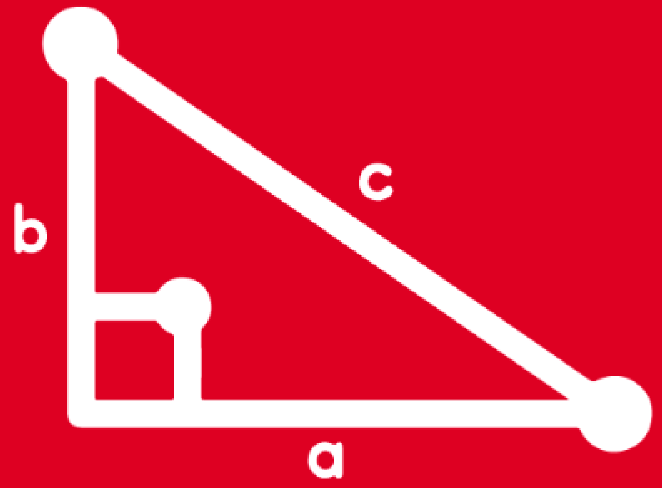
TRIGONOMETRY

Chapter 23



5th
SECONDARY

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

SACO OLIVEROS

Trabaja no para un aplauso,
sino para una causa.
Vive tu vida para expresar
no para impresionar.
No te esfuerces
por hacer notar
tu presencia;
sino para que se note
tu ausencia.

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

ECUACION TRIGONOMÉTRICA ELEMENTAL: $\mathrm{FT}(\underbrace{ax+b}_{\text{Argumento de la ETE}}) = N$

Donde:

FT : Operador Trigonométrico

x : Variable angular

a , b : Constantes reales ; $a \neq 0$

N : Constante real , el cual pertenece al rango de FT

EXPRESIONES GENERALES:

x_g : **Argumento de la ETE**

Vp : **Valor Principal** ; $k \in Z$

1. Para el SENO

$\operatorname{sen}(x_g) = N \Rightarrow x_g = k\pi + (-1)^k Vp$

2. Para el COSENO

$\cos(x_g) = N \Rightarrow x_g = 2k\pi \pm Vp$

3. Para la TANGENTE

$\tan(x_g) = N \Rightarrow x_g = k\pi + Vp$

PROBLEMA 1

Indique la menor solución positiva de:

$$\tan 3x - \sqrt{3} = 0$$

Resolución:

Del dato: $\tan 3x = \sqrt{3} \ldots$ ETE

Luego: $3x = \dfrac{\pi}{3}$

Recuerda:

$\tan 60° = \sqrt{3}$

$\therefore$ La menor solución positiva: $x = \dfrac{\pi}{9}$

PROBLEMA 2

Indique la menor solución positiva de: $\mathrm{sen}x \cdot \cos x = 0.25$

Resolución:

Multiplicando por 2: $2\mathrm{sen}x.\cos x = 2(0.25)$

Luego: $\mathrm{sen}2x = \dfrac{1}{2} \ldots$ ETE

Recuerda:

$\mathrm{sen}30° = \dfrac{1}{2}$

Así: $2x = \dfrac{\pi}{6}$

$\therefore$ La menor solución positiva es: $x = \dfrac{\pi}{12}$

PROBLEMA 3

Calcule la solución general de: tanx + cotx = 4

Resolución:

$$\underbrace{\boldsymbol{tanx + cotx}}_{2csc2x} = \boldsymbol{4}$$

csc2x = 2

Luego: sen2x = $\frac{1}{2}$ … ETE

VP = arcsen$(\frac{1}{2})$ = $\frac{\pi}{6}$

La solución general para el seno:

$$\boldsymbol{X_g = k\pi + (-1)^k . V_p \; ; k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boldsymbol{2x = k\pi + (-1)^k . (\tfrac{\pi}{6}) \; ; k \in \mathbb{Z}}$$

$\therefore$ x = $\frac{k\pi}{2} + (-1)^k . (\frac{\pi}{12})\; ; k \in \mathbb{Z}$

PROBLEMA 4

Determine la solución general de: $2\cos 2x - \tan 45° = 0$

Resolución:

$$\boldsymbol{2cos2x - tan45° = 0}$$

$$\boldsymbol{2cos2x - 1 = 0}$$

Luego: $\cos 2x = \frac{1}{2} \ldots \text{ETE}$

$\text{VP} = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

La solución general para el coseno:

$$\boldsymbol{X_g = 2k\pi \pm V_p \ ; k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boldsymbol{2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \ ; k \in \mathbb{Z}}$$

$\therefore$ $$\boxed{x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}}$$

PROBLEMA 5

Determinar la segunda solución positiva: $\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}\tan 30° = 0$

Resolución:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \sqrt{3}.\,tan30° = 0$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) - \cancel{\sqrt{3}}.\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\right) = 0$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$$

Luego: $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \ldots \text{ETE}$

$$VP = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

La solución general para la tangente:

$$X_g = k\pi + V_p \; ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Segunda solución positiva para: k = 1

$$x = 2(1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \; \boxed{x = \frac{5\pi}{2}}$$

PROBLEMA 6

Muchas poblaciones de animales como las de los conejos, fluctúan en períodos cíclicos de 12 años. Supongamos que N es la población de conejos en un tiempo t (en años) y está dado por:

$$N_{(t)} = 1000\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4000$$

¿Cuál es el menor tiempo para la cual la población de conejos será de 4500?

Resolución:

$$N_{(t)} = 1000\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4000$$

$\boldsymbol{Dato}$: $N_{(t)} = 4500$

$$\Rightarrow 4500 = 1000\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 4000$$

$$500 = 1000\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) \ldots \text{ETE}$$

Recuerda:

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

La menor solución:

$$\frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow t = 2$$

$$\therefore \boxed{t = 2 años}$$

PROBLEMA 7

En una ciudad de la sierra, la temperatura promedio de cada día del mes de agosto, en grados centígrados, se determina por la expresión

$$T_{(t)} = 8 + 10sen(\frac{\pi t}{12})$$

donde t denota el tiempo en días. Indique los tres días en que la temperatura promedio en la ciudad es de 13° C.

Resolución:

$$T_{(t)} = 8 + 10sen(\frac{\pi t}{12})$$

$$13 = 8 + 10sen(\frac{\pi t}{12})$$

$$5 = 10sen(\frac{\pi t}{12})$$

$$\frac{1}{2} = sen(\frac{\pi t}{12})$$

$$\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6};\ \frac{13\pi}{6};$$

$$\frac{\pi t}{12} = \frac{\pi}{6} \rightarrow \boxed{t = 2 \text{ de agosto}}$$

$$\frac{\pi t}{12} = \frac{5\pi}{6} \rightarrow \boxed{t = 10 \text{ de agosto}}$$

$$\frac{\pi t}{12} = \frac{13\pi}{6} \rightarrow \boxed{t = 26 \text{ de agosto}}$$