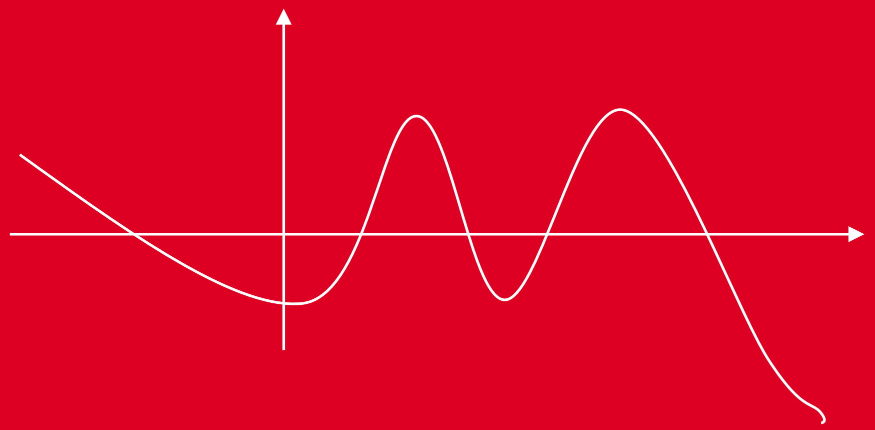
ALGEBRA

CHAPTER: 12

5th

of Secondary



Tema: Ecuaciones Polinomiales

SACO OLIVEROS

MOTIVATING

STRATEGY

SACO OLIVEROS

"Las ecuaciones de Maxwell han tenido más impacto en la historia de la humanidad que muchos presidentes."

CARL SAGAN

HELICO

THEORY

SACO OLIVEROS

ECUACIONES POLINOMIALES

Denominaremos ecuaciones polinomiales a ecuaciones de la forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

X: incognita

$a_0, a_1, a_2 + \cdots + a_{n-1}, a_n$ Coeficientes

Raíz de un Polinomio

Diremos que "a" es una raíz de un polinomio (no constante) $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$.

EJEMPLO :

Sea : $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 1 + 2$$

$$P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 \quad = 0$$

Entonces "1" es raíz de $P(x)$

PROPIEDADES

1. **Teorema fundamental del álgebra:** **Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene exactamente "n" raíces.**

Ejemplo

$$P(x) = x^5 - 4x^2 - 16 = 0$$

Grado P(x)=5

P(x) tiene 5 raices

2. **Paridad de raíces irracionales:** **Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes racionales , se cumple que si una raíz del polinomio es $a+\sqrt{b}$ si y sólo si $a-\sqrt{b}$ es también raíz del polinomio.**
$(a, b \in \mathbb{Q} \wedge b > 0$ no cuadrado perfecto$)$

Ejemplo

$si\ \ una\, raices\ \ de\, la\, ecuacion$

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$

Es $x_1 = 2 + \sqrt{3}$

Entonces la otra de las raíces será

Es $x_2 = 2 - \sqrt{3}$

TEOREMA DE CARDANO VIETE

Sea el polinomio **mónico** , de grado “n” :

$$\boxed{P(x) = x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \cdots + (-1)^nS_n = 0}$$

de $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ son raíces de aquel polinomio.

Donde:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n$ **SUMA DE RAÍCES**
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \dots + x_{n-1}x_n$ **SUMA DE LOS PRODUCTO BINARIO DE LAS RAÍCES**
- $S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$ **SUMA DE LOS PRODUCTO TERNARIO DE LAS RAÍCES**

$\vdots \qquad \vdots$

- $S_n = x_1 . x_2 . x_3 . \dots . x_n$ **PRODUCTO DE RAÍCES**

CASOS PARTICULARES :

Polinomio cúbico:

$$P(x) = x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

donde x_1, x_2, x_3 son raíces de aquel polinomio.

Donde:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 \qquad S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \qquad S_3 = x_1x_2x_3$$

EJEMPLO :

$$\textbf{Sea :}\ P(x) = \overset{+}{x^3} \overset{-}{+} \underset{S_1}{4x^2} \overset{+}{+} \underset{S_2}{3x} \overset{-}{-} \underset{S_3}{8} = 0$$

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(+4) = -4$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +(+3) = 3$
- $S_3 = x_1\, x_2\, x_3 = -(-8) = 8$

Observación:

En el caso que el polinomio no sea mónico , se dividirá entre su coeficiente principal y se procede al mismo criterio planteado.

EJEMPLO :

Sea : $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - 9x + 15 = 0$

$3 \div$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 0$$

$S_1 \quad S_2 \quad S_3$

Entonces:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(-2) = 2$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +(-3) = -3$
- $S_3 = x_1\,x_2\,x_3 = -(+5) = -5$

Observación:

Sea un polinomio cúbico, donde :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Entonces se cumple:

✓ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

✓ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3\,x_1\,x_2\,x_3$

Lo cual equivale a decir:

Si $S_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \checkmark\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2S_2 \\ \checkmark\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3S_3 \end{cases}$$

Polinomio de cuarto grado:

$$P(x) = x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son raíces de aquel polinomio.

Donde:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
- $S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$
- $S_4 = x_1x_2x_3x_4$

HELICO

PRACTICE

SACO OLIVEROS

1. Calcule la mayor raíz en

$$\underbrace{x^3-7x^2+7x+15}_{P(x)}=0$$

Resolución :

Factorizamos P(x):
Divisores binomicos

$$P(-1)=0$$

Por R

	1	-7	7	15
$x=$ -1		-1	8	-15
	1	-8	15	0

Entonces:

$$P(x)=(x+1)(x^2-8x+15)$$

$$P(x)=(x+1)(x-3)(x-5)=0$$

$$x_1=-1$$

$$x_2=3$$

$$x_3=5$$

$$\therefore\ Mayor\ \ raíz=5$$

2. Si $3+\sqrt{5}$ es una raíz del polinomio

$$P(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + ax + b$$

Calcule la suma de las otras raíces.

Resolución :

Sea x_1, x_2 , x_3 y x_4 raíces de la ecuación de cuarto grado

Del problema :

$$P(x) = x^{4} \overset{-}{} \underbrace{8x^3}_{S_1} + x^2 + ax + b$$

Por dato : $\boxed{x_1 = 3+\sqrt{5}}$

Recordar :

$$P(x) = x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

Suma de raíces : $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -(-8) = 8$$

$$3+\sqrt{5} + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 5 - \sqrt{5}$$

$\therefore$ ***Suma de las otras raíces es*** $5-\sqrt{5}$

3. *sea a, b y c las raices de la ecuacion*

$$2x^3-3x^2+x-12=0$$

Efectue $Q=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$

Resolución :

$$2x^3-3x^2+x-12=0$$

$$x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-6=0$$

S_1 S_2 S_3

Entonces:

- $S_1=a+b+c=-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$
- $S_2=ab+ac+bc=+\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$
- $S_3=abc=-(-6)=6$

Nos piden :

$$Q=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$$

$$Q=\frac{c}{abc}+\frac{a}{abc}+\frac{b}{abc}$$

$$Q=\frac{a+b+c}{abc}$$

$$Q=\frac{\frac{3}{2}}{6}$$

$$\boxed{\therefore Q=\frac{1}{4}}$$

4. Siendo x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación

$$7x^3 - 5x + 42 = 0$$

Evalúe $K = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Resolución :

$$P(x) = 7x^3 + 0x^2 - 5x + 42$$

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -5$$

Por identidad:

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)^2}_{0} \equiv \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}_{K} + 2\underbrace{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}_{-5}$$

$$0 = K + 2(-5)$$

$$K = 10$$

$$\boxed{\therefore K = 10}$$

5. Se sabe que las raíces de:

$$x^3 - 12x^2 + mx - 28 = 0$$

están en progresión aritmética. Halle m.

Resolución :

Por dato se sabe que es una P.A

$\boxed{x_1 = a - r}$ $\boxed{x_2 = a}$ $\boxed{x_3 = a + r}$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3a \ldots (I)$$

Además:

$$\begin{matrix} + & & - & & + & & - \\ x^3 & - & 12x^2 & + & mx & - & 28 = 0 \end{matrix}$$

$$\underset{\displaystyle S_1}{\downarrow}$$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(-12) \ldots (II)$$

De (I) y (II) : $a = 4$

$$\boxed{x_2 = 4}$$

Reemplazando la raíz $x_2 = 4$ en el polinomio

$$4^3 - 12(4)^2 + m(4) - 28 = 0$$

$$64 - 192 + m(4) - 28 = 0$$

$$4m = 156$$

$$\boxed{\therefore m = 39}$$

6. *si una de las soluciones de la ecuacion*

$$4x^3 - mx^2 + nx - 8 = 0$$

Es $2-\sqrt{2}$, donde m y n representan las edades De Pedro y Antonio. Halle la diferencia positiva de las edades

Resolución :

Por la paridad de raíces irracionales:

$$x_1 = 2-\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 2+\sqrt{2}$$

Además:

$$4x^3 - mx^2 + nx - 8 = 0$$

$$4 \div$$

$$x^3 - \frac{m}{4}x^2 + \frac{n}{4}x - 2 = 0$$

$$\frac{m}{4} \to S_1 \qquad \frac{n}{4} \to S_2 \qquad 2 \to S_3$$

Recordar :

$$P(x) = x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$
- $S_3 = x_1x_2x_3$

$$S_3 = \underbrace{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}.x_3$$

$$-(-2) = (2^2 - \sqrt{2}^2) . x_3$$

$$2 = 2 . x_3 \Rightarrow x_3 = 1$$

Reemplazando $x_3 = 1$ en el polinomio:

$$4(1)^3 - m(1)^2 + n(1) - 8 = 0$$

$$4 - m + n - 8 = 0$$

$$n - m = 4$$

7.

Dos cuerpos se desplazan por un camino irregular, los polinomios:

$$P_1(t) = 3t^3 + 2t^2 + 9t$$
$$P_2(t) = 2t^3 + 8t^2 + 1$$

Representan la distancia en kilometros y t el tiempo en horas que lleva su desplazamiento. Halle

$$R = \frac{(t_1-1)^3 + (t_2-2)^3 + (t_3-3)^3}{(t_1-1)(t_2-2)(t_3-3)}$$, donde t_1, t_2, t_3 son los tiempos cuando las distancias recorridas son iguales.

Resolución :

$$P_1(t) = P_2(t)$$
$$3t^3 + 2t^2 + 9t = 2t^3 + 8t^2 + 1$$
$$t^3 - 6t^2 + 9t - 1 = 0$$

se cumple:

$$t_1 + t_2 + t_3 = -(-6) = 6$$
$$t_1 + t_2 + t_3 - 6 = 0$$
$$(t_1 - 2) + (t_2 - 2) + (t_3 - 2) = 0$$

Recordar

$Si\ a + b + c = 0\ entonces\quad a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

$$(t_1-2)^3 + (t_2-2)^3 + (t_3-2)^3 = 3(t_1-2)(t_2-2)(t_3-2)$$

$$R = \frac{3(t_1-2)(t_2-2)(t_3-2)}{(t_1-2)(t_2-2)(t_3-2)}$$

$$R = 3$$