

TRIGONOMETRY

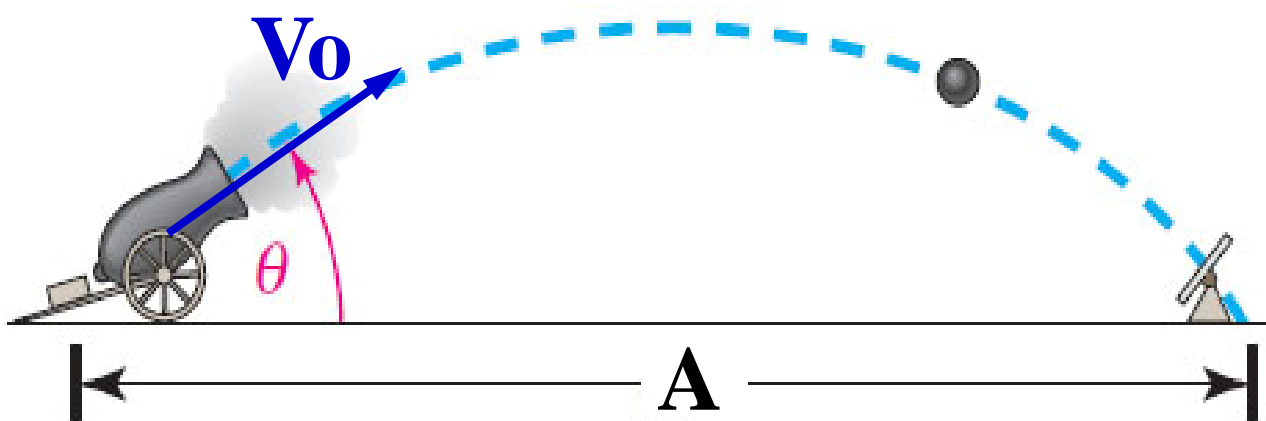
Chapter 15

5th
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE



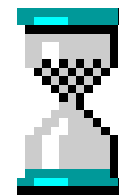
Un objeto se dispara hacia arriba con un ángulo “ θ ” respecto de la horizontal , con una velocidad inicial de “ V_o ” pies por segundo. Ignorando la resistencia del aire, el alcance “ A ” está dado por :



$$A = \frac{1}{16} V_o^2 \sin\theta \cos\theta$$

Pregunta:

Calcule el ángulo “ θ ” , para $V_o = 80$ pies por segundo y $A = 160$ pies. Use la siguiente identidad: $\sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta$



Rpta: $\theta = 53^\circ / 2$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$\textit{sen}(2x) = 2\textit{sen}(x)\textit{cos}(x)$$

$$\textit{cos}(2x) = \textit{cos}^2(x) - \textit{sen}^2(x)$$

$$\textit{tan}(2x) = \frac{2\textit{tan}(x)}{1 - \textit{tan}^2(x)}$$

$$\textit{cos}(2x) = 2\textit{cos}^2(x) - 1$$

$$\textit{cos}(2x) = 1 - 2\textit{sen}^2(x)$$

1

Si $\cot\alpha = \frac{1}{3}$ y $\alpha \in \text{III C}$, calcule $\text{sen}2\alpha$

Resolución:

$$\cot\alpha = \frac{1}{3} = \frac{x}{y}$$



Como $\alpha \in \text{III C}(-; -)$

$$x = -1 ; y = -3$$

Radio Vector:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$$

$$r = \sqrt{10}$$

Calculamos

$$\text{sen}2\alpha = 2 \underbrace{\text{sen}\alpha}_{\frac{y}{r}} \cdot \underbrace{\text{cos}\alpha}_{\frac{x}{r}}$$



$$\text{sen}2\alpha = 2 \left(\frac{-3}{\sqrt{10}} \right) \left(\frac{-1}{\sqrt{10}} \right) = \frac{6}{10}$$

∴

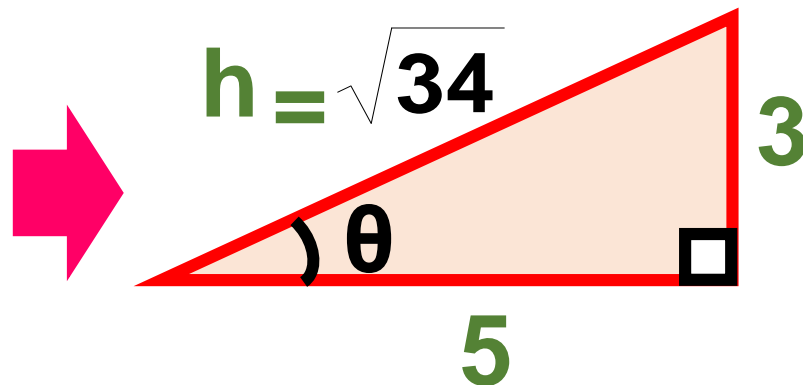
$$\text{sen}2\alpha = \frac{3}{5}$$

2

Si θ es un ángulo agudo y se cumple que $\frac{5}{\cos\theta} = \frac{3}{\sin\theta}$ calcule $\cos 2\theta$.

Resolución:

Del dato: $\tan\theta = \frac{3}{5}$



Calculamos:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta = \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = \left(\frac{25}{34}\right) - \left(\frac{9}{34}\right) = \frac{16}{34}$$

∴

$$\cos 2\theta = \frac{8}{17}$$

3

En el siguiente cuadro se observa el tamaño de las carpetas de música que Camila tiene almacenada en su memoria de USB.

Carpeta	Tamaño (GB)
Pop	A
Cumbia	B

Donde:

$$A = 12\sqrt{2}\sin 22^{\circ}30' \cdot \cos 22^{\circ}30'$$

$$B = \frac{10\sqrt{3} \tan 15^{\circ}}{1 - \tan^2 15^{\circ}}$$

Indique cuál de las carpetas tiene el mayor tamaño.

Resolución:

$$A = 6\sqrt{2} \cdot \underbrace{2\sin 22^{\circ}30' \cdot \cos 22^{\circ}30'}_{\sin 45^{\circ}}$$

$$\Rightarrow A = 6\sqrt{2} \cdot \sin 45^{\circ} = 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow A = 6$$

$$B = 5\sqrt{3} \cdot \frac{2\tan 15^{\circ}}{1 - \tan^2 15^{\circ}}$$

$$B = 5\sqrt{3} \cdot \frac{\tan 30^{\circ}}{1 - \tan^2 15^{\circ}} = 5\sqrt{3} \cdot \frac{1/\sqrt{3}}{1 - 1/3} \Rightarrow B = 5$$



La carpeta de mayor tamaño es la de POP.

4

Demuestre que la expresión: $E = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$
se reduce a $2\tan 2\theta$.

Resolución:

$$E = \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$$

$$E = \frac{(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)^2 - (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)^2}{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}$$

$$\begin{aligned} (a + b)^2 - (a - b)^2 &= 4ab \\ (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

$$E = \frac{4\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$E = \frac{2 \cdot 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}$$

$$E = \frac{2\operatorname{sen}2\theta}{\cos 2\theta}$$

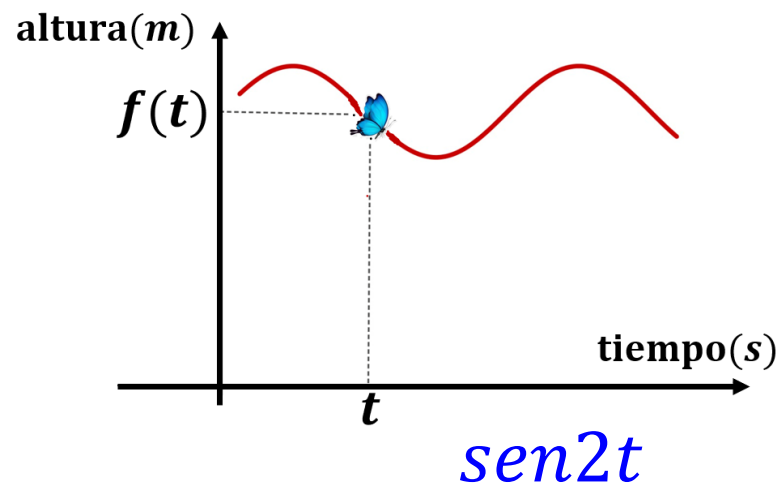


$$E = 2\tan 2\theta$$

5

Un experto en entomología (ciencia que estudia los insectos) observa el movimiento de una mariposa en el aire y ve que en un instante de tiempo t la altura en metros, respecto al suelo, está dada por la expresión $f(t) = 1,5 + \text{sent. cost. cos}2t$. Si t esta dado en segundos, ¿cuál es la altura de la mariposa cuando $t = \frac{5\pi}{8}$?

Resolución:



$$f(t) = 1,5 + \frac{2 \text{sent. cost. cos}2t}{2}$$

$$\text{sen}(2(2t))$$

$$f(t) = 1,5 + \frac{2 \text{sen}2t \cdot \text{cos}2t}{2 \times 2} = 1,5 + \frac{\text{sen}4t}{4}$$

Calculamos:

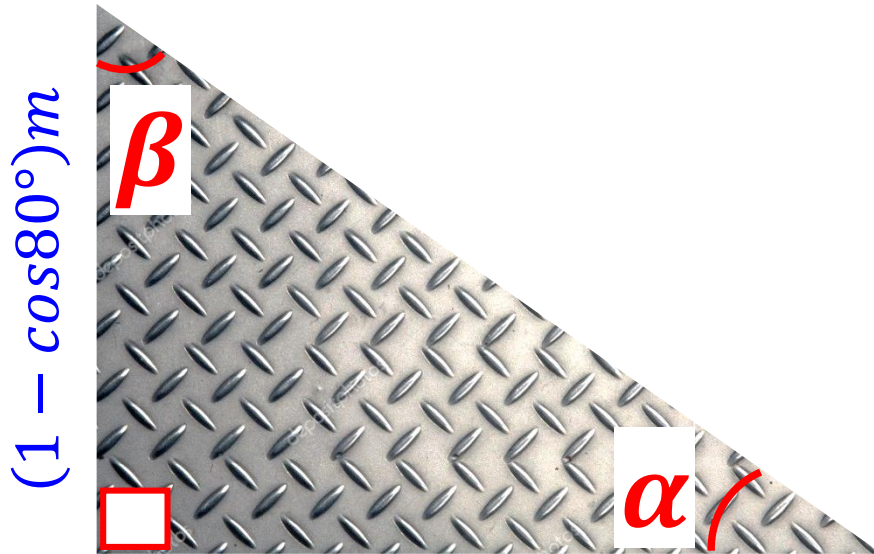
$$f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 1,5 + \frac{\text{sen}\left(4 \cdot \frac{5\pi}{8}\right)}{4} = \frac{3}{2} + \frac{\text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)}{4} = \frac{7}{4}$$

RPTA: La altura de la mariposa a los $\frac{5\pi}{8}$ s es de 1,75m

6

Una plancha metálica tiene la forma de un triángulo rectángulo, cuyos lados menores miden $(1 - \cos 80^\circ)m$ y $(\sin 80^\circ)m$. Calcule la diferencia entre los ángulos agudos de dicho triángulo

Resolución:



$$(1 - \cos 80^\circ)m$$

$$\tan \alpha = \frac{(1 - \cos 80^\circ)m}{(\sin 80^\circ)m}$$

$$\tan \alpha = \frac{1 - \cos 2(40^\circ)}{\sin 2(40^\circ)}$$

$$\tan \alpha = \frac{2\sin^2 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin 40^\circ \cdot \sin 40^\circ}{\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}$$

$$\tan \alpha = \tan 40^\circ$$

$$1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

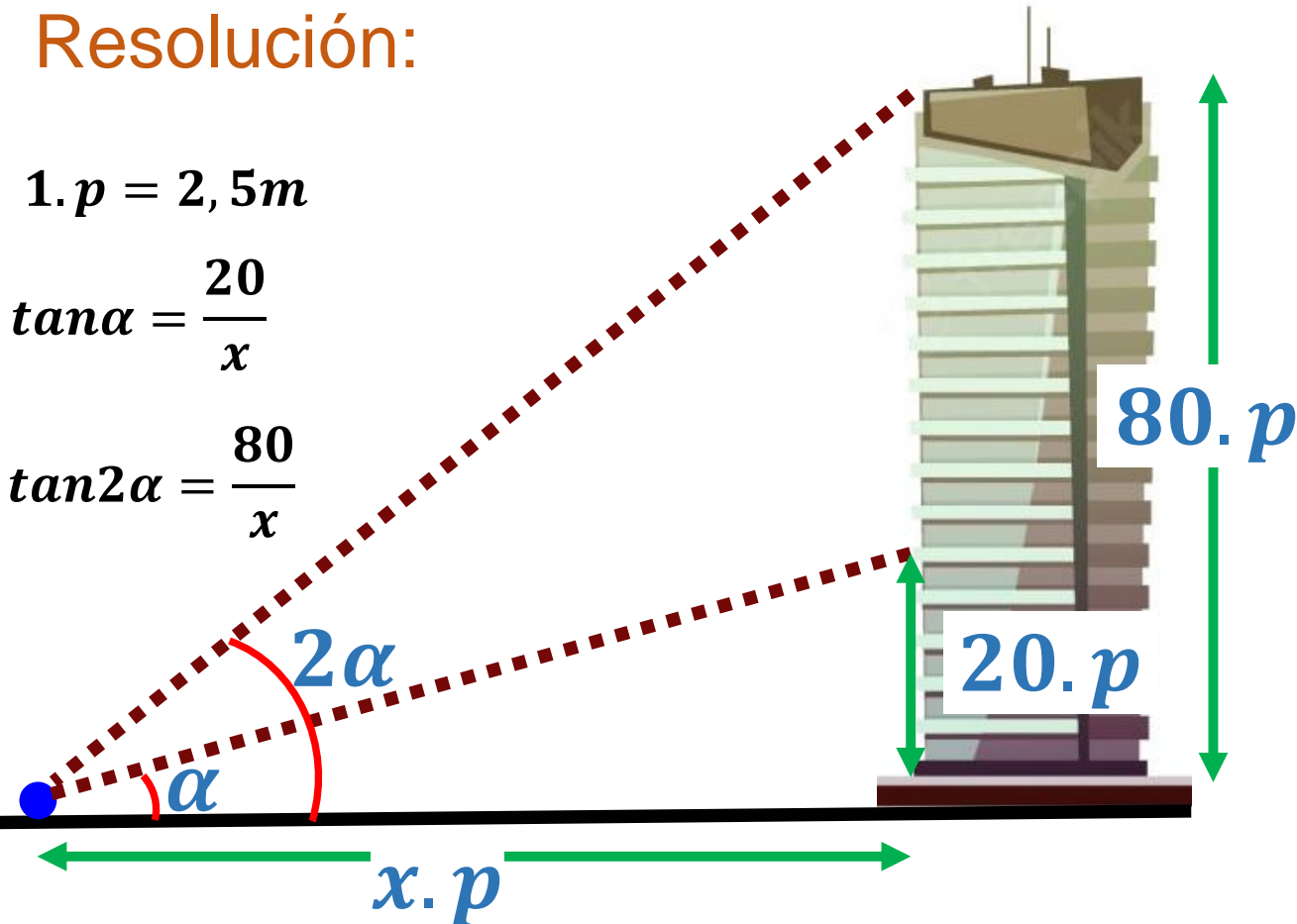
$$\beta = 50^\circ$$

RPTA: La diferencia positiva entre los ángulos agudos es 10°

7

En la ciudad de New York, nuestro amigo Panchito se detiene frente a un edificio de 80 pisos (cada piso de 2,5 m de alto) y nota que cuando mira a la azotea, el ángulo de elevación se duplica respecto al ángulo de elevación al mirar el piso 20. ¿A qué distancia del edificio se encuentra Panchito?

Resolución:



$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\frac{80}{x} = \frac{2 \left(\frac{20}{x} \right)}{1 - \left(\frac{20}{x} \right)^2}$$

$$80 \left[1 - \left(\frac{20}{x} \right)^2 \right] = x \left[2 \left(\frac{20}{x} \right) \right]$$

$$80 - 80 \left(\frac{20}{x} \right)^2 = 40$$

$$80 - \frac{80 \cdot 20^2}{x^2} = 40$$

$$40 = \frac{80 \cdot 20^2}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{80 \cdot 20^2}{40}$$

$$x^2 = 2 \cdot 20^2$$

$$x = 20\sqrt{2}$$

RPTA: La distancia es $x.p = 50\sqrt{2} m$



SACO
OLIVEROS