ALGEBRA

Chapter 21

3th
SECONDARY

INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

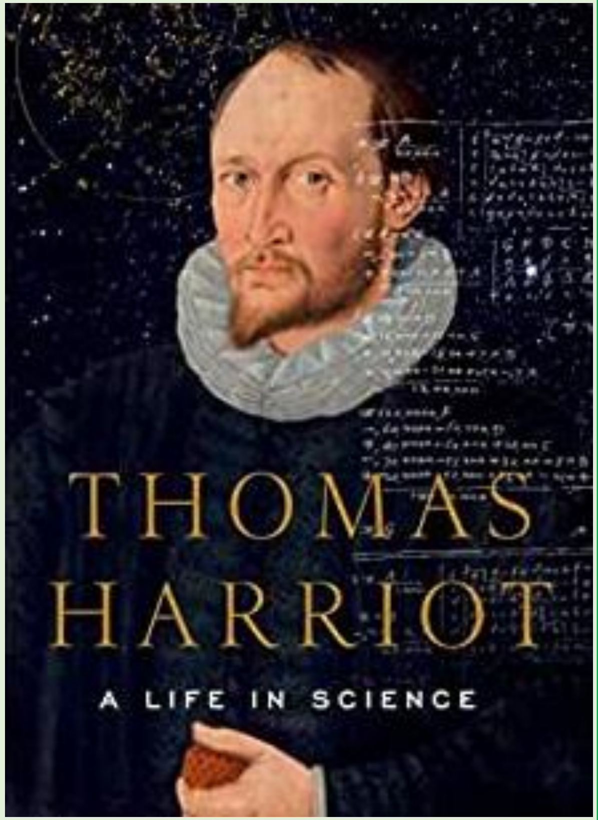
SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

Fue u

ciudad de Oxford en el año 1560 y falleció el 2 de julio de 1621 en Londres. Fue el creador de notaciones y símbolos que se utilizan en álgebra tales como: > (mayor que) y < (menor que). Además observó los satélites de Júpiter y las manchas solares.

La vida de Thomas Harriot sobresale notablemente en diferentes campos. Viaja a las Américas y realiza un trabajo etnográfico; en la astronomía observa la luna y dibuja mapas de sus descubrimientos; además se convierte en un matemático prolífico y se le atribuye la teoría de la refracción.



INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Una inecuación de segundo grado con una incógnita (ecuación cuadrática), es aquella desigualdad condicional que reducida a su más simple expresión tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \qquad ax^2 + bx + c \leq 0$$

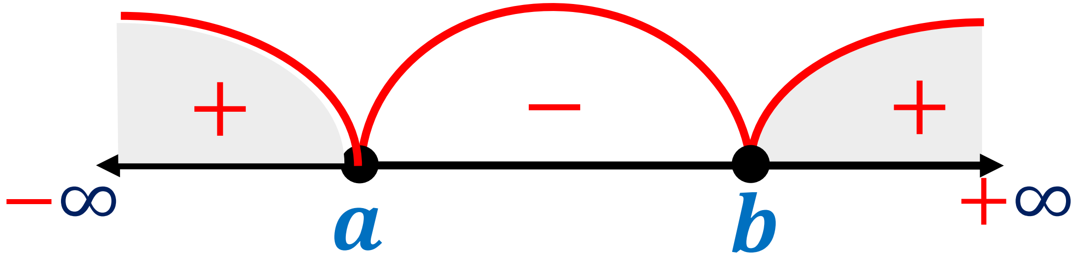
$$, a \neq 0$$

Para su resolución utilizaremos el criterio de los PUNTOS CRÍTICOS.

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

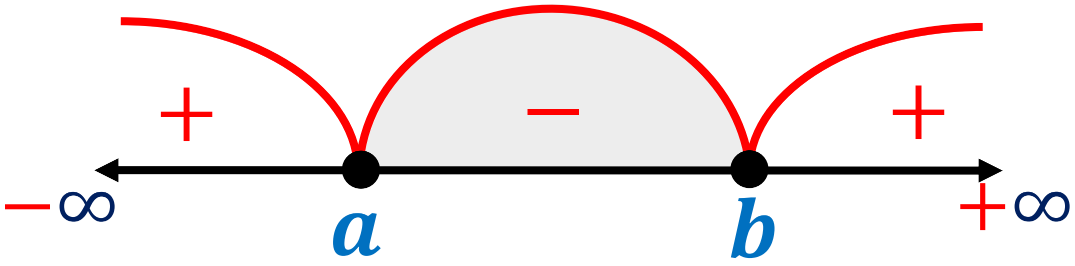
La solución de la inecuación de segundo grado depende del sentido de la desigualdad.

$$(x-a)(x-b)\geq 0$$



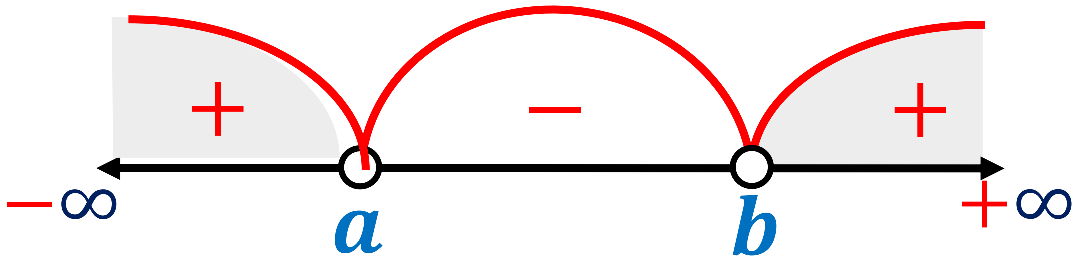
$$x\in\langle-\infty;a]\cup[b;+\infty\rangle$$

$$(x-a)(x-b)\leq 0$$



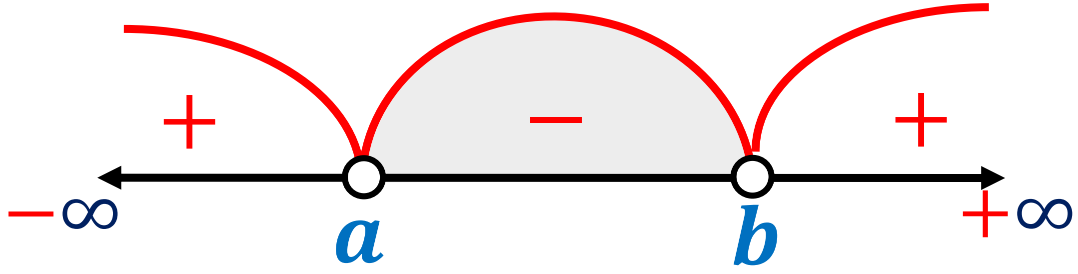
$$x\in[a;b]$$

$$\boxed{(x-a)(x-b)>0}$$



$$\boxed{x\in\langle-\infty;a\rangle\cup\langle b;+\infty\rangle}$$

$$\boxed{(x-a)(x-b)<0}$$



$$\boxed{x\in\langle a;b\rangle}$$

REGLA PRÁCTICA:

Puntos críticos abiertos	*Puntos críticos cerrados*	
$<$	$\leq$	$-$
$>$	$\geq$	$+$

PROPIEDAD:

Para que $ax^2 + bx + c > 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$

se debe cumplir: $\boxed{a > 0 \quad \wedge \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0}$

Problema 1

Resuelva

$$3x^2+10x+1\geq 3x+7$$

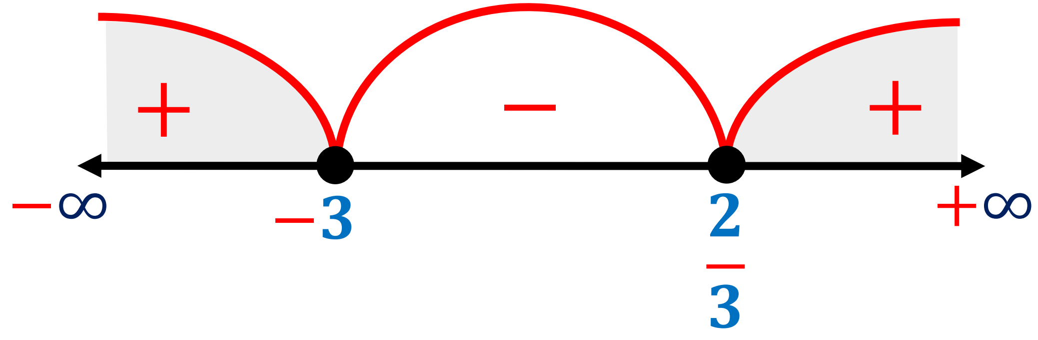
Resolución:

$$3x^2+10x+1\geq 3x+7$$

$$3x^2+\underline{7x}-6\geq 0$$

$$\begin{array}{ll} 3x & -2 \\ x & +3 \end{array}$$

$$(3x-2)(x+3)\geq 0$$



$$\therefore\ x\in\langle-\infty;-3]\cup\left[\frac{2}{3};+\infty\right\rangle$$

Problema 2

Halle el conjunto solución de

$$(x-2)(2x+3) > (x+6)(x+2)$$

Resolución:

$$(x+6)(2x+3) > (x+6)(x+2)$$

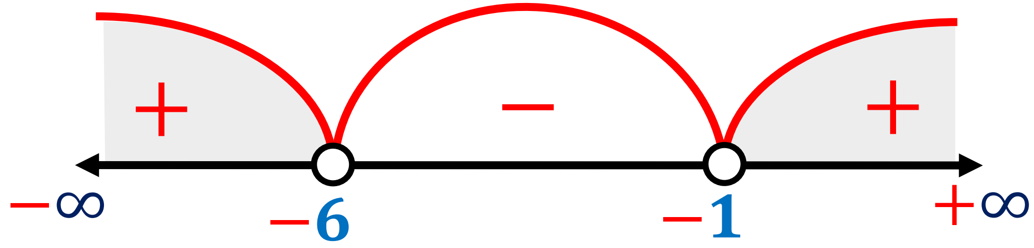
$$2x^2 + 3x + 12x + 18 > x^2 + 8x + 12$$

$$x^2 \underline{+ 7x} + 6 > 0$$

$x \qquad +6$

$x \qquad +1$

$$(x+6)(x+1) > 0$$



$$\therefore \quad x \in \langle -\infty; -6\rangle \cup \langle -1; +\infty\rangle$$

Problema 3

Determine el conjunto solución de la inecuación

$$(3x-2)^2 \geq (2x-3)^2$$

Resolución:

$$(3x-2)^2 \geq (2x-3)^2$$

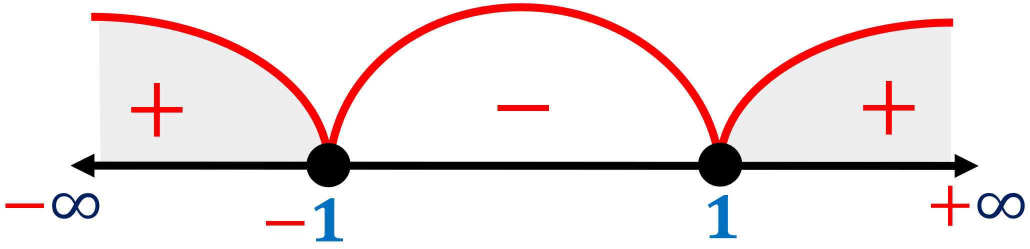
$$9x^2 - \cancel{12x} + 4 \geq 4x^2 - \cancel{12x} + 9$$

$$5x^2 - 5 \geq 0$$

$$5(x^2-1) \geq 0$$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$(x+1)(x-1) \geq 0$$



$$\therefore \quad x \in \langle -\infty; -1] \cup [1; +\infty\rangle$$

Problema 4

Resuelva

$$x^2 \leq 10x$$

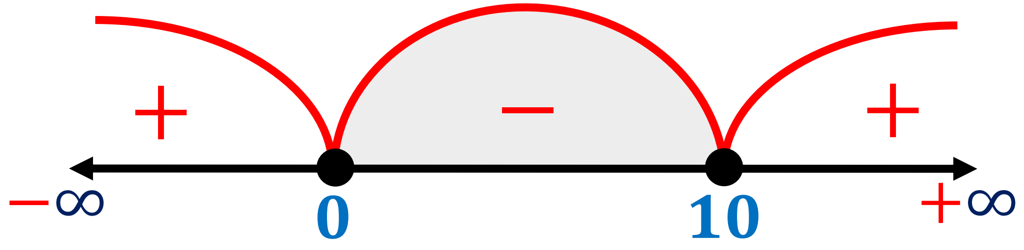
sabiendo que la suma de los valores enteros de x representa la edad del profesor Victor. Si dentro de 25 años se jubilará el profesor, ¿a los cuántos años se jubilará?

Resolución:

$$x^2 \leq 10x$$

$$x^2 - 10x \leq 0$$

$$x(x - 10) \leq 0$$



$$\boxed{x \in [0; 10]}$$

Edad del profesor Victor:

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 8 + 9 + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = \boxed{55 \text{ años}}$$

$\therefore$ *El profesor Victor se jubilará a los 80 años.*

Problema 5

Halle el conjunto solución de la inecuación

$$\frac{x^2-8}{4}+\frac{x(x+2)}{2}\le 3$$

Resolución:

$$\cancel{4}\left(\frac{x^2-8}{\cancel{4}}\right)+\cancel{4}\left(\frac{x(x+2)}{\cancel{2}}\right)\le 4(3) \qquad \boxed{mcm(4,2)=4}$$

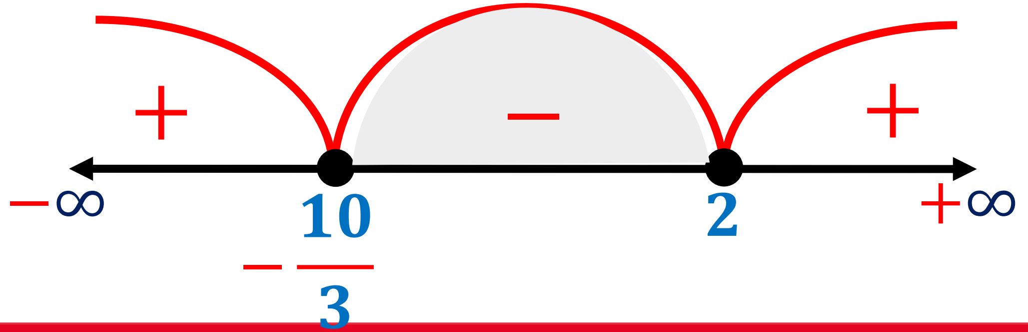
$$(x^2-8)+2x(x+2)\le 12$$

$$x^2-8+2x^2+4x\le 12$$

$$3x^2+4x-20\le 0$$

$$\begin{array}{lr} 3x & +10 \\ x & -2 \end{array}$$

$$(3x+10)(x-2)\le 0$$



$$\therefore\quad x\in\left[-\frac{10}{3};2\right]$$

Problema 6

Mateo desea comprar un automóvil, por tal motivo pide un préstamo al banco de crédito, si se sabe que el menor valor entero de m que verifica a:

$$2x^2 - 12x - 7 > -m \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

Representa la cantidad de meses de pago, además la cuota mensual a pagar es de s/ 1753 ¿Cuál fue el precio del automóvil?

RECUERDA:

Para que $ax^2 + bx + c > 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

se debe cumplir:

$$\land \qquad \Delta = b^2 - 4ac < 0$$

Resolución:

$$2x^2 - 12x - 7 > -m \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

$$2x^2 - 12x + (m - 7) > 0$$

positivo

Calculando el discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$\Delta = (-12)^2 - 4(2)(m - 7) < 0$$

$$144 - 8m + 56 < 0$$

$$200 < 8m$$

$$25 < m \quad \Rightarrow \quad \boxed{m > 25}$$

$$\therefore \quad 26x\,1\,753 = 45{,}578 \; soles$$

Problema 7

Los alumnos del tercer grado de la sede San Luis pertenecientes al colegio saco oliveros se presentan a un concurso de danza, al culminar las presentaciones se procede a la premiación, si el mínimo valor entero de b que verifica a: $x^2 - 4x + 2b \succ 0, \forall x \in \mathbb{R}$ resulta ser el puesto obtenido por la sede San Luis, ¿Qué tipo de medalla obtuvieron al final de la premiación?

RECUERDA:

Para que $ax^2 + bx + c > 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

se debe cumplir:

$\wedge \quad \Delta = b^2 - 4ac < 0$

Resolución:

$$1x^2 - 4x + 2b > 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$$

positivo

Calculando el discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

$$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(2b) < 0$$

$$16 - 8b < 0$$

$$16 < 8b$$

$$2 < b \Rightarrow \boxed{b > 2} \qquad b_{mín} = 3$$

$\therefore$ ***Obtuvierón medalla de bronce***