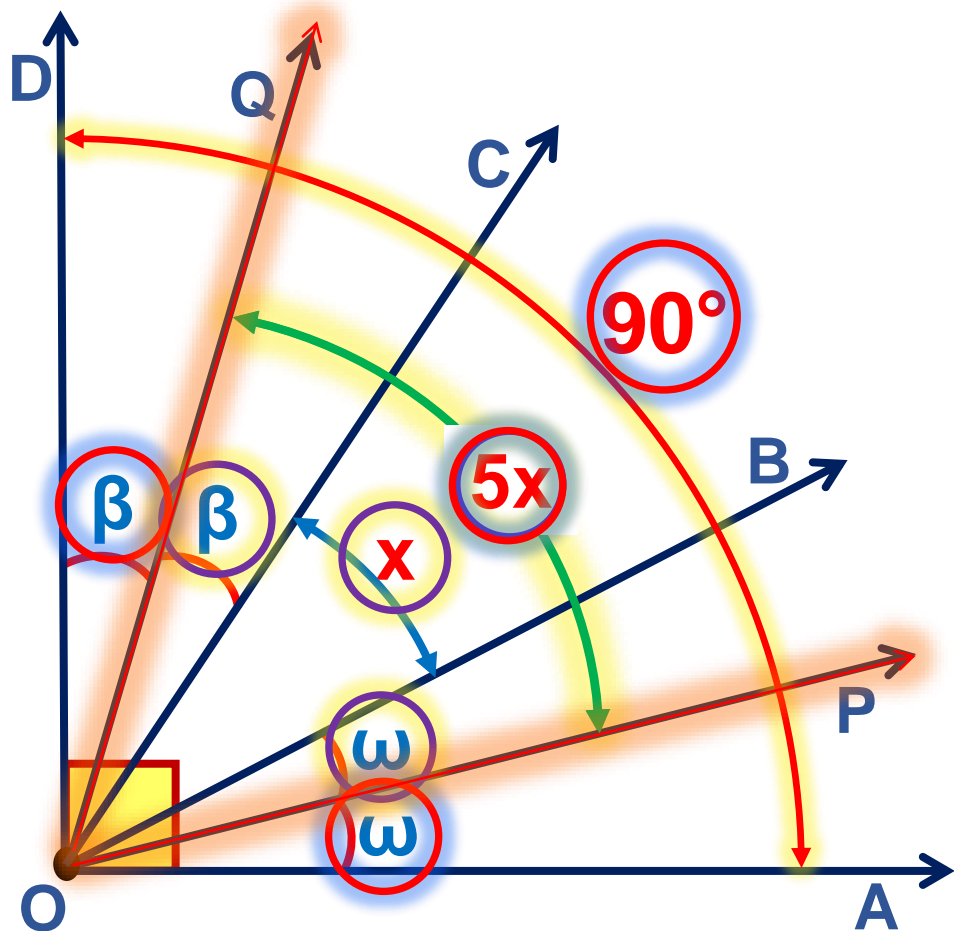
• Luego:

$$x = 30^\circ + 90^\circ + 15^\circ$$

$$x = 135^\circ$$

$$m\angle MON = 135^\circ$$

4. En la figura, $m\angle AOD = 90^\circ$, $m\angle BOC = x$ y $m\angle POQ = 5x$. Halle el valor de x .



Resolución

• Piden: x

• En el $\angle QOP$:

$$\beta + x + \omega = 5x$$

$$\beta + \omega = 4x$$

• En el $\angle DOA$:

$$\beta + \omega + 5x = 90^\circ$$

$$4x + 5x = 90^\circ$$

$$9x = 90^\circ$$

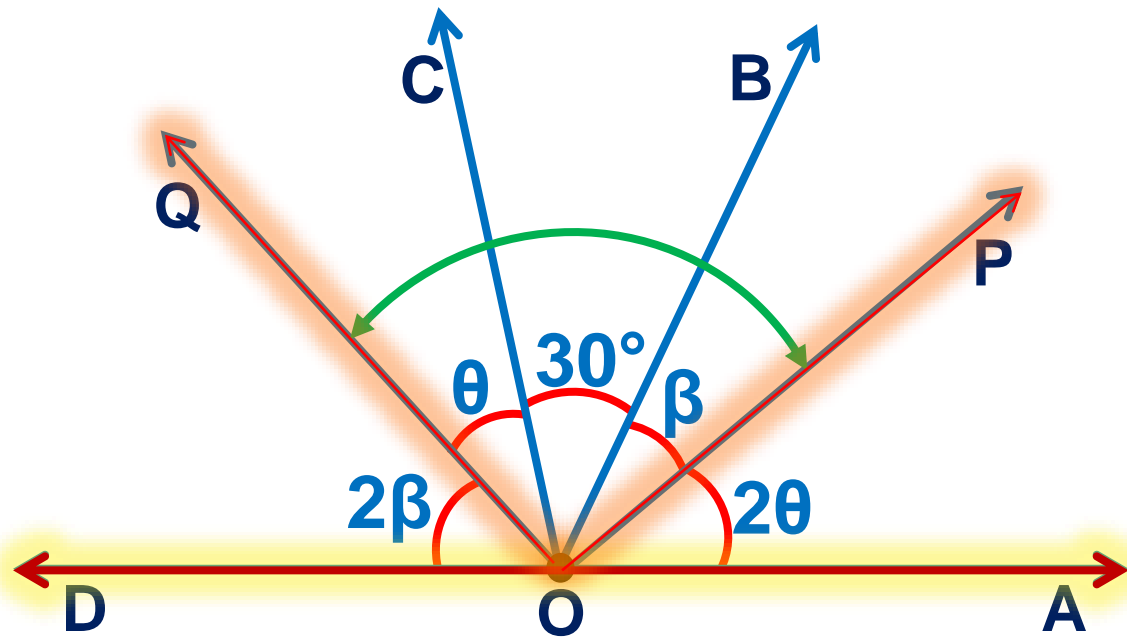
$$x = 10^\circ$$

5. Según el gráfico, $m\angle POQ$.

\overrightarrow{OA} y \overrightarrow{OD} son rayos opuestos. Calcule la

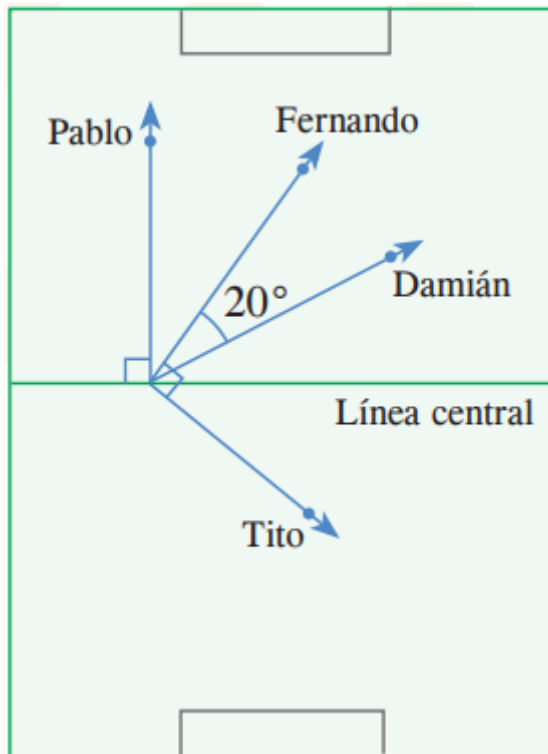
Resolución

- Piden: $m\angle POQ$
- Del gráfico:
$$3\theta + 3\beta + 30^\circ = 180^\circ$$
$$3\theta + 3\beta = 150^\circ$$
$$\theta + \beta = 50^\circ$$
- Calculando la $m\angle POQ$
$$m\angle POQ = \theta + \beta + 30^\circ$$
$$m\angle POQ = 50^\circ + 30^\circ$$

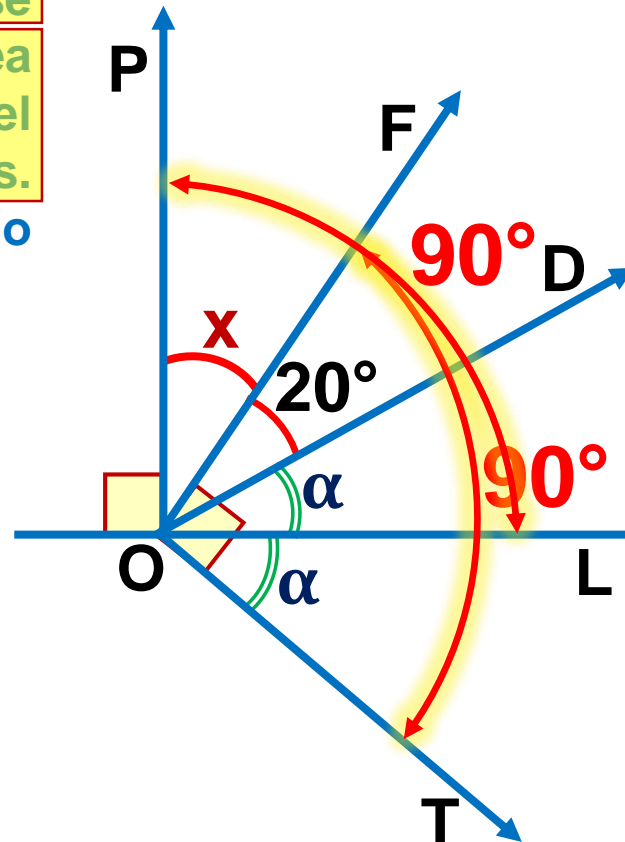


$$m\angle POQ = 80^\circ$$

6. El esquema muestra las ubicaciones de unos amigos en un campo de fútbol. **Damián y Tito se ubican de tal forma que la línea central del campo es la bisectriz del ángulo formado por estos amigos.** Halle la medida del ángulo formado por Pablo y Fernando.



Resolución



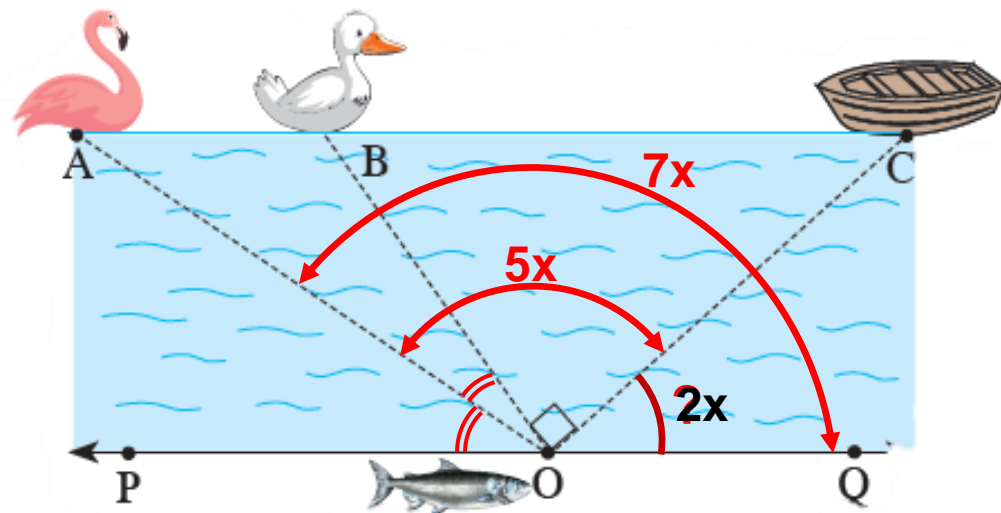
- Piden: $m\angle POF = x$
- Dato: \overline{OL} es bisectriz $\angle DOT$
 $m\angle DOL = m\angle LOT = \alpha$
- En el $\angle FOT$:
 $\alpha + \alpha + 20^\circ = 90^\circ$
 $2\alpha = 70^\circ$
 $\alpha = 35^\circ$
- En el $\angle POL$:
 $x + 20^\circ + \alpha = 90^\circ$
 $x + 20^\circ + 35^\circ = 90^\circ$
 $x = 35^\circ$

$$m\angle POF = 35^\circ$$

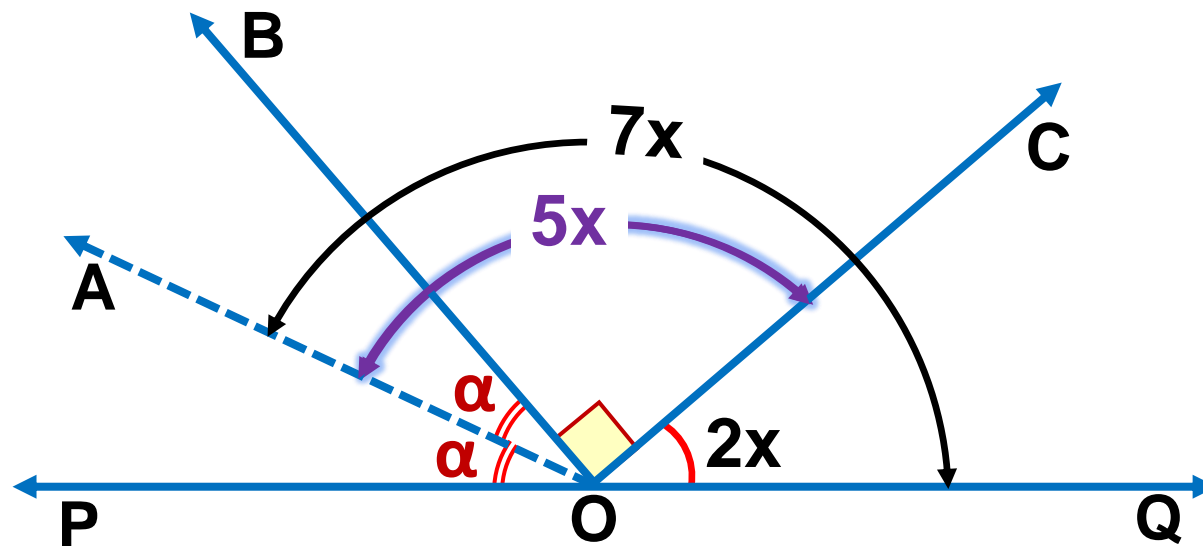
HELICO | PRACTICE



7. En el fondo de una laguna, un pez observa en un instante en la superficie del agua a una parihuana, un pato y un bote, como se muestra en la figura. Si \overrightarrow{OA} es bisectriz del $\angle POB$, $m\angle AOC = 5x$ y $m\angle AOQ = 7x$, calcule la medida del ángulo con que observa el pez al bote respecto de la recta.



Resolución



Piden: $2x$

$$2\alpha + 2x = 90^\circ$$

$$\alpha + x = 45^\circ \dots (1)$$

$$m\angle AOC = 5x$$

$$\alpha + 90^\circ = 5x \dots (2)$$

Restando las ecuaciones (1) y (2)

$$\begin{array}{r} \cancel{\alpha} + x = 45^\circ \\ \cancel{\alpha} + 90^\circ = 5x \\ \hline x - 90^\circ = 45^\circ - 5x \\ 6x = 135^\circ \end{array}$$

$$2x = 45^\circ$$