ALGEBRA

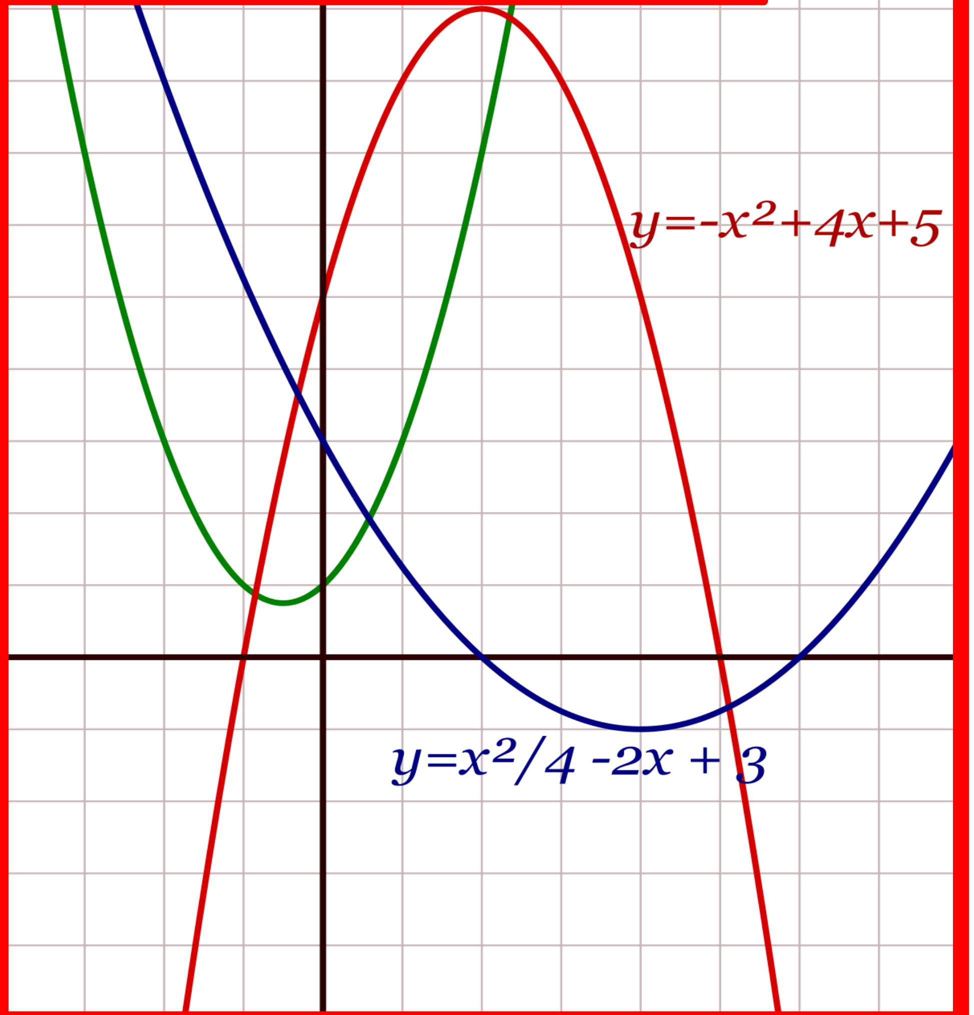
Chapter 17

3th
SECONDARY

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY



ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Denominada también ***ECUACIÓN CUADRÁTICA****, es aquella ecuación polinomial de una incógnita, que se reduce a la forma general:*

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}\ ; \quad a \neq 0$$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad ; \; a \neq 0 \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Fórmula general:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Raíces de la ecuación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} \\ \boxed{x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \end{array} \right.$$

Discriminante (Δ):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

NATURALEZA DE LAS RAÍCES:

Sea la ecuación cuadrática

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \;;\; a \neq 0$$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Primer caso:

Si: $\boxed{\Delta > 0}$

La ecuación tiene raíces reales y diferentes.

Segundo caso:

Si: $\boxed{\Delta = 0}$

La ecuación tiene raíces reales e iguales (solución única).

Tercer caso:

Si: $\boxed{\Delta < 0}$

La ecuación tiene raíces complejas y conjugadas.

TEOREMA DE CARDANO - VIETE:

Sea la ecuación cuadrática :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad ; \ a \neq 0$$

✓ **Suma de Raíces:**

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

✓ **Producto de Raíces:**

$$P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

PROPIEDADES ADICIONALES:

- La ecuación tiene raíces simétricas si y solo si:

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

- La ecuación tiene raíces recíprocas si y solo si:

$$x_1 . x_2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = c}$$

Problema 1

Hallar el conjunto solución

$\mathrm{x}(x-7)+4=22$

Resolución:

$$\mathrm{x}(x-7)+4=22$$

$$x^2-7x+4=22$$

$$x^2-7x-18=0$$

$$\begin{array}{ccc} x & -9 & -9\mathrm{x} \\ x & +2 & +2x \end{array}$$

$$(x-9)(x+2)=0$$

$$x-9=0 \quad \vee \quad x+2=0$$

$$\boxed{x=9} \quad \vee \quad \boxed{x=-2}$$

$$\therefore \quad \boxed{C.S=\{-2;9\}}$$

Problema 2

Siendo x_1 *y* x_2 *las raíces de la ecuación*

$$x^2 - 2x + 7 = 0$$

halle el valor de $(x_1 . x_2)^{x_1 + x_2}$

Recordemos:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$

cuyas raíces son: x_1 *y* x_2

SUMA DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

PRODUCTO DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Resolución:

$$\boxed{x^2 - 2x + 7 = 0}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{(-2)}{1} \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 2}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{7}{1} \Rightarrow \boxed{x_1 . x_2 = 7}$$

Nos piden: $\underbrace{(x_1 . x_2)}_{(7)}{}^{\underbrace{x_1 + x_2}_{2}}$

$$\boxed{\therefore \quad (x_1 . x_2)^{x_1 + x_2} = 49}$$

Problema 3

Si m y n son las raíces de la ecuación

$$x^2 - 5x + 2 = 0$$

halle el valor de $T = \frac{m^2+n^2}{7}$

Recordemos:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$

cuyas raíces son: x_1 y x_2

SUMA DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

PRODUCTO DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Resolución:

$$\boxed{x^2 - 5x + 2 = 0}$$

$$m + n = -\frac{(-5)}{1} = 5 \qquad m.n = \frac{2}{1} = 2$$

$$\underbrace{(m+n)}^2 = m^2 + n^2 + \underbrace{2mn}$$

$$5^2 = m^2 + n^2 + 2(2)$$

$$25 - 4 = m^2 + n^2$$

$$\boxed{m^2 + n^2 = 21}$$

Nos piden: $T = \frac{m^2+n^2}{7} = \frac{21}{7}$

$$\boxed{\therefore \quad T = 3}$$

Problema 4

Calcule el valor de m si las raíces de la ecuación (m+1) $x^2 - 2mx + (m-3) = 0$; $son\ iguales$.

Recordemos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

La ecuación tiene raíces iguales si y solo si $\Delta = 0$:

$$\boxed{b^2 - 4ac = 0}$$

Resolución:

$$\boxed{\underbrace{(m+1)}_{a}x^2 \underbrace{- 2m}_{b}x + \underbrace{(m-3)}_{c} = 0}$$

La ecuación tiene raíces iguales $\Rightarrow$ $\boxed{b^2 - 4ac = 0}$

$$(-2m)^2 - 4(m+1)(m-3) = 0$$

$$4m^2 - 4(m^2 - 2m - 3) = 0$$

$$\cancel{4m^2} - \cancel{4m^2} + 8m + 12 = 0$$

$$8m + 12 = 0$$

$$8m = -12$$

$$\boxed{m = -3/2}$$

$\therefore$ m es igual a -3/2

Problema 5

Forme la ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $2+\sqrt{2}$ ***y*** $2-\sqrt{2}$.

Resolución:

Sean: $x_1 = 2+\sqrt{2} \quad \wedge \quad x_2 = 2-\sqrt{2}$

- $S = x_1 + x_2$

$$S = 2 + \cancel{\sqrt{2}} + 2 - \cancel{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{S = 4}$$

- $P = x_1 . x_2$

$$P = \left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)$$

$$P = 2^2 - \sqrt{2}^2$$

$$\boxed{P = 2}$$

Formando la ecuación:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Rpta: $\boxed{x^2 - 4x + 2 = 0}$

Problema 6

En una feria de libros realizada por la editorial PERSON se ha sorteado cierta cantidad de libros. Si la ecuación

$$3x^2 + (a-2)x + 2 = 0$$

La cual tiene raíces simétricas, nos permite calcular el valor de 4a cuyo resultado fueron los libros sorteados , ¿cuál fue la cantidad de ejemplares que sorteó la editorial?

Recordemos:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$

cuyas raíces son: x_1 ***y*** x_2

La ecuación tiene raíces simétricas si y solo si:

$\boxed{x_1 + x_2 = 0}$ ⇒ $\boxed{b = 0}$

Resolución:

$$3x^2 + \underbrace{(a-2)}_{0}x + 2 = 0$$

La ecuación tiene raíces simétricas:

⇒ $a - 2 = 0$

$\boxed{b = 2}$

Cantidad de libros sorteados:

$$4a = 4(2)$$

$$\boxed{4a = 8}$$

∴ *8 libros sorteó la editorial PERSON.*

Problema 7

La familia de Dalia desea ir al cine. Si al lugar su padre compra 4a entradas y si, además, el valor de a se obtiene de la ecuación $(2a+3)x^2+5x+5a=0$
La cual presenta raíces reciprocas, ¿Cuántas personas componen la familia de Dalia ?

Recordemos:

$$ax^2+bx+c=0$$

cuyas raíces son: x_1 ***y*** x_2

La ecuación tiene raíces recíprocas si y solo si:

$\boxed{x_1 . x_2 = 1}$ $\qquad$ $\boxed{a=c}$

Resolución:

$$\boxed{(2a+3)x^2+5x+5a=0}$$

La ecuación tiene raíces recíprocas:

$$2a+3=5a$$
$$3=5a-2a$$
$$3=3a$$
$$1=a$$

$$\boxed{\therefore\ 4a=4(1)}$$

$\therefore$ *4 personas componen la familia de Dalia.*