ALGEBRA

Chapter 8

5th OF SECONDARY

RADICACIÓN

SACO OLIVEROS

Helicomotivación

Ramanujan's nested radical

S. Ramanujan (1887-1920)

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Proof: Define $f(x)=x+n+a$, so that $f(x)^2=ax+(n+a)^2+xf(x+n)$.

Set $a=0$, $n=1$, $x=2$ and substitute recursively for $f(x)$.

RADICACIÓN

I) Simplificación de radicales

$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

$\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Recuerda

Radicales dobles a simples

$$\sqrt{x+y \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}\,;\, x > y$$

II) RADICALES DOBLES

$$\sqrt{10+2\sqrt{21}} = \sqrt{7}+\sqrt{3}$$

$$7+3 = 10$$
$$7(3) = 21$$

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$

$$3+2 = 5$$
$$3(2) = 6$$

III) RACIONALIZACIÓN

PRIMER CASO

multiplicando por el factor racionalizante

$$\boxed{\frac{10}{\sqrt{5}} =} \qquad \frac{10}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\boxed{\frac{5}{\sqrt{7}} =} \qquad \frac{5}{\sqrt{7}}\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}\right) = \frac{5\sqrt{7}}{7}$$

SEGUNDO CASO

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Multiplicando por el factor racionalizante y luego diferencia de cuadrados

$$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\quad \frac{3}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\right)=\frac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2}=\boxed{(\sqrt{5}-\sqrt{2})}$$

$$\frac{7}{3-\sqrt{2}}=\quad \frac{7}{(3-\sqrt{2})}\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)=\frac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}=\boxed{(3+\sqrt{2})}$$

PROBLEMA 1

Helico Practice

Simplifique: $$\frac{3\sqrt{8}+5\sqrt{32}+\sqrt{128}}{\sqrt{50}-\sqrt{18}}$$

Resolución

Transformando a radicales semejantes

$$\Rightarrow \frac{3\sqrt{(4)(2)}+5\sqrt{(16)(2)}+\sqrt{(64)(2)}}{\sqrt{(25)(2)}-\sqrt{(9)(2)}}$$

$$\Rightarrow \frac{6\sqrt{2}+20\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{34\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \quad \therefore \quad \boxed{17}$$

PROBLEMA 2

Halle el valor de:

$$T=\sqrt{9+\sqrt{80}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}-\sqrt{8-\sqrt{60}}$$

Resolución

$$T=\sqrt{9+\sqrt{4.20}}+\sqrt{7-\sqrt{4.12}}-\sqrt{8-\sqrt{4.15}}$$

Radicales dobles a simples

$$\sqrt{x+y\pm 2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\,;\,x>y$$

Recuerda

Aplicando el método práctico

$$T=\sqrt{9+2\sqrt{20}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}-\sqrt{8-2\sqrt{15}}$$

$$T=\cancel{\sqrt{5}}+\sqrt{4}+\sqrt{4}-\cancel{\sqrt{3}}-(\cancel{\sqrt{5}}-\cancel{\sqrt{3}})$$

$$\therefore\ \boxed{T=4}$$

PROBLEMA 3

Efectúe $\quad T=\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{3}{\sqrt{3}}-\dfrac{5}{\sqrt{5}}$

Resolución

multiplicando por el factor racionalizante

$$K=\frac{2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})}\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\frac{3}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$K=\frac{\cancel{2}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\cancel{\sqrt{5}^2-\sqrt{3}^2}}+\frac{\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}-\frac{\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}}$$

$$K=\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

$\therefore \boxed{K=0}$

PROBLEMA 4

Calcule el valor de $M = \dfrac{22}{2\sqrt{3}+1} - \dfrac{4}{2-\sqrt{3}}$

Resolución

$$\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$$

Multiplicando por el factor racionalizante luego diferencia de cuadrados

$$\mathbf{M} = \frac{22}{(2\sqrt{3}+1)}\frac{(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3}-1)} - \frac{4}{(2-\sqrt{3})}\frac{(2+\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})}$$

$$\mathbf{M} = \frac{22(2\sqrt{3}-1)}{12-1} - \frac{4(2+\sqrt{3})}{4-3}$$

$$\mathbf{M} = 2(2\sqrt{3}-1) - 4(2+\sqrt{3})$$

$$\mathbf{M} = \cancel{4\sqrt{3}} - 2 - 8 - \cancel{4\sqrt{3}}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{M} = -10}$$

PROBLEMA 5

Calcule A+B , si: $\dfrac{2}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}+\dfrac{5}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$

Resolución

Recuerda

Radicales dobles a simples

$\sqrt{x+y\pm 2\sqrt{xy}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\,;\,x>y$

Aplicando el método práctico

$$\frac{2}{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3.1}}}+\frac{5}{\sqrt{(6+1)+2\sqrt{6.1}}}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{5}{\sqrt{6}+1}$$

$$\frac{2}{(\sqrt{3}-1)}\frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)}+\frac{5}{\sqrt{6}+1}\frac{(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}-1)}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1}+\frac{5(\sqrt{6}-1)}{6-1}=\sqrt{3}+1+\sqrt{6}-1$$

$$\sqrt{3}+\sqrt{6}=\sqrt{A}+\sqrt{B}$$

Identificando

A=3 y B=6

$\therefore$ $\boxed{A+B=9}$

PROBLEMA 6

Un padre le dice a sus dos hijos Ignacio y Marcelo: La propina en soles que recibirán a diario está dada al hallar los valores de A y B de:

$\sqrt{5\sqrt{6}+12}=\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}$,A>B.

A y B es la propina de Ignacio y Marcelo respectivamente.

¿Cuánto de propina reciben Ignacio y Marcelo juntos?

Resolución

$12=\sqrt{144}=\sqrt{6.24}=\sqrt{6}\sqrt{24}$

$$\sqrt{5\sqrt{6}+\sqrt{144}}$$

$$\sqrt{5\sqrt{6}+\sqrt{6}\sqrt{24}}$$

$$\sqrt{\sqrt{6}(5+\sqrt{24})}$$

$\sqrt{24}=2\sqrt{6}=2\sqrt{3.2}$

$$\sqrt[4]{6}\sqrt{5+\sqrt{24}}$$

$$\sqrt[4]{6}\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

$$\sqrt[4]{6}\,(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

Homogenizando índices

$$\sqrt[4]{6}\,(\sqrt[4]{9}+\sqrt[4]{4})$$

$$\sqrt[4]{54}+\sqrt[4]{24}=\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}$$

Identificando

Juntos reciben

A=54 y B=24

$\therefore$ 78 soles

PROBLEMA 7

Andrea y Beatriz son dos amigas que cumplen años el mismo mes; Andrea cumple años el día ***m*** de dicho mes, mientras que Beatriz cumple años el día ***n***. Determine, quien cumple años primero y que día, sabiendo que ***m*** y ***n*** se obtienen de

$$\frac{N^4}{\sqrt{2}\sqrt{7-\sqrt{45}}} = m + \sqrt{n}$$

donde:

$$N = \sqrt{10 + 2\sqrt{15} + \sqrt{24} + \sqrt{40}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$$

Resolución

$$N = \sqrt{\underbrace{10}_{2+3+5} + 2\sqrt{\underbrace{15}_{3\cdot 5}} + 2\sqrt{\underbrace{6}_{2\cdot 3}} + 2\sqrt{\underbrace{10}_{2\cdot 5}}} - \sqrt{\underbrace{8}_{3+5} + 2\sqrt{\underbrace{15}_{3\cdot 5}}}$$

$$N = \left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}\right) - \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)$$

$$N = \sqrt{2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\sqrt{2}^{\,4}}{\sqrt{2}\sqrt{7-\sqrt{45}}} = m + \sqrt{n}$$

$$\frac{4}{\sqrt{\underbrace{14}_{5+9} - 2\sqrt{\underbrace{45}_{5\cdot 9}}}} = m + \sqrt{n}$$

$$\frac{4}{\sqrt{9} - \sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{9}+\sqrt{5}}{\sqrt{9}+\sqrt{5}}\right) = m + \sqrt{n}$$

$$\frac{4}{9-5}\left(\sqrt{9} + \sqrt{5}\right) = m + \sqrt{n}$$

$$3 + \sqrt{5} = m + \sqrt{n}$$

$$\rightarrow \quad m = 3 \;\; ; \;\; n = 5$$

Andrea cumple años primera el día 3