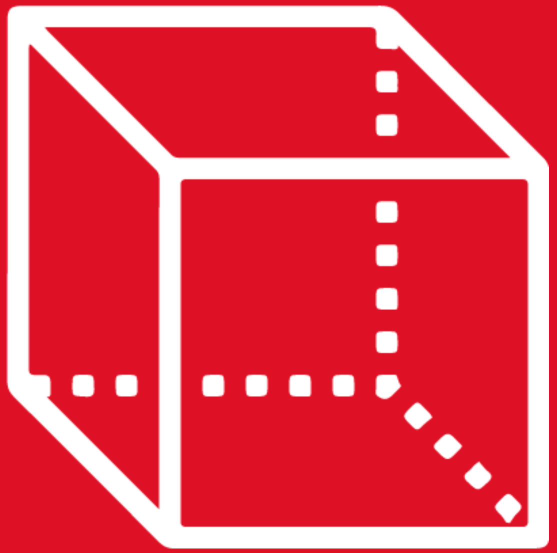
GEOMETRÍA

Capítulo 7



5th
SECONDARY

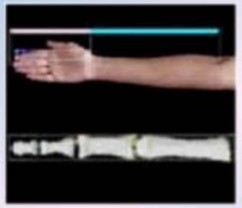
SEGMENTOS PROPORCIONALES

SACO OLIVEROS

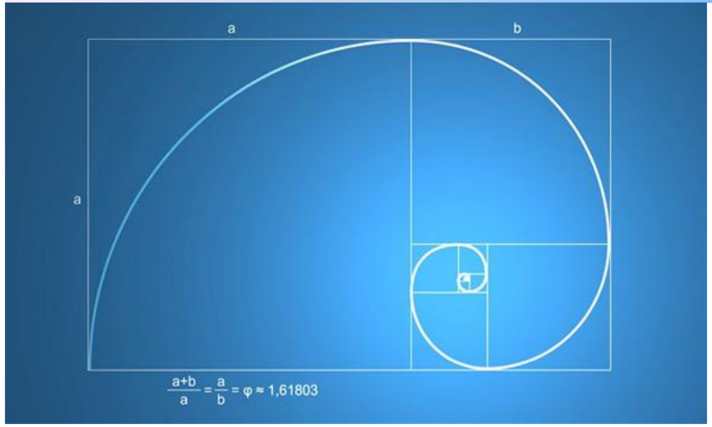
1. PROPORCIÓN ÁUREA

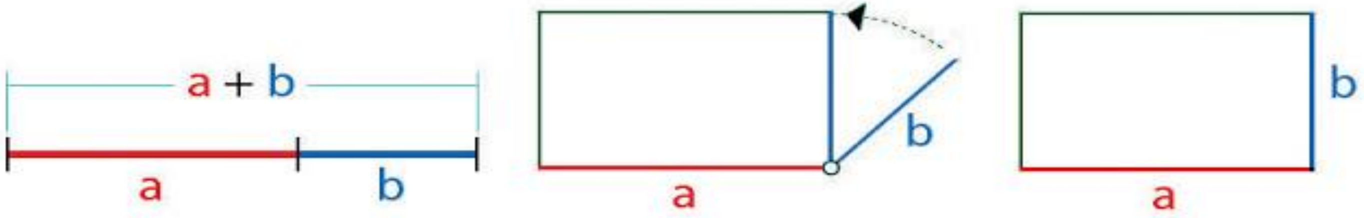
También llamada **sección áurea**, se halla presente en la naturaleza, el arte y la arquitectura.

Los griegos la conocieron en **el estudio del cuerpo humano** y la utilizaron, en la escultura y la arquitectura y la definieron como una característica fundamental en su estética.



GEOMETRÍA, ESCALA Y PROPORCIÓN EN EL TIEMPO





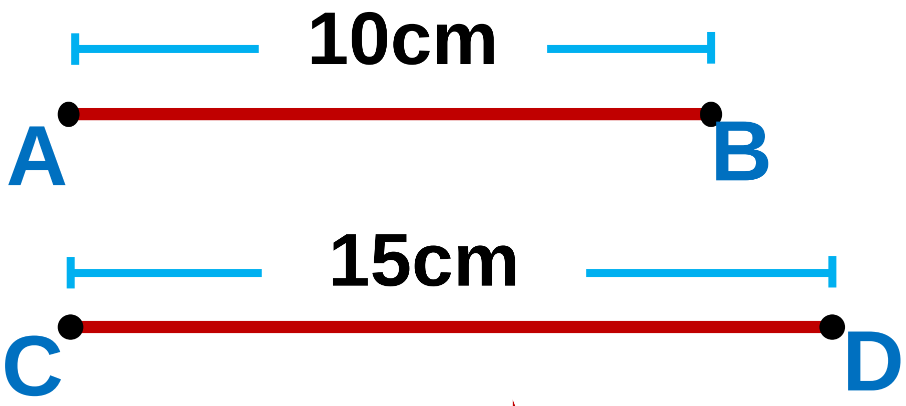
$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \varphi \text{ (Phi)} = 1.61803399\ldots$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Razón geométrica de dos segmentos

Se denomina razón geométrica de dos segmentos, al cociente de las longitudes de los segmentos expresados en la misma unidad.

Ejemplo:

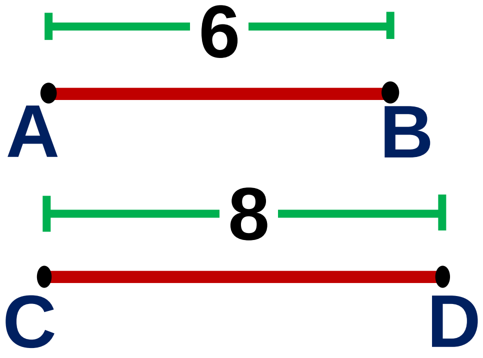


$$\frac{AB}{CD} = \frac{\cancel{10}cm}{\cancel{15}cm} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$$

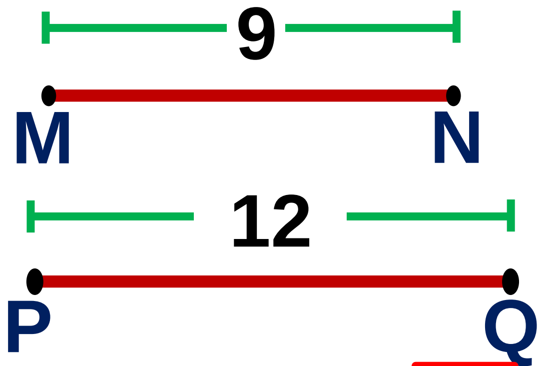
$\frac{2}{3}$: razón geométrica de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

Segmentos proporcionales

Si la razón geométrica de 2 segmentos es igual a la de otros dos, dichos pares de segmentos son proporcionales.



$$\frac{AB}{CD} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{8}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$



$$\frac{MN}{PQ} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{12}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

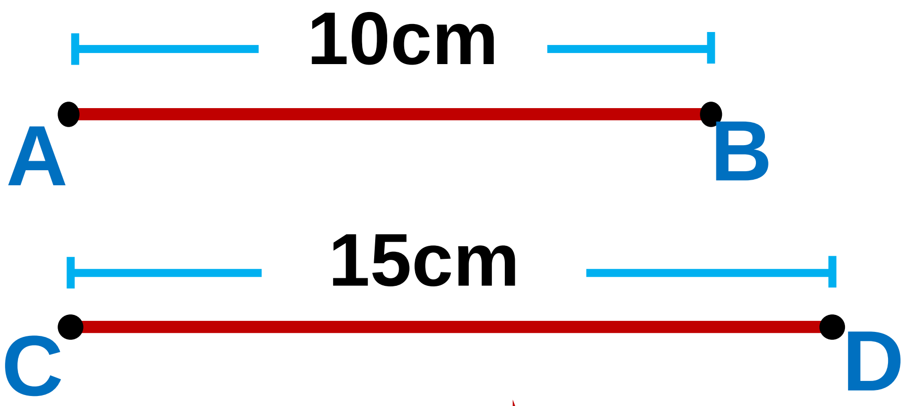
$$\boxed{\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}} \Rightarrow \text{Son proporcionales}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Razón geométrica de dos segmentos

Es el cociente que se obtiene al dividir las longitudes de dos segmentos que tienen la misma unidad de medida.

Ejemplo:

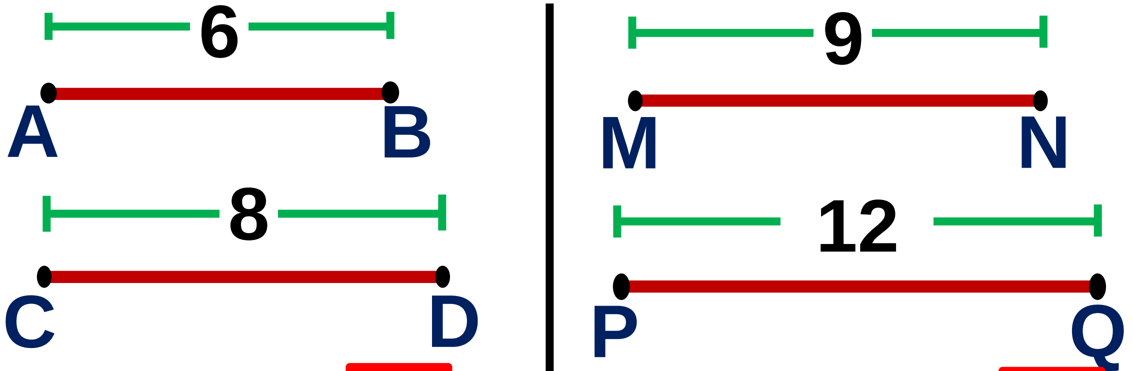


$$\frac{AB}{CD} = \frac{\cancel{10}\text{cm}}{\cancel{15}\text{cm}} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$$

$\frac{2}{3}$: razón geométrica de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

Segmentos proporcionales

Si la razón geométrica de 2 segmentos es igual a la de otros dos, dichos pares de segmentos son proporcionales.



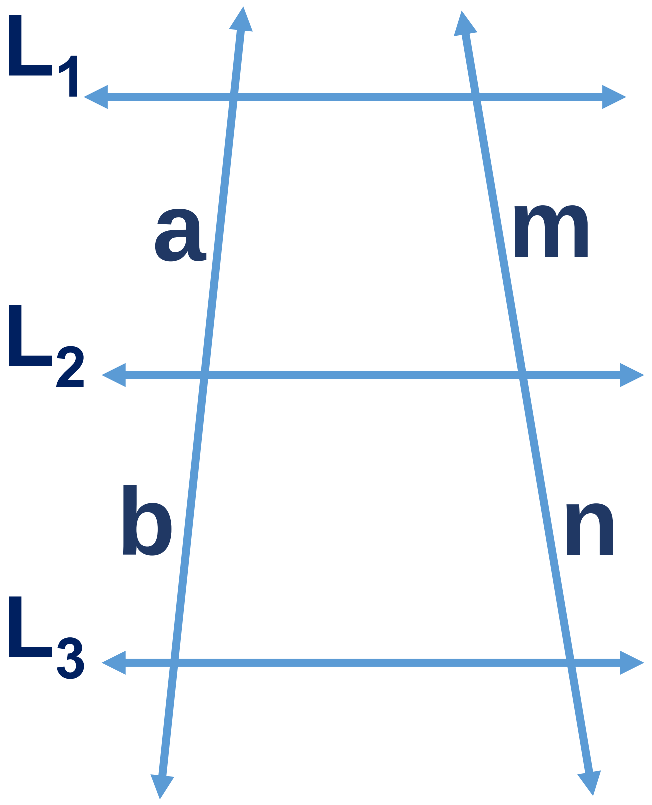
$$\frac{AB}{CD} = \frac{\cancel{6}}{\cancel{8}} = \boxed{\frac{3}{4}} \qquad \frac{MN}{PQ} = \frac{\cancel{9}}{\cancel{12}} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

$$\boxed{\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}}$$

Son proporcionales

SEGMENTOS PROPORCIONALES

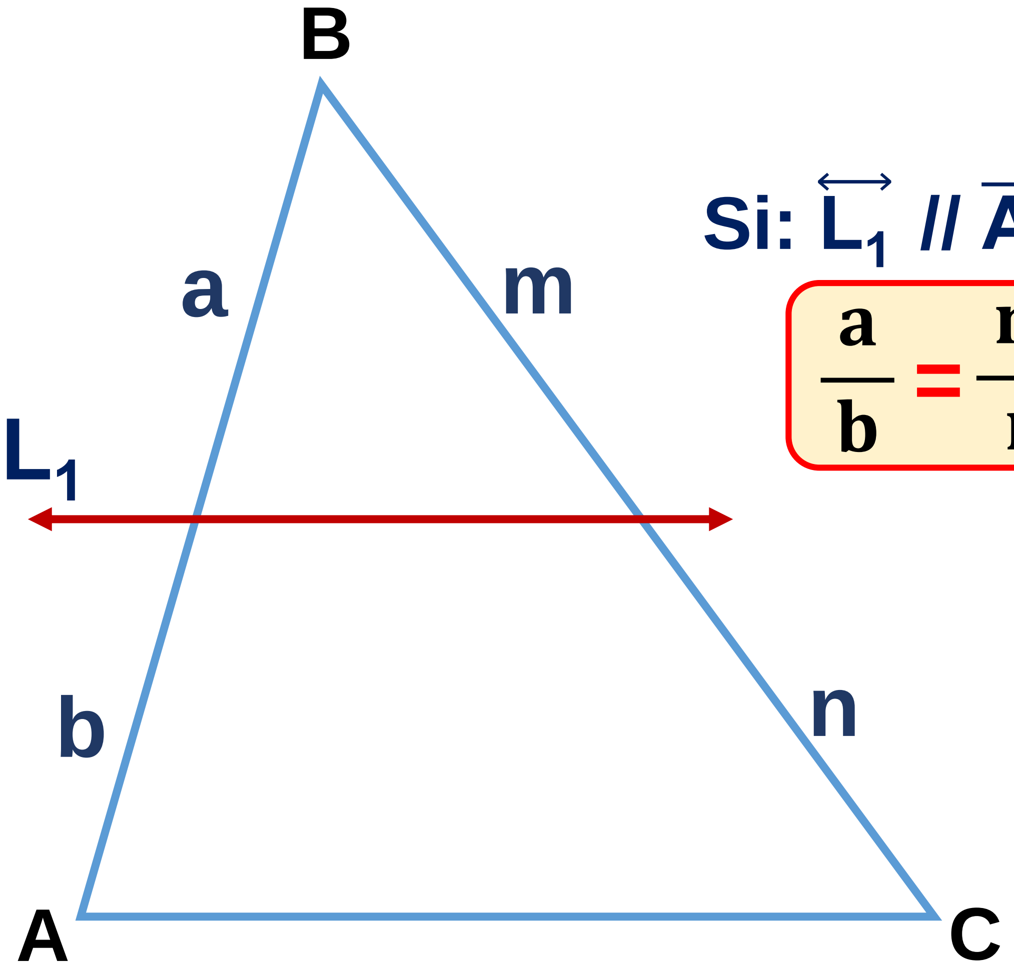
Teorema de Tales



Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$

Corolario de Tales

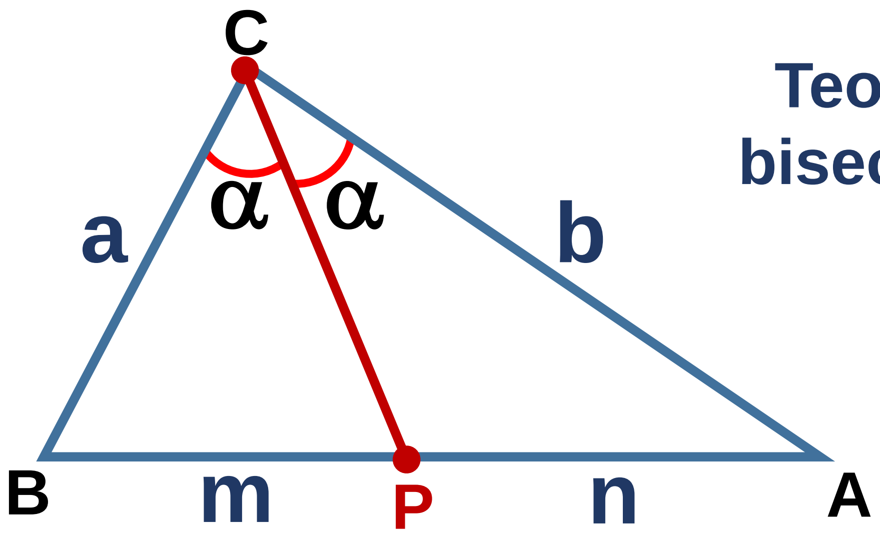


Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overline{AC}$

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{m}{n}}$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

Teorema de la Bisectriz

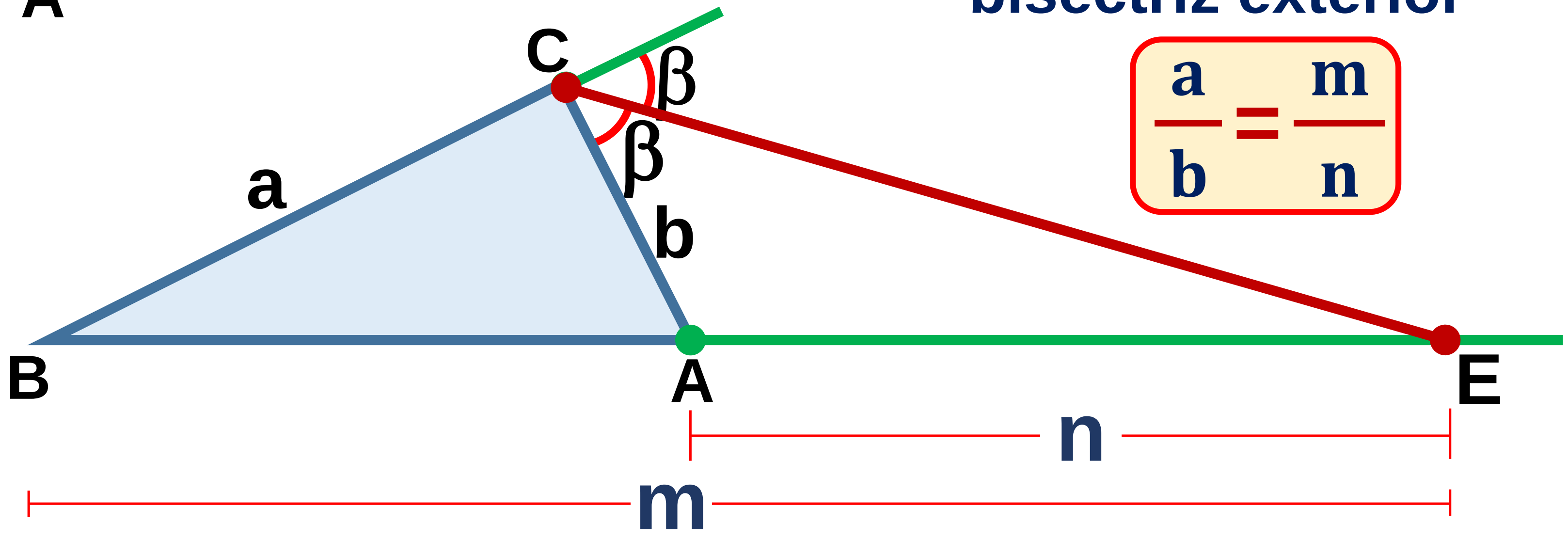


Teorema de la bisectriz interior

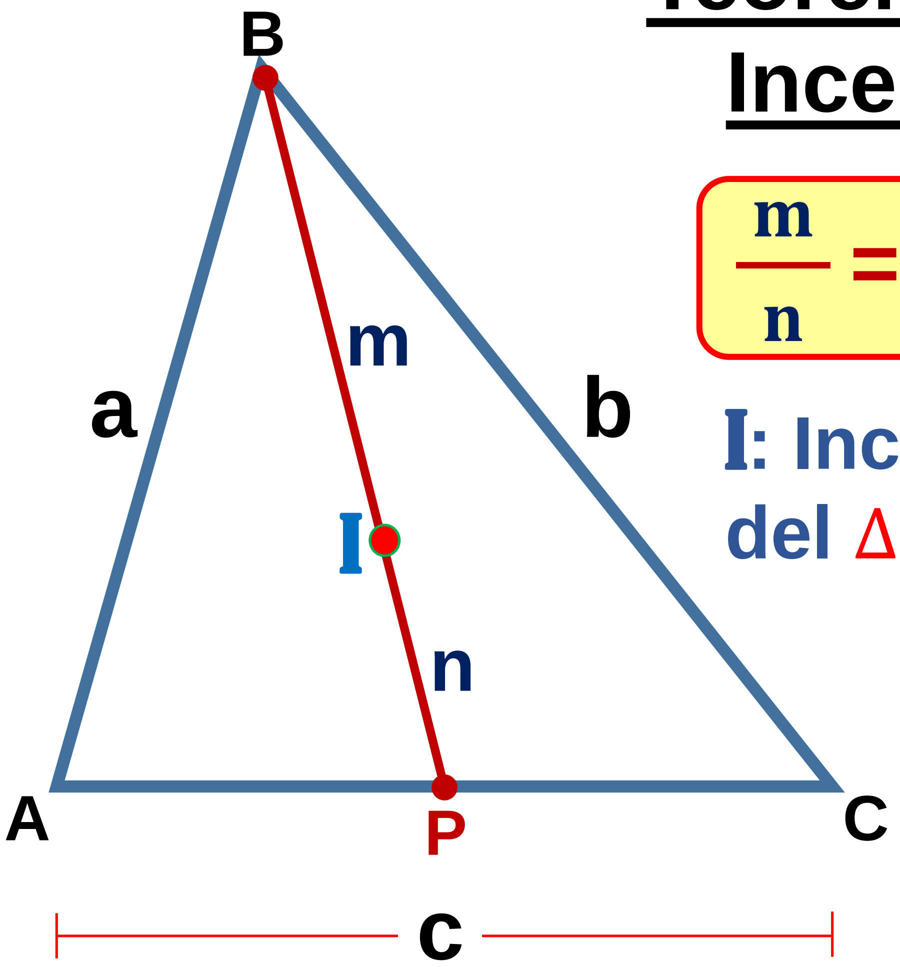
$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

Teorema de la bisectriz exterior

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$



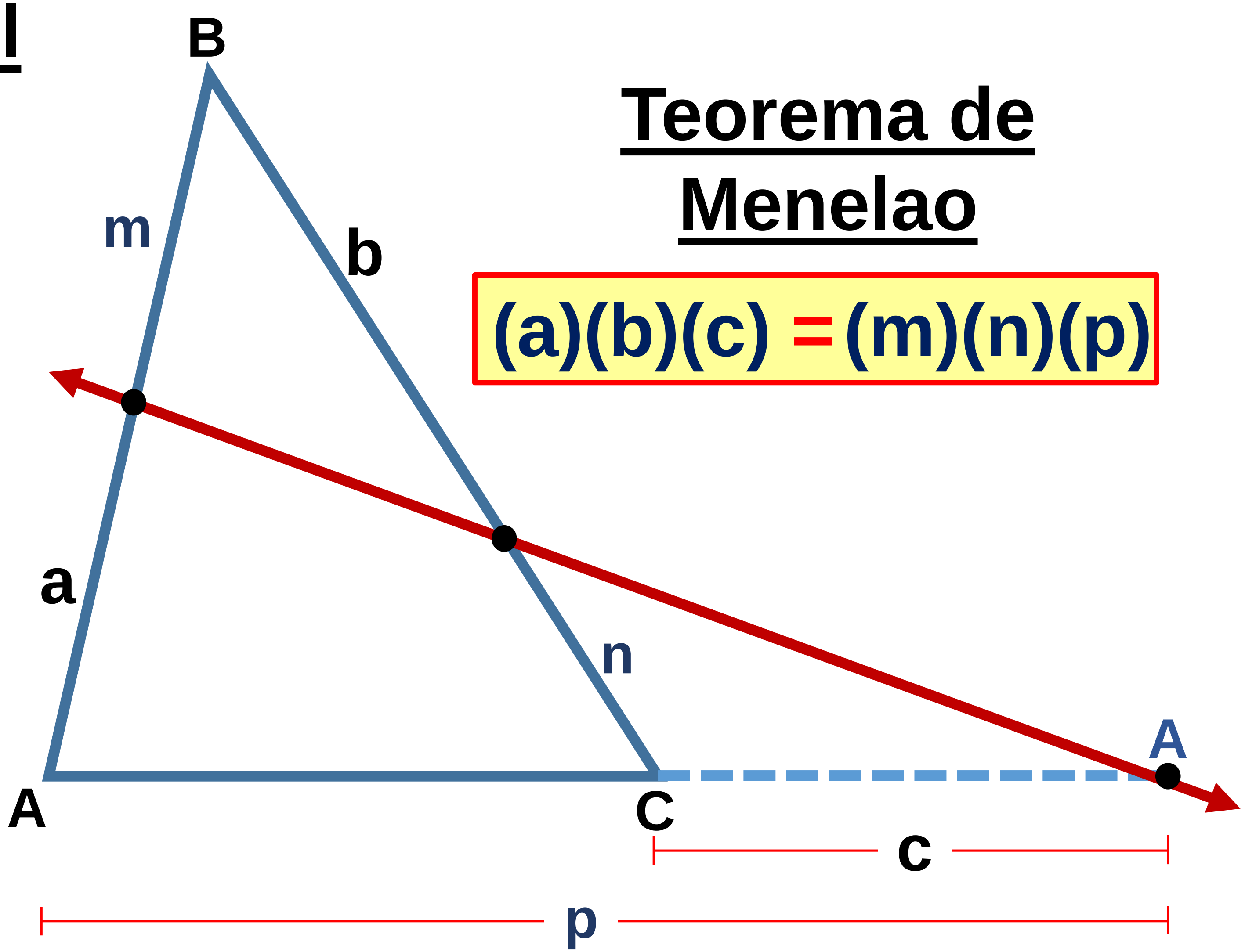
SEGMENTOS PROPORCIONALES



Teorema del Incentro

$$\frac{m}{n} = \frac{a+b}{c}$$

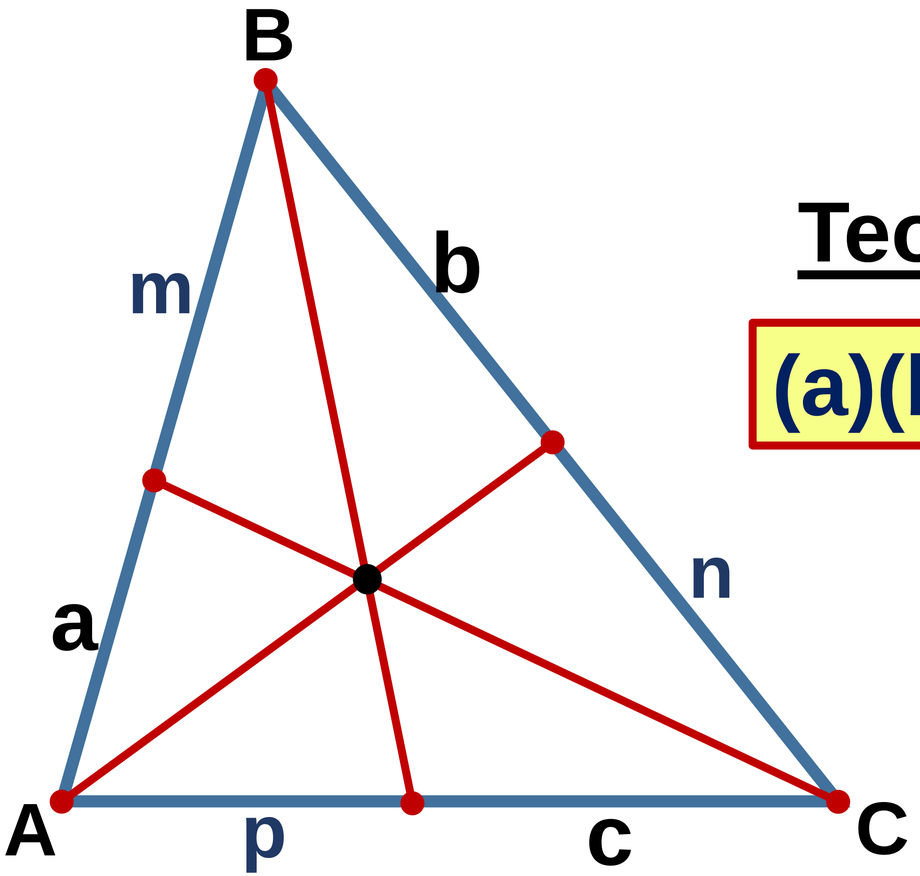
I: Incentro del Δ ABC



Teorema de Menelao

$$(a)(b)(c) = (m)(n)(p)$$

SEGMENTOS PROPORCIONALES

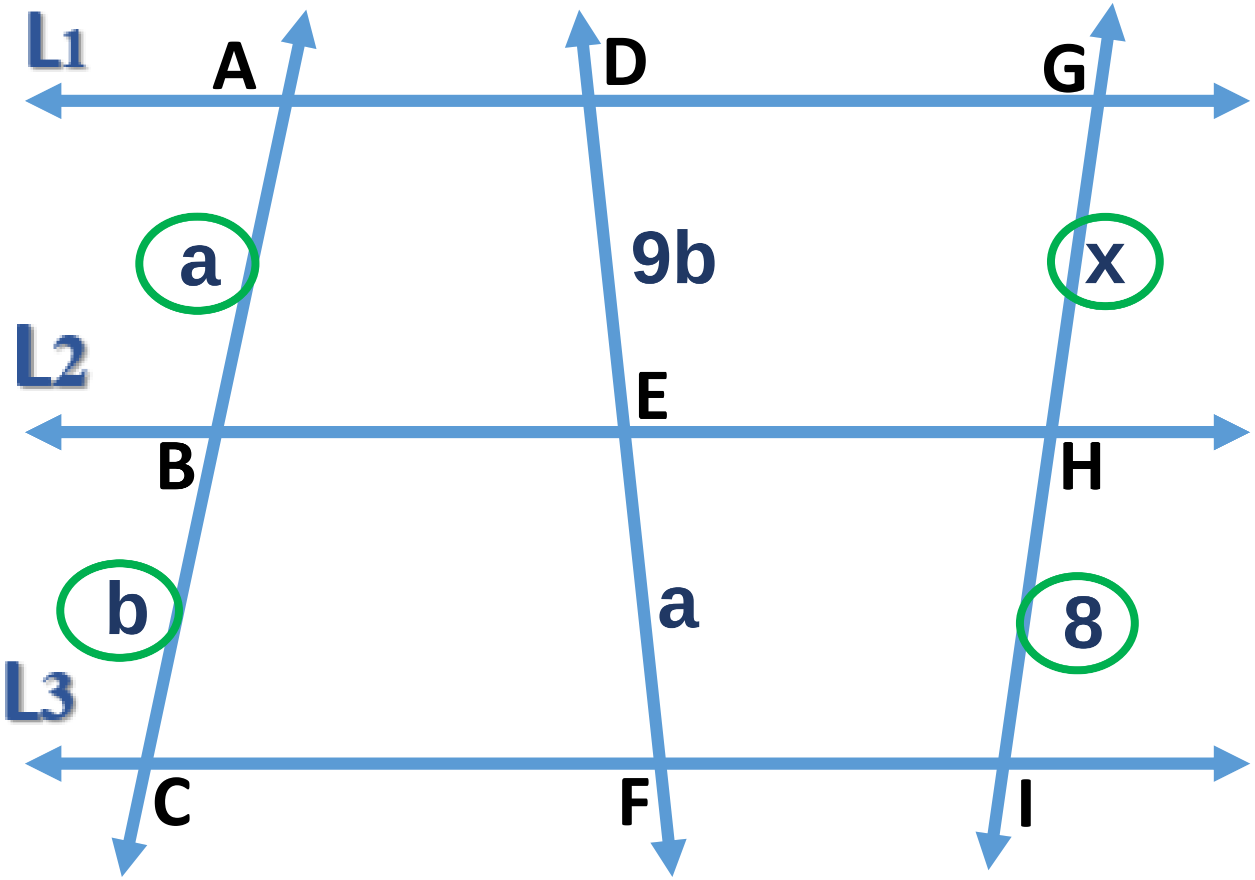


Teorema de Ceva

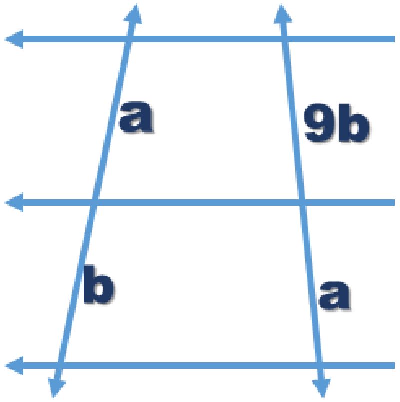
$$\boxed{(a)(b)(c) = (m)(n)(p)}$$

1. En la figura, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$, calcule el valor de x.

Resolución:



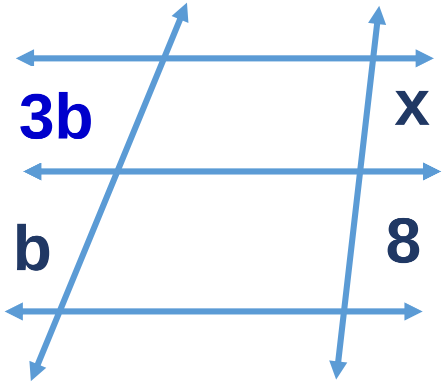
- **Piden:** x
- **Aplicamos teorema de Tales**



$$\frac{a}{b} = \frac{9b}{a}$$

$$a^2 = 9b^2$$

$$\boxed{a = 3b}$$

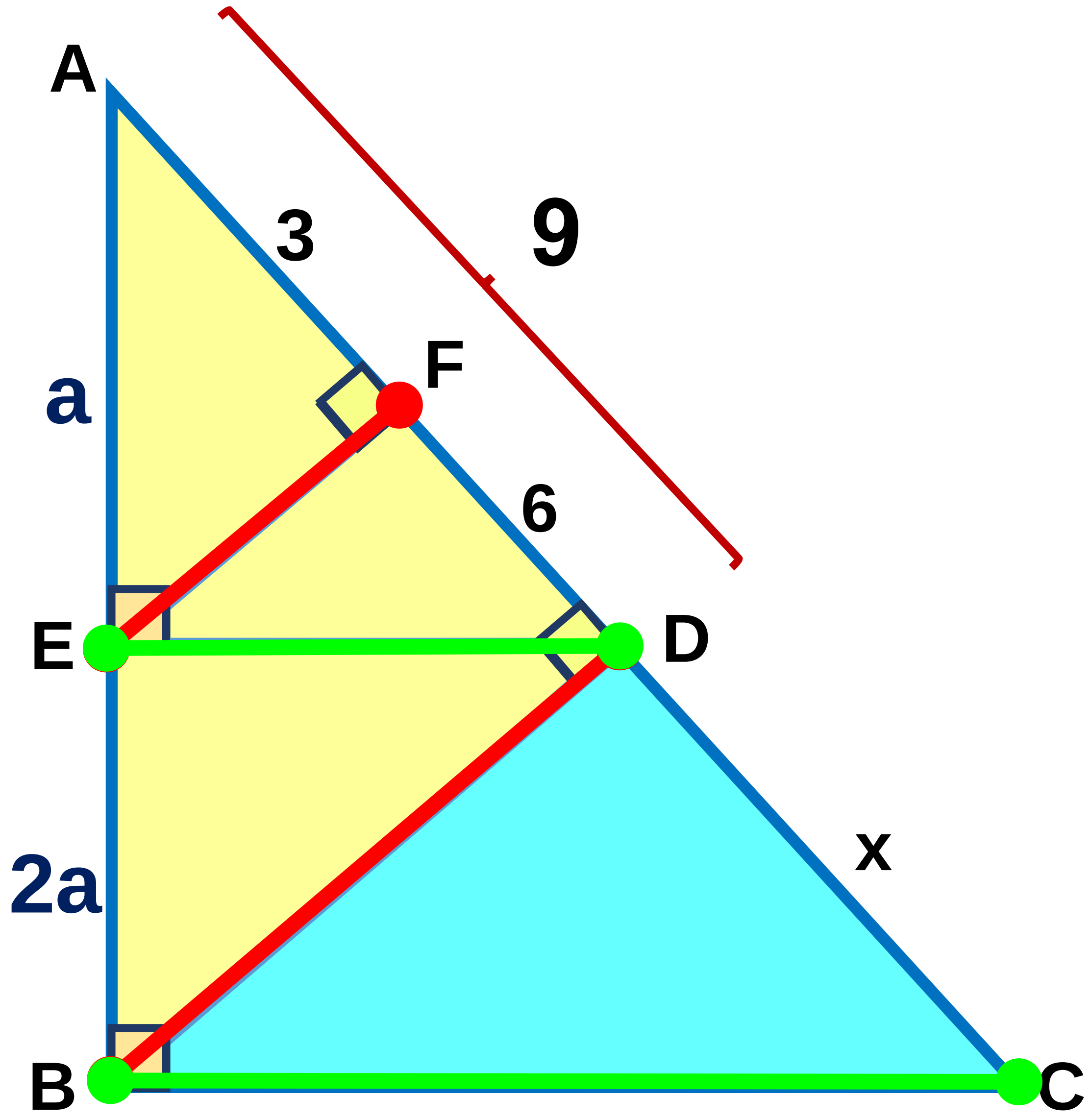


$$\frac{3\cancel{b}}{\cancel{b}} = \frac{x}{8}$$

$$3(8) = x$$

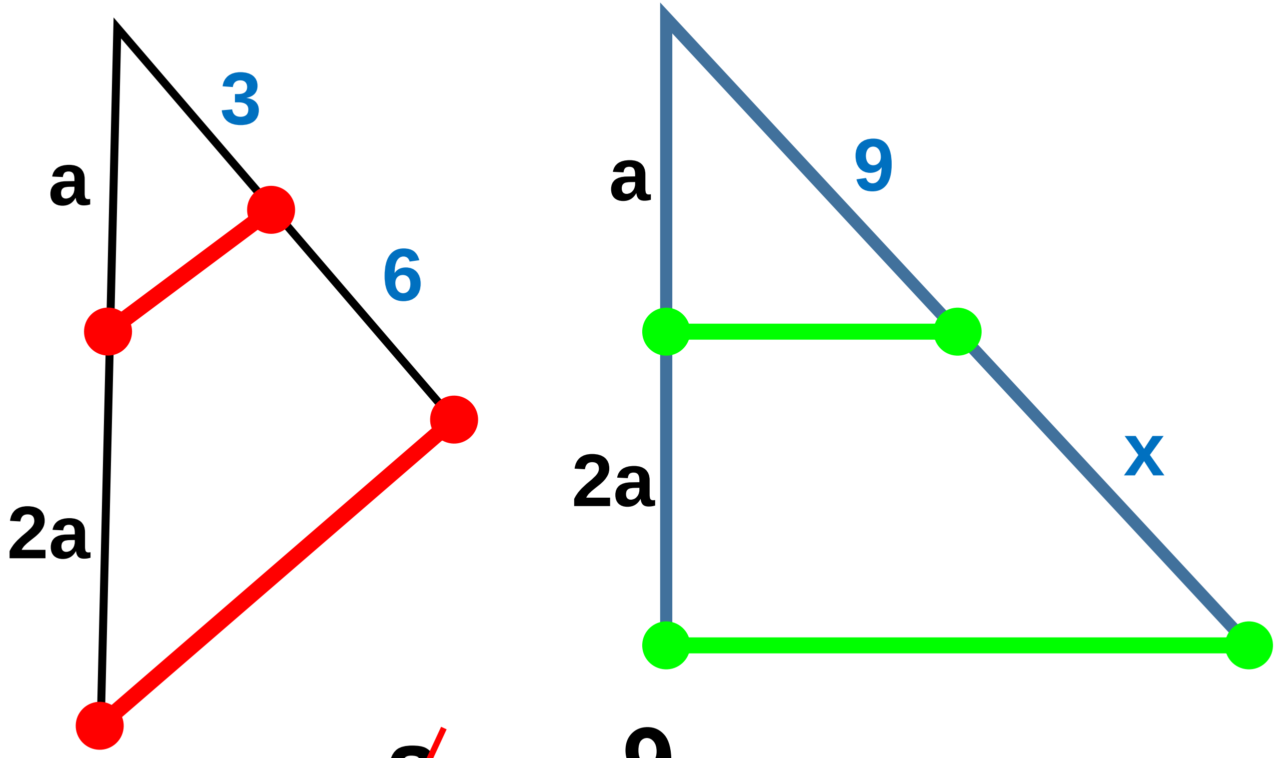
$$\boxed{x = 24}$$

2. En la figura, calcule el valor de x.



Resolución

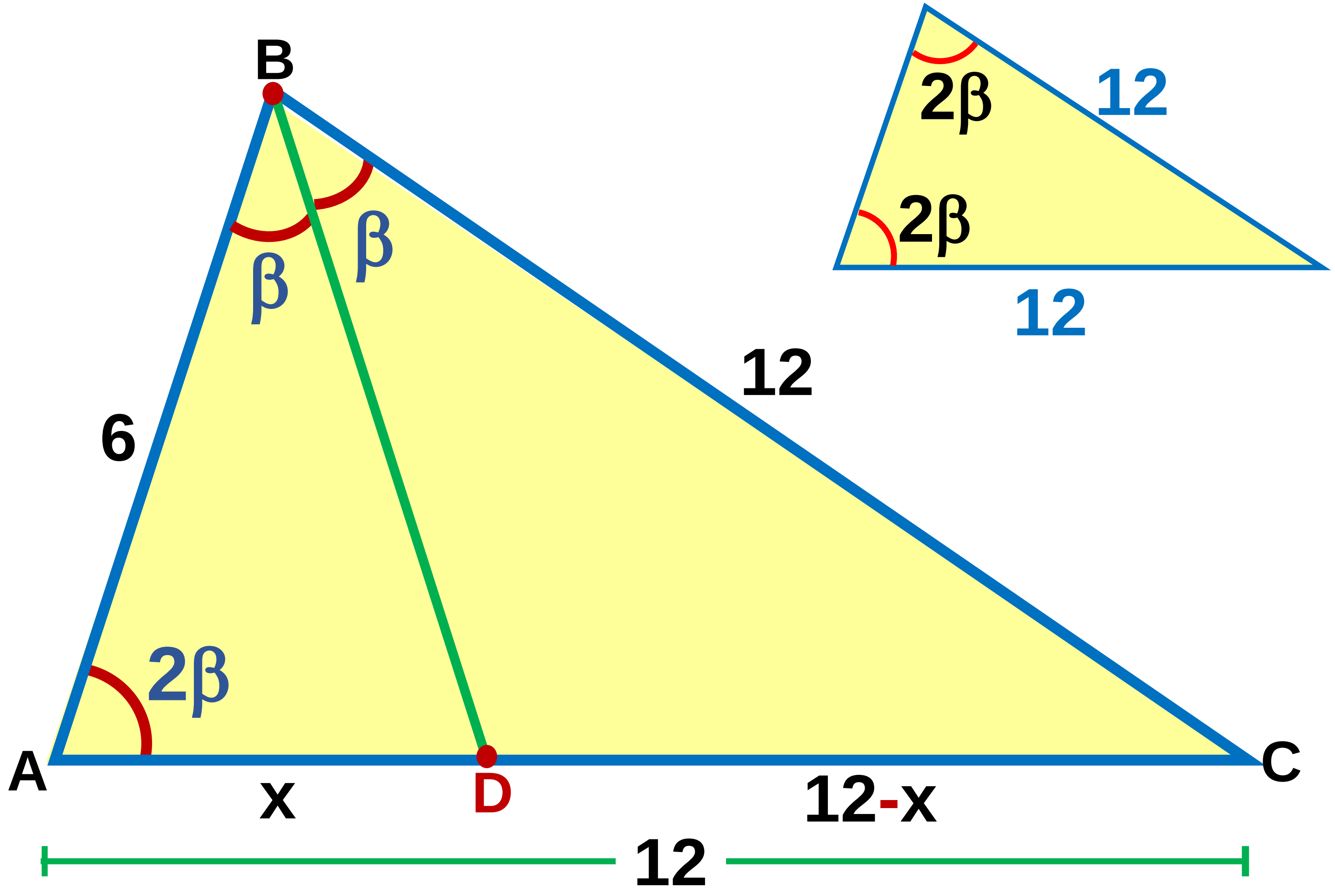
- Piden: x
- Aplicamos el corolario de Tales



$$\frac{\cancel{a}}{2\cancel{a}} = \frac{9}{x}$$

$$\boxed{x = 18}$$

3. En un triángulo ABC, AB = 6 y BC = 12, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Calcule AD, si m∡BAD = m∡ABC.



Resolución

- Piden: AD
- Δ ABC: Isósceles

BC = AC = 12

- Aplicamos el teorema

$$\frac{\cancel{6}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,2}} = \frac{x}{12-x}$$

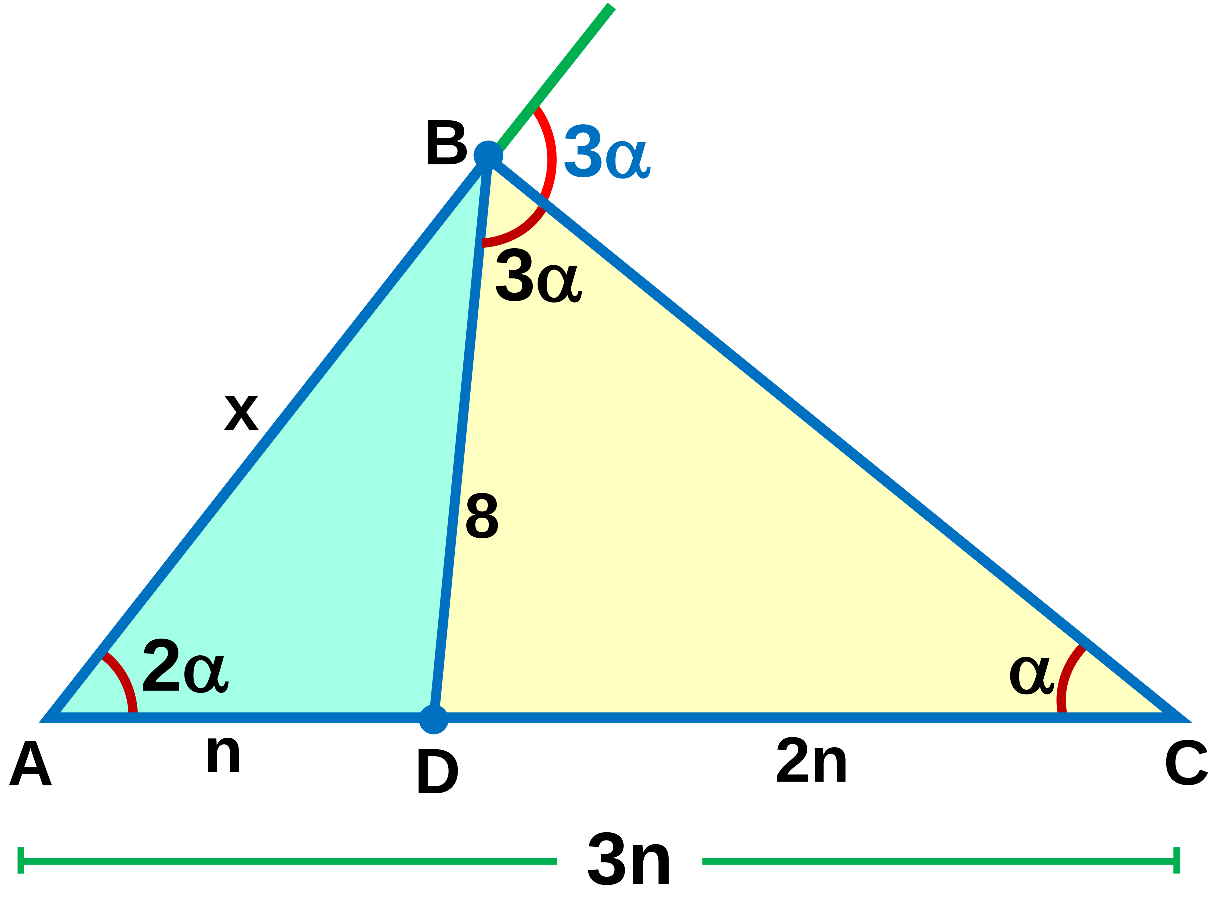
$$12 - x = 2x$$

$$12 = 3x$$

$$4 = x$$

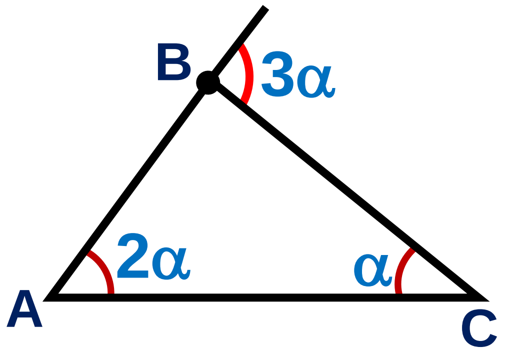
$$\boxed{AD = 4}$$

4. En la figura, calcule el valor de x.



Resolución

- Piden: x
- Se prolonga $\overline{AB}$.
- Δ ABC: por teorema del ángulo externo.
- Aplicamos el teorema:

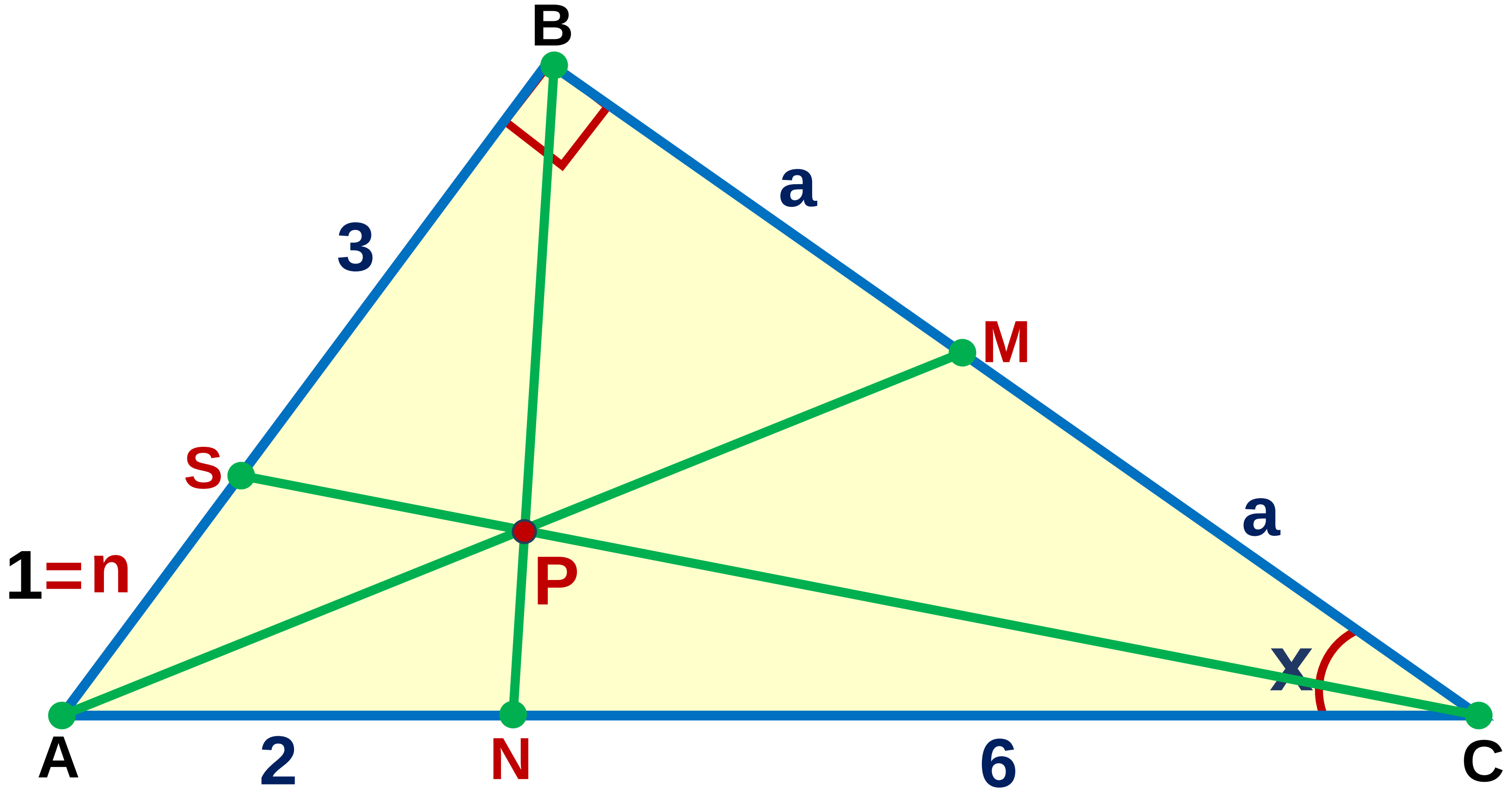


$$\frac{x}{8} = \frac{3\cancel{n}}{2\cancel{n}}$$

$$2x = 24$$

$$\boxed{x = 12}$$

5. En un triángulo ABC, recto en B, la mediana $\overline{AM}$ y las cevianas interiores $\overline{BN}$ y $\overline{CS}$ se intersecan en P. Si SB = 3, AN = 2 y NC = 6, calcule la m∢BCA.



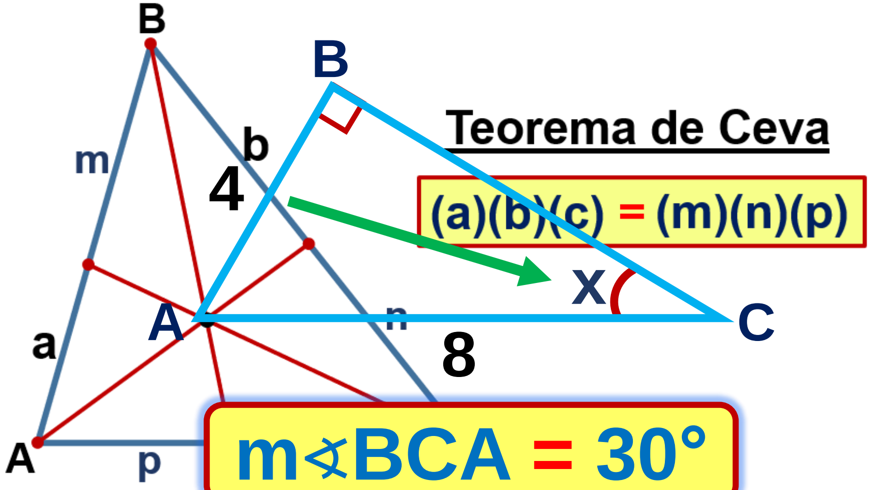
Resolución

- Piden m∢BCA.
- Aplicando el teorema de Ceva

$$(n)(\cancel{a})(\cancel{6}) = (\cancel{3})(\cancel{a})(\cancel{2})$$

$$n = 1$$

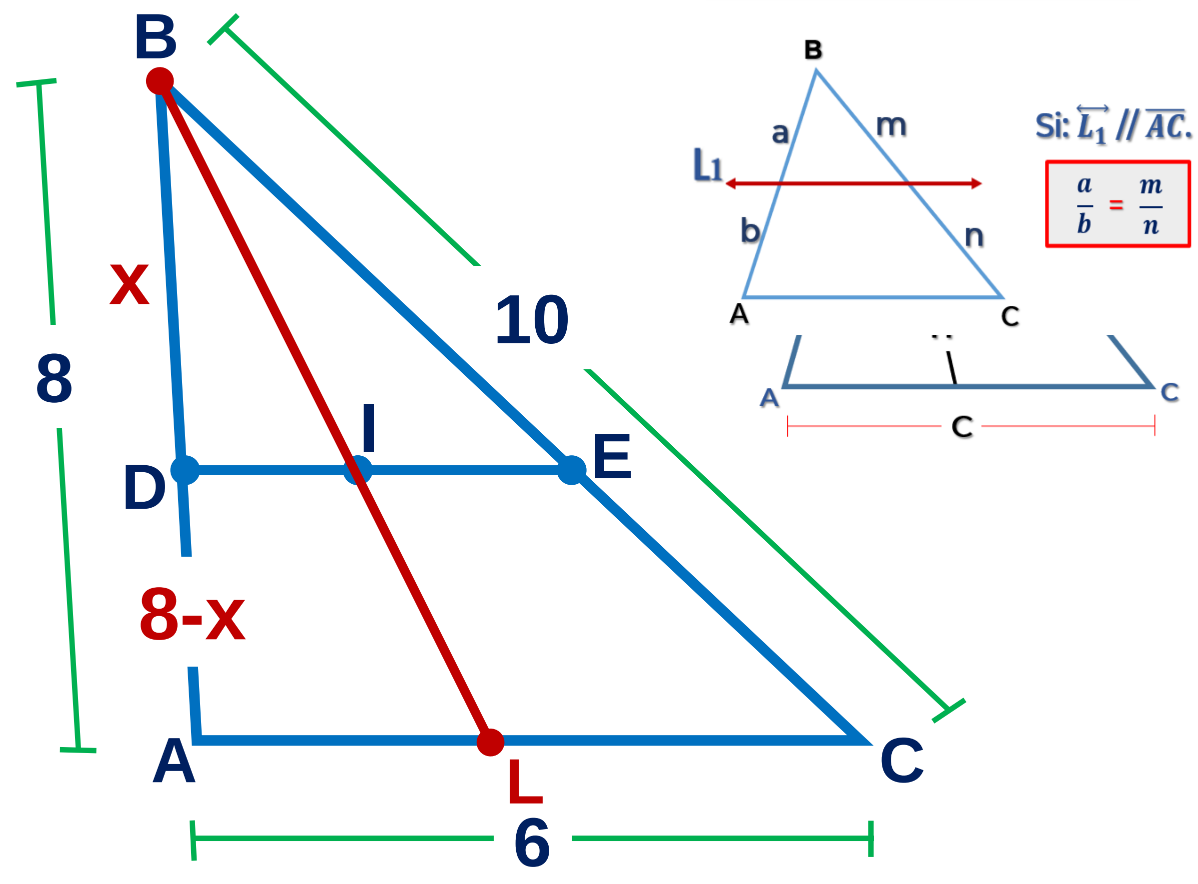
- ⊿ ABC: Notable de 30° y 60°



$$\boxed{m∢BCA = 30°}$$

6. En la figura el triángulo ABC representa el contorno de un jardín donde I es su incentro. AB = 8m, BC = 10m y AC = 6m. Luego se traza el $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ para dividir al jardín en dos partes, para cultivar flores de diferente color. Calcule la longitud del $\overline{BD}$.

Corolario de Tales



Resolución

- **Piden:** BD
- **Se traza** $\overline{BL}$
- ΔABC: Teorema del incentro

$$\frac{BI}{IL} = \frac{8+10}{6}$$

$$\frac{BI}{IL} = 3$$

- ΔABL: Corolario de Tales

$$\frac{BI}{IL} = \frac{x}{8-x}$$

$$3 = \frac{x}{8-x}$$

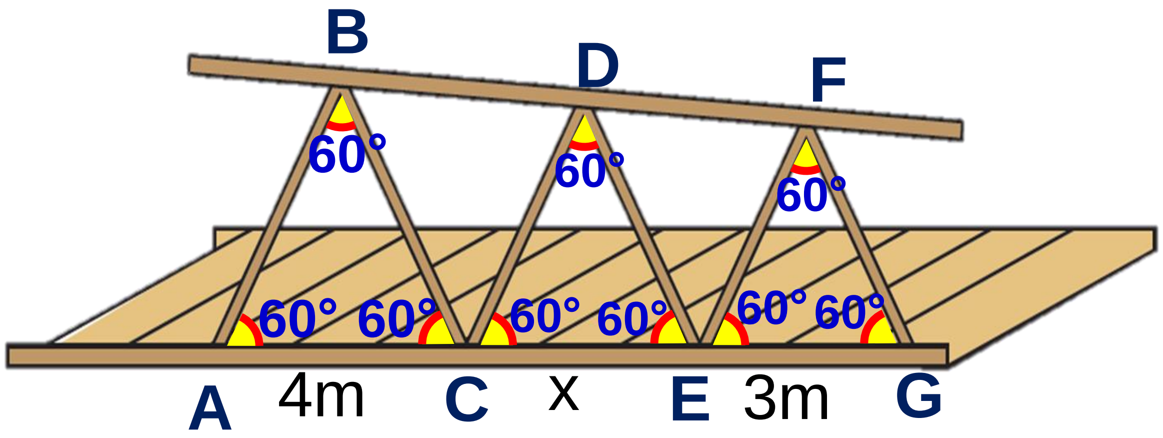
$$3(8-x) = x$$

$$24 - 3x = x$$

$$24 = 4x$$

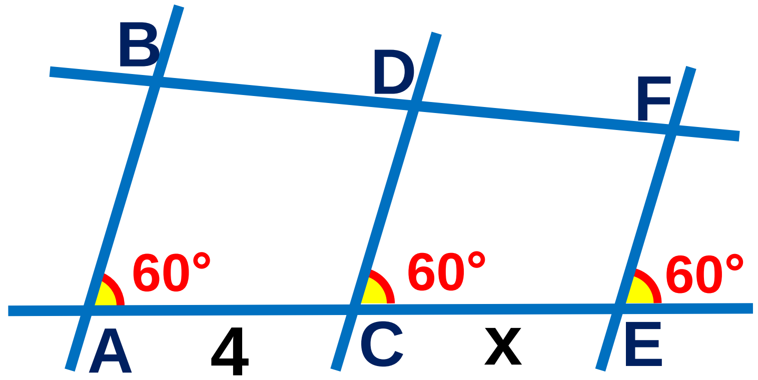
$$\boxed{BD = 6\ m}$$

7. La estructura de la baranda de un puente tiene el diseño que se muestra en la figura, tal que los triángulos ABC, CDE y EFG son equiláteros. Calcule el valor de x.



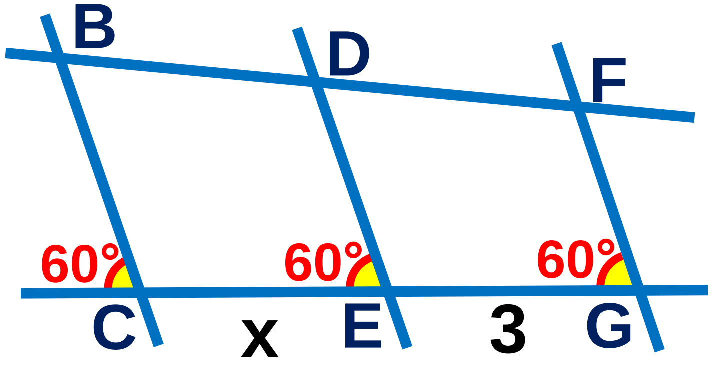
Resolución

$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ (Ángulos correspondientes)



$$\frac{4}{x} = \frac{BD}{DF} \quad \dots(1)$$

$\overline{BC} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{FG}$ (Ángulos correspondientes)



$$\frac{x}{3} = \frac{BD}{DF} \quad \dots(2)$$

Igualando (1) y (2) $\frac{4}{x} = \frac{x}{3}$

$\boxed{x = 2\sqrt{3}\ m}$