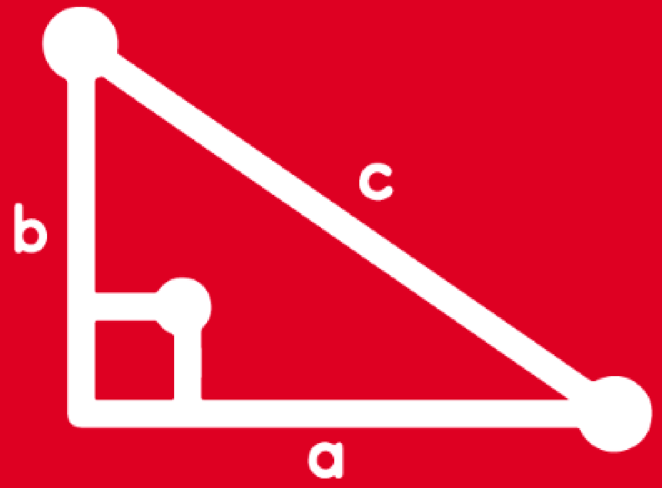
TRIGONOMETRY

Chapter 23

3rd
SECONDARY



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

SACO OLIVEROS


El talento no nos sirve de nada
si no lo acompañamos
de esfuerzo y constancia.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Se obtienen a partir de las identidades del ángulo compuesto cuando $\beta = \alpha$

Ejemplo:

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$$

$$\operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha$$

$$\boxed{\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}$$

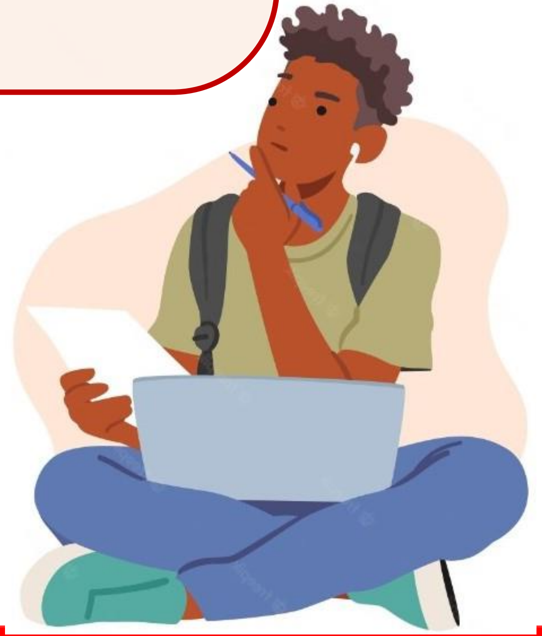
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

Además utilizando identidad pitagórica :

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$



HELICO PRACTICE 1

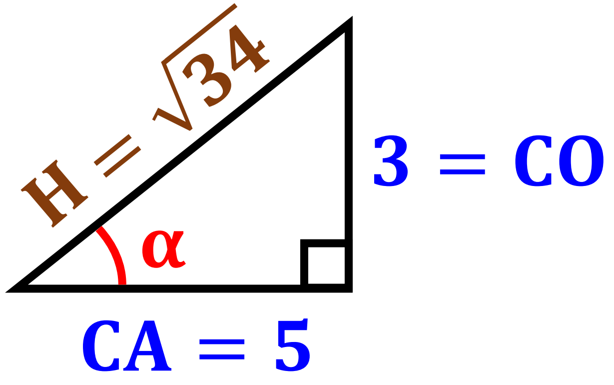
Siendo α un ángulo agudo, tal que $\tan\alpha = \frac{3}{5}$, calcule sen2α .

RESOLUCIÓN

Recordar :

$\text{sen}2\alpha = 2\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha$

Dato : $\tan\alpha = \frac{3}{5} = \frac{CO}{CA}$



Luego : $\text{sen}2\alpha = 2\,\text{sen}\alpha\,\cos\alpha$

$\Rightarrow \text{sen}2\alpha = 2\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = \frac{30}{34}$

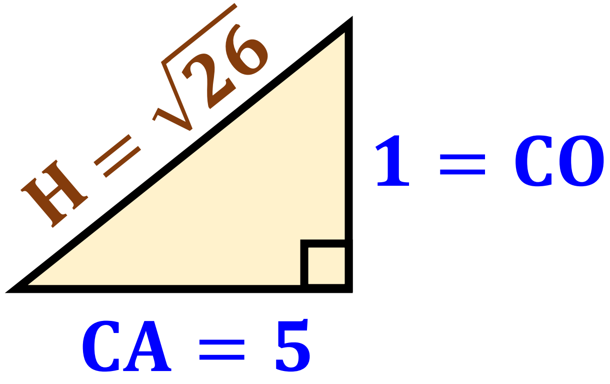
$\boxed{\therefore\ \text{sen}2\alpha = \frac{15}{17}}$

HELICO PRACTICE 2

Siendo β un ángulo agudo tal que $\tan\beta = \frac{1}{5}$, calcule $\cos 2\beta$.

RESOLUCIÓN

Dato : $\tan\beta = \frac{1}{5} = \frac{CO}{CA}$



Recordar :

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta$$

Luego : $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2 = \frac{25}{26} - \frac{1}{26} = \frac{24}{26}$$

$$\therefore \cos 2\beta = \frac{12}{13}$$

HELICO PRACTICE 3

Si θ es un ángulo agudo, tal que $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, calcule cos2θ .

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1$$

$$\cos 2\theta = 2\left(\frac{4}{5}\right) - 1$$

$$\cos 2\theta = \frac{8}{5} - \frac{5}{5}$$

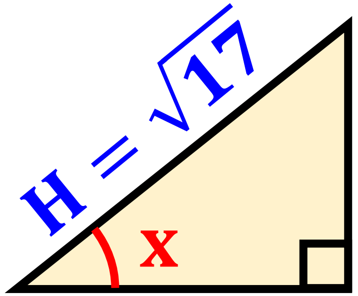
$$\therefore \cos 2\theta = \frac{3}{5}$$

HELICO PRACTICE 4

Siendo x un ángulo agudo y $\csc x = \sqrt{17}$, calcule tan2x .

RESOLUCIÓN

$$\csc x = \frac{\sqrt{17}}{1} = \frac{H}{CO}$$



$1 = CO$

$CA = 4$

❖ Obtenemos : $\tan x = \frac{1}{4}$

❖ Luego :

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$\tan 2x = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{16}{16}-\frac{1}{16}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{15}{16}} = \frac{16}{30}$$

$$\therefore \tan 2x = \frac{8}{15}$$

HELICO PRACTICE 5

Calcule M + N si : M = 2 sen15° cos15° , N = $\cos^2 18°30' - \text{sen}^2 18°30'$

RESOLUCIÓN

M = 2 sen15° cos15°

Recordar :

sen2α = 2 senα cosα

M = sen2(15°)

M = sen30°

M = $\frac{1}{2}$

N = $\cos^2 18°30' - \text{sen}^2 18°30'$

Recordar :

cos2α = $\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha$

N = cos2(18° 30’)

N = cos36° 60’

N = $\cos 37° = \frac{4}{5}$

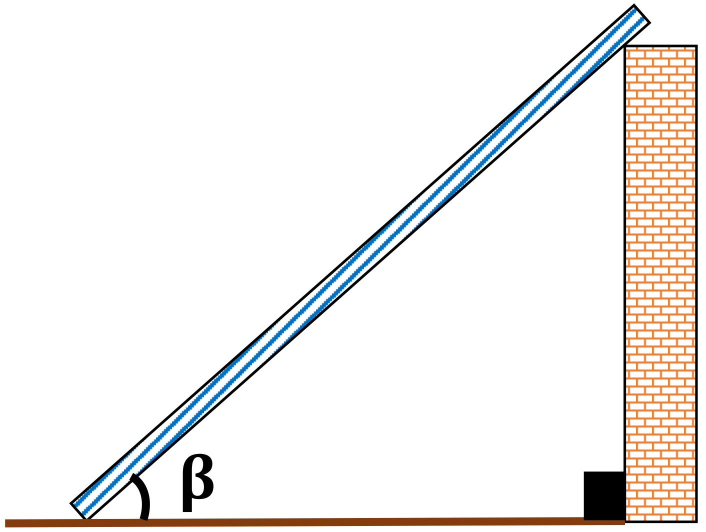
❖ Luego :

M + N = $\frac{1}{2} + \frac{4}{5}$

$\therefore$ M + N = $\frac{13}{10}$

HELICO PRACTICE 6

Una barra metálica se encuentra apoyada sobre una pared, tal como se muestra en la figura.- Calcule tanβ.



$$40^0 + 50^0 = 90^0 \Rightarrow \text{sen}40^0 = \cos 50^0$$

RESOLUCIÓN

$$\tan\beta = \frac{\cos^2 25° - \text{sen}^2 25°}{2\,\text{sen}20°.\cos20°}$$

$$\tan\beta = \frac{\cos2(25°)}{\text{sen}2(20°)}$$

$$\tan\beta = \frac{\cos50°}{\text{sen}40°} = \frac{\cos50°}{\cos50°}$$

$$\boxed{\therefore \tan\beta = 1}$$

HELICO PRACTICE 7

En una clase de Trigonometría, el profesor Jorge preguntó sobre el resultado de la siguiente expresión:
$F = 4\,\text{sen}10°.\ \cos 10°.\ \cos 20°.\ \cos 40°$; ante lo cual cuatro alumnos levantaron sus manos para indicar sus respuestas, las cuales fueron :

- Andrea : $\cos 40°$
- Beatriz : $2\cos 40°$
- Carlos : $\cos 80°$
- Daniel : $\dfrac{\cos 80°}{2}$.

¿ Qué alumno acertó en la respuesta ?

RESOLUCIÓN

$$F = 4\,\text{sen}10°.\ \cos 10°.\ \cos 20°.\ \cos 40°$$

$$F = 2\ .\ \boxed{2\ \text{sen}10º.\ \cos 10º}\ .\ \cos 20º.\ \cos 40º$$

$$F = \boxed{2\quad \text{sen}20º\ .\ \cos 20º}\ .\ \cos 40º$$

$$2\ F = \boxed{2\ \ \text{sen}40º\ .\ \cos 40º}$$

$$2\ F = \text{sen}80°$$

$$\boxed{\therefore\ F = \frac{\text{sen}80°}{2}}$$

$\therefore$ Ningún alumno acertó .

SACO OLIVEROS