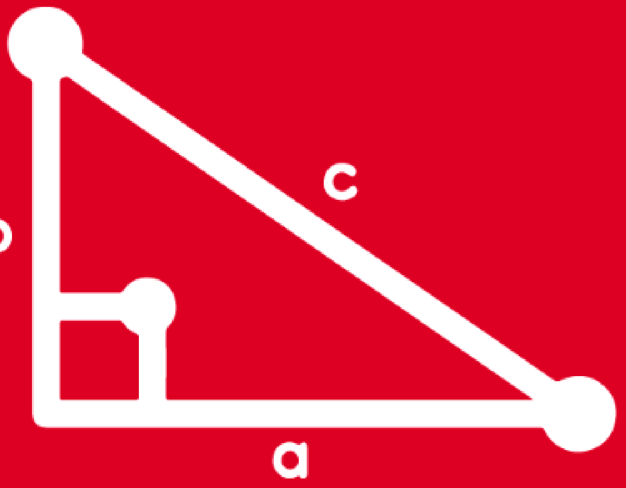
TRIGONOMETRY

Chapter 14



5th
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES DEL ÁNGULO COMPUESTO

SACO OLIVEROS

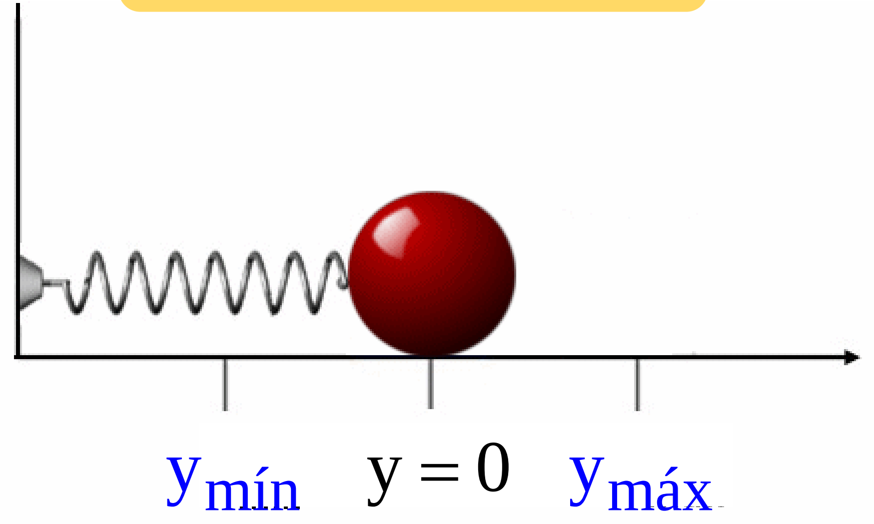
Los fenómenos periódicos son aquellos que se **repiten** en el tiempo de forma idéntica.

Así tenemos fenómenos periódicos como el movimiento de rotación de la tierra , el sonido , la corriente alterna , la luz , las mareas , los latidos del corazón entre otros.

Para un mejor estudio de estos fenómenos , se usan a **las funciones trigonométricas seno y coseno**.

Ejemplo: La elongación de un resorte **y** (cm), se puede modelar por la ecuación:

$$\mathbf{y} = 3\text{senx} + 4\cos x$$



¿Puedes calcular la máxima elongación del resorte?

Rpta: **5 cm**

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

1. $\operatorname{sen}(x+y).\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}^2x-\operatorname{sen}^2y$

2. $\cos(x+y).\cos(x-y)=\cos^2x-\operatorname{sen}^2y$

Ejemplo: Reducir la expresión

$$E=\operatorname{sen}(30^\circ+\alpha).\operatorname{sen}(30^\circ-\alpha)+\operatorname{sen}^2\alpha$$

Resolución:

$$E=\underbrace{\operatorname{sen}(30^\circ+\alpha).\operatorname{sen}(30^\circ-\alpha)}+\operatorname{sen}^2\alpha$$

IA 1.

$$E=\operatorname{sen}^2 30^\circ-\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha}+\cancel{\operatorname{sen}^2\alpha}\Rightarrow E=(1/2)^2 \qquad \therefore\ \boxed{E=1/4}$$

3. $\tan x + \tan y + \tan(x+y).\tan x.\tan y = \tan(x+y)$

4. $\tan x - \tan y - \tan(x-y).\tan x.\tan y = \tan(x-y)$

Ejemplo:

Calcule $E = \tan 20^\circ + \tan 17^\circ + \dfrac{3}{4}.\tan 20^\circ.\tan 17^\circ$

Resolución:

$$E = \tan 20^\circ + \tan 17^\circ + \frac{3}{4}.\tan 20^\circ.\tan 17^\circ$$

$$E = \underbrace{\tan 20^\circ + \tan 17^\circ + \tan(20^\circ + 17^\circ).\tan 20^\circ.\tan 17^\circ}$$

IA 3. $\rightarrow$ $E = \tan(20^\circ + 17^\circ) \Rightarrow E = \tan(37^\circ)$

$\therefore\ \boxed{E = 3/4}$

Recuerda :

$$\tan(37^\circ) = \frac{3}{4}$$

5. Para x variable :

$$\underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{mínimo}} \leq a.\operatorname{sen}x + b.\cos x \leq \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{máximo}}$$

Ejemplos:

$$-5 \leq 3\operatorname{sen}x + 4\cos x \leq 5$$

$$-2 \leq \sqrt{3}\operatorname{sen}x + \cos x \leq 2$$

$$-13 \leq 12\operatorname{sen}x - 5\cos x \leq 13$$

Importante: $-\sqrt{2} \leq \operatorname{sen}x \pm \cos x \leq \sqrt{2}$

6. Si: $A + B + C = 180^\circ$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A.\tan B.\tan C$

$\Rightarrow \cot A.\cot B + \cot B.\cot C + \cot C.\cot A = 1$

7. Si: $x + y + z = 90^\circ$

$\Rightarrow \cot x + \cot y + \cot z = \cot x.\cot y.\cot z$

$\Rightarrow \tan x.\tan y + \tan y.\tan z + \tan z.\tan x = 1$

Ejemplo: Calcule

$$E = \frac{\tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \tan 80^\circ}{\tan 40^\circ.\tan 60^\circ.\tan 80^\circ}$$

Resolución:

$$E = \frac{\tan 40^\circ + \tan 60^\circ + \tan 80^\circ}{\tan 40^\circ.\tan 60^\circ.\tan 80^\circ} \ldots (*)$$

OBS: $40^\circ + 60^\circ + 80^\circ = 180^\circ$

Usando **IA 6.** en **(*)**, tenemos:

$$E = \frac{\tan 40^\circ.\tan 60^\circ.\tan 80^\circ}{\tan 40^\circ.\tan 60^\circ.\tan 80^\circ}$$

$\therefore \boxed{E = 1}$

1 Reduzca $F = \operatorname{sen}(x + 45°).\operatorname{sen}(x - 45°) + \cos^2 x$

Resolución:

$$\boxed{\operatorname{sen}(x + y)\cdot\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y}$$

$$F = \operatorname{sen}(x + 45°).\operatorname{sen}(x - 45°) + \cos^2 x$$

$$F = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 45° + \cos^2 x$$

$$F = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} - \underbrace{\operatorname{sen}^2 45°}_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

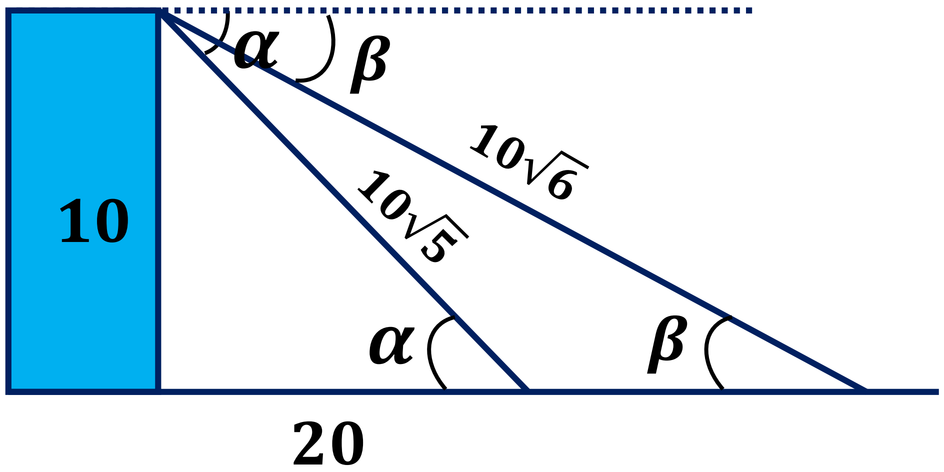
$$F = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \boxed{F = \left(\frac{1}{2}\right)}$$

2 Desde la azotea de una casa de 10m de altura, se observa dos marcas en el suelo con ángulos de depresión α y β. Las visuales generadas miden respectivamente $10\sqrt{5}$ y $10\sqrt{6}$ m; calcule:

$$30\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

Resolución:



$$\mathbf{30\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 30(\cos^2\alpha - sen^2\beta)}$$

$$= 30\left(\left(\frac{20}{10\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{10}{10\sqrt{6}}\right)^2\right)$$

$$= 30\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{6}\right)$$

$\cos(x+y)\cdot\cos(x-y) = \cos^2 x - sen^2 y$

$\therefore$ Rpta: 19

3 Efectúe: $J = (\sqrt{3} + \tan 13°)(\sqrt{3} + \tan 17°)$

Resolución:

$\tan x + \tan y + \tan(x+y) \cdot \tan x \cdot \tan y = \tan(x+y)$

$$J = (\sqrt{3} + \tan 13°)(\sqrt{3} + \tan 17°).$$

$$J = \sqrt{3}^2 + \sqrt{3}\tan 17° + \sqrt{3}\tan 13° + \tan 13°.\tan 17° \ \mathbf{x}\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$J = 3 + \sqrt{3}\left[\tan 17° + \tan 13° + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\tan 30°}\tan 17°.\tan 13°\right]$$

$$J = 3 + \sqrt{3}\,[\tan 30°] \qquad J = 3 + \cancel{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}}\right)$$

$$\therefore \boxed{J = 4}$$

4 Determine el mínimo valor de:

$$F = 2\operatorname{sen}x + \sqrt{2}\cos(45° - x) + 3\cos x.$$

Resolución:

$$F = 2\operatorname{sen}x + \sqrt{2}\,(\cos 45°\cos x + \operatorname{sen}45°\operatorname{sen}x) + 3\cos x$$

$$F = 2\operatorname{sen}x + \cancel{\sqrt{2}}.\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}.\cos x + \cancel{\sqrt{2}}.\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}.\operatorname{sen}x + 3\cos x$$

$$F = 2senx + \cos x + senx + 3\cos x$$

$$\underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{mínimo}} \leq a\operatorname{sen}x + b\cos x \leq \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{máximo}}$$

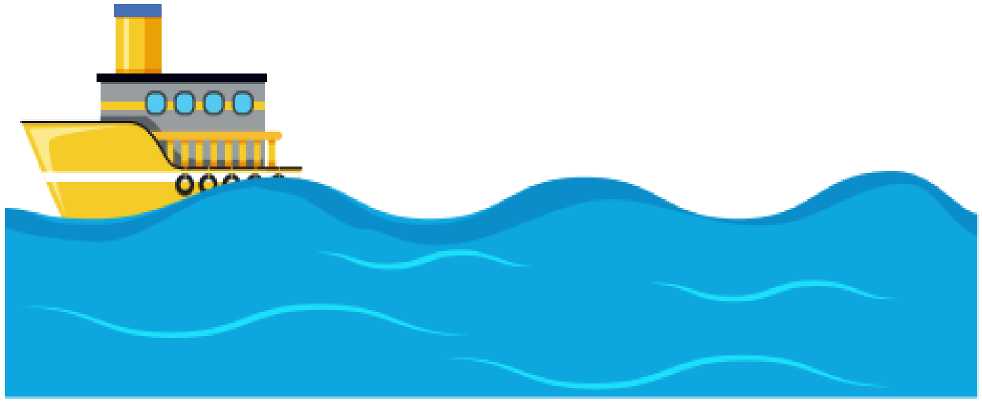
$$F = 3\operatorname{sen}x + 4\cos x$$

Nos piden F**mín** : $F_{mín} = -\sqrt{3^2 + 4^2}$

$$\therefore \boxed{F_{mín} = -5}$$

5 Un cuerpo particular en el océano; tiene un cambio vertical en el agua debido a la acción de las olas (marea), dicho cambio está dado por:

$$y = 0,4\left[\sqrt{3}\,\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right]$$



Donde "y" está en metros y t en segundos, Calcule la altura máxima de la marea.

Resolución:

$$y = 0.4\left[\sqrt{3}sen\left(\frac{\pi t}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right]$$

$$\underbrace{-\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{mínimo}} \leq \; asenx + bcosx \; \leq \underbrace{\sqrt{a^2+b^2}}_{\text{máximo}}$$

$$L_{\text{máximo}} = 0.4 * \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}$$

$$L_{\text{máximo}} = 0.4 * \sqrt{4}$$

$$L_{\text{máximo}} = 0.4 * 2 = 0.8$$

$$\therefore \boxed{L_{\text{máximo}} = 0.8\text{m} = 80\text{cm}}$$

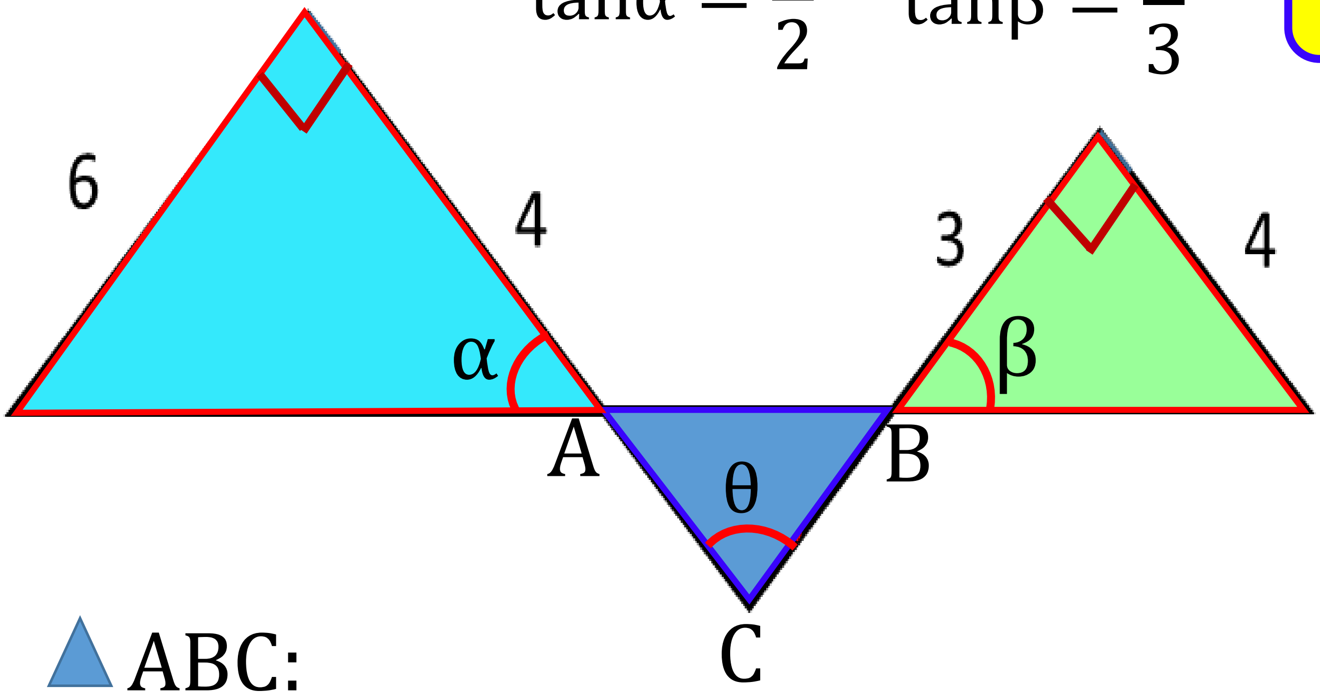
6 Del gráfico, calcule el valor de tanθ.

Resolución:

$\tan\alpha = \frac{3}{2}$ $\quad \tan\beta = \frac{4}{3}$

Si $x + y + z = 180°$, se cumple:

$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x . \tan y . \tan z$



$$\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \tan\theta = \frac{\cancel{3}}{2} . \frac{4}{\cancel{3}} . \tan\theta$$

$$\frac{17}{6} + \tan\theta = 2.\tan\theta$$

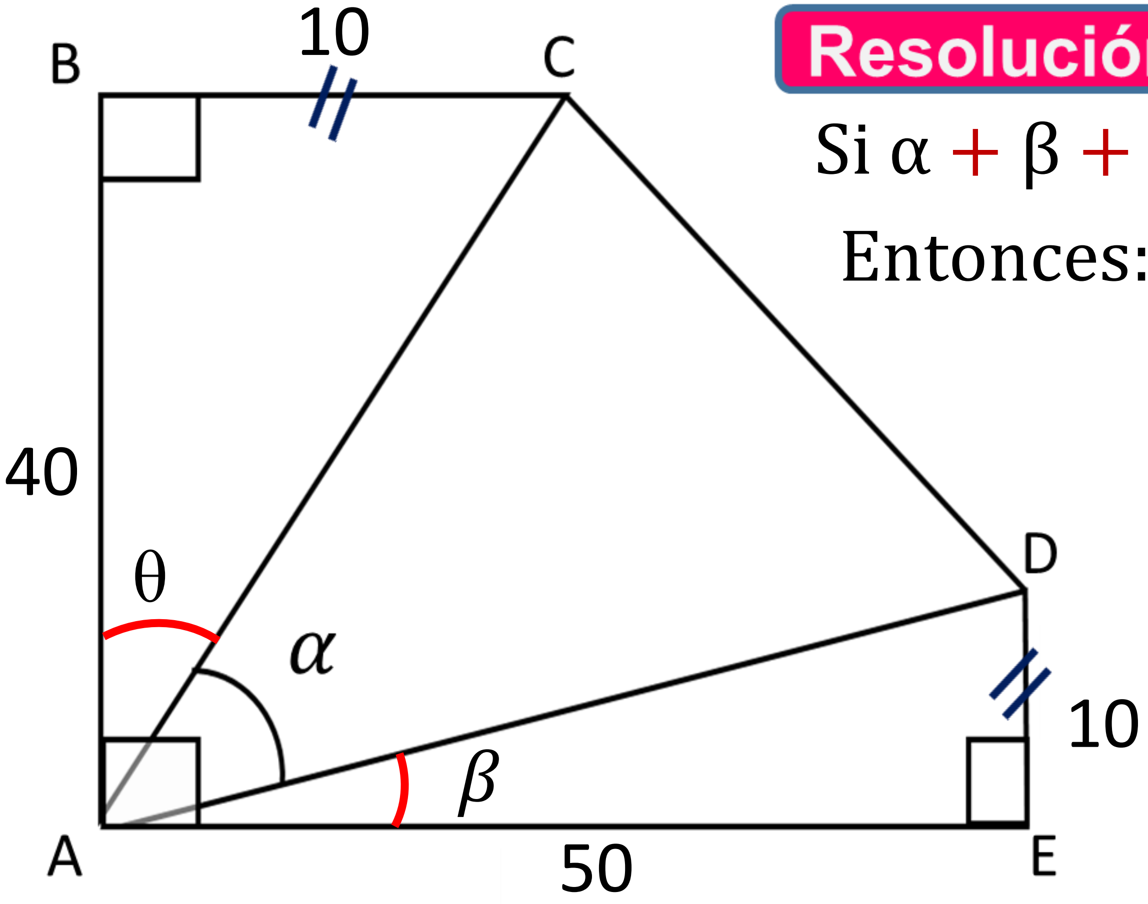
△ABC:

$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\theta = \tan\alpha\tan\beta\tan\theta$$

$$\therefore \boxed{\tan\theta = \frac{17}{6}}$$

7 En la carpintería del señor José, se tiene un trozo de madera ABCD, tal que BC = DE = 10 cm; AB = 40 cm y AE = 50 cm (ver figura). Luego de hacer los cortes AC y AD, ¿puedes indicar el valor de 19cotα.



Resolución:

Si $x + y + z = 90°$, se cumple:
$\cot x + \cot y + \cot z = \cot x . \cot y . \cot z$

Si $\alpha + \beta + \theta = 90°$

Entonces: $\cot\alpha + \cot\beta + \cot\theta = \cot\alpha \cdot \cot\beta \cdot \cot\theta$

$$\cot\alpha + 5 + 4 = \cot\alpha \cdot 5 \cdot 4$$

$$\cot\alpha + 9 = 20\cot\alpha$$

$$9 = 19\cot\alpha$$

$$\therefore\ 19\cot\alpha = 9$$

SACO
OLIVEROS