

TRIGONOMETRY

Chapter 16

4th
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES



SACO OLIVEROS

ECUACIONES E IDENTIDADES

ECUACIONES Y SISTEMAS

ECUACIONES E IDENTIDADES

$$5x-2=3(x+4)$$

$$2(x-3)=2x-6$$

IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

Definición : **IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA** es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas y que se verifica para todo valor admisible de la(s) variables(s) .

Expresiones Trigonométricas : Son expresiones matemáticas donde las variables están afectadas por operadores trigonométricos (**sen**, **cos**, **tan**, **cot**, **sec**, **csc**).

Identidades Fundamentales : Llamadas también identidades trigonométricas básicas, son aquellas que se obtienen luego de relacionar las líneas trigonométricas en la circunferencia trigonométrica.- Se clasifican en:

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

A) Identidades Recíprocas :

$$\text{sen}x \cdot \text{csc}x = 1$$

$$\text{sen}x = \frac{1}{\text{csc}x}$$

$$\text{csc}x = \frac{1}{\text{sen}x}$$

$$\text{cos}x \cdot \text{sec}x = 1$$

$$\text{cos}x = \frac{1}{\text{sec}x}$$

$$\text{sec}x = \frac{1}{\text{cos}x}$$

$$\text{tan}x \cdot \text{cot}x = 1$$

$$\text{tan}x = \frac{1}{\text{cot}x}$$

$$\text{cot}x = \frac{1}{\text{tan}x}$$

B) Identidades Por División :

$$\text{tan}x = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}$$

$$\text{cot}x = \frac{\text{cos}x}{\text{sen}x}$$



C) Identidades Pitagóricas :

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 1 - \text{cos}^2 x \\ \text{cos}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \end{cases}$$

$$\text{sec}^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{sec}^2 x = 1 + \tan^2 x \\ \tan^2 x = \text{sec}^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\text{csc}^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{csc}^2 x = 1 + \cot^2 x \\ \cot^2 x = \text{csc}^2 x - 1 \end{cases}$$

Propiedades :

Si $\text{sec } x + \tan x = a$

entonces

$$\text{sec } x - \tan x = \frac{1}{a}$$

Si $\text{csc } x + \cot x = b$

entonces

$$\text{csc } x - \cot x = \frac{1}{b}$$

HELICO PRACTICE 1

Simplifique : $E = \sec x \cdot \operatorname{sen} x + \csc x \cdot \cos x - \tan x$

RESOLUCIÓN

$$E = \sec x \cdot \operatorname{sen} x + \csc x \cdot \cos x - \tan x$$

$$E = \frac{1}{\cos x} \cdot \operatorname{sen} x + \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x - \tan x$$

$$E = \cancel{\tan x} + \cot x - \cancel{\tan x}$$

$$\therefore E = \cot x$$

Recordar :

$$\cos x \cdot \sec x = 1$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \csc x = 1$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$$



HELICO PRACTICE 2

Simplifique $E = \cot x - \frac{\csc x}{\sec x}$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x \cdot \csc x = 1$$

$$\cos x \cdot \sec x = 1$$



$$E = \cot x - \frac{\csc x}{\sec x}$$

$$E = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\therefore E = 0$$

HELICO PRACTICE 3

Reduzca $P = \frac{1 + \cot x}{\csc x} - \cos x$

RESOLUCIÓN

$$P = \frac{1 + \cot x}{\csc x} - \cos x$$

$$P = \frac{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} - \cos x$$

$$P = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{\cancel{\sin x}}{1}} - \cos x$$

$$P = \sin x + \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x}$$

$$\therefore P = \sin x$$

Recordar :

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x \cdot \csc x = 1$$



HELICO PRACTICE 4

Si $\sec\phi - \tan\phi = \frac{3}{5}$, calcule

$$P = 3(\sec\phi + \tan\phi) + 2$$

RESOLUCIÓN

Recordar :

Si $\sec x - \tan x = a$,
entonces :

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{a}$$



Dato : $\sec\phi - \tan\phi = \frac{3}{5}$

Por propiedad : $\sec\phi + \tan\phi = \frac{5}{3}$

Luego : $P = 3(\sec\phi + \tan\phi) + 2$

$$P = \cancel{3} \left(\frac{5}{\cancel{3}} \right) + 2$$

$$\therefore P = 7$$

HELICO PRACTICE 5

Si $\csc\alpha + \cot\alpha = 3$,
calcule $E = 10 \operatorname{sen}\alpha$

RESOLUCIÓN

Recordar :

Si $\csc\alpha + \cot\alpha = a$,
entonces :

$$\csc\alpha - \cot\alpha = \frac{1}{a}$$



Dato :

$$\csc\alpha + \cot\alpha = 3$$

Por propiedad : $\csc\alpha - \cot\alpha = \frac{1}{3}$ +

$$2 \csc\alpha = \frac{10}{3}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\csc\alpha = \frac{5}{3}$$



Luego : $E = 10 \operatorname{sen}\alpha = 10 \left(\frac{3}{5} \right)$

$$\therefore E = 6$$

HELICO PRACTICE 6

Al copiar de la pizarra la expresión $\sec x - \tan x - 1$, un estudiante cometió un error y escribió $\csc x - \cot x - 1$. Calcule la razón geométrica entre lo que estaba escrito en la pizarra y lo que copió el alumno.

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\cos x \cdot \sec x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x \cdot \csc x = 1$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$R = \frac{\sec x - \tan x - 1}{\csc x - \cot x - 1}$$

$$R = \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}}$$

$$(\cancel{1} - \cancel{\sin x} - \cos x)$$

$$R = \frac{\cos x}{(\cancel{1} - \cancel{\cos x} - \sin x)}$$

$$\sin x$$

$$R = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore R = \tan x$$

HELICO PRACTICE 7

Una plancha metálica tiene la forma de un rectángulo cuyos lados miden $4(1 - \sin\theta)$ m y $2(1 + \sin\theta)$ m.

Si el área de la plancha mide 2 m^2 y el costo de la plancha (en soles) está dado por $S/200 (3 \csc^2\theta + 2 \sec^2\theta)$.
¿Cuánto cuesta la plancha ?

Recordar :

$$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sin\theta \cdot \csc\theta = 1$$

RESOLUCIÓN

Según datos (área de la plancha) :

$$4(1 - \sin\theta) \cdot \cancel{2}(1 + \sin\theta) = \cancel{2}$$

$$4(1 - \sin^2\theta) = 1 \Rightarrow 4 \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \sec^2\theta = 4$$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \csc^2\theta = \frac{4}{3}$$

$$\text{Costo} = S/200 (3 \csc^2\theta + 2 \sec^2\theta)$$

$$\text{Costo} = S/200 (\cancel{3} \left(\frac{4}{3} \right) + 2(4))$$

$$\therefore \text{Costo} = S/2400$$



SACO
OLIVEROS