GEOMETRÍA

Capítulo 19

5th
SECONDARY

Esfera y teorema de Pappus

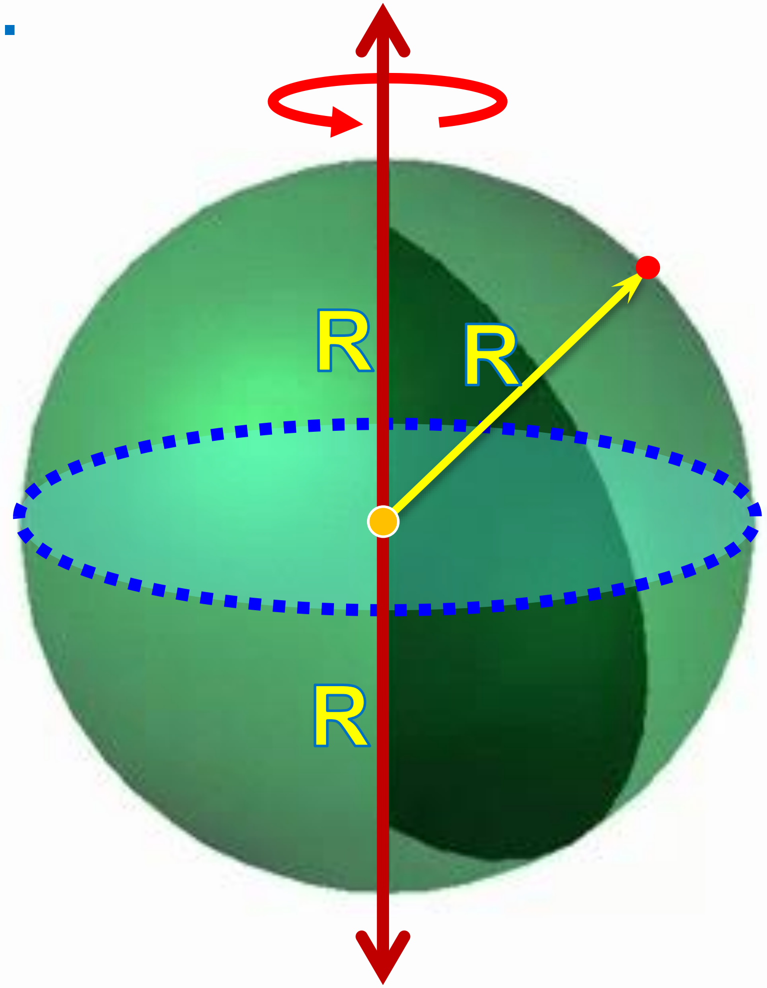
SACO OLIVEROS

Una esfera es el conjuntos de puntos A del espacio que unidos con un punto fijo O, OA es menor o igual a r, donde O se denomina centro y r es la longitud del radio de la esfera.

En nuestra vida cotidiana observamos por ejemplo una pelota de plástico de forma esférica que nos daría la idea de superficie esférica y que unido con su interior seria la esfera.

ESFERA

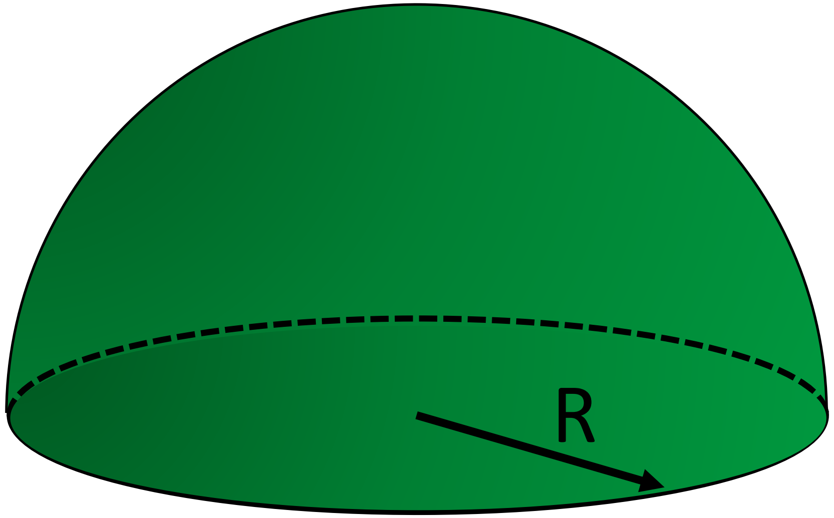
La esfera denominada también solido de revolución, por que se obtiene al girar un semicírculo 360° alrededor de una recta que contiene a su diámetro.



$$A_{SUP.ESF.} = 4\pi R^2$$

$$V_{ESF.} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

SEMIESFERA

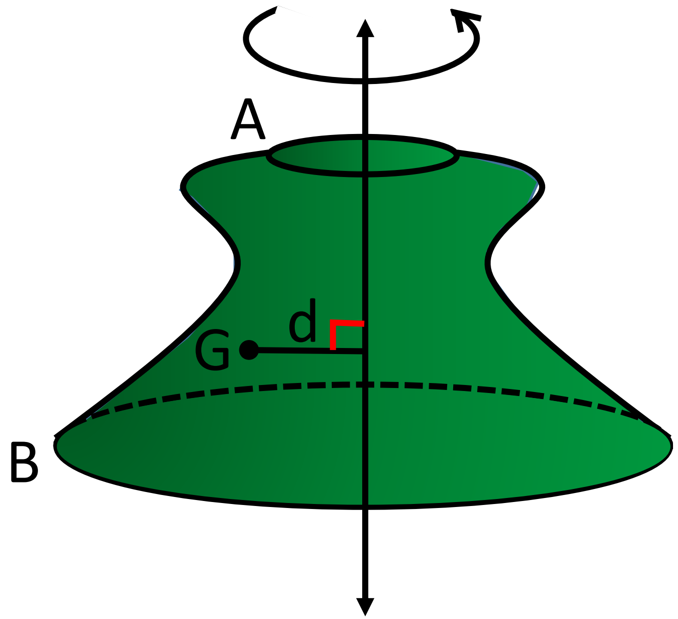


$$V_{SEM.ESF.} = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$A_{SEM.ESF.} = 3\pi R^2$$

Primer teorema de Pappus

Sirve para calcular el área de la superficie generada por una línea Coplanar



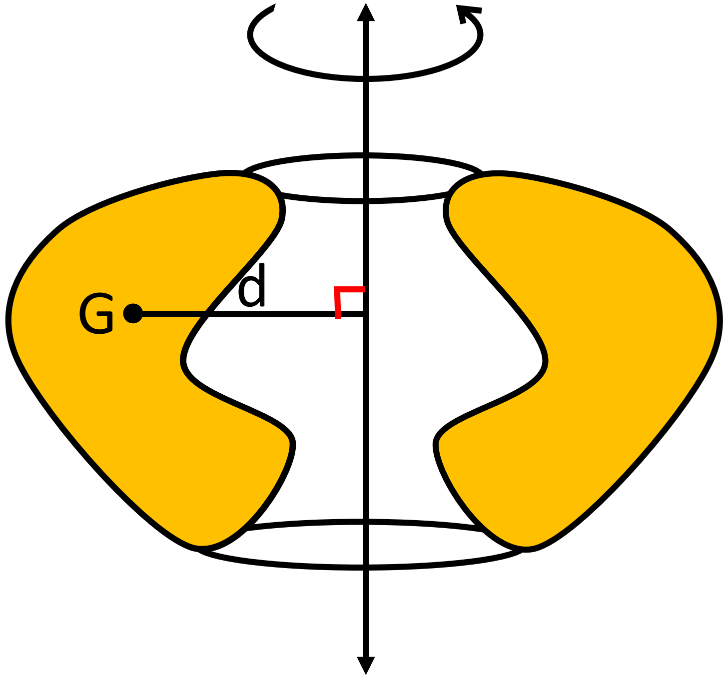
$$\boxed{A_{SG} = 2\pi dL}$$

G : *Centroide de la línea AB*

L : *Longitud de la línea AB*

Segundo teorema de Pappus

Sirve para calcular el volumen del sólido generado por una región plana Coplanar

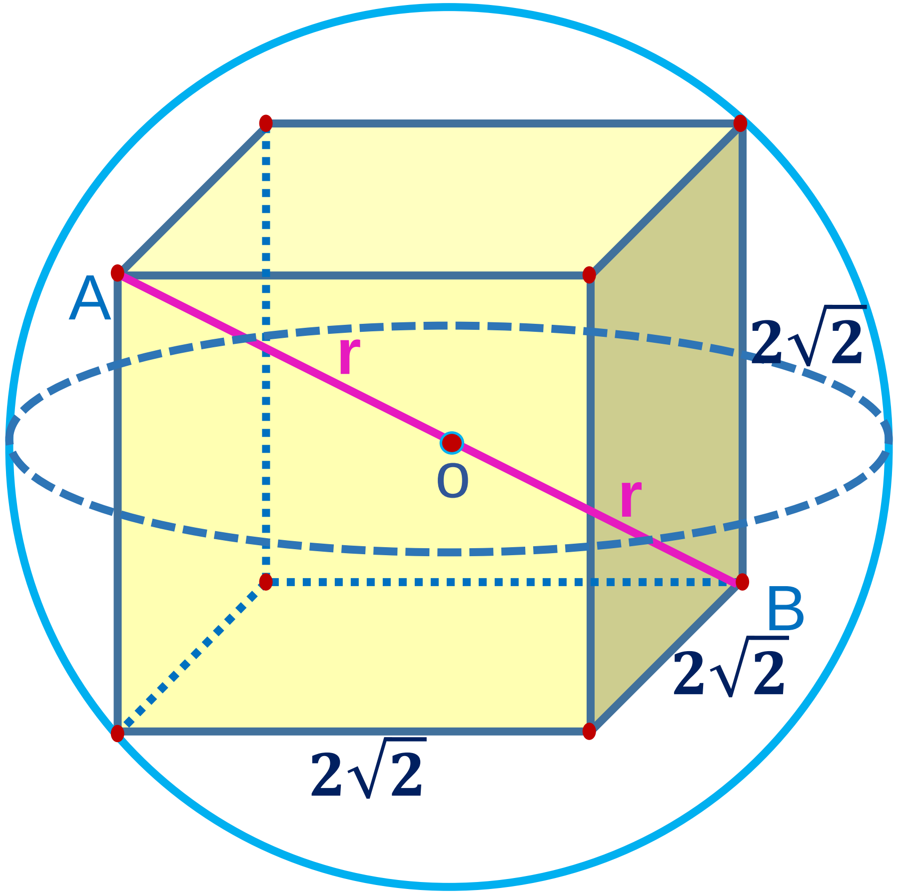


$$\boxed{V_{SG} = 2\pi dA}$$

G : *Centroide de la región plana.*

A : *Área de la región plana.*

1. Calcule el área de la superficie esférica circunscrita a un cubo cuya arista mide $2\sqrt{2}$.



Resolución

- En el hexaedro regular

$$2r = a\sqrt{3}$$

$$2r = (2\sqrt{2})\sqrt{3}$$

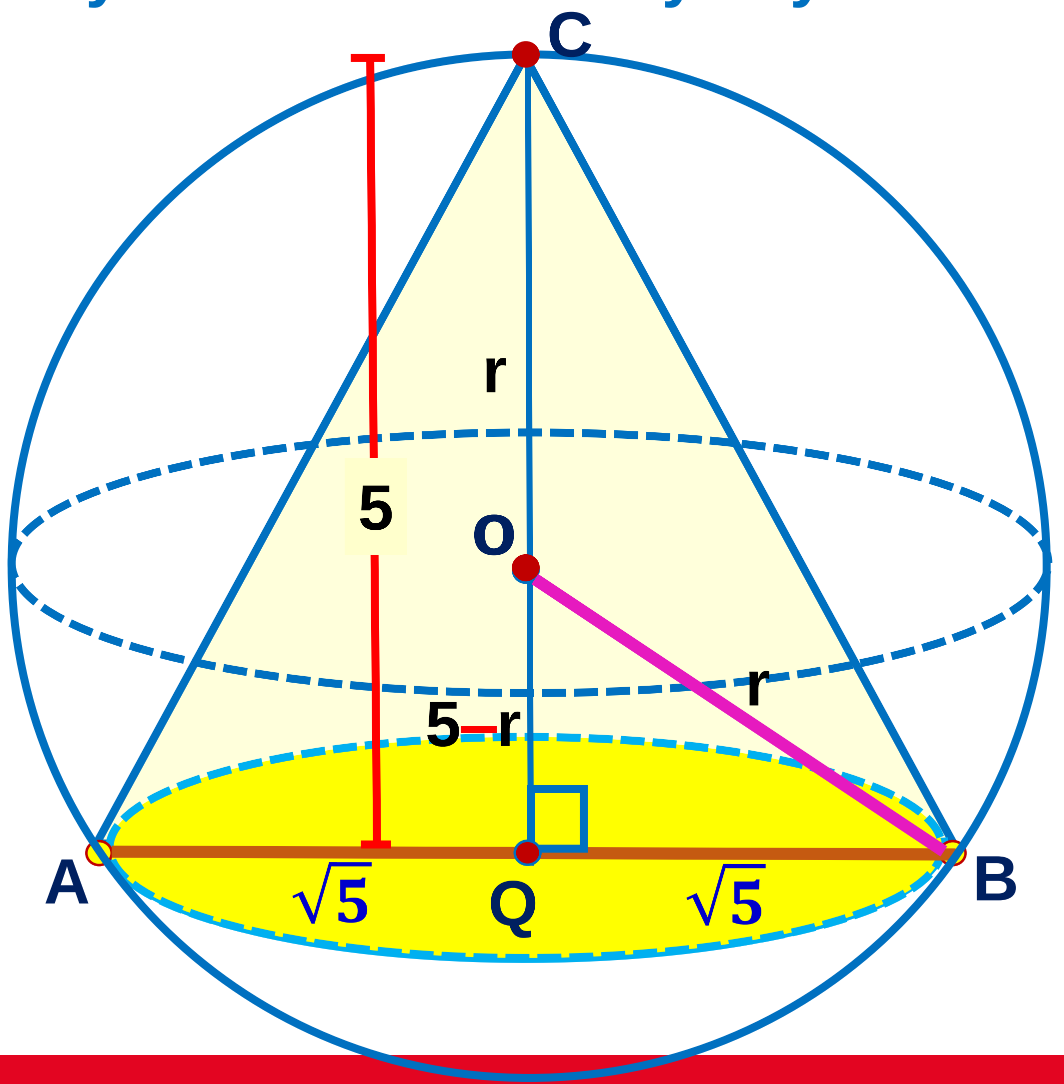
$$r = \sqrt{6}$$

- El área de la superficie esférica será

$$A_{SUP.ESF.} = 4\pi(\sqrt{6})^2$$

$$\boxed{A_{SUP.ESF.} = 24\pi}$$

2. Calcule el volumen de la esfera circunscrita a un cono circular recto cuya altura mide 5m y cuyo radio mide $\sqrt{5}$ m.



Resolución

Por Pitágoras en ΔOQB

$$r^2 = (5-r)^2 + (\cancel{\sqrt{5}})^{\cancel{2}}$$

$$\cancel{r^2} = 25 - 10r + \cancel{r^2} + 5$$

$$10r = 30$$

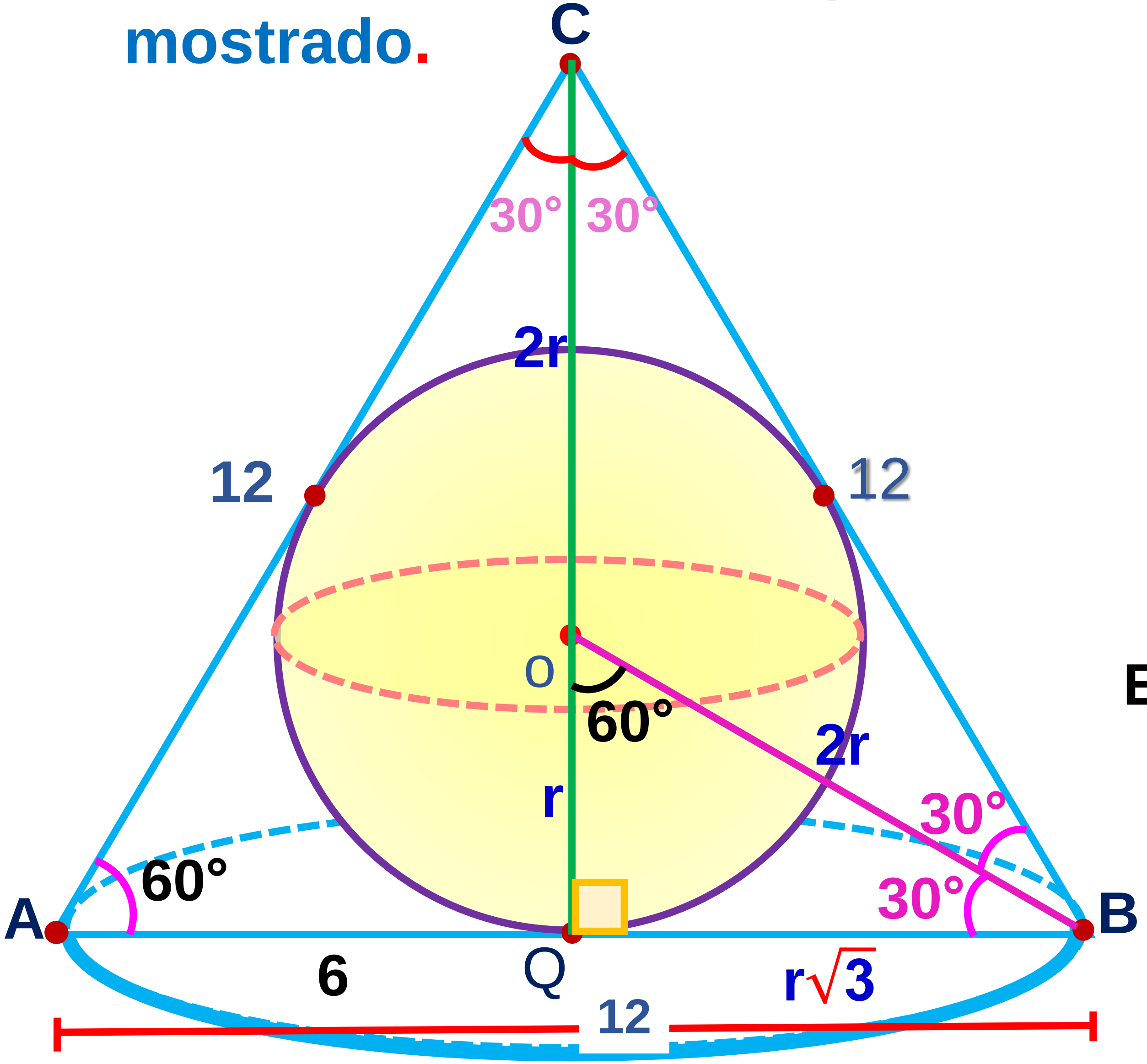
$$r = 3$$

El volumen de la esfera será

$$V_{ESF.} = \frac{4\pi 3^3}{3}$$

$$\boxed{V_{ESF.} = 36\pi m^3}$$

3. Calcule el área de la superficie esférica inscrita en el cono equilátero mostrado.



Resolución

En el ΔOQB notable, OB=2(OQ)

$$r\sqrt{3} = 6$$

$$r = \frac{6}{\sqrt{3}}$$

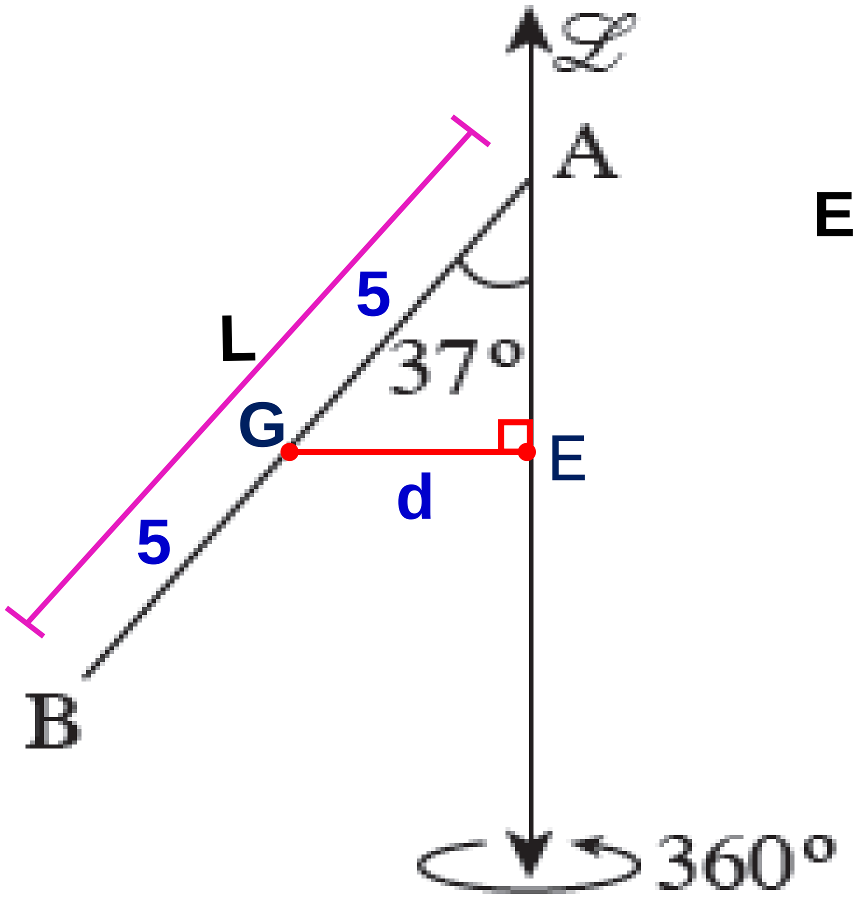
$$r = 2\sqrt{3}$$

El área de la superficie esférica será

$$A_{SUP.ESF.} = 4\pi(2\sqrt{3})^2$$

$$\boxed{A_{SUP.ESF.} = 48\pi u^2}$$

4. Calcule el área de la superficie generada por el segmento $\overline{AB}$ al girar 360° alrededor de la recta $\mathbb{L}$.



Resolución

El centroide de un segmento es su punto medio

AG = BG = 5

Calculamos la distancia d

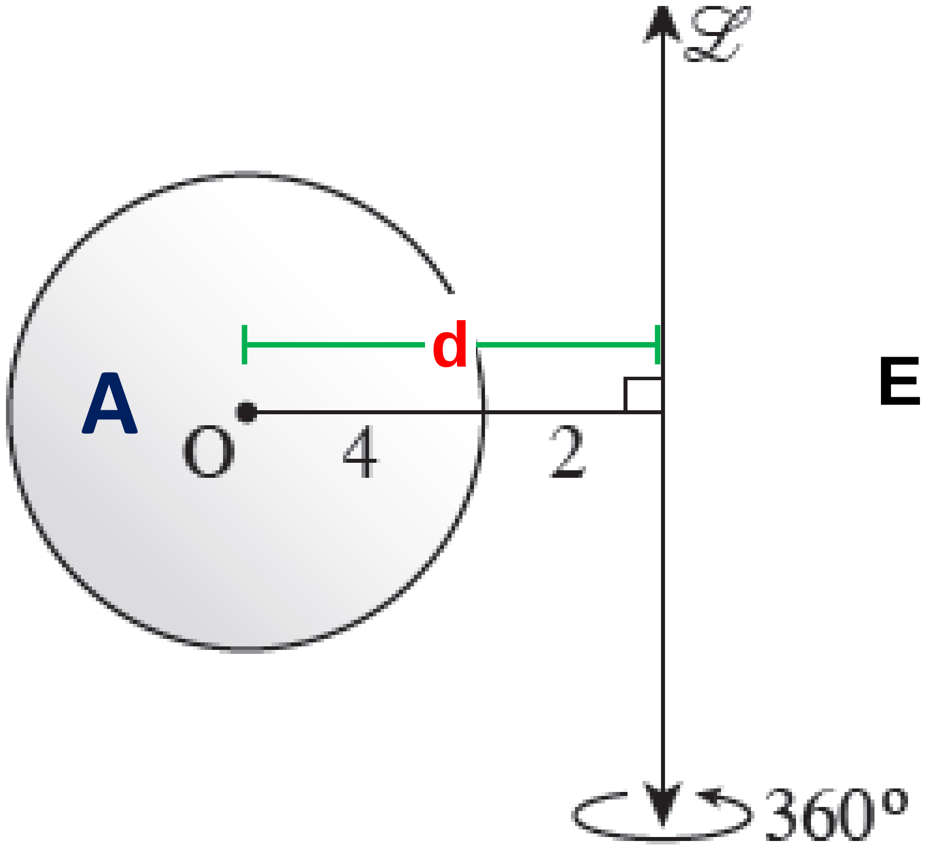
d=3

$$A_{S.G.} = 2\pi d L$$

$$A_{S.G.} = 2\pi . 3 . 10$$

$$\boxed{A_{S.G.} = 60\pi u^2}$$

5. Calcule el volumen del sólido generado por el círculo al girar 360° alrededor de la recta $\mathscr{L}$. (O es centro).



Resolución

El centroide es el punto O

d=6

El área de la región que gira será

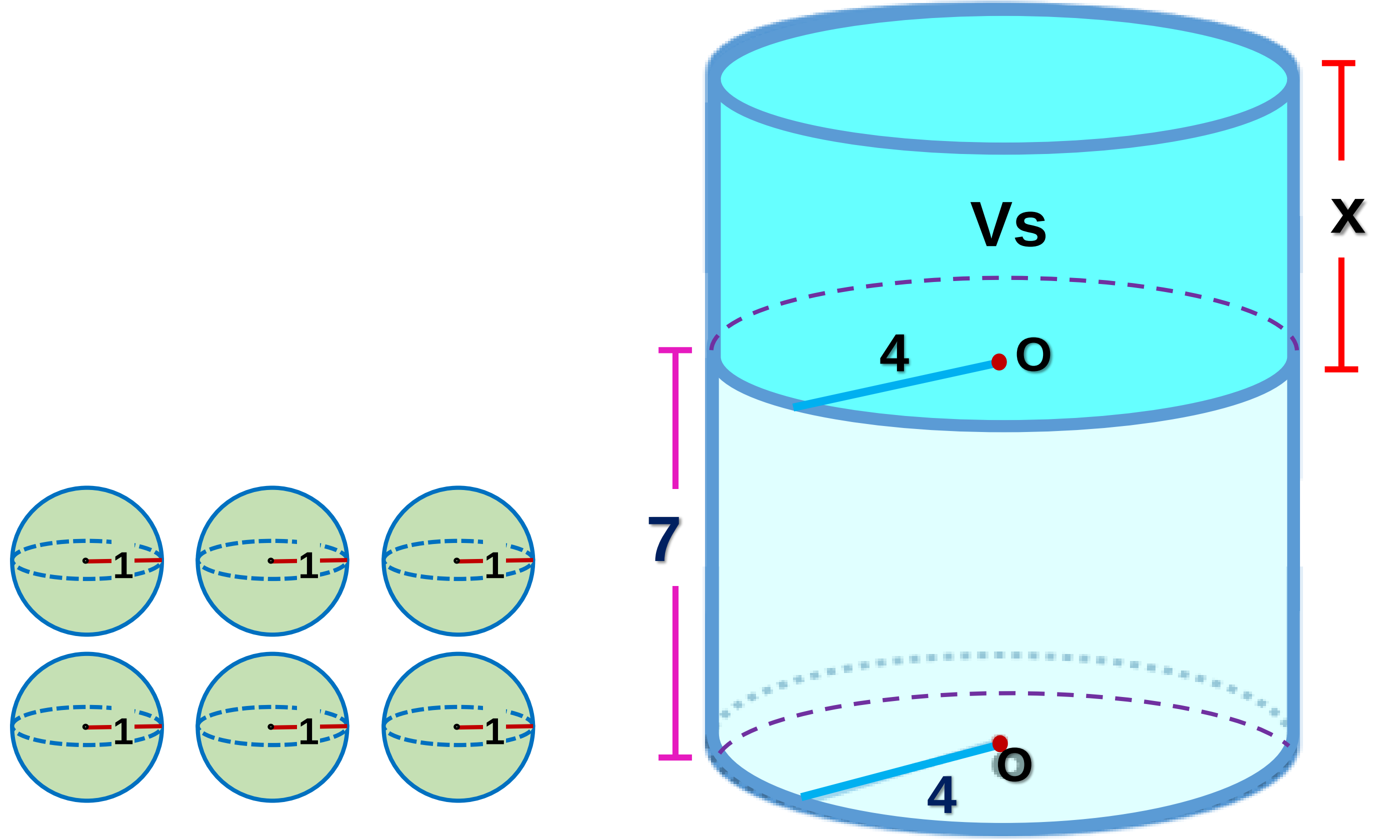
$$A_{REG.GIRA} = \pi 4^2$$

$$V_{S.G.} = 2\pi d A$$

$$V_{S.G.} = 2\pi . 6 . \pi 4^2$$

$$\boxed{V_{S.G.} = 192\pi^2 u^3}$$

6. Se tiene un vaso de vidrio en forma de cilindro circular recto, cuyo radio mide 4 cm; el cual contiene agua hasta una altura de 7 cm. Luego se hecha 6 trozos de hielo en forma de esferas de radio igual a 1 cm, con lo cual el agua sube al ras del vaso. Determine la altura total del vaso.



Resolución

Sea h la longitud de la altura del vaso

$$V_{6\ esferas} = Vs$$

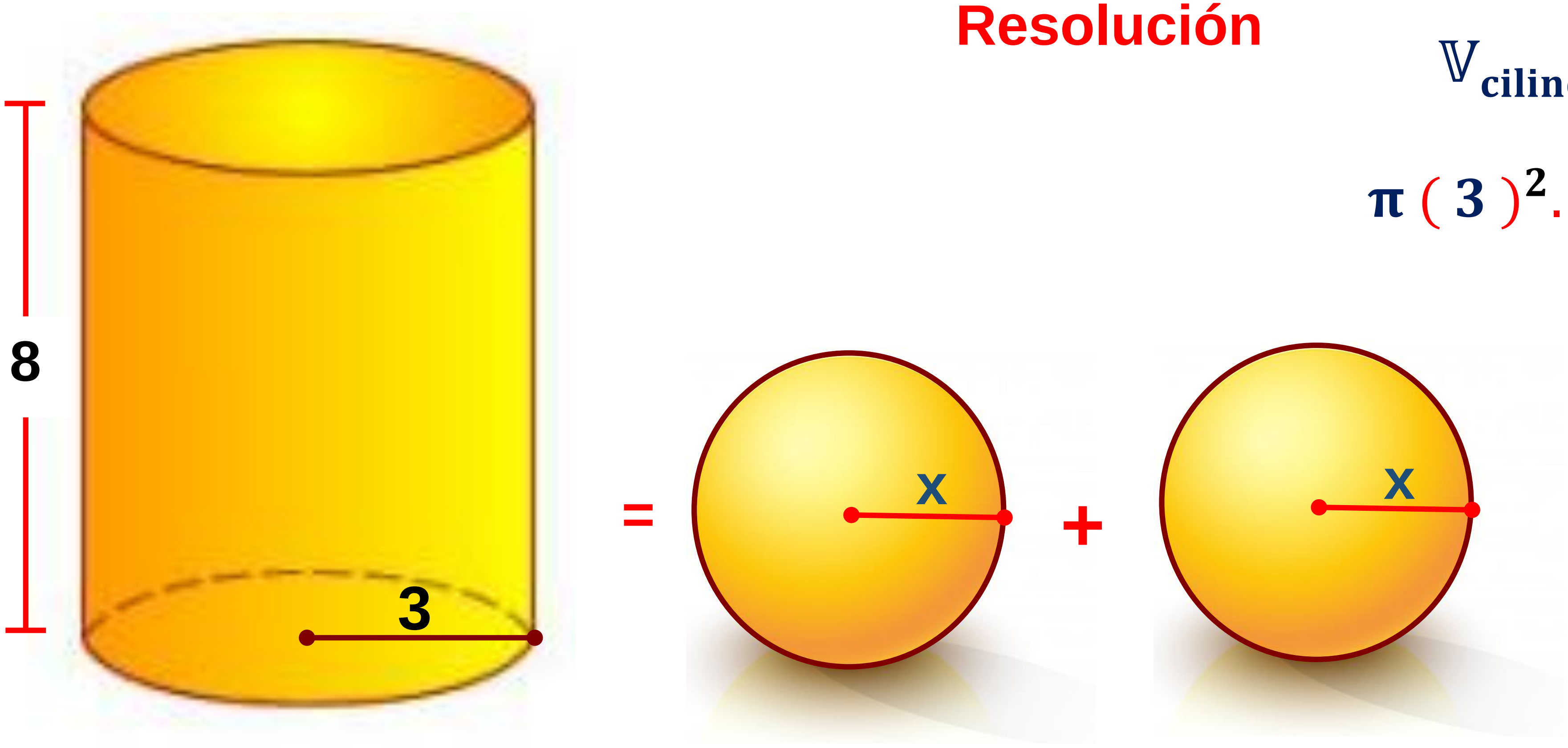
$$6 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \pi \cdot (4)^2 (x)$$

$$0{,}5 = x$$

$$h = x + 7$$

$$\boxed{h = 7{,}5\ cm}$$

7. Una pieza metálica tiene forma de cilindro circular recto de radio 3 cm y altura 8 cm. Luego se funde para construir dos esferas de radio de longitud *x*. Halle el valor de *x*.



Resolución

$$\mathbb{V}_{\text{cilindro}} = 2\left(\mathbb{V}_{\text{esfera}}\right)$$

$$\pi(3)^2 \cdot 8 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi(x)^3$$

$$3^3 = x^3$$

$$\boxed{x = 3\text{ cm}}$$