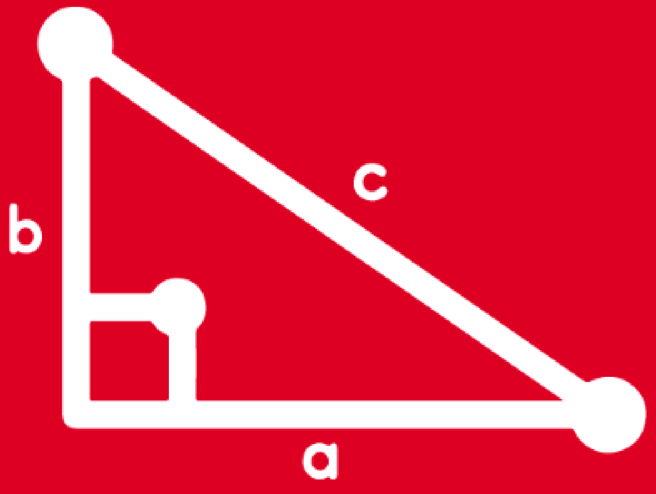
# TRIGONOMETRY

## Chapter 24

**5th**
**SECONDARY**




**RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS**

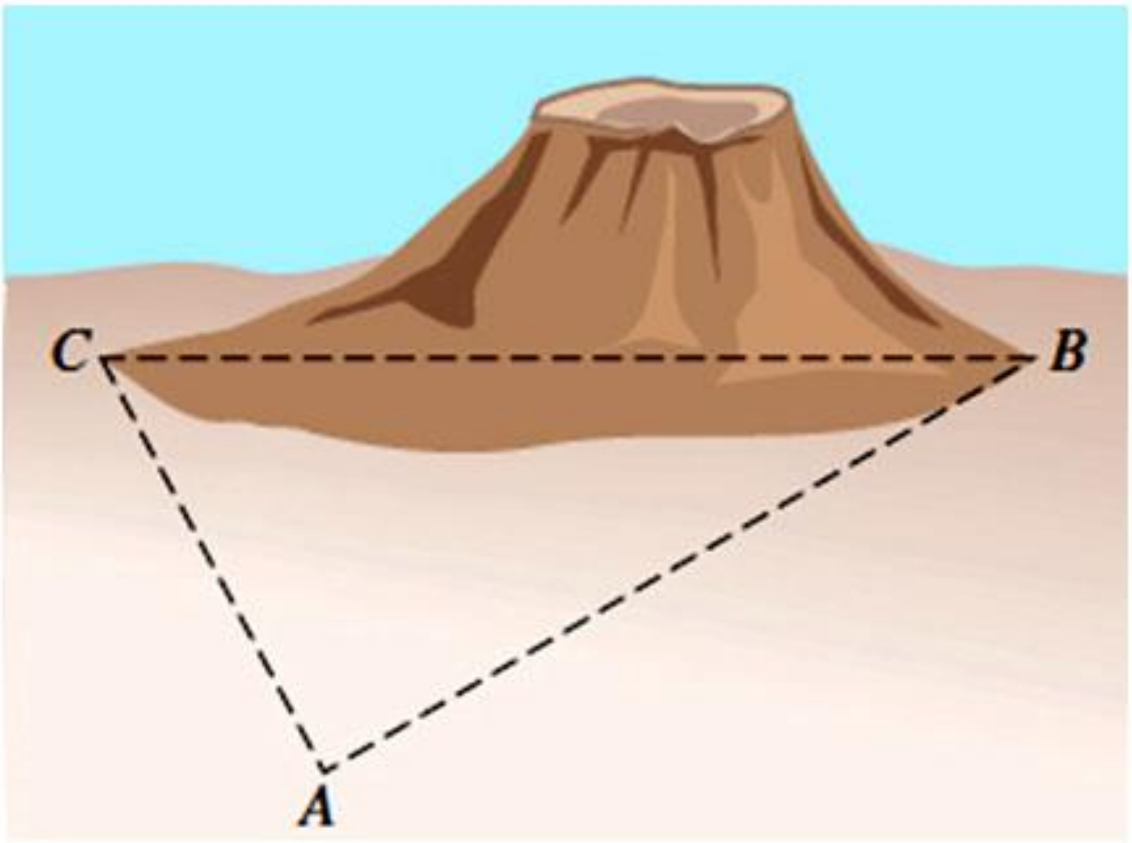
SACO OLIVEROS

# HELICOMOTIVACIÓN

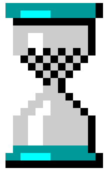
La **ley de senos** y **ley de cosenos** se usan para calcular los lados y ángulos de un triángulo.

**Ejemplo:**

Un geólogo desea determinar la distancia **BC** a través de la base del cono de ceniza volcánica . Para ello logra medir las distancias **AC** y **AB** obteniendo los valores de $8\,km$ y $10\,km$ respectivamente , además la medida del ángulo **BAC** es 53º.




¿Podrías calcular la distancia **BC** pedida?



# HELICOTEORÍA - 1

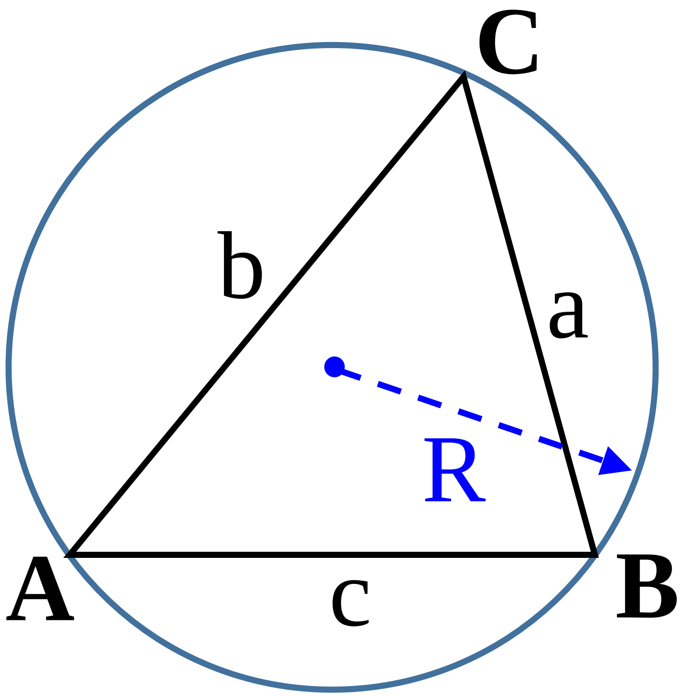
## RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

### A. LEY DE SENOS:

En todo triángulo, las medidas de sus lados son proporcionales a los senos de sus ángulos opuestos.

$$\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{b}{\text{sen}B}=\frac{c}{\text{sen}C}=2R$$

R es el circunradio del $\Delta ABC$




También:

$a=2R\text{sen}A$ $\quad$ $b=2R\text{sen}B$ $\quad$ $c=2R\text{sen}C$

# HELICOTEORÍA - 2

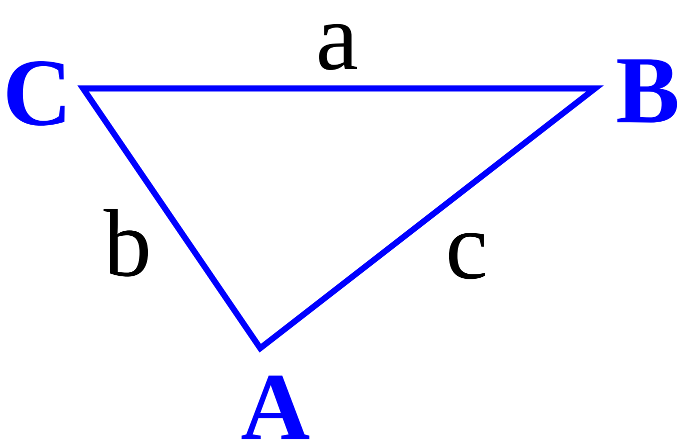
## B. LEY DE COSENOS:

En todo triángulo, un lado al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble del producto de dichos lados por el coseno del ángulo que estos forman.

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A} \quad \ldots (*)$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C}$$




**… en la HELICOMOTIVACIÓN**

$b = 8 \; ; \; c = 10 \; ; \; A = 53^\circ \; ; \; ¿a?$

Usando **(*)** :

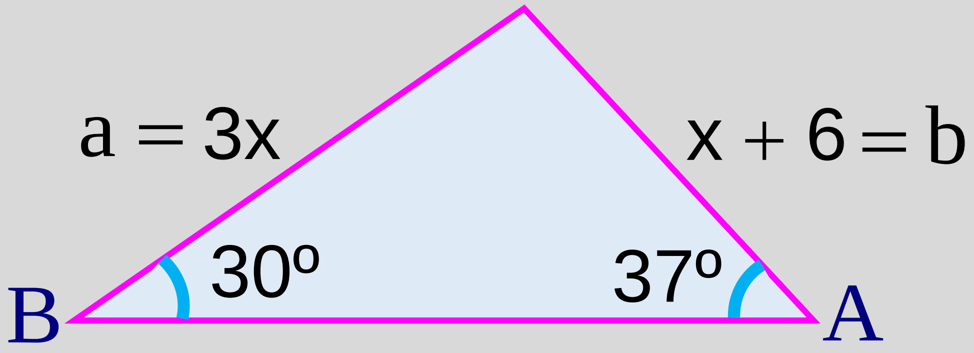
$$a^2 = (8)^2 + (10)^2 - 2(8)(10).\cos 53^\circ$$

$$a^2 = 68 \Rightarrow a = \sqrt{68} = 8{,}25$$

$\therefore$ $\boxed{\text{La distancia BC es } 8{,}25\,\text{km}}$

# PROBLEMA 1

De la figura, halle el valor de x.




## Resolución

### Ley de senos

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}} \Rightarrow \frac{3x}{\text{sen}37^0} = \frac{x+6}{\text{sen}30^0}$$

$$\Rightarrow 3x.\,\text{sen}30° = (x+6).\,\text{sen}37°$$

$$\Rightarrow \cancel{3}x.\frac{1}{2} = (x+6).\frac{\cancel{3}}{5}$$

$$\Rightarrow 5x = 2(x+6)$$

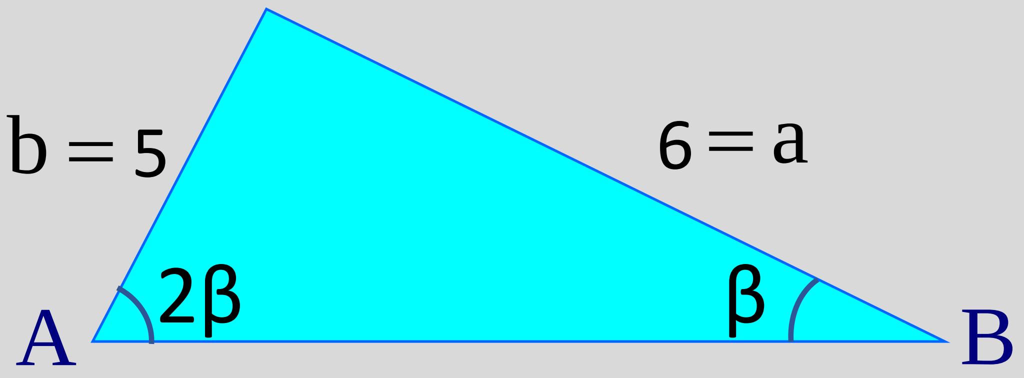
$$\Rightarrow 5x = 2x + 12$$

$$\Rightarrow 3x = 12$$

$$\therefore \boxed{x = 4}$$

# PROBLEMA 2

De la figura, calcule $T = \sec(\beta + 7°)$.




## Resolución

### Ley de senos

$$\boxed{\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}} \Rightarrow \frac{6}{\text{sen}2\beta} = \frac{5}{\text{sen}\beta}$$

Por identidad del ángulo doble:

$$\frac{\cancel{6}}{\cancel{2}\cancel{\text{sen}\beta}\cos\beta} = \frac{5}{\cancel{\text{sen}\beta}}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{\cos\beta} = 5 \quad \Rightarrow \cos\beta = \frac{3}{5} \rightarrow \beta = 53°$$

Calculamos $T = \sec(\beta + 7°)$

$$\Rightarrow T = \sec(53° + 7°) = \sec 60°$$

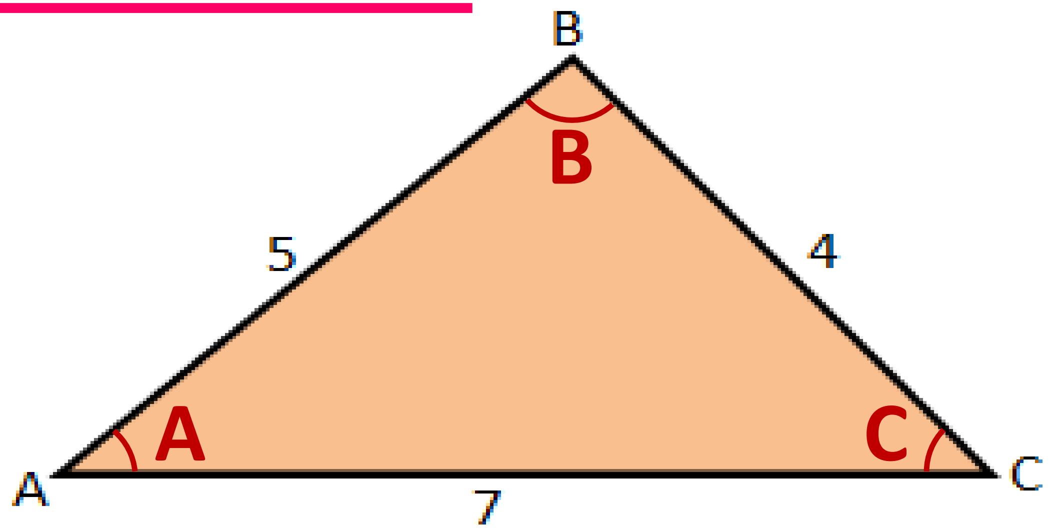
$\therefore \boxed{T = 2}$

# PROBLEMA 3

En un triángulo ABC, se cumple AB = 5u, BC = 4u y AC = 7u. Calcule

$$E=\frac{\operatorname{sen}B\,(\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}C)}{\operatorname{sen}^2C}$$

## Resolución




**Ley de senos**

$$\frac{4}{\operatorname{sen}A}=\frac{7}{\operatorname{sen}B}=\frac{5}{\operatorname{sen}C}=2R$$

$$\operatorname{sen}A=\frac{4}{2R}\ ;\ \operatorname{sen}B=\frac{7}{2R}\ ;\ \operatorname{sen}C=\frac{5}{2R}$$

Reemplazamos en E :

$$E=\frac{\frac{7}{2R}\left(\frac{4}{2R}+\frac{5}{2R}\right)}{\left(\frac{5}{2R}\right)^2}\Rightarrow E=\frac{\frac{63}{\cancel{4R^2}}}{\frac{25}{\cancel{4R^2}}}$$

$$\therefore\ \boxed{E=\frac{63}{25}}$$

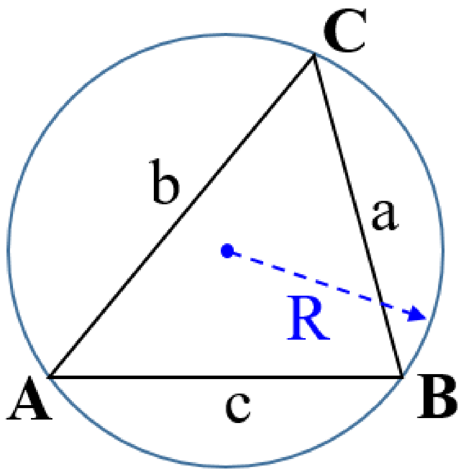
# PROBLEMA 4

Calcule la longitud de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC si: $\dfrac{2a}{senA}+\dfrac{3b}{senB}-\dfrac{c}{senC}=16m$

## Resolución

**Ley de senos**

$$a = 2RSenA$$
$$b = 2RSenB$$
$$c = 2RSenC$$




En el **dato**:

$$\frac{2(2R\cancel{senA})}{\cancel{senA}}+\frac{3(2R\cancel{senB})}{\cancel{senB}}-\frac{2R\cancel{senC}}{\cancel{senC}}=16m$$

$$\Rightarrow 2(2R)+3(2R)-(2R)=16m$$

$$\Rightarrow 8R=16m$$

$$\Rightarrow R=2m$$

Calculamos:

Longitud de la circunferencia circunscrita

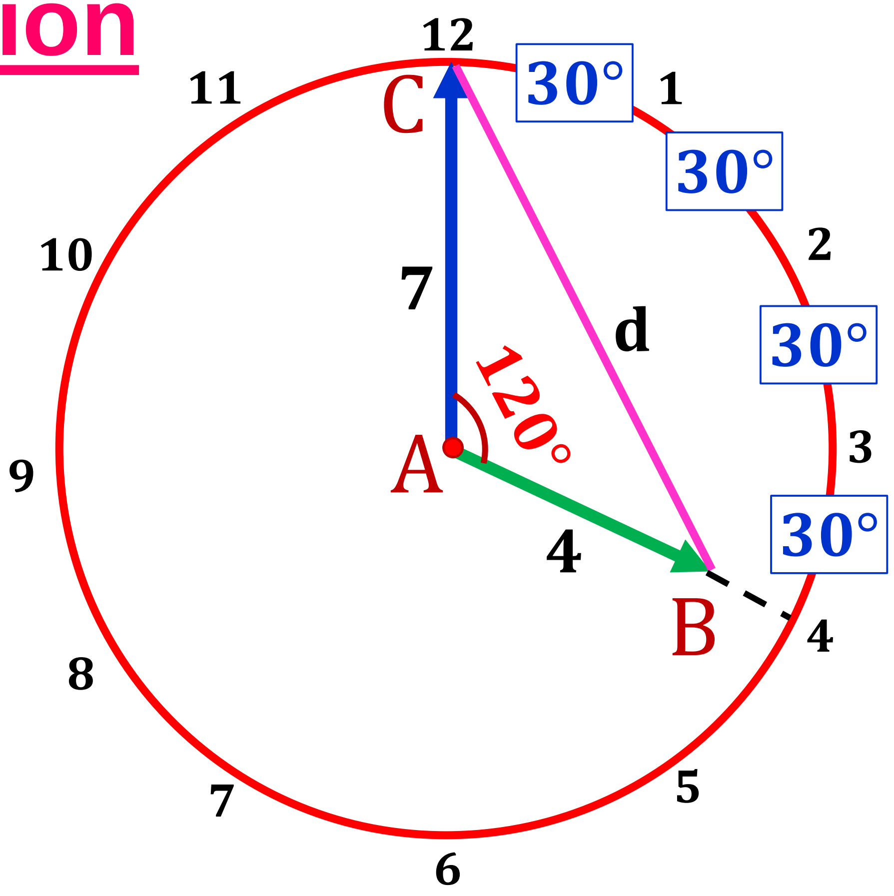
$$L_{\circ}=2\pi R \Rightarrow L_{\circ}=2\pi(2m)$$

$$\therefore \boxed{L_{\circ}=4\pi m}$$

# PROBLEMA 5

Las manecillas de un reloj (horario y minutero) miden 4 cm y 7 cm respectivamente. Calcule la distancia entre sus puntas a las 4 de la tarde.

## Resolución




**Ley de cosenos:** $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$$d^2 = 7^2 + 4^2 - 2(7)(4)\cos 120°$$

$$d^2 = 49 + 16 - 56\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$d^2 = 65 + 28$$

$$d^2 = 93$$

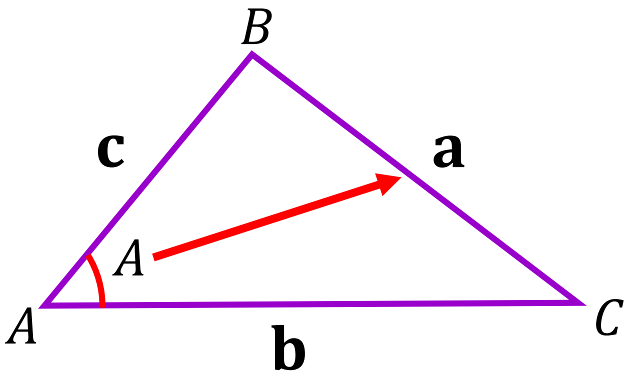
$$\Rightarrow d = \sqrt{93}$$

$\therefore$ $\boxed{\mathbf{d = \sqrt{93}\ cm}}$

# PROBLEMA 6

$$(a-b)(a+b)=c^2+\sqrt{3}bc$$

## Resolución




**Dato:**

$$(a+b)(a-b)=c^2+\sqrt{3}bc$$

$$a^2-b^2=c^2+\sqrt{3}bc$$

$$\Rightarrow a^2=b^2+c^2+\sqrt{3}bc \ldots(\text{I})$$

Ley de cosenos:

$$\boxed{a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A} \ldots(\text{II})$$

Igualamos (I) y (II):

$$\cancel{b^2+c^2}+\sqrt{3}bc=\cancel{b^2+c^2}-2bc.\,\mathbf{cosA}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\cancel{bc}=-2\cancel{bc}.\,\mathbf{cosA}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}=-2\mathbf{cosA} \Rightarrow \mathbf{cosA}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si $x+y=180°$

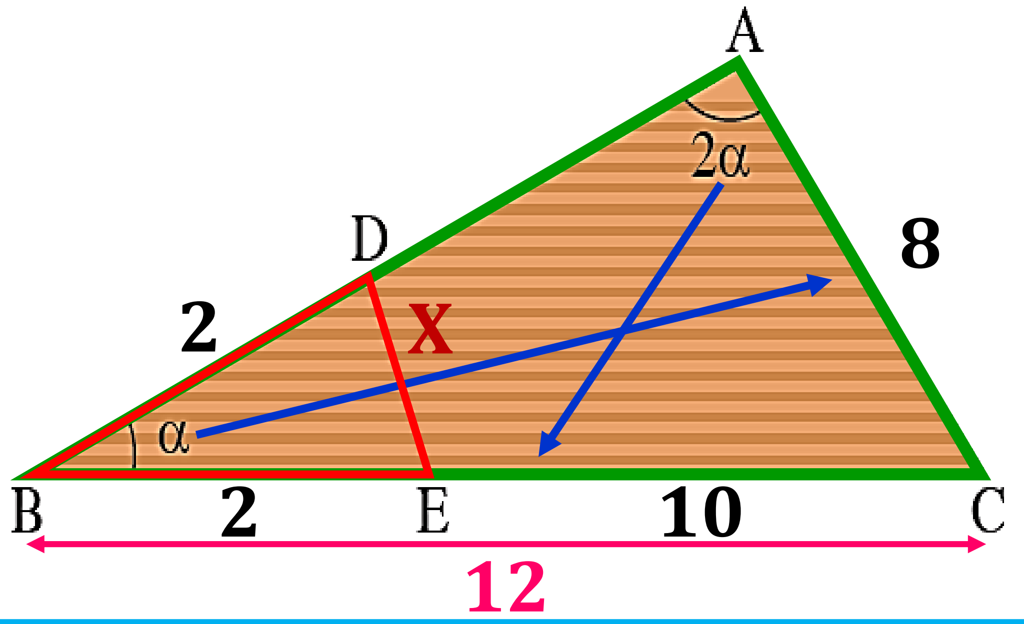
$\mathbf{cosx=-cosy}$

$$\Rightarrow \mathbf{A=180°-30°}$$

$\therefore$ $\boxed{\mathbf{A=150°}}$

# PROBLEMA 7

El carpintero José tiene una pequeña pieza de madera triangular ABC; la cual desea dividir en dos partes mediante un corte $\overline{\mathrm{DE}}$. Si $\mathrm{AC} = 8\ \mathrm{cm}$, $\mathrm{CE} = 10\ \mathrm{cm}$ y $\mathrm{BE} = \mathrm{BD} = 2\ \mathrm{cm}$ ; determine la longitud del corte $\overline{\mathrm{DE}}$.




## Resolución

**ΔABC**: Ley de senos

$$\frac{\cancelto{3}{12}}{\boxed{\mathrm{sen}2\alpha}} = \frac{\cancelto{2}{8}}{\mathrm{sen}\alpha} \qquad \rightarrow 3 = 4\cos\alpha$$

$$\frac{3}{2\cancel{\mathrm{sen}\alpha}\cos\alpha} = \frac{2}{\cancel{\mathrm{sen}\alpha}} \qquad \boxed{\cos\alpha = \frac{3}{4}}$$

**ΔBDE**: Ley de cosenos

$$\mathrm{x}^2 = 2^2 + 2^2 - 2(2)(2)\cos\alpha$$

$$\mathrm{x}^2 = 8 - \cancelto{2}{8}\left(\frac{3}{\cancelto{1}{4}}\right)$$

$$\mathrm{x}^2 = 2 \rightarrow \mathrm{x} = \sqrt{2} \quad \therefore \quad \boxed{\mathbf{DE} = \sqrt{2}\ \mathbf{cm}}$$