

ARITHMETIC

2023

Chapter 9

4th
SECONDARY

Divisibilidad I



 **SACO OLIVEROS**

HISTORIA DE LA DIVISIBILIDAD

Desde hace mucho tiempo, el hombre se ha visto ante la necesidad de tener que repartir cantidades de cosas entre personas, dándole a cada una el mismo número de unidades.

A través de la práctica el hombre descubrió que este problema a veces sí tenía solución y a veces no. Esto causó la búsqueda de cierta forma de resolver estos problemas dando inicio a la divisibilidad

La divisibilidad de los números es conocida desde tiempos remotos. Así, los hindúes ya conocían la divisibilidad por tres, siete y nueve y los egipcios conocían los números pares e impares.

El matemático griego Euclides demostró los teoremas básicos de la divisibilidad de números enteros.

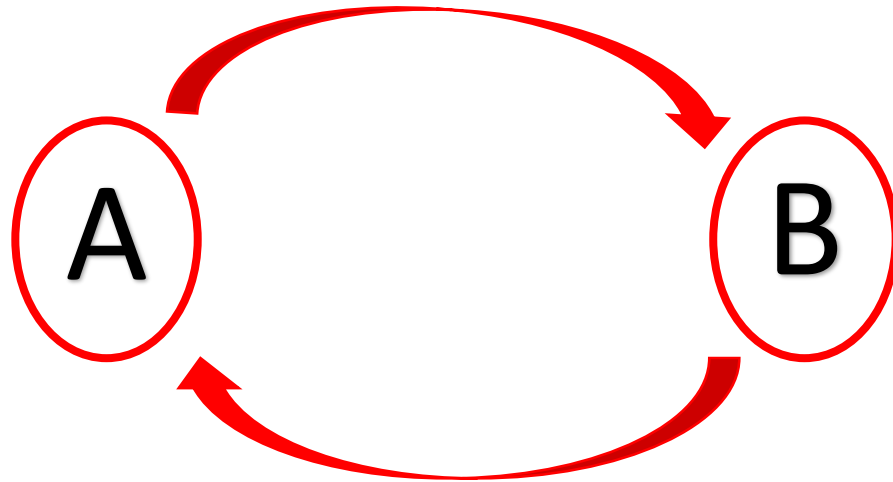
Ya posteriormente, el matemático francés Pascal (1623-1662) propuso las reglas para conocer la divisibilidad de cualquier número.

DIVISIBILIDAD I

Si la división de A entre B es exacta, entonces :

A es **MÚLTIPLO DE B**

A es **DIVISIBLE** por **B**



B es **DIVISOR** de **A**

Ejemplos:

Marque V o F ,según el caso :

* 24 es múltiplo de 6. (V)

* 8 es divisible por 2. (V)

* 6 es múltiplo de 12. (F)

* 14 es múltiplo de 3. (F)

* 0 es múltiplo de 7. (V)

HELICO THEORY

➤ **Múltiplo de un número :** Es todo aquella cantidad que contiene a otra cantidad, un número entero de veces.

Ejemplos:

* **Múltiplos de 6 :** 0 , 6 , 12 , 18 , 24 , ...

Múltiplos Positivos de 6 : 6 , 12 , 18 , 24 , 30 ,...

* **Múltiplos de 4 :** 0 , 4 , 8 , 12 , 16 , 20 ,...

Múltiplos positivos de 4 : 4 , 8 , 12 , 16 , 20 , ...

HELICO THEORY

TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

En general : $A \begin{array}{|l} B \\ \hline 0 \quad k \end{array}$

Donde : $A = B \times k$

$A \in \mathbb{Z}; B \in \mathbb{Z}^+; k \in \mathbb{Z}$



Módulo

Notación:

$$\overset{\circ}{A} = A \cdot k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$\overset{\circ}{A} \rightarrow \text{MÚLTIPLO DE } A.$

NÚMEROS NO DIVISIBLES

POR DEFECTO

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{120} \\ 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{10} \end{array}$$

$$123 = 12(10) + 3$$

$$123 = \overset{0}{12} + 3$$

POR EXCESO

$$\begin{array}{r} 123 \\ \underline{132} \\ 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ \underline{11} \end{array}$$

$$123 = 12(11) - 9$$

$$123 = \overset{0}{12} - 9$$

$$r_d + r_e = d$$

$$3 + 9 = 12$$

$$\triangleright \overset{0}{9} + 4 = \overset{0}{9} - 5$$

$$\triangleright \overset{0}{7} + 6 = \overset{0}{7} - 1$$

$$\triangleright \overset{0}{10} + 8 = \overset{0}{10} - 2$$

$$\triangleright \overset{0}{11} - 4 = \overset{0}{11} + 7$$

Propiedades

$$\blacklozenge \quad \overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} + \cdots + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$$

$$\blacklozenge \quad \overset{\circ}{n}^k = \overset{\circ}{n}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

$$\blacklozenge \quad \overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}$$

$$\blacklozenge \quad \overset{\circ}{n}k = \overset{\circ}{n}$$

$$\blacklozenge \quad (\overset{\circ}{n} + r)^k = \overset{\circ}{n} + r^k$$

$$\blacklozenge \quad (\overset{\circ}{n} - r)^k = \begin{cases} \overset{\circ}{n} + r^k & \leftrightarrow k: \text{par} \\ \overset{\circ}{n} - r^k & \leftrightarrow k: \text{impar} \end{cases}$$

$$\blacklozenge \quad (\overset{\circ}{n} + a)(\overset{\circ}{n} + b) \cdots (\overset{\circ}{n} + p) = \overset{\circ}{n} + a \times b \times \cdots \times p$$

*** SI UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE VARIOS MÓDULOS:**

A

$$\left. \begin{array}{l} N = \overset{0}{a} \\ N = \overset{0}{b} \\ N = \overset{0}{c} \end{array} \right\} N = \frac{\overset{0}{\text{MCM}(a, b, c)}}$$

B

$$\left. \begin{array}{l} N = \overset{0}{a \pm r} \\ N = \overset{0}{b \pm r} \\ N = \overset{0}{c \pm r} \end{array} \right\} N = \frac{\overset{0}{\text{MCM}(a, b, c)}}{\pm r}$$

Ejemplo :

¿ Cuántos múltiplos de 13 existen entre 70 y 826 ?

Resolution:

$$13^{\circ} = 13 \cdot k$$

$$70 < 13 \cdot k < 826$$

$$5,3... < k < 63,5...$$

$$k : 6 ; 7 ; 8 ; ; 63$$

$$\text{Múltiplos} = \left(\frac{63 - 6}{1} \right) + 1 = 58$$

RPTA : 58 múltiplos

1

HELICO PRACTICE

¿Cuántos múltiplos de 7, terminados en 4 existen entre 115 y 993?

Resolution

$$\overset{\circ}{7} = 7 \cdot k = \dots 4$$

└─→ ...2

Pero :

$$\frac{115}{7} < \frac{\cancel{7}k}{\cancel{7}} < \frac{993}{7}$$

$$14,4 < k < 141,8$$

Entonces : $k \rightarrow 22 ; 32 ; 42 ; 52 ; \dots ; 132$

$$\text{Múltiplos de 7} = \left(\frac{132 - 22}{10} \right) + 1 = 12$$

RPTA : 12 múltiplos

2

De la secuencia del 1 al 800

- ¿cuántos son múltiplos de 4?
- ¿cuántos son múltiplos de 7?
- ¿cuántos son múltiplos de 6 pero no de 5?

Dé como respuesta la suma de los resultados

POR DATO: 1; 2; 3; 4; ...; 800

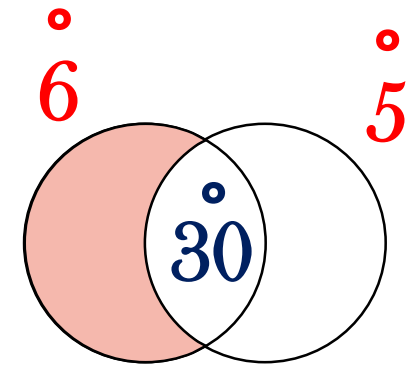
$$\overset{\circ}{4}: A = \frac{800}{4} = 200$$

$$\overset{\circ}{7}: B = \frac{800}{7} = 114,2 = 114$$

Resolution:

* $\overset{\circ}{6}$ pero no $\overset{\circ}{5}$

$$\begin{aligned} \text{➤ } \overset{\circ}{6} &= \frac{800}{6} = 133,3 \\ &= 133 \text{ múltiplos.} \end{aligned}$$



$$\text{M.C.M.}(6,5) = 30$$

$$\text{➤ } \overset{\circ}{30} = \frac{800}{30} = 26,6 = 26 \text{ múltiplos}$$

➤ Entonces los múltiplos de 6 ,pero no de 5 :

$$133 - 26 = 107$$

➤ Suma de Resultados :

$$= 200 + 114 + 107 = 421$$

RPTA : 421

3

Reduzca

$$F = (13 + 2)^3 (13 - 6) + (13 + 4)^2 (13 - 2)(13 + 1)$$

Resolution:

$$(13 + 8)(13 - 6) + (13 + 16)(13 - 2)(13 + 1)$$

$$(13 - 48) + (13 - 32)$$

$$13 - 48 + 13 - 32$$

$$13 - 80 = 13 - 2 = 13 + 11$$

RPTA :

$$13 + 11$$



Halle el residuo que se obtiene al dividir 688^{857} entre 7.

Resolution:

$$\begin{aligned}
 688^{857} &= (\overset{0}{7} + 2)^{857} \\
 &= \overset{0}{7} + 2^{857} \\
 &= \overset{0}{7} + (2^3)^{285} \cdot 2^2 \\
 &= \overset{0}{7} + (\overset{0}{7} + 1)^{285} \cdot 2^2 \\
 &= \overset{0}{7} + (\overset{0}{7} + 1) \cdot 4 \\
 &= \overset{0}{7} + \overset{0}{7} + 4 \\
 &= \overset{0}{7} + \textcircled{4}
 \end{aligned}$$

RPTA : 4

5

Si $\overline{ab}^a = \overset{\circ}{9} + 4$; $\overline{ab}^b = \overset{\circ}{9} + 5$
 halle el residuo que se obtiene
 al dividir $\overline{ab}^{\overline{ab}}$ entre 9.

Resolution :

$$\begin{aligned}
 \overline{ab}^{\overline{ab}} &= (\overline{ab})^{10a+b} = (\overline{ab})^{10a} (\overline{ab})^b \\
 &= (\overline{ab}^a)^{10} (\overline{ab})^b \\
 &= (\overset{\circ}{9} + 4)^{10} (\overset{\circ}{9} + 5) \\
 &= (\overset{\circ}{9} + 4) (\overset{\circ}{9} + 5) \\
 &= \overset{\circ}{9} + 20 \\
 &= \overset{\circ}{9} + 2
 \end{aligned}$$

RPTA :	2
--------	---

6

En un congreso participaron 600 personas. De los asistentes varones se observó que $\frac{3}{7}$ eran abogados, los $\frac{4}{9}$ eran médicos y los $\frac{2}{5}$ eran economistas. ¿Cuántas damas asistieron al congreso?

Resolution:

Total: 600 personas

Varones: $\left. \begin{array}{c} 0 \\ 7 \\ 0 \\ 9 \\ 0 \\ 5 \end{array} \right\}$

$$\text{Varones} = \frac{0}{\text{M.C.M.}(7; 9; 5)}$$

$$\text{Varones} = \frac{0}{315}$$

$$\text{Varones} = 315$$

DATO :

$$\text{Varones} + \text{Mujeres} = 600$$

$$315 + \text{Mujeres} = 600$$

$$\text{Mujeres} = 285$$

RPTA :	285
---------------	------------

7

En una fiesta donde asistieron 280 personas entre damas caballeros y niños, la cantidad de caballeros que no bailaban en un momento dado era igual a la cuarta parte del número de damas; la cantidad de niños asistentes era igual a la séptima parte del número de damas. Si la quinta parte de las damas estaban vestidas de negro. ¿Cuántas damas no bailaban en dicho momento?

Resolution

TOTAL : 280 personas

Damas: $\left. \begin{array}{l} 4 \\ 7 \\ 5 \end{array} \right\}$

$$\text{Damas} = \frac{0}{\text{mcm}(4; 5; 7)}$$

$$\text{Damas} = 140 \text{ (}\underline{140}; 280; 420; \dots\text{)}$$

➤ Damas = 140

➤ Niños = $\frac{140}{7} = 20$

➤ Caballeros = $280 - (140 + 20) = 120$

➤ Caballeros que no bailan = $\frac{140}{4} = 35$

➤ Caballeros que bailan = $120 - 35 = 85$

➤ Damas que bailan = 85

➤ Damas que no bailan = $140 - 85 = 55$

RPTA : 55