GEOMETRÍA

Capítulo 19

5th
SECONDARY

Esfera y teorema de Pappus

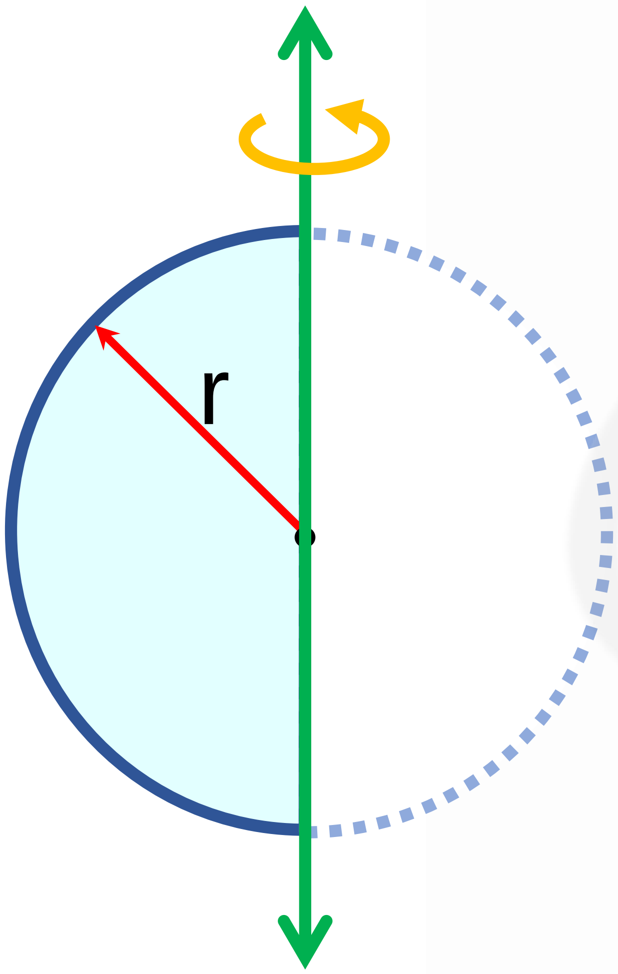
SACO OLIVEROS

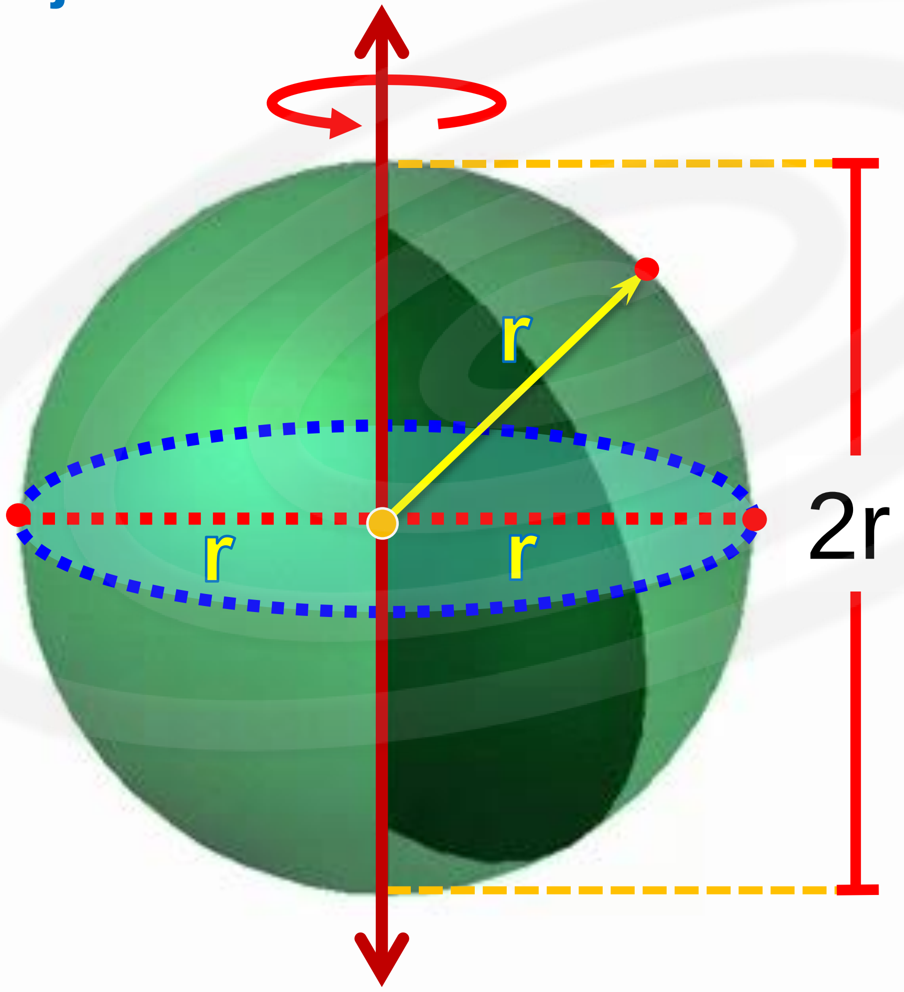
La esfera es la figura que tiene diversas aplicaciones, se diseñan objetos como una billa de acero, un balón de fútbol, un globo terráqueo, se usa en rodamientos, etc. La naturaleza nos brinda frutas de forma esférica, una naranja, el limón, la lima, una cereza, etc.




ESFERA

Es el sólido generado por un semicírculo cuando gira alrededor de su diámetro tomado como eje.





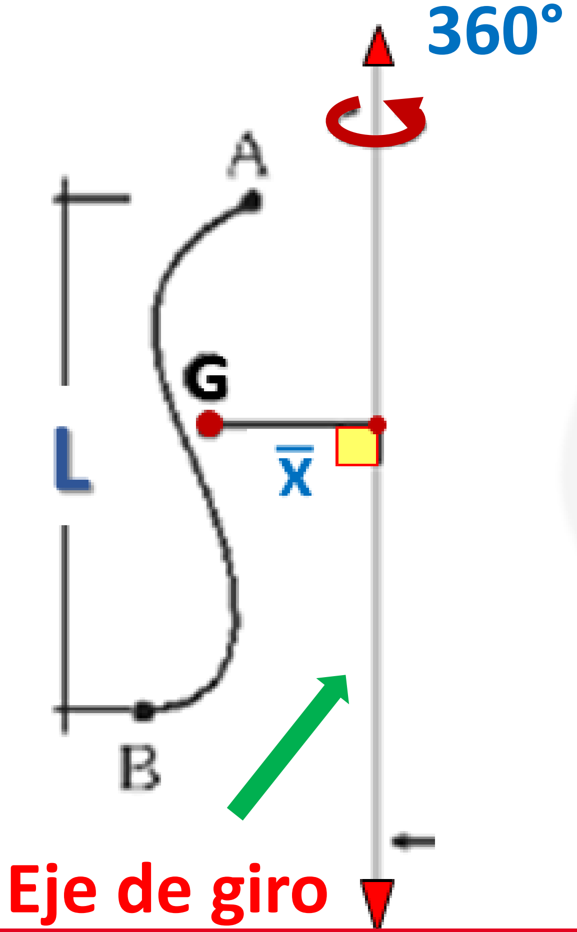
$$\mathbb{V}_{esfera} = \frac{4}{3}\pi.r^3$$

$$\mathbb{A}_{\substack{superficie\\esférica}} = 4\pi.r^2$$

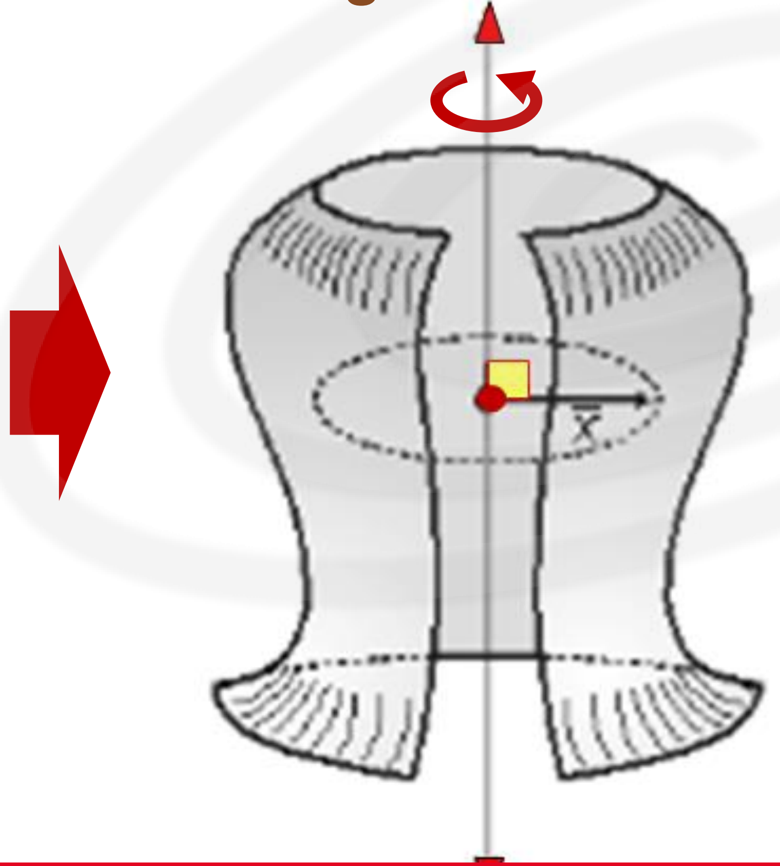
TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN

1. Superficie de revolución

El área de la superficie generada por una línea plana al girar 360° en torno a una recta coplanal y no secante a dicha línea.



Corte de la superficie generado



A_{SG}: Área de la superficie generada.

L : Longitud de la línea AB.

G : Centroide de la línea AB.

x : Longitud del radio de la circunferencia descrita por el centroide.

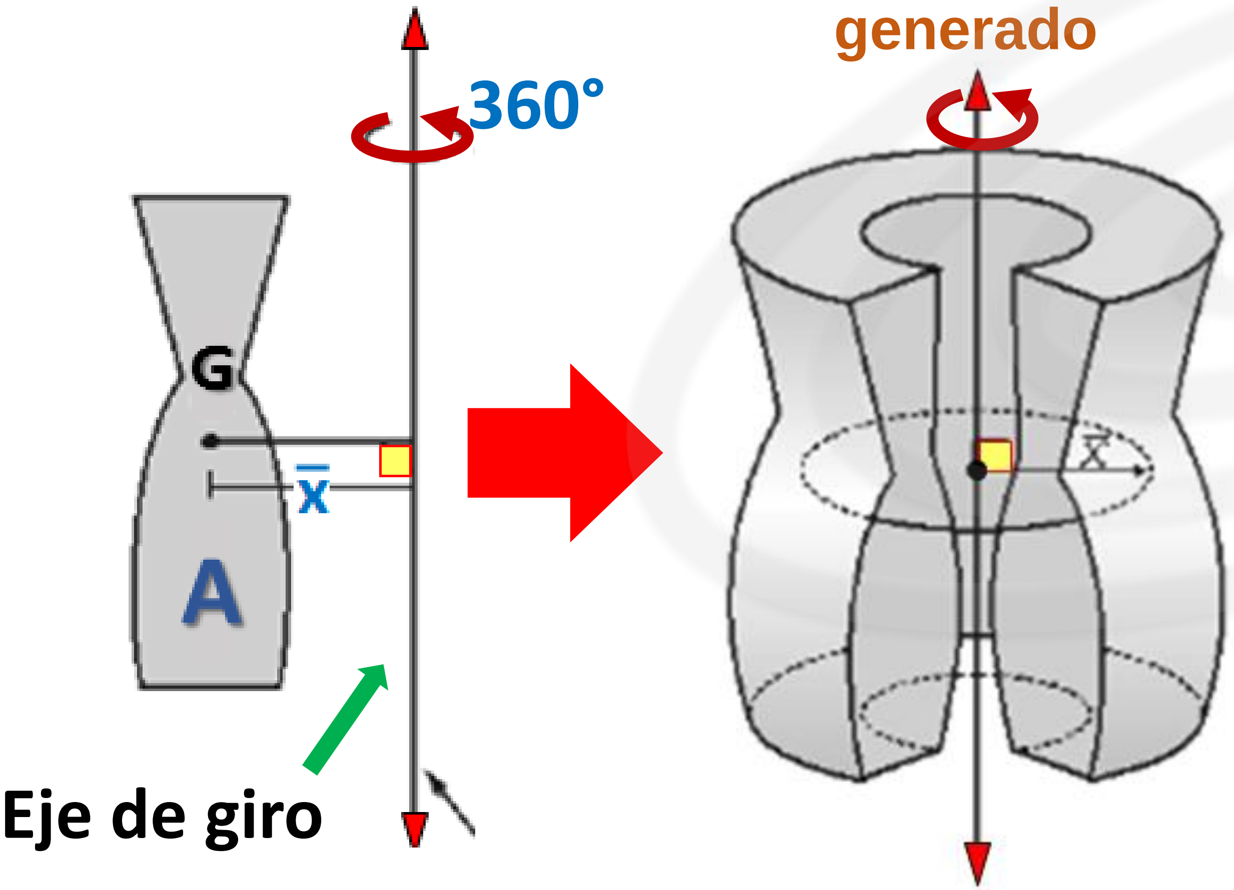
$$\boxed{A_{S.G} = 2 \cdot \pi \cdot (x) \cdot L}$$

TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN

2. Sólido de revolución

El volumen del sólido generado por una región plana al girar 360° en torno a una recta coplanal y no secante a dicha región.

Corte de la sólido generado



$\mathbb{V}_{S.G}$: Volumen del sólido generado.

A : Área de la región generadora.

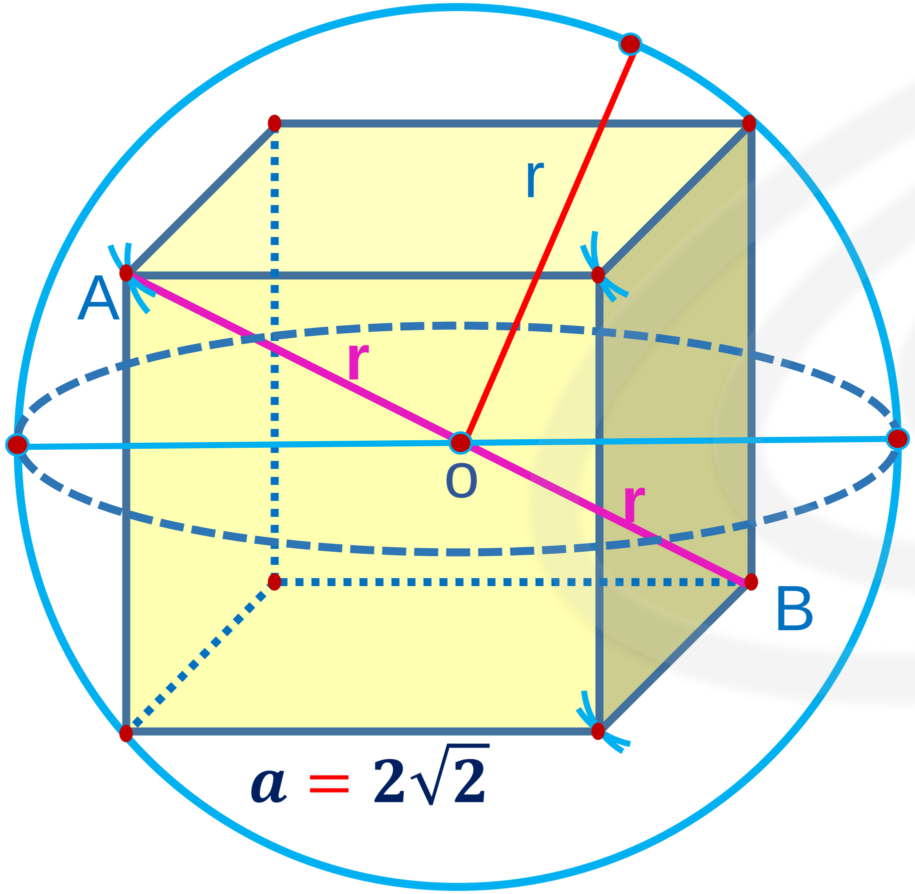
G : Centroide de la región generadora.

X : Longitud radio de la circunferencia descrita por el centroide.

$$\mathbb{V}_{S.G} = 2 \cdot \pi \cdot (x) \cdot \mathbb{A}$$

1. Calcule el área de la superficie esférica circunscrita al cubo de arista $2\sqrt{2}$.

Resolución



- **Calcule** $\mathbb{A}_{(\text{sup. esf})}$

Teorema: $\mathbb{A}_{(\text{sup. esf})} = 4\pi r^2 \quad \ldots (1)$

- **En el hexaedro regular:**

$$2r = a\sqrt{3}$$

$$2r = (2\sqrt{2})\sqrt{3} \rightarrow 2r = 2\sqrt{6}$$

$$r = \sqrt{6} \quad \ldots (2)$$

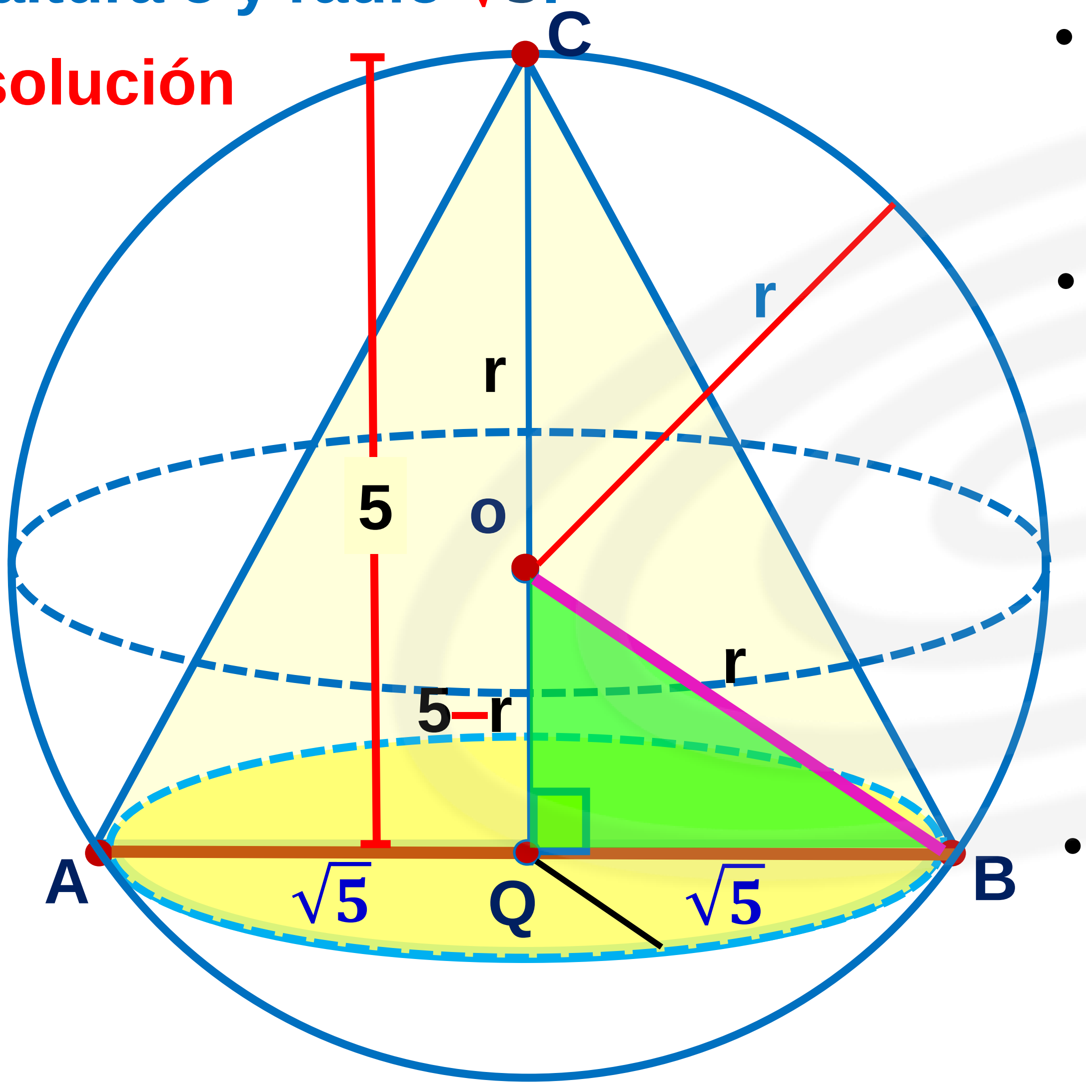
- **Reemplazando 2 en 1.**

$$\mathbb{A}_{(\text{sup. esf})} = 4\pi(\cancel{\sqrt{}}6)^{\cancel{2}}$$

$$\boxed{\mathbb{A}_{(\text{sup. esf})} = 24\pi \text{ u}^2}$$

2. Calcule el volumen de la esfera circunscrita al cono circular recto mostrado de altura 5 y radio $\sqrt{5}$.

Resolución



- Calcule el volumen $\mathbb{V}$ de la esfera

Teorema: $\mathbb{V} = \frac{4}{3}\pi . r^3$ … (1)

- ⊿OQB: T. de Pitágoras

$$r^2 = (5 - r)^2 + (\cancel{\sqrt{}}5)^{\cancel{2}}$$

$$\cancel{r^2} = 25 - 10r + \cancel{r^2} + 5$$

$$10r = 30$$

$$r = 3 \quad \text{… (2)}$$

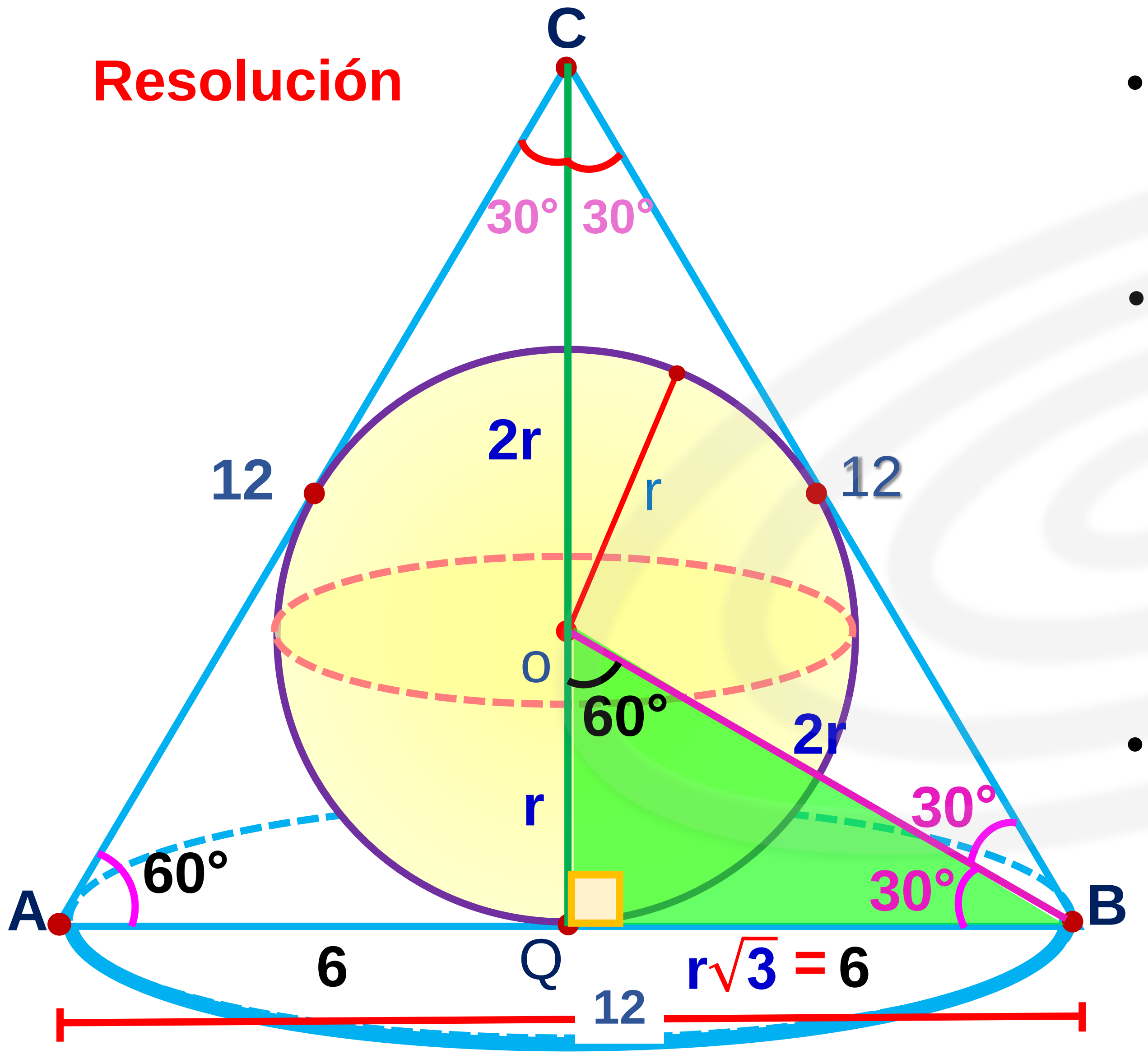
- Reemplazando 2 en 1.

$$\mathbb{V} = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$\boxed{\mathbb{V} = 36\pi\ u^3}$$

3. Calcule el área de la superficie esférica inscrita en el cono equilátero mostrado.

Resolución



- **Calcule:** $\mathbb{A}_{(sup.esf)}$

Teorema: $A_{(sup.esf.)} = 4\pi r^2$ … (1)

- **OQB:** Notable de 30º y 60º

$$r\sqrt{3} = 6$$

$$r = \frac{\cancel{6}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\underbrace{\sqrt{3}\,\sqrt{3}}_{\cancel{3}}$$

$$r = 2\sqrt{3} \quad \ldots(2)$$

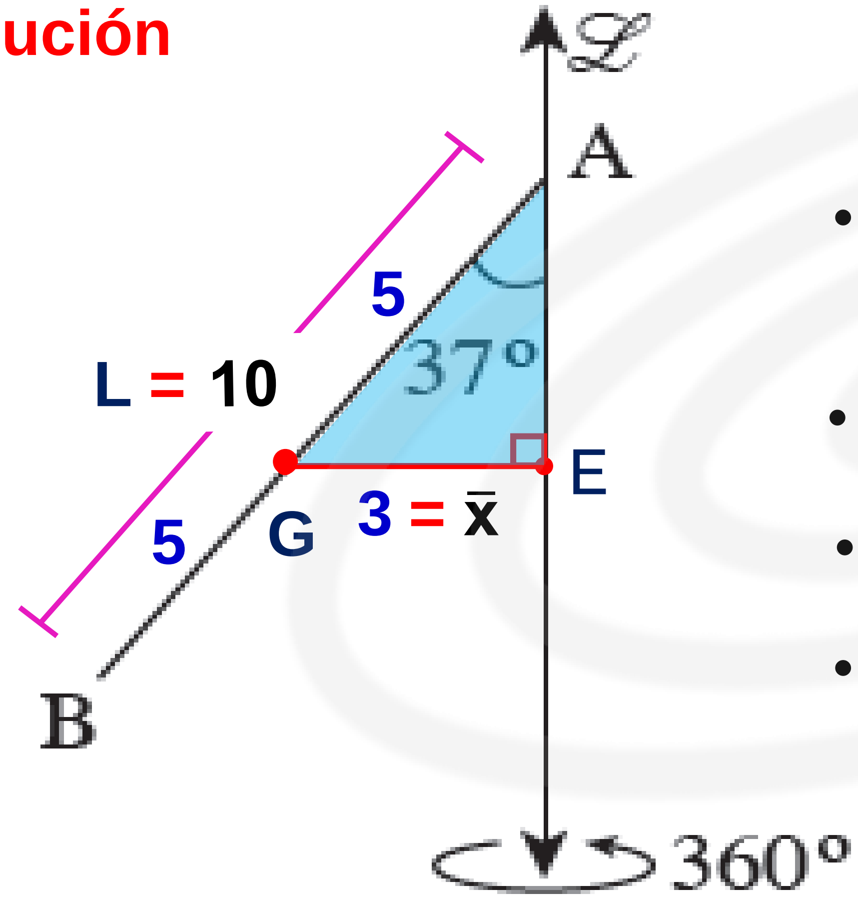
- **Reemplazando 2 en 1.**

$$\mathbb{A}_{(sup.esf)} = 4\pi\,(2\sqrt{3})^2$$

$$\boxed{\mathbb{A}_{(sup.esf)} = 48\,\pi\ u^2}$$

4. Calcule el área de la superficie generada por el $\overline{AB}$ al girar 360° alrededor de la recta L.

Resolución



- **Calcule:** $\mathbb{A}_{(SG)}$

  Por teorema: $A_{(SG)} = 2.\pi.\bar{x}.L$

- **G: Punto medio del $\overline{AB}$.**

  AG = BG = 5

- **Se traza $\overline{GE} \perp \overleftrightarrow{L}$**

- ⊿ **AEG:** Notable de 37º y 53º

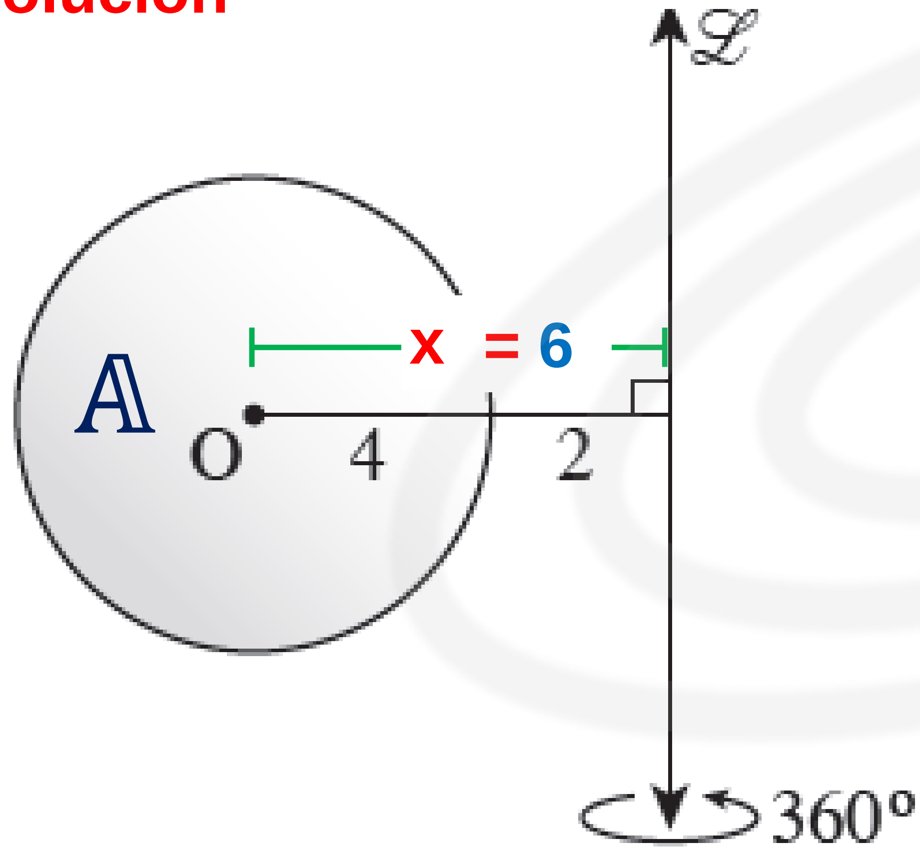
- **Reemplazando:**

  $\mathbb{A}_{(SG)} = 2.\pi.3.10$

$$\boxed{\mathbb{A}_{(SG)} = 60\ \pi\ u^2}$$

5. Calcule el volumen del sólido generado por el círculo al girar 360° alrededor de la recta L. (O es centro).

Resolución



- **Calcule:** $\mathbb{V}_{(SG)}$

Por teorema: $\mathbb{V}_{(SG)} = 2\pi.\bar{x}.\mathbb{A}$

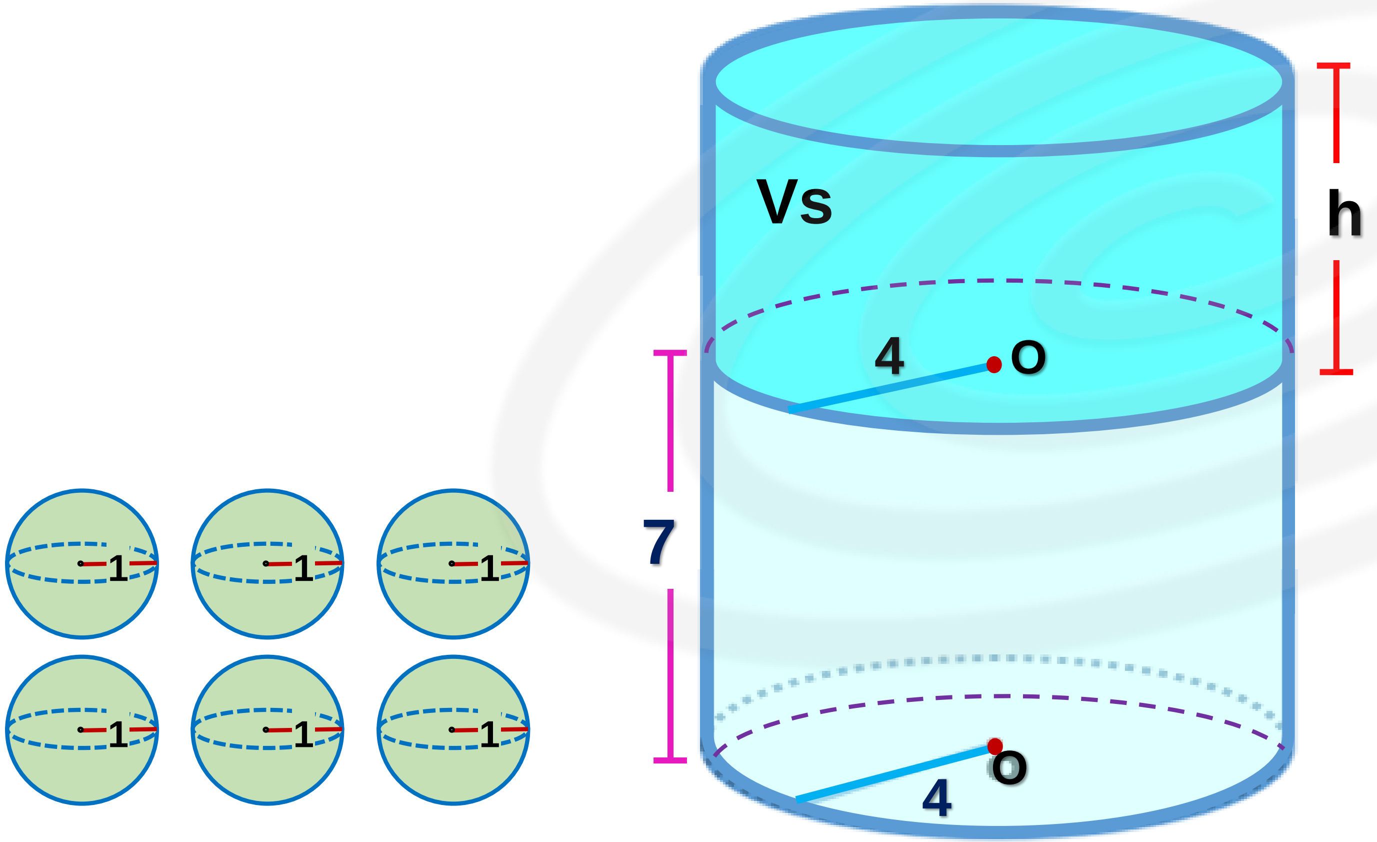
- **Reemplazando:**

$$\mathbb{V}_{(SG)} = 2\pi\,.\,(6)\,.\,(\pi.4^2)$$

$$\mathbb{V}_{(SG)} = 2\pi\,.\,(6)\,(16\pi)$$

$$\boxed{\mathbb{V}_{(SG)} = 192\,\pi^2\,u^3}$$

6. Se tiene un vaso de vidrio en forma de cilindro circular recto, cuyo radio mide 4 cm; el cual contiene agua hasta una altura de 7 cm. Luego se hecha 6 trozos de hielo en forma de esferas de radio igual a 1 cm, con lo cual el agua sube al ras del vaso. Determine la altura total del vaso.



Resolución

- Piden: Altura del vaso
- Del gráfico:

$$V_{\text{6 esferas}} = V_S$$

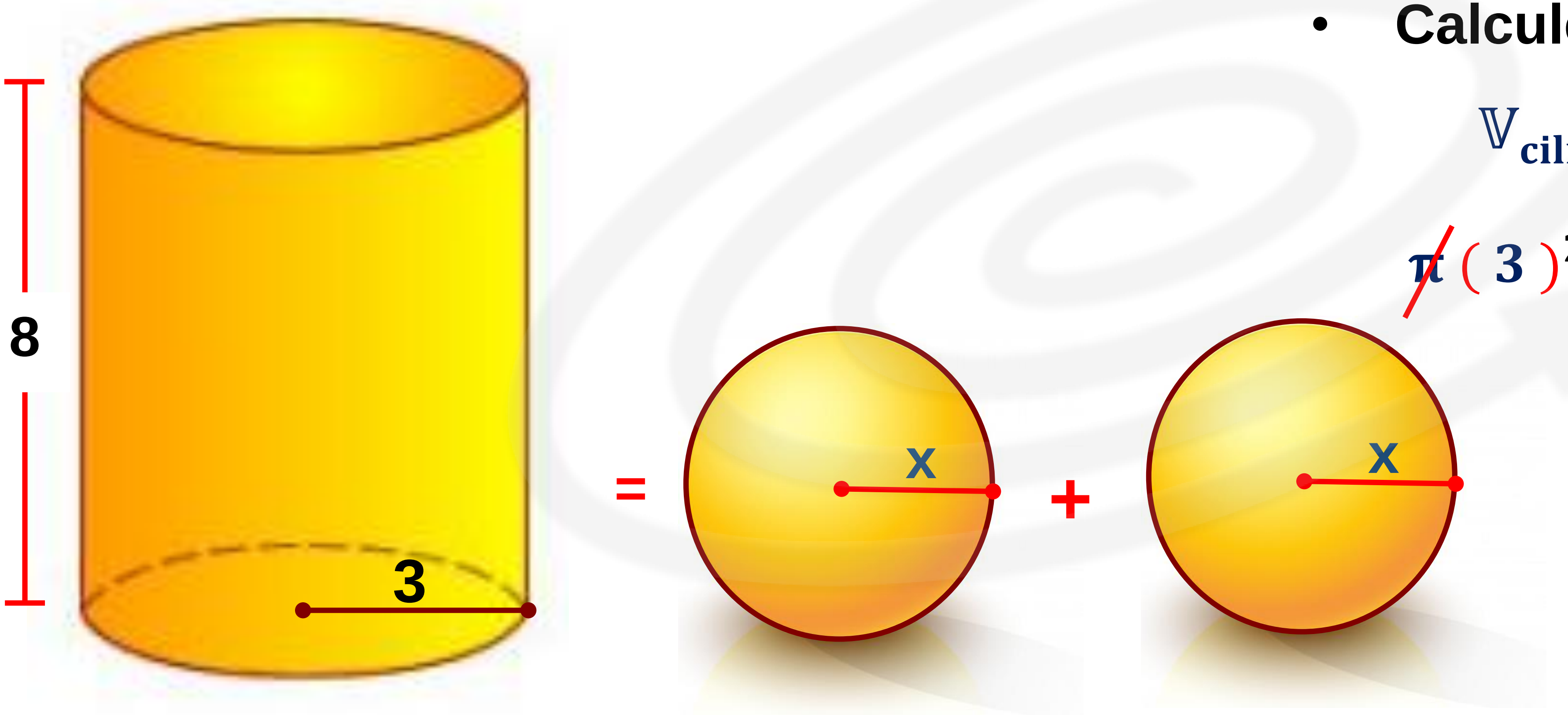
$$6 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1^3 = \pi \cdot (4)^2 (h)$$

$$8\cancel{\pi} = 16\cancel{\pi} \cdot h$$

$$h = 0{,}5$$

Altura del vaso = 7,5 cm

7. Una pieza metálica tiene forma de cilindro circular recto de radio 3 cm y altura 8 cm. Luego se funde para construir dos esferas de radio de longitud *x*. Halle el valor de *x*.



Resolución

- **Calcule: x**

$$\mathbb{V}_{cilindro} = 2\left(\mathbb{V}_{esfera}\right)$$

$$\cancel{\pi}(3)^2 \cdot \cancel{8} = \cancel{2} \cdot \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}(x)^3$$

$$3^3 = x^3$$

$$\boxed{x = 3\ cm}$$