

TRIGONOMETRY

Chapter 17

4th
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES



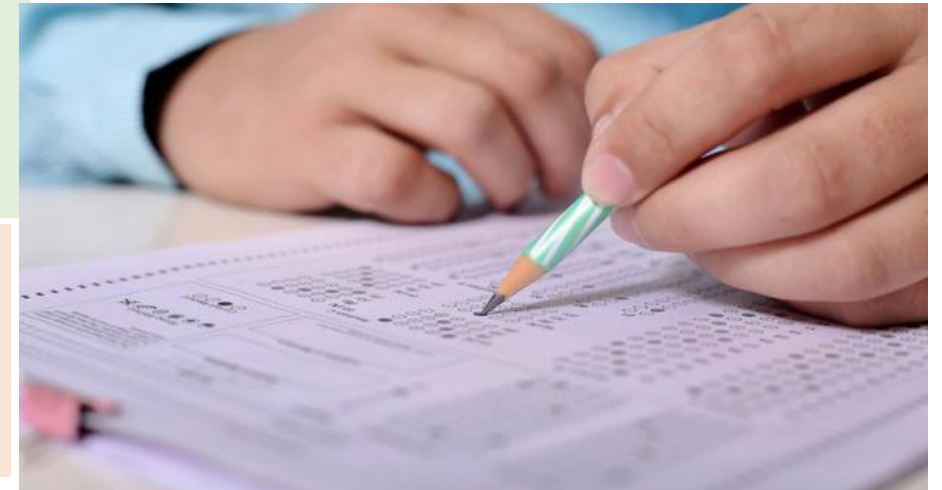
MOTIVATING STRATEGY

Ya hemos aprendido con éxito las **identidades trigonométricas fundamentales**.

Pero ... ¿Qué sucedería en un examen de admisión si nos encontramos con ejercicios mucho más complejos?

Un **Examen de Admisión** consta de 100 preguntas y el tiempo máximo para desarrollarlas es de tres horas, eso nos da un tiempo aproximado de un minuto y medio por pregunta resuelta.

Las **identidades trigonométricas auxiliares** sirven para abreviar el procedimiento y ahorrar bastante tiempo en la resolución.



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

✓ $\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$

✓ $\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$

✓ $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

✓ $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$

$$✓ (1 + \textit{sen}x + \textit{cos}x)^2 = 2 (1 + \textit{sen}x) (1 + \textit{cos}x)$$

$$✓ (1 - \textit{sen}x + \textit{cos}x)^2 = 2 (1 - \textit{sen}x) (1 + \textit{cos}x)$$

$$✓ (1 + \textit{sen}x - \textit{cos}x)^2 = 2 (1 + \textit{sen}x) (1 - \textit{cos}x)$$

$$✓ (1 - \textit{sen}x - \textit{cos}x)^2 = 2 (1 - \textit{sen}x) (1 - \textit{cos}x)$$

$$\frac{\textit{cos}x}{1 + \textit{sen}x} = \frac{1 - \textit{sen}x}{\textit{cos}x}$$

$$\frac{\textit{cos}x}{1 - \textit{sen}x} = \frac{1 + \textit{sen}x}{\textit{cos}x}$$

$$\frac{\textit{sen}x}{1 + \textit{cos}x} = \frac{1 - \textit{cos}x}{\textit{sen}x}$$

$$\frac{\textit{sen}x}{1 - \textit{cos}x} = \frac{1 + \textit{cos}x}{\textit{sen}x}$$

HELICO PRACTICE 1

Reduzca $G = \frac{1}{3}(\sin^6 \theta + \cos^6 \theta) - \frac{1}{2}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\sin^6 \theta + \cos^6 \theta = 1 - 3 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$$

$$\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta$$

$$G = \frac{1}{3}(\underbrace{\sin^6 \theta + \cos^6 \theta}_{1 - 3 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}) - \frac{1}{2}(\underbrace{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}_{1 - 2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta})$$

$$G = \frac{1}{3}(1 - 3 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta) - \frac{1}{2}(1 - 2 \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta)$$

$$G = \frac{1}{3} - \cancel{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta} - \frac{1}{2} + \cancel{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore G = -\frac{1}{6}$$

HELICO PRACTICE 2

Simplifique $E = \frac{(\sec^2 x + \csc^2 x) \cos x}{\tan x + \cot x}$

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{(\sec^2 x + \csc^2 x) \cos x}{\tan x + \cot x}$$

$$E = \frac{(\cancel{\sec^2 x} \cdot \cancel{\csc^2 x}) \cos x}{\cancel{\sec x} \cdot \cancel{\csc x}}$$

$$E = \underbrace{\sec x \cdot \csc x}_{1} \cdot \cos x$$

Recordar :

$$\sec^2 x + \csc^2 x = \sec^2 x \cdot \csc^2 x$$

$$\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$$

$$\cos x \cdot \sec x = 1$$

$$\therefore E = \csc x$$

HELICO PRACTICE 3

Reduzca $G = \frac{(1 + \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^2}{3(1 - \operatorname{cos} x)} - \frac{2 \operatorname{sen} x}{3}$

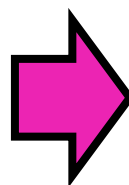
RESOLUCIÓN

$$G = \frac{(1 + \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^2}{3(1 - \operatorname{cos} x)} - \frac{2 \operatorname{sen} x}{3}$$

Recordar : $(1 + \operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^2 = 2(1 + \operatorname{sen} x)(1 - \operatorname{cos} x)$

$$G = \frac{2(1 + \operatorname{sen} x) \cancel{(1 - \operatorname{cos} x)}}{3 \cancel{(1 - \operatorname{cos} x)}} - \frac{2 \operatorname{sen} x}{3} = \frac{2(1 + \operatorname{sen} x) - 2 \operatorname{sen} x}{3}$$

$$G = \frac{2 + \cancel{2 \operatorname{sen} x} - \cancel{2 \operatorname{sen} x}}{3}$$



$$\therefore G = \frac{2}{3}$$

HELICO PRACTICE 4

Si $\tan x + \cot x = 6$; reduzca $E = \sin^4 x + \cos^4 x$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

Dato : $\tan x + \cot x = 6$

$$\sec x \cdot \csc x = 6$$

Invirtiendo: $\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{6}$

Luego : $E = \sin^4 x + \cos^4 x$

$$E = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

$$E = 1 - 2 (\sin x \cdot \cos x)^2$$

$$E = 1 - 2 \left(\frac{1}{6} \right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{1}{36} \right)$$

$$E = \frac{18}{18} - \frac{1}{18}$$

$$\therefore E = \frac{17}{18}$$

HELICO PRACTICE 5

Si $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \frac{1}{3}$, reduzca $E = (1 + \sin^2\alpha)(1 + \cos^2\alpha)$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3 \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

Dato: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \frac{1}{3}$

$$1 - 3 \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = 3 \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

$$\frac{2}{9} = \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

Calculamos E :

$$E = (1 + \sin^2\alpha)(1 + \cos^2\alpha)$$

$$E = 1 + \underbrace{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}_{1} + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

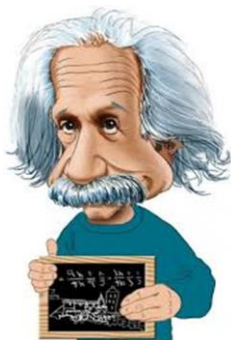
$$E = 1 + 1 + \frac{2}{9}$$

$$\therefore E = \frac{20}{9}$$

HELICO PRACTICE 6

Si el gasto diario de Lucía en la cafetería de su colegio es de $S / (4A \cos x)$; determine el gasto total de lunes a viernes si se sabe que $A = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$.

Recordar :



$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Dato: $A = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x$

RESOLUCIÓN

$$A = \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \cancel{\sin x} + \cancel{\sin x}}{\cos x} = \sec x$$

$$\text{Gasto diario} = S / (4 A \cdot \cos x)$$

$$\text{Gasto diario} = S / (4 \underbrace{\sec x}_{=1} \cdot \cos x)$$

$$\text{Gasto diario} = S / (4 \cdot 1) = S / 4$$

$$\text{Gasto de Lunes a Viernes} = 5(S / 4)$$

$$\therefore \text{Gasto total} = S / 20$$

HELICO PRACTICE 7

Valentino es un audaz vendedor de electrodomésticos que desea alcanzar ventas máximas en el mes ; después de un extenuante trabajo, su comisión estará dada por $\$/ (1000A \tan x)$.- Determine el monto total de su comisión si

se sabe que $A = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{cos} x} - \operatorname{csc} x$.

RESOLUCIÓN

Recordar :



$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{cos} x} = \frac{1 + \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} x = 1$$

Dato: $A = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{cos} x} - \operatorname{csc} x$

$$A = \frac{1 + \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$A = \frac{\cancel{1} + \operatorname{cos} x - \cancel{1}}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} = \cot x$$

$$\text{Comisión} = \$/ (1000 A \cdot \tan x)$$

$$\text{Comisión} = \$/ (1000 \cdot \cot x \cdot \tan x)$$

$$\text{Comisión} = \$/ (1000 \cdot 1)$$

$$\therefore \text{Comisión} = \$/ 1000$$



SACO
OLIVEROS