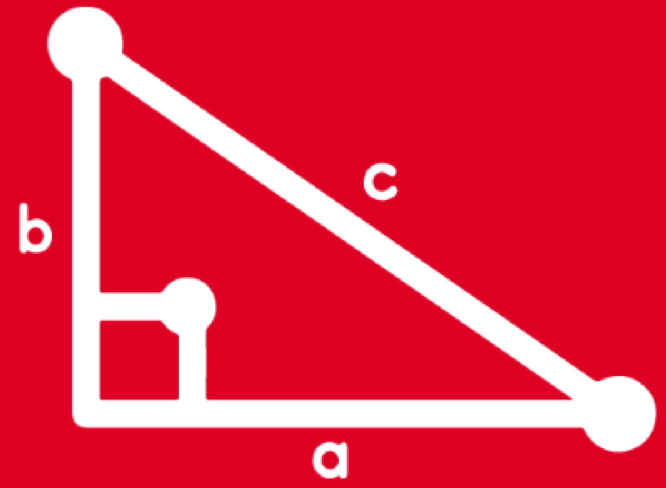
TRIGONOMETRY

Chapter 24



4th
SECONDARY

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

SACO OLIVEROS

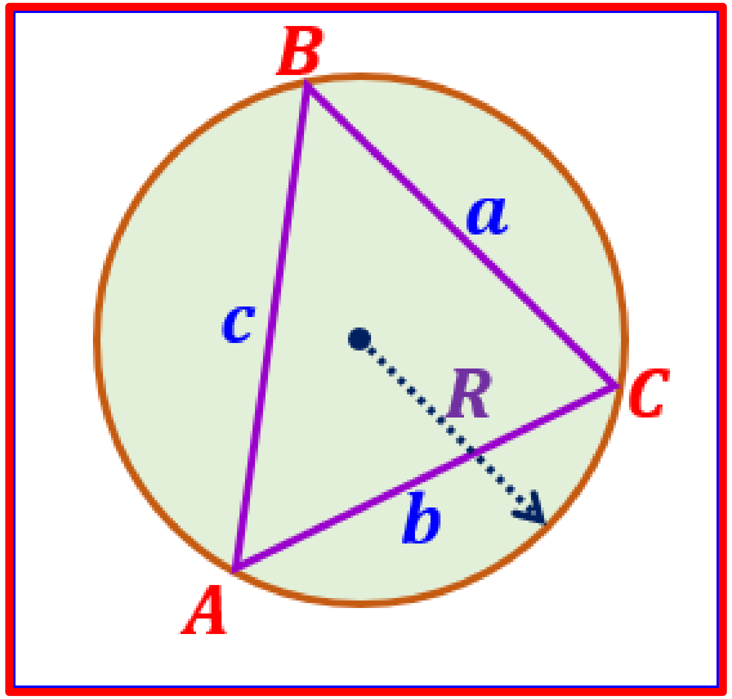
HELICO-MOTIVACIÓN

Chanquillo: Observatorio astronómico de la costa peruana

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

1. Teorema de senos:

En todo triángulo se cumple que sus lados son proporcionales a los senos de los ángulos al cual se oponen, siendo la constante de proporcionalidad el diámetro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo. En el ΔABC, se cumple:

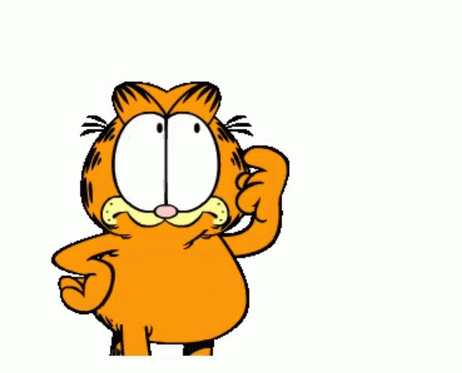


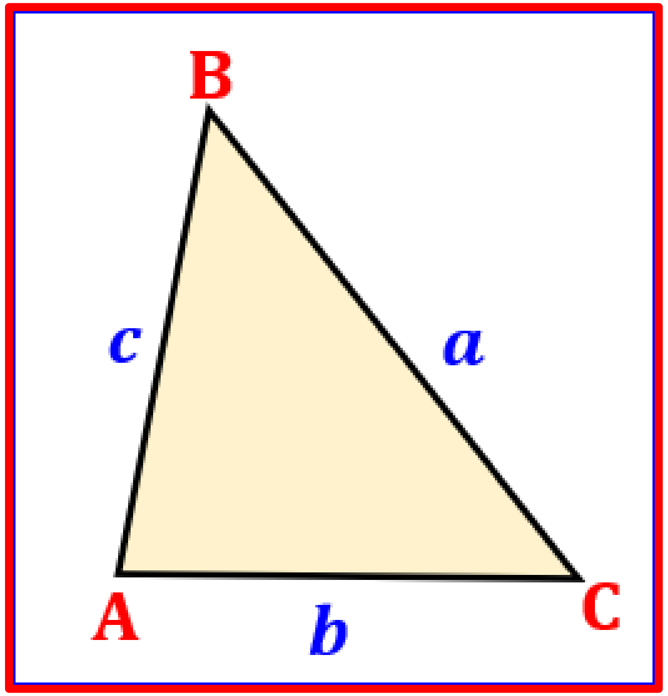
$$a = 2R\,senA$$
$$b = 2R\,senB$$
$$c = 2R\,senC$$

$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R$$

2. Teorema de cosenos:

En todo triángulo se cumple que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de los mismos multiplicados por el coseno del ángulo que forman.





$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

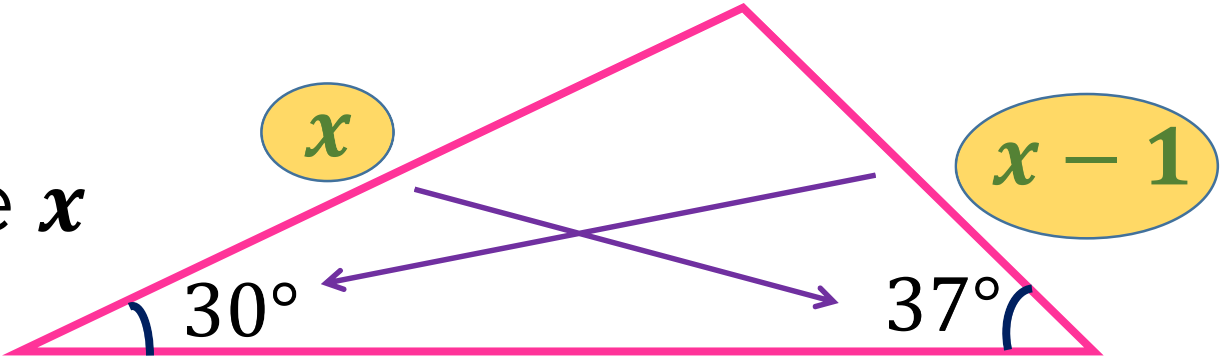
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

PROBLEMA 1

Del gráfico,

halle el valor de $\boldsymbol{x}$



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$$

Resolución

Teorema de senos:

$$\frac{x-1}{\text{sen}30°} = \frac{x}{\text{sen}37°}$$

Reemplazando valores:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{\frac{3}{5}}$$

Así tenemos que: $$\frac{2(x-1)}{1} = \frac{5(x)}{3}$$

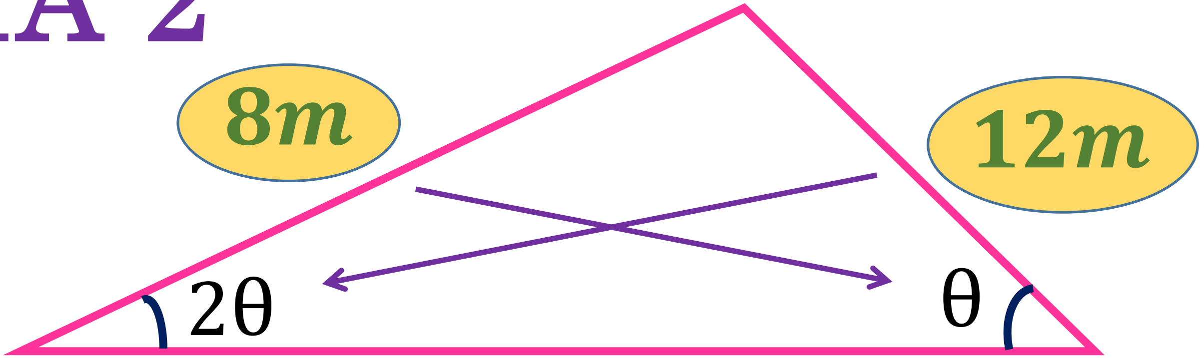
Luego: $6x - 6 = 5x$

$$\boxed{\therefore x = 6}$$

PROBLEMA 2

Del gráfico,

calcule **cosθ**



$$\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB}$$

Resolución

Teorema de senos:

$$\frac{8}{sen\theta} = \frac{12}{sen2\theta}$$

Simplificando: $\frac{sen2\theta}{sen\theta} = \frac{3}{2}$

Así tenemos que: $\frac{2\cancel{sen\theta}\cos\theta}{\cancel{sen\theta}} = \frac{3}{2}$

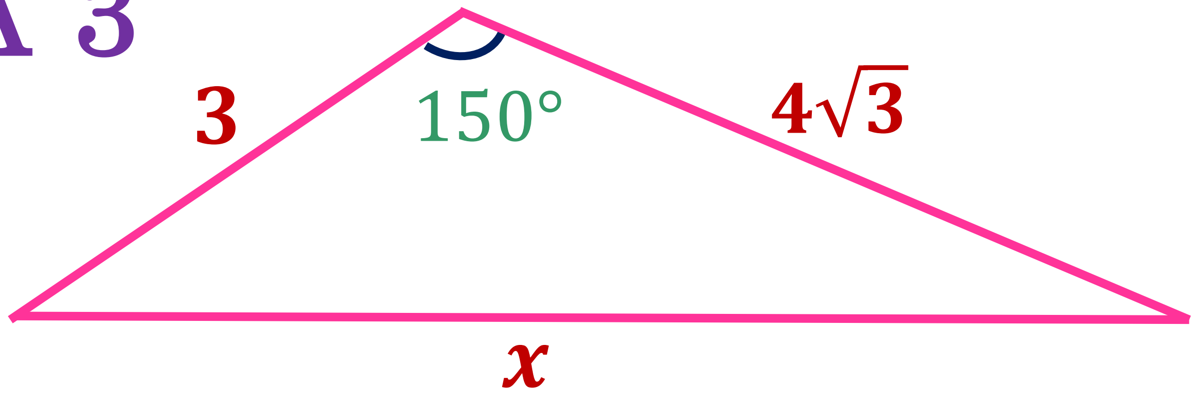
Luego: $2\cos\theta = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\therefore \cos\theta = \frac{3}{4}}$$

PROBLEMA 3

Del gráfico, halle

el valor de x



Resolución

En un Δ ABC:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

¡ Recuerda que!

$\cos 150° = -\cos 30°$

Teorema de cosenos:

$$x^2 = 3^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2(3)\left(4\sqrt{3}\right)\overset{-\cos 30°}{\cos 150°}$$

$$x^2 = 9 + 48 + \cancel{2}\left(12\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$$

$$\Rightarrow x^2 = 93$$

$$\boxed{\therefore\ x = \sqrt{93}}$$

PROBLEMA 4

En un triángulo ABC, reduzca: $\mathrm{G} = \dfrac{\mathrm{senA - senB}}{\mathrm{senC}}$

Si $\mathrm{a - b = 4}$ **y** $\mathrm{c = 2}$

Resolución:

$Por\ ley\ de\ senos:$

$$senA = \frac{a}{2R} \qquad senC = \frac{c}{2R}$$

$$senB = \frac{b}{2R}$$

$$G = \frac{\dfrac{a}{\cancel{2R}} - \dfrac{b}{\cancel{2R}}}{\dfrac{c}{\cancel{2R}}}$$

$$G = \frac{a - b}{c} = \frac{4}{2}$$

$$\boxed{\therefore G = 2}$$

PROBLEMA 5

En un triángulo ABC de lados a, b y c; se cumple que

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc}$$

Halle la medida del ángulo A

Resolución:

$Por\ ley\ de\ cosenos:\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cosA$

$Igualamos: \cancel{b^2 + c^2} - 2.b.c.cosA = \cancel{b^2 + c^2} - \sqrt{3}.b.c$

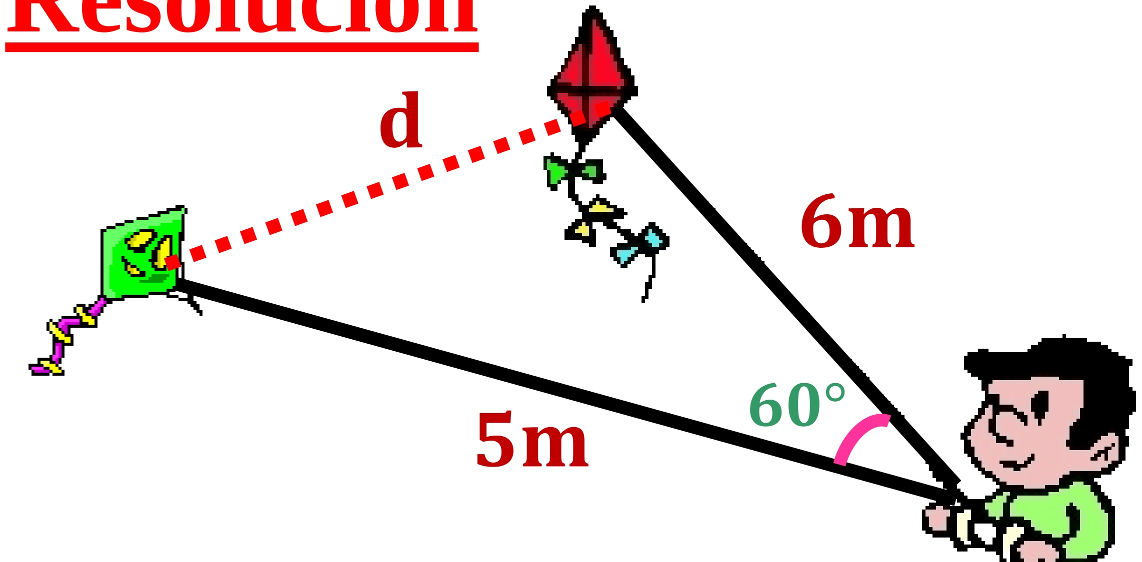
$$2.\cancel{b.c}.cosA = \sqrt{3}.\cancel{b.c} \Rightarrow cosA = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\therefore A = 30°}$$

PROBLEMA 6

Un niño está haciendo volar dos cometas simultáneamente, una de ellas tiene 6m de pabilo y la otra 5 m. Si el ángulo que forman ambos pabilos es 60°, determine la distancia entre ambas cometas.

Resolución



d: distancia entre las cometas

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cosA$$

Teorema de cosenos:

$$d^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos 60°$$

$$d^2 = 25 + 36 - \cancel{2}(30)\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)$$

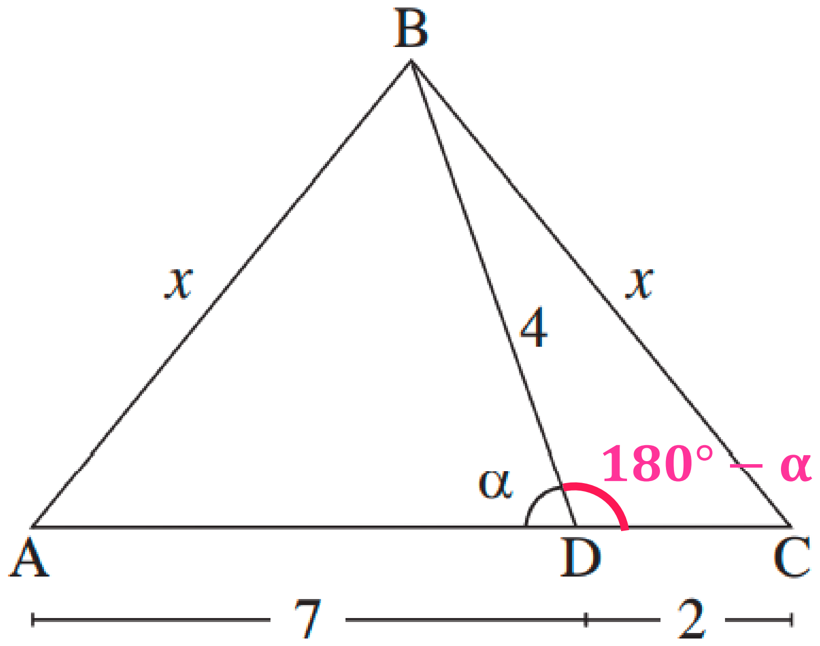
$$d^2 = 61 - 30 = 31$$

$$\therefore\ \mathbf{d = \sqrt{31}m}$$

PROBLEMA 7

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Un Ingeniero residente observa que la obra a ejecutar tiene las siguientes medidas en metros, sabiendo que la cuadrilla M debe trabajar el lindero AB. ¿Cuántos metros trabajar esta cuadrilla?



Resolución:

Para el ΔADB

$$\cos\alpha = \frac{7^2 + 4^2 - x^2}{2(7)(4)} = \frac{65 - x^2}{56} \quad \ldots\ldots..(1)$$

Para el ΔBDC

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{4^2 + 2^2 - x^2}{2(4)(2)} = \frac{20 - x^2}{16}$$

$$-\cos\alpha = \frac{20 - x^2}{16} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{x^2 - 20}{16} \quad \ldots.(2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{65 - x^2}{\underset{7}{\cancel{56}}} = \frac{x^2 - 20}{\underset{2}{\cancel{16}}} \Rightarrow 130 - 2x^2 = 7x^2 - 140$$

$$\therefore x = \sqrt{30}\text{m}$$