MATHEMATICAL REASONING

Chapter 7

5th
SECONDARY

INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS II

SACO OLIVEROS

HELICO THEORY

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Se denomina Ecuación Diofántica (en recuerdo a Diofanto de Alejandría) a aquella ecuación algebraica con coeficientes enteros, generalmente de varias variables, definidas en el conjunto de los $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{N}$, es decir, sus soluciones son números enteros.

Ejemplos

$$11x + 7y = 90$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$7x + y + xy = 41$$

TENGA EN CUENTA

- Por tratarse de problemas contextualizados solo veremos ecuaciones diofánticas lineales cuyas variables $\in \mathbb{Z}^+$.

$$\boldsymbol{ax + by = c.}$$

$$\boldsymbol{ax + by + cz = d.}$$

$$\boldsymbol{ax + by + cxy = d.}$$

Donde: $\boldsymbol{a; b; c; d: coeficientes}$

$\boldsymbol{x; y; z: variables}$

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

DETERMINACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

- CRITERIO DE MULTIPLICIDAD

  Se emplea cuando el resultado es múltiplo de uno de los coeficientes de los sumandos.

Ejemplo

$$\overbrace{3x}^{\dot{3}} + \overbrace{4y}^{\dot{3}} = \overbrace{33}^{\dot{3}}\ ;\ \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+$$

x	y
7	3
3	6

TENGA EN CUENTA

- PRINCIPIO DE DIVISIBILIDAD

  $\dot{a} \pm \dot{a} = \dot{a}$;

  si a es no nulo

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Veamos algo más en el ejemplo.

Ejemplo

$$\overbrace{3x}^{\dot{3}} + \overbrace{4y}^{\dot{3}} = \overbrace{33}^{\dot{3}} \;;\; \{x;y\} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\begin{array}{ccc} & x & y & \\ & \downarrow & \downarrow & \\ -4 & 7 & 3 & +3 \\ & 3 & 6 & \end{array}$$

OBSERVACIÓN

Mientras una de las variables (x) disminuye en tantas unidades como el coeficiente de su vecina (y), esta aumenta en tantas unidades como el coeficiente de x.

TENGA EN CUENTA

- Si bien se indica que $\{x;y\} \in \mathbb{Z}^+$, según el contexto del problema, podría incluirse la solución:

  $x = 11\;;\;\; y = 0$

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

- ## CRITERIO DE MULTIPLICIDAD

Sebastián compra lápices a S/.3 cada uno y lapiceros de S/.7 soles cada uno. Si gastó 91 soles exactamente comprando ambos artículos, ¿de cuántas maneras diferentes pudo Sebastián realizar la compra?

$$\overbrace{3a}^{\overset{\circ}{7}} + \overbrace{7b}^{\overset{\circ}{7}} = \overbrace{91}^{\overset{\circ}{7}}$$

	a	b	
	7	10	
$+7$	14	7	-3
$+7$	21	4	-3
$+7$	28	1	-3

4 SOLUCIONES

$$\therefore N° \ de \ maneras \ diferentes = 4$$

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

DETERMINACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

- **CRITERIO DE LA ÚLTIMA CIFRA**

  Se emplea cuando uno de los coeficientes de los sumandos es 5 o termina en cifra 5.

Ejemplo

$$3x + 5y = 37 \ ; \ \{x; y\} \in \mathbb{Z}^{+}$$

Resolución

Multiplicamos por 2 toda la ecuación

$$\overbrace{6x}^{\dots 4} + \overbrace{10y}^{\dots 0} = \overbrace{74}^{\dots 4}$$

x	y
4	5
9	2
$+5$	-3

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

DETERMINACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

- CRITERIO DE FACTORIZACIÓN

Se emplea cuando en los sumandos se encuentran las variables en operaciones de adición y multiplicación.

Ejemplo

Factor común: y

$$x + 3y + xy = 74 \quad ; \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+ \quad ; y > x$$

Factor común: x

Factorizo x $\quad x(y+1) + 3y = 74$

(+3) m.a.m $\quad x(y+1) + 3y + 3 = 74 + 3$

$\quad x(y+1) + 3(y+1) = 77$

Factorizo $(y+1)$ $\quad (y+1)(x+3) = 7(11)$

$\therefore x = 4; \quad y = 10$

RESOLUCIÓN DE LA PRÁCTICA

PROBLEMA 1

Halle el máximo valor de x en $3x + 5y = 70$ si $x, y \in \mathbb{N}$

RESOLUCIÓN

OBSERVACIÓN

X máximo $\longrightarrow$ Y mínimo

$$3x + 5y = 70$$

$$\underbrace{3(x)}_{60} + 5(\,2\,) = 70$$

$$\therefore\ \mathbf{X = 20}$$

PROBLEMA 2

Una persona compró pelotas, a S/21 la unidad; medias, a S/15 la unidad y gorros, a S/35 la unidad. Si gastó S/219, ¿cuántos artículos compró?

OBSERVACIÓN

CRITERIO DE DIVISIBILIDAD DEL 3

Suma de cifras es 3°

$3^\circ + 3^\circ + 3^\circ = 3^\circ$

$21 = 3(7) = 3^\circ$

$15 = 3(5) = 3^\circ$

$219 = 3(73) = 3^\circ$

RESOLUCIÓN

ARTÍCULO	CANTIDAD	COSTO UNIDAD
PELOTAS	p	21
MEDIAS	m	15
GORROS	g	35

GASTO TOTAL:

$$\overbrace{21p}^{3^\circ} + \overbrace{15m}^{3^\circ} + \overbrace{35g}^{3^\circ} = \overbrace{219}^{3^\circ}$$

$$21p + 15m + 35(3) = 219$$

$$21p + 15m = 114$$

$$7(4) + 5(2) = 38$$

TOTAL DE ARTÍCULOS $\therefore$ $X = 9$

PROBLEMA 3

¿De cuántas maneras diferentes se puede pagar una deuda de S/200 con billetes de S/10 y S/20, únicamente?

RESOLUCIÓN

a

b

$$10\,a + 20\,b = 200$$

$$1\,a + 2\,b = 20$$

a	b
18	1
16	2
14	3
⋮	⋮
2	9

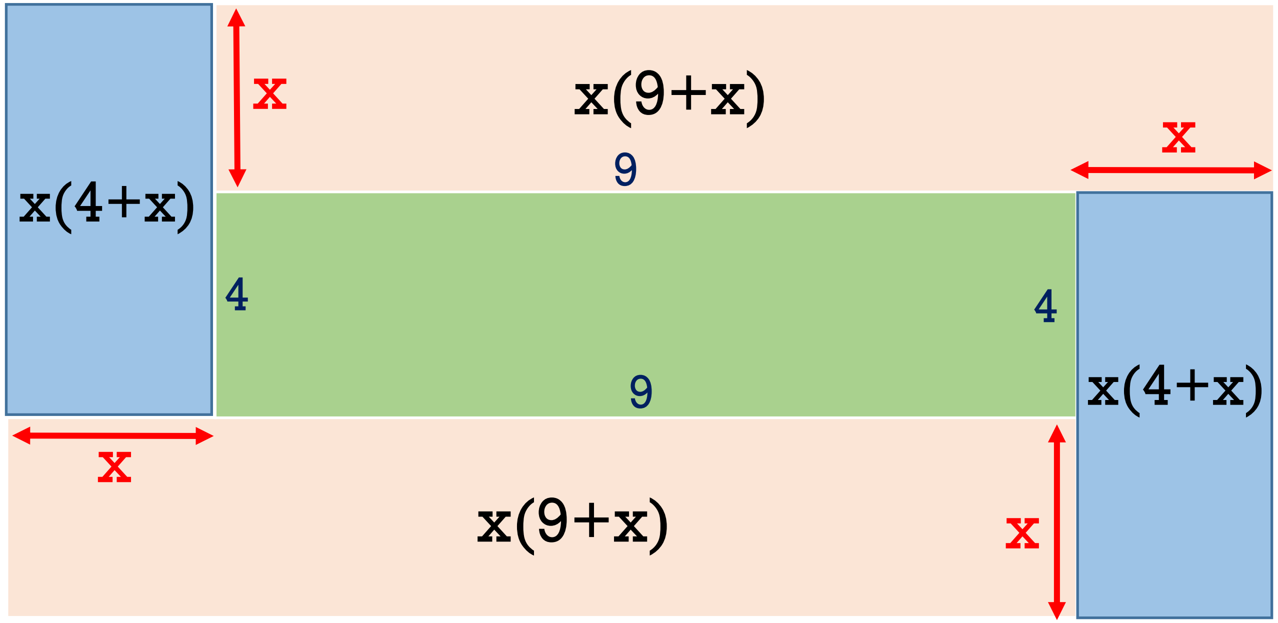
∴ **Maneras: 9**

PROBLEMA 4

Una piscina rectangular de 4 m de ancho por 9 m de largo tiene alrededor un ***paseo de ancho uniforme***.

Si el área del paseo es 68m^2 ¿cuánto será el ancho del paseo, en metros?

RESOLUCIÓN



ÁREA DEL PASEO :

$$2\,[\ x(4+x) + x(9+x)\ ] = 68$$
$$[\ x(4+x) + x(9+x)\ ] = 34$$
$$x\ (13+2x) = 34$$

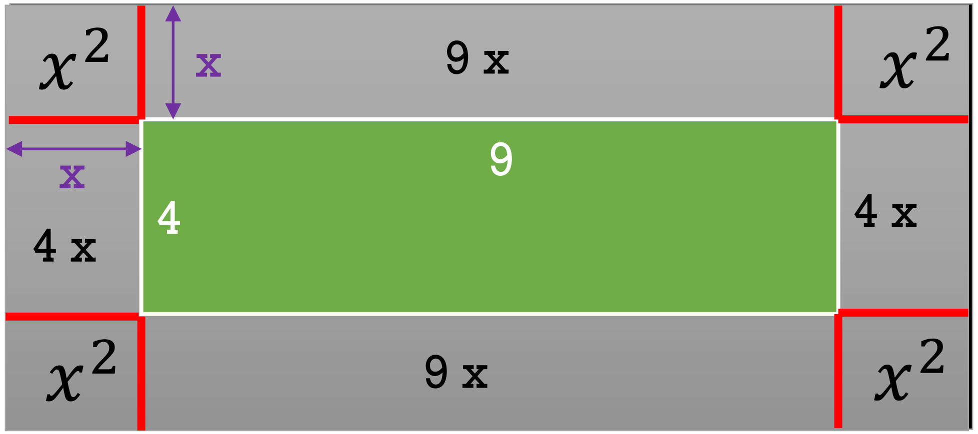
$$\therefore\ X = 2$$

OTRA FORMA

Una piscina rectangular de 4 m de ancho por 9 m de largo tiene alrededor un ***paseo de ancho uniforme***.

Si el área del paseo es $68 m^2$ ¿cuánto será el ancho del paseo, en metros?

RESOLUCIÓN



ÁREA DEL PASEO :

$$4x^2 + 26x = 68$$

$$2x^2 + 13x - 34 = 0$$

$$\begin{array}{ll} 2x & +17 \\ x & -2 \end{array}$$

$$x - 2 = 0$$

$$\therefore X = 2$$

PROBLEMA 5

Se desea comprar el máximo número de aves con S/169, entre palomas y canarios de S/9 y S/4 cada una, respectivamente. ¿Cuántas aves se compraron?

RESOLUCIÓN

PALOMAS: **P**

S/9

CANARIOS: **C**

S/4

OBSERVACIÓN

Máxima cantidad de aves:
Mínima cantidad de palomas

Mínimo

$$9P + 4C = 169$$

$$9(1) + 4(40) = 169$$

$\therefore$ **Total de aves: 41**

PROBLEMA 6

Una promoción de verano ofrecía un gran premio al que llegaba a juntar cierto número de chapas marcadas. Ana y Bety se aliaron para ganar el premio. Al cabo de una semana, hicieron sus cuentas:

Ana: ¡Bety, solo has juntado los 7/20 de lo necesario!...

Bety: ¡No reclames!, pues tú has juntado 2/5 de lo mío. ¡Así no llegamos ni a 50!

¿Cuántas chapas eran necesarias para cobrar el premio?

RESOLUCIÓN

TOTAL: 100K

Bety: $\frac{7}{20}(100K) = 35K$

Ana: $\frac{2}{5}(35K) = 14K$

JUNTAS → $35K + 14K < 50$

$49K < 50$

$K = 1$

$\therefore$ **Total= 100**

PROBLEMA 7

Por la cuarentena establecida y las nuevas normas para poder reanudar el trabajo presencial, una fábrica debía transportar a sus 178 operarios en vehículos de dos tipos: unos tienen capacidad para 17 empleados y otros que tienen capacidad solo para 5. ¿Cuál es el menor número de vehículos que se debe habilitar la fábrica si ninguna persona debe ir de pie y ningún asiento debe quedar vacío?

RESOLUCIÓN

	# VEHÍCULOS	#ASIENTOS
	a	17
	b	5

Máximo

$$17a + 5b = 178$$

$$17(9) + 5b = 178$$

$$153 + \underbrace{5(5)}_{25} = 178$$

$\therefore$ **#VEHÍCULOS: 14**

Resolución del taller

PROBLEMA 2

Se dispone de s/.999 para ser gastados en artículos de s/37. y s/.21 cada uno.

¿Cuánto artículos se adquirieron si el dinero alcanzó exactamente?

RESOLUCIÓN

$37x + 21y = 999$

$\div 37$

$37x + 21y = 3x3x3x37$

$x + \frac{21y}{37} = 27$

$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

$y = 37 \quad x = 6$

Rpta.43

Ejercicio adicional

ADICIONAL

El año de nacimiento y de muerte de un matemático, suman 3710 y se escriben con los mismos dígitos, pero con la cifra de las decenas y la de las unidades en orden invertido.

Si la vida de este matemático transcurrió durante el siglo **XIX**, ¿Cuál es la máxima edad que pudo tener?

RESOLUCIÓN

AÑO DE NACIMIENTO: $\overline{18ab}$

AÑO DE FALLECIMIENTO: $\overline{18ba}$

SUMA → $\overline{18ab} + \overline{18ba} = 3710$

$$1800+10a+b+1800+10b+a = 3710$$

$$11a+11b+3600 = 3710$$

$$11a+11b = 110$$

$$a+b = 10$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 1 & 9 \end{array}$$

Máxima EDAD → $\therefore$ **1891 – 1819 = 72**

OTRA FORMA

El año de nacimiento y de muerte de un matemático, suman 3710 y se escriben con los mismos dígitos, pero con la cifra de las decenas y la de las unidades en orden invertido.

Si la vida de este matemático transcurrió durante el **siglo XIX**, ¿cuál es la máxima edad que pudo tener?

RESOLUCIÓN

	Nació	**Falleció**
Año:	$\overline{18ab}$	$\overline{18ba}$
Edad:	0	Máximo

$$\begin{array}{r} \overline{18ba} \\ \overline{18ab} \\ \hline 3710 \end{array} +$$

Sumando verticalmente, en las unidades y decenas se cumple :

$$a + b = 10$$

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 9 \end{array}$$

Máxima EDAD $\Rightarrow$ $\therefore$ **1891 – 1819 = 72**