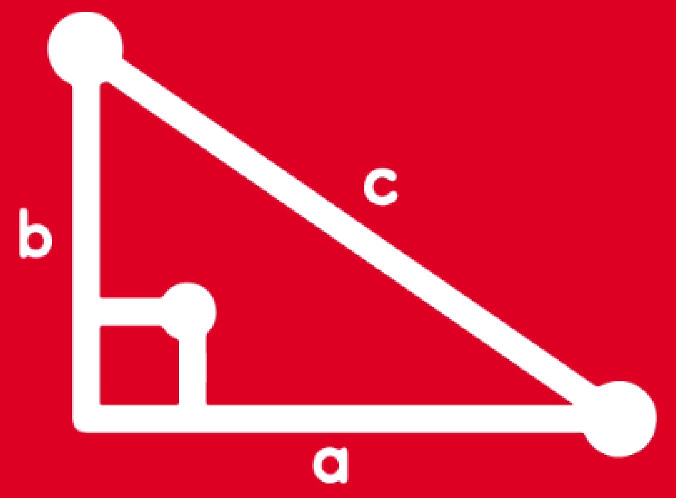
TRIGONOMETRY

Chapter 13

5th
SECONDARY



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO COMPUESTO

SACO OLIVEROS

¿A que será igual seno de 83° ?

¿A que será igual coseno de 105°?

¿A que será igual seno de 8°?

¿A que será igual coseno de 16°?

¡Los ángulos de 83°, 105°, 8° y 16° no son Notables!

¡Pero tenemos: 30°, 60°, 45°, 37°, 53° que si son notables!

Podemos obtener el ángulo de 83°, 105°, 8° y 16° en función a los ángulos notables antes mencionados, por ejemplo:

$83° = 30° + 53°$, por lo tanto: $\text{sen } 83° = \text{sen } (30° + 53°)$

$105° = 60° + 45°$, por lo tanto: $\cos 105° = \cos (60° + 45°)$

$8° = 53° - 45°$, por lo tanto: $\text{sen } 8° = \text{sen } (53° - 45°)$

$16° = 53° - 37°$, por lo tanto: $\cos 16° = \cos (53° - 37°)$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPUESTOS

- **PARA LA SUMA DE DOS ÁNGULOS:**

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x.\cos y+\cos x.\operatorname{sen}y$$

$$\cos(x+y)=\cos x.\cos y-\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y$$

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x.\tan y}$$

- **PARA LA DIFERENCIA DE DOS ÁNGULOS:**

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x.\cos y-\cos x.\operatorname{sen}y$$

$$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y$$

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x.\tan y}$$

1 Calcule el valor de

a. sen82°

b. cos15°

Resolución:

Como: $82° = 45° + 37°$ ➡ $\text{sen}(82°) = \text{sen}(45° + 37°)$

$$\Rightarrow \text{sen}82° = \underbrace{\text{sen}45°}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\underbrace{\cos 37°}_{\left(\frac{4}{5}\right)} + \underbrace{\cos 45°}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\underbrace{\text{sen}37°}_{\left(\frac{3}{5}\right)}$$

$$\therefore \text{sen}82° = \boxed{\frac{7\sqrt{2}}{10}}$$

Como: $15° = 45° - 30°$ ➡ $\cos(15°) = \cos(45° - 30°)$

$$\Rightarrow \cos 15° = \underbrace{\cos 45°}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\underbrace{\cos 30°}_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \underbrace{\text{sen}45°}_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\underbrace{\text{sen}30°}_{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\therefore \cos 15° = \boxed{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$$

2 Observe el siguiente diagrama que indica el espacio utilizado de la memoria USB (GB):

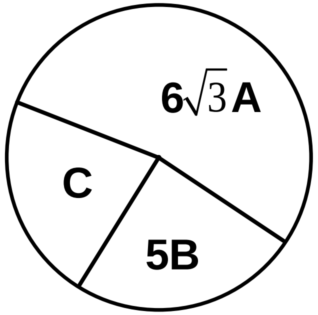
Donde

A = sen40°·cos20°+ cos40°·sen20°

B = cos63°·cos10°+ sen63°·sen10°

Indique el espacio disponible de la memoria USB.

Distribución del almacenamiento de una memoria USB de 16 GB



$6\sqrt{3}A$	: Música
5B	: Fotos
C	: Espacio disponible

Resolución:

$$A = \underbrace{\text{sen}40°\cdot\cos20° + \cos40°\cdot\text{sen}20°}_{\text{sen}(40°+20°)\,=\,\text{sen}60°} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B = \underbrace{\cos63°\cdot\cos10° + \text{sen}63°\cdot\text{sen}10°}_{\cos(63°-10°)\,=\,\cos53°} \Rightarrow B = \frac{3}{5}$$

MÚSICA: $6\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9$ GB

FOTOS: $5.\left(\frac{3}{5}\right) = 3$ GB

$\therefore$ ESPACIO DISPONIBLE: 4 GB

3 Si se cumple que $4\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, calcule senxcosx.

Resolución:

$$4\left[\cos x\cos\cancel{\frac{\pi}{4}}+\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\cancel{\frac{\pi}{4}}\right]=\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cancel{\sqrt{2}}[\cos x+\operatorname{sen}x]=\cancel{\sqrt{2}}$$

$$\left\{\cos x+\operatorname{sen}x=\frac{1}{2}\right\}^2 \Rightarrow 1+2\operatorname{sen}x\cos x=\frac{1}{4} \Rightarrow 2\operatorname{sen}x\cos x=-\frac{3}{4}$$

Recordar: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$\cos(x-y)=\cos x.\cos y+\operatorname{sen}x.\operatorname{sen}y$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen}x\cos x=-\frac{3}{8}}$$

4 Carlos recibe de propina $\frac{\text{sen}(x+y)}{\text{senx.cosy}}$ soles, y Juana recibe de propina $\frac{\text{sen}(x-y)}{\text{senx.cosy}}$ soles. ¿Cuánto es la suma de las propinas de Carlos y Juana?

Recordar las identidades

$$\frac{\text{sen}(x \pm y)}{\text{senx}.\cos y} = 1 \pm \tan y.\cot x$$

Resolución:

Del dato:

Carlos recibe= $\frac{\text{sen}(x+y)}{\text{senx}.\text{cosy}}$

$= 1 + \text{tany}.\text{cotx}$ ……… (α)

Carlos recibe= $\frac{\text{sen}(x-y)}{\text{senx}.\text{cosy}}$

$= 1 - \text{tany}.\text{cotx}$ ……… (β)

Luego de α y β:

Suma de propinas:

$1 + \cancel{\text{tany}.\text{cotx}} + 1 - \cancel{\text{tany}.\text{cotx}}$

$\therefore$ $\boxed{\text{Suma de propinas} = S/2}$

5 Siendo $\alpha - \beta = 30°$, halle el valor de
$E = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)^2 + (\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$

Recordar: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}x.\cos y - \cos x.\operatorname{sen}y$

Resolución:

$$E = (\operatorname{sen}\alpha + \cos\beta)^2 + (\cos\alpha - \operatorname{sen}\beta)^2$$

$$E = \operatorname{sen}^2\alpha + 2\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}^2\beta$$

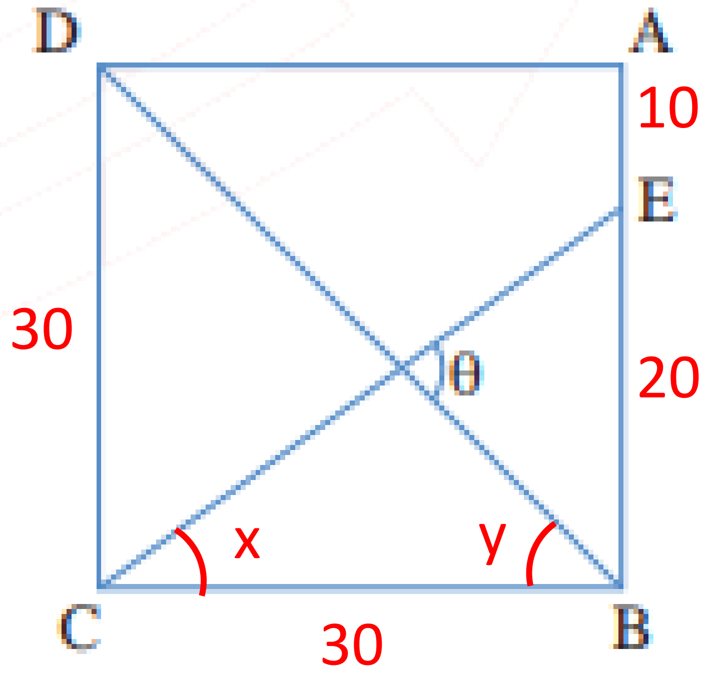
$$E = \underbrace{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}_{1} + 2\underbrace{(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta)}_{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)} + \underbrace{\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta}_{1}$$

$$E = 2 + 2\operatorname{sen}30° = 2 + \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

$\therefore$ $\boxed{E = 3}$

6 Un albañil desea cortar una baldosa cuadrangular ABCD; los cortes a realizar son BD y CE los cuales forman un ángulo θ, como se indica en la figura. Si AE= 10 cm y BE= 20 cm; dar el valor de tanθ.

Resolución:



Del gráfico:

$$\tan x = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \quad ; \quad \tan y = 1$$

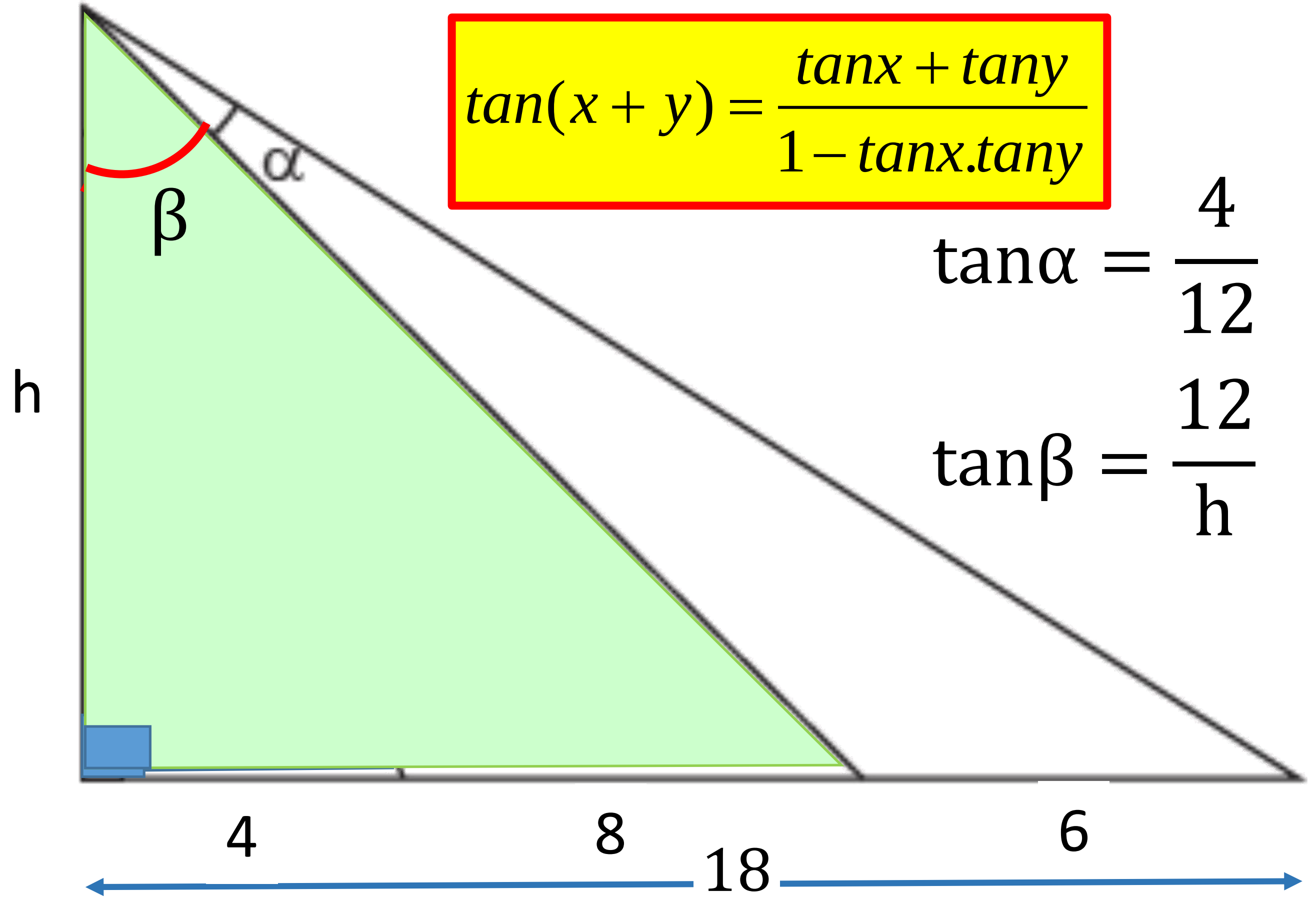
Se observa que: $\theta = x + y \longrightarrow \tan\theta = \tan(x+y)$

$$\tan\theta = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x . \tan y} \longrightarrow \tan\theta = \frac{\frac{2}{3} + 1}{1 - \frac{2}{3}(1)}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{1}{3}}$$

$\therefore$ $\boxed{\tan\alpha = 5}$

7 El joven Félix ubicado en la azotea de un edificio observa tres autos estacionados en línea recta respecto a la base del edificio. Considerando los datos del gráfico; calcule la altura del edificio.



$$tan(x+y)=\frac{tanx+tany}{1-tanx.tany}$$

$$\tan\alpha=\frac{4}{12}$$

$$\tan\beta=\frac{12}{h}$$

Resolución:

Se observa que: $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{18}{h}$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{18}{h}$$

$$\frac{\frac{4}{h}+\frac{12}{h}}{1-\left(\frac{4}{h}\right)\left(\frac{12}{h}\right)}=\frac{18}{h} \Rightarrow \frac{\frac{16}{h}}{1-\frac{48}{h^2}}=\frac{18}{h}$$

$$8h^2=9h^2-432$$

$$h^2=432$$

$$\therefore \boxed{h=12\sqrt{3}m}$$

SACO
OLIVEROS