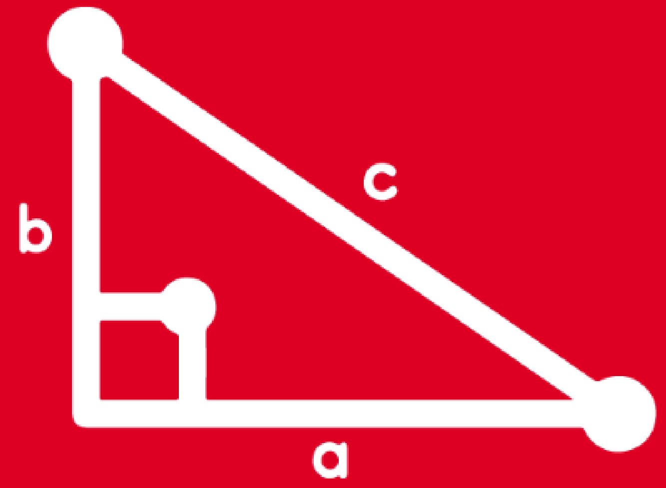
TRIGONOMETRY

Chapter 21

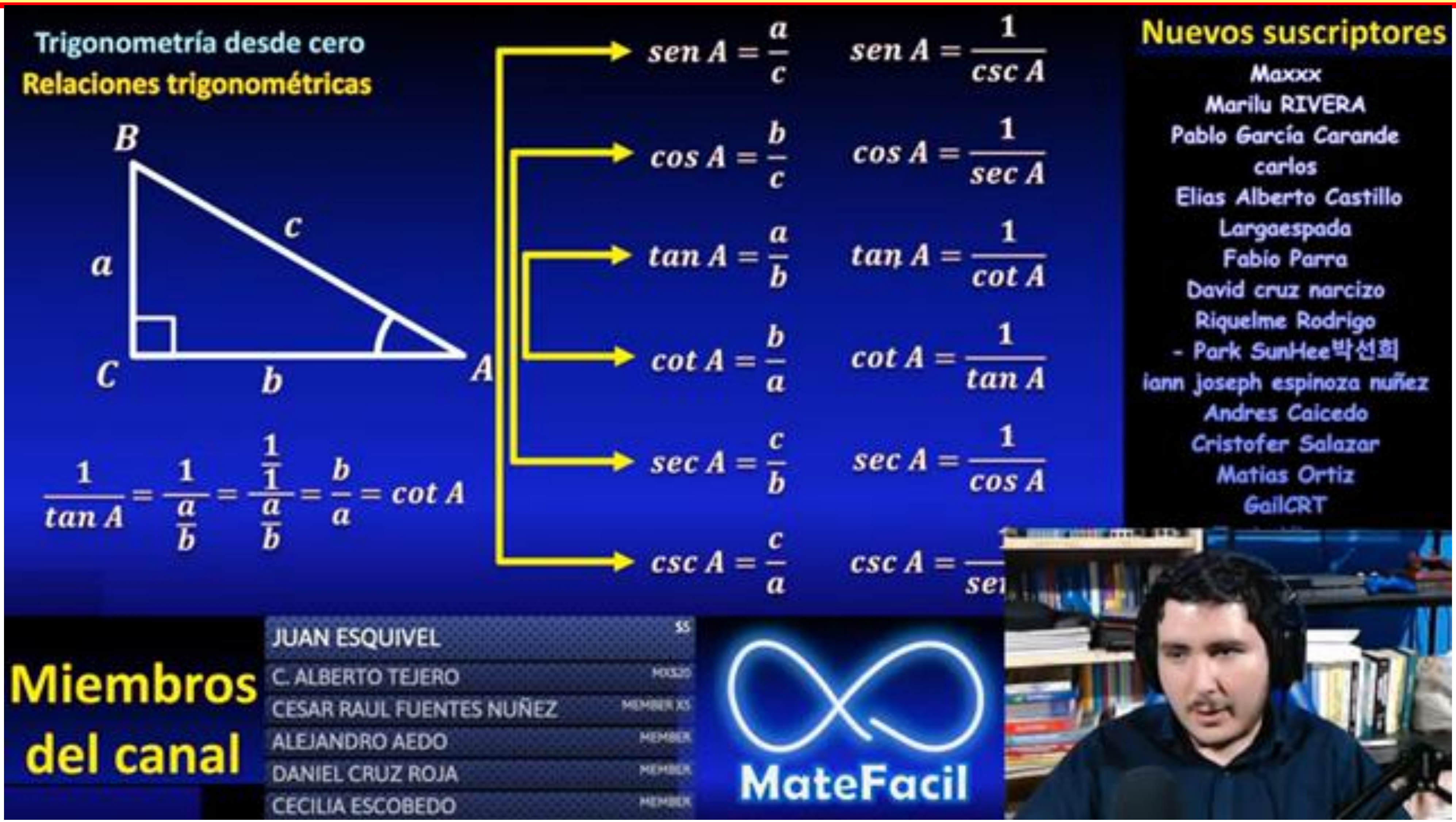
3rd
SECONDARY



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS II

SACO OLIVEROS

¿ QUÉ SON IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS POR DIVISIÓN ?



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

¿ QUÉ SON IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS ?

Son igualdades entre expresiones que contienen razones trigonométricas de una o más variables, las cuales se verifican para un conjunto de valores admisibles .

Ejemplo : $\boxed{\operatorname{sen}2\theta = 2 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta}$; $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$

Si $\theta = 30^{o}$ ⟹ $\operatorname{sen}2(30^{o}) = 2 \cdot \operatorname{sen}30^{o} \cdot \cos30^{o}$

$$\operatorname{sen}60^{o} = \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

¡ Ohh … es cierto !

Ahora, anímate a seguir comprobando esta identidad, dándole diferentes valores a θ .

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

I) IDENTIDADES RECÍPROCAS :

$\boxed{\operatorname{sen}\theta \, . \, \csc\theta = 1}$ $\quad \forall \ \theta \in \mathbb{R} \neq k\pi \, ; \ k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\cos\theta \, . \, \sec\theta = 1}$ $\quad \forall \ \theta \in \mathbb{R} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \, ; k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\tan\theta \, . \, \cot\theta = 1}$ $\quad \forall \ \theta \in \mathbb{R} \neq \frac{K\pi}{2} \, ; \ k \in \mathbb{Z}$

Ejemplos :

$\operatorname{sen}43^\circ . \csc43^\circ = 1$

$\tan288^g \, . \, \cot288^g = 1$

$\cos127^\circ . \sec127^\circ = 1$

$\operatorname{sen}\left(\frac{2\Pi}{5} \text{ rad}\right) . \csc\left(\frac{2\Pi}{5} \text{ rad}\right) = 1$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

II) IDENTIDADES POR DIVISIÓN :

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta} \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R} \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,;\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\mathrm{sen}\,\theta} \qquad \forall\,\theta \in \mathbb{R} \neq k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos :

$$\tan 226° = \frac{\mathrm{sen}\,226°}{\cos 226°} \qquad \tan 340^g = \frac{\mathrm{sen}\,340^g}{\cos 340^g}$$

$$\cot 138° = \frac{\cos 138°}{\mathrm{sen}\,138°} \qquad \cot\left(\frac{3\Pi}{8}\text{ rad}\right) = \frac{\cos\left(\frac{3\Pi}{8}\text{ rad}\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{3\Pi}{8}\text{ rad}\right)}$$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

III) IDENTIDADES PITAGÓRICAS :

$\forall\ \theta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathrm{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1}$$

$\mathrm{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\cos^2\theta = 1 - \mathrm{sen}^2\theta$

$\forall\ \theta \in \mathbb{R} \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1}$$

$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

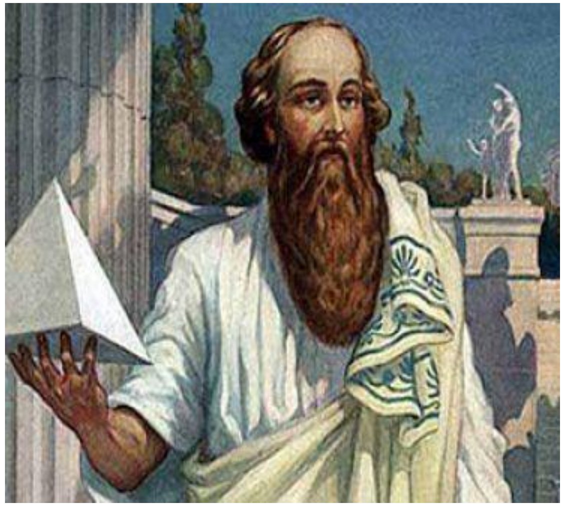
$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

$\forall\ \theta \in \mathbb{R} \neq \dfrac{K\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}$

$$\boxed{\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1}$$

$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$



HELICO PRACTICE 1

Demuestre que $\mathrm{sen}^5x \,.\, \csc^3x + \cos^5x \,.\, \sec^3x = 1$

RESOLUCIÓN

Sea : $H = \mathrm{sen}^5x \,.\, \csc^3x + \cos^5x \,.\, \sec^3x$

$$H = \underbrace{\mathrm{sen}^5x \,.\, \frac{1}{\mathrm{sen}^3x}} + \underbrace{\cos^5x \,.\, \frac{1}{\cos^3x}}$$

$$H = \underbrace{\mathrm{sen}^2x + \cos^2x}$$

$$H = 1$$

Recordemos que :

$\mathrm{sen}x \,.\, \csc x = 1$

$\cos x \,.\, \sec x = 1$

$\mathrm{sen}^2x + \cos^2x = 1$

Lqqd : $\mathrm{sen}^5x \,.\, \csc^3x + \cos^5x \,.\, \sec^3x = 1$

HELICO PRACTICE 2

Demuestre que $(1 - \text{sen}^2\theta)(1 + \cot^2\theta) = \cot^2\theta$

RESOLUCIÓN

Sea : $H = (\underbrace{1 - \text{sen}^2\theta}_{})(\underbrace{1 + \cot^2\theta}_{})$

$H = (\cos^2\theta)(\csc^2\theta)$

$H = \cos^2\theta \left(\dfrac{1}{\text{sen}^2\theta}\right)$

$H = \left(\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta}\right)^2$

$H = \cot^2\theta$

Recordemos que :

$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

$\text{sen}\theta \,.\, \csc\theta = 1$

$\dfrac{\cos\theta}{\text{sen}\theta} = \cot\theta$

Lqqd : $(1 - \text{sen}^2\theta)(1 + \cot^2\theta) = \cot^2\theta$

HELICO PRACTICE 3

Simplifique $P = \left(\dfrac{\text{sen}^3\theta}{1-\cos^2\theta}\right)\csc\theta$

RESOLUCIÓN

$$P = \left(\frac{\text{sen}^3\theta}{1-\cos^2\theta}\right)\csc\theta$$

$$P = \left(\frac{\text{sen}^3\theta}{\text{sen}^2\theta}\right)\csc\theta$$

$$P = \text{sen}\theta \,.\, \csc\theta$$

$$\boxed{\therefore P = 1}$$

Recordemos que :

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\text{sen}\theta \,.\, \csc\theta = 1$$

HELICO PRACTICE 4

Simplifique E = senx (cscx – senx)

RESOLUCIÓN

E = senx (cscx – senx)

E = senx . cscx – senx . senx

E = 1 – sen^2x

$\boxed{\therefore E = \cos^2 x}$

Recordemos que :

$\text{sen}x \, . \, \text{csc}x = 1$

$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1$

HELICO PRACTICE 5

Simplifique $E = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \tan\theta)\cos\theta$

RESOLUCIÓN

$$E = (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \tan\theta)\cos\theta$$

$$E = \cos^2\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cancel{\cos\theta}} \cdot \cancel{\cos\theta}$$

$$E = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\boxed{\therefore E = 1}$$

Recordemos que :

$$\tan\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

HELICO PRACTICE 6

Gustavo y Ángel han participado en un concurso donde el premio mayor es de S/.100 para el primer lugar .- En este concurso se planteó una única pregunta : Reducir la siguiente expresión: A = secθ – senθ . tanθ .
Ellos respondieron lo siguiente : Gustavo : senθ , Ángel : cosθ
¿ Quién dio la respuesta correcta y cuál fue esta respuesta ?

RESOLUCIÓN

$$A = \sec\theta - \operatorname{sen}\theta \cdot \tan\theta$$

$$A = \frac{1}{\cos\theta} - \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$A = \frac{1-\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta}$$

$$A = \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}$$

$$A = \cos\theta$$

Recordemos que :

$$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

∴ Ángel dio la respuesta correcta .

HELICO PRACTICE 7

Se tiene la expresión : C = $(2 \text{ senx} + \text{cosx})^2 + (\text{senx} - 2 \text{ cosx})^2$
El valor de C nos indica la cantidad de alumnos que son finalistas en un concurso de matemáticas que ha organizado el colegio. - Se pide calcular la cantidad total de participantes si los finalistas representan el 10% del total .

RESOLUCIÓN

$C = (2 \text{ senx} + \text{cosx})^2 + (\text{senx} - 2 \text{ cosx})^2$

Recordar : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$C = 4\,\text{sen}^2x + \cancel{4\,\text{senx} \cdot \cos x} + \cos^2x + \text{sen}^2x - \cancel{4\,\text{senx} \cdot \cos x} + 4\cos^2x$

$C = 5\,\text{sen}^2x + 5\cos^2x = 5\,(\text{sen}^2x + \cos^2x) = 5(1) \Rightarrow \boxed{C = 5}$

Si el 10% son 5 alumnos, entonces el 100% son 10(5) = 50 alumnos.

∴ El número total de alumnos participantes es 50 .

SACO
OLIVEROS