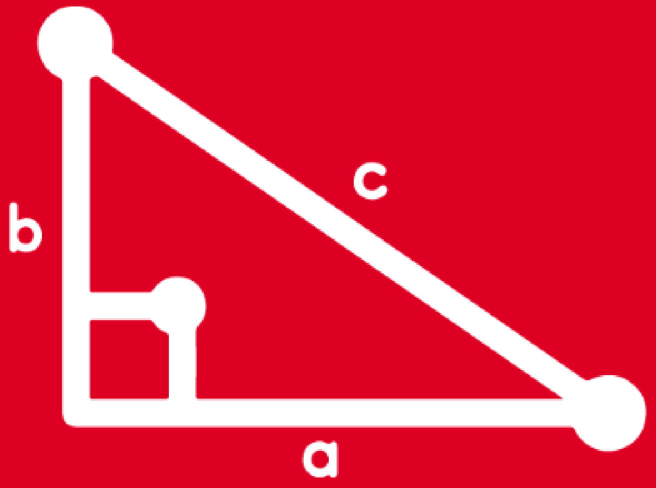
TRIGONOMETRY

CHAPTER 13

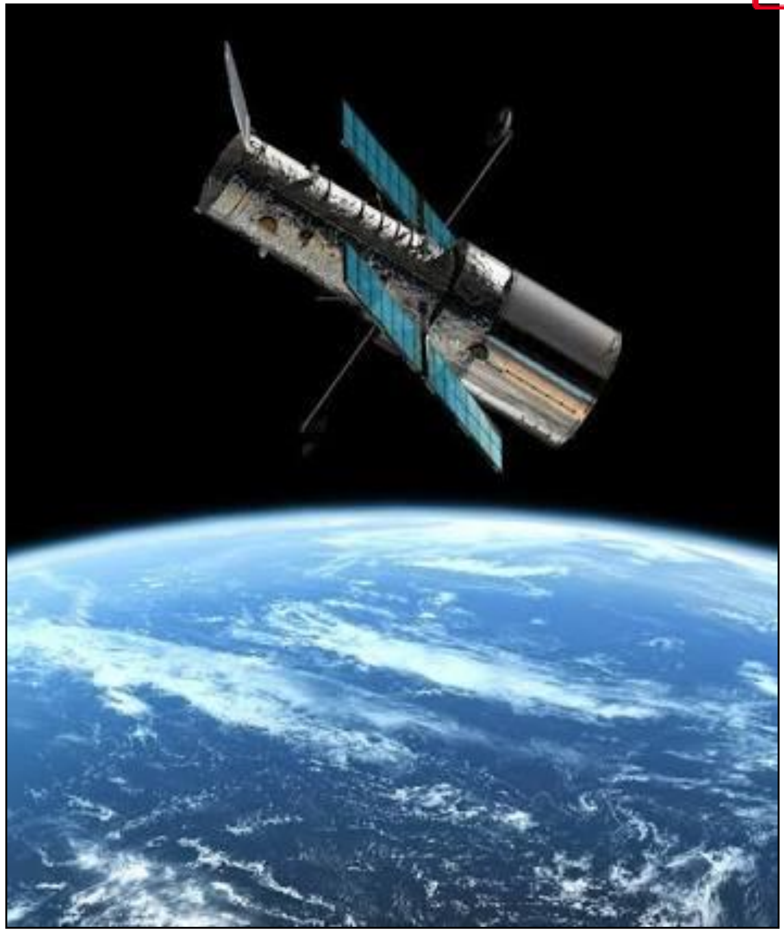


4th
SECONDARY

INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS REALES

SACO OLIVEROS

TELESCOPIO ESPACIAL HUBBLE



En 1990, el Telescopio Espacial Hubble fue recién lanzado al espacio desde la nave espacial Discovery, aunque su proyecto, diseño y construcción ya había comenzado en 1970 como una colaboración entre la Aeronáutica Nacional y Administración Espacial (NASA) y la Agencia Espacial Europea.

El Telescopio Espacial Hubble, fue una de las herramientas de exploración más importantes de la penúltima década y continuará sirviendo como un maravilloso recurso durante el presente tercer milenio.

Este telescopio ha recibido grandes créditos por haber descubierto numerosos objetos mientras fotografiaba nébulas, galaxias, estrellas y demás objetos distantes.

NÚMEROS REALES

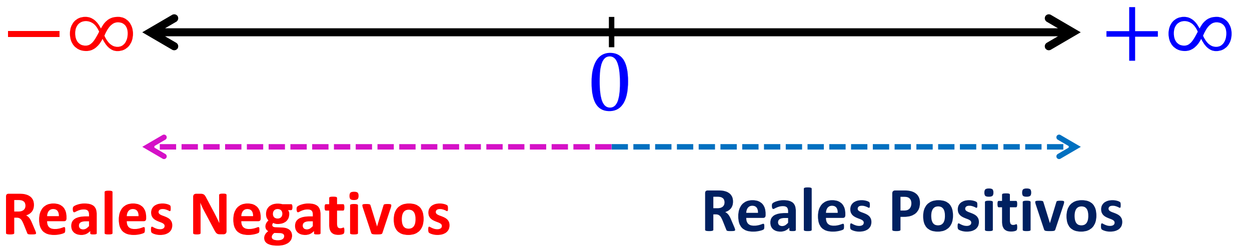
El conjunto de los números reales es aquel que consta de dos operaciones : adición y multiplicación, además posee una relación de orden llamada " menor que " ($<$).

Los **Números Reales ($\mathbb{R}$)** forman un conjunto completo y ordenado.

RECTA DE LOS NÚMEROS REALES

Es una recta geométrica, donde a cada número real le corresponde un solo punto de la recta y viceversa.

Es decir, hay una relación biunívoca entre un punto de la recta y un número real.



NÚMEROS REALES

Símbolos de Relaciones de Orden

$>$: mayor que

$<$: menor que

$\geq$: mayor igual que

$\leq$: menor igual que

Desigualdades

Son relaciones de orden entre dos números reales.

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, luego :

$a > 0 \leftrightarrow a$ es positivo

$a < 0 \leftrightarrow a$ es negativo

$a > b \leftrightarrow (a - b)$ es positivo

$a < b \leftrightarrow (a - b)$ es negativo

Clases de Intervalos

Abierto :

$$a < x < b \leftrightarrow x \in \langle a ; b \rangle$$

Cerrado :

$$a \leq x \leq b \leftrightarrow x \in [a ; b]$$

Semiabierto :

$$a < x \leq b \leftrightarrow x \in \langle a ; b]$$

$$a \leq x < b \leftrightarrow x \in [a ; b \rangle$$

Infinitos :

$$x > a \leftrightarrow x \in \langle a ; +\infty \rangle$$

$$x \geq a \leftrightarrow x \in [a ; +\infty \rangle$$

$$x < b \leftrightarrow x \in \langle -\infty ; b \rangle$$

$$x \leq b \leftrightarrow x \in \langle -\infty ; b]$$

NÚMEROS REALES

Propiedades :

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, se cumple que :

$$a > b \leftrightarrow c + a > b + c$$

$$a > b \wedge c \in \mathbb{R}^{+} \leftrightarrow ac > bc$$

$$a > b \wedge c \in \mathbb{R}^{-} \leftrightarrow ac < bc$$

$$\sqrt{a} \geq 0 \leftrightarrow a \geq 0$$

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \rightarrow a^2 \geq 0$$

$a\,.\,b > 0 \rightarrow$ a **y** b **tienen el mismo signo .**

$a\,.\,b < 0 \rightarrow$ a **y** b **tienen signos contrarios.**

$$a\,.\,b = 0 \rightarrow a = 0 \;\vee\; b = 0$$

NÚMEROS REALES

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real x, se denota por $|x|$ y se define como :

$$|x| = \begin{cases} x \; ; \; x \geq 0 \\ -x \; ; \; x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos :

$|6| = 6$; porque $6 \geq 0$

$|-7| = -(-7) = 7$; porque $-7 < 0$

Propiedades :

✓ $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \geq 0$

✓ $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x|$

✓ $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$

✓ $|x| = |y| \leftrightarrow x = y \vee x = -y$

✓ $|x| = a \leftrightarrow x = a \vee x = -a$

PROBLEMA 1

Si $x \in \langle -1\,;\,3\,]$**, halle la variación de** $G = \dfrac{3x+2}{4}$

Resolución

Del dato : $(\ -1 < x \leq 3\ )(\ 3\ )$

$$-3 + 2 < 3x + 2 \leq 9 + 2$$

$$(\ -1 < 3x + 2 \leq 11\ ) \div (\ 4\ )$$

$$-\frac{1}{4} < \underbrace{\frac{3x+2}{4}}_{G} \leq \frac{11}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{G \in \left\langle -\frac{1}{4}\,;\,\frac{11}{4} \right]}$$

PROBLEMA 2

Si $x \in \langle 3 ; 5]$, halle la variación de $M = 3x^2 + 1$

Resolución

Del dato : $(\ 3 < x \leq 5\ )^2$

$$(\ 9 < x^2 \leq 25\ )(3)$$

$$27 + 1 < 3x^2 + 1 \leq 75 + 1$$

$$28 < \underbrace{3x^2 + 1}_{M} \leq 76$$

$$\boxed{M \in \langle 28 ; 76]}$$

PROBLEMA 3

Halle el menor valor de $F = x^2 + 8x + 5 \; ; \; x \in \mathbb{R}$.

Resolución

Le damos forma adecuada a F :

$$F = x^2 + 8x + 5 = \left(x + \frac{8}{2}\right)^2 - \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 5 = (x+4)^2 - 11$$

Propiedades en $\mathbb{R}$: $(x+4)^2 \geq 0$

$$\underbrace{(x+4)^2 - 11}_{F} \geq 0 - 11$$

$$F \geq -11$$

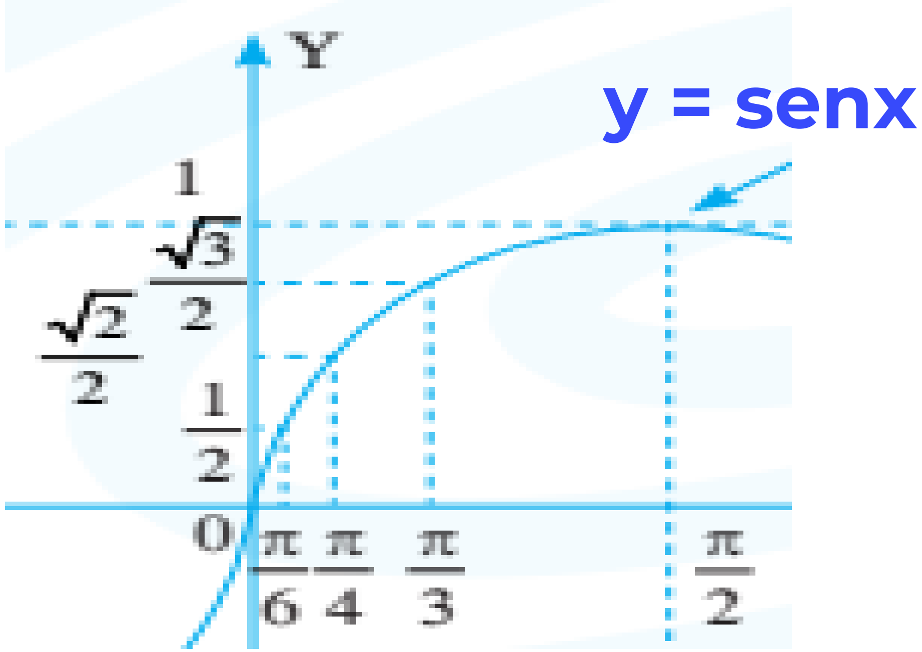
$$\boxed{F_{menor} = -11}$$

PROBLEMA 4

Si $\alpha \in \langle 30° ; 37° \rangle$, halle la variación de: $M = 10\,\text{sen}\alpha - 1$

Resolución

- **La función seno es creciente en el primer cuadrante :**



$$\text{sen}30^0 < \text{sen}\alpha < \text{sen}37°$$

$$\left(\frac{1}{2} < \text{sen}\alpha < \frac{3}{5} \right)(10)$$

$$5 - 1 < \underbrace{10\,\text{sen}\alpha - 1}_{} < 6 - 1$$

$$4 < M < 5$$

$$\boxed{M \in \langle 4 ; 5 \rangle}$$

PROBLEMA 5

Halle el menor valor de $\cos\phi$, si $|\,4\cos\phi - 3\,| = 1$

Resolución

$$4\cos\phi - 3 = 1 \quad \vee \quad 4\cos\phi - 3 = -1$$

$$4\cos\phi = 4 \quad \vee \quad 4\cos\phi = 2$$

$$\boxed{\cos\phi = 1} \quad \vee \quad \boxed{\cos\phi = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{(\cos\phi)_{\text{menor}} = \frac{1}{2}}$$

PROBLEMA 6

Ana tiene D días libres antes de iniciar sus clases ; para calcular dicha cantidad de días con que cuenta Ana, tendrás que resolver el siguiente ejercicio :

Si $\alpha \in IIC$, reduzca $D = 2\,|\,sen\alpha\,|\,csc\,\alpha - 3\,|\,tan\,\alpha\,|\,cot\alpha$

¿ Cuántos días libres tiene Ana ?

Resolución

$\alpha \in IIC \rightarrow sen\alpha > 0 \rightarrow |\,sen\alpha\,| = sen\alpha$

$\rightarrow tan\alpha < 0 \rightarrow |\,tan\alpha\,| = -\,tan\alpha$

$$D = 2\,|\,sen\alpha\,|\,csc\,\alpha - 3\,|\,tan\,\alpha\,|\,cot\alpha$$

$$D = 2\,(\,sen\alpha\,).\,csc\,\alpha - 3\,(-\,tan\alpha\,).\,cot\alpha$$

$$D = 2\,(\,1\,) - 3\,(\,-1\,) = 2 + 3 = 5$$

$\rightarrow$ **Ana tiene 5 días libres**

PROBLEMA 7

Al copiar de la pizarra la expresión $3+2\cos\alpha$, un estudiante cometió un error y escribió $3\,\text{sen}\alpha+2$. Halle las variaciones de lo que estaba escrito en la pizarra y lo que el alumno copió, sabiendo que α es ángulo agudo.

Resolución

Dato: $\alpha \in \langle 0° ; 90° \rangle$

$$\underbrace{\cos 90°} < \cos\alpha < \underbrace{\cos 0°}$$

$$(\;0 < \cos\alpha < 1\;)(2)$$

$$0+3 < 2\cos\alpha+3 < 2+3$$

$$3 < 3+2\cos\alpha < 5$$

$$\boxed{(3+2\cos\alpha) \in \langle 3 ; 5 \rangle}$$

$$\underbrace{\text{sen}0°} < \text{sen}\,\alpha < \underbrace{\text{sen}90°}$$

$$(\;0 < \text{sen}\,\alpha < 1\;)(3)$$

$$0+2 < 3\,\text{sen}\,\alpha+2 < 3+2$$

$$2 < 3\,\text{sen}\,\alpha+2 < 5$$

$$\boxed{(3\,\text{sen}\,\alpha+2) \in \langle 2 ; 5 \rangle}$$