ARITHMETIC

Chapter 7

2th
SECONDARY

Y+X=

DIVISIBILIDAD I

SACO OLIVEROS

¿Qué tan complicado será dividir 99999222177225 entre 9 y dar como resultado el residuo?

Al dividir 2612^{123} entre 13, en 10 segundos podrías obtener el residuo?

1 TEORIA DE DIVISIBILIDAD

Es parte de la aritmética que estudia las condiciones que debe de reunir un numeral para que sea divisible por otro y las consecuencias que se derivan de este hecho.

2 DIVISOR

Un número B es divisor de A, si al dividir A entre B el cociente es un número entero y el residuo es cero.

$$\begin{array}{r|l} 132 & 11 \\ \cline{2-2} \underline{132} & 12 \\ 0 & \end{array}$$

Luego 11 es divisor de 132.

3 MULTIPLICIDAD

El número entero A es múltiplo de un número entero positivo B , si A es el resultado de multiplicar B por una cantidad entera. Consideremos el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{r|l} 132 & 11 \\ \cline{2-2} \underline{132} & 12 \\ 0 & \end{array}$$

$$132 = 11(12)$$

Es múltiplo de

132   11

Es divisor de

Además:

- 132 es múltiplo de 11
  132 es divisible por 11.
- 0=11(0) entonces 0 es múltiplo de 11.

¡LA DIVISIBILIDAD Y MULTIPLICIDAD SON CONCEPTOS EQUIVALENTES!

4 Notación de múltiplo

Del ejemplo anterior:
132 es múltiplo de 11

Se denota $132 = \overset{\circ}{11}$

también $132 = 11k,\ k \in Z$

EL CERO ES MÚLTIPLO DE TODO NÚMERO

Ejemplos:

- ❖ $72 = \dot{8}$ ya que $72 = 8(9)$
- ❖ $23 = \dot{23}$ ya que $23 = 23(1)$
- ❖ $-28 = \dot{7}$ ya que $-28 = 7(-4)$
- ❖ $0 = \dot{9}$ ya que $0 = 9(0)$

TODO NÚMERO ENTERO ES MÚLTIPLO DE SÍ MISMO

5 NÚMEROS NO DIVISIBLES

POR DEFECTO

$$\begin{array}{r|l} 123 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{120} & 10 \\ 3 & \end{array}$$

$$123 = \underbrace{12(10)}_{} + 3$$

$$123 = \dot{12} + 3$$

POR EXCESO

$$\begin{array}{r|l} 123 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{132} & 11 \\ 9 & \end{array}$$

$$123 = \underbrace{12(11)}_{} - 9$$

$$123 = \dot{12} - 9$$

$3 + 9 = 12$

$$\boxed{r + r_e = d}$$

$84 = \dot{9}+3$	$= \dot{9} - 6$
$67 = \dot{8}+3$	$= \dot{8} - 5$
$77 = \dot{5}+2$	$= \dot{5} - 3$
$27 = \dot{7}+6$	$= \dot{7} - 1$
$47 = \dot{4}+3$	$= \dot{4} - 1$

6

OPERACIONES CON MÚLTIPLOS DEL MISMO MÓDULO

Adición: *Ejemplo*

$$\underbrace{14}_{\overset{\circ}{7}}+\underbrace{28}_{\overset{\circ}{7}} = \underbrace{42}_{\overset{\circ}{7}}$$

$$\overset{\circ}{7}+\overset{\circ}{7}=\overset{\circ}{7}$$

Generalizamos: $\boxed{\overset{\circ}{n}+\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}}$

Sustracción: *Ejemplo*

$$\underbrace{72}_{\overset{\circ}{9}}-\underbrace{45}_{\overset{\circ}{9}} = \underbrace{27}_{\overset{\circ}{9}}$$

$$\overset{\circ}{9}-\overset{\circ}{9}=\overset{\circ}{9}$$

Generalizamos: $\boxed{\overset{\circ}{n}-\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}}$

Multiplicación: *Ejemplo*

$$\underbrace{15}_{\overset{\circ}{5}}\times 3 = \underbrace{45}_{\overset{\circ}{5}}$$

$$\overset{\circ}{5}\times 3=\overset{\circ}{5}$$

$$\boxed{\overset{\circ}{n}\times k=\overset{\circ}{n}}$$

Donde: $k\in\mathbb{Z}$

Potenciación: *Ejemplo*

$$3^4 = 81$$

$$(\overset{\circ}{3})^4 = \overset{\circ}{3}$$

Generalizamos: $\boxed{(\overset{\circ}{n})^k=\overset{\circ}{n}}$; $k\in\mathbb{Z}^+$

Ejemplo:

$$F = (\overset{o}{7}+1)(\overset{o}{7}+3)(\overset{o}{7}+2)$$

$$F = \overset{o}{7}+1\times3\times2$$

$$F = \overset{o}{7}+6$$

C

En conclusión

$$(\overset{o}{n}+a)(\overset{o}{n}+b)(\overset{o}{n}+c)\ldots(\overset{o}{n}+m) = \overset{o}{n}+a\cdot b\cdot c\cdot\ldots\cdot m$$

Ejemplo:

$$(\overset{o}{5}+3)^3 = (\overset{o}{5}+3)(\overset{o}{5}+3)(\overset{o}{5}+3) = \overset{o}{5}+3^3 = \overset{o}{5}+2$$

$$(\overset{o}{9}+2)^2 = (\overset{o}{9}+2)(\overset{o}{9}+2) = \overset{o}{9}+2^2 = \overset{o}{9}+4$$

D

En conclusión

$$(\overset{o}{n}+r)^k = \overset{o}{n}+r^k;\ k\in\mathbb{Z}^+$$

Ejemplo:

$$(\overset{o}{7}-1)^4 = \overset{o}{7}+1^4 = \overset{o}{7}+1$$

$$(\overset{o}{7}-1)^3 = \overset{o}{7}-1^3 = \overset{o}{7}-1$$

E

En conclusión

$$(\overset{o}{n}-r)^k = \begin{cases} \overset{o}{n}+r^k; & k\text{: par} \\ \overset{o}{n}-r^k; & k\text{: impar} \end{cases}$$

RESOLUCIÓN

1 Calcule la suma de los 15 primeros múltiplos positivos de 12.

Por dato: $12(1) + 12(2) + 12(3) + 12(4) + \ldots + 12(15)$

Factorizamos: $12[1+2+3+4+\ldots+15]$

RECORDAR

$$1+2+3+4+\ldots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$12\left[\frac{15(16)}{2}\right]$$

$$12.[120]$$

$\therefore$ *La suma es 1440*

RESOLUCIÓN

2 Se sabe que: $189 = \overset{0}{13} + x$ $150 = \overset{0}{8} - y$ Calcule $(x+y)^2$

$$189 = \overset{0}{13} + x$$

$$\begin{array}{r|l} 189 & 13 \\ \cline{2-2} 182 & 14 \\ \hline 7 & \end{array}$$

$x = 7$

$$150 = \overset{0}{8} - y = \overset{0}{8} + 6 = \overset{0}{8} - 2$$

$$\begin{array}{r|l} 150 & 8 \\ \cline{2-2} 144 & 18 \\ \hline 6 & \end{array}$$

$y = 2$

$$\boxed{\therefore (x+y)^2 = (7+2)^2 = 81}$$

RESOLUCIÓN

3 ¿Cuántos números múltiplos de 8 hay desde 248 hasta 1424?

POR DATO : $248 \leq 8k \leq 1424$

ENTRE 8 : $31 \leq k \leq 178$

Los valores que toma "k":

$$K: \underbrace{31, 32, 33, \ldots 178}$$

$$\text{Total} = 178 - 31 + 1 = 148$$

$\therefore$ *Hay 148 números múltiplo de 8*

RESOLUCIÓN

4 Indique la cantidad de números múltiplos de 11 que hay entre 66 y 638.

POR DATO: $66 < 11k < 638$

ENTRE 11: $6 < k < 58$

Los valores que toma "k":

$$\underbrace{K: 7,8,9,\ldots,57}$$

Total= 57- 7 + 1 = 51

$\boxed{\text{Hay 51 números}}$

RESOLUCIÓN

5 Sea P = 2345 × 2314 + 19 al dividirlo entre 12 se obtiene a de residuo, calcule el costo de un tablero de ajedrez cuyo precio es (a – 3)(a + 1) soles.

$$\begin{array}{r|l} 2345 & 12 \\ \hline 114 & 195 \\ 65 & \\ 5 & \end{array}$$

$2345 = \dot{12} + 5$

$$\begin{array}{r|l} 2314 & 12 \\ \hline 111 & 192 \\ 34 & \\ 10 & \end{array}$$

$2314 = \dot{12} + 10$

$$\begin{array}{r|l} 19 & 12 \\ \hline 7 & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow 19 = \dot{12} + 7$

$P = (\dot{12} + 5)(\dot{12} + 10) + \dot{12} + 7$

$P = \dot{12} + 57 \Rightarrow P = \dot{12} + 9$

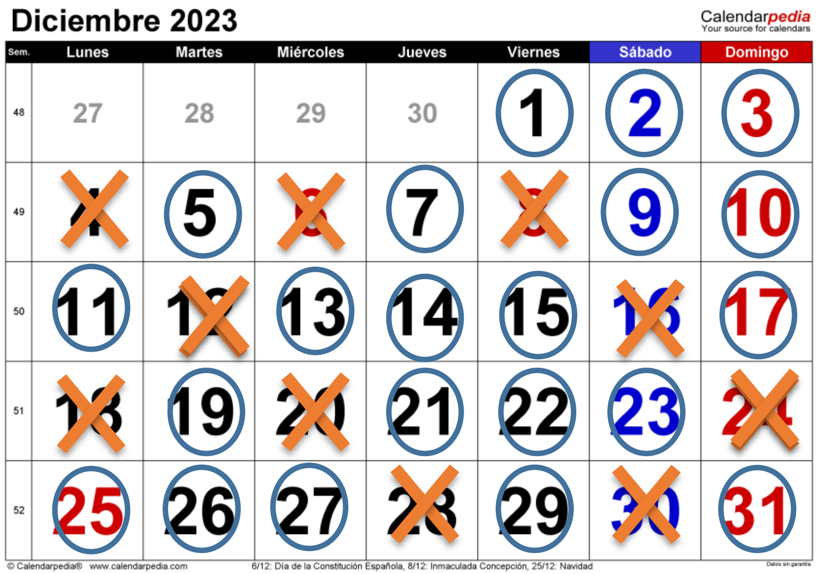
a = 9

Costo = (9-3)(9+1)

Costo = 6x10 = 60 soles

RESOLUCIÓN

6 Ricardo le dice a su hermano que durante el mes de diciembre visitará a su abuela los días que sean múltiplos de 4 y a su madrina los días que sean múltiplos de 6. Si en los días que no visitó a nadie podrá jugar fútbol, ¿cuántos días podrá jugar fútbol en ese mes?



Podrá jugar fútbol 21 días

RESOLUCIÓN

8 Jimmy viajará al extranjero por razones de estudio pero le promete a su esposa que volverá luego de 100 días. Si hoy es el día de su partida y es martes, calcule que día de la semana caerá la fecha de su retorno.

Observamos que cada 7 días volverá a caer el mismo día de la semana

más 2 días

Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo

$$\begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 14 \\ 2 & \end{array}$$

Ha pasado 14 semanas más 2 días

Será día jueves