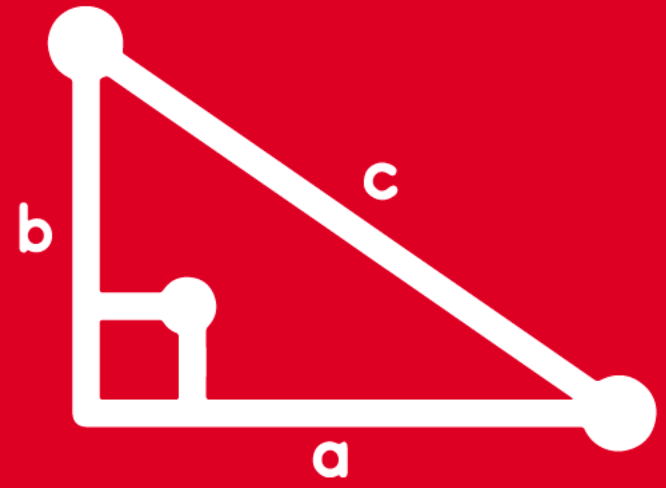
TRIGONOMETRY

Chapter 09



4th
SECONDARY

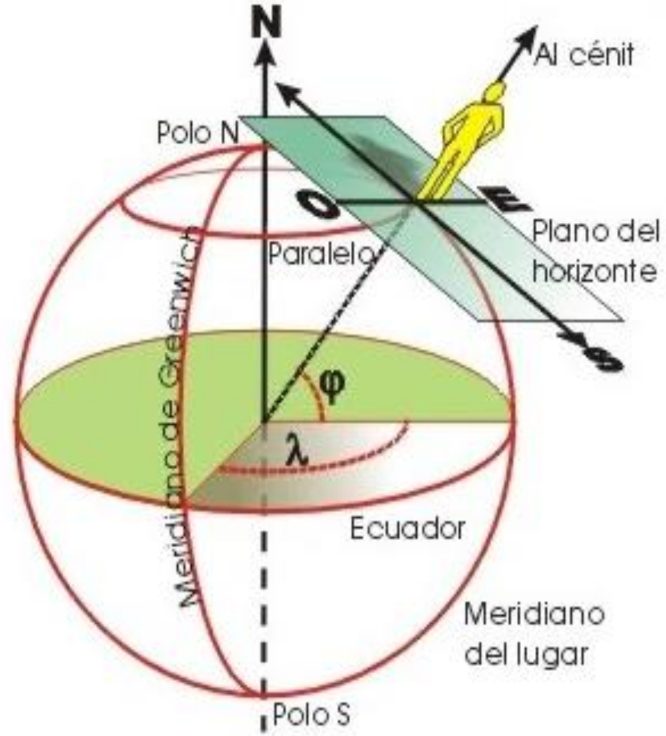
Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal I

SACO OLIVEROS

COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Determinan la posición del observador sobre la superficie terrestre. Aunque sabemos que la Tierra está achatada por los polos vamos a suponer, en primera aproximación, que es una esfera perfecta. Un punto cualquiera de la esfera terrestre queda determinado por dos coordenadas geográficas: la longitud y la latitud.

Cualquier plano paralelo al del ecuador, comprendido entre los polos norte, N, y sur, S, corta a la esfera en una circunferencia denominada paralelo. Las infinitas esferas que pasan por los polos N y S son los meridianos terrestres.



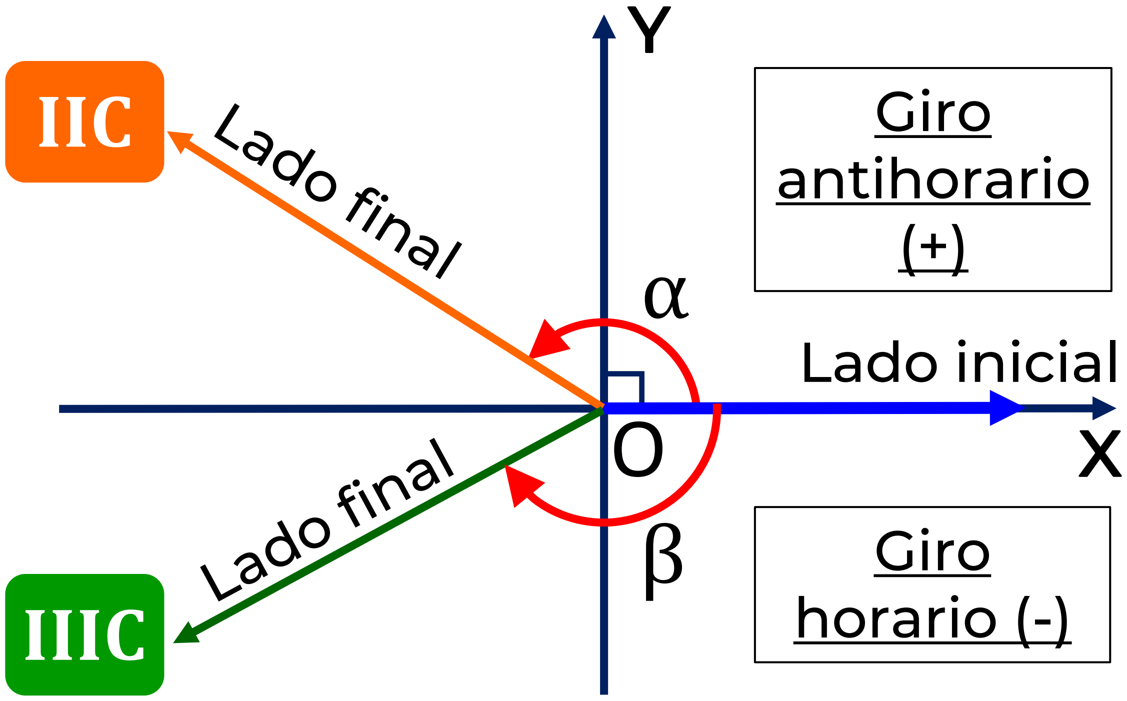
ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

Definición

Es aquel ángulo trigonométrico ubicado sobre el plano cartesiano, en donde su:

- **Vértice:** Origen de coordenadas.
- **Lado inicial:** Semieje X positivo.
- **Lado final:** Se ubica en cualquier cuadrante o semieje del plano.

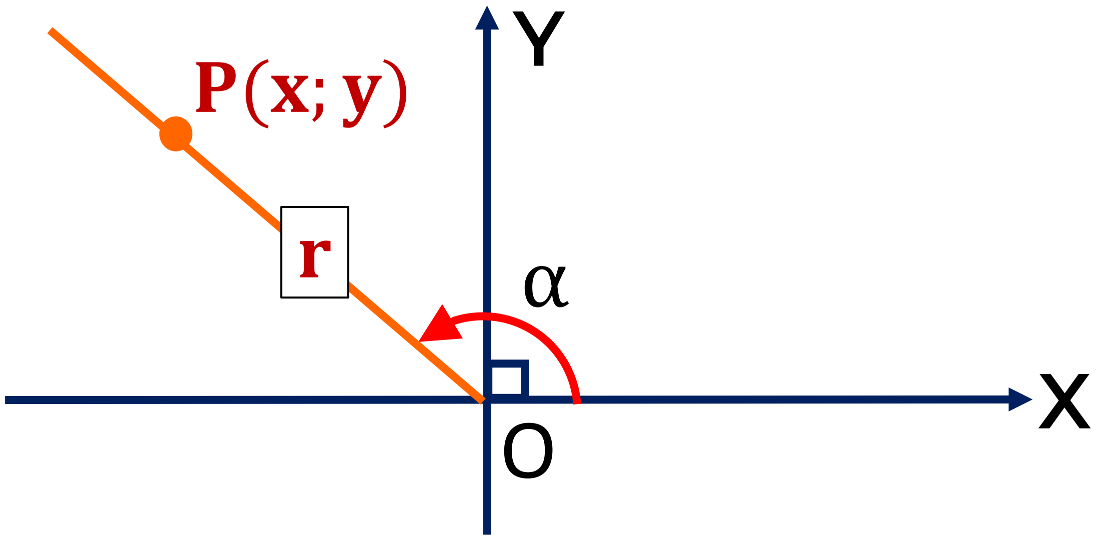
Representación gráfica



OBSERVACIÓN

La **posición del lado final** de un ángulo en posición normal **determina su cuadrante.**

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL



x: abscisa del punto P

y: ordenada del punto P

r: radio vector

$$\mathbf{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

senα	cosα	tanα	cotα	secα	cscα
$\frac{y}{r}$	$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{r}{x}$	$\frac{r}{y}$

1. Si el punto $(-1;3)$ pertenece al lado final del ángulo en posición normal θ, halle el valor de

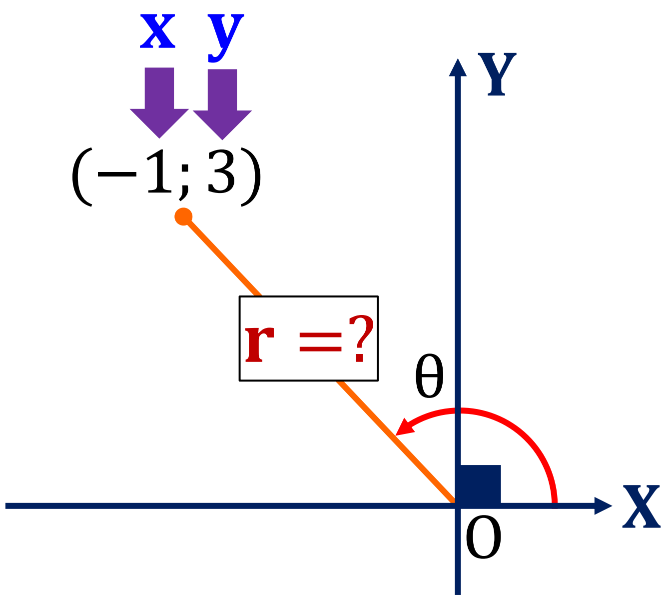
$$G = \text{sen}\theta \cdot \cos\theta$$

Recordamos

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

Resolución

Graficamos:



Calculamos r:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 3^2}$$

$$r = \sqrt{1 + 9}$$

$$\boxed{r = \sqrt{10}}$$

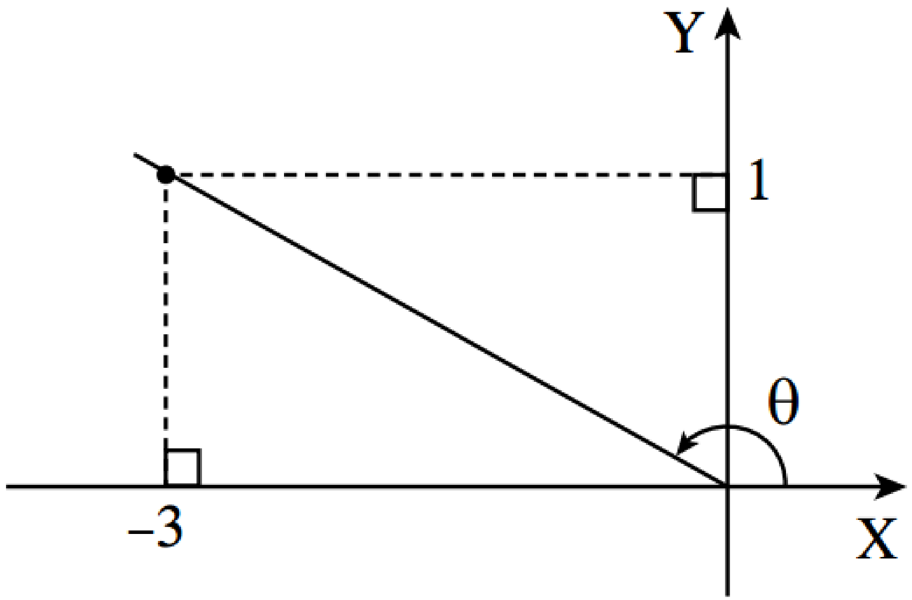
Efectuamos: $G = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \cdot \dfrac{-1}{\sqrt{10}}$

$$G = \frac{-3}{\sqrt{10}^2}$$

$$\therefore \boxed{G = -\frac{3}{10}}$$

2. A partir del gráfico, obtenga el valor de

$$Q = \csc^2\theta - 3\tan\theta + \cot\theta$$

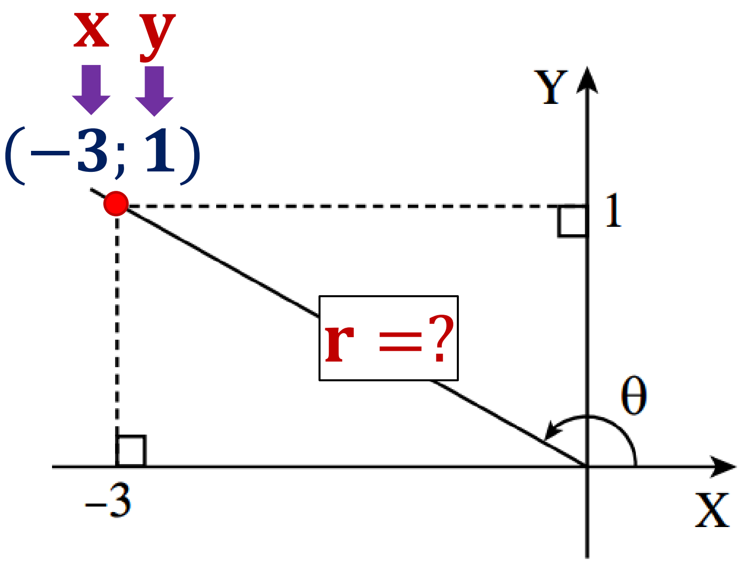


Recordamos

$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$ | $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ | $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

Resolución

Analizamos el gráfico:



Calculamos r:

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 1^2}$$

$$r = \sqrt{9 + 1}$$

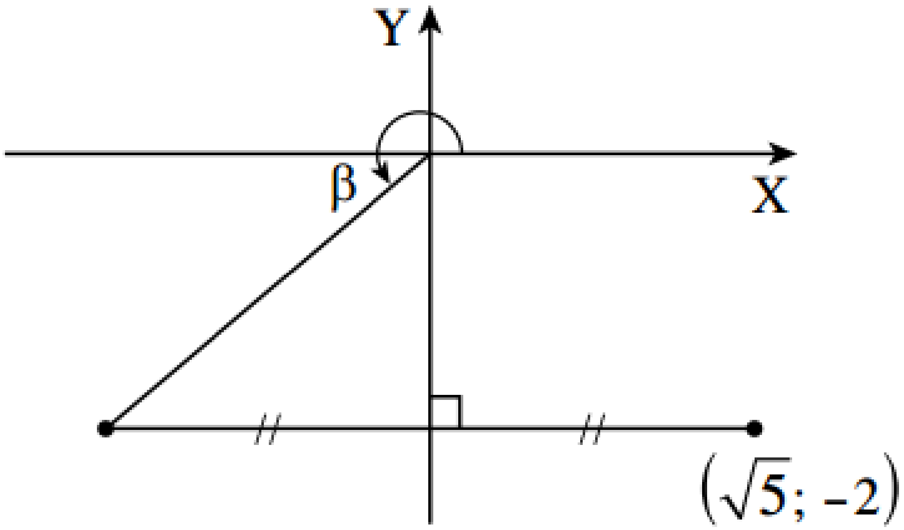
$$\boxed{r = \sqrt{10}}$$

Efectuamos: $Q = \left(\dfrac{\sqrt{10}}{1}\right)^2 + 3\left(\dfrac{1}{-3}\right) + \left(\dfrac{-3}{1}\right)$

$Q = 10 + (-1) + (-3)$ $\quad\therefore\ \boxed{Q = 6}$

3. A partir del gráfico, efectúe

$$P = \sqrt{5}\cos\beta - \text{sen}\beta$$

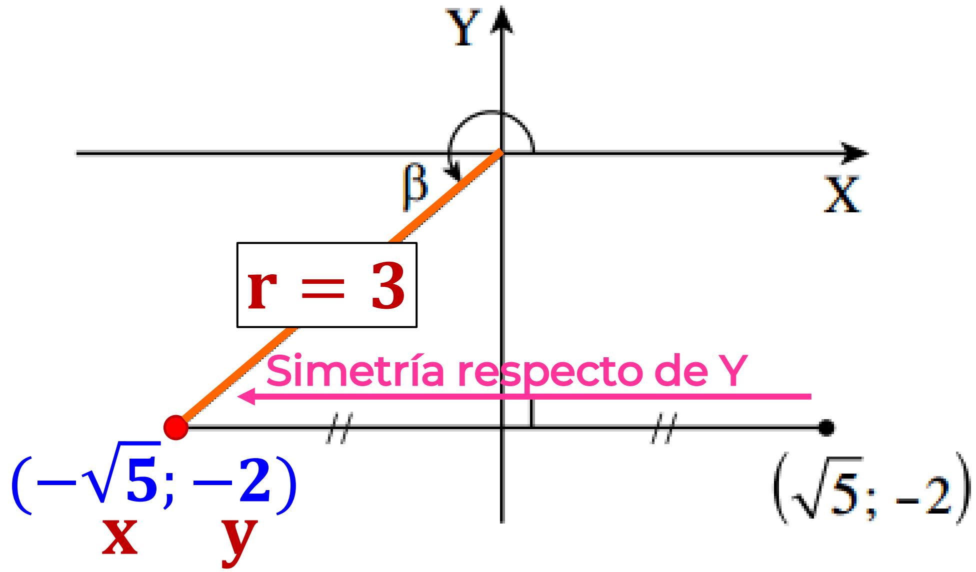


Recordamos

$$\cos\beta = \frac{x}{r} \qquad \text{sen}\beta = \frac{y}{r}$$

Resolución

Analizamos el gráfico:

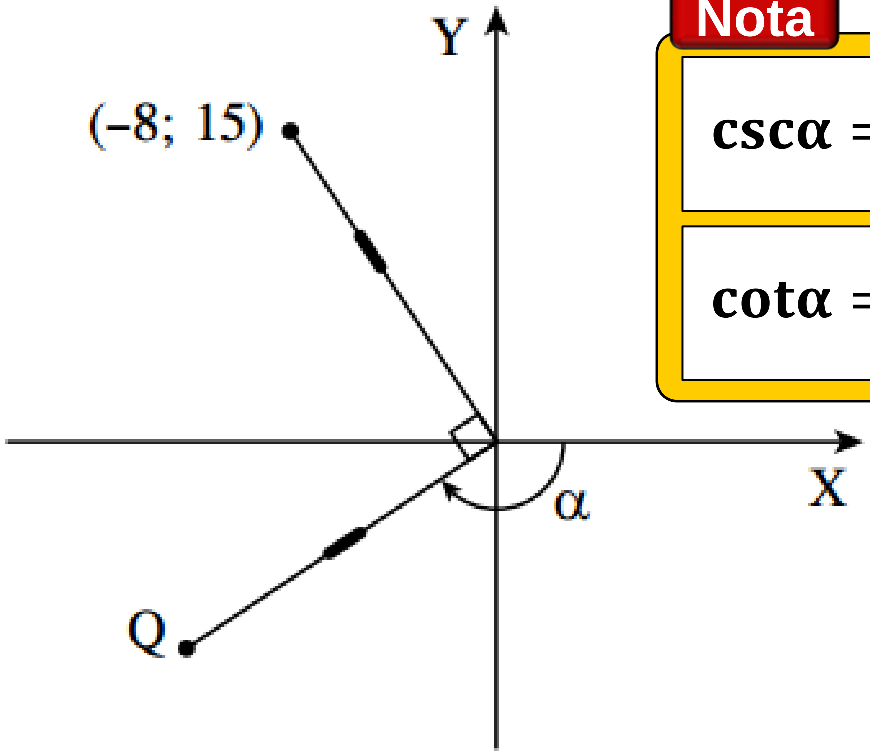


Efectuamos: $P = \sqrt{5}\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) - \left(\frac{-2}{3}\right)$

$$P = \frac{-5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-3}{3} \quad \therefore \boxed{P = -1}$$

4. En el gráfico se muestra el ángulo en posición normal α. Obtenga el valor de

$$W = \csc\alpha + \cot\alpha$$



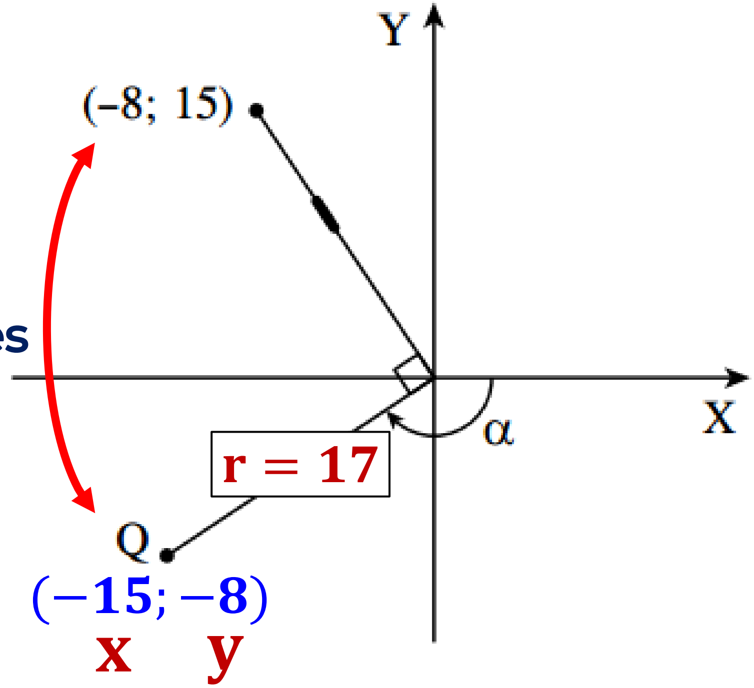
Nota

$$\csc\alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}$$

Resolución

Analizamos el gráfico:

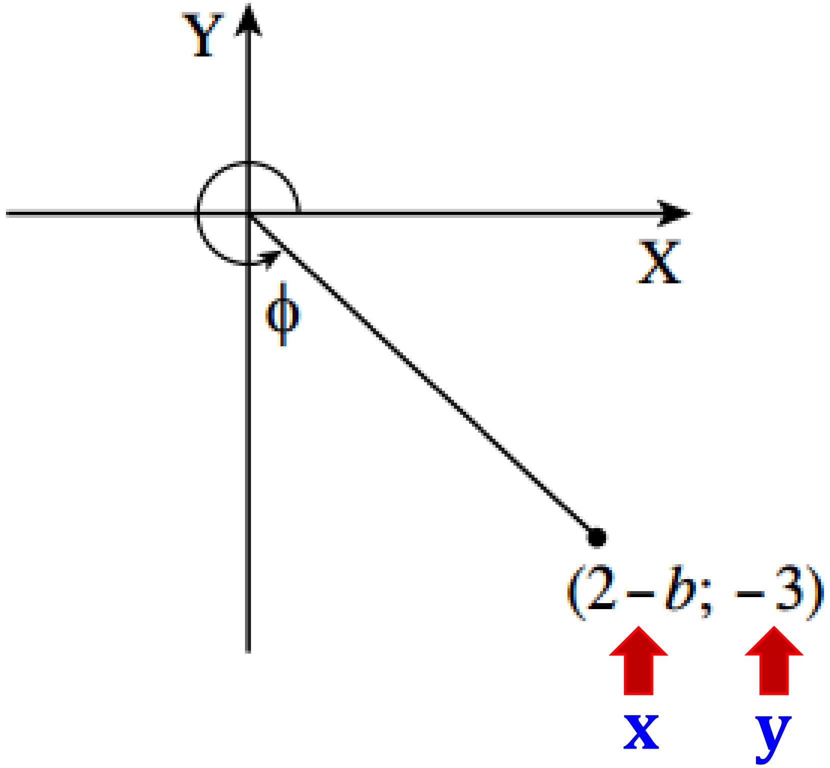


Calculamos: $W = \dfrac{17}{-8} + \dfrac{-15}{-8}$

$$W = \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{-8}_{\,-4}} \quad \therefore \quad \boxed{W = -\frac{1}{4}}$$

5. Del gráfico, si $\tan\phi = -\frac{3}{4}$, efectúe

$$R = b^3 - b^2$$



Resolución

Dato: $\tan\phi = -\frac{3}{4}$ ...(I)

Gráfico: $\tan\phi = \frac{-3}{2-b}$ ...(II)

Igualamos (I) y (II):

$$\frac{-3}{4} = \frac{-3}{2-b}$$

$$-6 + 3b = -12$$

$$3b = -6$$

$$\boxed{b = -2}$$

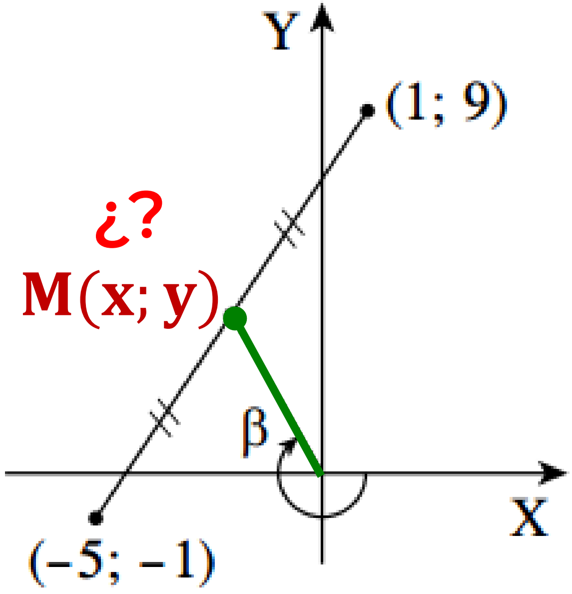
Calculamos:

$$R = (-2)^3 + (-2)^2$$

$$R = (-8) + 4$$

$$\therefore \boxed{R = -4}$$

6. Eithan ha rendido sus exámenes de Estadística, Economía y Física obteniendo las notas A, B y C, respectivamente Si para obtener dichos valores se tiene que resolver el siguiente ejercicio, ¿en cuál de los cursos obtuvo mayor calificación?



$$A = 4\sqrt{20}\operatorname{sen}\beta$$

$$B = 5 - \sqrt{20}\sec\beta$$

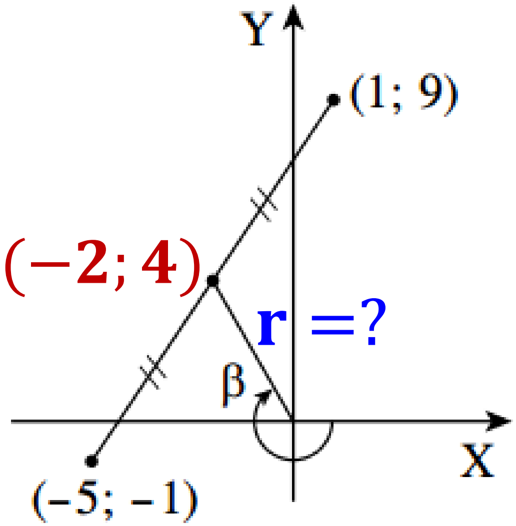
$$C = 6 - 6\tan\beta$$

Resolución

Calculamos las coordenadas del punto medio M:

- $x_M = \dfrac{-5+1}{2} = -2$
- $y_M = \dfrac{-1+9}{2} = 4$

$\mathbf{M(-2;4)}$



Calculamos r:

$$r = \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$$

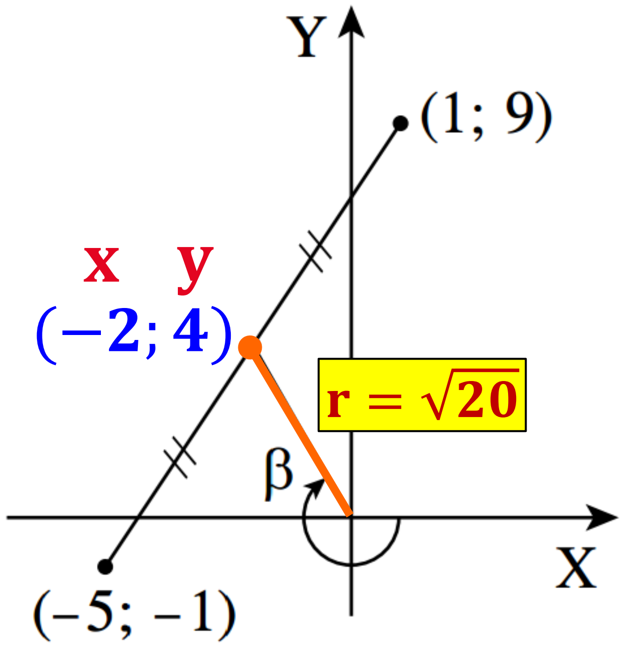
$$r = \sqrt{4+16}$$

$$\boxed{r = \sqrt{20}}$$

Continuamos…

6. Resolución

De la anterior, tenemos:



$A=4\sqrt{20}\operatorname{sen}\beta$

$B=5-\sqrt{20}\sec\beta$

$C=6-6\tan\beta$

Recordamos

$\operatorname{sen}\beta=\dfrac{y}{r}$	$\sec\beta=\dfrac{r}{x}$	$\tan\beta=\dfrac{y}{x}$

Calculamos las notas de los exámenes:

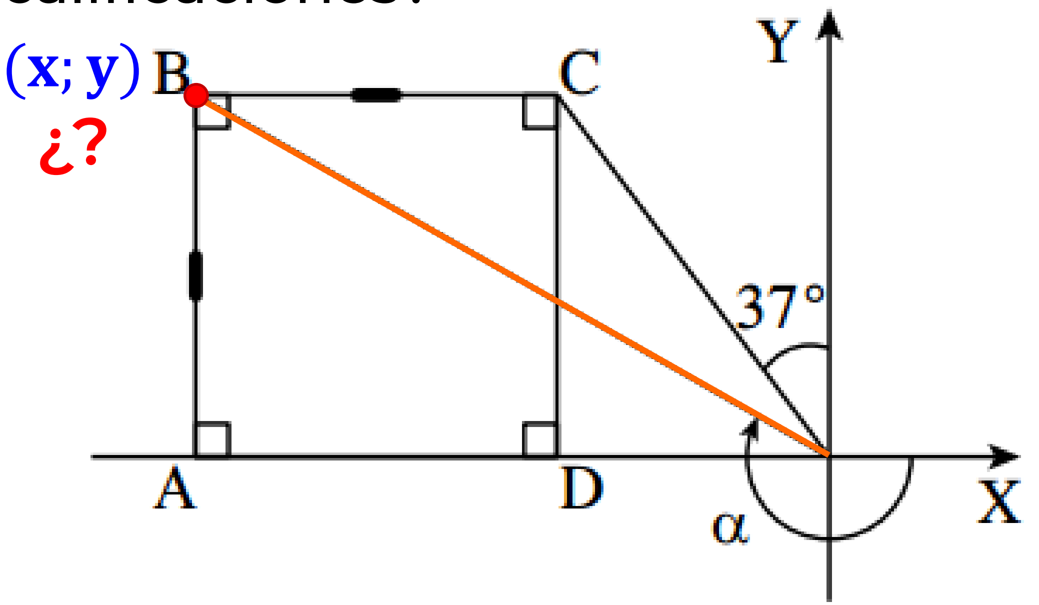
- $A=4\cancel{\sqrt{20}}\left(\dfrac{4}{\cancel{\sqrt{20}}}\right) \longrightarrow \boxed{A=16}$ **(Estadística)**

- $B=5-\sqrt{20}\left(\dfrac{\sqrt{20}}{-2}\right)=5\overset{+}{\boxed{-(-}}10) \longrightarrow \boxed{B=15}$ **(Economía)**

- $C=6-6\left(\dfrac{4}{-2}\right)=6\overset{+}{\boxed{-(-}}12) \longrightarrow \boxed{C=18}$ ✓ **(Física)**

∴ **Eithan obtuvo mayor nota en Física.**

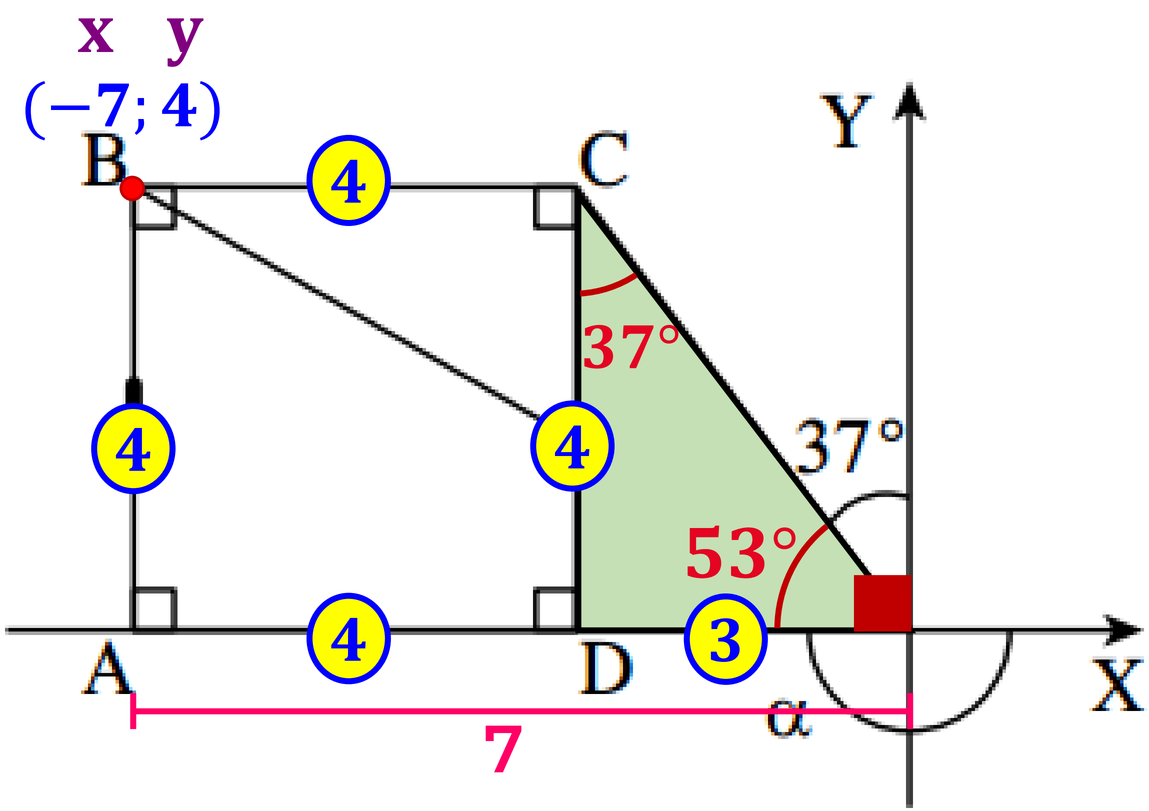
7. Diego ha rendido sus exámenes de Geometría y Física obteniendo las notas A y B, respectivamente. Si para obtener dichos valores se tiene que resolver el siguiente ejercicio, ¿cuál es el promedio de ambas calificaciones?



$$A = 2 + 4\sqrt{65}\text{sen}\alpha \qquad B = 12 - 7\tan\alpha$$

Resolución

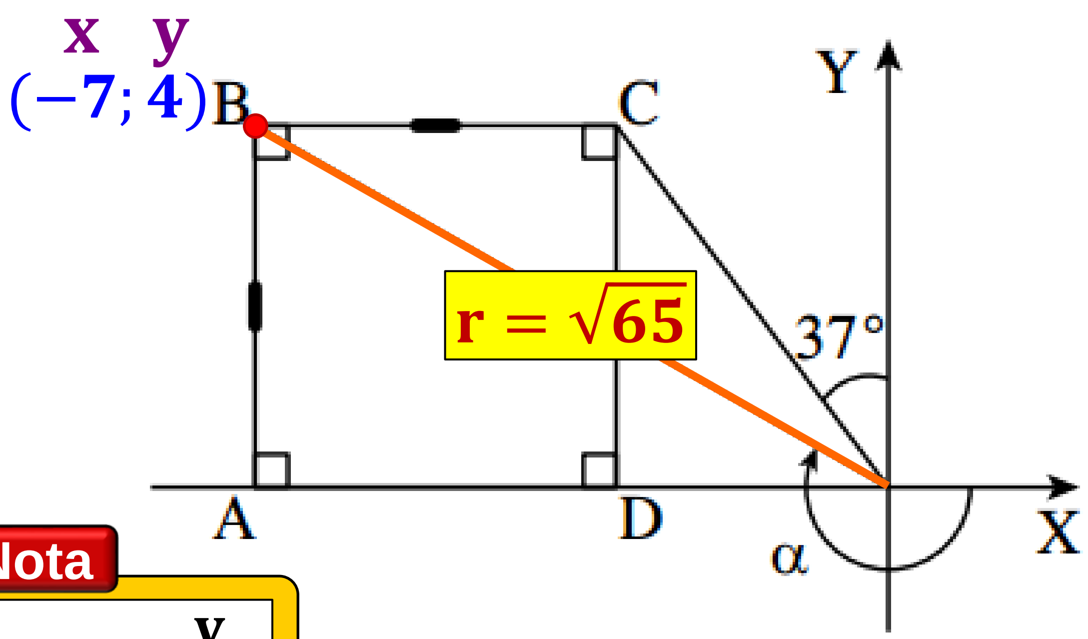
Determinamos las coordenadas de B:



Continuamos...

7. **Resolución**

De la anterior, tenemos:



Nota

$\mathbf{sen\alpha = \frac{y}{r}}$

$\mathbf{tan\alpha = \frac{y}{x}}$

$A = 2 + 4\sqrt{65}\operatorname{sen}\alpha$

$B = 12 - 7\tan\alpha$

Calculamos las calificaciones:

- $A = 2 + \cancel{4\sqrt{65}}\left(\frac{\mathbf{4}}{\cancel{\sqrt{\mathbf{65}}}}\right) \longrightarrow \boxed{A = 18}$ **(Geometría)**

- $B = 12 - 7\left(\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{-7}}\right) = 12 \overset{+}{\boxed{-(-}}4) \longrightarrow \boxed{B = 16}$ **(Física)**

Calculamos el promedio de notas:

$$\longrightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{18+16}{2} = \mathbf{17}$$

∴ **El promedio de notas es de 17.**