ARITHMETIC

Chapter 19

5th
SECONDARY

Números racionales

SACO OLIVEROS

Al sumar estos números $\frac{3}{100};\quad \frac{25}{10.000};\quad \frac{748}{10};\quad$ etc.

Un ingeniero y matemático holandés llamado Simón Stevin inventó en el S. XVI un método para hacer cálculos con fracciones decimales sin usar el denominador. Por ejemplo, escribía

$\frac{3}{100}$	como	$\overset{\boxed{2}}{3}$
$\frac{25}{10.000}$	como	$\overset{\boxed{3}}{2}\quad\overset{\boxed{4}}{5}$
$\frac{748}{10}$	como	$7\quad 4\quad \overset{\boxed{1}}{8}$

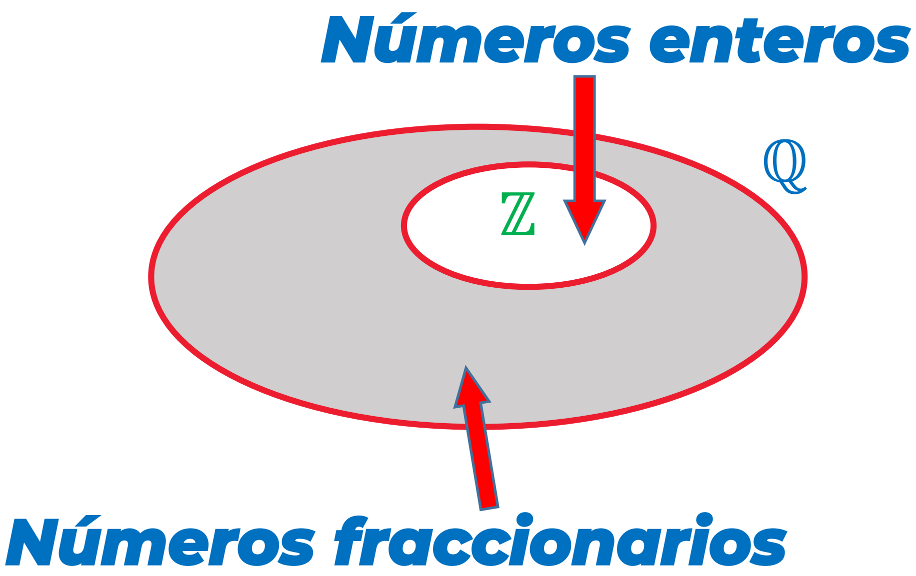
Al sumar estos números, obtenía $\overset{\boxed{2}}{3} + \overset{\boxed{3}}{2}\;\overset{\boxed{4}}{5} + 7\;4\;\overset{\boxed{1}}{8} = 7\;4\;\overset{\boxed{1}}{8}\,.\,\overset{\boxed{2}}{3}\;\overset{\boxed{3}}{2}\;\overset{\boxed{4}}{5}$

Aunque su método no llegó a usarse mucho, su idea fue tomada por un gran matemático escocés, Napier, quien desarrolló, a partir de la proposición de Stevin, otra manera de escribir las fracciones decimales.

RACIONALES

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

Ejm. $\frac{12}{5}; \frac{-9}{13}; \frac{8}{-5}; \frac{1}{4}; \frac{18}{6}$



DENSIDAD DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Dados los números racionales m y n con $m < n$, siempre existe un número racional p, tal que

$$\boxed{m < p < n}$$

NÚMEROS FRACCIONARIOS

Son los números racionales no enteros.

Ejm. $\frac{9}{25}; \frac{7}{-3}; \frac{15}{10}$

FRACCIONES

Son aquellos números fraccionarios cuyos términos son enteros positivos.

$$F = \left\{\frac{a}{b} / (a,b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})\right\}$$

Ejm

$$\frac{12}{5}; \frac{9}{13}; \frac{8}{5}; \frac{1}{4}$$

Llamamos:

$$F = \frac{a}{b}$$

Numerador : a

Denominador : b

CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

A POR LA COMPARACIÓN DE SU VALOR RESPECTO A LA UNIDAD

1. Propia

Ejm $\frac{15}{25};\frac{9}{13};\frac{19}{30}$

$$f=\frac{a}{b}<1\rightarrow a<b$$

$$0<f<1$$

2. Impropia

Ejm $\frac{18}{12};\frac{11}{3};\frac{5}{2}$

$$f=\frac{a}{b}>1\rightarrow a>b$$

$$f>1$$

B POR SU DENOMINANDOR

1. Decimal

Ejm $\frac{7}{10^2};\frac{23}{10};\frac{45}{10^3}$

$$f=\frac{a}{b}\rightarrow b=10^n$$

$$\forall\ n\epsilon\mathbb{Z}^+$$

2. Ordinaria

Ejm $\frac{5}{26};\frac{12}{8};\frac{15}{6}$

$$f=\frac{a}{b}\rightarrow b\neq 10^n$$

$$\forall\ n\epsilon\mathbb{Z}^+$$

PROPIEDADES

1. Sean las fracciones irreductibles

A

$$Si:\ \frac{a}{b}+\frac{c}{d}=k\ ;(k\in\mathbb{Z})\rightarrow b=d$$

B

$$Sean\ \frac{a}{m};\frac{b}{n};\frac{c}{p}$$

$$MCD\left(\frac{a}{m};\frac{b}{n};\frac{c}{p}\right)=\frac{MCD(a;b;c)}{MCM(m;n;p)}$$

$$MCM\left(\frac{a}{m};\frac{b}{n};\frac{c}{p}\right)=\frac{MCM(a;b;c)}{MCD(m;n;p)}$$

1. ¿Cuántos valores toma a si la fracción $\frac{a}{30}$ es propia e irreductible?

RESOLUCIÓN

f. propia: $a < 30 \Rightarrow a: 1; 2; 3; \ldots; 29$

f. irreductible: a y 30 son (PESI) $\Rightarrow 30 = 2^3 \times 3 \times 5$

$a \neq \overset{\circ}{2}; \overset{\circ}{3} \wedge \overset{\circ}{5}$

$a: 1; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29.$

∴ Cantidad de valores que toma a

$\boxed{8}$

2. Halle una fracción equivalente a $\frac{112}{364}$ sabiendo que el MCM de sus términos es 624. Dé como respuesta el numerador.

RESOLUCIÓN

$$\frac{112}{364} = \frac{4k}{13k} \Rightarrow \mathrm{MCM}(4k; 13k) = 624$$

$$52k = 624$$

$$k = 12$$

El numerador es :

$$\therefore\ 4k = 4(12) = \boxed{48}$$

3. Halle el valor de N sabiendo que $\dfrac{N}{\overline{3a5a}}$ es equivalente a $\dfrac{13}{17}$.

RESOLUCIÓN

$$\frac{N}{\overline{3a5a}} = \frac{13k}{17k}$$

$$\overline{3a5a} = \overset{\circ}{17}$$

$$3050 + \overline{a0a} = \overset{\circ}{17}$$

$$3050 + 101a = \overset{\circ}{17}$$

$$(\overset{\circ}{17} + 7) + (\overset{\circ}{17} - 1)a = \overset{\circ}{17}$$

$$\overset{\circ}{17} + 7 - a = \overset{\circ}{17}$$

$$a = 7$$

Reemplazando a

$$\overline{3a5a} = 17\boldsymbol{k}$$

$$3757 = 17\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{k} = 221$$

$$\mathrm{N} = 13k = 13(221) = \boxed{2873}$$

4. **Si la suma de dos fracciones irreductibles resulta 5 y la suma de sus numeradores es 40, ¿cuál es la suma de sus denominadores?**

RESOLUCIÓN

sean las fracciones irreductibles:

$$\frac{a}{b} \quad y \quad \frac{c}{d}$$

Del dato tenemos:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 5$$

propiedad
$b = d$

Reemplazando :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = 5 \Rightarrow \frac{a+c}{b} = 5$$

dato: $a + c = 40$

$$\Rightarrow 5.b = 40 \qquad \boxed{b = 8}$$

Piden: suma de denominadores

$$\therefore 8 + 8 = \boxed{16}$$

5. **Mi sueldo asciende a S/2400 y gasté los $\frac{2}{5}$; luego se me perdieron los $\frac{3}{8}$ del resto y finalmente en una apuesta logro ganar $\frac{2}{3}$ de lo que me quedaba. ¿Cuánto dinero me queda ahora?**

RESOLUCIÓN

Sea "x" la cantidad inicial

Del dato tenemos:

Variación	QUEDA
$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}x$
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}\left(\frac{3}{5}x\right)$
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}\left[\frac{5}{8}\left(\frac{3}{5}x\right)\right]$

Donde:

$$\frac{\cancel{5}}{\cancel{3}} \times \frac{5}{8} \times \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \times x = \textbf{queda}$$

$$\frac{5}{\cancel{8}} \times \overset{300}{\cancel{2400}}$$

Piden: $\therefore\ queda = 1500$

$\boxed{\text{S/ 1500}}$

6. En la vitivinícola Tabernero ubicada en el valle de Chincha se realizó la siguiente prueba:
De un recipiente lleno de vino se retiró la sexta parte y se reemplazó por agua; luego se retiró las 2/3 partes de la mezcla y se volvió a reemplazar con agua. ¿Cuál será la relación de agua y vino que queda en dicho recipiente?

RESOLUCIÓN

Del dato tenemos:

RETIRA	QUEDA DE VINO PURO
$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}V$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}\left(\frac{5}{6}V\right)$

Sea $"V"$ *la cantidad de vino inicial*

Donde:

queda vino $= \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} \times V = \frac{5}{18} \times V$

cantidad de agua $= V - \frac{5}{18}V = \frac{13}{18}V$

$\div$

Piden: ***relación de agua y vino***

$$\frac{(13/\cancel{18})\cancel{V}}{(5/\cancel{18})\cancel{V}} \quad \therefore \frac{13}{5}$$

$\boxed{13 \text{ a } 5}$

7. **La mitad de la gaseosa que me queda en la botella es igual a la tercera parte de lo que ya me tomé. Si tomo la cuarta parte de lo que me queda, ¿qué fracción de toda la gaseosa me habré tomado?**

RESOLUCIÓN

Sea "q" la cantidad que queda

y *"t" la cantidad que tome*

Donde: **Total** = $\boxed{q + t}$

Del dato tenemos:

$$\frac{1}{2}\cdot q = \frac{1}{3}\cdot t \Rightarrow \frac{q}{t} = \frac{2k}{3k}$$

sigue tomando $= \frac{1}{4}(2k) = \frac{k}{2}$

Entonces:

tome $= 3k + \frac{k}{2} = \frac{7k}{2}$

Total $= (5k)$

Piden:

$$\frac{\frac{7\cancel{k}}{2}}{5\cancel{k}} = \frac{7}{10}$$

$\boxed{7/10}$