ALGEBRA

Chapter 22

4th
SECONDARY

Funciones III

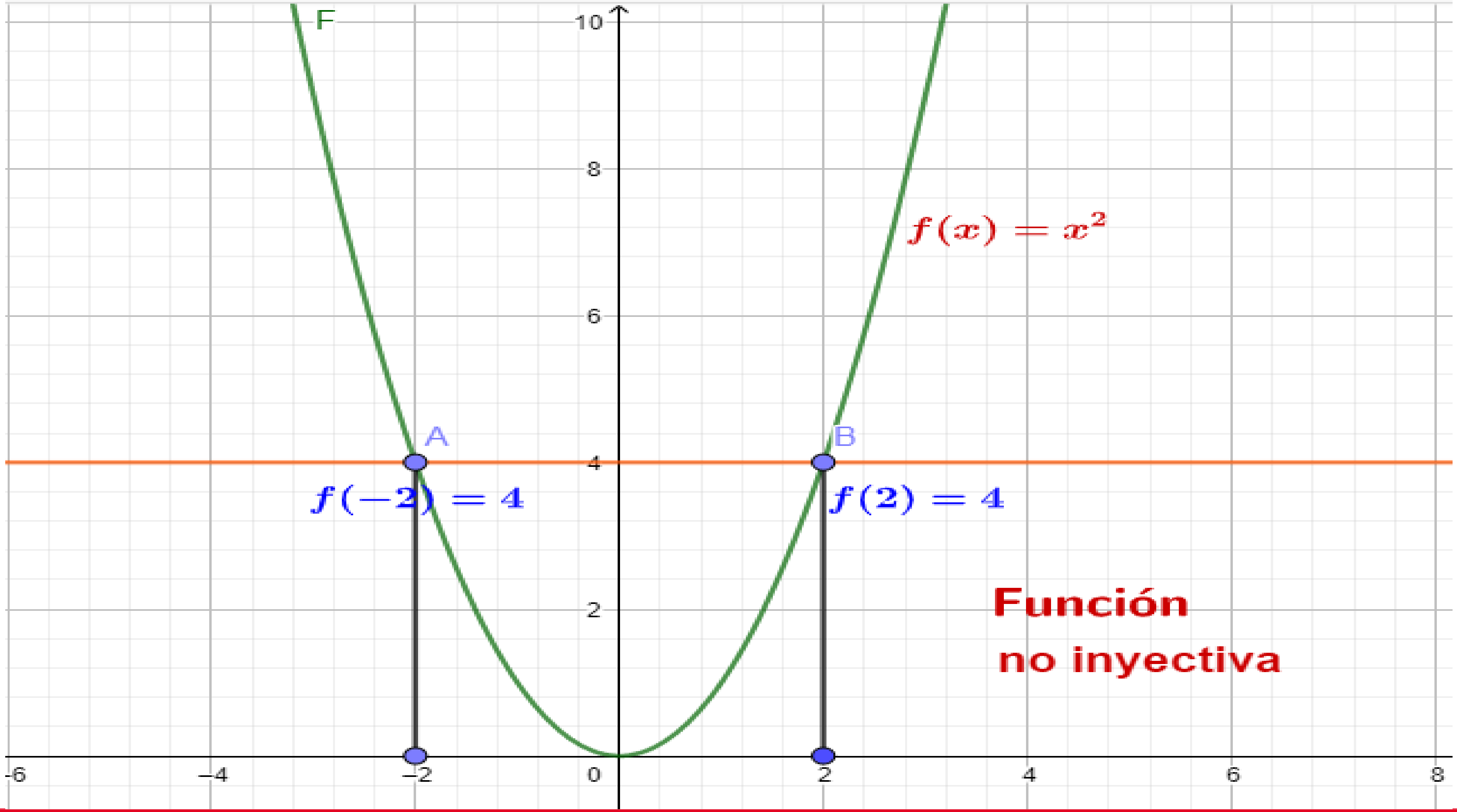
SACO OLIVEROS

HELICO

MOTIVATING

SACO OLIVEROS

Motivation Strategy



HELICO THEORY

FUNCIONES III

I) FUNCIÓN INYECTIVA

Sea la función $f: A \rightarrow B$,diremos que f es **inyectiva** si y solo si:

$$\underbrace{f(a) = f(b)}_{p}, \underbrace{\text{implica}}_{\longrightarrow} \underbrace{a = b}_{q} \quad \text{para todo } a; b \in A$$

que es equivalente a la siguiente definición:

$$\underbrace{a \neq b}_{\sim q} \quad \underbrace{\text{implica}}_{\longrightarrow} \quad \underbrace{f(a) \neq f(b)}_{\sim p}$$

la cual usaremos en los ejercicios

FORMA PRÁCTICA DE INDENTIFICAR CUÁNDO UNA FUNCIÓN ES INYECTIVA Y CUÁNDO NO

Sea $F = \{(a;3),(b;6),(c;8),(d;6)\}$

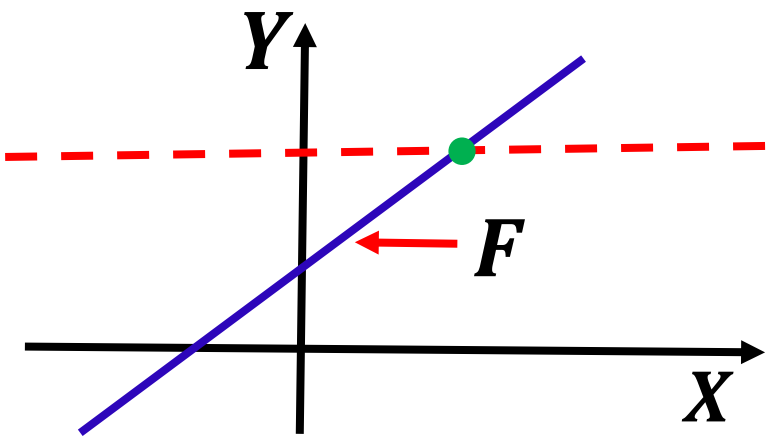
$\Rightarrow$ F **no** es inyectiva,

Sea $G = \{(a;7),(b;2),(c;8),(d;1),(e;5),(f;3)\}$

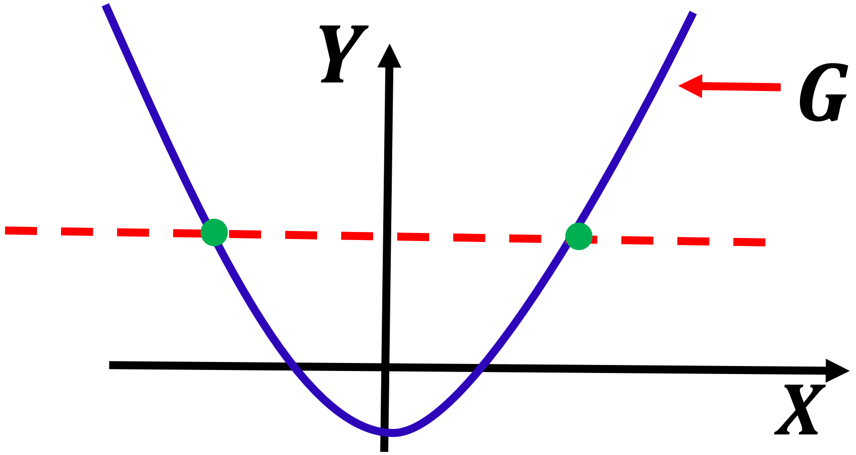
$\Rightarrow$ G **si** es inyectiva,
porque **ninguna** de las segundas componentes **se repite**

OBSERVACIÓN

Para gráficas de funciones, se dirá que una gráfica es inyectiva si al trazar una horizontal lo corta sólo en un punto.



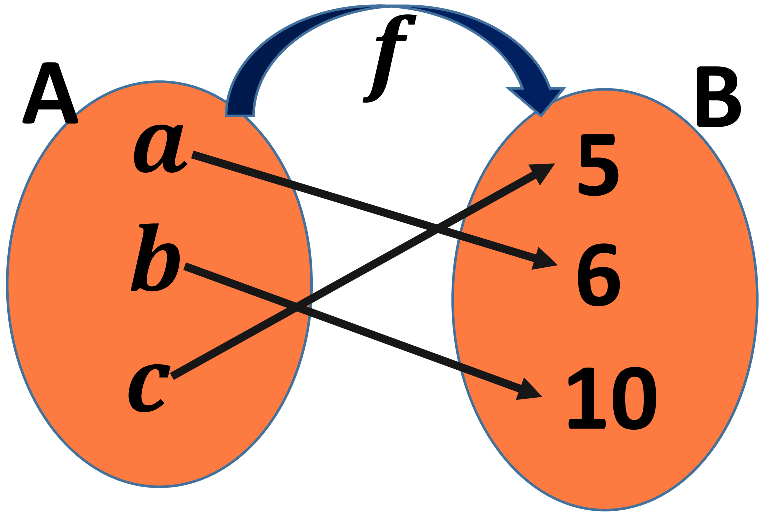
F **es inyectiva**

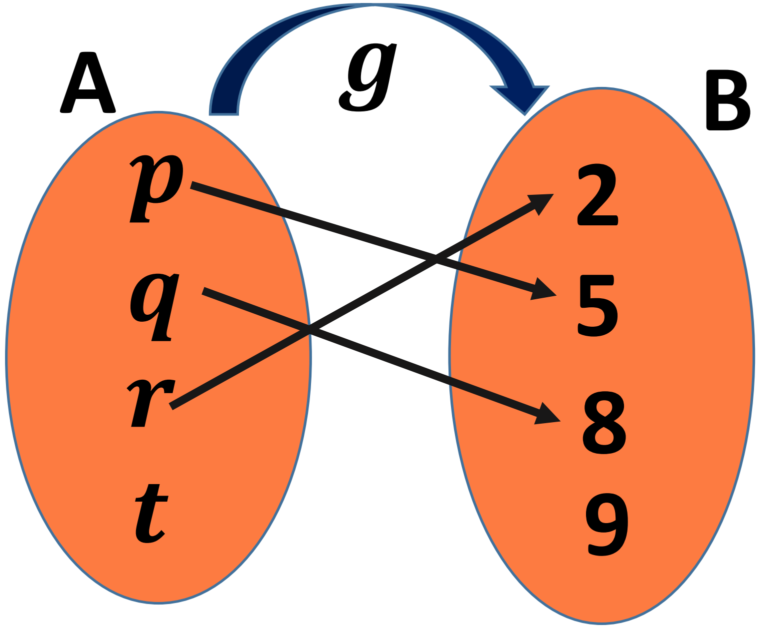


G **no es inyectiva**

II) FUNCIÓN SOBREYECTIVA

Sea la función $f: A \rightarrow B$,diremos que f es sobreyectiva si y solo si: $Rang(f) = B$





f es sobreyectiva, pues:

$$Rang(f) = B$$

g no es sobreyectiva, pues:

$$Rang(f) \neq B$$

III) FUNCIÓN BIYECTIVA

La función $f: A \to B$ es biyectiva si y solo si f es inyectiva y sobreyectiva

IV) FUNCIÓN INVERSA

Si $f: A \to B$ es una función biyectiva ,entonces existe $f^{-1}: B \to A$ llamada inversa de f, definida por la condición $y = f(x) \leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

PROPIEDAD:

$$Dom(f^{-1}) = Ran(f)$$

$$Ran(f^{-1}) = Dom(f)$$

HELICO PRACTICE

PROBLEMA 1 ¿Cuáles de las funciones son inyectivas?

$$F = \{(1;2),(3;5),(4;8),(5;9)\}$$

$$G = \{(0;1),(2;5),(4;1),(5;7)\}$$

$$H = \{(1;5),(3;5),(7;10),(10;5)\}$$

Resolución

F es inyectiva: *pues **NO** se repite ningún elemento del rango; la correspondencia es uno a uno*

G **no** es inyectiva: *pues se repite un elemento del rango:*

$(0;1)$ y $(4;1)$

H **no** es inyectiva: *pues se repite un elemento del rango:*

$(1;5),(3;5)$ y $(10;5)$

PROBLEMA 2 Sean $A=\{1;2;3;4\}$ y $B=\{1;3;5;7\}$ y las funciones $f:A\to B$ y $g:A\to B$ tal que:

$$f=\{(1;1),(2;1),(3;3),(4;5)\}$$

$$g=\{(1;3),(2;1),(3;5),(4;7)\}$$

¿f y g son sobreyectivas?

Resolución

f no es Sobreyectiva:

pues $Ran(f)\neq B$

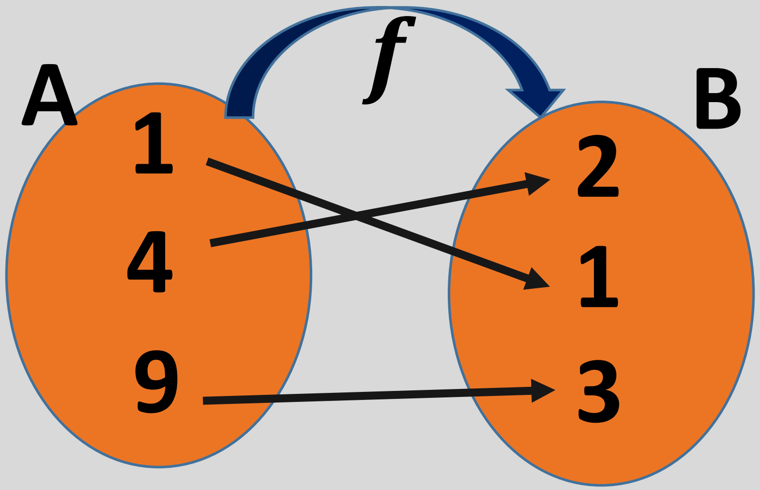
$$\{1;3;5\}\neq\{1;3;5;7\}$$

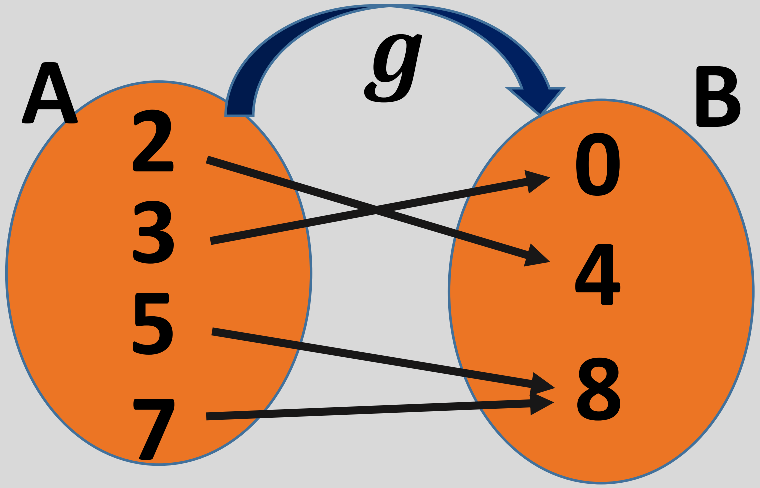
g si es Sobreyectiva:

pues $Ran(g)=B$

$$\{3;1;5;7\}=\{1;3;5;7\}$$

PROBLEMA 3 Dada las funciones:





¿f y g son inyectivas?

Resolución

f si es inyectiva:

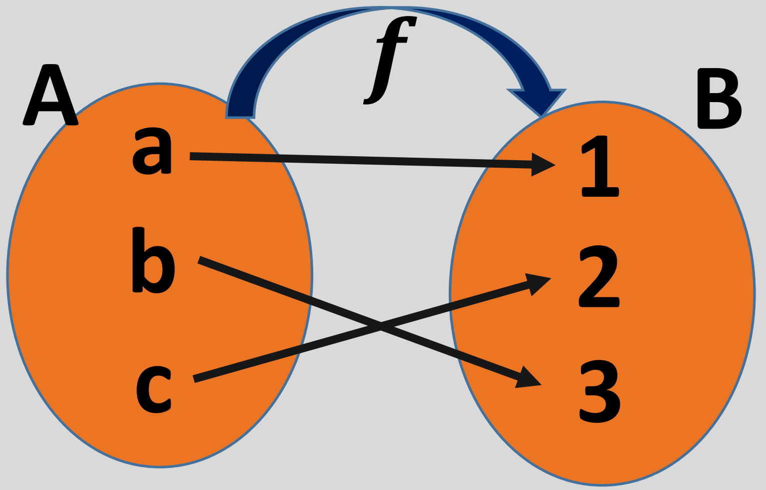
***NO* se repite ningún elemento del rango**

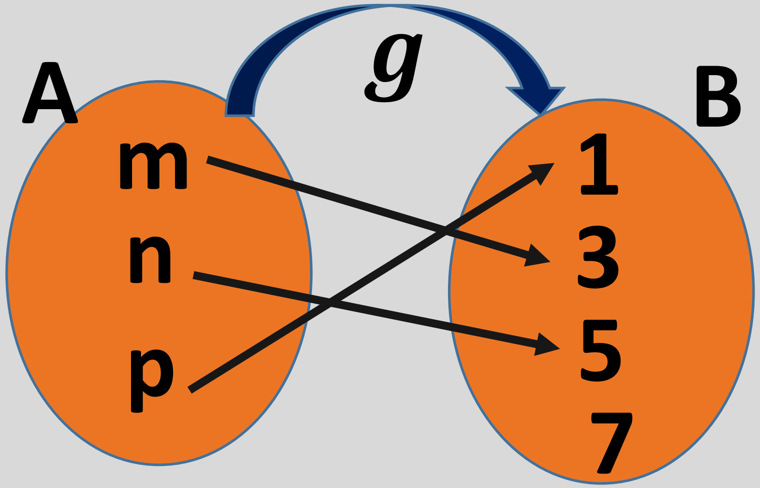
g no es inyectiva:

(5;8) ,(7;8)

PROBLEMA 4

Siendo las funciones:





¿f y g son sobreyectivas?

Resolución

f **si** es Sobreyectiva:

pues $Ran(f) = B$

$$\{1;2;3\} = \{1;2;3\}$$

g **no** es Sobreyectiva:

pues $Ran(g) \neq B$

$$\{1;3;5\} \neq \{1;3;5;7\}$$

PROBLEMA 5 Sean $f: A \to B$ y $g: A \to B$ funciones; Además:

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ y $B = \{2, 3, 5, 8\}$ tales que

$f = \{(2;5), (4;5), (8;3), (6;8)\}$

$g = \{(2;2), (6;3), (4;8), (8;5)\}$ ¿f y g son biyectivas ?

> $f: A \to B$ *es biyectiva si y solo si f inyectiva y sobreyectiva*

Resolución

I) f NO es Inyectiva

$$f = \{(2;5), (4;5), (8;3), (6;8)\}$$

pues se repite un elemento del rango:

$(2;5)$ y $(4;5)$

f NO es biyectiva

I) g es Inyectiva

$$g = \{(2,2); (6,3), (4,8); (8,5)\}$$

Pue NO se repite ningún elemento del rango

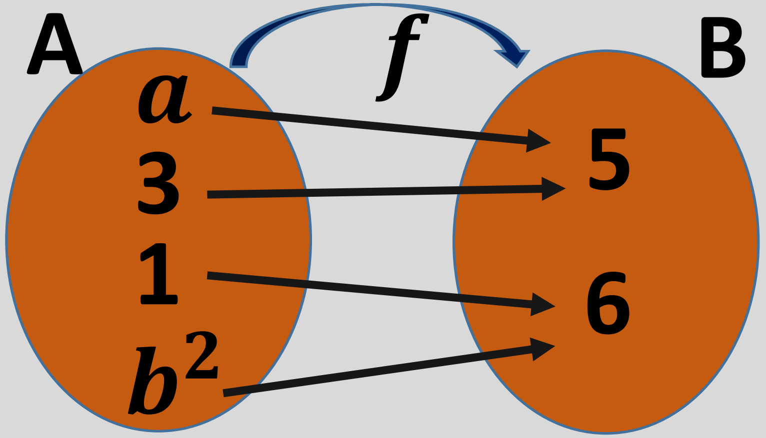
II) g es sobreyectiva

pues el $Ran(g)) = B$

$$\{2,3,5,8\} = \{2,3,5,8\}$$

g Es biyectiva

PROBLEMA 6 Del gráfico, f representa una función inyectiva.



Además, la expresión $K = a + b$, donde K es el máximo valor de $a + b$, representa la cantidad de alumnos clasificados a la final de un torneo de ajedrez. Si participaron 10 alumnos, ¿cuántos alumnos quedaron descalificados?

Resolución

f es Inyectiva

$\Rightarrow (a;5) = (3;5) \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$\Rightarrow (1;6) = (b^2;6) \Rightarrow b^2 = 1$

$\boxed{b = 1}$ ó $b = -1$

$(Por\ dato: K\ es\ máximo)$

$K = 3 + 1$

$K = 4 \ (alumnos\ clasificados)$

$\therefore$ $\boxed{\text{N° de alumnos descalificados = 6}}$

PROBLEMA 7 Se tiene $f: A \rightarrow B$ función, donde $f = \{(2;9),(3;4),(4;5)\}$. El costo (en soles) de una bicicleta viene dado por el producto de los valores del dominio de la función inversa de f ¿Cuál es el costo de la bicicleta?

RESOLUCIÓN

Si $f; A \rightarrow B$, $\textit{ES BIYECTIVA} \rightarrow \exists f^{-1}$

$I)\ f\ es\ inyectiva$

$f = \{(2;\underline{9}),(3;\underline{4}),(4;\underline{5})\}$

*pues **NO** se repite ningún elemento del rango*

$II)\ f\ es\ sobreyectiva$

$rang(f) = B$

$\{4,5,9\} = \{4,5,9\}$

$.\ por\ lo\ tanto\ f\ es\ biyectiva \rightarrow \exists f^{-1}$

$f^{-1} = \{(9;2),(4;3),(5;4)\}$

$Dom(f^{-1}) = \{9,4,5\}$

nos piden el costo de la bicicleta

el producto de los Valores del dominio $\begin{cases} = (9)(4)(5) \\ = 180 \end{cases}$

EL COSTO DE LA BICICLETA ES 180 SOLES