

# TRIGONOMETRY

## Chapter 02

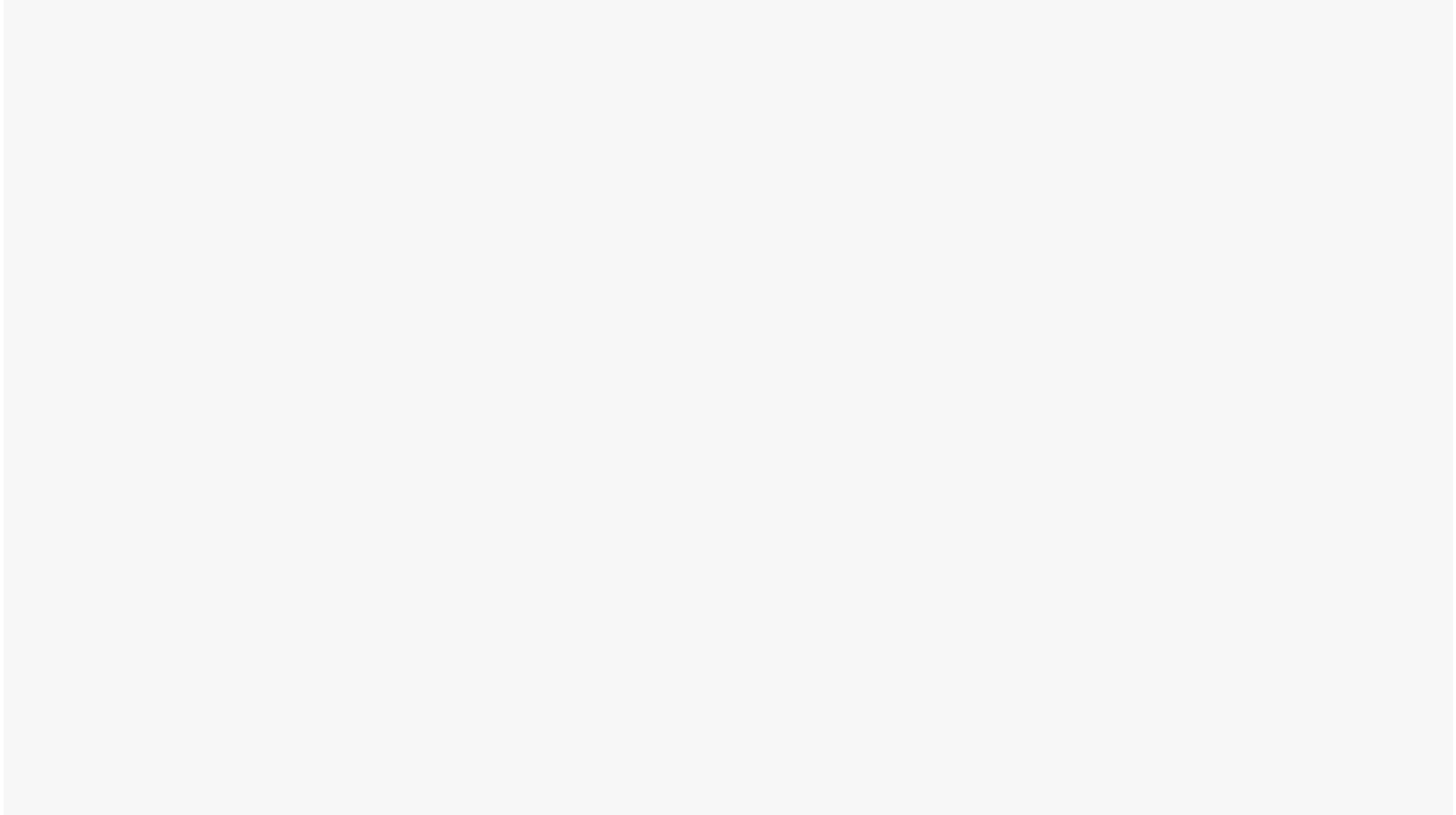
**5th**  
SECONDARY

**PROPIEDADES DE LAS**  
**RAZONES TRIGONOMÉTRICAS**  
**DE ÁNGULOS AGUDOS**



**SACO OLIVEROS**

# MOTIVATING STRATEGY



# I ) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS DE UN ÁNGULO AGUDO ( RTR )

Para un mismo ángulo agudo  $\alpha$  se cumple :

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = \frac{\cancel{\text{CO}}}{\cancel{\text{H}}} \cdot \frac{\cancel{\text{H}}}{\cancel{\text{CO}}} = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = \frac{\cancel{\text{CA}}}{\cancel{\text{H}}} \cdot \frac{\cancel{\text{H}}}{\cancel{\text{CA}}} = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = \frac{\cancel{\text{CO}}}{\cancel{\text{CA}}} \cdot \frac{\cancel{\text{CA}}}{\cancel{\text{CO}}} = 1$$

## Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = 1$$

Ejemplo :

$$E = \frac{7 \text{ sen}35^\circ \text{ csc}35^\circ - 3 \text{ tan}49^\circ \text{ cot}49^\circ}{2 \text{ cos}62^\circ \text{ sec}62^\circ} = \frac{7(1) - 3(1)}{2(1)} = \frac{7-3}{2} = 2$$

## II ) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS AGUDOS COMPLEMENTARIOS ( CO – RT )

### Definición de CO – RT

Si  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  ;  $0^\circ < \beta < 90^\circ$   
 $\alpha + \beta = 90^\circ$



$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

CO – RT



### Ejemplos :

$\text{sen}35^\circ = \cos55^\circ$  porque  $35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$

$\tan( a + 42^\circ ) = \cot( 48^\circ - a )$

porque  $a + 42^\circ + 48^\circ - a = 90^\circ$

# HELICO - PRACTICE 1

**Las edades de Juan e Iván son m y n años respectivamente. Si dichos valores se pueden calcular al resolver las siguientes expresiones:**

$$\cos(2m + 30)^\circ \cdot \sec 70^\circ = 1 \quad \wedge \quad \tan(3n)^\circ = \cot 54^\circ$$

- a) ¿ Cuáles son las edades de Juan e Iván ?  
b) ¿Cuál es la suma de ambas edades ?

## Resolución

$$\cos(2m + 30)^\circ \cdot \sec 70^\circ = 1$$

Por RTR :

$$(2m + 30)^\circ = 70^\circ$$

$$2m = 40 \quad \Rightarrow \quad m = 20$$

$$\tan(3n)^\circ = \cot 54^\circ$$

Por CO – RT :

$$(3n)^\circ + 54^\circ = 90^\circ$$

$$(3n)^\circ = 36^\circ \quad \Rightarrow \quad n = 12$$

Luego :

a) Juan = 20 años

Iván = 12 años

b) Suma = 32 años

# HELICO - PRACTICE 2

**Si  $\alpha$  es la medida de un ángulo agudo, tal que :**

$$\tan(45^\circ + 2\alpha) \cdot \cot(60^\circ - \alpha) = 1$$

**Efectúe**  $M = (\sec 12\alpha + \tan 9\alpha)^2$

## Resolución

$$\tan(45^\circ + 2\alpha) \cdot \cot(60^\circ - \alpha) = 1$$

**Por RTR :**

$$45^\circ + 2\alpha = 60^\circ - \alpha$$

$$3\alpha = 15^\circ$$

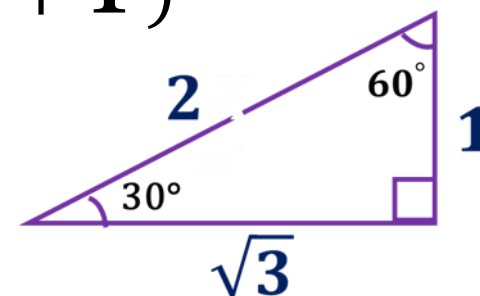
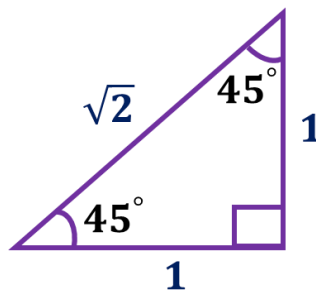
$$\alpha = 5^\circ$$

**Luego :**  $M = (\sec 12\alpha + \tan 9\alpha)^2$

$$M = (\sec 60^\circ + \tan 45^\circ)^2$$

$$M = (2 + 1)^2$$

$$\therefore M = 9$$



# HELICO - PRACTICE 3

**Siendo  $\alpha$  y  $\beta$  la medida de dos ángulos agudos, los cuales cumplen que :**

$$\operatorname{sen} \alpha - \cos 2\beta = 2 \operatorname{sen} 30^\circ - 1$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \csc 4\beta = \tan 45^\circ$$

**Calcule  $\tan(\alpha - \beta)$**

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \csc 4\beta = \tan 45^\circ = 1$$

**Por RTR :**  $\alpha = 4\beta$

$$\operatorname{sen} \alpha - \cos 2\beta = 2 \operatorname{sen} 30^\circ - 1$$

$$\operatorname{sen} \alpha - \cos 2\beta = 2 \left( \frac{1}{2} \right) - 1 = 0$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos 2\beta$$

## Resolución

**Por CO - RT :**

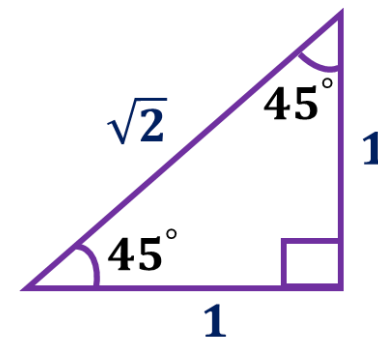
$$\alpha + 2\beta = 90^\circ$$

$$4\beta + 2\beta = 90^\circ$$

$$6\beta = 90^\circ$$

$$\beta = 15^\circ$$

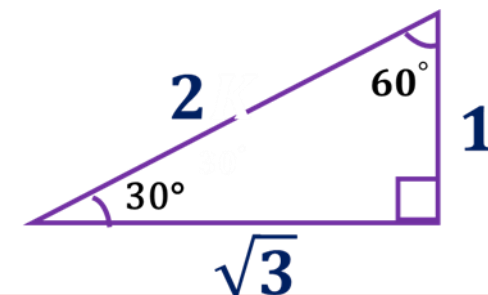
$$\alpha = 60^\circ$$



**Luego :**

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan 45^\circ$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = 1$$



# HELICO - PRACTICE 4

**Determine la medida del ángulo agudo  $x$ , que cumple :**  $(\tan 10^\circ)^{\sin(20^\circ + x)} = (\cot 80^\circ)^{\cos(x - 2^\circ)}$

## Resolución

Por CO – RT :  $\tan 10^\circ = \cot 80^\circ$

Dato :

$$(\overleftrightarrow{\tan 10^\circ})^{\sin(20^\circ + x)} = (\overleftrightarrow{\cot 80^\circ})^{\cos(x - 2^\circ)}$$

$$\sin(20^\circ + x) = \cos(x - 2^\circ)$$

Por CO – RT :

$$20^\circ + x + x - 2^\circ = 90^\circ$$

$$2x = 72^\circ$$

$$\therefore x = 36^\circ$$





# HELICO - PRACTICE 5

**Si  $\theta$  es la medida de un ángulo agudo que cumple :**

$$\sec\theta = \frac{3 \operatorname{sen}70^\circ + \cos20^\circ}{5 \operatorname{sen}70^\circ - 2 \cos20^\circ}, \text{ efectúe } E = \sqrt{7}(\tan\theta + \cot\theta)$$

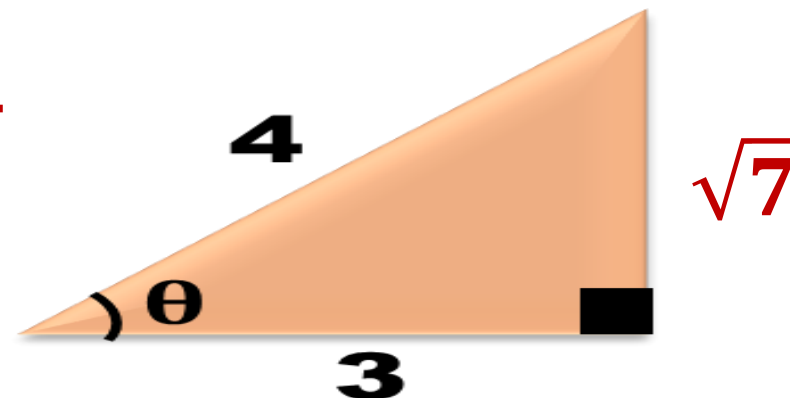
## Resolución

Por CO – RT :  $\operatorname{sen}70^\circ = \cos20^\circ$

Luego :

$$\sec\theta = \frac{3 \cos20^\circ + 1 \cos20^\circ}{5 \cos20^\circ - 2 \cos20^\circ}$$

$$\sec\theta = \frac{4 \cos20^\circ}{3 \cos20^\circ} = \frac{4}{3}$$



$$E = \sqrt{7}(\tan\theta + \cot\theta)$$

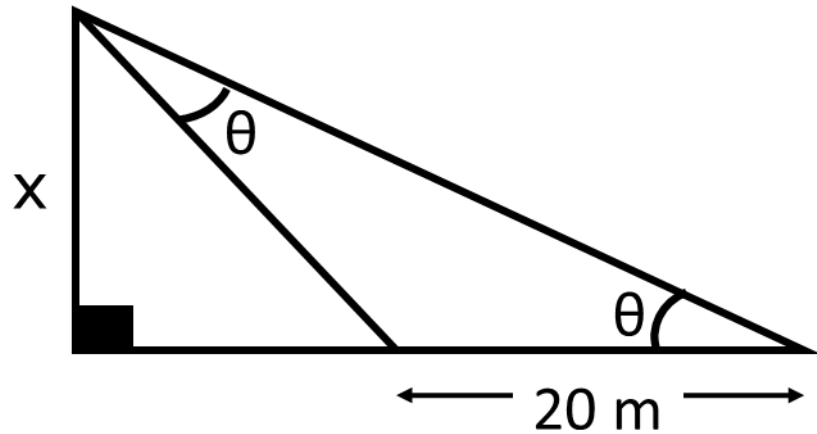
$$E = \sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{3}{\sqrt{7}}\right) = \frac{7}{3} + 3$$

$$\therefore E = \frac{16}{3}$$

# HELICO - PRACTICE 6

Halle el valor de  $x$ , si en el gráfico se cumple :

$$\tan(30^\circ - \theta) - \cot(30^\circ + 3\theta) = 0$$



## Resolución

Dato :

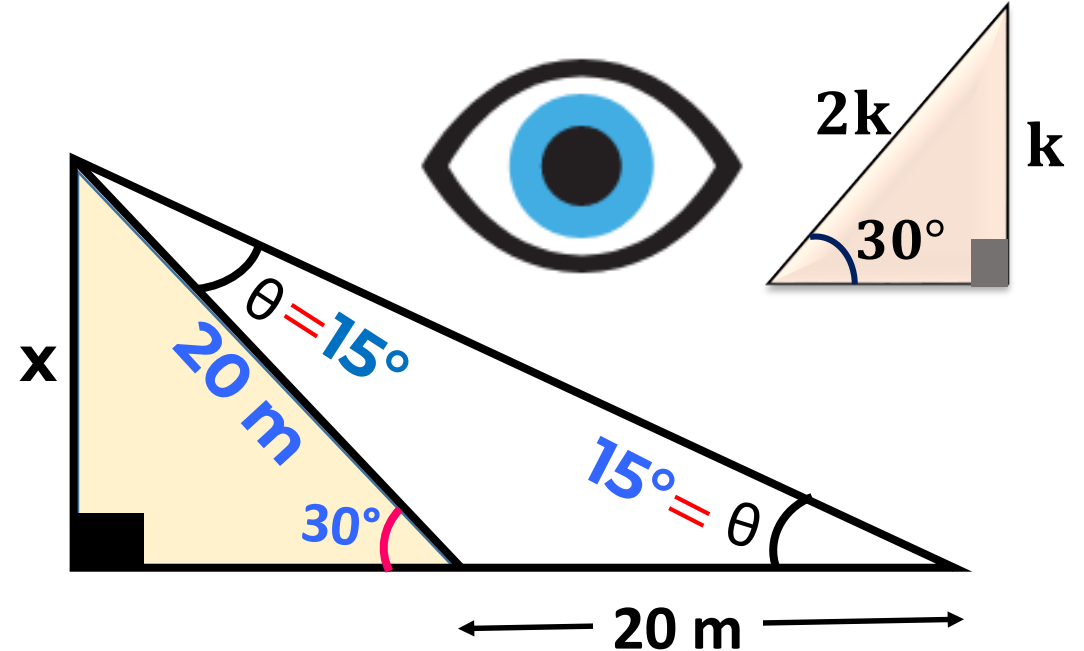
$$\tan(30^\circ - \theta) - \cot(30^\circ + 3\theta) = 0$$

$$\tan(30^\circ - \theta) = \cot(30^\circ + 3\theta)$$

Por CO – RT :

$$30^\circ - \theta + 30^\circ + 3\theta = 90^\circ$$

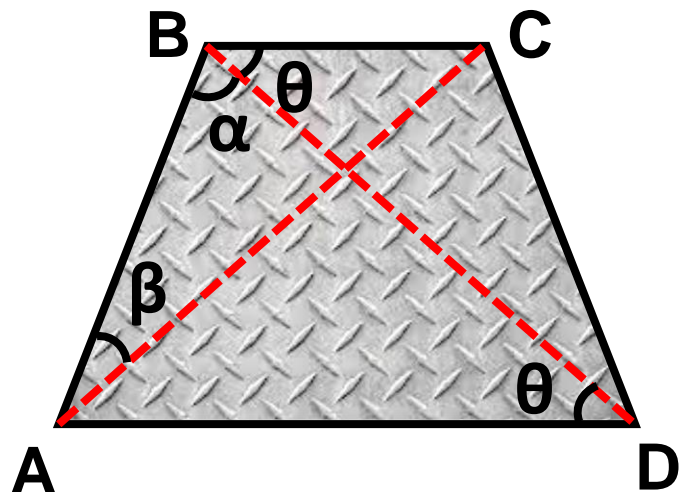
$$2\theta = 30^\circ \Rightarrow \theta = 15^\circ$$



$$\therefore x = 10 \text{ m}$$

# HELICO - PRACTICE 7

Miguel trabaja en un taller y tiene una pequeña pieza metálica ABCD, en la cual desea hacer los cortes  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$  tal como muestra la figura.



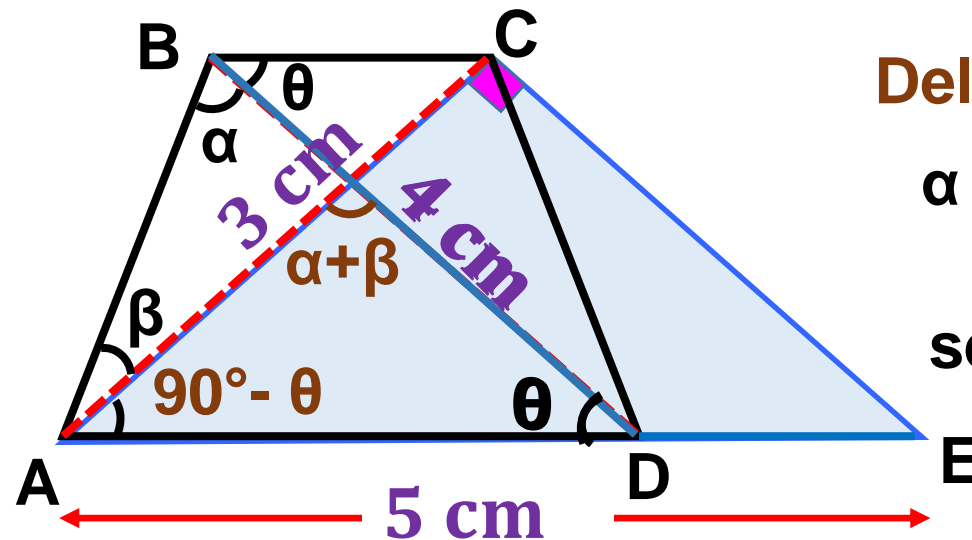
Si se cumple:  $AC = 3 \text{ cm}$ ,  $BD = 4 \text{ cm}$  y  $AD + BC = 5 \text{ cm}$  .- Calcule :

$$E = \frac{\tan(\alpha + \beta - \theta)}{\cot \theta} + \operatorname{sen} \alpha \cdot \sec \beta$$

## Resolución

$$m\angle CBD = m\angle ADB \Rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{AD}$$

$$BC = DE \Rightarrow AD + DE = 5 \text{ cm}$$



Del gráfico :

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \cos \beta$$

Calculamos E :

$$E = \frac{\tan(90^\circ - \theta)}{\cot \theta} + \cos \beta \cdot \sec \beta = \frac{\cot \theta}{\cot \theta} + 1$$

$$E = 1 + 1$$

$$\therefore E = 2$$



**SACO**  
**OLIVEROS**