ASOCIACIÓN EDUCATIVA
SACO OLIVEROS

ALGEBRA

Chapter 4

IV

LEVEL

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

ALGEBRA

índice

01. MotivatingStrategy

02. HelicoTheory

03. HelicoPractice

04. HelicoWorkshop

Existe evidencia que el matemático italiano ***Scipione del Ferro*** (1465 – 1526), profesor de la Universidad de Bolonia, en 1515 había logrado resolver algunos casos particulares de las ecuaciones de tercer grado, sin embargo la negativa de publicarlo (por el temor de someterse a disputas públicas), hizo que no se conocieran estos resultados. Un talentoso matemático muy sufrido y pobre, que se ganaba la vida dando clases a los adinerados, llamado ***Nicolo Fontana*** (1500 – 1557) y que lo apodaban ***Tartaglia***, debido a una tartamudez, producto de un puntapié en el rostro que le propinó un soldado, quedando tartamudo y con la cara estropeada. Su talento y su afición por resolver problemas prácticos de artillería hicieron que inventara un método para resolver ciertos casos particulares de las ecuaciones de tercer grado, era suficiente para la época, puesto que resolver ecuaciones generales de tercer grado incurriría en soluciones con números negativos e imaginarios que no eran concebidos como números.

Tanta era la fama de Tartaglia que llegó a los oídos del matemático Scipione del Ferro, que instó a su alumno ***Antonio María de Fiori*** a retar públicamente a Tartaglia, para solucionar 30 problemas, que tenían que ver con la solución de ecuaciones de tercer grado, reto de Tartaglia aceptó, llegado el momento Fiorí no pudo resolver ni un problema, mientras que Tartaglia logró resolverlo todos, acrecentando su fama y prestigio. En este momento llamó la atención del médico ***Gerónimo Cardano*** (1501 – 1576), personaje controversial por sus prácticas en el ocultismo y la astrología, sin embargo, con cierto talento matemático que le permitía estar interesado en resolver las ecuaciones de tercer grado. Cardano mediante carta solicitó a Tartaglia le revelará el método para la solución de estas ecuaciones, propuesta que Tartaglia no aceptó, sin embargo, la astucia de Cardano fue mayor, puesto que luego invitó a almorzar a Tartaglia, invitación que aceptó, Cardano, en el almuerzo, le volvió a solicitar el método para solucionar las ecuaciones de tercer grado, esta vez jurando por los santos evangelios que jamás iba a revelarlo, Tartaglia conmovido por el juramento aceptó, darle el método usando un discurso retórico (común en la época, para describir soluciones o enunciar problemas), sin embargo, Cardano en 1545 publica su obra ***Ars Magna*** en donde establece el método de solución para las ecuaciones de tercer grado, siguiendo las ideas de Tartaglia. Se inicia un conflicto entre estos dos matemáticos, por la autoría de la solución de las ecuaciones de tercer grado. Aunque Cardano, en su obra afirma que la solución se debe a Scipione del Ferro y que Tartaglia lo redescubre, esto no dejó contento a Tartaglia. El aporte de Cardano fue darle una secuencia pedagógica a la solución y establecer que estas soluciones para casos particulares, también se pueden extender para el caso general. Además en Ars Magna se establece la solución de las ecuaciones de cuarto grado, atribuido a un destacado discípulo de Cardano, ***Ludovico Ferrari*** (1517- 1560), quien logró ser profesor de la Universidad de Bolonia. Instado por Cardano, Ferrari reta públicamente a Tartaglia, en la solución de problemas, disputa que está lleno de controversias, unos dicen que Tartaglia no pudo resolver ningún problema, otros dicen que Ferrari ejerció acoso con sus amigos en el momento de que Tartaglia estaba solucionando y aun así Tartaglia logró resolver todos los problemas, mientras de Ferrari no pudo hacerlo.

MOTIVATING STRATEGY

Material Digital

Resumen

- Resolución
- Discusión de las Raíces
- Propiedades

HELICO
THEORY

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Llamada también ecuaciones cuadráticas, ya que su incógnita presenta como grado mayor 2 (dos), y tiene la siguiente forma:

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = 0} \quad (A \neq 0)$$

Donde: x *es la incógnita*

A, B *y* C *son coeficientes* $\in \mathbb{R}$

Resolución de la Ecuación

Por Factorización

Ejemplo $2x^2 - 13x + 20 = 0$

$\rightarrow 2x \qquad -5$

$\rightarrow x \qquad -4$

$$\underbrace{(2x-5)}_{0}\underbrace{(x-4)}_{0} = 0$$

$$(2x-5) = 0 \quad \vee \quad (x-4) = 0$$

$$\boxed{x = \frac{5}{2}} \quad \vee \quad \boxed{x = 4}$$

Estos valores encontrados son las raíces

Por lo tanto:

$$C.S. = \left\{\frac{5}{2}\,;4\right\}$$

Por Fórmula General

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = 0} \quad (A \neq 0)$$

$$\boxed{x = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}}$$

Δ *: Discriminante*

$$\boxed{\Delta = B^2 - 4AC}$$

Ejemplo

$$2x^2 - 13x + 20 = 0$$

$$\boxed{A = 2} \quad \boxed{B = -13} \quad \boxed{C = 20}$$

$$\Delta = (-13)^2 - 4(2)(20) \qquad \boxed{\Delta = 9}$$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{9}}{2(2)} \qquad \boxed{x = \frac{13 \pm 3}{4}}$$

$$\boxed{x = \frac{5}{2}} \quad \vee \quad \boxed{x = 4}$$

Por lo tanto: $C.S. = \left\{\frac{5}{2}\,;4\right\}$

Propiedades

Sea: x_1 *y* x_2 *las raíces de la ecuación:*

$$\boxed{Ax^2 + Bx + C = 0} \quad (A \neq 0)$$

Suma de Raíces

$$\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-B}{A}}$$

Producto de Raíces

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{C}{A}}$$

Raíces Simétricas {m ; -m}

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

Raíces Recíprocas $\{m\,;\frac{1}{m}\}$

m $\neq 0$

$$x_1 . x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{A = C}$$

Formación de una Ecuación Cuadrática

$$\boxed{x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 . x_2 = 0}$$

Resolución de Problemas

- Problema 01
- Problema 02
- Problema 03
- Problema 04
- Problema 05

HELICO PRACTICE

Problema 01

Resolución

Resuelva

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

Usamos la resolución por Factorización

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} x & & -5 \\ x & & -2 \end{array}$$

$$\underbrace{(x-5)}_{0}\ \underbrace{(x-2)}_{0} = 0$$

$$(x-5) = 0 \quad \vee \quad (x-2) = 0$$

$$\boxed{x = 5} \quad \vee \quad \boxed{x = 2}$$

$$\boxed{C.S. = \{\ 2\ ;5\ \}}$$

CLAVE C

Problema 02

Siendo α y β, raíces de la ecuación:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Halle el valor de :

$$M = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$$

Usaremos la propiedad de las raíces en:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$\boxed{A = 1}$ $\boxed{B = -1}$ $\boxed{C = -1}$

Suma de Raíces $\boxed{x_1 + x_2 = \frac{-B}{A}}$

$$\alpha + \beta = \frac{-(-1)}{1} \Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 1}$$

Producto de Raíces $\boxed{x_1 . x_2 = \frac{C}{A}}$

$$\alpha . \beta = \frac{(-1)}{1} \Rightarrow \boxed{\alpha . \beta = -1}$$

Nos piden

$$M = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}$$

Resolución

Operamos: $M = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$$\Rightarrow M = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

Reemplazando

$$M = \frac{(1)^2 - 2(-1)}{-1}$$

$$M = \frac{1 + 2}{-1}$$

$$\boxed{M = -3}$$

CLAVE E

Problema 03

Luego de resolver la ecuación:

$$(x+3)^2+(x-2)^2=x^2+16$$

Indique la menor solución

Resolución

$$(x+3)^2+(x-2)^2=x^2+16$$

Desarrollamos los binomios al cuadrado

$$x^2+6x+9+x^2-4x+4=x^2+16$$

$$2x^2+2x+13=x^2+16$$

$$x^2+2x-3=0$$

$$\begin{array}{lr} x & +3 \\ x & -1 \end{array}$$

$$\underbrace{(x+3)}_{0}\underbrace{(x-1)}_{0}=0$$

$$(x+3)=0 \quad \vee \quad (x-1)=0$$

$$\boxed{x=-3} \quad \vee \quad \boxed{x=1}$$

$$\boxed{\text{C.S.}=\{-3\,;1\}}$$

Nos piden la menor solución

$$\boxed{-3}$$

CLAVE B

Problema 04

Resolución

Una de las raíces de la ecuación

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

representa el precio en soles de un producto. Si se compran 16 de estos. ¿Cuánto se pagó por todo?

Usamos la resolución por Factorización

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\begin{array}{lcr} x & & -1 \\ x & & +7 \end{array}$$

$$\underbrace{(x-1)}_{0}\ \underbrace{(x+7)}_{0} = 0$$

$$(x-1) = 0 \quad \vee \quad (x+7) = 0$$

$$\boxed{x = 1} \quad \vee \quad \boxed{x = -7}$$

Una de estas raíces representa el precio del producto, como sabemos el precio no puede ser un valor negativo

$\Rightarrow$ $\boxed{x = 1}$

Será la raíz que representa el precio

Por tanto el precio del producto es:

$\boxed{S/1}$

Nos piden, cuanto se pagó por la Compra de 16 productos

$\Rightarrow$ $(16)(S/1)$

$\boxed{S/.16}$

CLAVE D

Problema 05

Paulo paga por un café con un billete de 10 soles, costando este x soles, valor deducido de:

$$(4x-6)^2=(3x+1)^2$$

¿Cuánto recibe Paulo de vuelto si se sabe que el precio de la taza de café es una cantidad entera?

$$(4x-6)^2=(3x+1)^2$$

Desarrollamos los binomios al cuadrado

$$16x^2-48x+36=9x^2+6x+1$$

$$7x^2-54x+35=0$$

$7x \quad -5$

$x \quad -7$

$$\underbrace{(7x-5)}_{0}\underbrace{(x-7)}_{0}=0$$

$$(7x-5)=0 \quad \vee \quad (x-7)=0$$

$$\boxed{x=\frac{5}{7}} \quad \vee \quad \boxed{x=7}$$

Entonces el precio de la taza de café es

$$\boxed{S/7}$$

Resolución

Nos piden, el vuelto que recibe Paulo

$S/10 - S/7$

$\boxed{S/.3}$

CLAVE C

Problemas Propuestos

- Problema 06
- Problema 07
- Problema 08
- Problema 09
- Problema 10

HELICO WORKSHOP

Problema 06

Forme una ecuación de segundo grado, si una de sus raíces es:

$$x_1 = 3 + 2i$$

A) $x^2 - 6x + 13 = 0$
B) $x^2 - 6x - 3 = 0$
C) $x^2 + 6x + 13 = 0$
D) $x^2 - 6x + 12 = 0$
E) $x^2 - 6x + 5 = 0$

Problema 07

Siendo $(4+3i)$ una raíz de $x^2+px+q=0$; halle $|p-q|$.

A) 33
B) 17
C) 25
D) 9
E) 22

Problema 08

Forme una ecuación de segundo grado, cuyas raíces son $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$

A) $9x^2 - 9x + 2 = 0$
B) $9x^2 + 9x + 3 = 0$
C) $x^2 - x + 2 = 0$
D) $x^2 + x + 3 = 0$
E) $9x^2 - x + 3 = 0$

Problema 09

Se adquieren artículos a un precio de rebaja de $a\,.\,b$ soles, siendo $a+b-6$ soles el precio unitario. Si a y b son raíces de la ecuación

$$x^2 - 15x + 36 = 0$$

¿cuántos artículos se compraron?

A) 8 B) 7 C) 6
D) 5 E) 4

Problema 10

El precio de una corbata en soles está dado por el término independiente de una ecuación cuadrática, donde una de sus raíces es

$$x_1 = 5 + 3i.$$

¿Cuál es el precio de la corbata?

A) S/30 B) S/32 C) S/34
D) S/36 E) S/38