



# TRIGONOMETRY

## Chapter 19

**4th**  
SECONDARY

Identidades trigonométricas  
del ángulo doble



**SACO OLIVEROS**



# HISTORIA Y APLICACIONES DE LA TRIGONOMETRÍA





# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

Para el seno :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

Para el coseno :

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$$

Ejemplos :

- $\sin 20^\circ = 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ$
- $\cos 6\alpha = \cos^2 3\alpha - \sin^2 3\alpha$
- $2 \sin^2 15^\circ = 1 - \cos 30^\circ$

## IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$



Para la tangente :

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Ejemplo : si  $\tan x = 2$  ; calcule:  $\tan 2x$

Resolución

Dato :  $\tan x = 2$

Luego :  $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \Rightarrow \tan 2x = \frac{2(2)}{1 - (2)^2}$

$$\therefore \tan 2x = -\frac{4}{3}$$

## IDENTIDADES AUXILIARES

$$\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$$

$$\cot \alpha + \tan \alpha = 2 \csc 2\alpha$$

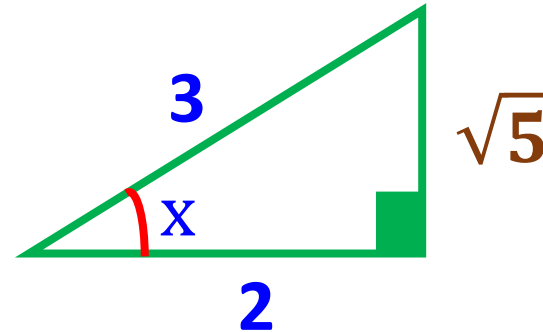
## PROBLEMA 1

Si  $\cos x = \frac{2}{3}$ , donde  $0^\circ < x < 90^\circ$ ; calcule  $\sin 2x$

### Resolución

Del dato :

$$\cos x = \frac{2}{3} = \frac{CA}{H}$$



*¡ Buen trabajo !*

Luego :  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\sin 2x = 2 \left( \frac{\sqrt{5}}{3} \right) \left( \frac{2}{3} \right)$$

$$\therefore \sin 2x = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$





## PROBLEMA 2

Si  $\frac{5}{\cos\theta} = \frac{3}{\sin\theta}$ , calcule  $\tan 2\theta$

### Resolución

Del dato:

$$\frac{5}{\cos\theta} = \frac{3}{\sin\theta}$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{5}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{5}$$

Luego:

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \left( \frac{3}{5} \right)}{1 - \left( \frac{3}{5} \right)^2} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}} = \frac{\frac{6}{5}}{\frac{16}{25}}$$

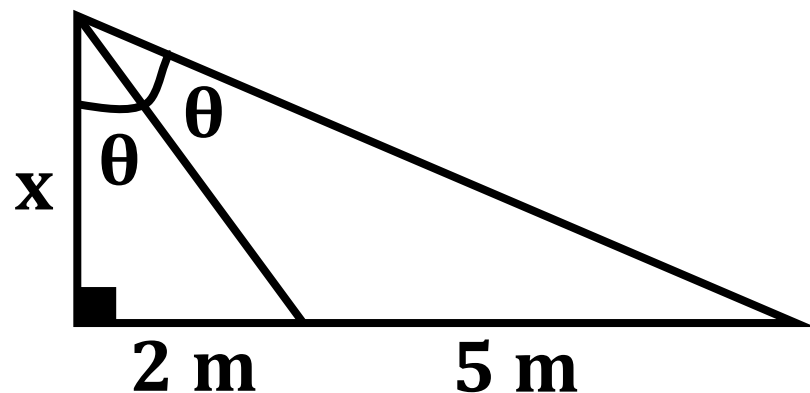
$$\tan 2\theta = \frac{\cancel{6}^3 (\cancel{25}^5)}{\cancel{5}_1 (\cancel{16}_8)}$$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{15}{8}$$



## PROBLEMA 3

A partir del gráfico, determine el valor de  $x$ .



### Resolución

Del gráfico:  $\tan\theta = \frac{2}{x}$  ;  $\tan 2\theta = \frac{7}{x}$

Luego:  $\tan 2\theta = \frac{2 \tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

Reemplazando:

$$\frac{7}{x} = \frac{2 \left( \frac{2}{x} \right)}{1 - \left( \frac{2}{x} \right)^2} = \frac{\frac{4}{x}}{\frac{x^2 - 4}{x^2}}$$

$$\frac{7}{x} = \frac{4x^2}{x(x^2 - 4)}$$

$$7x^2 - 28 = 4x^2$$

$$3x^2 = 28$$

$$x^2 = \frac{28}{3}$$

$$x = \sqrt{\frac{28}{3}}$$

$$x = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore x = \frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ m}$$



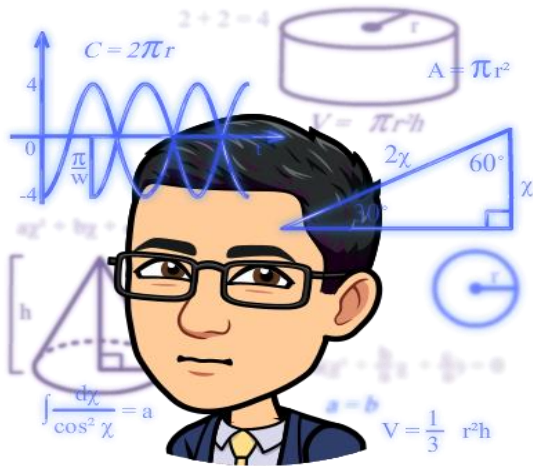
## PROBLEMA 4

Determine el valor de  $E = (\cot 42^\circ + \tan 42^\circ) \cos 6^\circ$

### Resolución

#### Recordar :

$$\cot \alpha + \tan \alpha = 2 \csc 2\alpha$$



$$E = (\cot 42^\circ + \tan 42^\circ) \cos 6^\circ$$

$$E = [2 \csc(2 \times 42^\circ)] \cos 6^\circ$$

$$E = 2 \csc 84^\circ \cdot \underbrace{\cos 84^\circ}_1$$

$$\therefore E = 2$$



## PROBLEMA 5

Reduzca:  $G = \frac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}\alpha}{1 + \text{cos}2\alpha + \text{cos}\alpha}$

Recordar :

$$\text{sen}2\alpha = 2 \text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\alpha$$

$$1 + \text{cos}2\alpha = 2 \text{cos}^2\alpha$$



Resolución

$$G = \frac{\text{sen}2\alpha + \text{sen}\alpha}{1 + \text{cos}2\alpha + \text{cos}\alpha}$$

$$G = \frac{2 \text{sen}\alpha \cdot \text{cos}\alpha + \text{sen}\alpha}{2 \text{cos}^2\alpha + \text{cos}\alpha}$$

$$G = \frac{\text{sen}\alpha \cancel{(2 \text{cos}\alpha + 1)}}{\text{cos}\alpha \cancel{(2 \text{cos}\alpha + 1)}}$$

$$G = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{cos}\alpha}$$

$$\therefore G = \text{tan}\alpha$$



# PROBLEMA 6

Carlita necesita A gramos de sodio para realizar un experimento conformado por ciertas cantidades de cloro y sodio para obtener NaCl en un grado de saturación correcta . - Si A está determinado por  $32 \text{ sen}2\theta$  y sabemos que  $\text{sen}\theta - \text{cos}\theta = \frac{3}{4}$  ; calcular los A gramos necesarios para que Carlita pueda experimentar sin ningún problema .

## Resolución

Recordar :

$$\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$$

$$\text{sen}2\theta = 2 \text{ sen}\theta . \text{cos}\theta$$



**Dato :**  $\text{sen}\theta - \text{cos}\theta = \frac{3}{4}$

$$(\text{sen}\theta - \text{cos}\theta)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\underbrace{\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta}_1 - \underbrace{2 \text{ sen}\theta . \text{cos}\theta}_{\text{sen}2\theta} = \frac{9}{16}$$

$$1 - \text{sen}2\theta = \frac{9}{16}$$

$$\text{sen}2\theta = \frac{7}{16}$$

$$\underbrace{32 \text{ sen}2\theta}_{\text{A}} = 32\left(\frac{7}{16}\right)$$

$$\therefore A = 14 \text{ gramos}$$

# PROBLEMA 7

Tres estudiantes : Roberto, Kennet y Alexander, entran al concurso de matemáticas; el puntaje se designa por  $E_{(x)} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$

Siendo asignado un  $x = \frac{\pi}{3}$  para Roberto,  $x = \frac{\pi}{4}$  para Kennet y  $x = \frac{\pi}{6}$  para Alexander . ¿ Quién ocupó el primer lugar ?

## Resolución

Recordar :

$$1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$



$$E_{(x)} = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}} = \sqrt{\frac{2 \sin^2 x}{2 \cos^2 x}} = \sqrt{\tan^2 x} \Rightarrow E_{(x)} = |\tan x|$$

**Roberto :**  $E_{(\frac{\pi}{3})} = \left| \tan \frac{\pi}{3} \right| = \left| \sqrt{3} \right| = \sqrt{3}$

**Kenneth :**  $E_{(\frac{\pi}{4})} = \left| \tan \frac{\pi}{4} \right| = \left| 1 \right| = 1$

**Alexander :**  $E_{(\frac{\pi}{6})} = \left| \tan \frac{\pi}{6} \right| = \left| \frac{\sqrt{3}}{3} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$

∴ Roberto ocupó el primer lugar .