ALGEBRA

Chapter 15

4th
SECONDARY

Matrices y determinantes

SACO OLIVEROS

HELICO

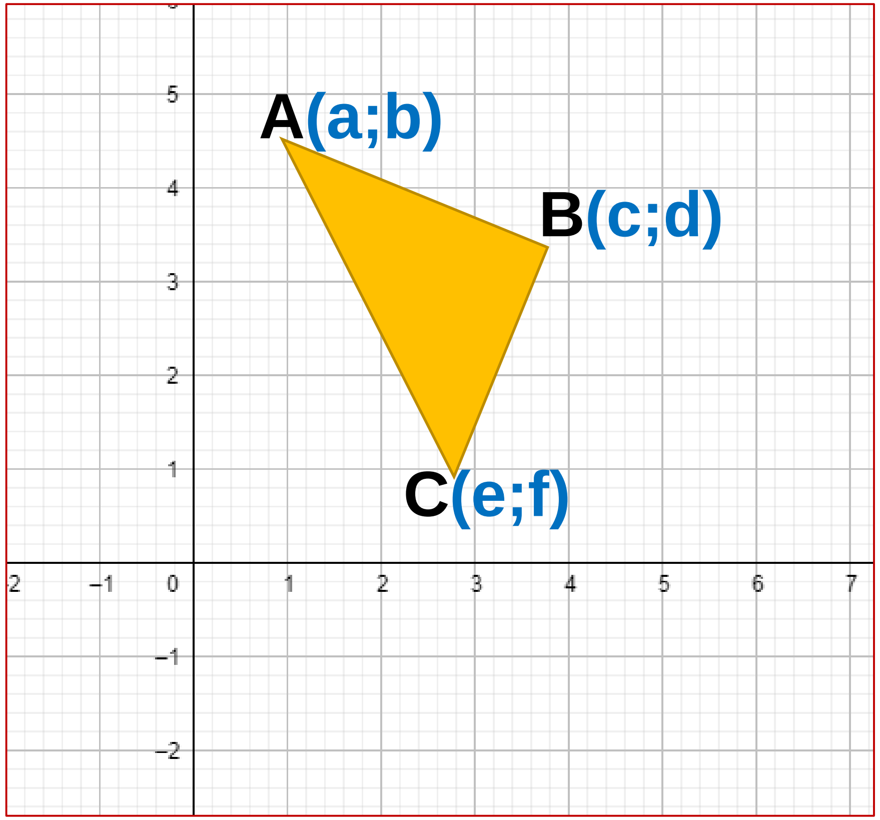
MOTIVATING

SACO OLIVEROS

¿Sabias que…?

El área de un triángulo se puede calcular a partir de sus vértices

Para tal fin se utiliza los determinantes.



De la imagen, el área sombreada se calcularía así:

$$\text{área} = \frac{1}{2}\underbrace{\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 1 \\ e & f & 1 \end{vmatrix}}_{\text{determinante}}$$

HELICO THEORY

CHAPTHER 15

SACO OLIVEROS

MATRICES Y DETERMINANTES

I) MATRICES

Es un arreglo rectangular de elementos distribuidos en filas y columnas

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\text{m columnas}} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\} \text{n filas}$$

$n \times m$ → El **orden** de la matriz A

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

El orden de la matriz **B es 3×2**

EJEMPLOS

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 2 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}_{3x2}$$

filas

columnas

$a_{11} = 6 \qquad a_{12} = 0$

$a_{21} = 3 \qquad a_{22} = 2$

$a_{31} = 9 \qquad a_{32} = 1$

La matriz A es de orden: $3x2$

$$B = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 3 \end{pmatrix}_{1x3}$$

filas

columnas

$a_{11} = -9 \qquad a_{12} = 1 \qquad a_{13} = 3$

La matriz B es de orden: $1x3$

SACO OLIVEROS

II) MATRICES CUADRADAS

Son aquellas matrices que tienen el mismo número de filas y columnas.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 8 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}_{3x3}$$

DIAGONAL PRINCIPAL

DIAGONAL PRINCIPAL

III) TRAZA DE UNA MATRIZ CUADRADA

ES LA SUMA DE LOS ELEMENTOS DE LA DIAGONAL PRINCIPA

TRAZ(A)= 13

TRAZ(B)= 12

IV) IGUALDAD DE MATRICES

HEL

PODEMOS IGUALAR MATRICES DEL MISMO ORDEN

EJEMPLO

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}_{2x2} \qquad B = \begin{pmatrix} a+2 & 3b \\ c-1 & 4d \end{pmatrix}_{2x2}$$

Si A=B ,entonces:

a+2=10 ➡ **a=8**

3b=9 ➡ **b=3**

c-1=3 ➡ **c=4**

4d=8 ➡ **d=2**

V) OPERACIONES CON MATRICES

*SUMAS Y RESTAS DE MATRICES

DEBEN SER MATRICES DEL MISMO ORDEN

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 15 & 5 \end{pmatrix}$$

*PRODUCTOS DE MATRICES

Sea $A=(a_{ij})_{mxn}$ y $B=(b_{ij})_{nxp}$ $\Rightarrow$ $AB=(c_{ij})_{mxp}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Efectuando:

(2)(4)+(3)(3)=17 (2)(2)+(3)(-1)=1

(1)(4)+(-1)(3)=1 (1)(2)+(-1)(-1)=3

VI) DETERMINANTES

Es el valor numérico de una matriz cuadrada. Representa a todos los productos que se pueden formar entre todos sus elementos

Para orden 2x2

Sea:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}_{2X2}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 5 - 42 = \boxed{-37}$$

Para orden 3x3

Sea:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{3X3}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (12+4+4) - (2+12+8)$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\boxed{|A| = -2}$$

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 15

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1

Calcule el orden de las siguientes matrices

A=$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ C=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Resolución

A=$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix}_{2x3}$ 2filas

3columnas

es de orden $2x3$

B=$\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}_{4x1}$ 4filas

1columna

es de orden $4x1$

C=$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}_{2x2}$ 2filas

2columnas

es de orden $2x2$

PROBLEMA 2

Sean las matrices cuadradas

A=$\begin{pmatrix} x+3y & 7 \\ 2z-1 & x-y \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

Si $A = B$. Evalúe: x+y+z.

Resolución

$\boxed{\mathrm{A} = \mathrm{B}}$

$$\begin{pmatrix} x+3y & 7 \\ 2z-1 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{x} + 3\mathrm{y} &= 20 \\ \mathrm{x} - \mathrm{y} &= 4 \end{aligned} \quad (-)$$

$$4\mathrm{y} = 16$$

$$\mathrm{y} = 4 \qquad \mathrm{x} = 8$$

además:

$$2\mathrm{z} - 1 = 5$$

$$\mathrm{z} = 3$$

luego: $\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = 15$

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 3

Se tienen las matrices: P=$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

Donde: 3P + 5Q = A . Determine la traza de la matriz A.

Resolución

$$\boxed{A = 3P + 5Q}$$

$$A = 3\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -15 & 10 \\ 25 & 35 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 22 \\ 28 & 29 \end{pmatrix}$$

$$\text{Traz}(A) = -6 + 29 = \boxed{23}$$

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 4

Sabiendo que: A = $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

Calcule la Traza de(AB).

Resolución

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectuando:

(5)(2)+(3)(-3)=1 $\qquad$ (5)(4)+(3)(-1)=17

(2)(2)+(4)(-3)=-8 $\qquad$ (2)(4)+(4)(-1)=4

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1 & 17 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Traz(AB)} = 1+4 = \boxed{5}$$

PROBLEMA 5

Efectúe: $T = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

Resolución

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$T = (5)(6) - (7)(3) + (3)(2) - (5)(-1) + (8)(-2) - (1)(4)$$

$$T = 30 - 21 + 6 + 5 - 16 - 4$$

$$T = 41 - 41$$

$$\boxed{T = 0}$$

PROBLEMA 6

El profesor García va al gimnasio k veces al mes para aumentar su masa muscular, en vista de malos resultados su entrenador personal le recomienda ir (2-2k) veces al mes, donde k es el resultado de: $k = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

¿ Cuántas veces fue al gimnasio al tercer mes de la recomendación?

Resolución

$$: \ k = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right.$$

c_1 c_2

$$\mathbf{K} = (3 + 8 + 20) - (10 + 24 + 2)$$

$$\mathbf{K} = (31) - (36)$$

$$\mathbf{k} = -5$$

Luego

$$(2 - 2(-5)) = 12 \ al \ mes$$

3meses= 36 veces

PROBLEMA 7 Halle el valor de $P = \frac{a+c}{8b}$, si $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ a & b & c \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 0$, si 16p representa el costo de 3kg. De tomate. ¿Cuál es el costo de 12 kg. De tomate?

Resolución

$$\begin{array}{cccccc} & & & c_1 & c_2 & \\ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ a & b & c & a & b \\ 5 & 6 & 7 & 5 & 6 \end{array}\right| = 0$$

$$(\underline{14b} + \underline{15c} + \underline{24a}) - (\underline{20b} + \underline{12c} + \underline{21a}) = 0$$

$$-6b + 3c + 3a = 0$$

$$3a + 3c = 6b$$

$$a + c = 2b$$

el valor de $P = \frac{a+c}{8b}$

$remplazando;\ p = \frac{2\cancel{b}}{8\cancel{b}} = \frac{1}{4}$

El costo de 12kg. es s/16.00

SACO OLIVEROS