

TRIGONOMETRY

Chapter 20

5th
SECONDARY

FUNCIONES
TRIGONOMÉTRICAS I



MOTIVATING STRATEGY

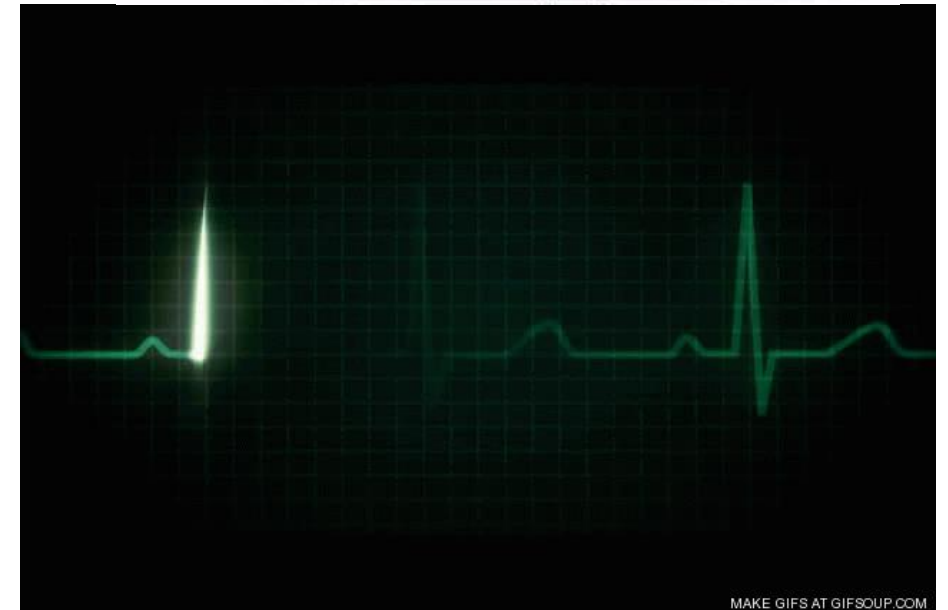
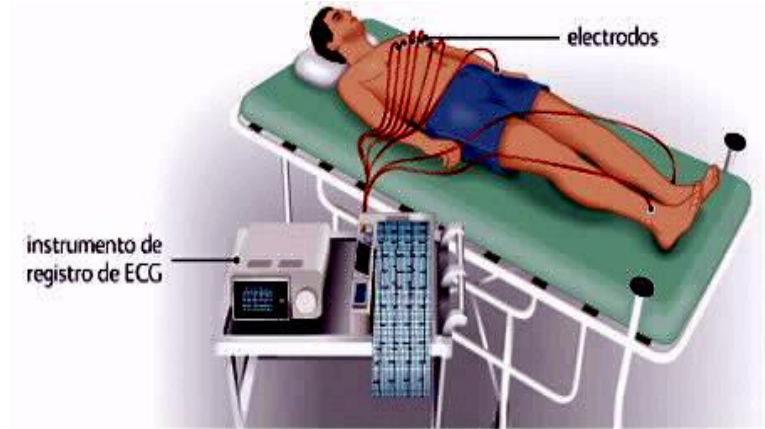
LA TRIGONOMETRÍA DEL CORAZÓN

El electrocardiograma (ECG) es la representación gráfica de la actividad eléctrica del corazón en función del tiempo. Para ello se colocan electrodos en diversas partes del cuerpo para obtener información.

El aparato que genera el ECG, usa las funciones trigonométricas seno y coseno modificando las amplitudes y los periodos.

Se recomienda a personas mayores de 40 años realizarse un examen ECG anualmente.

¿ Tu profesor ya tiene su ECG ?

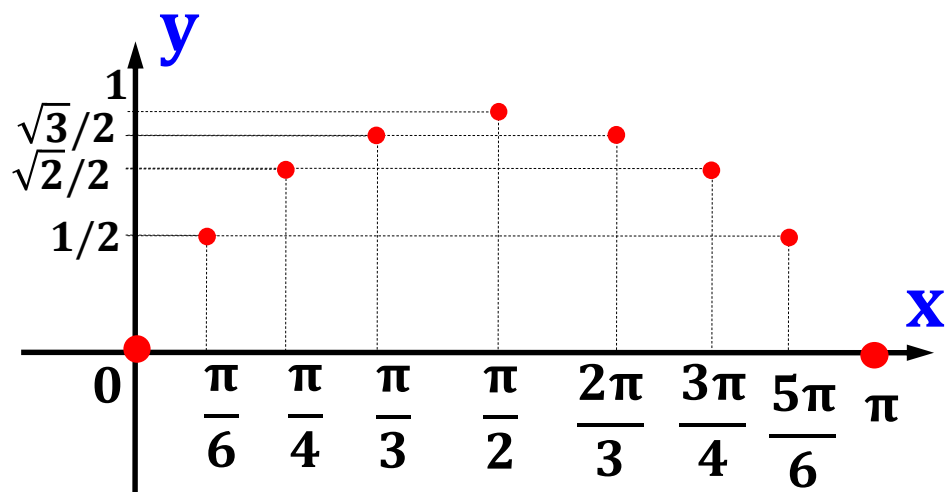


FUNCION SENO :

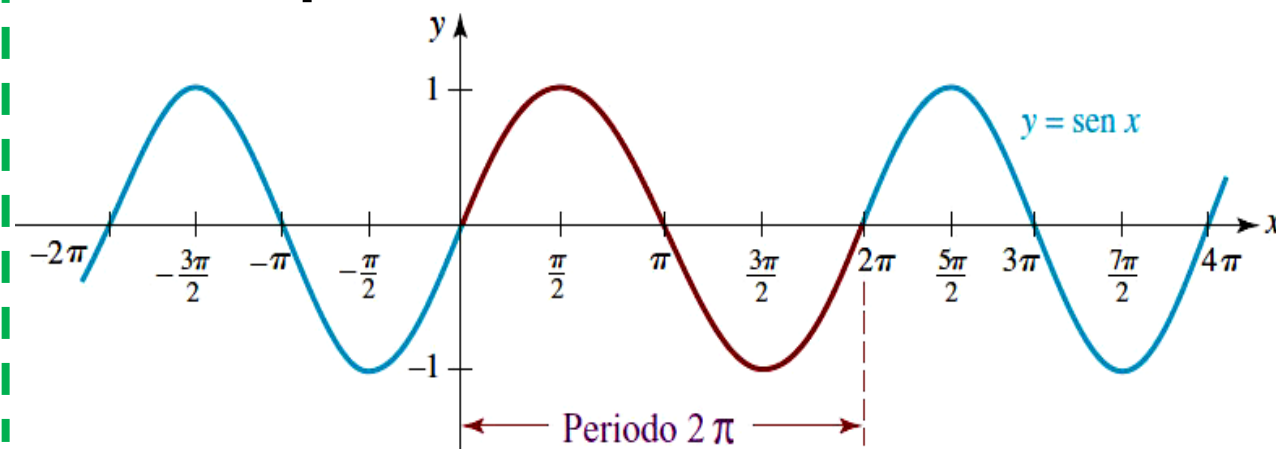
$$F = \{ (x; y) / y = \text{sen} x ; x \in \mathbb{R} \}$$

Tabulando para algunos valores de x :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$y = \text{sen} x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Tabulando para más valores y uniendo dichos puntos obtenemos la curva :



Dominio : $\text{Dom}(F) = \mathbb{R} ; x \in \mathbb{R}$

Rango : $\text{Ran}(F) = [-1 ; 1] \Rightarrow -1 \leq \text{sen} x \leq 1$

Periodo : $T = 2\pi$

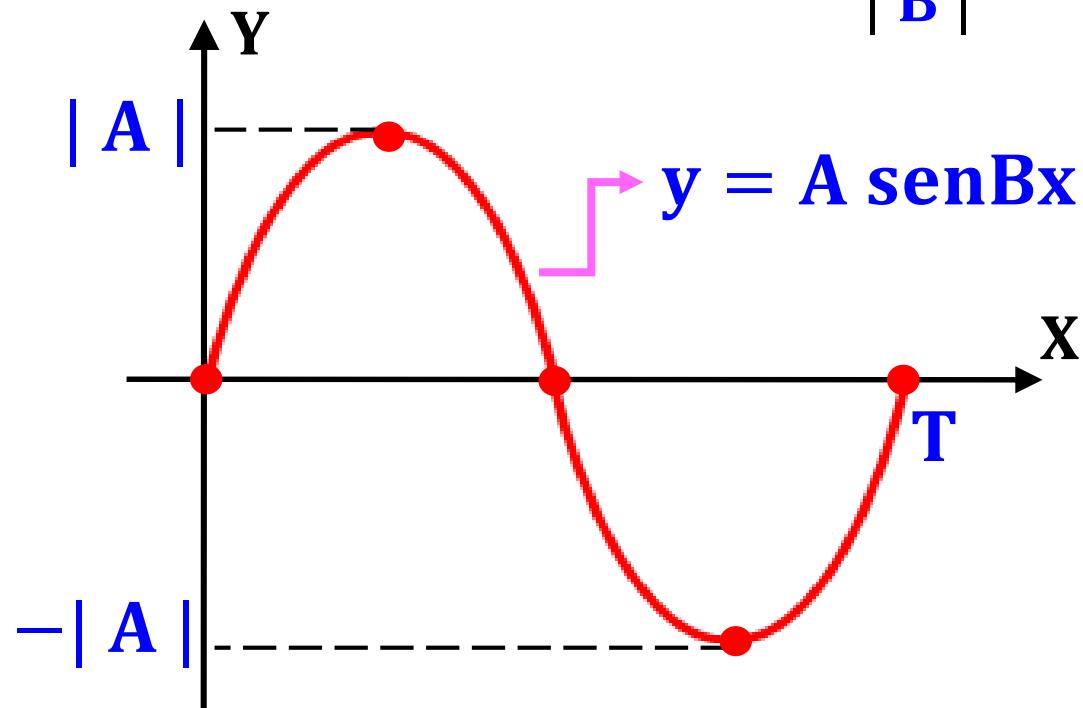
Es función impar : $\text{sen}(-x) = -\text{sen} x$

OBSERVACIÓN :

Sea la función : $y = A \operatorname{sen} Bx$

➡ Amplitud : $|A|$

Período : $T = \frac{2\pi}{|B|}$

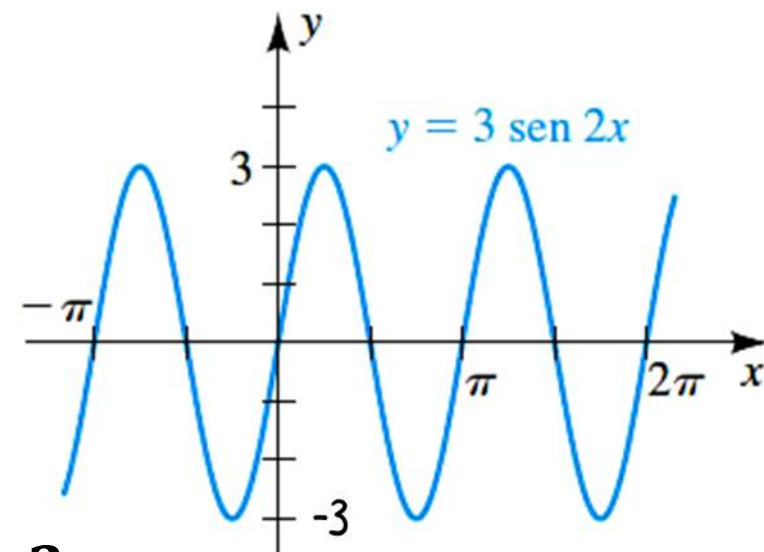
**Ejemplos :**

• $y = 3 \operatorname{sen} 2x$

\uparrow \uparrow
 A B

$$|A| = |3| = 3$$

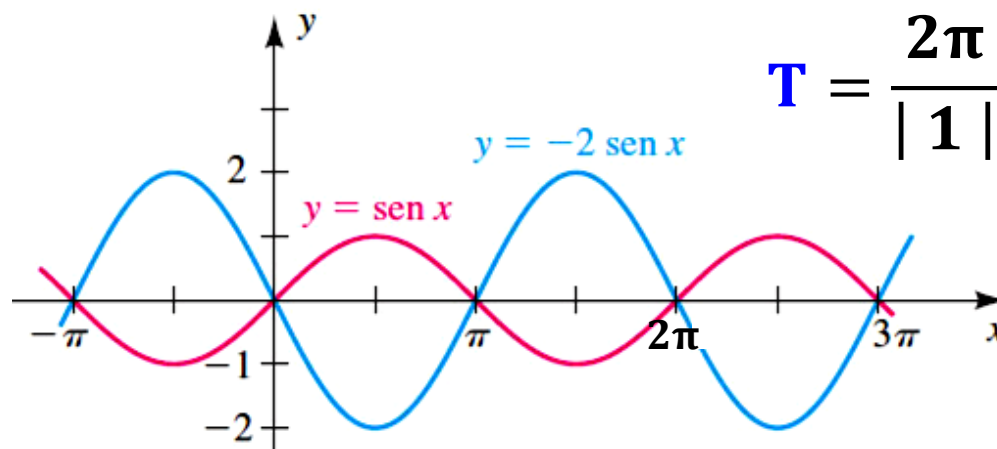
$$T = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



• $y = -2 \operatorname{sen} x$

$$|A| = |-2| = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$$



HELICO PRACTICE 1

Halle el rango de la función $f(x) = 2 \operatorname{sen} x - 3$

RESOLUCIÓN

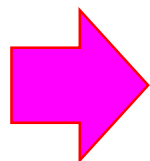


Recordar : $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

Luego : $(-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1)(2)$

$$-2 \quad -3 \leq \underbrace{2 \operatorname{sen} x - 3}_{f(x)} \leq 2 - 3$$

$$-5 \leq f(x) \leq -1$$



$$\operatorname{Ran}(f) = [-5 ; -1]$$

HELICO PRACTICE 2

Halle el rango de la función $g(x) = 4 \operatorname{sen} x \cdot \cos x - 1$

RESOLUCIÓN

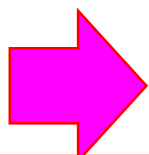
$$g(x) = 2(2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x) - 1 = 2 \operatorname{sen} 2x - 1$$

Recordar : $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \operatorname{sen} 2x \leq 1$

Luego : $(-1 \leq \operatorname{sen} 2x \leq 1)(2)$

$$-2 - 1 \leq \underbrace{2 \operatorname{sen} 2x - 1}_{g(x)} \leq 2 - 1$$

$$-3 \leq g(x) \leq 1$$



$$\operatorname{Ran}(g) = [-3; 1]$$



HELICO PRACTICE 3

Calcular $T_1 + T_2$, siendo T_1 y T_2 los periodos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente ; donde $f(x) = 2 \operatorname{sen}(4x)$; $g(x) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$

RESOLUCIÓN

$$f(x) = 2 \operatorname{sen}(4x)$$

\uparrow
 B_1

$$T_1 = \frac{2\pi}{|B_1|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$g(x) = 3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\right)$$

\uparrow
 B_2

$$T_2 = \frac{2\pi}{|B_2|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

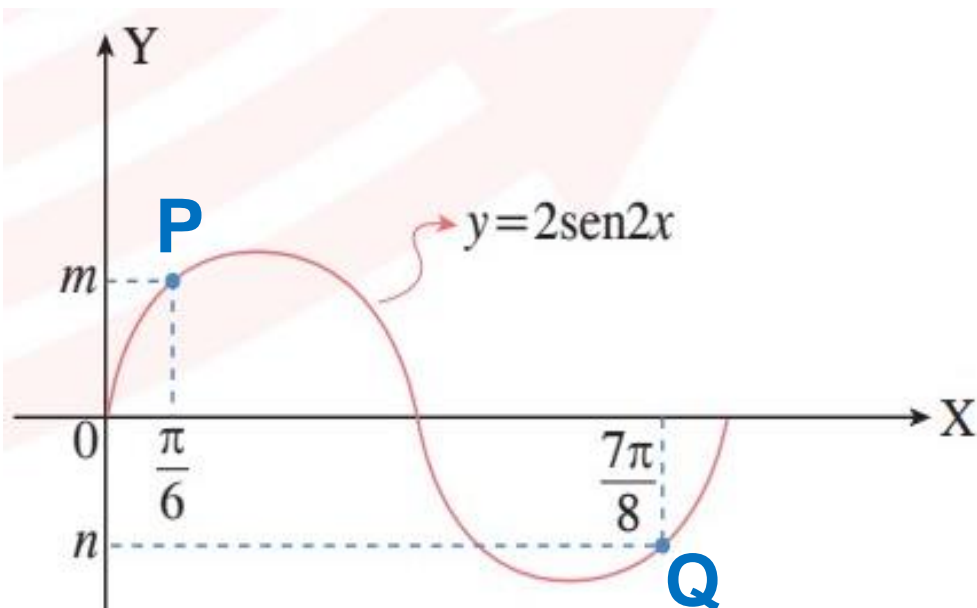
Luego : $T_1 + T_2 = \frac{\pi}{2} + 4\pi$

$$\therefore T_1 + T_2 = \frac{9\pi}{2}$$



HELICO PRACTICE 4

Del gráfico, calcule $E = m \cdot n$



RESOLUCIÓN

Dato : $f(x) = y = 2 \text{ sen} 2x$

$$P\left(\frac{\pi}{6}; m\right) \in f$$

$$\Rightarrow m = 2 \text{ sen}\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$$

$$m = 2 \text{ sen} 60^\circ$$

$$m = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$m = \sqrt{3}$$

$$Q\left(\frac{7\pi}{8}; n\right) \in f$$

$$\Rightarrow n = 2 \text{ sen}\left(2 \cdot \frac{7\pi}{8}\right)$$

$$n = 2 \text{ sen} 315^\circ$$

$$n = 2 \text{ sen}(\overbrace{360^\circ - 45^\circ}^{\text{IV C}})$$

$$n = 2 (-\text{sen} 45^\circ)$$

$$n = 2 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$n = -\sqrt{2}$$

Luego :

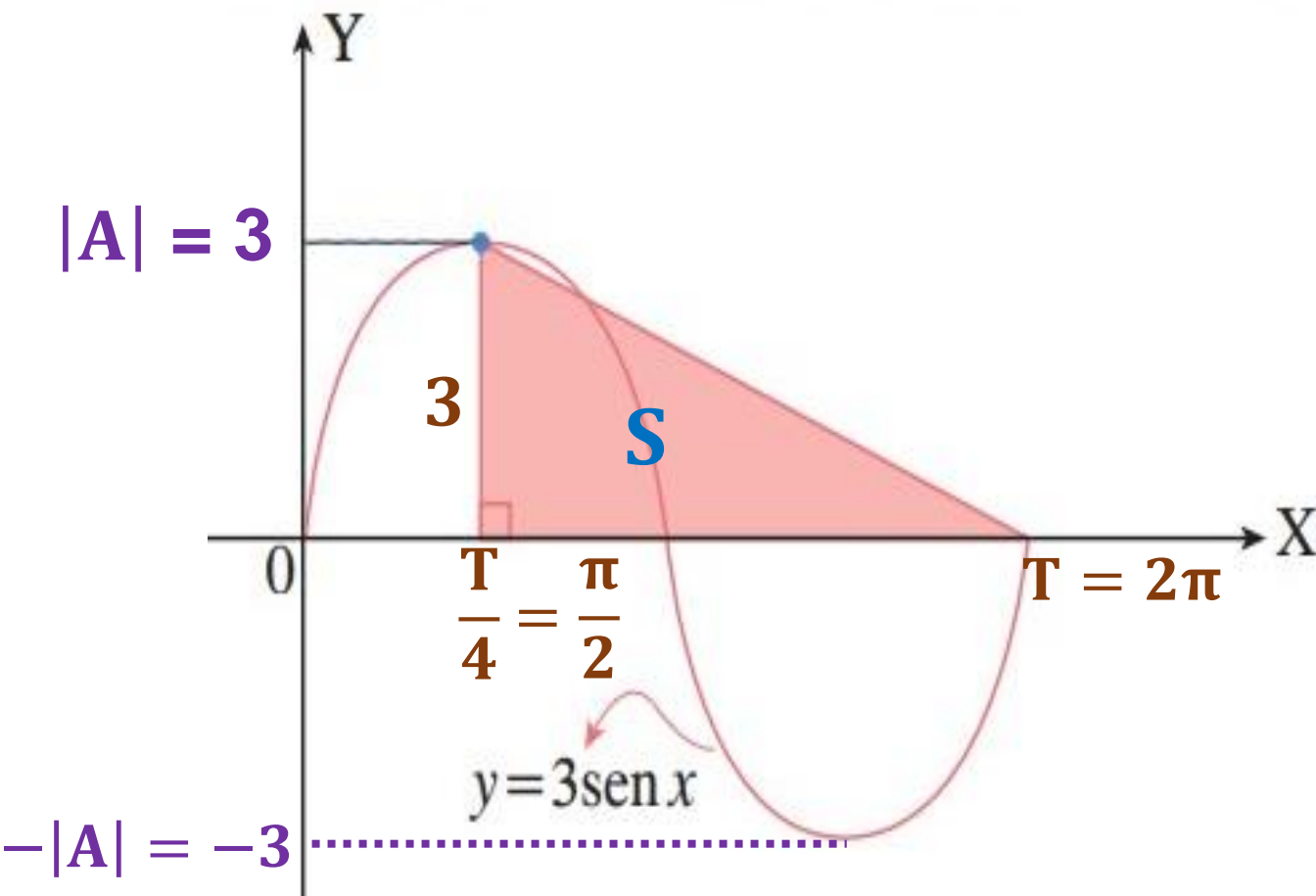
$$E = m \cdot n$$

$$E = (\sqrt{3})(-\sqrt{2})$$

$$\therefore E = -\sqrt{6}$$

HELICO PRACTICE 5

Del gráfico, calcule el área de la región sombreada .



RESOLUCIÓN

$$f(x) = y = 3 \sin(1x)$$

$$\Rightarrow A = 3 ; B = 1$$

Calculamos el periodo T :

$$T = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{|1|} \Rightarrow T = 2\pi$$

$$\frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

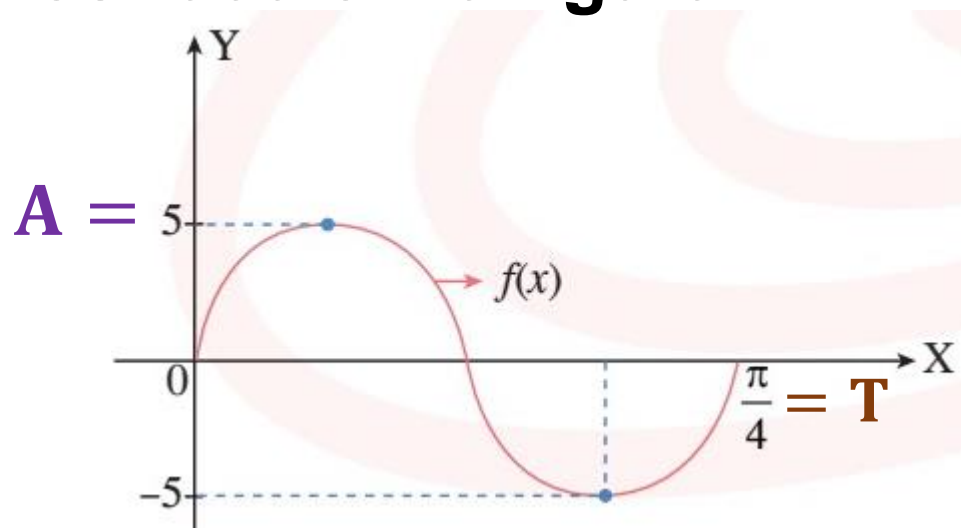
Calculamos el área sombreada :

$$S = \frac{\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)(3)}{2}$$

$$\therefore S = \frac{9\pi}{4} u^2$$

HELICO PRACTICE 6

La fecha de cumpleaños de Aracely es el $(2A + B - 1)$ de julio. Los valores de A y B son parte de la regla de correspondencia de la función $f(x) = A \sin(Bx)$ mostrada en la figura :



¿ Cuándo es el cumpleaños de Aracely ?

RESOLUCIÓN

Según datos : $A > 0$; $B > 0$

Según figura : $A = 5$; $T = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{B} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow B = 8$$

Calculamos el día :

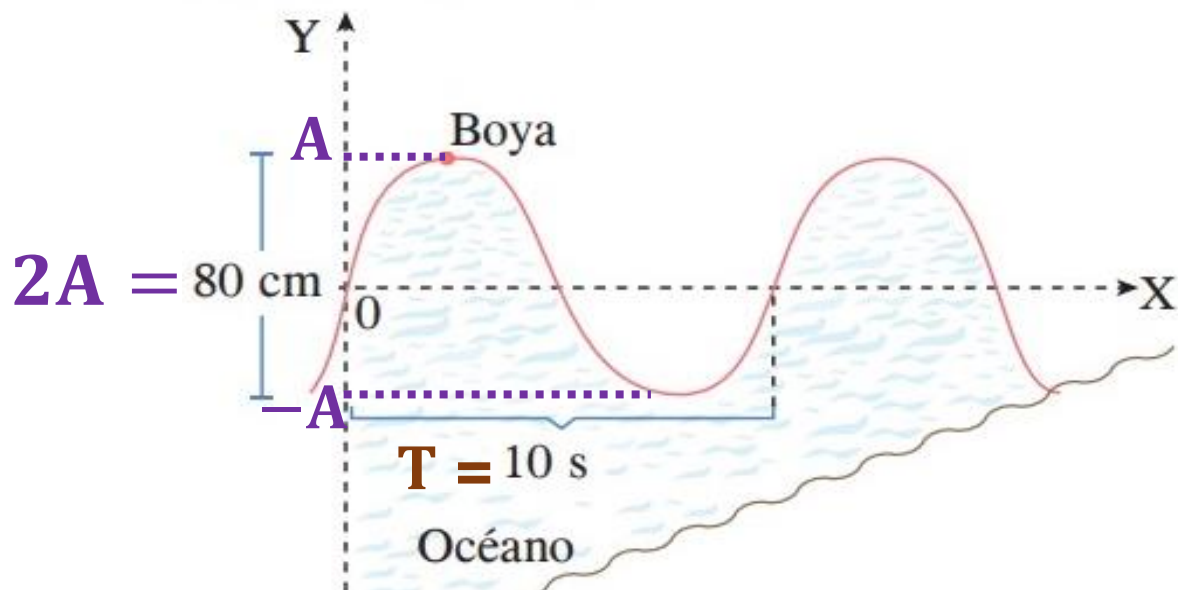
$$2A + B - 1 = 2(5) + 8 - 1 = 17$$

∴ El cumpleaños de Aracely es el 17 de julio .

HELICO PRACTICE 7

Una boya en el océano oscila de arriba hacia abajo mientras las olas pasan, tal como muestra la figura.

Si la boya se mueve 80 cm desde el punto más alto cada 10 segundos, determine la ecuación de la boya en movimiento.



RESOLUCIÓN

Sea la función de la boya :

$$f(x) = y = A \sen(Bx)$$

Donde : $A > 0$; $B > 0$;
x en segundos, y en cm

$$\text{Luego : } 2A = 80 \Rightarrow A = 40$$

$$T = 10 \Rightarrow \frac{2\pi}{B} = 10 \Rightarrow B = \frac{\pi}{5}$$

$$\therefore f(x) = y = 40 \sen\left(\frac{\pi}{5}x\right)$$



SACO
OLIVEROS