MATHEMATICAL REASONING

Chapter 17

3rd
SECONDARY

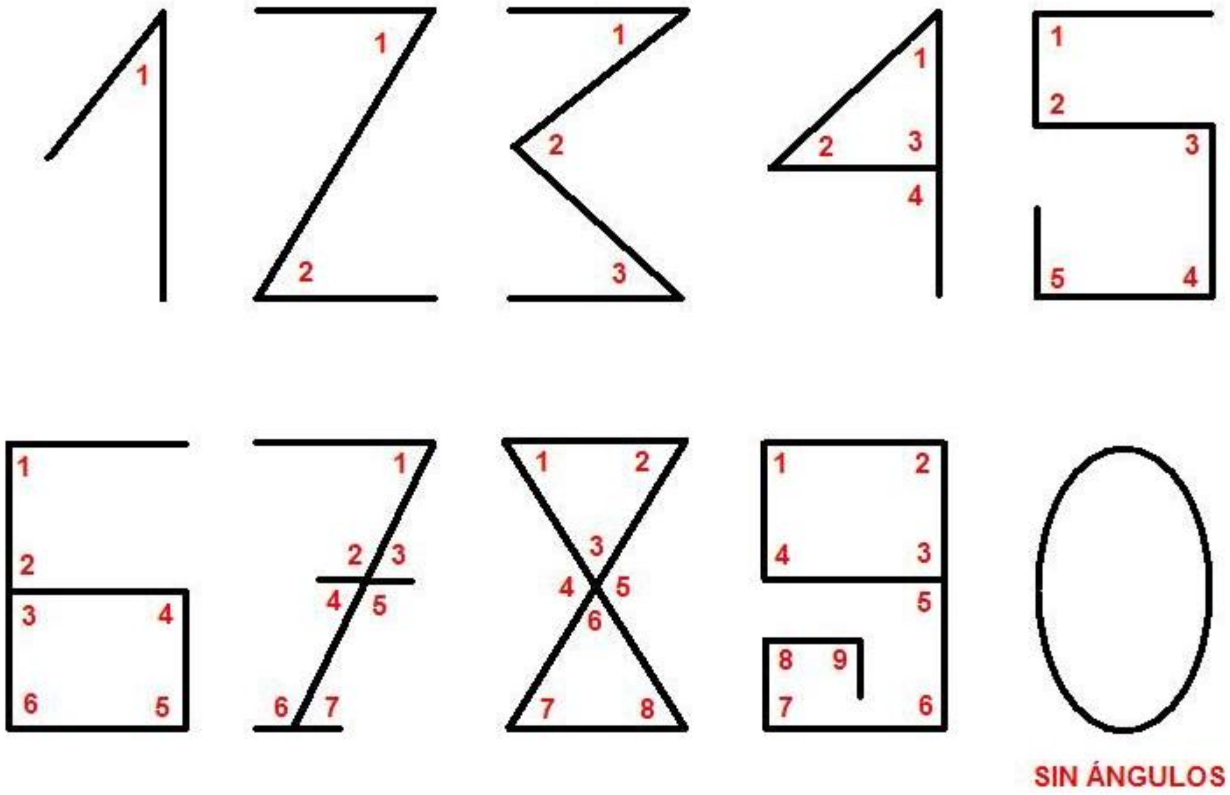
SERIES II

SACO OLIVEROS

HELICO MOTIVATION

CURIOSIDADES MATEMÁTICAS

Lo que comúnmente hoy llamamos números, 1, 2, 3, 4, 5…, son las llamadas cifras arábigas. Anteriormente se utilizaban los números romanos, pero los árabes popularizaron estas cifras, aunque anteriormente habían sido utilizadas por los fenicios y en la India. Una apasionante curiosidad es la explicación de por qué 1 significa “uno”, y 2 significa “dos”… es consecuencia de su número de ángulos….



HELICO THEORY

SERIE GEOMÉTRICA Es la adición indicada de los términos de una Sucesión Geométrica. Esta serie puede ser Finita o Infinita.

❑ SERIE GEOMÉTRICA FINITA

EN GENERAL

$$\boxed{S = \frac{t_1 \times (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Donde, t_1 : Primer sumando

q : Razón geométrica

n : Cantidad de sumandos

Por Ejemplo

$$\overbrace{3 + 6 + 12 + 24 + \cdots}^{\text{40 sumandos}}$$

x2 x2 x2

$$S = \frac{3(2^{40} - 1)}{2 - 1}$$

$$\therefore \quad S = 3(2^{40} - 1)$$

HELICO THEORY

serie geométrica

- SERIE GEOMÉTRICA DECRECIENTE INFINITA

EN GENERAL

$$S_\infty = \frac{t_1}{1 - q}$$

Donde, q : Razón geométrica

$$0 < |q| < 1$$

Por Ejemplo

$$S_\infty = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \cdots$$

$$\times\frac{1}{5} \qquad \times\frac{1}{5} \qquad \times\frac{1}{5}$$

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4}$$

HELICO THEORY

otras series notables

SERIE DE PRODUCTOS

- PRODUCTOS BINARIOS

$$S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1) \longrightarrow \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

- PRODUCTOS TERNARIOS

$$S_n = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1)\times(n+2)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

RESOLUCIÓN DE LA PRÁCTICA

PROBLEMA 1

Halle el valor de R:

$$R = \underbrace{2 + 4 + 8 + 16 + \cdots}_{\text{30 términos}}$$

RECORDEMOS:

$$\boxed{S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Resolución:

$$R = \overbrace{2 + 4 + 8 + 16 + \cdots}^{\text{30 términos}}$$

x2 x2 x2

$$R = \frac{2(2^{30} - 1)}{2 - 1}$$

$$R = 2(2^{30} - 1)$$

$$R = 2^{31} - 2$$

$$\therefore \quad 2^{31} - 2$$

PROBLEMA 2

Calcule:

$$S = \underbrace{5 + 15 + 45 + 135 +}_{20\text{ términos}} \cdots$$

RECORDEMOS:

$$\boxed{S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Resolución:

$$S = \overbrace{5 + 15 + 45 + 135 +}^{20\text{ términos}} \cdots$$

x3 x3 x3

$$S = \frac{5(3^{20} - 1)}{3 - 1}$$

$$S = \frac{5(3^{20} - 1)}{2}$$

$$\therefore \frac{5(3^{20} - 1)}{2}$$

PROBLEMA 3

Efectué:

$$S = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \cdots \infty$$

RECORDEMOS:

$$\boxed{S_\infty = \frac{t_1}{1 - q}}$$

Resolución:

$$S_\infty = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \cdots \infty$$

$$\text{x}\frac{1}{6} \quad \text{x}\frac{1}{6} \quad \text{x}\frac{1}{6}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}} \longrightarrow S_\infty = \frac{1}{\frac{5}{6}}$$

$$S_\infty = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \frac{6}{5}$$

PROBLEMA 4

Calcule: $S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + \cdots + 20\times 21$

Resolución:

$$S = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 5 + \cdots + 20\times 21 \longrightarrow n = 20$$

RECORDEMOS:

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

Remplazando

$$S = \frac{20(\overset{7}{\cancel{21}})(22)}{\cancel{3}} \longrightarrow S = 140(22)$$

$$S = 3080$$

$$\therefore\ 3080$$

PROBLEMA 5

Roxana está resolviendo su balotario mensual y tiene mucha dificultad con este problema: Halle el valor de la serie:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \cdots \infty$$

¿Cuál fue la respuesta de Roxana

RECORDEMOS:

$$\boxed{S_\infty = \frac{t_1}{1-q}}$$

Resolución:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \cdots \infty$$

$$\text{x}\frac{1}{5} \quad \text{x}\frac{1}{5} \quad \text{x}\frac{1}{5} \quad \text{x}\frac{1}{5}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \longrightarrow S_\infty = \frac{1}{\frac{4}{5}}$$

$$S_\infty = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \frac{5}{4}$$

PROBLEMA 5

Juan Carlos es el papá de Karen. Éste le propone a su hija que por el primer problema que resuelva le dará un céntimo, por el segundo 3 céntimos, por el tercero 9 céntimos, por el cuarto 27 céntimos y así sucesivamente. Si Juan Carlos tuvo que pagar por 30 problemas que resolvió su hija, podría usted decir, ¿cuánto dinero pagó?

RECORDEMOS:

$$S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Resolución:

$$S = \overbrace{1 + 3 + 9 + 27 + \cdots}^{\text{30 sumandos}}$$

x3 x3 x3

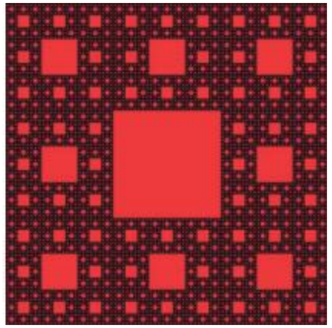
$$S = \frac{1(3^{30} - 1)}{3 - 1}$$

$$S = \frac{(3^{30} - 1)}{2}$$

$$\therefore \frac{(3^{30} - 1)}{2} \text{ céntimos}$$

PROBLEMA 6

Un fractal es un objeto geométrico cuya estructura básica, fragmentada o aparentemente irregular, se repite a diferentes escalas. El término fue propuesto por el matemático Benoít Mandelbrot en 1975 y deriva del latín fractus, que significa quebrado o fracturado. Muchas estructuras naturales son de tipo fractal. La propiedad matemática clave de un objeto genuinamente fractal es que su dimensión métrica fractal es un número racional mayor a su dimensión topológica. Waclaw Franciszek Sierpinski fue un matemático polaco muy relacionado con el desarrollo del concepto de fractal, famosa es su alfombra.



Los números que a continuación se suman se asemejan a un conjunto de fractales, indique el valor de dicha suma limite.

$$S=\frac{8}{27}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{9}{128}+\cdots\infty$$

Resolución:

$$S=\frac{8}{27}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{9}{128}+\cdots\infty$$

$$\text{x}\frac{3}{4}\quad \text{x}\frac{3}{4}\quad \text{x}\frac{3}{4}\quad \text{x}\frac{3}{4}\quad \text{x}\frac{3}{4}$$

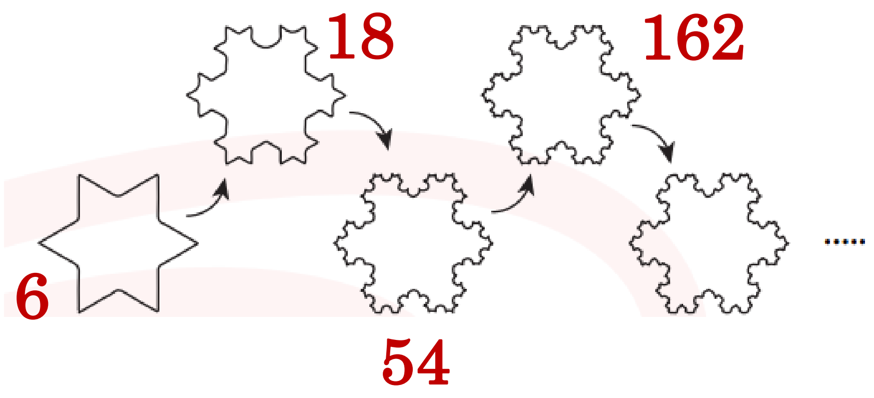
$$S_\infty=\frac{\frac{8}{27}}{1-\frac{3}{4}} \longrightarrow S_\infty=\frac{\frac{8}{27}}{\frac{1}{4}}$$

$$S_\infty=\frac{32}{27}$$

$$\therefore \frac{32}{27}$$

PROBLEMA 7

Niels Fabian Helge von Koch (Estocolmo, 25 de enero de 1870-ibídem, 11 de marzo de 1924) fue un matemático sueco, cuyo nombre se ha asignado a una famosa curva fractal llamada curva Copo de nieve de Koch, una de las primeras curvas fractales en ser descritas Describió la curva que lleva su nombre Koch en un artículo de 1904 titulado Acerca de una curva continua que no posee tangentes y obtenida por los métodos de la geometría elemental. La siguiente secuencia gráfica finita de 10 elementos es muy parecida a lo descrito por Koch, en ella se debe contar las puntas en cada figura y luego calcular el valor de la suma de los números así obtenidos.



Resolución:

$$S = \overbrace{6 + 18 + 54 + 162 + \cdots}^{\text{10 sumandos}}$$

x3 x3 x3

$$S = \frac{6(3^{10}-1)}{3-1}$$

$$S = \frac{6(3^{10}-1)}{2}$$

$$S = 3(3^{10}-1)$$

$$\therefore \ 3^{11} - 3$$