



TRIGONOMETRY

CHAPTER 8

3rd
SECONDARY

Propiedades de las razones
trigonométricas de un ángulo
agudo



 **SACO OLIVEROS**

MOTIVATING | STRATEGY



I) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS DE UN ÁNGULO AGUDO (RTR)

Para un mismo ángulo agudo α se cumple :

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = \frac{\cancel{\text{CO}}}{\text{H}} \cdot \frac{\text{H}}{\cancel{\text{CO}}} = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = \frac{\cancel{\text{CA}}}{\text{H}} \cdot \frac{\text{H}}{\cancel{\text{CA}}} = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = \frac{\cancel{\text{CO}}}{\cancel{\text{CA}}} \cdot \frac{\cancel{\text{CA}}}{\cancel{\text{CO}}} = 1$$

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = 1$$

Ejemplo :

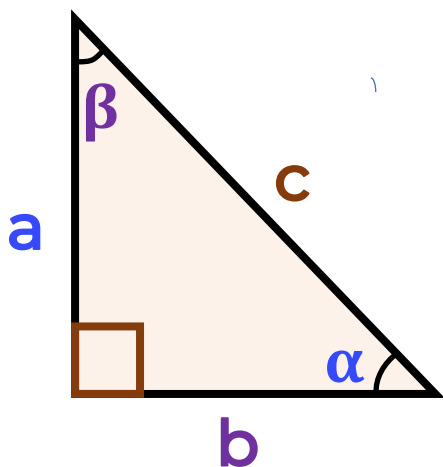
$$E = \frac{7 \text{ sen}35^\circ \text{ csc}35^\circ - 3 \text{ tan}49^\circ \text{ cot}49^\circ}{2 \text{ cos}62^\circ \text{ sec}62^\circ} = \frac{7(1) - 3(1)}{2(1)} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$





II) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS AGUDOS COMPLEMENTARIOS (CO – RT)

En un triángulo rectángulo, los catetos se consideran opuestos ó adyacentes, según sea el ángulo agudo de referencia .



\angle	CO	CA	H
α	a	b	c
β	b	a	c

Luego se cumple:

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\text{sec}\alpha = \frac{c}{b} = \csc\beta$$

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta$$



Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ; \quad 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\text{sen} \alpha = \cos \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta$$

$$\sec \alpha = \csc \beta$$

CO – RT



Ejemplos :

$$\text{sen} 35^\circ = \cos 55^\circ \quad ; \text{ porque: } 35^\circ + 55^\circ = 90^\circ$$

$$\tan(a + 42^\circ) = \cot(48^\circ - a) ;$$

$$\text{porque: } \cancel{a} + 42^\circ + 48^\circ - \cancel{a} = 90^\circ$$



1) Escriba verdadero (V) ó falso (F) según corresponda.

a) $\text{sen}10^\circ \cdot \text{csc}80^\circ = 1$ (F)

b) $\tan(2x - 5^\circ) \cdot \cot(2x - 5^\circ) = 1$ (V)

c) $\cos40^\circ = \text{sen}50^\circ$ (V)

d) $\sec(70^\circ - y) = \text{csc}(20^\circ + y)$ (V)

RESOLUCIÓN

Recordamos que :

Definición de RTR

Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$



$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = 1$$

$$\cos\alpha \cdot \sec\alpha = 1$$

$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$

Definición de CO - RT

$0^\circ < \alpha < 90^\circ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$
 $\alpha + \beta = 90^\circ$



$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \text{csc}\beta$$

CO - RT

Luego :

a) $10^\circ \neq 80^\circ \Rightarrow$ por RTR es falso

b) $2x - 5^\circ = 2x - 5^\circ$
 \Rightarrow por RTR es verdadero

c) $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$
 \Rightarrow por CO - RT es verdadero

d) $70^\circ - \cancel{y} + 20^\circ + \cancel{y} = 90^\circ$
 \Rightarrow por CO - RT es verdadero





2) Halle el valor de x si:
 $\text{sen}(2x + 5^\circ) \cdot \text{csc}(3x - 15^\circ) = 1$

RESOLUCIÓN

Recordamos que :

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cota} = 1$$



Luego :

Por RTR, igualamos las medidas angulares :

$$2x + 5^\circ = 3x - 15^\circ$$

$$5^\circ + 15^\circ = 3x - 2x$$

$$\therefore x = 20^\circ$$





3) Halle el valor de x si:
 $\tan(x - 10^\circ) = \cot(2x + 10^\circ)$

RESOLUCIÓN

Recordamos que:

Definición de CO - RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

CO - RT



Luego:

Por CO - RT:

$$x - \cancel{10^\circ} + 2x + \cancel{10^\circ} = 90^\circ$$

$$3x = 90^\circ$$

$$\therefore x = 30^\circ$$



4) Sabiendo que :
 $\tan 3x \cdot \cot(x + 40^\circ) = 1$,
 calcule $\cos 3x$.

RESOLUCIÓN

Recordamos que :

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1$$

$$\cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$



Luego :
 Por RTR , igualamos las medidas
 angulares :

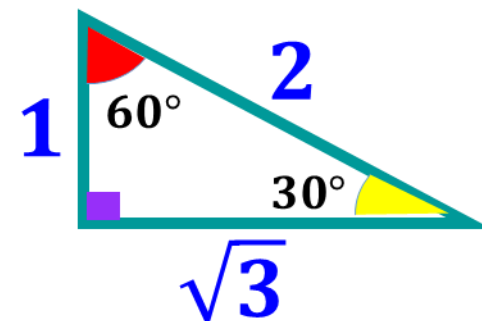
$$3x = x + 40^\circ$$

$$2x = 40^\circ \rightarrow x = 20^\circ$$

Luego : $\cos 3x = \cos 3(20^\circ) = \cos 60^\circ$

Recordamos :

$$\cos \theta = \frac{CA}{H}$$



$$\therefore \cos 3x = \frac{1}{2}$$



5) Sabiendo que :
 $\text{sen}(\alpha + 5^\circ) = \cos(2\alpha + 40^\circ)$
 calcule $\text{sen}2\alpha$.

RESOLUCIÓN

Recordamos que :

Definición de CO - RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\text{tan}\alpha = \cot\beta$$

$$\text{sec}\alpha = \csc\beta$$

CO - RT



Luego :

Por CO - RT :

$$\alpha + 5^\circ + 2\alpha + 40^\circ = 90^\circ$$

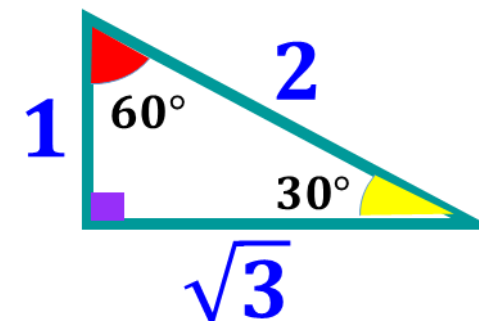
$$3\alpha = 45^\circ$$

$$\alpha = 15^\circ$$

Luego : $\text{sen}2\alpha = \text{sen}2(15^\circ) = \text{sen}30^\circ$

Recordamos que :

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{CO}}{\text{H}}$$



$$\therefore \text{sen}2\alpha = \frac{1}{2}$$





6) Las edades de Mitsumo y Nicole están dadas por las siguientes relaciones :

⊗ Mitsumo tiene x años .

⊗ Nicole tiene y años .

Donde : $\tan 2x^\circ \cdot \cot 3y^\circ = 1$;

$$\cos x^\circ = \sin (x + 30)^\circ$$

Indique la edad de cada una de ellas .

RESOLUCIÓN

Definición de CO - RT

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$; $0^\circ < \beta < 90^\circ$
 $\alpha + \beta = 90^\circ$

↕

$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \alpha = \cos \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \\ \sec \alpha = \csc \beta \end{array} \right\}$

CO - RT

Definición de RTR

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$

↕

$\left\{ \begin{array}{l} \text{sen} \alpha \cdot \csc \alpha = 1 \\ \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1 \\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \end{array} \right\}$

$$\cos x^\circ = \sin (x + 30)^\circ$$

Por CO - RT :

$$x^\circ + (x + 30)^\circ = 90^\circ$$

$$2x = 60 \Rightarrow x = 30$$

$$\tan 2x^\circ \cdot \cot 3y^\circ = 1$$

Por RTR :

$$2x^\circ = 3y^\circ$$

$$2(30) = 3y \Rightarrow y = 20$$

∴ Mitsumo tiene 30 años
y Nicole tiene 20 años





7) Paul y Elizabeth una pareja de esposos, viajan a Arequipa por 4 días y para su regreso desean comprar regalos para sus hermanos en Lima. Elizabeth tiene A hermanos y Paul tiene B hermanos.

Calcular el total de regalos que comprarán, si A y B están determinados por las siguientes expresiones:

$$A = (4 \operatorname{sen} 2^\circ + 3 \cos 88^\circ) \operatorname{csc} 2^\circ$$

$$B = \frac{2 \operatorname{sen} 10^\circ}{\cos 80^\circ} + \frac{3 \tan 14^\circ}{\cot 76^\circ}$$

RESOLUCIÓN

Por CO - RT :

$$2^\circ + 88^\circ = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 2^\circ = \cos 88^\circ$$

$$10^\circ + 80^\circ = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} 10^\circ = \cos 80^\circ$$

$$14^\circ + 76^\circ = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \tan 14^\circ = \cot 76^\circ$$

Luego reemplazamos en A y B :

$$A = (4 \operatorname{sen} 2^\circ + 3 \operatorname{sen} 2^\circ) \operatorname{csc} 2^\circ$$

$$A = 7 \operatorname{sen} 2^\circ \cdot \operatorname{csc} 2^\circ = 7 (1) = 7$$

$$B = \frac{2 \operatorname{sen} 10^\circ}{\operatorname{sen} 10^\circ} + \frac{3 \tan 14^\circ}{\tan 14^\circ} = 2 + 3 = 5$$

$$\text{Calculamos : } A + B = 7 + 5$$

$$\therefore \text{Total} = 12 \text{ regalos}$$

