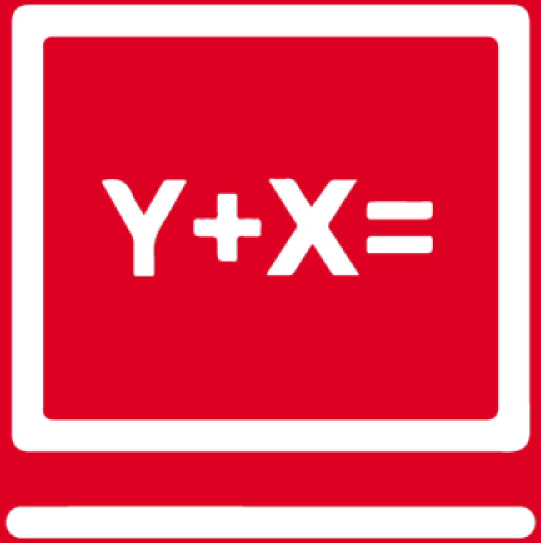
ARITHMETIC

Chapter 18



5th
SECONDARY

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y
MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

Una regla muy poco considerada para el cálculo del MCD es la REGLA DE STURM

Calcule el MCD de 2520; 3060; 2790 y 4545.

Resolución

2520	3060	2790	4545	
↓	-2520	-2520	-2520	
2520	540	270	2025	← Residuo
-2430	-540	↓	-1890	
90	0	270	135	← Residuo
↓		-270	-90	
90		0	45	
-90			↓	
0			45	= MCD

1 MCD

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCD es aquel número que cumple dos condiciones.

Es un divisor común de dichos números.

Es el mayor de los divisores comunes.

Ejem

Sean los números 18 y 24

#	Divisores Z^+
18	1; 2; 3; 6; 9; 18
24	1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24

MCD(18; 24) = 6

divisores comunes de 18 y 24

1; 2; 3 y 6

En conclusión:

Sean los números A y B

$$CD_{comunes\ de\ A\ y\ B} = CD_{MCD(A;B)}$$

MÉTODOS PARA DETERMINAR EL MCD

A) Por descomposición canónica

El MCD es igual al producto de sus factores primos comunes elevados a los menores exponentes posibles.

Ejm Dados los números A; B y C

Si:
$$A = 2^4 \times 3^5 \times 5^2$$
$$B = 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$$
$$C = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$$

$$\mathrm{MCD}(A; B; C) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$$

B) Por descomposición simultanea

El MCD es el producto de sus factores comunes.

Ejm Calcule el MCD de 56; 140 y 168

$$\begin{array}{ccccc|c} 56 & - & 140 & - & 168 & 2 \\ 28 & - & 70 & - & 84 & 2 \\ 14 & - & 35 & - & 42 & 7 \\ 2 & - & 5 & - & 6 & \end{array}$$

PESI

$$\mathrm{MCD}(56; 140; 168) = 2^2 \times 7 = 28$$

Divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides

Solo para determinar el MCD de dos números A y B.

Aplic Al calcular el MCD de 750 y 270, indique los cocientes y residuos respectivos.

cocientes sucesivos

	2	1	3	2	
750	270	210	60	30	MCD
	210	60	30	0	

residuos sucesivos

Cocientes sucesivos: 2; 1; 3 y 2

Residuos sucesivos: 210; 60; 30

2 MCM

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCM es aquel número que cumple dos condiciones.

Es múltiplo común de dichos números.

Es el menor posible.

Ejm

Sean los números 8 y 12

#	Múltiplos Z^+
8	8; 16; 24; 32; 40; 48;...
12	12; 24; 36; 48; 60;...

múltiplos comunes de 8 y 12

24; 48; 72; 96;...

MCM(8; 12) = 24

MÉTODOS PARA DETERMINAR EL MCM

A Por descomposición canónica

El MCM es igual al producto de sus factores primos comunes y no comunes elevados a los mayores exponentes posibles.

Ejem

Dados los números A;B y C

Si $A = 2^4 \times 3 \times 5^2$

$B = 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$

$C = 2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 7$

MCM(A;B;C) $= 2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^2$

B Por descomposición simultanea

Ejem

Calcule el MCM de 35; 15 y 21

$$\begin{array}{ccccc|c} 35 & - & 15 & - & 21 & 3 \\ 35 & - & 5 & - & 7 & 5 \\ 7 & - & 1 & - & 7 & 7 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

MCM(35;15;21) $= 3 \times 5 \times 7 = 105$

Dados: A y B $\in \mathbb{Z}^+$ se cumple que

PROPIEDADES DEL MCD

※ Si: $A = \overset{\circ}{B}$ (múltiplo de B)

MCD(A; B) = B

※ Si: A y B son PESI

MCD(A; B) = 1

※ Si: MCD(A; B) = d,

$A = d\alpha;\ B = d\beta$

Donde α y β son PESI

PROPIEDADES DEL MCM

※ Si: $A = \overset{\circ}{B}$ (múltiplo de B)

MCM(A; B) = A

※ Si: A y B son PESI

MCM(A; B) = A × B

※ Si: MCM(A; B) = m,

$m = A\alpha; = B\beta$

Donde α y β son PESI

1. Si: el $\mathbf{MCD}(\overline{a01}, \overline{3b4}) = 7$. Calcule $a \cdot b$

Resolution

propiedad: $\overline{a01} = 7\alpha = \overset{\circ}{7}$

Criterio por 7

$\overline{3b4} = 7\beta = \overset{\circ}{7}$

$+$

$x2 \;\; x3 \;\; x1$

Donde: $\overline{a\;0\;1} = \overset{\circ}{7}$

$2.a + 0 + 1 = \overset{\circ}{7}$

$2.a + 1 = 7$

$\Rightarrow a = 3$

$+$

$x2 \;\; x3 \;\; x1$

además: $\overline{3\;b\;4} = \overset{\circ}{7}$

$6 + 3.b + 4 = \overset{\circ}{7}$

$10 + 3.b = 28$

$\Rightarrow b = 6$

Piden: $a \cdot b = 18$

RPTA: 18

2. Dos números son entre sí como 2 es a 13. Si la suma de su MCM y MCD de dichos números es 648. Halle el número menor.

Resolution

Del dato tenemos:

A = 2. k y B = 13. k

Donde:

MCD = k

$$\begin{array}{cc|c} 2k & -\ 13k & k \\ 2 & -\ 13 & \end{array}$$

MCM = 26.k

$$\begin{array}{cc|c} 2k & -\ 13k & k \\ 2 & -\ 13 & 2 \\ 1 & -\ 13 & 13 \\ 1 & -\ 1 & \end{array}$$

además

MCD + MCM = 648

k + 26.k = 648

27.k = 648

k = 24

Piden:

$Menor = 2.k = 2(24)$

$\therefore 48$

RPTA: 48

3. Al calcular el MCD de dos números los cocientes sucesivos fueron 2, 1, 3 y 2. Si la diferencia de dichos números es 48. Halle dichos números.

Resolution

algoritmo de Euclides

	2	1	3	2	
25x	9x	7x	2x	x	*MCD*
	7x	2x	x	0	

residuos sucesivos

cocientes sucesivos

$$25x - 9x = 48$$

$$16x = 48$$

$$x = 3$$

RPTA:	**75 y 27**

4. ¿Cuánta cifras tienen el $\mathbf{MCD}$ de $\mathbf{120^{120}}$ y $\mathbf{130^{130}}$?

Resolution

Descomponiendo en forma canónica

☆ $120^{120} = (2^3 \times 3^1 \times 5^1)^{120}$

$120^{120} = 2^{360} \times 3^{120} \times 5^{120}$

☆ $130^{130} = (2^1 \times 5^1 \times 13^1)^{130}$

$130^{130} = 2^{130} \times 5^{130} \times 13^{130}$

Donde:

$MCD(A;B) = 2^{130} \times 5^{120}$

$MCD(A;B) = 2^{10} \boxed{\times 2^{120} \times 5^{120}}$

$MCD(A;B) = 2^{10} \times 10^{120}$

$MCD(A;B) = 1024\underbrace{000......00}_{\text{120 ceros}}$

Piden:

∴ # cifras del MCD = 124 cifras

RPTA: 124

5. Si se cumple que:

$$\mathrm{MCM}(21A;\ 7B) = 630$$
$$\mathrm{MCD}(45A;\ 15B) = 90$$

Calcule A . B

Resolution

Del dato tenemos:

$*\ \mathrm{MCM}(\cancel{21}A;\ \cancel{7}B) = \cancel{630}$

simplificando

➡ $\mathrm{MCM}(3A;\ B) = 90$

$*\ \mathrm{MCD}(\cancel{45}A;\ \cancel{15}B) = \cancel{90}$

simplificando

➡ $\mathrm{MCD}(3A;\ B) = 6$

propiedad

$$\boxed{\mathrm{MCM}(3A;\ B) \times \mathrm{MCD}(3A;\ B) = 3A \times B}$$

reemplazando

$$90 \times \overset{2}{\cancel{6}} = \cancel{3}A \times B$$

Piden:

$\therefore\ A \times B = 180$

RPTA: 180

6. ¿Cuál es el menor número de trozos de igual longitud que se pueden obtener dividiendo tres varillas de $\mathbf{560}$; $\mathbf{640}$ y $\mathbf{880\ cm}$ sin desperdiciar material?

Resolution

Del dato tenemos:

menor número de trozos ➡ MCD

$$\begin{array}{ccccc|c} 560 & - & 640 & - & 880 & 10 \\ 56 & - & 64 & - & 88 & 8 \\ 7 & - & 8 & - & 11 & \end{array} \Bigg\} \ 80\text{ cm}$$

Piden: *número de trozos*

$$\frac{560}{80} + \frac{640}{80} + \frac{880}{80}$$

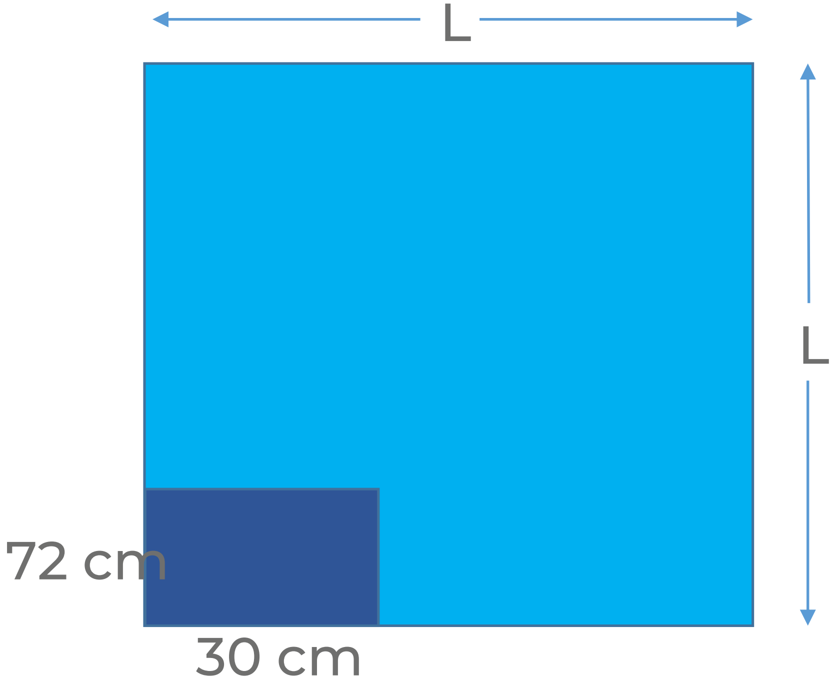
$$7 + 8 + 11 \qquad \therefore 26$$

RPTA:	**26 trozos**

7. Se desea enlosetar un sector cuadrado correspondiente a la entrada del convento de los Descalzos con losetas de $72\ cm$ de largo y $30\ cm$ de ancho. ¿Cuántas losetas como mínimo se emplearán para enlosetar dicho sector?

Resolution

Del dato tenemos:



Donde:

L = MCM (72cm ; 30cm) ➡ L = 360 cm

Piden:

número de losetas $= \dfrac{\text{área total}}{\text{área de cada loseta}}$

$\Rightarrow \dfrac{3\cancel{6}0\ x\ 3\cancel{6}0}{7\cancel{2}\ x\ 3\cancel{0}} = 5\ x\ 12$

$\therefore 60$

RPTA:	60 losetas