ARITHMETIC

Chapter 14

4th
SECONDARY

MCD-MCM II

SACO OLIVEROS

Ángela compra siempre los zumos en paquetes de 2 y los batidos en paquetes de 3.
Hoy ha comprado el mismo número de zumos que de batidos y el menor número posible de ellos.
¿Cuántos zumos y cuántos batidos ha comprado hoy?

- Compra paquetes de 2 zumos y de 3 batidos.
  1.° Calcula los primeros múltiplos de cada número.
  ▶ Múltiplos de 2 ▸ 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12…
  Múltiplos de 3 ▸ 0, 3, 6, 9, 12, 15…
- Compra tantos zumos como batidos.
  2.° Busca los múltiplos comunes de ambos números.
  ▶ Múltiplos comunes ▸ 0, 6, 12…
- Compra el menor número posible de zumos y de batidos.
  3.° Busca el menor múltiplo común, distinto de cero.
  ▶ El menor distinto de cero ▸ 6

Ángela ha comprado hoy 6 zumos y 6 batidos.

MCD - MCM

1 MCD

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCD es aquel número que cumple dos condiciones.

- Es un divisor común de dichos números.
- Es el mayor de los divisores comunes.

Ejm Sean los números 18 y 24

#	Divisores $\mathbb{Z}^+$
18	1; 2; 3; 6; 9; 18
24	1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24

MCD(18; 24) = 6

Divisores comunes de 18 y 24

➡ 1; 2; 3 y 6

En conclusión:

Sean los números A y B

$$CD_{comunes\ de\ A\ y\ B} = CD_{MCD(A;B)}$$

2 MCM

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCM es aquel número que cumple dos condiciones.

- Es múltiplo común de dichos números.
- Es el menor posible.

Ejm Sean los números 8 y 12

#	Múltiplos $\mathbb{Z}^+$
8	8; 16; 24; 32; 40; 48; ...
12	12; 24; 36; 48; 60; ...

Múltiplos comunes de 8 y 12

➡ 24; 48; 72; 96; ...

MCM(8; 12) = 24

3 PROPIEDADES -MCD

1 Dados A y B ∈ Z+ se cumple que

※ Si $A = \overset{\circ}{B}$ (múltiplo de B)

MCD(A, B) = B

※ Si A y B son PESI

MCD(A, B) = 1

※ Si MCD(A, B) = d,

A = dp, B = dq

Donde p y q son PESI

2 Dados A, B, C y D ∈ Z+

MCD(A, B, C, D) = d

MCD[MCD(A, C), MCD(B, D)] = MCD[MCD(A, B), MCD(C, D)]=d

3 Si MCD(A, B, C) = d, entonces

MCD(An, Bn, Cn) = dn ; n ∈ Z+

$$\text{MCD}\left(\frac{A}{n};\frac{B}{n};\frac{C}{n}\right)=\frac{d}{n}$$

4 PROPIEDADES- MCM

1 Dados A y B ∈ Z+ se cumple que

※ Si $A = \overset{\circ}{B}$ (múltiplo de B)

$$MCM(A, B) = A$$

※ Si A y B son PESI

$$MCM(A, B) = A \times B$$

※ Si $MCM(A, B) = m$,

$$m = Ap = Bq$$

Donde p y q son PESI

2 Dados A, B, C y D ∈ Z+

$MCM(A, B, C, D) = m$

$$MCM[MCM(A, C), MCM(B, D)] = MCM[MCM(A, B), MCM(C, D)] = m$$

3 Si $MCM(A, B, C) = m$, entonces

$$MCM(An, Bn, Cn) = mn \quad ; n \in Z^+$$

$$MCM\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{m}{n}$$

Propiedad

$$MCD_{(A,B)} \times MCM_{(A,B)} = A \times B$$

PROBLEMA 1.

Hallar dos números tal que su suma sea 396 y su M.C.D. sea 12. Dar como respuesta la suma de cifras del mayor valor de su diferencia

Sabemos:

* Si $\text{MCD}(A, B) = d$,

$A = dp,\ B = dq$

Donde p y q son PESI

Resolución:

Sean los dos números: A y B

➢ **Por dato :**

1. $\text{MCD}_{(A,B)} = 12$ $\left\{ \begin{array}{l} A=12p \\ B=12q \end{array} \right.$

2. $A + B = 396$

$12p + 12q = 396$

$12(p+q) = 396$

$p + q = 33$

$\downarrow \quad \downarrow$

mayor valor de su diferencia $\quad 32 \quad 1$

Piden:

$A - B = 12 \times 31$

$= 372$

Respuesta: suma de cifras 12

PROBLEMA 2.

Si el producto de 2 números es 245 y su M.C.M. es 5 veces su M.C.D. Hallar la diferencia de los números

Sabemos:

* Si MCD(A, B) = d,

$A = dp$, $B = dq$

Donde p y q son PESI

Resolución:

Sean los dos números: A y B

➢ **Por dato :**

$$A \times B = 245$$

$$dp \times dq = 245$$

$$d^2(p \times q) = 245$$

$$7^2 \quad \underbrace{5 \times 1}_{5}$$

Piden:

$A = 7 \times 5 = 35$

$B = 7 \times 1 = 7$

Diferencia de los números

$A - B = 28$

Respuesta: 28

PROBLEMA 3.

El cociente de 2 números es 15. Si su M.C.D. es 18. Hallar el número mayor.

Sabemos:

* Si $MCD(A, B) = d$,
$A = dp$, $B = dq$
Donde p y q son PESI

Resolución:

Sean los dos números: A y B

➤ **Por dato :**

1. $MCD_{(A,B)} = 18 \begin{cases} A = 18p \\ B = 18q \end{cases}$

2. $\dfrac{18p}{18q} = 15$

$$\begin{matrix} 15 \leftarrow \\ 1 \leftarrow \end{matrix} \dfrac{p}{q} = 15$$

Piden: número mayor

$A = 18 \times 15$
$= 270$

Respuesta: 270

PROBLEMA 4.

Si $MCM(a,a+1)=156$.
Calcule $MCD(a,15,18)$

Resolución:

➢ **Por dato :**

OBSERVACIÓN:
Los números a y a+1 al ser consecutivos son PESI

$$MCM_{(a\ ,\ a+1)} = 156\ .$$

$$\underset{12}{\underbrace{a}}\ \underbrace{(a+1)}_{13} = 156$$

12×13

$a = 12$

Sabemos:

* Si A y B son PESI

$$\boxed{MCM(A, B) = A \times B}$$

Piden: $MCD(a,15,18)$

$$\begin{array}{ccccc|c} 12 & - & 15 & - & 18 & 3 \\ 4 & - & 5 & - & 6 & \end{array}$$

$MCD_{(12,15,18)} = 3$

Respuesta: 3

PROBLEMA 5.

Calcular A x B sabiendo que:
MCD(35A, 5B) = 70
MCM(42A, 6B) = 504

Resolución:

MCD(35A, 5B) = 70

ENTRE 5

MCD(7A, B) = 14

MCM(42A, 6B) = 504

ENTRE 6

MCM(7A, B) = 84

Sabemos:

3 Si MCM(A, B, C) = m, entonces

$$\text{MCM}(An, Bn, Cn) = mn$$

$$\text{MCM}\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{m}{n} \quad ; n \in \mathbb{Z}+$$

3 Si MCD(A, B, C) = d, entonces

$$\text{MCD}(An, Bn, Cn) = dn$$

$$\text{MCD}\left(\frac{A}{n}; \frac{B}{n}; \frac{C}{n}\right) = \frac{d}{n} \quad ; n \in \mathbb{Z}+$$

Propiedad $\boxed{\text{MCD}_{(A,B)} \times \text{MCM}_{(A,B)} = AxB}$

$$\text{MCD}_{(7A,B)} \times \text{MCM}_{(7A,B)} = 7AxB$$

$$\overset{2}{\cancel{14}} \times 84 = \cancel{7}AxB$$

$$168 = AxB$$

Respuesta: 168

PROBLEMA 6.

Ricardo lee en su examen de admisión a la universidad el siguiente problema:
Determine la suma de cifras del menor numero entero positivo que al ser dividido entre 8, 25 y 49 se tienen como residuo 4, 15 y 42 respectivamente.

Ex. Admisión UNAC 2021

$$N=\dot{a}\pm r;\ N=\dot{b}\pm r;\ N=\dot{c}\pm r$$

$$\text{entonces: } N=\overset{\bullet}{\overline{MCM(a,b,c)}}\pm r$$

Resolución:

$$\overbrace{}^{r\,=\,140}$$

$$N = \dot{8} + 4 \quad +8+8+\cdots+8$$

$$N = \dot{25} + 15 \quad +25+25+25+25+25$$

$$N = \dot{49} + 42 \quad +49+49$$

Sabemos: $N = \overset{\bullet}{MCM(8,25,49)} + 140$

$= \dot{9800} + 140$

$N = 140$

OBSERVACIÓN:
menor numero entero positivo

Piden: SUMA DE CIFRAS = 1+4+0 = 5

Respuesta: 5

PROBLEMA 7.

Artthur le pide ayuda a su tía Mirelly para poder terminar su tarea que le dejaron en el curso de Aritmética y este decía: Halle el mayor número de 4 cifras tal que al ser expresado en los sistemas de numeración de bases 3, 4 y7 sus últimas cifras fueron 20, 12 y 6 respectivamente. ¿En qué cifra termina si se expresa en base 11?

Resolución:

- **Por dato :**

$$N = ...20_3 \qquad N = \dot{9} + 20_3 \qquad N = \dot{9} + 6$$

$$N = ...12_4 \Rightarrow N = \dot{16} + 12_4 \Rightarrow N = \dot{16} + 6$$

$$N = ...6_7 \qquad N = \dot{7} + 6 \qquad N = \dot{7} + 6$$

Sabemos: $N = MCM(\dot{9}, 16, 7) + 6$

$= \dot{1008} + 6$

Mayor número de 4 cifras

$N = 1008K+6$

$N = 1008 \times 118+6$

$N = 9078$

Piden:

$N = 9078 = 6903_{11}$

Respuesta: Termina en 3