

# TRIGONOMETRY

## Chapter 19

**4th**  
SECONDARY

### IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE



# HISTORIA Y APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA



# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Para el seno :

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

Para el coseno :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Ejemplos :

- $\operatorname{sen} 20^\circ = 2 \operatorname{sen} 10^\circ \cos 10^\circ$
- $\cos 6\alpha = \cos^2 3\alpha - \operatorname{sen}^2 3\alpha$
- $2 \operatorname{sen}^2 15^\circ = 1 - \cos 30^\circ$

## IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN

$$2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

Para la tangente :

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Ejemplo :

Si  $\tan x = 2$  ; calcule  $\tan 2x$

Resolución

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$$\Rightarrow \tan 2x = \frac{2(2)}{1 - (2)^2} \quad \therefore \tan 2x = -\frac{4}{3}$$

## IDENTIDADES AUXILIARES

$$\cot \alpha + \tan \alpha = 2 \csc 2\alpha$$

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

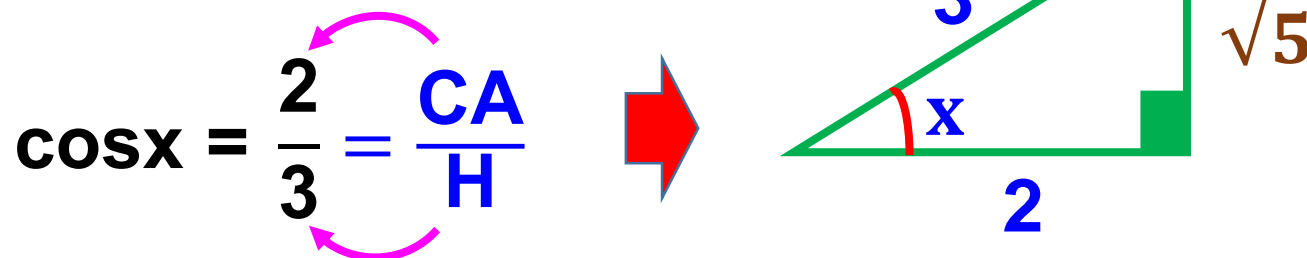


# HELICO PRACTICE 1

Si  $\cos x = \frac{2}{3}$ , donde  $0^\circ < x < 90^\circ$ ; calcule  $\sin 2x$

## RESOLUCIÓN

Dato :



Luego :  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\sin 2x = 2 \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$\therefore \sin 2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

# HELICO PRACTICE 2

Si  $\frac{5}{\cos\theta} = \frac{3}{\sin\theta}$  , calcule  $\tan 2\theta$

## RESOLUCIÓN

Dato :

$$\frac{5}{\cos\theta} = \frac{3}{\sin\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{5}$$

Luego :

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

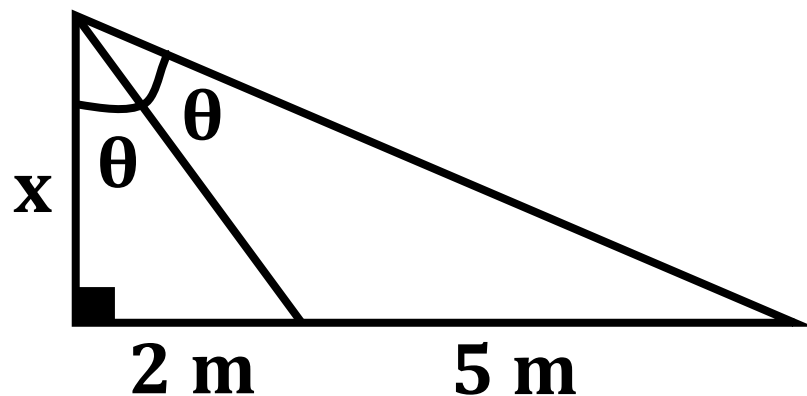
$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2 \left( \frac{3}{5} \right)}{1 - \left( \frac{3}{5} \right)^2} = \frac{\frac{6}{5}}{1 - \frac{9}{25}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{16}{25}}$$

$$\tan 2\theta = \frac{\cancel{6}^3 (\cancel{25}^5)}{\cancel{5}_1 (\cancel{16}_8)}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{15}{8}$$

# HELICO PRACTICE 3

A partir del gráfico, determine el valor de  $x$ .



## RESOLUCIÓN

Del gráfico :  $\tan\theta = \frac{2}{x}$  ;  $\tan 2\theta = \frac{7}{x}$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

Luego:

$$\frac{7}{x} = \frac{2 \left( \frac{2}{x} \right)}{1 - \left( \frac{2}{x} \right)^2} = \frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2 - 4}{x^2}}$$

$$\frac{7}{x} = \frac{4x^2}{x(x^2 - 4)}$$

$$7x^2 - 28 = 4x^2$$

$$3x^2 = 28$$

$$x^2 = \frac{28}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{28}{3}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ m}$$

# HELICO PRACTICE 4

Determine el valor de  $E = (\cot 42^\circ + \tan 42^\circ) \cos 6^\circ$

## RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\cot \alpha + \tan \alpha = 2 \csc 2\alpha$$



$$E = (\cot 42^\circ + \tan 42^\circ) \cos 6^\circ$$

$$E = [2 \csc(2 \cdot 42^\circ)] \cos 6^\circ$$

$$E = 2 \csc 84^\circ \cdot \sin 84^\circ$$

$$E = 2 \cdot 1$$

$$\therefore E = 2$$



# HELICO PRACTICE 5

Reduczca  $G = \frac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}\alpha}{1 + \cos2\alpha + \cos\alpha}$

Recordar :

$$\text{sen}2\alpha = 2 \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$1 + \cos2\alpha = 2 \cos^2\alpha$$



## RESOLUCIÓN

$$G = \frac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}\alpha}{1 + \cos2\alpha + \cos\alpha}$$

$$G = \frac{2 \text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \text{sen}\alpha}{2 \cos^2\alpha + \cos\alpha}$$

$$G = \frac{\text{sen}\alpha \cancel{(2 \cos\alpha + 1)}}{\cos\alpha \cancel{(2 \cos\alpha + 1)}}$$

$$G = \frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\therefore G = \tan\alpha$$

# HELICO PRACTICE 6

Carlita necesita A gramos de sodio para realizar un experimento conformado por ciertas cantidades de cloro y sodio para obtener NaCl en un grado de saturación correcta . - Si A está determinado por  $36 \operatorname{sen} 2\theta$  y sabemos que  $\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$  ; calcule los A gramos necesarios para que Carlita pueda experimentar sin ningún problema .

**Recordar :**

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$$



## RESOLUCIÓN

**Dato :**  $\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = \frac{3}{4}$

$$(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\underbrace{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}_1 - \underbrace{2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}_{\operatorname{sen} 2\theta} = \frac{9}{16}$$

$$1 - \operatorname{sen} 2\theta = \frac{9}{16}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{7}{16}$$

$$\underbrace{36 \operatorname{sen} 2\theta}_{A} = \cancel{36} \left( \frac{7}{\cancel{16}} \right) \frac{9}{4}$$

$$\therefore A = \frac{63}{4} \text{ gramos}$$

# HELICO PRACTICE 7

Tres estudiantes : Roberto, Kenneth y Alexander, entran a un concurso de matemáticas donde los puntajes se calculan por  $E_{(x)} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$

Si se asignan  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$  y  $x = \frac{\pi}{6}$  para Roberto, Kenneth y Alexander .  
¿Quién ocupó el primer lugar?

## RESOLUCIÓN

Recordar :

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$



$$E_{(x)} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\tan^2 x} = |\tan x|$$

$$\text{Roberto : } E_{\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \left| \tan \frac{\pi}{3} \right| = \left| \sqrt{3} \right| = \sqrt{3}$$

$$\text{Kenneth : } E_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \left| \tan \frac{\pi}{4} \right| = \left| 1 \right| = 1$$

$$\text{Alexander : } E_{\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \left| \tan \frac{\pi}{6} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

∴ Roberto  
ocupó el  
primer lugar .



**SACO  
OLIVEROS**