



ARITHMETIC

Chapter 7

2th
SECONDARY

DIVISIBILIDAD I



 **SACO OLIVEROS**



¿Qué tan complicado será dividir 99999222177225 entre 9 y dar como resultado el residuo?

Al dividir 2612^{123} entre 13, en 10 segundos podrías obtener el residuo?



1

TEORIA DE DIVISIBILIDAD

Es parte de la aritmética que estudia las condiciones que debe reunir un numeral para que sea divisible por otro y las consecuencias que se derivan de este hecho.

2

DIVISOR

Un número B es divisor de A, si al dividir A entre B el cociente es un número entero y el residuo es cero.

$$\begin{array}{r} 132 \quad | \quad 11 \\ \underline{132} \quad | \quad 12 \\ 0 \end{array}$$

Luego 11 es divisor de 132.



3

MULTIPLICIDAD

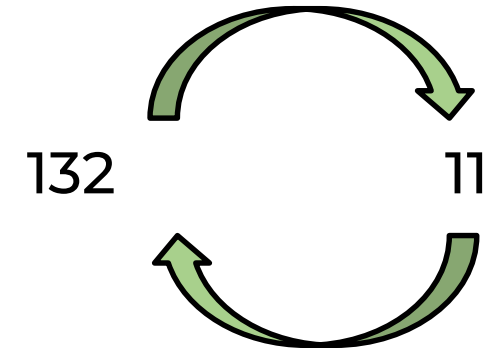
El número entero A es múltiplo de un número entero positivo B , si A es el resultado de multiplicar B por una cantidad entera. Consideremos el ejemplo anterior.

$$\begin{array}{r} 132 \\ 132 \\ \hline 0 \end{array} \begin{array}{l} 11 \\ 12 \end{array} \rightarrow 132 = 11(12)$$

Además:

- 132 es múltiplo de 11
132 es divisible por 11.
 - $0=11(0)$ entonces 0 es múltiplo de 11.
- ¡LA DIVISIBILIDAD Y MULTIPLICIDAD SON CONCEPTOS EQUIVALENTES!**

Es múltiplo de



Es divisor de



4

Notación de múltiplo

Del ejemplo anterior:
132 es múltiplo de 11

Se denota $132 = 11^0$

también $132 = 11k$, $k \in \mathbb{Z}$

EL CERO ES MÚLTIPLO
DE TODO NÚMERO

Ejemplos:

- ❖ $72 = 8$ ya que $72 = 8(9)$
- ❖ $23 = 23$ ya que $23 = 23(1)$
- ❖ $-28 = 7$ ya que $-28 = 7(-4)$
- ❖ $0 = 9$ ya que $0 = 9(0)$

TODO NÚMERO
ENTERO ES MÚLTIPLO
DE SÍ MISMO



5

NÚMEROS NO DIVISIBLES

POR DEFECTO

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{120} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{10} \end{array}$$

$$123 = 12(10) + 3$$

$$123 = 12 + 3$$

POR EXCESO

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{132} \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{11} \end{array}$$

$$123 = 12(11) - 9$$

$$123 = 12 - 9$$

$$3 + 9 = 12$$

$$r + r_e = d$$

$$84 = 9 + 3 \quad = 9 - 6$$

$$67 = 8 + 3 \quad = 8 - 5$$

$$77 = 5 + 2 \quad = 5 - 3$$

$$27 = 7 + 6 \quad = 7 - 1$$

$$47 = 4 + 3 \quad = 4 - 1$$



6

OPERACIONES CON MÚLTIPLOS DEL MISMO MÓDULO

Adición: *Ejemplo*

$$\begin{array}{c} \underbrace{14}_{\circ} + \underbrace{28}_{\circ} = \underbrace{42}_{\circ} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \underbrace{7}_{\circ} + \underbrace{7}_{\circ} = \underbrace{7}_{\circ} \end{array}$$

Generalizamos:

$$\boxed{\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ n + n = n \end{array}}$$

Sustracción: *Ejemplo*

$$\begin{array}{c} \underbrace{72}_{\circ} - \underbrace{45}_{\circ} = \underbrace{27}_{\circ} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \underbrace{9}_{\circ} - \underbrace{9}_{\circ} = \underbrace{9}_{\circ} \end{array}$$

Generalizamos:

$$\boxed{\begin{array}{c} \circ \quad \circ \quad \circ \\ n - n = n \end{array}}$$

Multiplicación: *Ejemplo*

$$\begin{array}{c} \underbrace{15}_{\circ} \times 3 = \underbrace{45}_{\circ} \\ \downarrow \\ \underbrace{5}_{\circ} \times 3 = \underbrace{5}_{\circ} \end{array}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \circ \quad \circ \\ n \times k = n \end{array}}$$

Donde: $k \in \mathbb{Z}$

Potenciación: *Ejemplo*

$$3^4 = 81$$

$$\left(\begin{array}{c} \circ \\ 3 \end{array}\right)^4 = \begin{array}{c} \circ \\ 3 \end{array}$$

Generalizamos: $\boxed{\begin{array}{c} \circ \\ n \end{array}}^k = \begin{array}{c} \circ \\ n \end{array}; k \in \mathbb{Z}^+$



Ejemplo:

$$F = \binom{0}{7+1} \binom{0}{7+3} \binom{0}{7+2}$$

$$F = \binom{0}{7+1} \times 3 \times 2$$

$$F = 7+6$$

C

En conclusión

$$\binom{0}{n+a} \binom{0}{n+b} \binom{0}{n+c} \dots \binom{0}{n+m} = \binom{0}{n+a \cdot b \cdot c \dots m}$$

Ejemplo:

$$\binom{0}{5+3}^3 = \binom{0}{5+3} \binom{0}{5+3} \binom{0}{5+3} = \binom{0}{5+3^3} = \binom{0}{5+2}$$

$$\binom{0}{9+2}^2 = \binom{0}{9+2} \binom{0}{9+2} = \binom{0}{9+2^2} = \binom{0}{9+4}$$

D

En conclusión

$$\binom{0}{n+r}^k = \binom{0}{n+r^k}; k \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo:

$$\binom{0}{7-1}^4 = \binom{0}{7+1^4} = \binom{0}{7+1}$$

$$\binom{0}{7-1}^3 = \binom{0}{7-1^3} = \binom{0}{7-1}$$

E

En conclusión

$$\binom{0}{n-r}^k = \begin{cases} \binom{0}{n+r^k}; & k: \text{par} \\ \binom{0}{n-r^k}; & k: \text{impar} \end{cases}$$



RESOLUCIÓN

1 Calcule la suma de los 15 primeros múltiplos positivos de 12.

Por dato: $12(1) + 12(2) + 12(3) + 12(4) + \dots + 12(15)$

Factorizamos: $12[1+2+3+4+\dots+15]$

RECORDAR

$$1+2+3+4+\dots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$$

$$12\left[\frac{15(16)}{2}\right]$$

$$12.[120]$$

\therefore La suma es 1440



RESOLUCIÓN

2 Se sabe que: $189 = \overset{0}{13} + x$ $150 = \overset{0}{8} - y$ Calcule $(x+y)^2$

$$\begin{array}{rcl}
 189 & = & \overset{0}{13} + x \\
 \underline{182} & & \downarrow \\
 7 & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{rcl}
 150 & = & \overset{0}{8} - y = \overset{0}{8} + 6 = \overset{0}{8} - 2 \\
 \underline{144} & & \downarrow \\
 6 & & y
 \end{array}$$

$$\therefore (x+y)^2 = (7+2)^2 = 81$$



RESOLUCIÓN

3 ¿Cuántos números múltiplos de 8 hay desde 248 hasta 1424?

POR DATO: $248 \leq 8k \leq 1424$

ENTRE 8: $31 \leq k \leq 178$

Los valores que toma "k":

K: 31, 32, 33, ..., 178

Total = $178 - 31 + 1 = 148$

∴ Hay 148 números múltiplo de 8



RESOLUCIÓN

4 Indique la cantidad de números múltiplos de 11 que hay entre 66 y 638.

POR DATO: $66 < 11k < 638$

ENTRE 11: $6 < k < 58$

Los valores que toma "k":

$$K: 7, 8, 9, \dots, 57$$

$$\text{Total} = 57 - 7 + 1 = 51$$

Hay 51 números



RESOLUCIÓN

- 5** Sea $P = 2345 \times 2314 + 19$ al dividirlo entre 12 se obtiene a de residuo, calcule el costo de un tablero de ajedrez cuyo precio es $(a - 3)(a + 1)$ soles.

$$\begin{array}{r} 2345 \\ 114 \\ \hline 65 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ 195 \end{array}$$

$$2345 = 12 + 5$$

$$\begin{array}{r} 2314 \\ 111 \\ \hline 34 \\ \hline 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ 192 \end{array}$$

$$2314 = 12 + 10$$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 7 \\ \hline 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 12 \\ 1 \end{array} \rightarrow 19 = 12 + 7$$

$$P = (12 + 5)(12 + 10) + 12 + 7$$

$$P = 12 + 57 \rightarrow P = 12 + 9$$

$$a = 9$$

$$\text{Costo} = (9 - 3)(9 + 1)$$

$$\boxed{\text{Costo} = 6 \times 10 = 60 \text{ soles}}$$



RESOLUCIÓN

6 Ricardo le dice a su hermano que durante el mes de diciembre visitará a su abuela los días que sean múltiplos de 4 y a su madrina los días que sean múltiplos de 6. Si en los días que no visitó a nadie podrá jugar fútbol, ¿cuántos días podrá jugar fútbol en ese mes?

Diciembre 2023

Calendarpedia
Your source for calendars

Sem.	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
48	27	28	29	30	1	2	3
49	4	5	6	7	8	9	10
50	11	12	13	14	15	16	17
51	18	19	20	21	22	23	24
52	25	26	27	28	29	30	31

© Calendarpedia® www.calendarpedia.com 8/12: Día de la Constitución Española, 8/12: Inmaculada Concepción, 25/12: Navidad

Podrá jugar fútbol 21 días

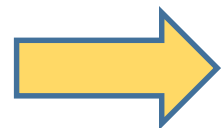


RESOLUCIÓN

- 8** Jimmy viajará al extranjero por razones de estudio pero le promete a su esposa que volverá luego de 100 días. Si hoy es el día de su partida y es martes, calcule que día de la semana caerá la fecha de su retorno.



$$\begin{array}{r} 100 \\ 30 \\ \hline 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ 14 \\ \hline 2 \end{array}$$



Ha pasado 14 semanas más 2 días

Será día jueves