ALGEBRA

Chapter 11

3th
SECONDARY

Cocientes Notables

SACO OLIVEROS

¿CUAL ES EL VALOR DE 0^0?

MOTIVATING STRATEGY

- ✓ *La respuesta más simple sería:* 0^0 *es una expresión sin significado matemático.*

- ✓ *Una respuesta más informativa sería:* 0^0 *es una expresión indeterminada.*

COCIENTES NOTABLES

FORMA GENERAL :

Sea la división: $$\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q}$$

genera un cociente notable (CN) cuando se cumple:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = n \quad ; n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

donde n es el número de términos del CN.

I. **Si la división es exacta $[R(x,y) \equiv 0]$ se cumple:**

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q} = Q(x,y)$$

II. **Si la división es inexacta $[R(x,y) \not\equiv 0]$ se cumple:**

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q} = Q(x,y) + \frac{R(x,y)}{x^p \pm y^q}$$

Consideramos CN a los originados por divisiones exactas.

CASO I:

$$\boxed{\frac{x^a - y^b}{x^p - y^q} \;;\quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)}$$

Ejemplos:

$$\frac{x^5 - y^5}{x - y} = x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4$$

$$n = \frac{5}{1} \Rightarrow \boxed{n = 5\ \text{términos}}$$

$$\frac{x^{16} - y^{24}}{x^2 - y^3} = x^{14} + x^{12}y^3 + x^{10}y^6 + x^8y^9 + x^6y^{12} + x^4y^{15} + x^2y^{18} + y^{21}$$

$$n = \frac{16}{2} = \frac{24}{3} \Rightarrow \boxed{n = 8\ \text{términos}}$$

CASO II:

$$\frac{x^a - y^b}{x^p + y^q} \; ; \quad (\forall n \; par, n \geq 2)$$

Ejemplos:

$$\frac{x^{32} - y^{40}}{x^4 + y^5} = x^{28} - x^{24}y^5 + x^{20}y^{10} - x^{16}y^{15} + x^{12}y^{20} - x^8y^{25} + x^4y^{30} - y^{35}$$

$$n = \frac{32}{4} = \frac{40}{5} \Rightarrow \boxed{n = 8 \; términos}$$

$$\frac{x^{36} - y^{24}}{x^6 + y^4} = x^{30} - x^{24}y^4 + x^{18}y^8 - x^{12}y^{12} + x^6y^{16} - y^{20}$$

$$n = \frac{36}{6} = \frac{24}{4} \Rightarrow \boxed{n = 6 \; términos}$$

CASO III:

$$\frac{x^a + y^b}{x^p + y^q} \;;\quad (\forall n\ impar)$$

Ejemplos:

$$\frac{x^{21} + y^{42}}{x^3 + y^6} = x^{18} - x^{15}y^6 + x^{12}y^{12} - x^9y^{18} + x^6y^{24} - x^3y^{30} + y^{36}$$

$$n = \frac{21}{3} = \frac{42}{6} \Rightarrow \boxed{n = 7\ términos}$$

$$\frac{x^{45} + 1}{x^5 + 1} = x^{40} - x^{35} + x^{30} - x^{25} + x^{20} - x^{15} + x^{10} + 1 - x^5$$

$$n = \frac{45}{5} \Rightarrow \boxed{n = 9\ términos}$$

TÉRMINO DE LUGAR k:

$$\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q} \quad ; \quad \frac{a}{p} = \frac{b}{q} = n \quad ; \quad (\forall n \geq 2 \; ; \; n \in \mathbb{N})$$

$$T_k = \pm (x^p)^{n-k} (y^q)^{k-1}$$

TÉRMINO CENTRAL

I. Cuando el valor de n es impar:

$$T_C = T_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \Rightarrow k = \left(\frac{n+1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{T_C = \pm\left(x^p \cdot y^q\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

II. Cuando el valor de n es par:

$$Lugar\left(T_{C_1}\right) = \left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow k = \left(\frac{n}{2}\right) \in \mathbb{N}$$

$$Lugar\left(T_{C_2}\right) = \left(\frac{n+2}{2}\right) \Rightarrow k = \left(\frac{n+2}{2}\right) \in \mathbb{N}$$

Problema 1

Si:

$$\frac{x^{a+2}+y^{a-6}}{x^{4}+y^{3}}$$

genera un cociente notable, halle el valor de a.

Resolución:

La división genera un CN

$$\frac{a+2}{4}=\frac{a-6}{3}$$

$$3a+6=4a-24$$

$$\boxed{\therefore \quad a=30}$$

Problema 2

Si:

$$\frac{x^{a+1}+y^{b+5}}{x^3+y^4}$$

genera un cociente notable de 13 términos, calcule $a+b$.

Resolución:

La división genera un CN

$$\frac{a+1}{3}=\frac{b+5}{4}=13$$

$$\frac{a+1}{3}=13 \quad \boxed{a=38}$$

$$\frac{b+5}{4}=13 \quad \boxed{b=47}$$

$$\boxed{\therefore \quad a+b=85}$$

Problema 3

Calcule el décimo término del desarrollo del cociente notable

$$\frac{x^{a-8}-y^{a+5}}{x^4-y^5}$$

Recordemos:

Sea la división: $\dfrac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q}$

Término de lugar k:

$$\boxed{T_k = \pm(x^p)^{n-k}(y^q)^{k-1}}$$

donde n es el número de términos del CN:

$$\boxed{n = \frac{a}{p} = \frac{b}{q}}$$

Resolución:

$$\frac{a-8}{4} = \frac{a+5}{5}$$

$$5a - 40 = 4a + 20$$

$$\boxed{a = 60}$$

$$\frac{x^{a-8}-y^{a+5}}{x^4-y^5} = \frac{x^{60-8}-y^{60+5}}{x^4-y^5}$$

$$\boxed{= \frac{x^{52}-y^{65}}{x^4-y^5}}$$

Cálculo de T_{10}:

$$\boxed{T_k = \pm(x^p)^{n-k}(y^q)^{k-1}}$$

$$\left\{\begin{array}{l} n = \dfrac{52}{4} = 13 \\ k = 10 \end{array}\right.$$

$$T_{10} = +(x^4)^{13-10}(y^5)^{10-1}$$

$$T_{10} = +(x^4)^3(y^5)^9$$

$$\boxed{\therefore\ T_{10} = x^{12}y^{45}}$$

Problema 4

Obtenga el número de términos del cociente notable generado al dividir

$$\frac{x^{63}-y^{72}}{x^{7}-y^{8}}$$

la cual indica el costo del menú en el cafetín de Saco Oliveros. ¿Cuánto se pagará por el almuerzo de 5 profesores?

Recordemos:

Sea la división: $\frac{x^{a}\pm y^{b}}{x^{p}\pm y^{q}}$

$$\boxed{n=\frac{a}{p}=\frac{b}{q}}$$

donde n es el número de términos del CN

Resolución:

$$n=\frac{63}{7}=\frac{72}{8}$$

$$\boxed{n=9}$$ *(N° de términos del CN)*

Costo de un menú en el cafetín: $S/.9$

$\therefore$ *Por cinco menús se pagarán: S/.45*

Problema 5

Los alumnos del tercer grado de secundaria desean realizar un paseo turístico en MIRABUS por lo cual se han establecido tres opciones con sus respectivos costo por persona

Lugares	Costo
Centro de Lima	12
Miraflores	15
Callao	17

Si al obtener el grado absoluto del cuarto termino del cociente notable generado por $\frac{x^{16}-y^{24}}{x^2-y^3}$, este representa el costo por persona a pagar para dicho paseo. ¿Cuál fue el monto total si fueron 75 estudiantes y que lugar visitaron?

Resolución:

Recordemos: Sea la división: $\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q}$

Término de lugar k: $\boxed{T_k = \pm(x^p)^{n-k}(y^q)^{k-1}}$

donde n es el número de términos del CN: $\boxed{n = \frac{a}{p} = \frac{b}{q}}$

$$\frac{x^{16} - y^{24}}{x^2 - y^3}$$

Cálculo de T_4:

$$\boxed{T_k = \pm(x^p)^{n-k}(y^q)^{k-1}}$$

$$n = \frac{16}{2} = 8$$

$$k = 4$$

$$T_4 = +(x^2)^{8-4}(y^3)^{4-1}$$

$$T_4 = +(x^2)^4(y^3)^3 \Rightarrow T_4 = x^8y^9$$

Piden: $GA(75) = 17(75)$ $\boxed{\therefore 1275 - callao}$

Problema 6

Indique el grado absoluto del sexto término del cociente notable generado por

$$\frac{x^{40}-y^{24}}{x^{5}-y^{3}}$$

Recordemos:

Sea la división: $\dfrac{x^{a}\pm y^{b}}{x^{p}\pm y^{q}}$

Término de lugar k: $\boxed{T_k=\pm(x^p)^{n-k}(y^q)^{k-1}}$

donde n es el número de términos del CN: $\boxed{n=\dfrac{a}{p}=\dfrac{b}{q}}$

Resolución:

$$\frac{x^{40}-y^{24}}{x^{5}-y^{3}}$$

Cálculo de T_6:

$$\boxed{T_k=\pm(x^p)^{n-k}(y^q)^{k-1}}$$

$$\begin{cases} n=\dfrac{40}{5}=8 \\ k=6 \end{cases}$$

$$T_6=+(x^5)^{8-6}(y^3)^{6-1}$$

$$T_6=+(x^5)^{2}(y^3)^{5}$$

$$\boxed{T_6=x^{10}y^{15}} \Rightarrow \boxed{GA(T_6)=25}$$

Problema 7

Jean franco tiene que pagar el recibo de luz del mes de noviembre pero se percata que a diferencia del mes pasado el costo ha subido, si el grado del termino central del cociente notable $\frac{x^{65}-y^{78}}{x^5-y^6}$, nos permite saber el monto a pagar en el mes de septiembre, ¿Cuánto equivale el aumento si el mes de octubre se pago 54 soles?

Recordemos:

Sea la división: $\frac{x^a \pm y^b}{x^p \pm y^q}$

Término central (T_C):

Para n impar: $\boxed{T_C = T_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}$

$$\boxed{T_C = \pm(x^p . y^q)^{\frac{n-1}{2}}}$$

donde n es el número de términos del CN

Resolución:

$$\frac{x^{65}-y^{78}}{x^5-6}$$

Cálculo de T_C:

$$\boxed{T_C = \pm(x^p . y^q)^{\frac{n-1}{2}}} \quad \left[\; n = \frac{65}{5} = 13\right.$$

$$T_C = +(x^5 . y^6)^{\frac{13-1}{2}}$$

$$T_C = +(x^5 . y^6)^6$$

$$T_C = x^{30}y^{36}$$

Piden: *GA – 54 = 66 - 54*

$\therefore$ *Rpta:12*