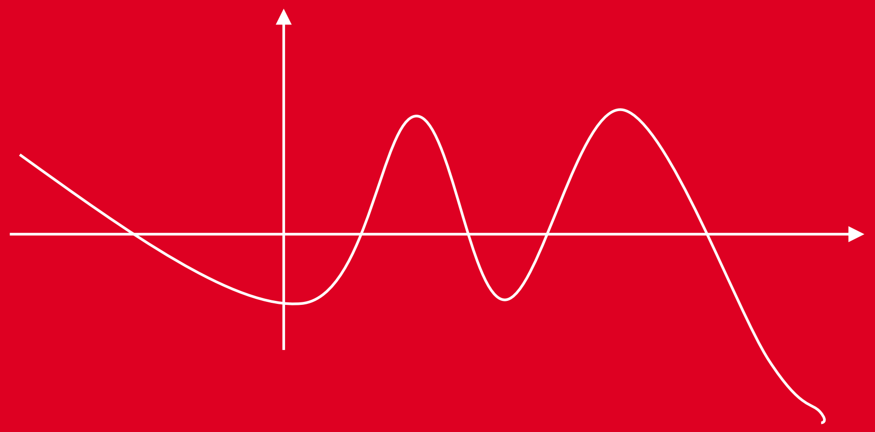
ALGEBRA

CHAPTER: 12



5th

of Secondary

Tema: Ecuaciones Polinomiales

SACO OLIVEROS

MOTIVATING

STRATEGY

SACO OLIVEROS

"Las ecuaciones de Maxwell han tenido más impacto en la historia de la humanidad que muchos presidentes."

CARL SAGAN

HELICO

THEORY

ECUACIONES POLINOMIALES

Sea el polinomio **mónico** , de grado "n" :

$$P(x) = x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - S_3x^{n-3} + \cdots + (-1)^n S_n = 0$$

de $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ son raíces de aquel polinomio.

Donde:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ SUMA DE RAÍCES
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n$ SUMA DE LOS PRODUCTO BINARIO DE LAS RAÍCES
- $S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$ SUMA DE LOS PRODUCTO TERNARIO DE LAS RAÍCES

$\vdots \qquad \vdots$

- $S_n = x_1 . x_2 . x_3 . \ldots . x_n$ PRODUCTO DE RAÍCES

CASOS PARTICULARES :

Polinomio cúbico:

$$P(x) = x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

donde x_1, x_2, x_3 son raíces de aquel polinomio.

Donde:

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$S_3 = x_1x_2x_3$$

EJEMPLO :

$$\text{Sea}: P(x) = x^3 \overset{+}{+} \underbrace{4}_{S_1}x^2 \overset{-}{+} \underbrace{3}_{S_2}x \overset{+}{-} \underbrace{8}_{S_3} \overset{-}{=} 0$$

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(+4) = -4$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +(+3) = 3$
- $S_3 = x_1 x_2 x_3 = -(-8) = 8$

Observación:

En el caso que el polinomio no sea mónico , se dividirá entre su coeficiente principal y se procede al mismo criterio planteado.

EJEMPLO :

Sea : $P(x) = 3x^3 - 6x^2 - 9x + 15 = 0$

$3 \div$

$+ \quad - \quad + \quad -$

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 5 = 0$$

$S_1 \quad S_2 \quad S_3$

Entonces:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(-2) = 2$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = +(-3) = -3$
- $S_3 = x_1\,x_2\,x_3 = -(+5) = -5$

Observación:

Sea un polinomio cúbico, donde :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Entonces se cumple:

✓ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$

✓ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3\,x_1\,x_2\,x_3$

Lo cual equivale a decir:

Si $S_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \checkmark\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2S_2 \\ \checkmark\ x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3S_3 \end{cases}$$

Polinomio de cuarto grado:

$$P(x) = x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son raíces de aquel polinomio.

Donde:

- $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$
- $S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$
- $S_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4$
- $S_4 = x_1 x_2 x_3 x_4$

Raíz de un Polinomio

Diremos que "a" es una raíz de un polinomio (no constante) $P(x)$ si y sólo si $P(a) = 0$.

EJEMPLO :

Sea : $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$$P(1) = (1)^3 - 2(1)^2 - 1 + 2$$

$$P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 \quad = 0$$

Entonces "1" es raíz de $P(x)$

PROPIEDADES

1. **Teorema fundamental del álgebra:** Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene exactamente "n" raíces.

2. **Paridad de raíces irracionales:** Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes racionales , se cumple que si una raíz del polinomio es $a + \sqrt{b}$ si y sólo si $a - \sqrt{b}$ es también raíz del polinomio.
$(a, b \in \mathbb{Q} \wedge b > 0$ no cuadrado perfecto$)$

HELICO

PRACTICE

SACO OLIVEROS

1. Calcule la mayor raíz en

$$\underbrace{x^3-7x^2+7x+15}_{P(x)}=0$$

Resolución :

Por simple inspección: $P(-1)=0$

$\Rightarrow$ $(x+1)$ es un factor

Por lo tanto:

$$P(x)=(x+1)Q(x)$$

Por Horner: $\dfrac{P(x)}{x+1}$

	1	-7	7	15
-1		-1	8	-15
	1	-8	15	0

Entonces: $Q(x)=x^2-8x+15$

$$Q(x)=(x-3)(x-5)$$

$\Rightarrow$ $P(x)=(x+1)(x-3)(x-5)=0$

$x_1=-1$ $\quad x_2=3$ $\quad x_3=5$

$$\therefore\ menor\ raíz=-1$$

2. Si $3+\sqrt{5}$ es una raíz del polinomio

$$P(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + ax + b$$

Calcule la suma de las otras raíces.

Resolución :

Sea x_1, x_2 , x_3 y x_4 raíces de la ecuación de cuarto grado

Del problema :

$$\overset{+}{}\; P(x) = x^4 \overset{-}{-} \underbrace{8}_{S_1}x^3 \overset{+}{+} x^2 \overset{-}{+} ax \overset{+}{+} b$$

Por dato : $\boxed{x_1 = 3+\sqrt{5}}$

Recordar :

$$P(x) = x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + S_4 = 0$$

Suma de raíces : $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -(-8) = 8$$

$$3+\sqrt{5} + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 5 - \sqrt{5}$$

$\therefore$ ***Suma de las otras raíces es*** $5-\sqrt{5}$

3. Si a, b y c son raíces de la ecuación

$$x^3 - 3x^2 + x - 12 = 0$$

Efectué: $Q = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$

Resolución :

$$\overset{+}{x^3} \overset{-}{-3x^2} \overset{+}{+1x} \overset{-}{-12} = 0$$

$$\underset{S_1}{\downarrow} \quad \underset{S_2}{\downarrow} \quad \underset{S_3}{\downarrow}$$

Entonces:

- $S_1 = a + b + c = -(-3) = 3$
- $S_2 = ab + ac + bc = +(+1) = 1$
- $S_3 = a\,b\,c = -(-12) = 12$

Nos piden :

$$Q = \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$$

Calculando el $\mathrm{MCM} = abc$

$$Q = \frac{\overbrace{c + b + a}^{S_1}}{\underbrace{a\,b\,c}_{S_3}}$$

$$Q = \frac{3}{12}$$

$$\boxed{\therefore Q = \frac{1}{4}}$$

4. Siendo x_1, x_2 y x_3 las raíces de la ecuación

$$7x^3 - 5x + 42 = 0$$

Evalúe $K = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Resolución :

$$P(x) = 7x^3 + 0x^2 - 5x + 42$$

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -5$$

Por identidad:

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)^2}_{0} \equiv \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}_{K} + 2\underbrace{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)}_{-5}$$

$$0 = K + 2(-5)$$

$$K = 10$$

$$\boxed{\therefore K = 10}$$

5. Se sabe que las raíces de:

$$x^3 - 12x^2 + mx - 28 = 0$$

están en progresión aritmética. Halle m.

Resolución :

Por dato se sabe que es una P.A

$\boxed{x_1 = a - r}$ $\boxed{x_2 = a}$ $\boxed{x_3 = a + r}$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 3a \dots (I)$$

Además:

$$\overset{+}{x^3} \overset{-}{-} \underbrace{12}_{S_1}x^2 \overset{+}{+} mx \overset{-}{-} 28 = 0$$

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -(-12) \dots (II)$$

De (I) y (II) : $a = 4$

$$\boxed{x_2 = 4}$$

Reemplazando la raíz $x_2 = 4$ en el polinomio

$$4^3 - 12(4)^2 + m(4) - 28 = 0$$

$$64 - 192 + m(4) - 28 = 0$$

$$4m = 156$$

$$\boxed{\therefore m = 39}$$

6. Si una de las raíces de la ecuación:

$$4x^3 + mx^2 + nx - 8 = 0$$

es $2-\sqrt{2}$. Halle: $m+n$

Resolución :

Por la paridad de raíces irracionales:

$$x_1 = 2-\sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 2+\sqrt{2}$$

Además:

$$4x^3 + mx^2 + nx - 8 = 0$$

$4 \div$

$$+ \quad - \quad + \quad -$$

$$x^3 + \underbrace{\frac{m}{4}}_{S_1}x^2 + \underbrace{\frac{n}{4}}_{S_2}x - \underbrace{2}_{S_3} = 0$$

Recordar :

$$P(x) = x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 \\ S_3 = x_1x_2x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_3 = \underbrace{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}.x_3$$

$$\Rightarrow -(-2) = (2^2 - \sqrt{2}^2).x_3$$

$$\Rightarrow 2 = 2.x_3 \Rightarrow x_3 = 1$$

Reemplazando $x_3 = 1$ en el polinomio:

$$\Rightarrow 4(1)^3 + m(1)^2 + n(1) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 4 + m + n - 8 = 0$$

$$\boxed{\therefore m + n = 4}$$

7. Se sabe que las raíces de:

$$x^3-12x^2+mx-28=0$$

están en progresión aritmética. Halle m.

Resolución :

Por dato se sabe que es una P.A

$\boxed{x_1=a-r}$ $\boxed{x_2=a}$ $\boxed{x_3=a+r}$

$$S_1=x_1+x_2+x_3=3a\ldots(I)$$

Además:

$+\quad -\quad +\quad -$

$$x^3-\underbrace{12}_{S_1}x^2+mx-28=0$$

$$S_1=x_1+x_2+x_3=-(-12)\ldots(II)$$

De (I) y (II) : $a=4$

$\boxed{x_2=4}$

Reemplazando la raíz $x_2=4$ en el polinomio

$$4^3-12(4)^2+m(4)-28=0$$

$$64-192+m(4)-28=0$$

$$4m=156$$

$$\boxed{\therefore m=39}$$

