



ALGEBRA

Chapter 14

4th
SECONDARY

Ecuaciones Polinomiales



 **SACO OLIVEROS**

HELICO

MOTIVATING



La edad de Carla es $(a^3 + b^3 + c^3)$ años; donde a ; b y c son las raíces de la ecuación: $x^3 + 2x - 4 = 0$
¿Cuál será la edad de Carla dentro de 4 años?

RPTA: 16 años

HELICO THEORY

CHAPTER 14

ECUACIONES POLINOMIALES

I) ECUACIÓN

~~POLINOMIAL~~ Ecuaciones de grado “n” de la forma:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad a_0 \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$: son los coeficientes de $P(x)$

➤ $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

➤ $P(x) = 4x^5 + 7x^3 - 8x - 3 = 0$



//) Raíz de un Polinomio

Diremos que “**a**” es una raíz de un polinomio $P(x)$ si y sólo si $P(\mathbf{a})=0$.

Ejemplo:

$$\text{Sea : } P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Se observa que “**1**” es raíz de $P(x)$, pues:

$$P(\mathbf{1}) = (\mathbf{1})^3 - 2(\mathbf{1})^2 - \mathbf{1} + 2$$

$$P(\mathbf{1}) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{P(\mathbf{1})=0}$$

III) PROPIEDADES

- 1) Toda ecuación polinomial de grado “n” tiene exactamente “n” raíces.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Presenta 3 raíces}$$

$$x^5 + 7x^3 - 8x - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Presenta 5 raíces}$$

- 2) Sea: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$
- Si $a + \sqrt{b}$ es raíz de $P(x)$ \longleftrightarrow $a - \sqrt{b}$ también es raíz de $P(x)$

Si: $5 + \sqrt{3}$ es raíz de $P(x)$ \rightarrow $5 - \sqrt{3}$ es raíz de $P(x)$

IV) TEOREMA DE CARDANO

Sea la ecuación :

$$P(x) = a_0^+ x^n + a_1^- x^{n-1} + a_2^+ x^{n-2} + a_3^- x^{n-3} + \dots + a_n^{(-1)^n} = 0$$

cuyas raíces son: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

SUMA DE RAÍCES

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

SUMA DE PRODUCTOS BINARIOS

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \dots = \frac{a_2}{a_0}$$

SUMA DE PRODUCTOS TERNARIOS

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots = -\frac{a_3}{a_0}$$

Y así sucesivamente hasta llegar al “producto de raíces”

PRODUCTOS DE RAÍCES

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

EJEMPLOS APLICATIVOS

$$1) \text{ Sea: } 2x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-7}{2}$$

$$\rightarrow x_1x_2x_3 = \frac{-1}{2}$$

$$2) \text{ Sea: } 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x_1x_2 + \dots + x_3x_4 = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\rightarrow x_1x_2x_3 + \dots + x_2x_3x_4 = \frac{-7}{2}$$

$$\rightarrow x_1x_2x_3x_4 = \frac{-8}{2} = -4$$

HELICO PRACTICE

CHAPTER 14



PROBLEMA 1

Resuelva la ecuación polinomial:

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$$

Resolución Factorizando el polinomio por divisores binómicos

$$\frac{\text{Div (30)}}{\text{Div (1)}} = \pm \left\{ \frac{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30}{1} \right\} = \pm \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

$x = 3$	1	-6	-1	30
		3	-9	-30
	1	-3	-10	0

$$(x^2 - 3x - 10)(x - 3) = 0$$

$$(x - 5)(x + 2)(x - 3) = 0$$

$x_1 = 5$
 $x_2 = -2$
 $x_3 = 3$

$$C.S = \{-2; 3; 5\}$$

**PROBLEMA 2**

Sean x_1 , x_2 y x_3 las raíces de la ecuación $x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = 0$

Halle el valor de $T = \frac{(x_1x_2x_3)^{x_1+x_2+x_3}}{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}$

Resolución

$$\overset{+}{x^3} - \overset{-}{2x^2} + \overset{+}{5x} + \overset{-}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$\Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 5$$

$$\Rightarrow x_1x_2x_3 = -3$$

Reemplazando en T:

$$\Rightarrow T = \frac{(-3)^2}{5}$$

$$\Rightarrow T = \frac{9}{5}$$

**PROBLEMA 3**

Halle el valor de $a + b$, si la ecuación: $x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$ tiene como raíces a 5 y 2

Resolución

$$\overset{+}{x^3} + \overset{-}{ax^2} + \overset{+}{bx} + \overset{-}{10} = 0$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a}{1} = -a$$

$$\rightarrow x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = \frac{b}{1} = b$$

$$\rightarrow x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -10$$

$$\text{dato: } x_1 = 5 \quad y \quad x_2 = 2$$

$$\rightarrow 10 \cdot x_3 = -10 \quad \text{luego} \quad x_3 = -1$$

Reemplazando:

$$\bullet \quad x_1 + x_2 + x_3 = -a$$

$$5 + 2 - 1 = -a \quad \rightarrow \quad a = -6$$

$$\bullet \quad x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = b$$

$$(5)(2) + (2)(-1) + (5)(-1) = b$$

$$10 - 2 - 5 = b \quad \rightarrow \quad b = 3$$

piden: $a + b$:

$$a + b = -6 + 3$$

Rpta

$$a + b = -3$$

PROBLEMA 4

Se tiene a x_1, x_2 y x_3 como raíces de la ecuación: $x^3 + 7x + 5 = 0$, efectúe:

$$M = \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Resolución

$$\overset{+}{x^3} + \overset{-}{0x^2} + \overset{+}{7x} + \overset{-}{5} = 0$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 7$$

$$\rightarrow x_1x_2x_3 = -5$$

Recordar Si: $a + b + c = 0$

$$\rightarrow \begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc \\ a^2 + b^2 + c^2 &= -2(ab + bc + ac) \end{aligned}$$

$$\rightarrow M = \frac{3x_1x_2x_3}{-2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}$$

$$\rightarrow M = \frac{3(-5)}{-2(7)} = \frac{15}{14}$$



PROBLEMA 5

Si a , b y c son raíces de la ecuación $x^3 + 4x^2 + 2 = 0$. Evalúe

$$M = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$

Resolución

$$\overset{+}{x^3} + \overset{-}{4x^2} + \overset{+}{0x} + \overset{-}{2} = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c = -4$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = 0$$

$$\Rightarrow abc = -2$$

Del dato: $M = \frac{a}{bc} \cdot \frac{a}{a} + \frac{b}{ac} \cdot \frac{b}{b} + \frac{c}{ab} \cdot \frac{c}{c} \Rightarrow M = \frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc}$

Recordar: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$$(-4)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(0)$$

$$16 = a^2 + b^2 + c^2$$

Reemplazando $M = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{16}{-2} = -8$

Rpta

$$M = -8$$

PROBLEMA 6 La edad de Lucio en años es $\frac{T}{2}$; donde T está dado por el siguiente problema: " Si a ; b y c son las raíces de : $x^3 - 2x^2 - 3x - 5 = 0$ Halle $T = a^2 + b^2 + c^2$ " ¿Cuál es la edad de Lucio?

Resolución

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & - \\ x^3 & - & 2x^2 & - & 3x & - & 5 = 0 \end{array}$$

➡ $a + b + c = 2$

➡ $ab + bc + ca = -3$

➡ $abc = 5$

RECORDAR:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

Reemplazando

$$(2)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{T} + 2(-3)$$

➡ $4 = T - 6$

$$10 = T$$

Piden:

$$\frac{T}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

RPTA: LUCIO TIENE 5 AÑOS



PROBLEMA 7 Siendo a , b y c las raíces de: $2x^3 + 3x - 12 = 0$ dada la expresión $P = ab(a + b)^3 + ac(a + c)^3 + bc(b + c)^3$ donde P representa la edad del hijo del profesor Arturo. ¿Cuál es dicha edad?

Resolución

$$\overset{+}{2}x^3 + \overset{-}{0}x^2 + \overset{+}{3}x - \overset{-}{12} = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow abc = \frac{12}{2} = 6$$

Recordar: Si $a + b + c = 0$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$$

Del dato: $P = ab(-c)^3 + ac(-b)^3 + bc(-a)^3$

$$P = -abc^3 - acb^3 - bca^3$$

$$\Rightarrow P = -abc(c^2 + b^2 + a^2)$$

Hallamos: $c^2 + b^2 + a^2$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2 \left(\frac{3}{2} \right) = -3$$

Reemplazamos $P = -6(-3) = 18$

Rpta: El hijo del profesor tiene 18 años