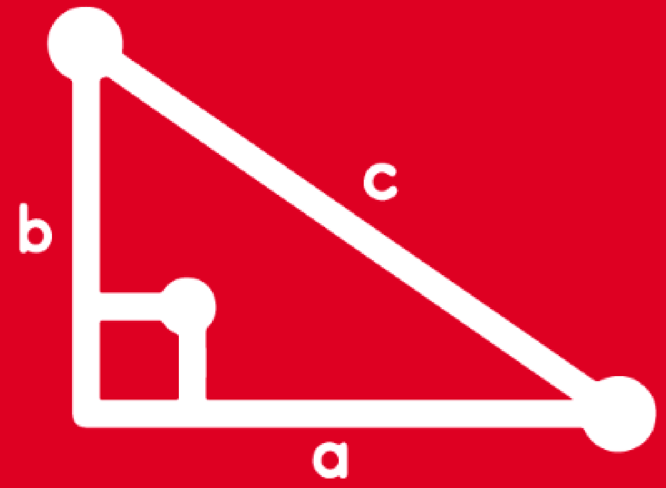
TRIGONOMETRY

Chapter 07

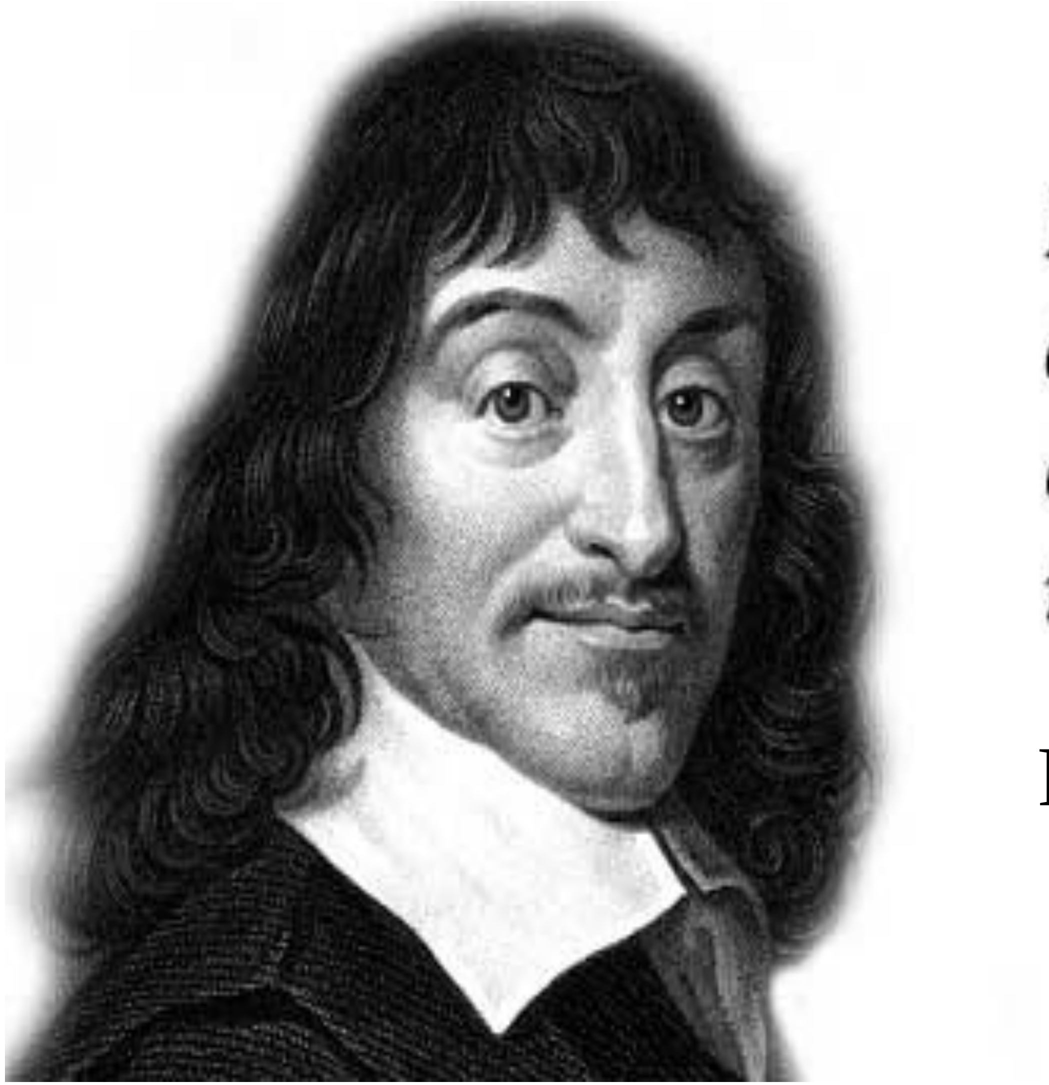
5th
SECONDARY



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL II

SACO OLIVEROS

HELICO - MOTIVACIÓN



Divide las dificultades que examinas en tantas partes como sea posible para su mejor solución.

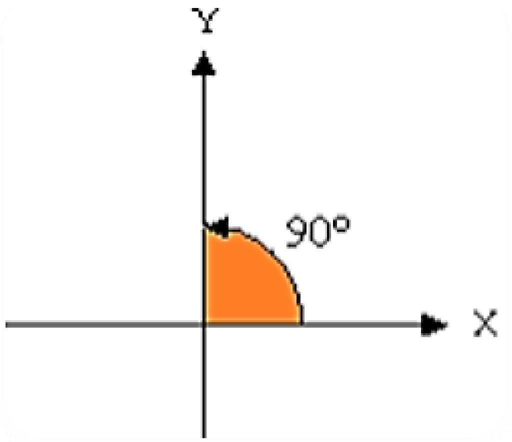
René Descartes 1596 - 1650

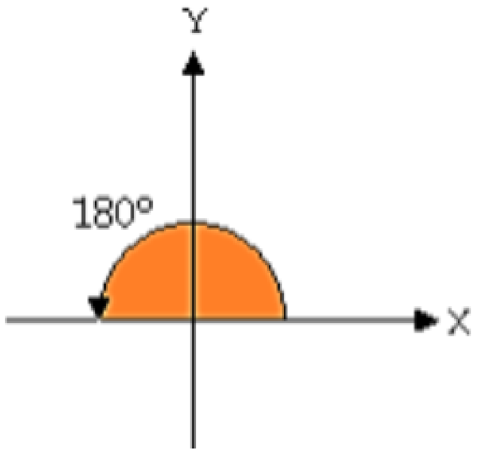
ÁNGULOS CUADRANTALES

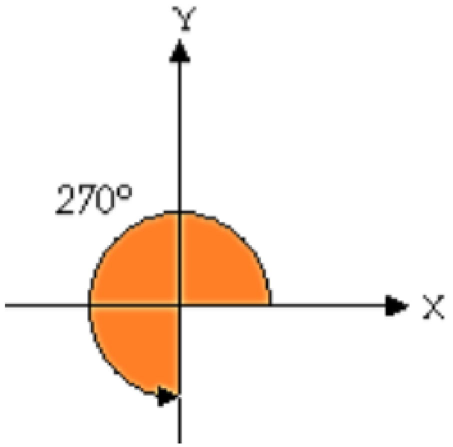
Son aquellos ángulos trigonométricos cuyo lado final se encuentra sobre algún semieje, por tal razón no pertenecen a ningún cuadrante .

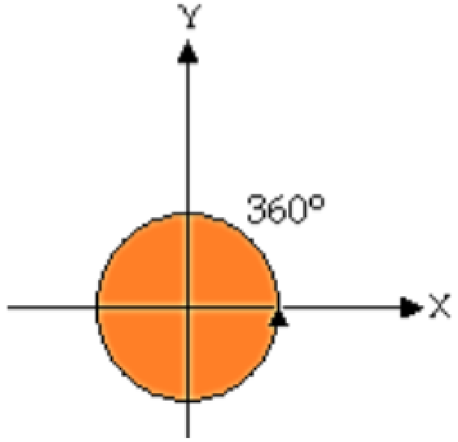
Conclusión : Son ángulos cuya medida es múltiplo del ángulo recto, por consiguiente tendrán la forma :

$$\boxed{(90n)^\circ} \boxed{\frac{n\pi}{2}\ \text{rad}} \quad ; n \in z$$









RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

R.T	0º ; 360º	90º	180º	270º
sen	O	1	0	-1
cos	1	O	-1	0
tan	0	N.D	0	N.D
cot	N.D	0	N.D	0
sec	1	N.D	-1	N.D
csc	N	1	N.D	-1

ND : No Determinado

Recordar : " oionin iononi "

o = 0
i = ± 1
n = ND

OBSERVACIONES :

Si α es un ángulo cuadrantal

senα = { -1 ; 0 ; 1 }

cosα = { -1 ; 0 ; 1 }

tanα = 0

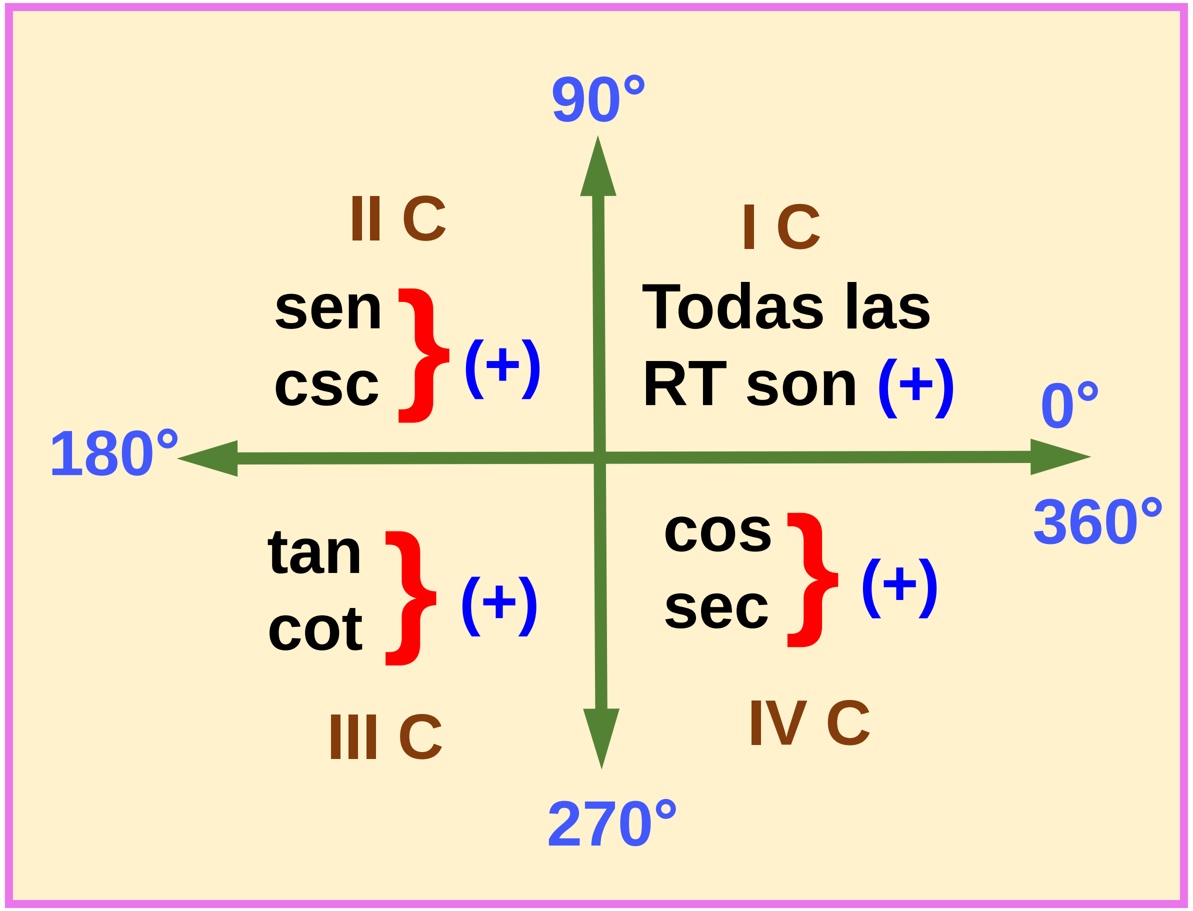
cotα = 0

secα = { -1 ; 1 }

cscα = { -1 ; 1 }

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN CADA CUADRANTE

Regla práctica :



OBSERVACIONES :

Si $0° < \alpha < 90°$ ➡ $\alpha \in IC$

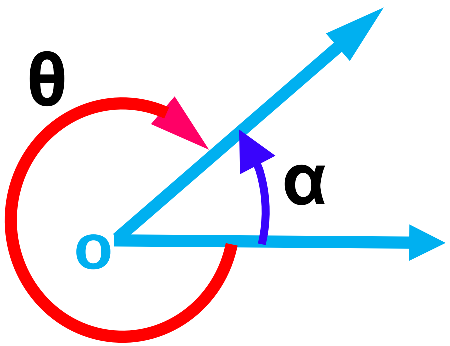
Si $90° < \alpha < 180°$ ➡ $\alpha \in IIC$

Si $180° < \alpha < 270°$ ➡ $\alpha \in IIIC$

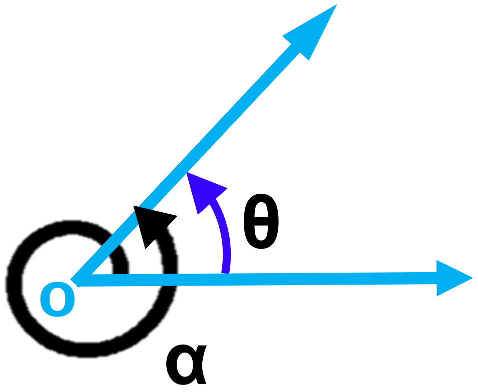
Si $270° < \alpha < 360°$ ➡ $\alpha \in IVC$

ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial, lado final y vértice.



α y θ son las medidas de los ángulos coterminales en sentidos opuestos.



α y θ son las medidas de los ángulos coterminales en el mismo sentido.

Siendo α y θ las medidas de dos ángulos coterminales, se cumple :

I) $\alpha - \theta = 360°n$; $n \in z$

II) $Rt(\alpha) = Rt(\theta)$

HELICO PRACTICE 1

Siendo θ y β ángulos cuadrantales diferentes, positivos y menores o iguales a 360°; se cumple que $\sqrt{1-\cos\theta}+\sqrt{\cos\theta-1}=1+\operatorname{sen}\beta$; calcule $\theta+\beta$.

RESOLUCIÓN

Por existencia de raíz cuadrada real :

$$1-\cos\theta \geq 0 \quad \wedge \quad \cos\theta-1 \geq 0$$

$$\underbrace{\cos\theta \leq 1 \quad \wedge \quad \cos\theta \geq 1}$$

$$\cos\theta = 1$$

Como $0° < \theta \leq 360°$ ➡ $\theta = 360°$

Luego : $1+\operatorname{sen}\beta=\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}$

$$\operatorname{sen}\beta = -1$$

Como $0° < \beta \leq 360°$ ➡ $\beta = 270°$

Luego : $\theta+\beta = 360° + 270°$

$$\boxed{\therefore\ \theta+\beta = 630°}$$

Recordar :

R.T	0° ; 360°	90°	180°	270°
sen	O	1	0	-1
cos	1	O	-1	0
tan	0	N.D	0	N.D
cot	N.D	0	N.D	0
sec	1	N.D	-1	N.D
csc	N	1	N.D	-1

HELICO PRACTICE 2

Siendo α y θ ángulos cuadrantales, positivos y menores a una vuelta, tal que se cumple : $\operatorname{sen}\alpha + \tan\theta = -1$; efectúe $F = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\csc(\alpha - \theta)}$

RESOLUCIÓN

Datos : $0° < \alpha , \theta < 360°$

$\operatorname{sen}\alpha + \tan\theta = -1$

$-1 \quad + \quad 0 \quad = -1$

$\alpha = 270°$; $\theta = 180°$

Luego :

$$F = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{270°}{3}\right) + \cos\left(\frac{180°}{2}\right)}{\csc(270° - 180°)}$$

$$F = \frac{\operatorname{sen}90° + \cos 90°}{\csc 90°} = \frac{1 + 0}{1}$$

$$\boxed{\therefore \quad F = 1}$$

Recordar :

R.T	0° ; 360°	90°	180°	270°
sen	O	1	0	-1
cos	1	O	-1	0
tan	0	N.D	0	N.D
cot	N.D	0	N.D	0
sec	1	N.D	-1	N.D
csc	N	1	N.D	-1

HELICO PRACTICE 3

Siendo θ un ángulo positivo y menor a una vuelta, se cumple que $\tan\theta \cdot \text{sen}120° < 0$; $\cos\theta \cdot \tan300° > 0$.- Indique el signo de $\text{sen}2\theta$.

RESOLUCIÓN

Datos : $\tan\theta \cdot \text{sen}120° < 0$

$(-) \cdot (+) < 0$

$\Rightarrow \theta \in IIC \vee \theta \in IVC$

$\cos\theta \cdot \tan300° > 0$

$(-) \cdot (-) > 0$

$\Rightarrow \theta \in IIC \vee \theta \in IIIC$

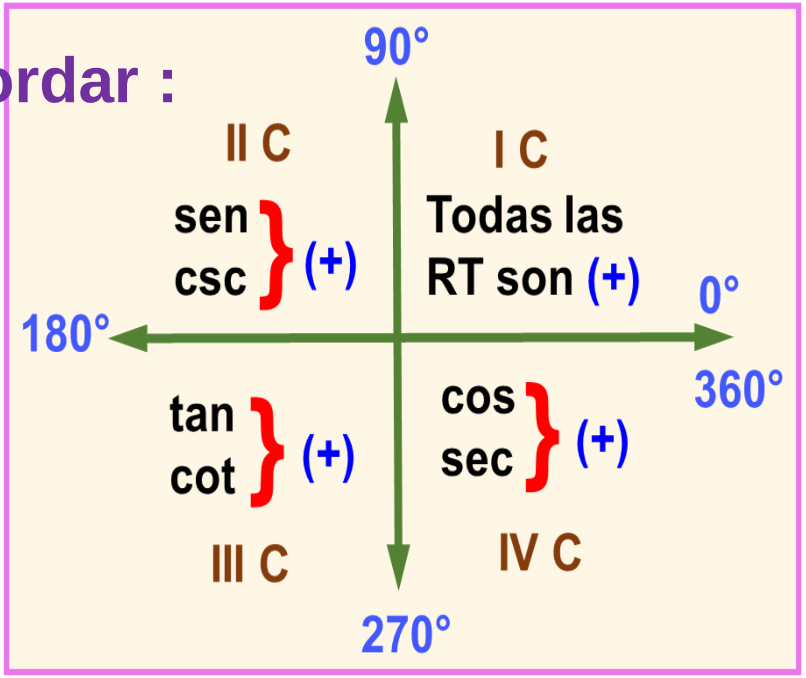
$\theta \in IIC$

Luego : $90° < \theta < 180° \Rightarrow 180° < 2\theta < 360°$

$\Rightarrow 2\theta \in IIIC \vee IVC$

$$\boxed{\therefore\ \text{sen}2\theta = -}$$

Recordar :



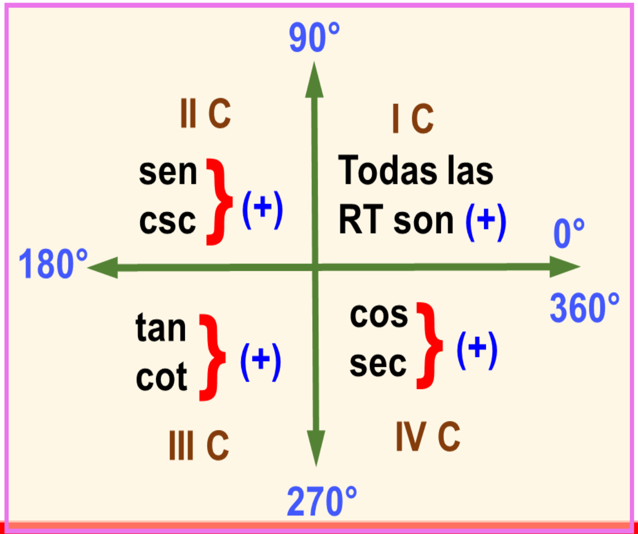
HELICO PRACTICE 4

El profesor de matemática pide a sus alumnos que indiquen el cuadrante al cual pertenece el ángulo θ que cumple :

$$\text{sen}\theta \,.\, \sqrt{\tan\theta + \cot\theta} < 0$$

Los alumnos respondieron :
Andrea : $\theta \in IC$; Bernardo : $\theta \in IIC$;
Carlos : $\theta \in IIIC$; Daniela : $\theta \in IVC$.
¿ Quién dio la respuesta correcta ?

Recordar :



RESOLUCIÓN

Por existencia de raíz cuadrada real :

$\tan\theta + \cot\theta > 0$ ➡ $\theta \in IC$ ∨ $\theta \in IIIC$

Luego : $\text{sen}\theta \,.\, \sqrt{\tan\theta + \cot\theta} < 0$

$(-) \;.\; (+) < 0$

$\theta \in IIIC$ ∨ $\theta \in IVC$

$\theta \in IIIC$

∴ Carlos dio la respuesta correcta .

HELICO PRACTICE 5

El código de una caja fuerte está dado por un número de tres cifras, las cuales son : $a = 9\sec 0° - \text{sen}90° + \tan 360°$

$b = 5\tan 45° - 3\cos 180° + \cos 0°$

$c = \cos 90° - 9\csc 270° - 2\sec 60°$

Efectúe las operaciones, ordene en forma decreciente estas cifras y averigüe dicho código.

Recordar :

R.T	0° ; 360°	90°	180°	270°
sen	O	1	0	-1
cos	1	O	-1	0
tan	0	N.D	0	N.D
cot	N.D	0	N.D	0
sec	1	N.D	-1	N.D
csc	N	1	N.D	-1

RESOLUCIÓN

Calculamos las cifras :

$a = 9(1) - (1) + (0) \quad = 9 - 1$

$a = 8$

$b = 5(1) - 3(-1) + (1) = 5 + 3 + 1$

$b = 9$

$c = (0) - 9(-1) - 2(2) = 9 - 4$

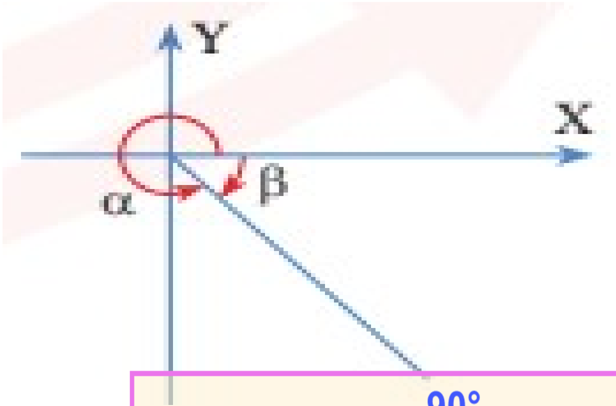
$c = 5$

Luego : $b > a > c$

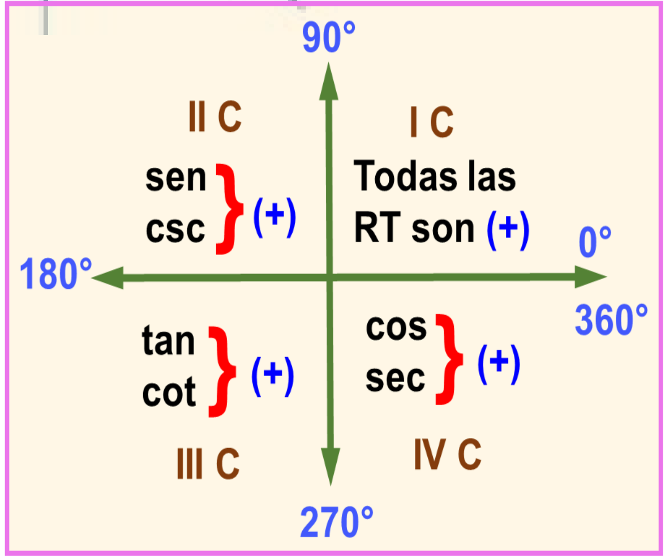
$\therefore$ **Código = 985**

HELICO PRACTICE 6

En la figura, se cumple que :
$\tan\alpha \cdot \tan\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\beta = 5$.
Calcule $\tan\alpha$.



Recordar :



RESOLUCIÓN

Según figura :

α , β son ángulos coterminales del IVC

Propiedad : Rt (α) = Rt (β)

⇒ $\tan\alpha = \tan\beta \quad \wedge \quad \csc\alpha = \csc\beta$

En dato reemplazamos β por α :

$$\tan\alpha \cdot \tan\alpha + \underbrace{\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha}_{1} = 5$$

$$\tan^2\alpha + 1 = 5$$

$$\tan^2\alpha = 4$$

$$\boxed{\therefore \ \tan\alpha = -2}$$

HELICO PRACTICE 7

La secretaria del colegio actualmente tiene K años.- Si le preguntan su edad ella indica que los ángulos α y θ son coterminales del segundo cuadrante y cumplen :

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}\ ;\ \csc\theta = \frac{4K-10}{2K+10}$$

¿ Cuál será la edad de la secretaria dentro de 5 años ?

RESOLUCIÓN

Dato : $\cos\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{3} = \frac{x}{r}$

Luego : $x^2 + y^2 = r^2$

$$\left(-\sqrt{5}\right)^2 + y^2 = 3^2$$

$$5 + y^2 = 9 \Rightarrow y = 2$$

Luego : $\csc\alpha = \csc\theta$

$$\frac{r}{y} = \frac{4K - 10}{2K + 10}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{2K - 5}{K + 5}$$

$$3k + 15 = 4k - 10$$

$$25 = k$$

$$K + 5 = 25 + 5$$

$$K + 5 = 30$$

∴ Dentro de 5 años la secretaria tendrá 30 años de edad .

SACO OLIVEROS