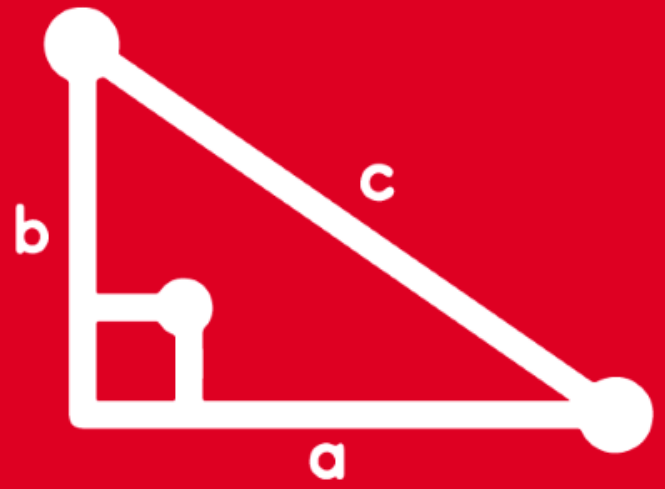
TRIGONOMETRY

Chapter 24



2nd
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES III

SACO OLIVEROS

HELICO-MOTIVACIÓN

¡Completando el camino!

$\cos x$	$\tan^2 x$	$\cot^2 x$	$\cos^2 x$	$\operatorname{sen} x$	$\cot x$

$\operatorname{sen}^2 x$	+		−	1
				+

	−	$\sec^2 x$	×	
				−
				$\sec x$
				×

1	−		×	$\csc x$	−
+					
−					
$\csc^2 x$					

Identidades trigonométricas

¿Qué son las identidades trigonométricas?

Son igualdades entre expresiones que contienen razones trigonométricas de una o mas variables, las cuales se verifican para un conjunto de valores admisibles.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades Recíprocas:

$$\text{senx}.\,\text{cscx} = 1 \quad \begin{cases} \text{senx} = \dfrac{1}{\text{cscx}} \\ \text{cscx} = \dfrac{1}{\text{senx}} \end{cases}$$

$$\text{cosx}.\,\text{secx} = 1 \quad \begin{cases} \text{cosx} = \dfrac{1}{\text{secx}} \\ \text{secx} = \dfrac{1}{\text{cosx}} \end{cases}$$

$$\text{tanx}.\,\text{cotx} = 1 \quad \begin{cases} \text{tanx} = \dfrac{1}{\text{cotx}} \\ \text{cotx} = \dfrac{1}{\text{tanx}} \end{cases}$$

Identidades trigonométricas

Identidades por división:

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

$$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$$

PROBLEMA 1

Reduzca: $\mathbf{B = \frac{senx}{cscx} + \frac{cosx}{secx} + 2}$

Resolución:

$$B = \frac{senx}{cscx} + \frac{cosx}{secx} + 2$$

$$B = \frac{senx}{\frac{1}{senx}} + \frac{cosx}{\frac{1}{cosx}} + 2$$

$$B = \underbrace{sen^2x + cos^2x}_{1} + 2$$

$$\therefore B = 3$$

$$cscx = \frac{1}{senx}$$

$$secx = \frac{1}{cosx}$$

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

PROBLEMA 2

Simplifique: $Q = (\csc x - \operatorname{sen} x).\tan x$

Resolución:

$$Q = (\csc x - \operatorname{sen} x).\tan x$$

$$Q = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x\right).\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$Q = \left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}\right)\cancel{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$

$$Q = \frac{\cos^2 x}{\cos x}$$

$$\therefore Q = \cos x$$

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$1 - sen^2 x = cos^2 x$$

PROBLEMA 3

Simplifique: $\mathbf{P = (tanx + cotx).cosx}$

Resolución:

$$P = (\mathbf{tanx} + \mathbf{cotx}).\cos x$$

$$P = \left(\frac{\mathbf{senx}}{\mathbf{cosx}} + \frac{\mathbf{cosx}}{\mathbf{senx}}\right).\cos x$$

$$P = \left(\frac{\mathbf{sen^2x + cos^2 x}}{\cancel{\cos x}.\,\mathrm{senx}}\right).\cancel{\cos x}$$

$$P = \frac{\mathbf{1}}{\mathrm{senx}}$$

$$\therefore \mathbf{P = cscx}$$

$$\mathbf{tanx} = \frac{\mathbf{senx}}{\mathbf{cosx}}$$

$$\mathbf{cotx} = \frac{\mathbf{cosx}}{\mathbf{senx}}$$

$$\mathbf{sen^2x + cos^2x = 1}$$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{senx}} = \mathbf{cscx}$$

PROBLEMA 4

Si: $\mathbf{senx + cscx = \frac{5}{2}}$;

Efectúe $\mathbf{E = sen^2x + csc^2x}$

Resolución:

Del dato:

$$\mathbf{senx + cscx = \frac{5}{2}}$$

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$$

$$\mathbf{senx.\,cscx = 1}$$

Calculamos:

$$\underbrace{(\underbrace{senx + cscx}_{\frac{5}{2}})^2}_{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = \underbrace{sen^2x + csc^2x}_{E} + \underbrace{2.senx.cscx}_{2\,(1)}$$

$$\frac{25}{4} - 2 = E$$

$$\therefore \mathbf{E = \frac{17}{4}}$$

PROBLEMA 5

Si: $\mathbf{senx - cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}}$;

Efectúe $\mathbf{P = senx.cosx}$

Resolución:

Del dato:

$$\mathbf{senx - cosx = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab}$$

$$\mathbf{sen^2x + cos^2x = 1}$$

Calculamos:

$$\mathbf{(senx - cosx)^2} = \underbrace{sen^2x + cos^2x}_{1} - 2.senx.cosx$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 - 2\,(P)$$

$$2P = 1 - \frac{1}{2}$$

$$2P = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathbf{P = \frac{1}{4}}$$

PROBLEMA 6

Al copiar de la pizarra la expresión $sec^3x - secx$, Lucas cometió un error y escribió $csc^3x - cscx$. Determine la razón entre lo que estaba escrito en la pizarra y lo que escribió Lucas.

$\sec^2 x - 1 = \tan^2 x$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\csc^2 x - 1 = \cot^2 x$

$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$

Resolución: $M = \dfrac{\sec^3 x - \sec x}{\csc^3 x - \csc x}$

$$M = \frac{\sec x.\ (\sec^2 x - 1)}{\csc x.\ (\csc^2 x - 1)}$$

$$M = \frac{\sec x\ .\ (\tan^2 x)}{\csc x.\ (\cot^2 x)}$$

$$M = \frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)}{\left(\frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)}$$

$$M = \frac{\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\right)}{\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\right)} = \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}$$

$\therefore M = \tan^5 x$

PROBLEMA 7

El laboratorio de una institución educativa adquiere $m^2 - n^2 + 36$ computadoras,donde:

$$tanx + cotx = m$$

$$tanx - cotx = n$$

Si cada computadora cuenta S/.1600,calcular el costo total de las computadoras

Resolución:

Recordar

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$tanx.\,cotx = 1$$

Reemplazamos:

$$N\acute{u}mero\ de\ computadoras = m^2 - n^2 + 36$$

$$= \underbrace{(tanx + cotx)^2 - (tanx - cotx)^2}_{4tanx.\,cotx} + 36$$

$$N\acute{u}mero\ de\ computadoras = 4(1) + 36 = 40$$

$$Costo\ total = \text{S/.}1600\text{x}40$$

$$\therefore Costo\ total = \text{S/.}64000$$