



MATHEMATICAL REASONING

Chapter 7

5th
SECONDARY

INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS II



 **SACO OLIVEROS**

HELICO THEORY

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Se denomina Ecuación Diofántica (en recuerdo a Diofanto de Alejandría) a aquella ecuación algebraica con coeficientes enteros, generalmente de varias variables, definidas en el conjunto de los \mathbb{Z} o \mathbb{N} , es decir, sus soluciones son números enteros.

Ejemplos

$$11x + 7y = 90$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$7x + y + xy = 41$$

TENGA EN CUENTA

- Por tratarse de problemas contextualizados solo veremos ecuaciones diofánticas lineales cuyas variables $\in \mathbb{Z}^+$.

$$ax + by = c.$$

$$ax + by + cz = d.$$

$$ax + by + cxy = d.$$

Donde: $a; b; c; d$: *coeficientes*

$x; y; z$: *variables*



ECUACIONES DIOFÁNTICAS

DETERMINACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

• CRITERIO DE MULTIPLICIDAD

Se emplea cuando el resultado es múltiplo de uno de los coeficientes de los sumandos.

Ejemplo

$$\begin{array}{c} \overset{\bullet}{3} \\ \underbrace{} \\ 3x \end{array} + \begin{array}{c} \overset{\bullet}{3} \\ \underbrace{} \\ 4y \end{array} = \begin{array}{c} \overset{\bullet}{3} \\ \underbrace{} \\ 33 \end{array} ; \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 7 & 3 \\ 3 & 6 \end{array}$$

TENGA EN CUENTA

- PRINCIPIO DE DIVISIBILIDAD

$$\overset{\bullet}{a} \pm \overset{\bullet}{a} = \overset{\bullet}{a} ;$$

si a es no nulo

ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Veamos algo más en el ejemplo.

Ejemplo

$$\overset{\cdot}{\underset{\cdot}{3}}x + \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{4}}y = \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{3}}3 \ ; \ \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ -4 \left(\begin{array}{c} 7 \\ 3 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array} \right) +3 \end{array}$$



OBSERVACIÓN

Mientras una de las variables (x) disminuye en tantas unidades como el coeficiente de su vecina (y), esta aumenta en tantas unidades como el coeficiente de x .

TENGA EN CUENTA

- Si bien se indica que $\{x; y\} \in \mathbb{Z}^+$, según el contexto del problema, podría incluirse la solución:

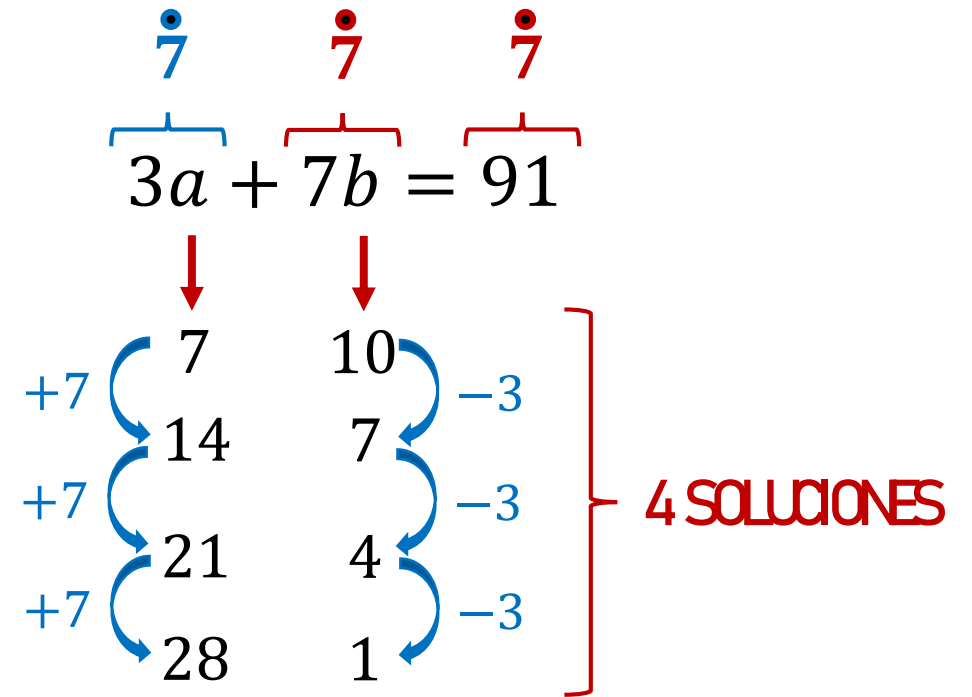
$$x = 11 ; y = 0$$



ECUACIONES DIOFÁNTICAS

• CRITERIO DE MULTIPLICIDAD

Sebastián compra lápices a S/.3 cada uno y lapiceros de S/.7 soles cada uno. Si gastó 91 soles exactamente comprando ambos artículos, ¿de cuántas maneras diferentes pudo Sebastián realizar la compra?



∴ *Nº de maneras diferentes* 4



ECUACIONES DIOFÁNTICAS

DETERMINACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

- CRITERIO DE LA ÚLTIMA CIFRA

Se emplea cuando uno de los coeficientes de los sumandos es 5 o termina en cifra 5.

Ejemplo

$$3x + 5y = 37 ; \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+$$

Resolución

Multiplicamos por 2 toda la ecuación

$$\begin{array}{ccc} \dots 4 & \dots 0 & \dots 4 \\ \underbrace{} & + & \underbrace{} = \underbrace{} \\ 6x & + & 10y = 74 \\ \downarrow & & \downarrow \\ +5 \begin{array}{c} 4 \\ \updownarrow \\ 9 \end{array} & & \begin{array}{c} 5 \\ \updownarrow \\ 2 \end{array} -3 \end{array}$$



ECUACIONES DIOFÁNTICAS

DETERMINACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

• CRITERIO DE FACTORIZACIÓN

Se emplea cuando en los sumandos se encuentran las variables en operaciones de adición y multiplicación.

Ejemplo

$$x + 3y + xy = 74 ; \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+ ; y > x$$

Factor común: y (indicated by a red arrow from $3y$ and xy to the y in the term $3y$)

Factor común: x (indicated by a red arrow from x and xy to the x in the term x)

Factorizo x $x(y + 1) + 3y = 74$

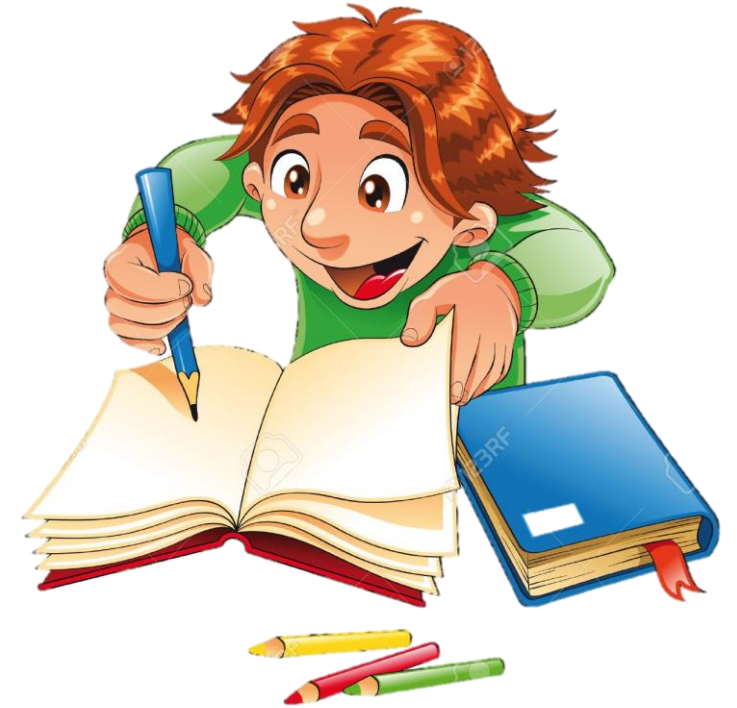
(+3) m.a.m $x(x(y + 1) + 3(y + 1)) = 74 + 3$

Factorizo $(y + 1)$ $(y + 1)(x + 3) = 7(11)$

(indicated by red arrows showing the distribution of the +3 term into the parentheses)

$$\therefore x = 4; y = 10$$

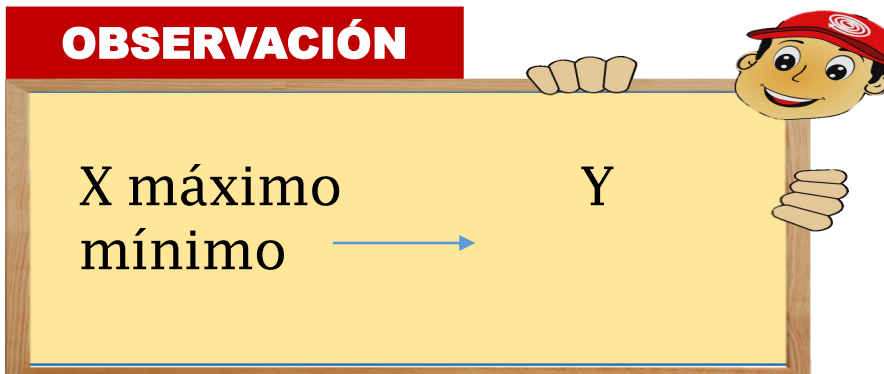
RESOLUCIÓN DE LA PRÁCTICA



PROBLEMA 1

Halle el máximo valor de x en $3x + 5y = 70$ si $x, y \in \mathbb{N}$

RESOLUCIÓN



$$3x + 5y = 70$$
$$\underline{3(x)} + 5(\underline{2}) = 70$$
$$60$$
$$\therefore \underline{\underline{X = 20}}$$

PROBLEMA 2

Una persona compró pelotas, a S/21 la unidad; medias, a S/15 la unidad y gorros, a S/35 la unidad. Si gastó S/219, ¿cuántos

OBSERVACIÓN

CRITERIO DE DIVISIBILIDAD DEL 3

Suma de cifras es 3°

$$3^{\circ} + 3^{\circ} + 3^{\circ} = 3^{\circ}$$

$$21 = 3 (7)$$

$$= 3^{\circ}$$

$$15 = 3(5) =$$

$$3^{\circ}$$

$$219 = 3(73) =$$

$$3^{\circ}$$

RESOLUCIÓN

ARTÍCULO	CANTIDAD	COSTO UNIDAD
PELOTAS	p	21
MEDIAS	m	15
GORROS	g	35

$$\begin{array}{l} \text{GASTO} \\ \text{TOTAL:} \end{array} \quad \begin{array}{c} 3^{\circ} \quad 3^{\circ} \quad 3^{\circ} \quad 3^{\circ} \\ \hline 21p + 15m + 35g = \\ 219 \end{array}$$

$$21p + 15m = 114$$

$$7(4) + 5(2) = 38$$

$$\text{TOTAL DE ARTÍCULOS} \quad \therefore \quad \underline{\underline{X=9}}$$

PROBLEMA 3

¿De cuántas maneras diferentes se puede pagar una deuda de S/200 con billetes de S/10 y S/20, únicamente?

RESOLUCIÓN



a



b



$$10a + 20b =$$

$$200$$
$$10a + 2b = 20$$

18
16
14
—
2

1
2
3
—
9

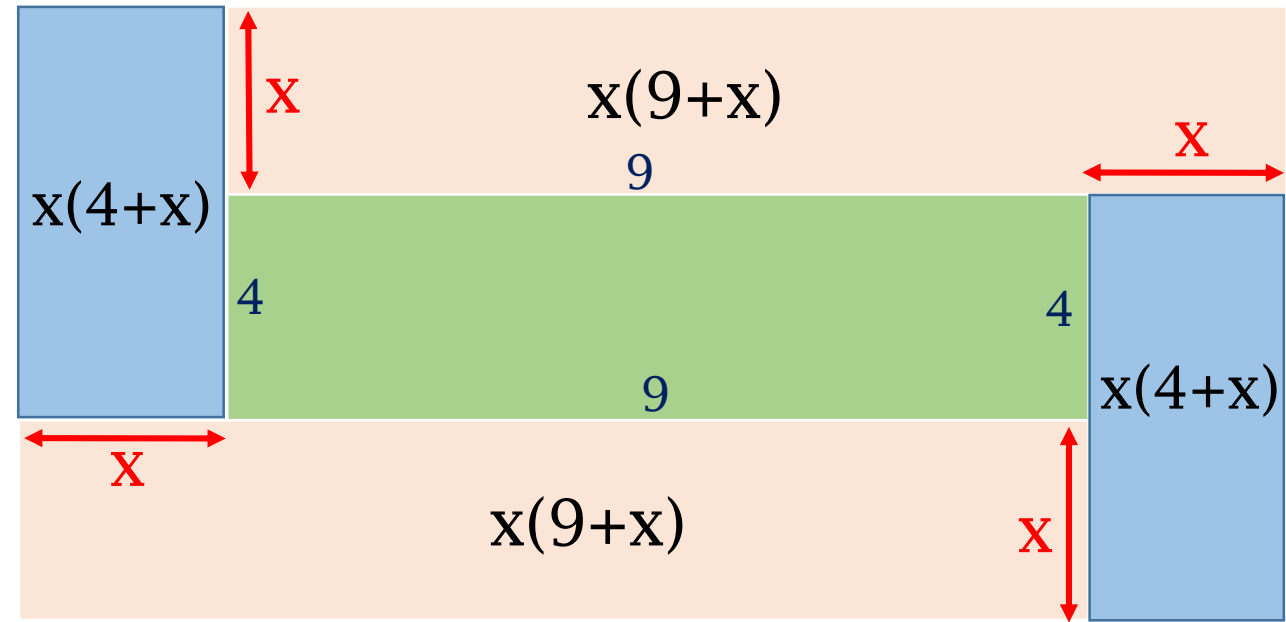
∴ **Maneras: 9**

PROBLEMA 4

Una piscina rectangular de 4 m de ancho por 9 m de largo tiene alrededor un **paseo de ancho uniforme**.

Si el área del paseo es 68m^2 ¿cuánto será el ancho del paseo, en metros?

RESOLUCIÓN



ÁREA DEL
PASEO :

$$\begin{aligned} 2 [x(4+x) + x(9+x)] &= \\ 68 \quad x(4+x) + x(9+x) &= 34 \\ x (13+2x) &= 34 \end{aligned}$$

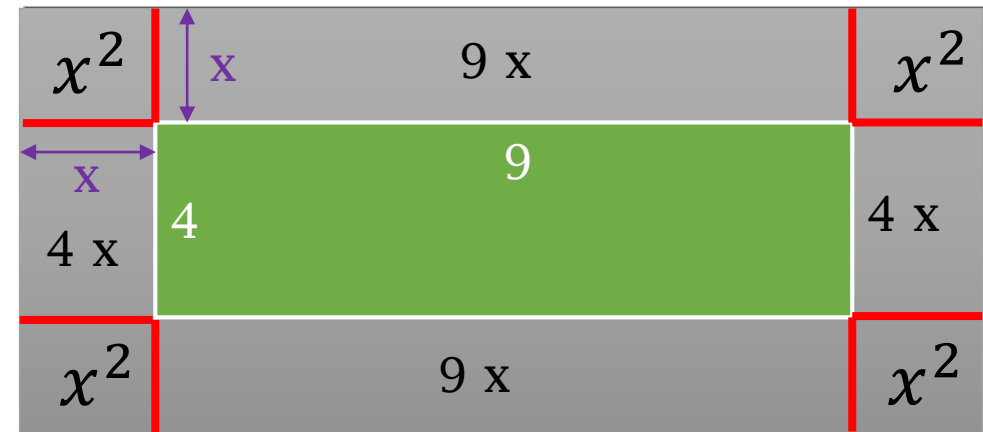
$$\therefore \underline{\underline{X = 2}}$$

OTRA FORMA

Una piscina rectangular de 4 m de ancho por 9 m de largo tiene alrededor un ***paseo de ancho uniforme***.

Si el área del paseo es 68m² ¿cuánto será el ancho del paseo, en metros?

RESOLUCIÓN



ÁREA DEL PASEO

:

$$4x^2 + 26x = 68$$

$$2x^2 + 13x - 34 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x \\ x \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{r} +17 \\ -2 \end{array}$$

$$x - 2 = 0 \quad \therefore \underline{\underline{x = 2}}$$

PROBLEMA 5

Se desea comprar el máximo número de aves con S/169, entre palomas y canarios de S/9 y S/4 cada una, respectivamente.
¿Cuántas aves se compraron?

RESOLUCIÓN

PALOMAS: P



S/9

CANARIOS: C



S/4

OBSERVACIÓN

Máxima
cantidad de
aves:

Mínima
cantidad de
palomas

Mínimo



$$9P + 4C = 169$$

$$9(\underline{1}) + \underline{40} = 169$$

∴ Total de aves: 41

PROBLEMA 6

Una promoción de verano ofrecía un gran premio al que llegaba a juntar cierto número de chapas marcadas. Ana y Bety se aliaron para ganar el premio. Al cabo de una semana, hicieron sus cuentas:

Ana: ¡Bety, solo has juntado los 7/20

de lo necesario!...

Bety: ¡No reclames!, pues tú has
juntado 2/5 de lo mío. ¡Así no
llegamos ni a 50!

¿Cuántas chapas eran necesarias para cobrar el premio?

RESOLUCIÓN

TOTAL:

$$\text{Bety: } \frac{7}{20} (100K) = 35K$$

$$\text{Ana: } \frac{2}{5} (35K) = 14K$$



$$\begin{aligned} \text{JUNTAS} \rightarrow 35K + 14K &< 50 \\ 49K &< 50 \\ K &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Total} = \underline{\underline{100}}$$

PROBLEMA 7

Por la cuarentena establecida y las nuevas normas para poder reanudar el trabajo presencial, una fábrica debía transportar a sus 178 operarios en vehículos de dos tipos: unos tienen capacidad para 17 empleados y otros que tienen capacidad solo para 5. ¿Cuál es el menor número de vehículos que se debe habilitar la fábrica si ninguna persona debe ir de pie y ningún asiento debe quedar vacío?

RESOLUCIÓN

	# VEHÍCULOS	#ASIENTOS
	a	17
	b	5

Máximo

$$\rightarrow 17a + 5b = 178$$
$$17(9) + 5b = 178$$
$$153 + \underbrace{5(5)}_{25} = 178$$

\therefore #VEHÍCULOS: 14

Resolución del taller



PROBLEMA 2

Se dispone de s/.999 para ser gastados en artículos de s/37. y s/.21 cada uno.

¿Cuánto artículos se adquirieron si el dinero alcanzó exactamente?

RESOLUCIÓN

$$37x + 21y = 999$$

$$\div 37 \quad 37x + 21y = 3 \times 3 \times 3 \times 37$$

$$x + \frac{21y}{37} = 27$$

$$y = 37 \quad x = 6$$


$$\mathbb{Z} + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Rpta.43

Ejercicio adicional



ADICIONAL

El año de nacimiento y de muerte de un matemático, suman 3710 y se escriben con los mismos dígitos, pero con la cifra de las decenas y la de las unidades en orden invertido.

Si la vida de este matemático transcurrió durante el siglo XIX, ¿Cuál es la máxima edad que pudo tener?

RESOLUCIÓN

AÑO DE NACIMIENTO: $\overline{18ab}$

AÑO DE FALLECIMIENTO: $\overline{18ba}$



$$\text{SUMA} \rightarrow \overline{18ab} + \overline{18ba} = 3710$$

$$1800 + 10a + b + 1800 + 10b + a = 3710$$

$$11a + 11b + 3600 = 3710$$

$$11a + 11b = 110$$

$$a + b = 10$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 1 & 9 \end{array}$$

$$\text{Maxima EDAD} \rightarrow \therefore 1891 - 1819 = \underline{\underline{72}}$$

OTRA FORMA

El año de nacimiento y de muerte de un matemático, suman 3710 y se escriben con los mismos dígitos, pero con la cifra de las decenas y la de las unidades en orden invertido.

Si la vida de este matemático transcurrió durante el siglo XIX, ¿cuál es la máxima edad que pudo tener?

RESOLUCIÓN



	Nació	Falleció
Año:	$\overline{18ab}$	$\overline{18ba}$
Edad:	0	Máxim

$$\begin{array}{r} \overline{18ba} \\ + \overline{18ab} \\ \hline \end{array}$$

371
0



Sumando verticalmente, en las unidades y decenas se cumple :

$$\begin{array}{c} a + b = \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 10 \quad 9 \end{array}$$

$$\therefore 1891 - 1819 = \underline{\underline{72}}$$