ALGEBRA

CHAPTER 13

5th OF SECONDARY

DESIGUALDADES E INECUACIONES RACIONALES

SACO OLIVEROS

El costo de una lavadora LG de 11Kg de capacidad cuesta 8T soles ,donde T está dado por el producto de los valores enteros de resolver la siguiente inecuación:

$$x^2 - 7x + 10 \leq 0$$

¿Cuál es el costo de dicha lavadora?

RPTA: S/960

HELICO

THEORY

SACO OLIVEROS

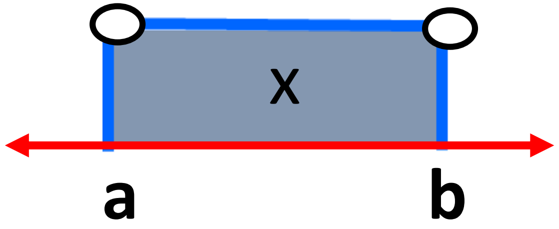
DESIGUALDADES E INECUACIONES RACIONALES

1) INTERVALOS

Pueden ser: Acotados y No Acotados

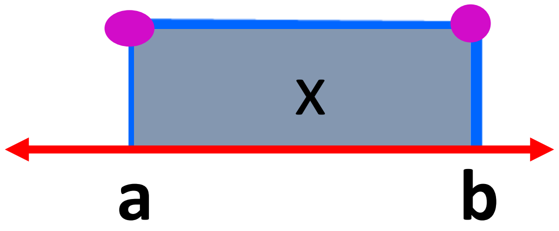
INTERVALO ACOTADO :

Intervalo Abierto



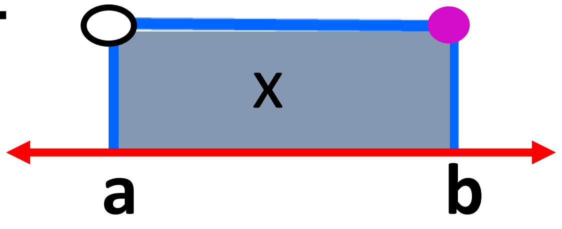
$\langle a;b\rangle = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$

Intervalo Cerrado

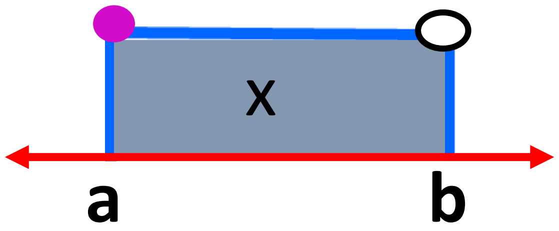


$[a;b] = \{x \in R \,/\, a \leq x \leq b\}$

Intervalos Semiabiertos

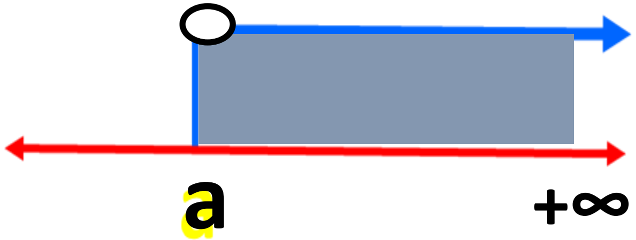


$\langle a;b] = \{x \in R \,/\, a < x \leq b\}$

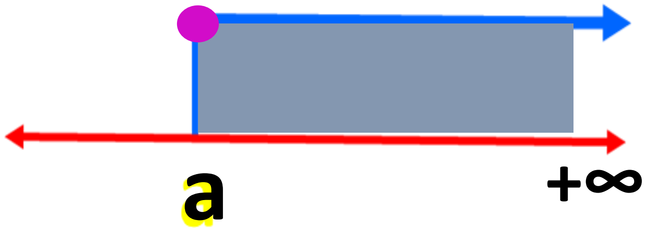


$[a;b\rangle = \{x \in R \,/\, a \leq x < b\}$

INTERVALOS NO ACOTADO :



$\langle a; +\infty \rangle = \{x \in R \,/\, x > a\}$



$[a; +\infty \rangle = \{x \in R \,/\, x \geq a\}$

$<-\infty; a> = \{x \in R \ / \ x < a\}$

$<-\infty; a] = \{x \in R \ / \ x \leq a\}$

2) PROPIEDADES DE DESIGUALDADES

$\forall a,b \in R \ , \ m > 0$

$\text{Si: } a > b \Rightarrow am > bm$

$\text{Si: } a > b \Rightarrow \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m}$

$\forall a,b \in R \ , \ m < 0$

$\text{Si: } a > b \Rightarrow am < bm$

$\text{Si: } a > b \Rightarrow \dfrac{a}{m} < \dfrac{b}{m}$

Si a y b tienen el mismo signo, además:

$a < x < b$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{a}$

3) INECUACIÓN DE PRIMER GRADO

Son inecuaciones que se reducen a la forma:

$ax + b > 0 \quad ; a \neq 0$

$ax + b < 0 \quad ; a \neq 0$

a) Resuelva:

$$(x+4)^2 \leq (x+2)(x+5)$$

$$\cancel{x^2}+8x+16 \leq \cancel{x^2}+7x+10$$

$$8x+16 \leq 7x+10$$

$$x \leq -6$$

CS= <-∞; 6]

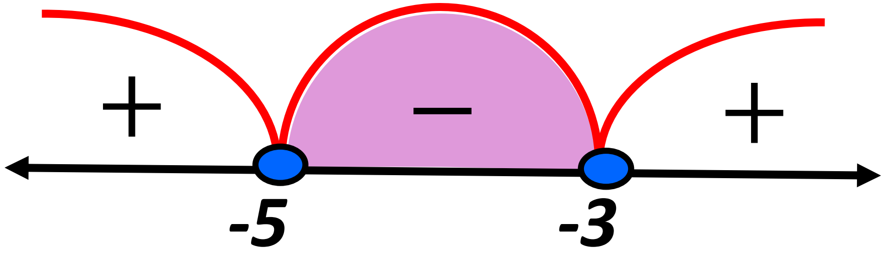
4) INECUACIONES CUADRÁTICAS

a) Resuelva:

$$x^2+8x+15 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x+5) \leq 0$$

Puntos críticos:
$\begin{cases} x+3=0 \Rightarrow x=-3 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$



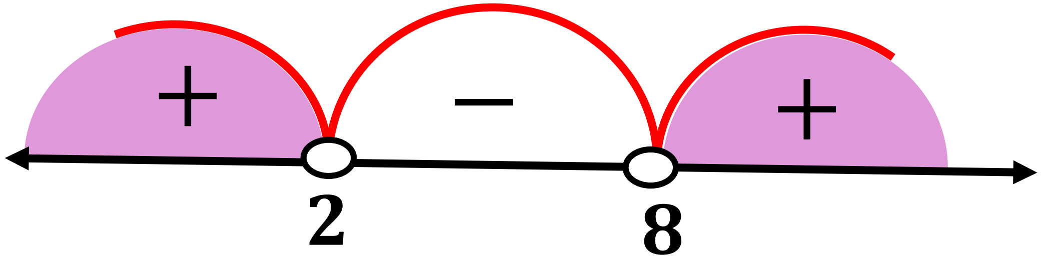
CS= $[-5;-3]$

b) Resuelva:

$$x^2-10x+16 > 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-8) > 0$$

Puntos críticos:
$\begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x-8=0 \Rightarrow x=8 \end{cases}$



CS= $<-\infty;2> \cup <8;+\infty>$

5) INECUACIONES FRACCIONARIAS

a) Resuelva:

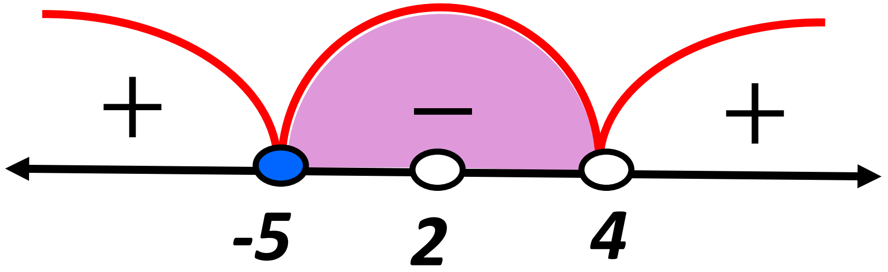
$$\frac{x^2+3x-10}{x^2-6x+8} \leq 0$$

$$\frac{(x+5)\cancel{(x-2)}}{(x-4)\cancel{(x-2)}} \leq 0$$

Podemos observar que: $\boxed{x \neq 2}$

Puntos críticos:

$$\begin{cases} x+5=0 & \Rightarrow x=-5 \\ x-4=0 & \Rightarrow x=4 \end{cases}$$



CS= $[-5;4\rangle - \{2\}$

HELICO

PRACTICE

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1 **Si $x \in [-1;3\rangle$. Halle el intervalo de $(5-4x)$**

Resolución

Por propiedades (del dato)

$$-1 \leq x < 3$$

Multiplicamos por - 4

$$4 \leq -4x < -12$$

Luego

$$-12 < -4x \leq 4$$

Aumentamos 5

$$-7 < 5-4x \leq 9$$

$$(5-4x) \in \langle -7;9]$$

$$\therefore (5-4x) \in \langle -7;9]$$

PROBLEMA 2 Resolver $3(x+1)+4(x-3)<5(x+7)$.

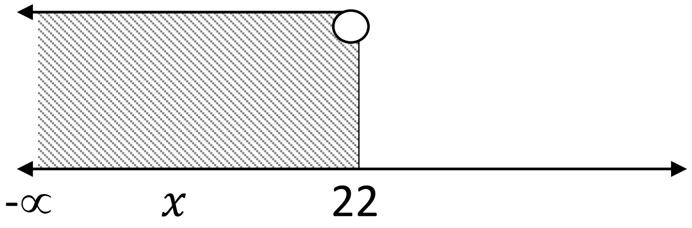
Resolución

$$3x+3+4x-12<5x+35$$

$$7x-9<5x+35$$

$$2x<44$$

$$x<22$$



$$x\in\langle-\infty;22\rangle$$

$$\therefore\ x\in\langle-\infty;22\rangle$$

PROBLEMA 3 Determine el menor valor entero que verifica la inecuación:

$$\frac{x+2}{2}+\frac{2x-3}{4}>\frac{2x-1}{3}+\frac{19}{12}$$

Resolución

m.c.m (2-4-3-12) = 12

$\Rightarrow$ $6(x+2)+3(2x-3)>4(2x-1)+19$

$\Rightarrow$ $6x+12+6x-9>8x-4+19$

$\Rightarrow$ $12x+3>8x+15$

$\Rightarrow$ $4x>12$ $\Rightarrow$ $x>3$

$\Rightarrow$ $x>3$ abierto

4; 5; 6; 7 …

$\therefore$ El menor valor entero es el 4

PROBLEMA 4

Resuelva: $6x^2 + 5x - 4 > 0$

Resolución

$$6x^2 + 5x - 4 > 0$$

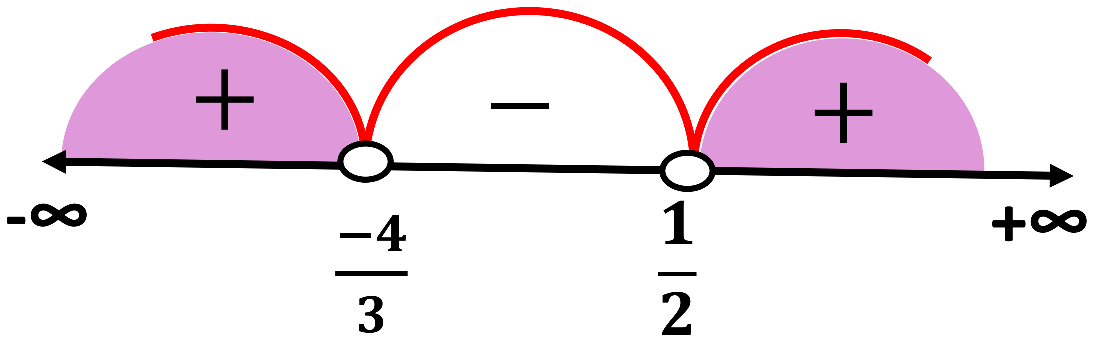
$3x \qquad +4$

$2x \qquad -1$

$$(3x + 4)(2x - 1) > 0$$

Puntos críticos : $\begin{cases} 3x+4 = 0 \\ 2x-1 = 0 \end{cases}$

$x = \frac{-4}{3}$; $x = \frac{1}{2}$



$\therefore$ CS$= \langle -\infty; \frac{-4}{3} \rangle \cup \langle \frac{1}{2}; +\infty \rangle$

PROBLEMA 5 Resolver e indique el mayor valor entero de x que verifique la inecuación:

$$2(x+6)(x-3) \leq x(x+6)$$

Recordar:

Identidad de Steven

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)\,x + ab$$

Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Resolución

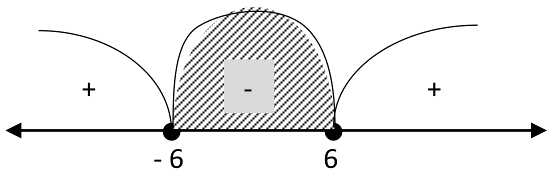
$$2\left(x^2 + 3x - 18\right) \leq x^2 + 6x$$

$$2x^2 + \cancel{6x} - 36 \leq x^2 + \cancel{6x}$$

$$x^2 - 36 \leq 0$$

$$(x+6)(x-6) \leq 0$$

Puntos críticos : $\begin{cases} x + 6 = 0 \quad \rightarrow x = -6 \\ x - 6 = 0 \quad \rightarrow x = 6 \end{cases}$



$$CS = [-6; 6]$$

$\rightarrow$ El mayor valor entero de x es 6

$\therefore 6$

PROBLEMA 6 Si m representa la edad de Piero en la actualidad, donde m es el menor valor que satisface: $7+12x-2x^2<m$; $\forall\ x\ \in$ Reales
¿Qué edad tendrá Piero dentro de 7 años?

Recordar:

Teorema del trinomio positivo

Si: $ax^2+bx+c>0\ \ ;\forall x\in\mathbb{R}$
Se cumple que:
$a>0\quad \wedge = b^2-4ac<0$

Resolución

$$7+12x-2x^2<m$$

Multiplicamos por -1

$$-7-12x+2x^2>-m$$

$$2x^2-12x+m-7>0$$

Donde: $\begin{cases} a=2 \\ b=-12 \\ c=m-7 \end{cases}$

Aplicando el teorema del trinomio positivo

$$b^2-4ac<0$$

$$(-12)^2-4(2)(m-7)<0$$

$$144-8m+56<0$$

$$200<8m$$

$$25<m$$

$$m>25$$

→ La edad actual de Piero es: 26 años
Dentro de 7 años tendrá: 33 años

$\therefore$ 33 años

PROBLEMA 7 Un empresario de Gamarra fabrica polos que tienen un precio de venta de S/55 y un costo unitario de S/35. Mensualmente, por el alquiler del local de venta paga S/1000, por el pago al personal el gasto asciende a S/6000 y otros gastos son de S/5000. Determine el mínimo numero de polos que el empresario debe fabricar y vender, mensualmente, para que obtenga ganancia.

Resolución

$P_v = 55$ soles

$P_c = 35$ soles

$P_v = P_c +$ ganancia

$55 = 35 +$ ganancia

Ganancia = 20

Alquiler local: S/ 1000

Pago personal: S/ 6000

Otros gastos: S/ 5000

polos: x

$$20x > 12\,000$$

$$x > 600$$

$$x_{min} = 601$$

El mínimo de polos que la empresa debe fabricar y vender es: 6001

$\therefore 601$