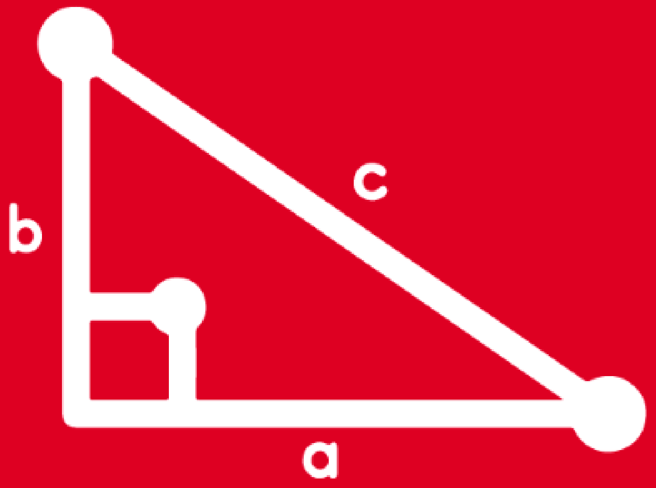
TRIGONOMETRY

Chapter 09

4th
SECONDARY



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL I

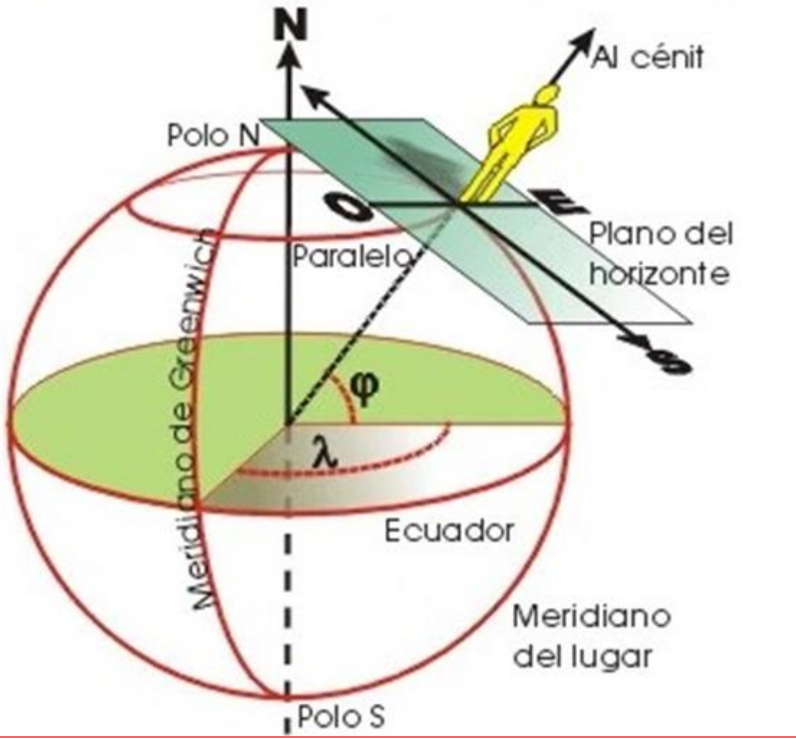
SACO OLIVEROS

HELICO MOTIVACIÓN

COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Determinan la posición del observador sobre la superficie terrestre. Aunque sabemos que la Tierra está achatada por los polos vamos a suponer, en primera aproximación, que es una esfera perfecta. Un punto cualquiera de la esfera terrestre queda determinado por dos coordenadas geográficas: la longitud y la latitud.

Cualquier plano paralelo al del ecuador, comprendido entre los polos norte, N, y sur, S, corta a la esfera en una circunferencia denominada paralelo. Las infinitas esferas que pasan por los polos N y S son los meridianos terrestres.



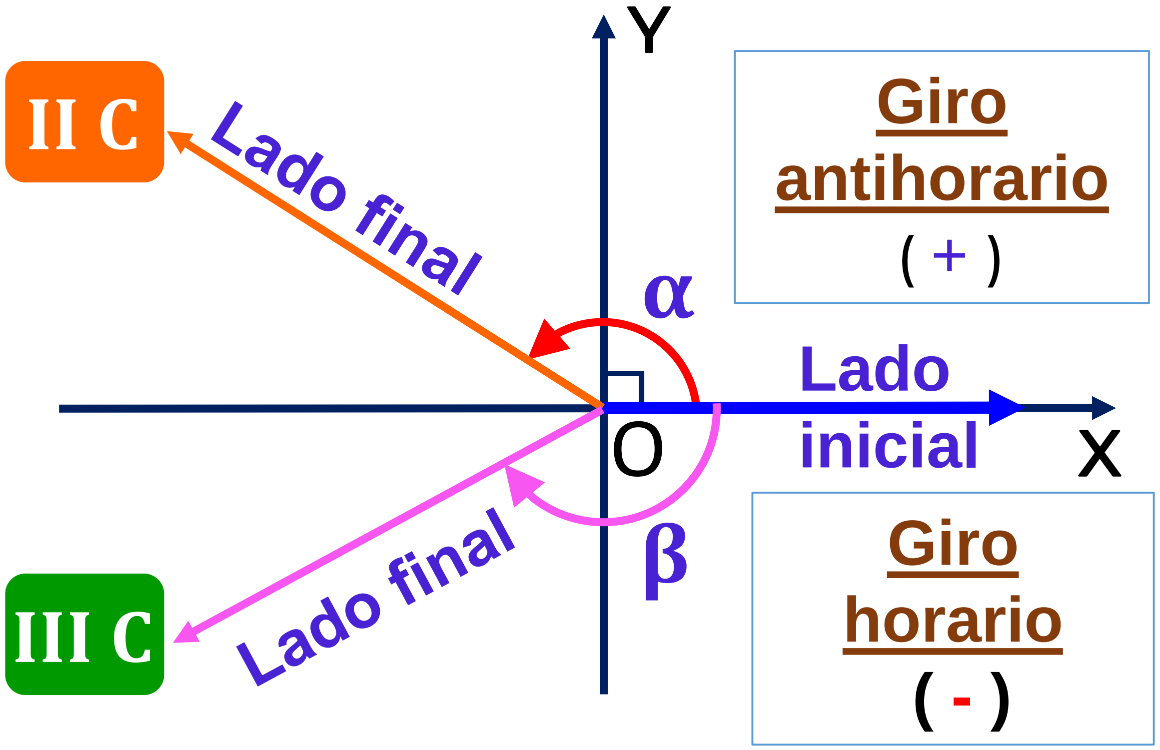
ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL

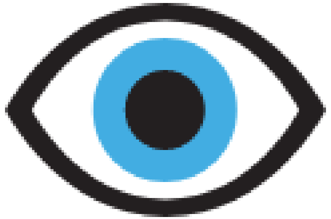
DEFINICIÓN :

Es aquel ángulo trigonométrico ubicado sobre el plano cartesiano, donde :

- **Vértice** : Origen de coordenadas.
- **Lado inicial :** Semieje X positivo.
- **Lado final :** Se ubica en cualquier cuadrante o semieje del plano.

Representación gráfica :

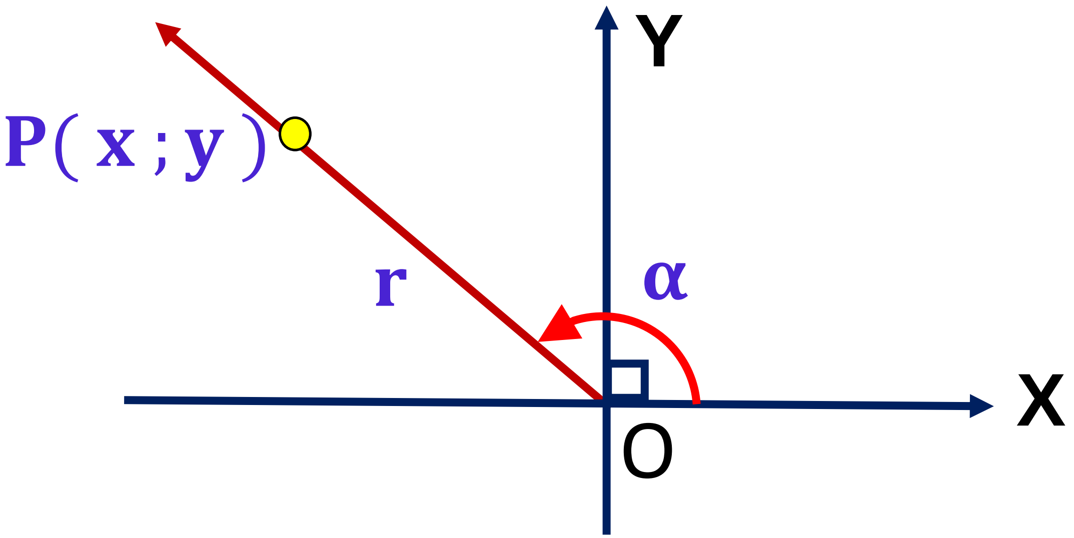




OBSERVACIÓN :

La posición del lado final de un ángulo en posición normal, determina el cuadrante o semieje al cual pertenece dicho ángulo .

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL I



α : ángulo en posición normal .

x : abscisa del punto P .

y : ordenada del punto P .

r : radio vector del punto P.

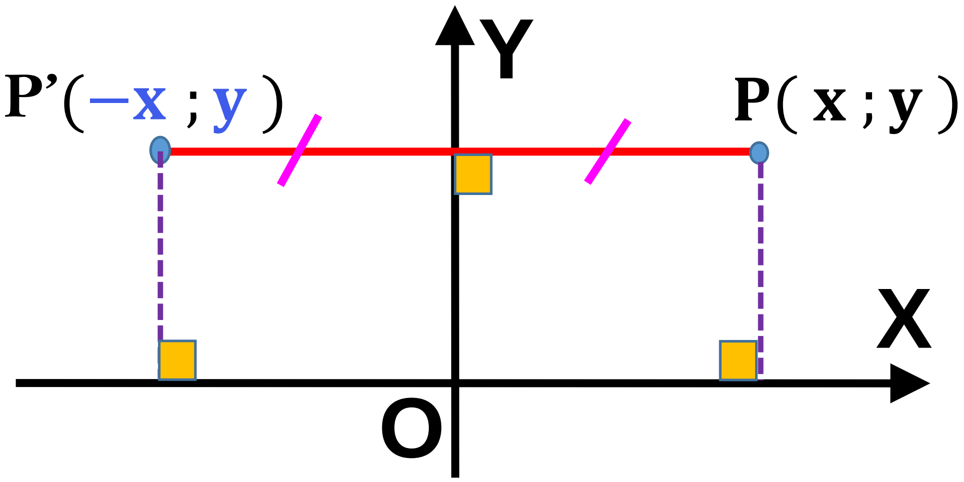
$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (r > 0)$$

DEFINICIONES :

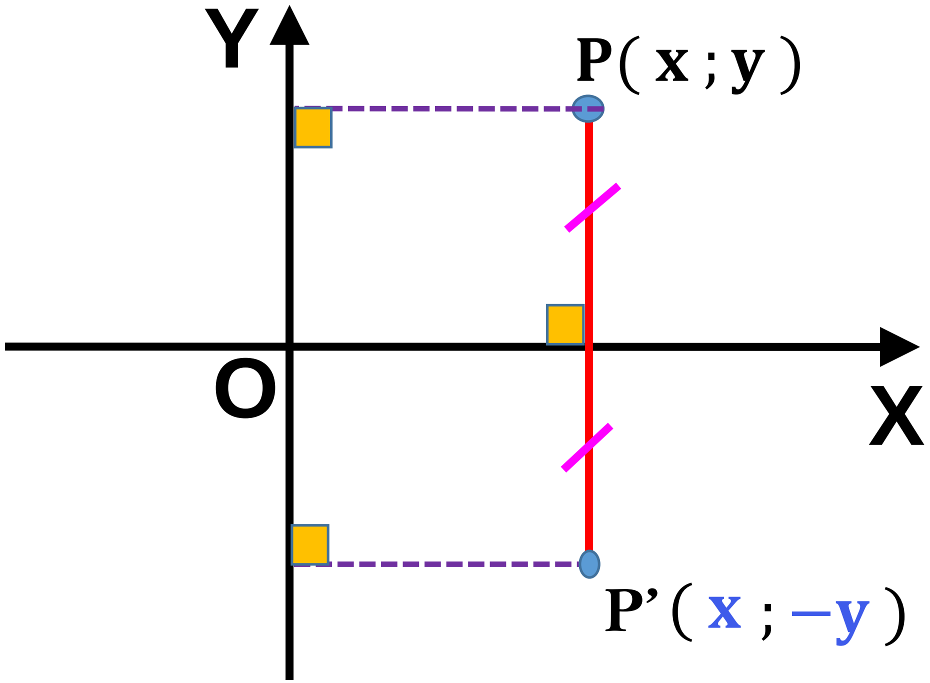
$sen\alpha$	$cos\alpha$	$tan\alpha$	$cot\alpha$	$sec\alpha$	$csc\alpha$
$\frac{y}{r}$	$\frac{x}{r}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{r}{x}$	$\frac{r}{y}$

PUNTOS SIMÉTRICOS EN EL PLANO CARTESIANO

Simetría respecto al eje Y :



Simetría respecto al eje X :



HELICO PRACTICE 1

Si el punto $P(-1\,;3)$ pertenece al lado final de un ángulo θ en posición normal, halle el valor de $G = \text{sen}\theta \cdot \cos\theta$

Recordamos :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r}$$

RESOLUCIÓN

Según dato : $x = -1$; $y = 3$

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2}$$

$$r = \sqrt{10}$$

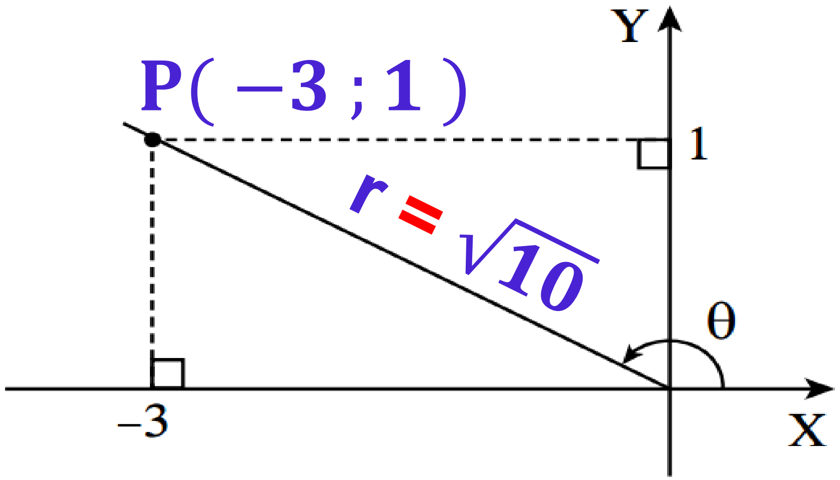
Luego : $G = \text{sen}\theta \cdot \cos\theta$

$$G = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\therefore G = -\frac{3}{10}$$

HELICO PRACTICE 2

A partir del gráfico, obtenga el valor de $Q = \csc^2\theta - 3\tan\theta + \cot\theta$



Recordamos :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\csc\theta = \frac{r}{y} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \qquad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

RESOLUCIÓN

Según gráfico : $x = -3$; $y = 1$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2}$$

$$r = \sqrt{10}$$

Luego :

$$Q = \csc^2\theta - 3\tan\theta + \cot\theta$$

$$Q = \left(\frac{\sqrt{10}}{1}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{-3}\right) + \left(\frac{-3}{1}\right)$$

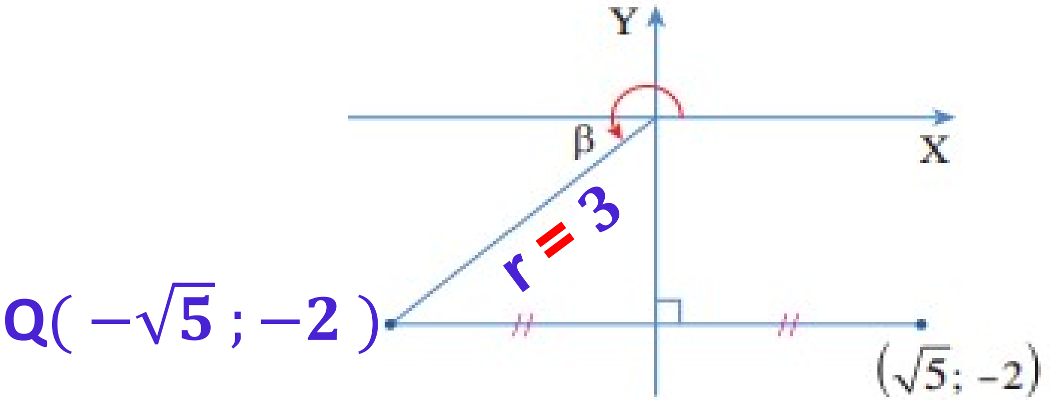
$$Q = 10 + 1 - 3$$

$$\boxed{\therefore Q = 8}$$

HELICO PRACTICE 3

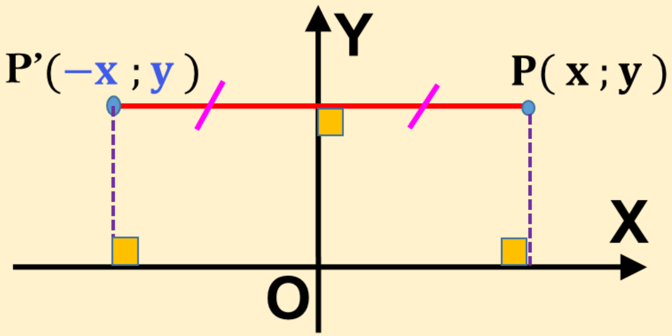
A partir del gráfico, efectúe

$$P = \sqrt{5}\cos\beta - \operatorname{sen}\beta$$



Recordamos :

Simetría respecto al eje Y :



$$\cos\beta = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{y}{r}$$

RESOLUCIÓN

Según gráfico : $x = -\sqrt{5}$; $y = -2$

$$r = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (-2)^2} \Rightarrow r = 3$$

Luego : $P = \sqrt{5}\cos\beta - \operatorname{sen}\beta$

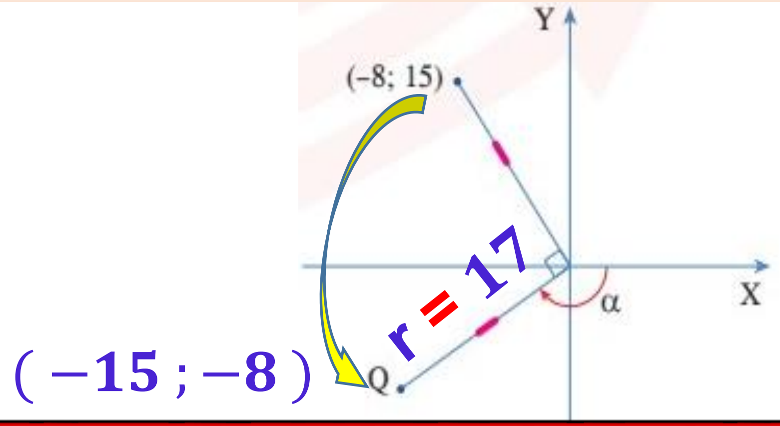
$$P = \sqrt{5}\left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) - \left(\frac{-2}{3}\right)$$

$$P = \frac{-5}{3} + \frac{2}{3} = \frac{-3}{3}$$

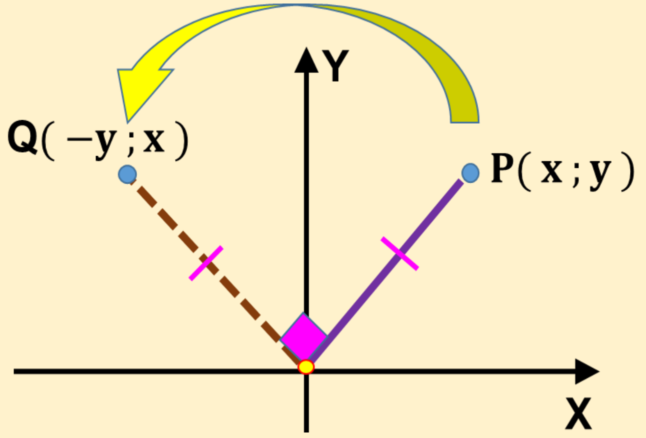
$$\therefore P = -1$$

HELICO PRACTICE 4

En el gráfico se muestra el ángulo α en posición normal. - Obtenga el valor de $W = \csc\alpha + \cot\alpha$



Giros ortogonales :



$$\csc\alpha = \frac{r}{y}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}$$

RESOLUCIÓN

Según gráfico : x = - 15; y = -8

$$r = \sqrt{(-15)^2 + (-8)^2} \Rightarrow r = 17$$

Luego : $W = \csc\alpha + \cot\alpha$

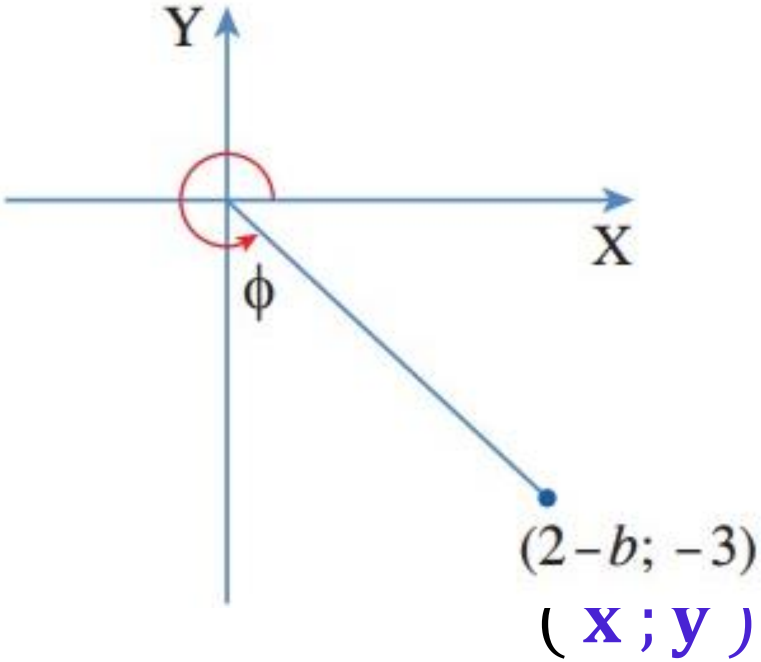
$$W = \frac{17}{-8} + \frac{-15}{-8}$$

$$W = \frac{2}{-8}$$

$$\therefore W = -\frac{1}{4}$$

HELICO PRACTICE 5

Del gráfico, si $\tan\phi = -\frac{3}{4}$,
efectúe $R = b^3 - b^2$.



Recordamos :

$$\boxed{\tan\phi = \frac{y}{x}}$$

RESOLUCIÓN

Según gráfico : $x = 2 - b$; $y = -3$

Según dato : $\tan\phi = -\frac{3}{4}$,

Luego : $\frac{-3}{2 - b} = \frac{-3}{4}$,

$2 - b = 4$ ⇒ $b = -2$

Calculamos R :

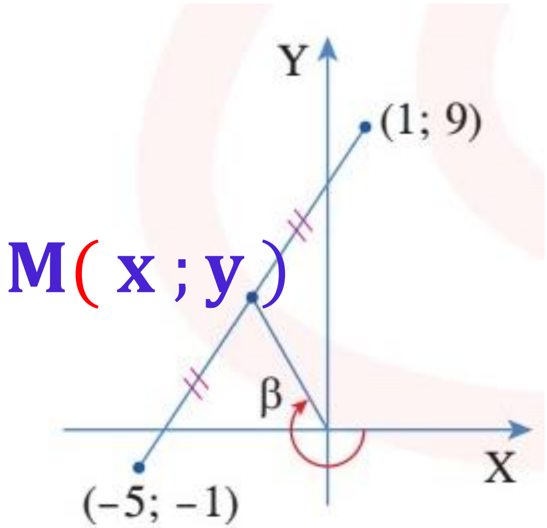
$R = (-2)^3 - (-2)^2$

$R = (-8) - (4) = -8 - 4$

$\boxed{\therefore R = -12}$

HELICO PRACTICE 6

Eithan ha rendido sus exámenes de Estadística, Economía y Física , obteniendo las notas A, B y C, respectivamente.- Si para conocer dichas notas se tienen que resolver los siguientes ejercicios :



$$A = 4\sqrt{20}\,\operatorname{sen}\beta$$

$$B = 5 - \sqrt{20}\,\sec\beta$$

$$C = 6 - 6\tan\beta$$

¿ En cuál de los cursos obtuvo la mayor calificación ?

RESOLUCIÓN

Calculamos coordenadas de M :

$x = \frac{-5+1}{2} = -2$ $y = \frac{-1+9}{2} = 4$

$r = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2}$ $r = \sqrt{20}$

Luego : $A = 4\cancel{\sqrt{20}}\left(\frac{4}{\cancel{\sqrt{20}}}\right) = 16$

$$B = 5 - \sqrt{20}\left(\frac{\sqrt{20}}{-2}\right) = 5 + 10 = 15$$

$$C = 6 - 6\left(\frac{4}{-2}\right) = 6 + 12 = 18$$

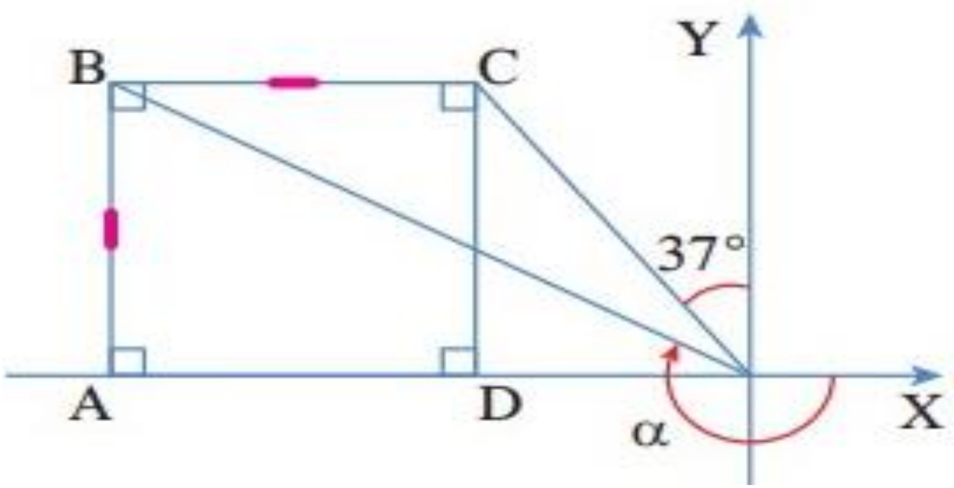
∴ Eithan obtuvo mayor calificación en Física .

HELICO PRACTICE 7

Diego ha rendido sus exámenes de Geometría y Física obteniendo las notas A y B, respectivamente.- Si para obtener dichas notas se tienen que resolver los siguientes ejercicios :

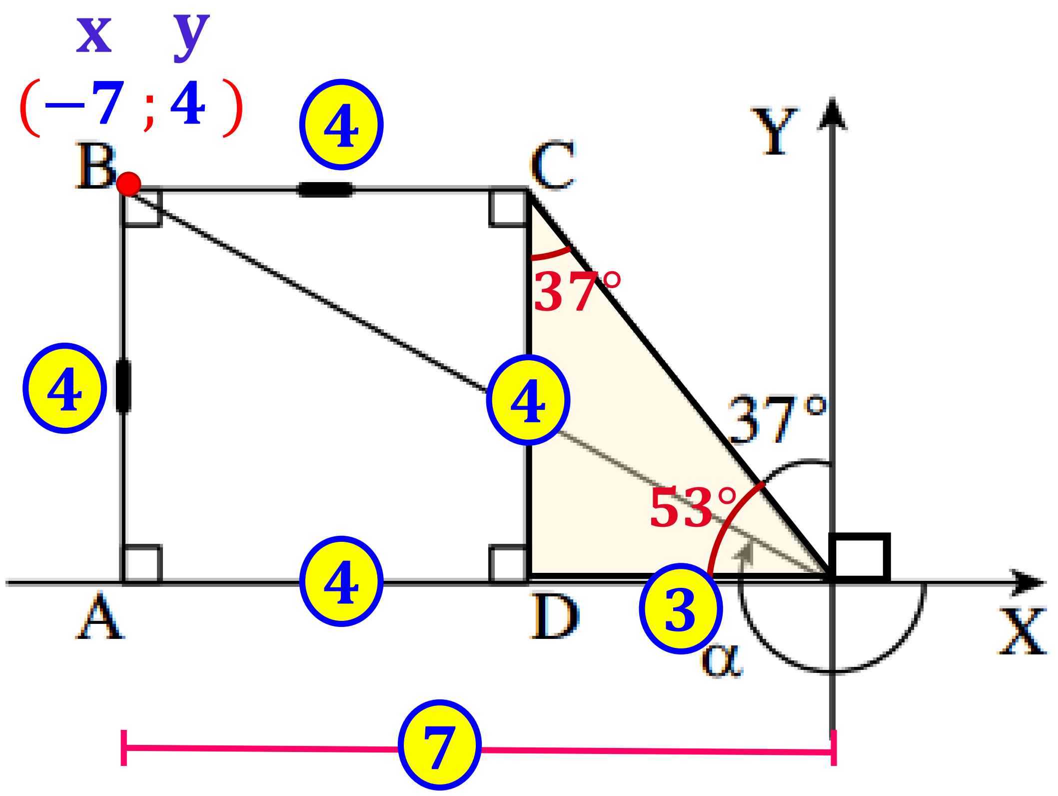
$A = 2 + 4\sqrt{65}\,\text{sen}\alpha$; $B = 12 - 7\tan\alpha$.

¿Cuál es el promedio de ambas calificaciones?



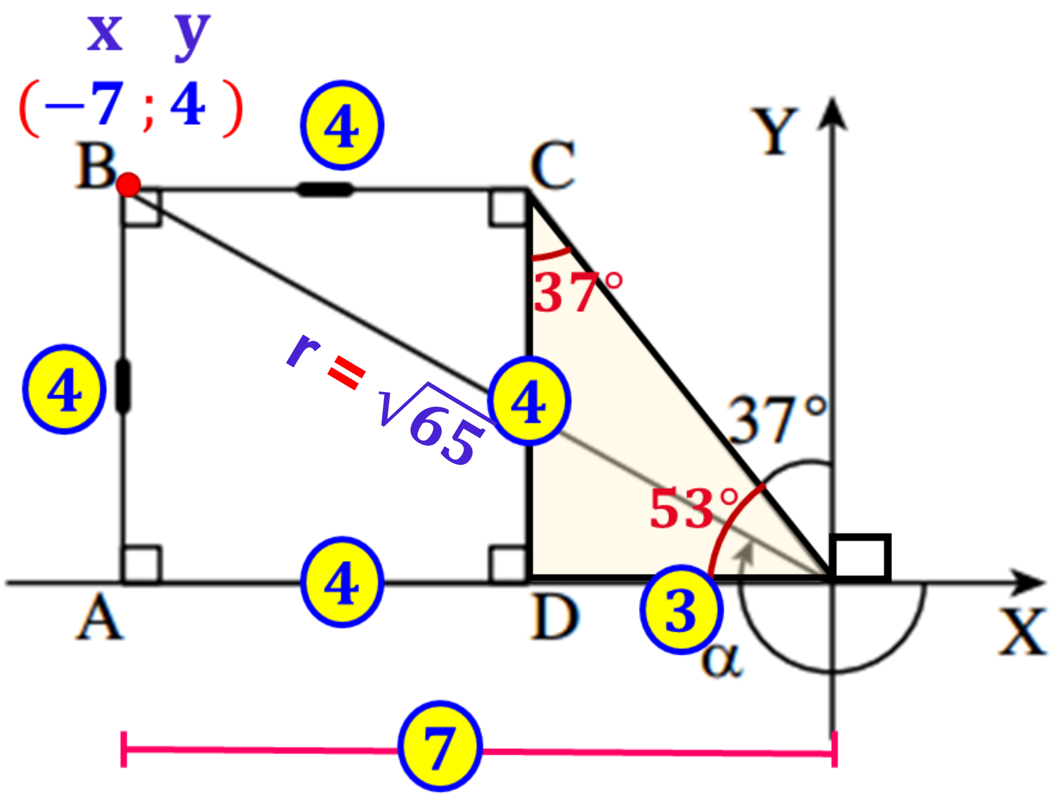
RESOLUCIÓN

Asignamos valores notables para determinar las coordenadas de B :



HELICO PRACTICE 7

RESOLUCIÓN



Según gráfico : $x = -7$; $y = 4$

$$r = \sqrt{(-7)^2 + (4)^2} \Rightarrow r = \sqrt{65}$$

Luego :

$$A = 2 + 4\cancel{\sqrt{65}}\left(\frac{4}{\cancel{\sqrt{65}}}\right) = 18$$

$$B = 12 - \cancel{7}\left(\frac{4}{-\cancel{7}}\right) = 12 + 4 = 16$$

$$\frac{A + B}{2} = \frac{18 + 16}{2} = \boxed{17}$$

∴ **El promedio de ambas calificaciones es 17 .**

SACO
OLIVEROS