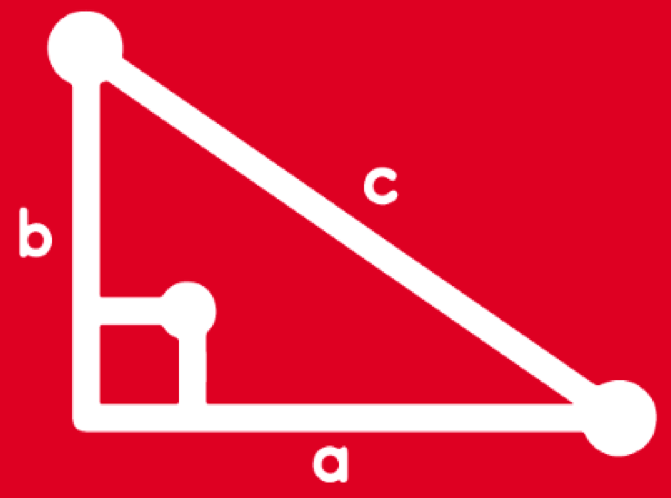
TRIGONOMETRY

Chapter 13



5th

SECONDARY

Identidades trigonométricas del ángulo compuesto I

SACO OLIVEROS

¿A que será igual seno de 83° ?

¿A que será igual coseno de 105°?

¿A que será igual seno de 8°?

¿A que será igual coseno de 16°?

¡Los ángulos de 83°, 105°, 8° y 16° no son Notables!

¡Pero tenemos: 30°, 60°, 45°, 37°, 53° que si son notables!

Podemos obtener el ángulo de 83°, 105°, 8° y 16° en función a los ángulos notables antes mencionados, por ejemplo:

$83° = 30° + 53°$, por lo tanto: $\operatorname{sen} 83° = \operatorname{sen} (30° + 53°)$

$105° = 60° + 45°$, por lo tanto: $\cos 105° = \cos (60° + 45°)$

$8° = 53° - 45°$, por lo tanto: $\operatorname{sen} 8° = \operatorname{sen} (53° - 45°)$

$16° = 53° - 37°$, por lo tanto: $\cos 16° = \cos (53° - 37°)$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

- **PARA LA SUMA DE DOS ÁNGULOS:**

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x.\cos y+\cos x.\operatorname{sen}y$$

$$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$$

- **PARA LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS:**

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x.\cos y-\cos x.\operatorname{sen}y$$

$$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$$

PROBLEMA 1

Halle el valor de
a. sen82°
b. cos15°

Resolución:

Como: $82° = 45° + 37°$ ⟹ $\mathbf{sen}(82°) = \mathbf{sen}(45° + 37°)$

⟹ $\text{sen}82° = \underbrace{\text{sen}45°}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\underbrace{\cos 37°}_{\left(\frac{4}{5}\right)} + \underbrace{\cos 45°}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\underbrace{\text{sen}37°}_{\left(\frac{3}{5}\right)}$

$\therefore \text{sen}82° = \boxed{\frac{7\sqrt{2}}{10}}$

Como: $15° = 45° - 30°$ ⟹ $\mathbf{cos}(15°) = \mathbf{cos}(45° - 30°)$

⟹ $\cos 15° = \underbrace{\cos 45°}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\underbrace{\cos 30°}_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \underbrace{\text{sen}45°}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\underbrace{\text{sen}30°}_{\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\therefore \cos 15° = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$

PROBLEMA 2

Observe el siguiente diagrama que indica el espacio utilizado de la memoria USB (GB):

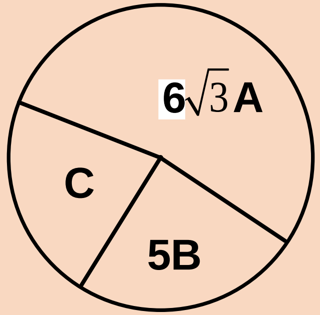
Donde

$A = \text{sen}40°\cdot\cos20° + \cos40°\cdot\text{sen}20°$

$B = \cos63°\cdot\cos10° + \text{sen}63°\cdot\text{sen}10°$

Indique el espacio disponible de la memoria USB.

Distribución del almacenamiento de una memoria USB de 16 GB



$6\sqrt{3}A$	: Música
5B	: Fotos
C	: Espacio disponible

Resolución:

$$A = \underbrace{\text{sen}40°\cdot\cos20° + \cos40°\cdot\text{sen}20°}_{\text{sen}(40°+20°) = \text{sen}60°} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = \underbrace{\cos63°\cdot\cos10° + \text{sen}63°\cdot\text{sen}10°}_{\cos(63°-10°) = \cos53°} \Rightarrow B = \frac{3}{5}$$

MÚSICA: $6\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9$ GB

FOTOS: $5\cdot\left(\frac{3}{5}\right) = 3$ GB

$\therefore$ ESPACIO DISPONIBLE: 4 GB

PROBLEMA 3

Si se cumple que $4\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, calcule senxcosx.

Resolución:

$$4\left[\cos x\cos\cancel{\frac{\pi}{4}}+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\cancel{\frac{\pi}{4}}\right]=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cancel{\sqrt{2}}[\cos x+\operatorname{sen}x]=\cancel{\sqrt{2}}$$

$$\left\{\cos x+\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}\right\}^2 \Rightarrow 1+2\operatorname{sen}x\cos x=\frac{1}{4} \Rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x=-\frac{3}{4}$$

Recordar: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen}x\cos x=-\frac{3}{8}}$$

PROBLEMA 4

Carlos recibe de propina $\frac{\text{sen}(x+y)}{\text{sen}x.\cos y}$ soles, y Juana recibe de propina $\frac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}x.\cos y}$ soles. ¿Cuánto es la suma de las propinas de Carlos y Juana?

Recordar las identidades

$$\frac{\text{sen}(x\pm y)}{\text{sen}x.\cos y}=1\pm\tan y.\cot x$$

Resolución:

Del dato:

$$\text{Carlos recibe}=\frac{\text{sen}(x+y)}{\text{sen}x.\cos y}$$

$$=1+\tan y.\cot x \;\ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

$$\text{Carlos recibe}=\frac{\text{sen}(x-y)}{\text{sen}x.\cos y}$$

$$=1-\tan y.\cot x \;\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Luego de α y β:

Suma de propinas:

$$1+\cancel{\tan y.\cot x}+1-\cancel{\tan y.\cot x}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Suma de propinas} = S/2}$

PROBLEMA 5

Siendo $\alpha - \beta = 30°$, halle el valor de
$E = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)^2 + (\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$

Recordar: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}x.\cos y - \cos x.\operatorname{sen}y$

Resolución:

$$E = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)^2 + (\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$$

$$E = sen^2\alpha + 2sen\alpha cos\beta + cos^2\beta + cos^2\alpha - 2cos\alpha sen\beta + sen^2\beta$$

$$E = \underbrace{sen^2\alpha + cos^2\alpha}_{1} + 2(\underbrace{sen\alpha cos\beta - cos\alpha sen\beta}_{sen(\alpha-\beta)}) + \underbrace{cos^2\beta + sen^2\beta}_{1}$$

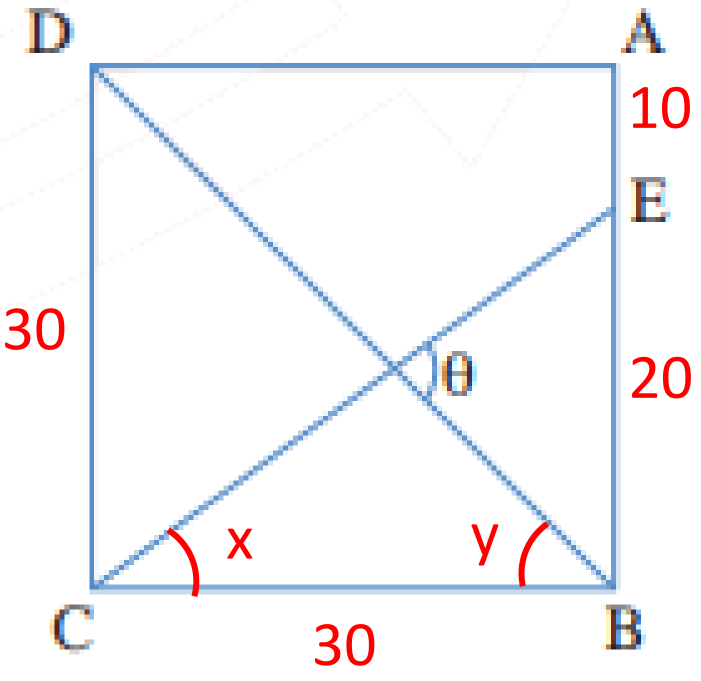
$$E = 2 + 2sen30° = 2 + \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$$\therefore \boxed{E = 3}$$

PROBLEMA 6

Un albañil desea cortar una baldosa cuadrangular ABCD; los cortes a realizar son BD y CE los cuales forman un ángulo θ, como se indica en la figura. Si AE= 10 cm y BE= 20 cm; dar el valor de tanθ.

Resolución:



Del gráfico:

$$\tan x = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \tan y = 1$$

Se observa que: $\theta = x + y \longrightarrow \tan\theta = \tan(x+y)$

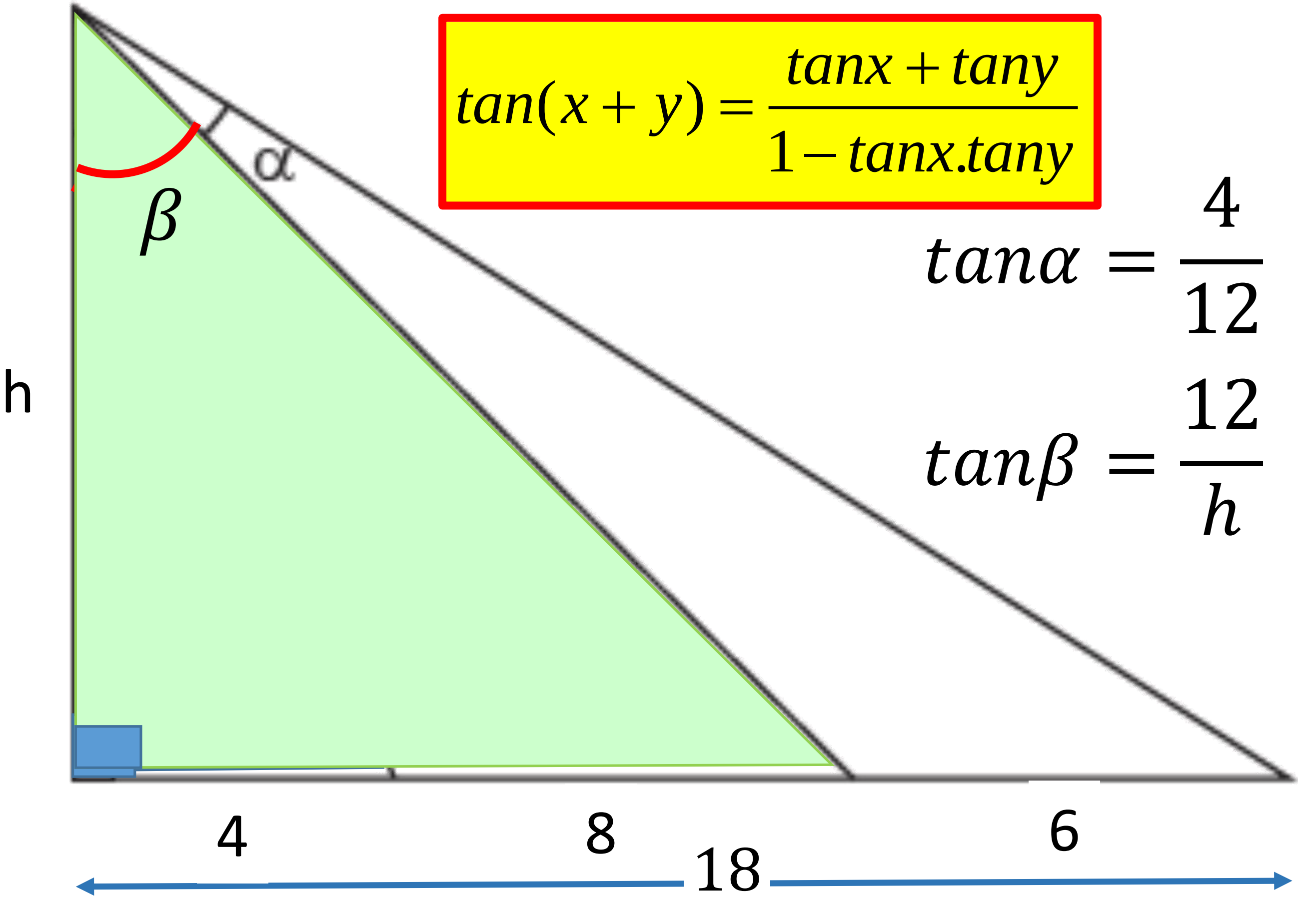
$$\tan\theta = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y} \longrightarrow \tan\theta = \frac{\frac{2}{3} + 1}{1 - \frac{2}{3}(1)}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$\therefore$ $\boxed{\tan\alpha = 5}$

PROBLEMA 8

El joven Félix ubicado en la azotea de un edificio observa tres autos estacionados en línea recta respecto a la base del edificio. Considerando los datos del gráfico; calcule la altura del edificio.



$$tan(x+y)=\frac{tanx+tany}{1-tanx.tany}$$

$$tan\alpha=\frac{4}{12}$$

$$tan\beta=\frac{12}{h}$$

Resolución:

Se observa que: $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{18}{h}$

$$\frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha tan\beta}=\frac{18}{h}$$

$$\frac{\frac{4}{h}+\frac{12}{h}}{1-\left(\frac{4}{h}\right)\left(\frac{12}{h}\right)}=\frac{18}{h}\Rightarrow\frac{\frac{16}{h}}{1-\frac{48}{h^2}}=\frac{18}{h}$$

$$8\mathrm{h}^2=9\mathrm{h}^2-432$$

$$\mathrm{h}^2=432$$

$$\therefore\ \boxed{h=12\sqrt{3}m}$$