



TRIGONOMETRY

Chapter 11

5th
SECONDARY

IDENTIDADES
TRIGONOMÉTRICAS I



 **SACO OLIVEROS**



En matemáticas uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas.

(John von Neumann)

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

¿Qué es una identidad trigonométrica?

Son igualdades en donde intervienen las razones trigonométricas, las cuales se verifican para todo valor admisible de la variable angular. Es decir, donde las razones trigonométricas estén definidas.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

IDENTIDADES POR DIVISIÓN:

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\text{sen} x}$$



IDENTIDADES RECÍPROCAS

$$\text{sen}x \cdot \text{csc}x = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}x = \frac{1}{\text{csc}x} \\ \text{csc}x = \frac{1}{\text{sen}x} \end{array} \right.$$

$$\text{cos}x \cdot \text{sec}x = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{cos}x = \frac{1}{\text{sec}x} \\ \text{sec}x = \frac{1}{\text{cos}x} \end{array} \right.$$

$$\text{tan}x \cdot \text{cot}x = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tan}x = \frac{1}{\text{cot}x} \\ \text{cot}x = \frac{1}{\text{tan}x} \end{array} \right.$$



IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$$\mathbf{sen^2 x + cos^2 x = 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} sen^2 x = 1 - cos^2 x \\ cos^2 x = 1 - sen^2 x \end{array} \right.$$

$$\mathbf{sec^2 x - tan^2 x = 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} tan^2 x = sec^2 x - 1 \\ sec^2 x = tan^2 x + 1 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{csc^2 x - cot^2 x = 1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} cot^2 x = csc^2 x - 1 \\ csc^2 x = cot^2 x + 1 \end{array} \right.$$



1. Reduzca la expresión

$$E = \operatorname{sen}^3 x \cdot \operatorname{csc} x + \cos^3 x \cdot \sec x$$

RESOLUCIÓN

$$E = \operatorname{sen}^3 x \cdot \operatorname{csc} x + \cos^3 x \cdot \sec x$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x \cdot \underbrace{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} x}_1 + \cos^2 x \cdot \underbrace{\cos x \cdot \sec x}_1$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

Recordar las identidades:

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} x = 1$$

$$\cos x \cdot \sec x = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

∴

$$E = 1$$



2. Reduzca : $W = \frac{\csc \theta + \sec \theta}{1 + \tan \theta}$

RESOLUCIÓN

$$W = \frac{\csc \theta + \sec \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$W = \frac{\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$W = \frac{\frac{\cancel{\cos \theta}^1 + \cancel{\sin \theta}}{\cancel{\sin \theta} \cancel{\cos \theta}}}{\frac{\cancel{\cos \theta} + \cancel{\sin \theta} 1}{\cancel{\cos \theta} 1}}$$

$$W = \frac{1(1)}{\sin \theta(1)}$$

$$W = \frac{1}{\sin \theta}$$

Recordar las identidades:

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

\therefore

$$W = \csc \theta$$



3. Reduzca : $E = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} - \sec^2 x$

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} - \sec^2 x$$

$$E = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \underbrace{\sec^2 x}_{1 + \tan^2 x}$$

Recordar las identidades:

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

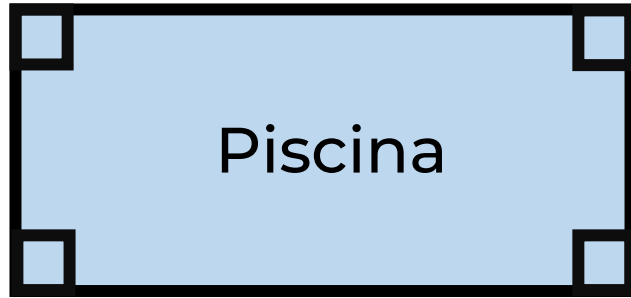
$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$E = \cancel{\tan^2 x} - 1 - \cancel{\tan^2 x}$$

\therefore

$$\boxed{E = -1}$$

4. Mi amiga María se ha matriculado en una piscina, cerca de su casa. La piscina tiene forma rectangular, como se muestra el dibujo y sus dimensiones son las siguientes:



Ancho: $5A$ metros

Largo: $10A$ metros

En una hora que María está en la piscina, comienza nadando 3 veces el ancho para calentar los músculos, y después 6 largos completos como le indica su monitor. ¿Cuántos metros nadará María?

Para resolver el problema, primero halle el valor de A de la siguiente identidad:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = A \cot x$$

**RESOLUCIÓN**

$$\frac{\cancel{\text{sen}x} - \cancel{\text{sen}x}}{1 - \cos x} = \frac{\text{sen}x(1 + \cos x) - \text{sen}x(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$\frac{\cancel{\text{sen}x} + \text{sen}x \cdot \cos x - \cancel{\text{sen}x} + \text{sen}x \cdot \cos x}{(1 - \cos^2 x)} = \frac{2\cancel{\text{sen}x} \cdot \cos x}{\cancel{\text{sen}^2} x}$$

$$\frac{2\cos x}{\text{sen}x} = 2\cot x \quad \Rightarrow \quad 2\cot x = A \cot x \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

Ancho : $5A = 5(2) = 10$ metros

Largo : $10A = 10(2) = 20$ metros

\Rightarrow María nadará : $3(10) + 6(20)$

\therefore **150 metros**



5. Si x es un ángulo del segundo cuadrante, reduzca la expresión

$$E = \frac{\operatorname{sen} x}{\csc x} - \cos x \sqrt{\frac{\csc^2 x - \cot^2 x}{1 + \tan^2 x}}$$

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{\operatorname{sen} x}{\csc x} - \cos x \sqrt{\frac{\csc^2 x - \cot^2 x}{1 + \tan^2 x}}$$

$$E = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{1}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} - \cos x \sqrt{\frac{(1 + \cancel{\cot^2 x}) - \cancel{\cot^2 x}}{\sec^2 x}}$$

*Como $x \in IIC$
 $\cos x$ es $(-)$*

$$E = \operatorname{sen}^2 x - \cos x \sqrt{\frac{1}{\sec^2 x}}$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x - \cos x \left| \frac{1}{\sec x} \right|$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x - \cos x |\cos x|$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x - \cos x (-\cos x)$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

∴

$$\boxed{E = 1}$$



6. Vía internet, se realizó una encuesta para saber el número de seguidores de la página web “Trigonometry Forever”; el resultado obtenido revela que dicha página tiene: $(1000\sec^2x \cdot \csc^2x + 235)$ seguidores, con la condición de $\operatorname{sen}x - \operatorname{cos}x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. ¿Cuántos seguidores tiene dicha página?

RESOLUCIÓN

Del dato: $(\operatorname{sen}x - \operatorname{cos}x)^2 = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow 1 - 2\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{cos}x = \frac{1}{2}$$

$$2\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{cos}x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{cos}x = \frac{1}{4}$$



$$\sec x \cdot \csc x = 4$$

$$\sec^2 x \cdot \csc^2 x = 16$$

Reemplazamos en

$$1000\sec^2 x \cdot \csc^2 x + 235$$



$$1000(16) + 235$$

\therefore Tiene 16235 seguidores.





7. Un alumno observa que las longitudes de dos lados de un cuadrado miden $(3\operatorname{sen}x)m$ y $(2 + 2\operatorname{cos}x)m$; con esta información, dar el valor de $12(1 - \operatorname{cot}x)$.

RESOLUCIÓN

En un cuadrado sus lados son iguales, entonces:

$$3\operatorname{sen}x = 2 + 2\operatorname{cos}x$$

$$\Rightarrow 3\operatorname{sen}x = 2(1 + \operatorname{cos}x)$$

$$\frac{3}{2} = \operatorname{csc}x + \operatorname{cot}x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \operatorname{csc}x - \operatorname{cot}x$$

RESTAMOS

$$\Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = 2\operatorname{cot}x$$

$$\frac{9 - 4}{6} = 2\operatorname{cot}x$$

$$\frac{5}{6} = 2\operatorname{cot}x$$

$$\frac{5}{12} = \operatorname{cot}x$$

Calculamos: $E = 12(1 - \operatorname{cot}x)$

Reemplazamos:

$$E = 12\left(1 - \frac{5}{12}\right)$$

$$\therefore E = 7$$