



# ALGEBRA

## Chapter 14

**4th**  
SECONDARY

Ecuaciones Polinomiales



 **SACO OLIVEROS**

# HELICO

---

# MOTIVATING



La edad de Carla es  $(a^3 + b^3 + c^3)$  años; donde  $a$ ;  $b$  y  $c$  son las raíces de la ecuación:  $x^3 + 2x - 4 = 0$   
¿Cuál será la edad de Carla dentro de 4 años?

RPTA: 16 años

# HELICO THEORY

## CHAPTER 14

---

# ECUACIONES POLINOMIALES

## I) ECUACIÓN

~~Polinomial~~ Ecuaciones de grado “n” de la forma:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0 \quad a_0 \neq 0, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  : son los coeficientes de  $P(x)$

➤  $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

➤  $P(x) = 4x^5 + 7x^3 - 8x - 3 = 0$



## //) Raíz de un Polinomio

Diremos que “**a**” es una raíz de un polinomio  $P(x)$  si y sólo si  $P(\mathbf{a})=0$ .

Ejemplo:

$$\text{Sea : } P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

Se observa que “**1**” es raíz de  $P(x)$ , pues:

$$P(\mathbf{1}) = (\mathbf{1})^3 - 2(\mathbf{1})^2 - \mathbf{1} + 2$$

$$P(\mathbf{1}) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{P(\mathbf{1})=0}$$

### III) PROPIEDADES

- 1) Toda ecuación polinomial de grado “n” tiene exactamente “n” raíces.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \quad \rightarrow \text{Presenta 3 raíces}$$

$$x^5 + 7x^3 - 8x - 3 = 0 \quad \rightarrow \text{Presenta 5 raíces}$$

- 2) Sea:  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$
- Si  $a + \sqrt{b}$  es raíz de  $P(x)$   $\longleftrightarrow$   $a - \sqrt{b}$  también es raíz de  $P(x)$

Si:  $5 + \sqrt{3}$  es raíz de  $P(x)$   $\rightarrow$   $5 - \sqrt{3}$  es raíz de  $P(x)$

## IV) TEOREMA DE CARDANO

Sea la ecuación :

$$P(x) = a_0^+ x^n + a_1^- x^{n-1} + a_2^+ x^{n-2} + a_3^- x^{n-3} + \dots + a_n^{(-1)^n} = 0$$

cuyas raíces son:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

SUMA DE RAÍCES

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

SUMA DE PRODUCTOS BINARIOS

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \dots = \frac{a_2}{a_0}$$

SUMA DE PRODUCTOS TERNARIOS

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots = -\frac{a_3}{a_0}$$

Y así sucesivamente hasta llegar al “producto de raíces”

PRODUCTOS DE RAÍCES

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$



## EJEMPLOS APLICATIVOS

$$1) \text{ Sea: } 2x^3 - 3x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{2}$$

$$\rightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{-7}{2}$$

$$\rightarrow x_1x_2x_3 = \frac{-1}{2}$$

$$2) \text{ Sea: } 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow x_1x_2 + \dots + x_3x_4 = \frac{-10}{2} = -5$$

$$\rightarrow x_1x_2x_3 + \dots + x_2x_3x_4 = \frac{-7}{2}$$

$$\rightarrow x_1x_2x_3x_4 = \frac{-8}{2} = -4$$

# HELICO PRACTICE

CHAPTER 14

---



## PROBLEMA 1

Resuelva la ecuación polinomial:

$$x^3 - 6x^2 - x + 30 = 0$$

**Resolución** Factorizando el polinomio por divisores binómicos

$$\frac{\text{Div (30)}}{\text{Div (1)}} = \pm \left\{ \frac{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30}{1} \right\} = \pm \{1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30\}$$

|         |   |    |     |     |
|---------|---|----|-----|-----|
| $x = 3$ | 1 | -6 | -1  | 30  |
|         |   | 3  | -9  | -30 |
|         | 1 | -3 | -10 | 0   |

$$(x^2 - 3x - 10)(x - 3) = 0$$

$$(x - 5)(x + 2)(x - 3) = 0$$



$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -2$$

$$x_3 = 3$$

$$C.S = \{-2; 3; 5\}$$

**PROBLEMA 2**

Sean  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  las raíces de la ecuación  $x^3 - 2x^2 + 5x + 3 = 0$

Halle el valor de  $T = \frac{(x_1x_2x_3)^{x_1+x_2+x_3}}{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}$

**Resolución**

$$\overset{+}{x^3} - \overset{-}{2x^2} + \overset{+}{5x} + \overset{-}{3} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$\Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 5$$

$$\Rightarrow x_1x_2x_3 = -3$$

Reemplazando en T:

$$\Rightarrow T = \frac{(-3)^2}{5}$$

$$\Rightarrow T = \frac{9}{5}$$

**PROBLEMA 3**

Halle el valor de  $a + b$ , si la ecuación:  $x^3 + ax^2 + bx + 10 = 0$  tiene como raíces a 5 y 2

**Resolución**

$$\overset{+}{x^3} + \overset{-}{ax^2} + \overset{+}{bx} + \overset{-}{10} = 0$$

➡  $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a}{1} = -a$

➡  $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = \frac{b}{1} = b$

➡  $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -10$

**dato:**  $x_1 = 5$      $y$      $x_2 = 2$

➡  $10 \cdot x_3 = -10$     luego ➡  $x_3 = -1$

**Reemplazando:**

- $x_1 + x_2 + x_3 = -a$

$$5 + 2 - 1 = -a \quad \text{➡} \quad a = -6$$

- $x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_1 = b$

$$(5)(2) + (2)(-1) + (5)(-1) = b$$

$$10 - 2 - 5 = b \quad \text{➡} \quad b = 3$$

**piden:  $a + b$ :**

$$a + b = -6 + 3$$

Rpta

$$a + b = -3$$

**PROBLEMA 4**

Se tiene a  $x_1, x_2$  y  $x_3$  como raíces de la ecuación:  $x^3 + 7x + 5 = 0$ , efectúe:

$$M = \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

**Resolución**

$$\overset{+}{x^3} + \overset{-}{0x^2} + \overset{+}{7x} + \overset{-}{5} = 0$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 7$$

$$\rightarrow x_1x_2x_3 = -5$$

**Recordar** Si:  $a + b + c = 0$

$$\rightarrow \begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 &= 3abc \\ a^2 + b^2 + c^2 &= -2(ab + bc + ac) \end{aligned}$$

$$\rightarrow M = \frac{3x_1x_2x_3}{-2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}$$

$$\rightarrow M = \frac{3(-5)}{-2(7)} = \frac{15}{14}$$



## PROBLEMA 5

Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  son raíces de la ecuación  $x^3 + 4x^2 + 2 = 0$ . Evalúe

$$M = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$

### Resolución

$$\overset{+}{x^3} + \overset{-}{4x^2} + \overset{+}{0x} + \overset{-}{2} = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c = -4$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = 0$$

$$\Rightarrow abc = -2$$

Del dato:  $M = \frac{a}{bc} \cdot \frac{a}{a} + \frac{b}{ac} \cdot \frac{b}{b} + \frac{c}{ab} \cdot \frac{c}{c} \Rightarrow M = \frac{a^2}{abc} + \frac{b^2}{abc} + \frac{c^2}{abc}$

Recordar:  $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$

$$(-4)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(0)$$

$$16 = a^2 + b^2 + c^2$$

Reemplazando  $M = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{16}{-2} = -8$

**Rpta**

$$M = -8$$

**PROBLEMA 6** La edad de Lucio en años es  $\frac{T}{2}$ ; donde T está dado por el siguiente problema: " Si  $a$ ;  $b$  y  $c$  son las raíces de :  $x^3 - 2x^2 - 3x - 5 = 0$  Halle  $T = a^2 + b^2 + c^2$  " ¿Cuál es la edad de Lucio?

### Resolución

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & - \\ x^3 & - & 2x^2 & - & 3x & - & 5 = 0 \end{array}$$

$$\rightarrow a + b + c = 2$$

$$\rightarrow ab + bc + ca = -3$$

$$\rightarrow abc = 5$$

RECORDAR:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

### Reemplazando

$$(2)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{T} + 2(-3)$$

$$\rightarrow 4 = T - 6$$

$$10 = T$$

Piden:

$$\frac{T}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

**RPTA: LUCIO TIENE 5 AÑOS**





**PROBLEMA 7** Siendo  $a$ ,  $b$  y  $c$  las raíces de:  $2x^3 + 3x - 12 = 0$  dada la expresión  $P = ab(a + b)^3 + ac(a + c)^3 + bc(b + c)^3$  donde  $P$  representa la edad del hijo del profesor Arturo. ¿Cuál es dicha edad?

### Resolución

$$\overset{+}{2}x^3 + \overset{-}{0}x^2 + \overset{+}{3}x - \overset{-}{12} = 0$$

$$\Rightarrow a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow abc = \frac{12}{2} = 6$$

**Recordar:** Si  $a + b + c = 0$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$$

**Del dato:**  $P = ab(-c)^3 + ac(-b)^3 + bc(-a)^3$

$$P = -abc^3 - acb^3 - bca^3$$

$$\Rightarrow P = -abc(c^2 + b^2 + a^2)$$

**Hallamos:**  $c^2 + b^2 + a^2$

$$a^2 + b^2 + c^2 = -2 \left( \frac{3}{2} \right) = -3$$

**Reemplazamos**  $P = -6(-3) = 18$

**Rpta:** El hijo del profesor tiene 18 años