



ALGEBRA

CHAPTER 2

5th
SECONDARY

PRODUCTOS NOTABLES



 **SACO OLIVEROS**

MOTIVATING --- STRATEGY



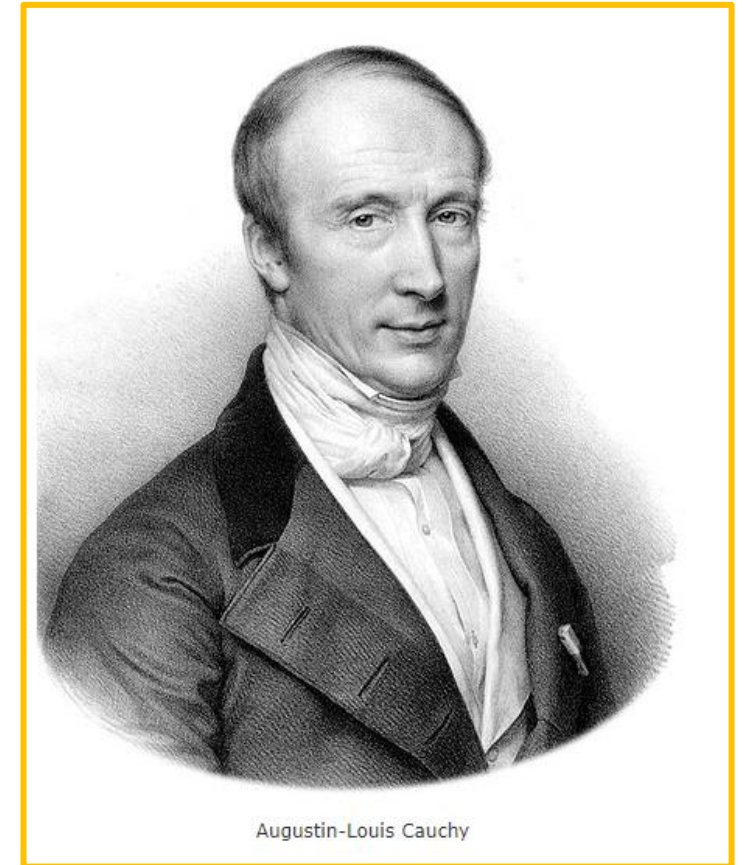
Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Matemático francés nació en París , vivió una infancia con pocos recursos económicos, pero logró superarse por sus dotes académicos

Su primer trabajo fue como ingeniero militar para **Napoleón**, ayudando a construir las defensas en Cherburgo. A los veinticuatro años volvió a París y dos más tarde demostró una conjetura de **Pierre de Fermat** que no había podido ser probada por matemáticos tan insignes como **Euler** y Gauss.

Publicó un total de 789 trabajos, entre los temas que abordó destacan:

- Límite y continuidad de una función
- Funciones de variable compleja
- Cálculo integral
- Convergencia de series infinitas
- Ecuaciones diferenciales



HELICO --- THEORY



PRODUCTOS NOTABLES

I) Desarrollo de un Binomio al Cuadrado

Trinomio cuadrado perfecto

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

EJEMPLOS:

$$\begin{aligned} 1) \quad (5x + 3)^2 &= (5x)^2 + 2(5x)(3) + 3^2 \\ &= 25x^2 + 30x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (3x - 4)^2 &= (3x)^2 - 2(3x)(4) + 4^2 \\ &= 9x^2 - 24x + 16 \end{aligned}$$

Observación

Identidad de Legendre

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$



II) Diferencia de cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo:

$$(3a + 5b)(3a - 5b) = 9a^2 - 25b^2$$

III) Identidad de Stevin

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplos:

$$(x + 4)(x + 6) = x^2 + 10x + 24$$

$$(x + 7)(x - 9) = x^2 - 2x - 63$$



IV) Desarrollo de un binomio al cubo

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

identidad de cauchy

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$



V) Suma y diferencia de cubos

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

VI) Desarrollo de un Trinomio al cuadrado

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

VII) Trinomio al cubo

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

Otra forma usual:

$$(a + b + c)^3 = 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$



VIII) Identidades condicionales

***Si : $a + b + c = 0$
se cumple:***

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

HELICO --- PRACTICE

Problema 1

Sabiendo que

$$\begin{aligned} a + b &= 5 \\ ab &= 2 \end{aligned}$$

Halle el valor de $E = a^2 + b^2 + a^3 + b^3$

Recordar!

Binomio suma al cuadrado

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Identidad de Cauchy

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

Resolución:



* **Primero:**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$5^2 = a^2 + 2(2) + b^2$$

$$a^2 + b^2 = 21$$

* **Segundo:**

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$5^3 = a^3 + b^3 + 3(2)(5)$$

$$125 = a^3 + b^3 + 30$$

$$a^3 + b^3 = 95$$

$$E = a^2 + b^2 + a^3 + b^3 = 21 + 95$$

$$E = 116$$

$$\therefore E = 116$$



Problema 2

Halle el valor de:

$$P = \sqrt[8]{80(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1) + 1}$$

Resolución:

Recordar

Diferencia de
cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$P = \sqrt[8]{\underbrace{(3^4 - 1)(3^4 + 1)}_{(3^8 - 1)}(3^8 + 1)(3^{16} + 1) + 1}$$

$$P = \sqrt[8]{\underbrace{(3^8 - 1)(3^8 + 1)}_{(3^{16} - 1)}(3^{16} + 1) + 1}$$

$$P = \sqrt[8]{\underbrace{(3^{16} - 1)(3^{16} + 1)}_{(3^{32} - 1)} + 1}$$

$$P = \sqrt[8]{3^{32} - 1 + 1}$$

$$P = \sqrt[8]{3^{32}} = 3^4$$

$$\therefore P = 81$$



Problema 3

Simplifique:

$$R = (x - 4)(x - 6)(x + 3)(x + 5) - (x^2 - x - 21)^2 + 90$$

Resolución:*Recordar**Identidad de Stevin*

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Desarrollo de un Binomio al cuadrado

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Multiplicamos convenientemente:

$$R = \underbrace{(x - 4)(x + 3)}_{x^2 - x - 12} \underbrace{(x - 6)(x + 5)}_{x^2 - x - 30} - (x^2 - x - 21)^2 + 90$$

$$R = (x^2 - x - 12)(x^2 - x - 30) - (x^2 - x - 21)^2 + 90$$

Hacemos: $x^2 - x = m$

$$R = (m - 12)(m - 30) - (m - 21)^2 + 90$$

$$R = m^2 - 42m + 360 - (m^2 - 42m + 441) + 90$$

$$R = 360 - 441 + 90$$

$$\therefore R = 9$$



Problema 4

Jaimito le pregunta a su abuelo por su edad y este le contesta: "Si reduces:

$$M = \frac{(x+5)(x^2-5x+25) - (x-4)(x^2+4x+16)}{3}$$

obtendrás mi edad hace 20 años". ¿Cuál es la edad del abuelo de Jaimito?

Resolución:

Recordar

Suma y diferencia de cubos

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$$

$$M = \frac{(x+5)(x^2-5x+5^2) - (x-4)(x^2+4x+4^2)}{3}$$

$$M = \frac{(\cancel{x^3} + 5^3) - (\cancel{x^3} - 4^3)}{3}$$

$$M = \frac{125 + 64}{3} = 63$$

∴ La edad del abuelo es $63 + 20 = 83$ años



Problema 5

Si se sabe que:

$$a + b + c = 12$$

$$ab + bc + ac = 60$$

Halle el valor de:

$$R = a^2 + b^2 + c^2$$

Recordar!

Trinomio al cuadrado

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$$

Resolución:

$$\underbrace{(a + b + c)^2}_{12} = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \underbrace{(ab + ac + bc)}_{60}$$

$$144 = a^2 + b^2 + c^2 + 120$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 24$$

$$\therefore R = 24$$



Problema 6

Si: $a = \sqrt{5} + \sqrt{3} - 1$ $b = 1 - \sqrt{3}$ $c = -\sqrt{5}$

Reduzca: $M = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2)}{12abc(ab + bc + ac)}$

Resolución:

Recordar

Si $a + b + c = 0$

Se cumple:

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\left. \begin{array}{l} a = \sqrt{5} + \sqrt{3} - 1 \\ b = 1 - \sqrt{3} \\ c = -\sqrt{5} \end{array} \right\} +$$

$$a + b + c = 0$$

$$M = \frac{(a^3 + b^3 + c^3)(a^2 + b^2 + c^2)}{12abc(ab + bc + ac)}$$

$$M = \frac{(3abc)(-2(ab + bc + ac))}{12abc(ab + bc + ac)}$$

$$M = \frac{-6}{12}$$

$$\therefore M = -\frac{1}{2}$$

Problema 7

Un grupo de economistas estimó que el crecimiento de la economía peruana, durante el primer trimestre del año estará dado por los valores numéricos de la expresión:

$P_n(a; b; c) = a^n + b^n + c^n$, donde n

representa el número de meses y P_n está expresado como porcentaje de crecimiento del producto bruto interno

(a , b y c son constantes).

- Si el país en Enero ($n = 1$) alcanzó un crecimiento del 2%
- Si el país en Febrero ($n = 2$) alcanzó un crecimiento del 5%
- Si el país en Marzo ($n = 3$) alcanzó un crecimiento del 20%

Halle el valor de abc

Recordar:



Otra forma usual del desarrollo del trinomio al cubo

$$(a + b + c)^3 = 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

Resolución:

$$P_n(a; b; c) = a^n + b^n + c^n$$

$$n = 1 \rightarrow a + b + c = 2$$

$$n = 2 \rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 5$$

$$n = 3 \rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 20$$

De:

$$\underbrace{(a + b + c)^3}_2 = 3 \underbrace{(a + b + c)}_2 \underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)}_5 - 2 \underbrace{(a^3 + b^3 + c^3)}_{20} + 6abc$$

$$8 = 30 - 40 + 6abc$$

$$8 = -10 + 6abc$$

$$18 = 6abc$$

$$abc = 3$$

$$\therefore abc = 3$$