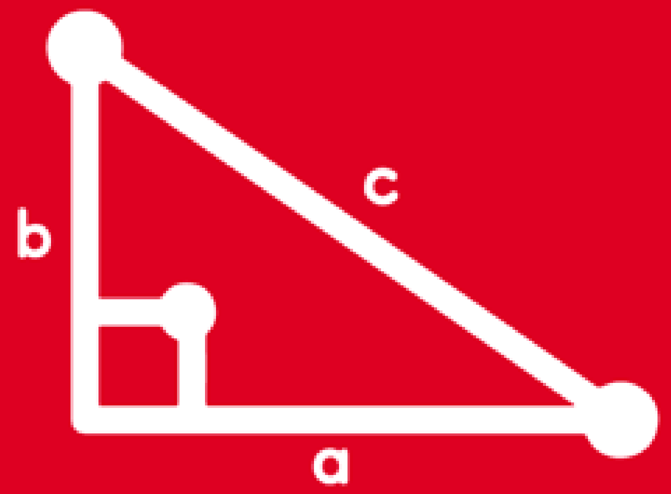
TRIGONOMETRY

Chapter 16



5th
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES DEL ÁNGULO DOBLE

SACO OLIVEROS

HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

- El padre de la trigonometría es hiparco: nació en Nicea de bithynia actualmente iznik, al noroeste de Turquía nació alrededor del año 190 A.C. efectuó sus primeras observaciones astronómicas en su ciudad natal y más tarde se marchó a la isla de Rodas en la zona suroeste del Mar Egeo, fue aquí donde realizó sus principales trabajos, algunos historiadores lo sitúan como un astrónomo visitante en Alejandría y también fue ahí donde realizó otros importantes trabajos, Este genio de la antigüedad vivió en el periodo conocido como Helenismo.

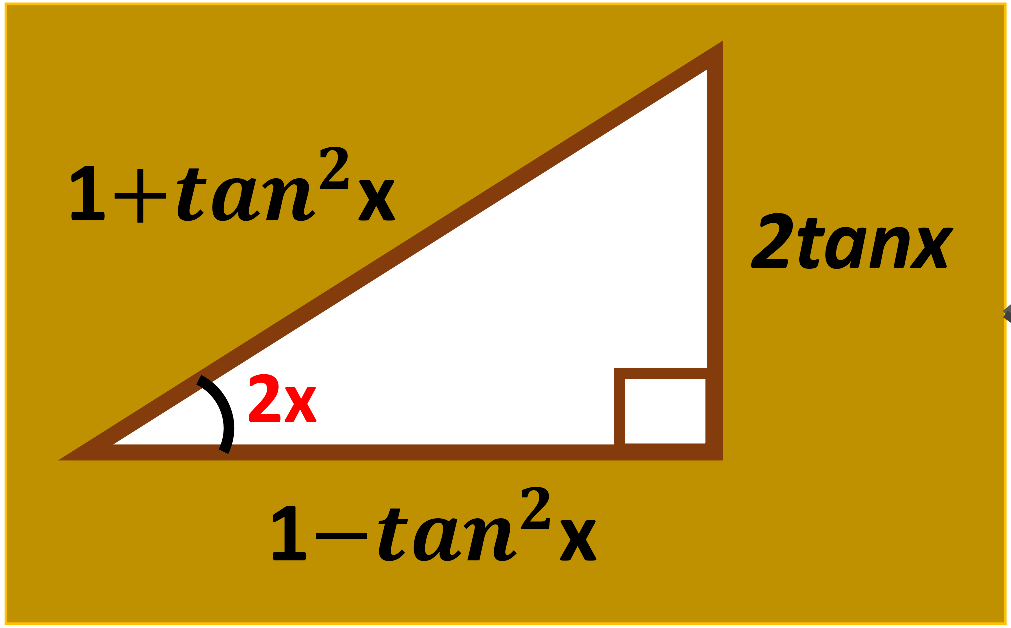
IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES DEL ÁNGULO DOBLE

I. IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN

$\cos(2x) =$

- $2\cos^2(x) - 1 \rightarrow 2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$
- $1 - 2\text{sen}^2(x) \rightarrow 2\text{sen}^2(x) = 1 - \cos(2x)$

II. TRIÁNGULO DEL ÁNGULO DOBLE



$$sen2x = \frac{2tanx}{1+tan^2x}$$

$$cos2x = \frac{1-tan^2x}{1+tan^2x}$$

III. IDENTIDADES AUXILIARES

$$\cot x - \tan x = 2\cot(2x)$$

$$\cot x + \tan x = 2\csc(2x)$$

1. Simplifique la expresión

$$E = (\cot x + \tan x)\text{sen}2x$$

RESOLUCIÓN

Recordar:

cotx + tanx = 2csc(2x)

$$E = \underbrace{(\cot x + \tan x)}_{2\csc 2x}\text{sen}2x$$

$$E = 2\underbrace{\csc 2x . \text{sen}2x}_{1}$$

$$\therefore \boxed{E = 2}$$

2. Si para un ángulo agudo θ se cumple que

$$\frac{1-\cos 2\theta+\text{sen}2\theta}{1+\cos 2\theta+\text{sen}2\theta}=\frac{1}{5};\ \text{calcule sen}2\theta$$

RESOLUCIÓN

$$\frac{\overbrace{1-\cos 2\theta}^{2\text{sen}^2\theta}+\overbrace{\text{sen}2\theta}^{2\text{sen}\theta\cos\theta}}{\underbrace{1+\cos 2\theta}_{2\cos^2\theta}+\underbrace{\text{sen}2\theta}_{2\text{sen}\theta\cos\theta}}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{\cancel{2}\,\text{sen}\theta(\cancel{\text{sen}\theta+\cos\theta})}{\cancel{2}\cos\theta(\cancel{\cos\theta+\text{sen}\theta})}=\frac{1}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{1}{5}$$

Recordar:

$$\text{sen}2\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

Calculamos: sen2θ

$$\text{sen}2\theta=\frac{2\left(\frac{1}{5}\right)}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{{}_{1}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}\right)^{1}}{{}_{5}\left(\frac{\cancel{26}}{\cancel{25}}\right)^{13}}$$

$$\therefore\ \text{sen}2\theta=\frac{5}{13}$$

3. Al copiar de la pizarra la expresión $1+\cos 80°$, un estudiante cometió un error y escribió $\text{sen}80°$. Calcule la razón entre lo que estaba escrito en la pizarra y lo copió el estudiante.

RESOLUCIÓN

Recordar:

$$2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

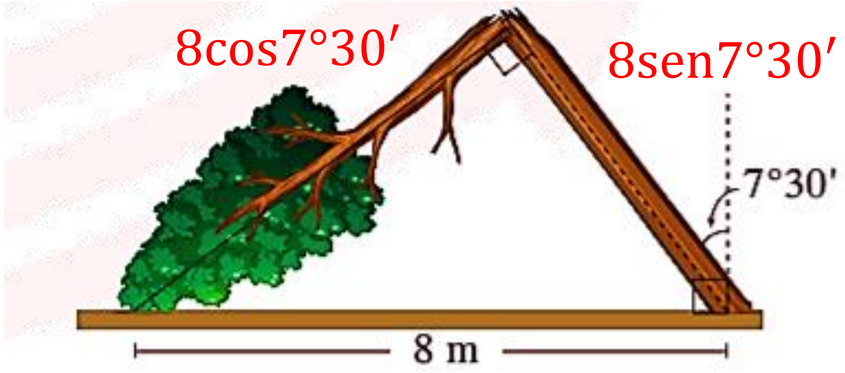
Debió escribir →

Escribió →

$$\frac{\overbrace{1+\cos 80°}^{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}40°}}{\underbrace{\text{sen}80°}_{\cancel{2}\text{sen}40°\cancel{\cos}40°}} \rightarrow \frac{\cos 40°}{\text{sen}40°}$$

$$\therefore\ \boxed{\cot 40°}$$

4. Un árbol, al caer, se inclina 7°30’ respecto a la vertical y luego se rompe generando una sombra de 8 m , tal como se muestra en la figura.



Si $4\sqrt{4+\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ m , es la altura original del árbol. Calcule a + b

RESOLUCIÓN

Recordar: $(\text{senx}+\text{cosx})^2=1+\text{sen}2x$

Del gráfico: $8\text{sen}7°30'+8\cos 7°30'=4\sqrt{4+\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

$$\Rightarrow 2(\text{sen}7°30'+\cos 7°30')=\sqrt{4+\sqrt{a}-\sqrt{b}}$$

Al cuadrado: $4\underbrace{(\text{sen}7°30'+\cos 7°30')^2}=4+\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$$4\,(1+sen15°)=4+\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$4+4\text{sen}15°=4+\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\cancel{4}+\cancel{4}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\cancel{4}}\right)=\cancel{4}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\sqrt{6}-\sqrt{2}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow a=6\,;b=2$$

$$\therefore a+b=8$$

5. Calcule el valor de: $E=\dfrac{\cot\left(\dfrac{\pi}{12}\right)+\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)}{\cot\left(\dfrac{\pi}{8}\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)}$

RESOLUCIÓN

$$E=\frac{cot\left(\frac{\pi}{12}\right)+tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{cot\left(\frac{\pi}{8}\right)-tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$E=\frac{\cancel{2}csc\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cancel{2}cot\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$E=\frac{csc30°}{cot45°}$$

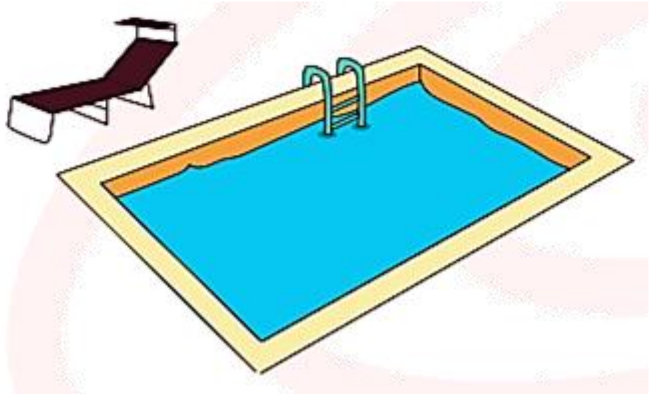
$$E=\frac{2}{1}$$

$$\therefore\ \boxed{E=2}$$

$\cot x+\tan x=2\csc(2x)$

$\cot x-\tan x=2\cot(2x)$

6. El señor Castillo compra una casa en el distrito de La molina; en la parte posterior de la vivienda se ubica una piscina rectangular cuyas longitudes de dos lados adyacentes son (3A) m y (4B) m, además la piscina tiene una profundidad uniforme de 2 m.



Si
A = (cot40° + tan40°)cos10° y
B = (cot35°– tan35°)cot20°
Calcule el volumen de agua necesario para llenar la piscina.

RESOLUCIÓN

$$A = \underbrace{(\cot 40° + \tan 40°)}\underbrace{\cos 10°}$$

$$A = 2\underbrace{\csc 80° . \operatorname{sen} 80°}_{1} \rightarrow A = 2$$

$$B = \underbrace{(\cot 35° - \tan 35°)}\underbrace{\cot 20°}$$

$$B = 2\underbrace{\cot 70° . \tan 70°}_{1} \rightarrow B = 2$$

$$\text{Volumen piscina} = (3A)(4B)2$$
$$= (6)(8)(2)$$

$$\therefore \text{Volumen} = 96\ m^3$$

7. Simplifique y evalúe para $x = \frac{\pi}{8}$

$$M = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

$$\text{sen }(2x) = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos (2x) = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

RESOLUCIÓN

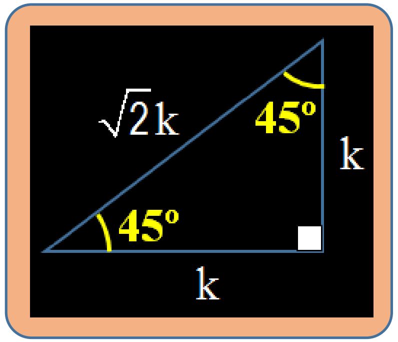
$$M = \frac{2tanx}{1+tan^2x} + \frac{1+tan^2x}{1-tan^2x}$$

$$M = sen2x + \sec 2x$$

$$M = sen\cancel{2}\left(\frac{\pi}{\cancel{8}}\right) + sec\cancel{2}\left(\frac{\pi}{\cancel{8}}\right)$$

$$M = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) + sec\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$M = sen45° + sec45°$$



$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$$

$$\therefore \boxed{M = \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$