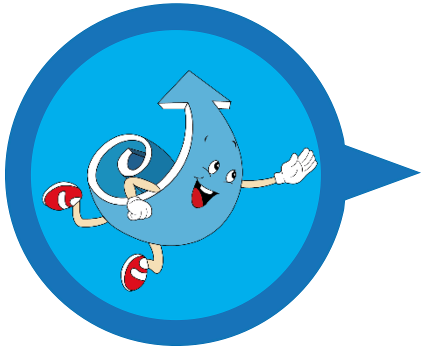
ARITHMETIC

Chapter 3

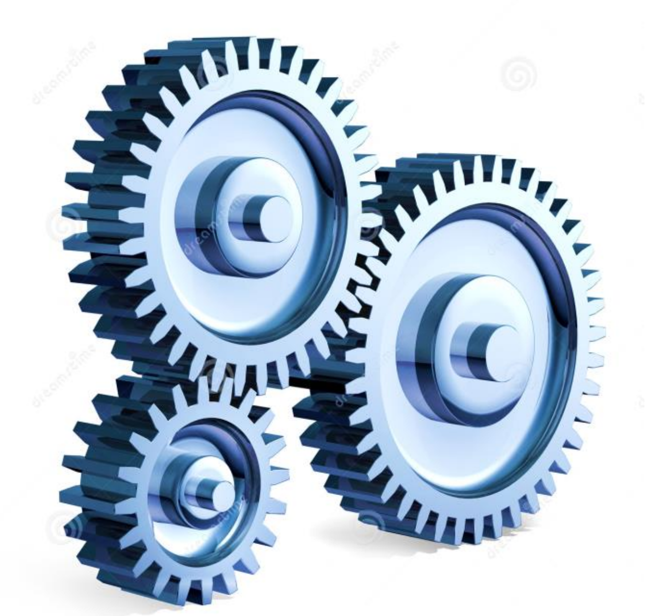
5th
SECONDARY

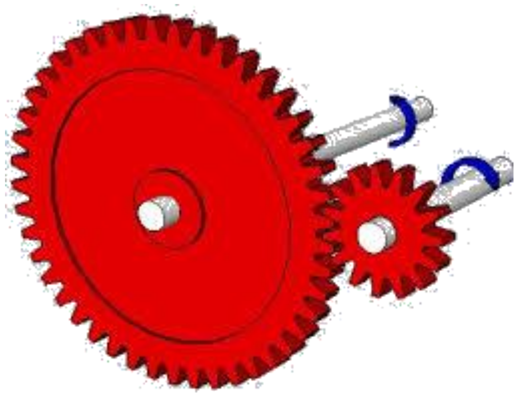
Magnitudes proporcionales I

SACO OLIVEROS



Dos ruedas de 30 y 20 dientes están engranadas, si la primera da 200 vueltas. ¿Cuántas vueltas dará al segunda?





¿QUE ES UNA MAGNITUD?

Es algo cuantificable, es decir, medible ponderable. Las magnitudes pueden ser directamente apreciables por nuestros sentidos, como los tamaños y pesos de las cosas, o más indirectas (aceleraciones, energías).

Medir implica realizar un experimento de cuantificación, normalmente con un instrumento especial (reloj, balanza, termómetro).

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Se dice que dos magnitudes son proporcionales si ellas se relacionan de tal modo que, multiplicando la medida (o valor) de una de ellas por un número, la medida (o valor) correspondiente de la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

1. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES
2. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES
3. PROPIEDADES

1 MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Se ha pagado S/.16 por 8kg de arroz. Determine

a. El costo de 24 kg.

b. El peso por el cual se pagó s/.80.

			x3	x5	
Costo(S/.)	...	16	48	80	...
Peso(Kg)	...	8	24	40	...
			x3	x5	

Observando el comportamiento de los valores afirmamos que la Magnitud costo es directamente proporcional a la magnitud peso.

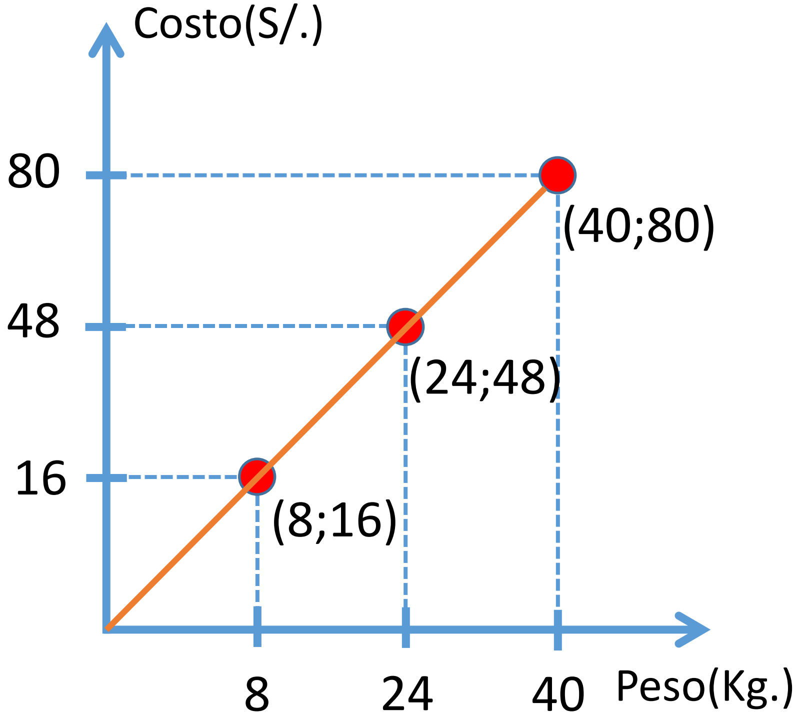
Además se tiene que: $\dfrac{16}{8} = \dfrac{48}{24} = \dfrac{80}{40} = 2$ ⇒ $\dfrac{\text{Valor costo}}{\text{Valor peso}} = \dfrac{y}{x} = k$

En General:

Si las magnitudes A y B son directamente proporcionales , se cumple que:

$$\boxed{\dfrac{\text{Valor de A}}{\text{Valor de B}} = \text{Cte.}}$$

Con los valores respectivos podemos elaborar una gráfica, como



Donde:

$$\boxed{\begin{array}{c} y = kx \\ f(x) = kx \end{array}}$$

En notación funcional

Textualmente decimos que:

El costo está en función del peso

2 MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Un automóvil con una velocidad de 20m/s tarda 30s en recorrer cierta distancia

a. ¿Qué tiempo tardaría si la velocidad de 60m/s?

b. ¿Qué velocidad debería emplearse para emplear solo 25s?

			x3	$\times \frac{6}{5}$	
Velocidad(m/s)	15	20	60	24	...
Tiempo (s)	40	30	10	25	...
			÷3	$\div \frac{6}{5}$	

Observando el comportamiento de los valores afirmamos que la magnitud velocidad y la magnitud tiempo son inversamente proporcionales.

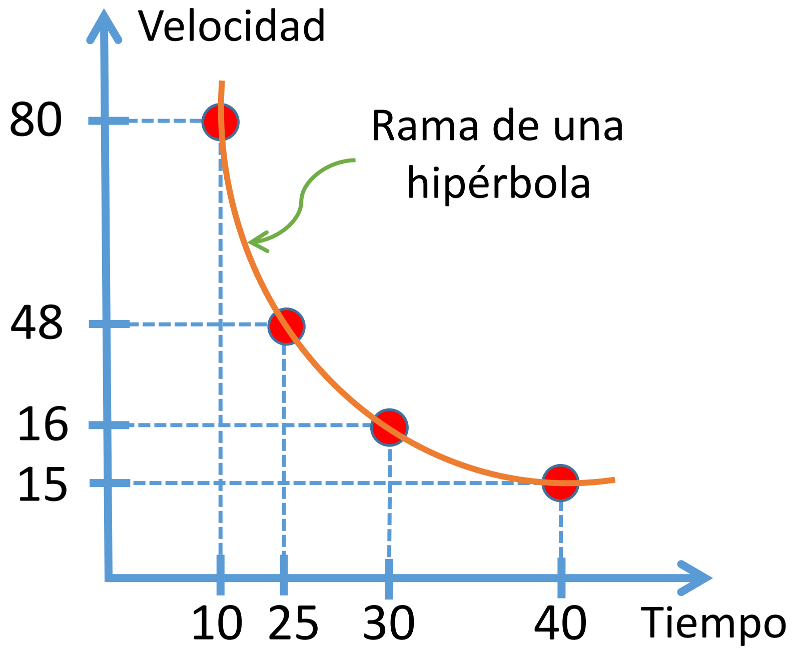
Además se tiene que:

$$20\,(30) = 60\,(10) = 24\,(25) = 600 = \left(\frac{Valor}{Velocidad}\right)\left(\frac{Valor}{Tiempo}\right) = yx = k \quad \text{cte}$$

En General:

Si las magnitudes A y B son inversamente proporcionales , se cumple que:

$$\left(\frac{Valor}{de\ A}\right)\left(\frac{Valor}{de B}\right) = \text{Cte.}$$



Luego:

$$y = \frac{k}{x}$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = \frac{k}{x}$$

En notación funcional

Textualmente diremos que: *La velocidad está en función del tiempo*

3

Propiedades:

- Si A es DP a B → B es DP a A
- Si A es IP a B → B es IP a A
- Si A es DP a B → A^n es DP a B^n , $n \in$ Q
- Si A es IP a B → A^n es IP a B^n , $n \in$ Q
- Si A es IP a B → A es DP a $\frac{1}{B}$
- $\left.\begin{array}{l}\text{A DP B (C constante)}\\ \text{A DP C (C constante)}\end{array}\right\}$ A DP B x C

1. Se conoce que la magnitud A es DP a B^2 e IP a $\sqrt{C}$. Si cuando A=8; B=4 entonces C=25, halle el valor de A cuando B=12 y C=36.

RESOLUCIÓN

$$\begin{matrix} A \text{ DP } B^2 \\ A \text{ IP } \sqrt{C} \end{matrix} \Rightarrow \frac{A \times \sqrt{C}}{B^2} = \text{Cte.}$$

Reemplazando

$$\frac{8 \times \sqrt{25}}{4^2} = \frac{A \times \sqrt{36}}{12^2}$$

$$\frac{8 \times 5}{16} = \frac{A \times 6}{144}$$

NOS PIDEN

$$\boxed{A = 60}$$

2. Según la ley de Boyle, la presión es IP al volumen que contiene determinada cantidad de gas. ¿A qué presión está sometido un gas, si al aumentar esta presión en 2 atmósferas el volumen varía en 1/5?

RESOLUCIÓN

$$P \times V = \text{Cte.}$$

Reemplazando

$$P \times \cancel{V} = (P + 2) \times \left(\frac{4}{5}\cancel{V}\right)$$

$$5P = 4(P + 2)$$

$$5P = 4P + 8$$

NOS PIDEN

$$\boxed{P = 8}$$

3. La velocidad del sonido en el aire es proporcional a la raíz cuadrada de la temperatura absoluta. Si la velocidad del sonido a 16°C es 340 m/s, ¿cuál será la velocidad a 127°C?

RESOLUCIÓN

$$\frac{V}{\sqrt{C° + 273°}} = \text{Cte.}$$

RECORDEMOS

Temperatura absoluta:

C° + 273°

Reemplazando

$$\frac{340}{\sqrt{16° + 273°}} = \frac{V}{\sqrt{127° + 273°}}$$

$$\frac{340}{17} = \frac{V}{20}$$

NOS PIDEN

$$\boxed{V = 400}$$

4. El sueldo de un empleado es directamente proporcional a su eficiencia, la cual se mide en puntos, y a sus años de servicio e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de su edad. Un empleado de 25 años, con 4 años de servicio tiene 80 puntos de eficiencia, 11 años más tarde tiene 60 puntos de eficiencia y su sueldo era $ 2150 más. ¿Cuál era su sueldo a los 25 años?

RESOLUCIÓN

S DP Ef

S DP A

A IP $\sqrt{E}$

$$\Rightarrow \frac{S \times \sqrt{E}}{Ef \times A} = Cte.$$

Reemplazando

$$\frac{S \times \sqrt{25}}{80 \times 4} = \frac{(S+2150) \times \sqrt{36}}{60 \times 15}$$

$$\frac{S \times 5}{320} = \frac{(S+2150) \times 6}{900}$$

NOS PIDEN

$$\boxed{S = 1600}$$

5. La velocidad de un automóvil es DP a la potencia del motor e IP al cuadrado del número de personas que viajan en él. Si un automóvil que tiene una potencia de 20 hp y lleva 2 personas desarrolla una velocidad de 60 km/h, ¿qué potencia tendrá otro automóvil similar que lleva 4 personas a una velocidad de 45 km/h?

RESOLUCIÓN

V DP P

V IP $(Pe)^2$

$$\Rightarrow \frac{V \times (Pe)^2}{P} = \text{Cte.}$$

Reemplazando

$$\frac{60 \times 2^2}{20} = \frac{45 \times 4^2}{P}$$

NOS PIDEN

$$P = \frac{45 \times 16}{12}$$

$$\boxed{P = 60}$$

6. El precio de un televisor varía de acuerdo al DP al cuadrado de su tamaño e IP a la raíz cuadrada de la energía que consume. Cuando su tamaño es de 14 pulgadas y consume E de energía, su precio es de $ 360. ¿Cuánto costará un televisor, cuyo tamaño es 21 pulgadas y consume $E/4$ de energía?

RESOLUCIÓN

P DP T^2

P IP $\sqrt{E}$

$$\Rightarrow \frac{P \times \sqrt{E}}{T^2} = \text{Cte.}$$

Reemplazando

$$\frac{360 \times \sqrt{E}}{14^2} = \frac{P \times \sqrt{E/4}}{21^2}$$

$$\frac{360 \times \cancel{\sqrt{E}}}{\cancel{7^2} \times 2^2} = \frac{P \times \frac{\cancel{\sqrt{E}}}{\sqrt{4}}}{\cancel{7^2} \times 3^2}$$

NOS PIDEN

$$P = \frac{360 \times 9 \times 2}{4}$$

$$\boxed{P = 1620}$$

7. El precio de un auto es directamente proporcional a su potencia e inversamente proporcional a su consumo de combustible y a la raíz cuadrada de su antigüedad. En dos autos, se sabe que el primer auto tiene doble potencia que el segundo, consume por kilómetro los 5/3 de los consume el segundo y la antigüedad del primero es los 4/9 de la del segundo. Si se sabe que los dos autos juntos cuestan $ 16 800, ¿cuánto cuesta el segundo?

RESOLUCIÓN

P DP Po

P IP C

P IP $\sqrt{A}$

$$\frac{P \times C \times \sqrt{A}}{Po} = Cte.$$

Reemplazando

$$\frac{P_1 \times 5\cancel{C} \times \cancel{\sqrt{4}}}{\cancel{2}\,\cancel{Po}} = \frac{P_2 \times 3\cancel{C} \times \sqrt{9}}{\cancel{Po}}$$

$$5P_1 = 9P_2$$

$$P_1 = 9k$$

$$P_2 = 5k$$

Dato: $P_1 + P_2 = 16800$

$$14k = 16800$$

$$k = 1200$$

NOS PIDEN $P_2 = 5k$

$$\boxed{P_2 = 6000}$$