GEOMETRÍA

Capítulo 15

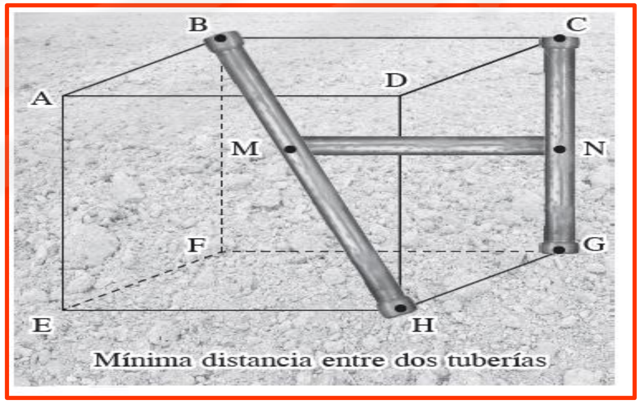
5th

SECONDARY

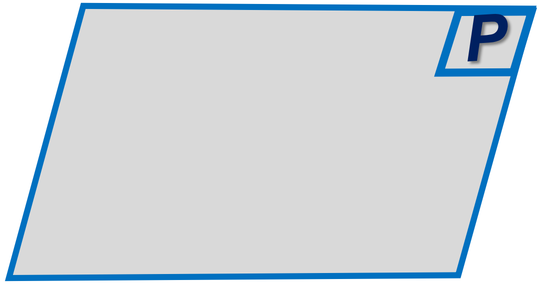
Rectas, planos y ángulo diedro

SACO OLIVEROS

En geometría del espacio estudiamos a los puntos, rectas y planos que forman a los poliedros y sólidos geométricos, por ejemplo:



RECTAS, PLANOS Y ÁNGULO DIEDRO



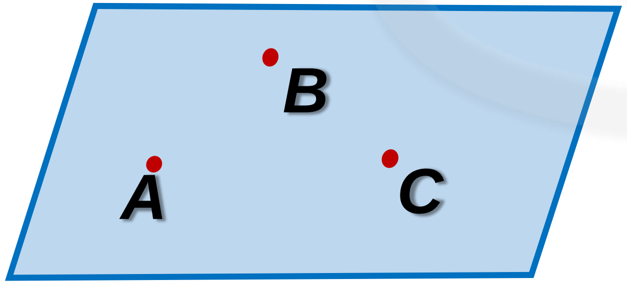
Notación:

 P: Plano P

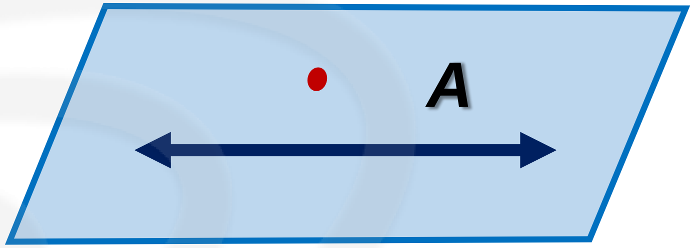
Determinación de un plano

Existen cuatro formas para determinar un plano.

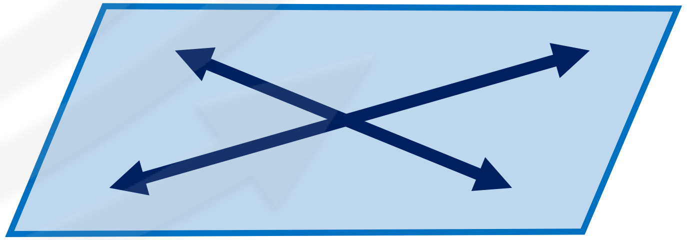
1. Tres puntos no colineales



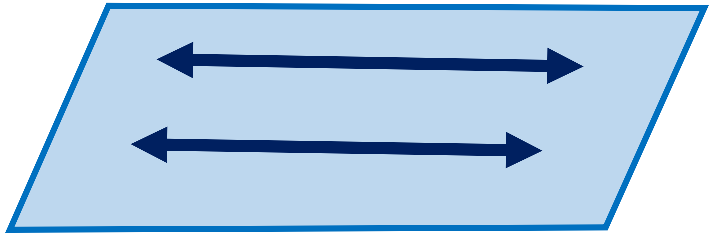
2. Una recta y un punto exterior a ella



3. Dos rectas secantes

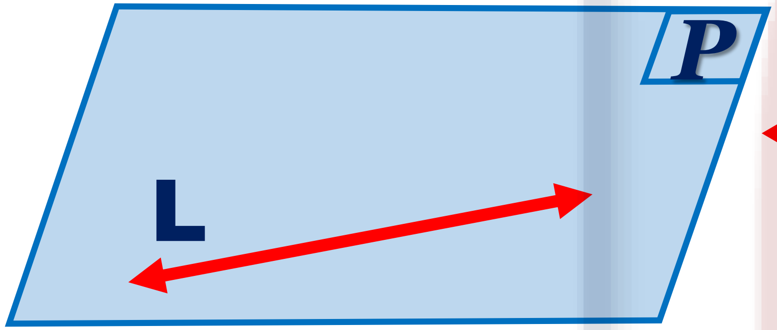


4. Dos rectas paralelas



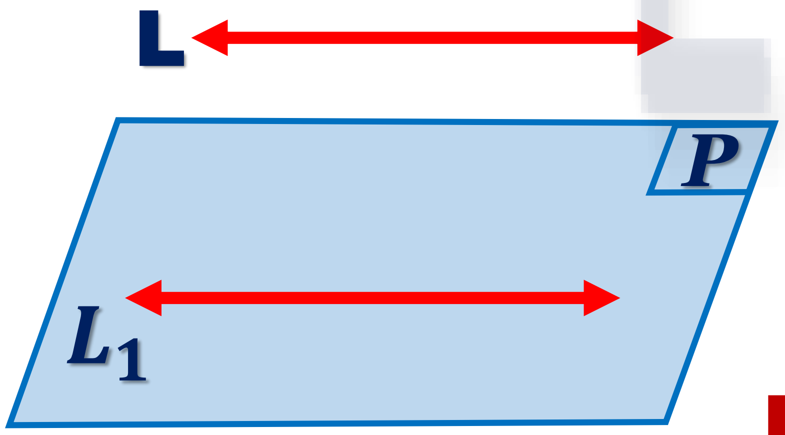
Posiciones relativas entre rectas y planos

1. Recta contenida en un plano



$\overleftrightarrow{L} \subset P$

2. Recta paralela a un plano

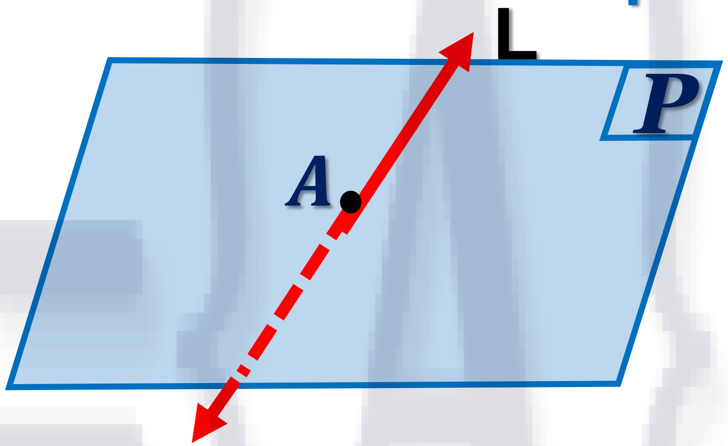


Si: $\overleftrightarrow{L} \not\subset P$, $\overleftrightarrow{L_1} \subset P$ y

$\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{L_1}$

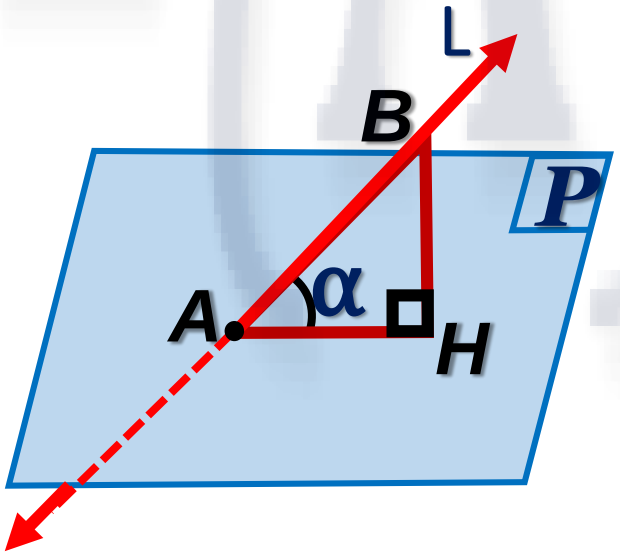
$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel P$

3. Recta secante a un plano



$\overleftrightarrow{L} \cap P = \{A\}$

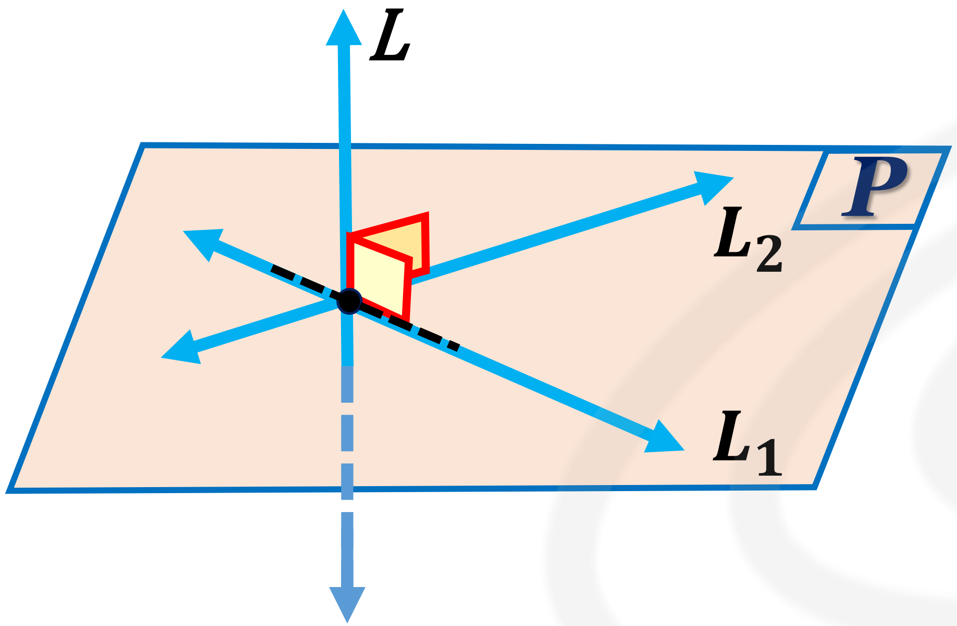
4. Ángulo entre una recta un plano



$\overline{AH}$: proyección de $\overleftrightarrow{AB}$ sobre P.

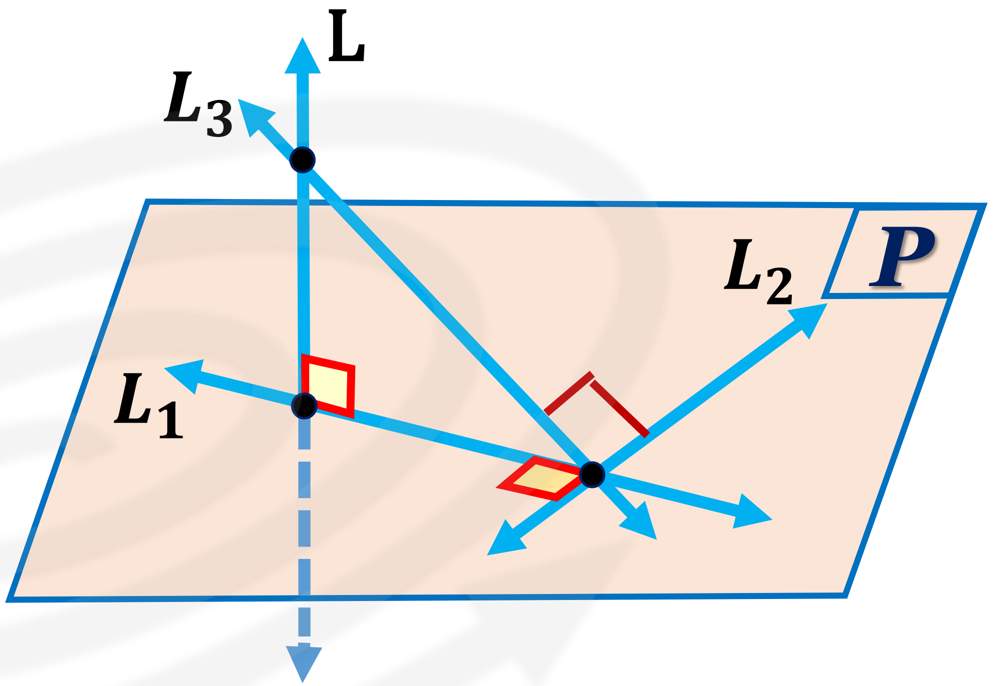
α: medida del ángulo que forma $\overleftrightarrow{L}$ con P.

Recta perpendicular a un plano



Si : $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2} \rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp P$

Teorema de las tres perpendiculares

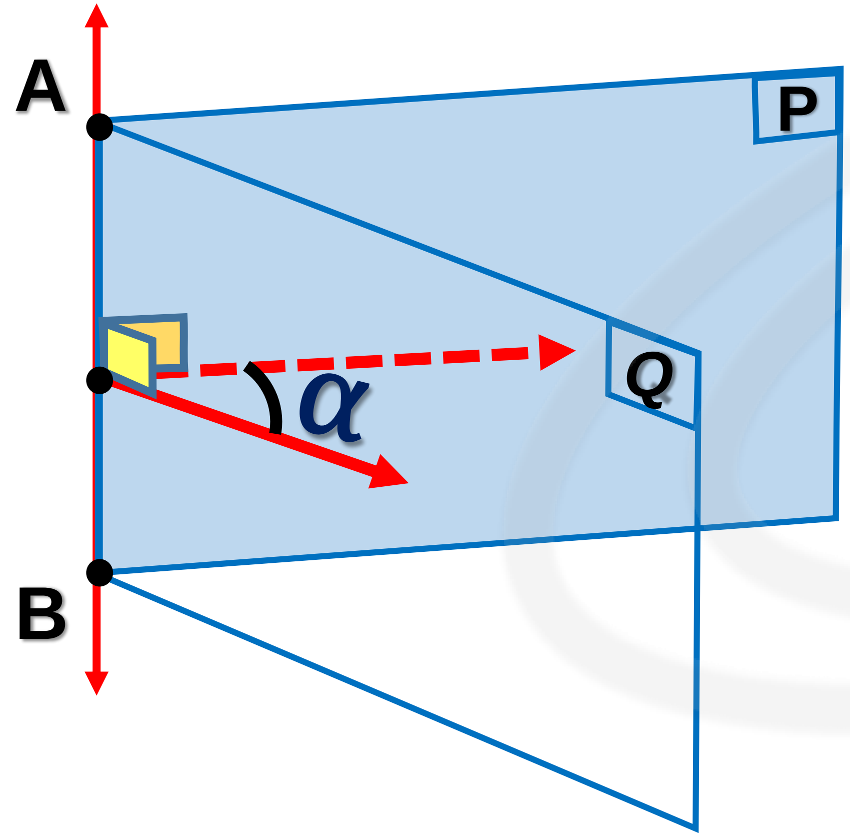


Sea $\overleftrightarrow{L} \perp$ P y $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ rectas contenidos en el plano P

Si: $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$, entonces: $\overleftrightarrow{L_3} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

ÁNGULO DIEDRO

Es la figura formada por dos semiplanos que tienen la misma recta de origen común.



En la figura

. P y Q son las caras del diedro.

. $\overleftrightarrow{AB}$ es la arista del diedro.

Notación

. Ángulo diedro: P – $\overleftrightarrow{AB}$ – Q

. Diedro AB

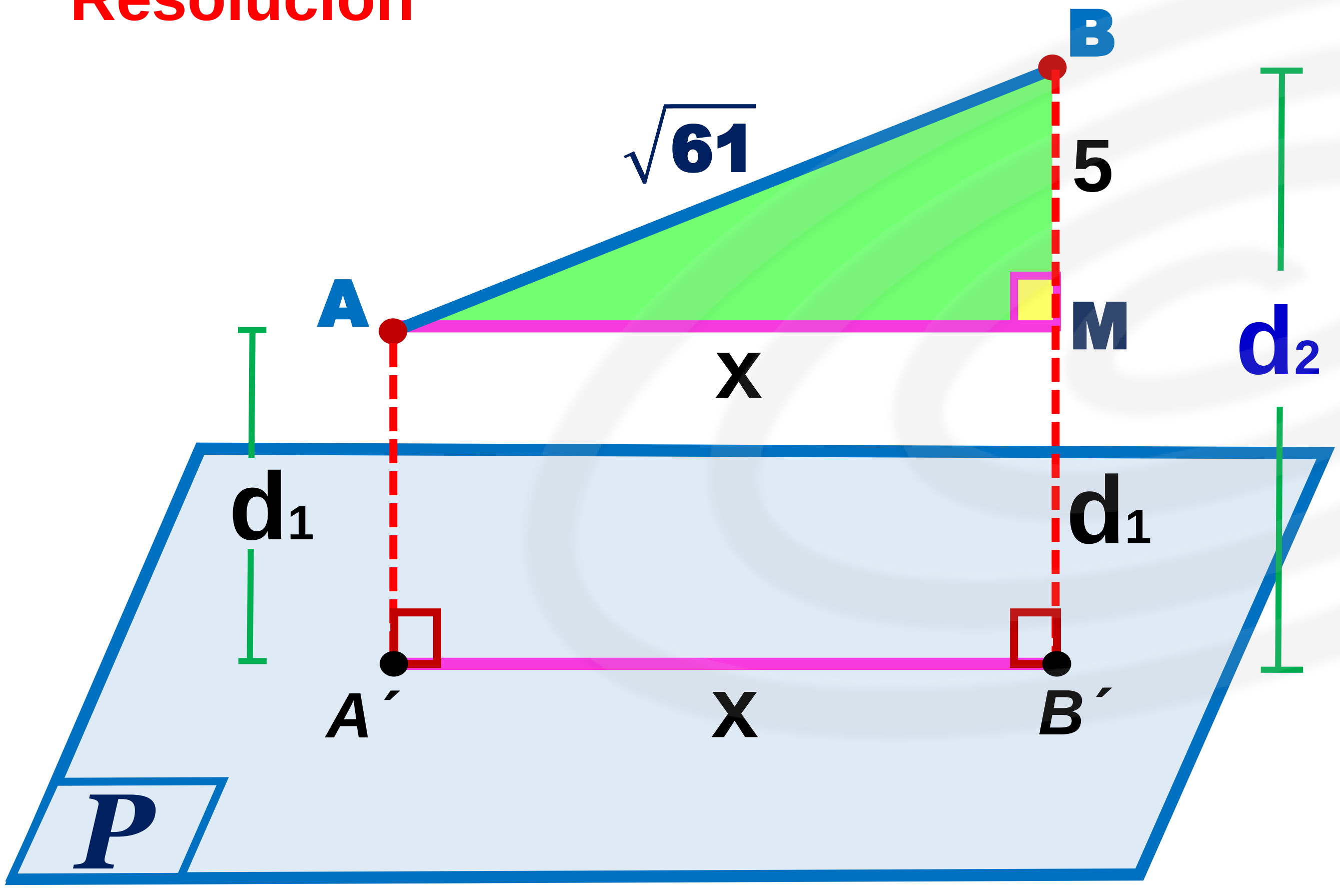
Además

. md $\overline{AB}$: medida del diedro $\overline{AB}$

. md $\overline{AB} = \alpha$

1. Se tiene un $\overline{AB}$ exterior a un plano P. Si AB = $\sqrt{61}$ y la diferencia entre las distancias de A y B hacia el plano P es 5, calcule la longitud de la proyección de dicho segmento sobre el plano P.

Resolución



- Dato: $\boxed{d_2 - d_1 = 5}$
- Piden x.
- Se traza $\overline{AM}$ perpendicular a $\overline{BB`}$
- Del grafico en $\overline{BB`}$:

$$BM = 5$$

- ⊿ABM : Pitágoras

$$\cancel{\sqrt{61}}^{\cancel{2}} = 5^2 + x^2$$

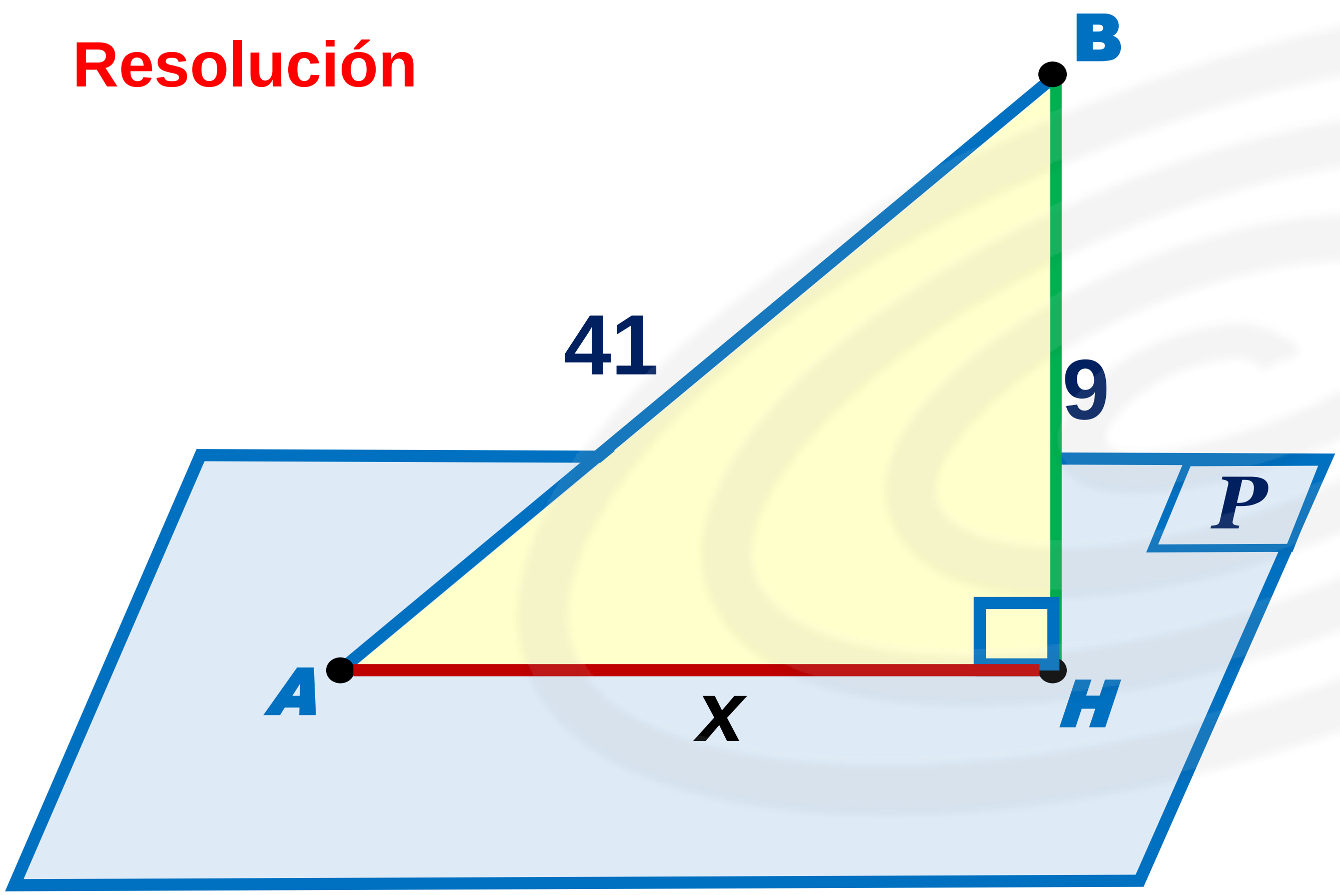
$$61 = 25 + x^2$$

$$36 = x^2$$

$$\boxed{x = 6}$$

2. En la figura, si AB = 41 y BH = 9, halle la longitud de la proyección de $\overline{AB}$ sobre el plano P.

Resolución



- Piden x.

- ◺ ABH : Pitágoras

$$41^2 = 9^2 + x^2$$

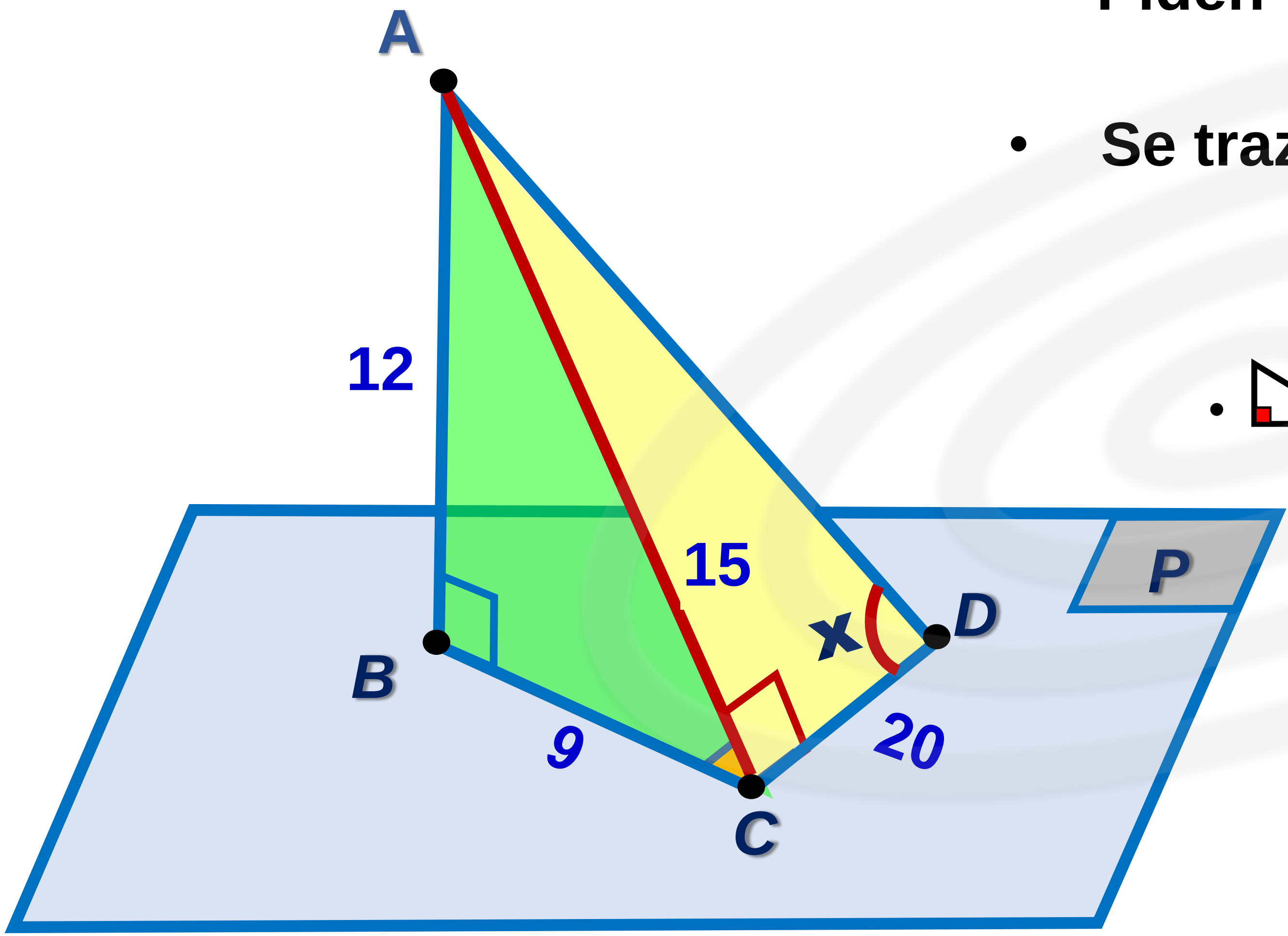
$$1681 = 81 + x^2$$

$$1600 = x^2$$

$$\boxed{x = 40}$$

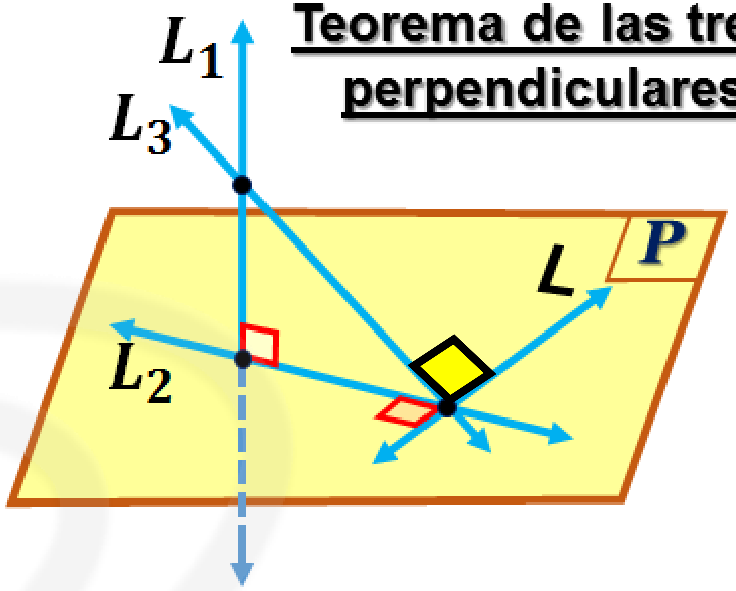
3. En la figura, $\overline{AB} \perp$ P, calcule x

Resolución



- Piden = x.
- Se traza $\overline{AC}$.

Teorema de las tres perpendiculares



- ◺ABC: Pitágoras

$y^2 = 12^2 + 9^2$

$y^2 = 144 + 81$

$y^2 = 225$

$\boxed{y = 15}$

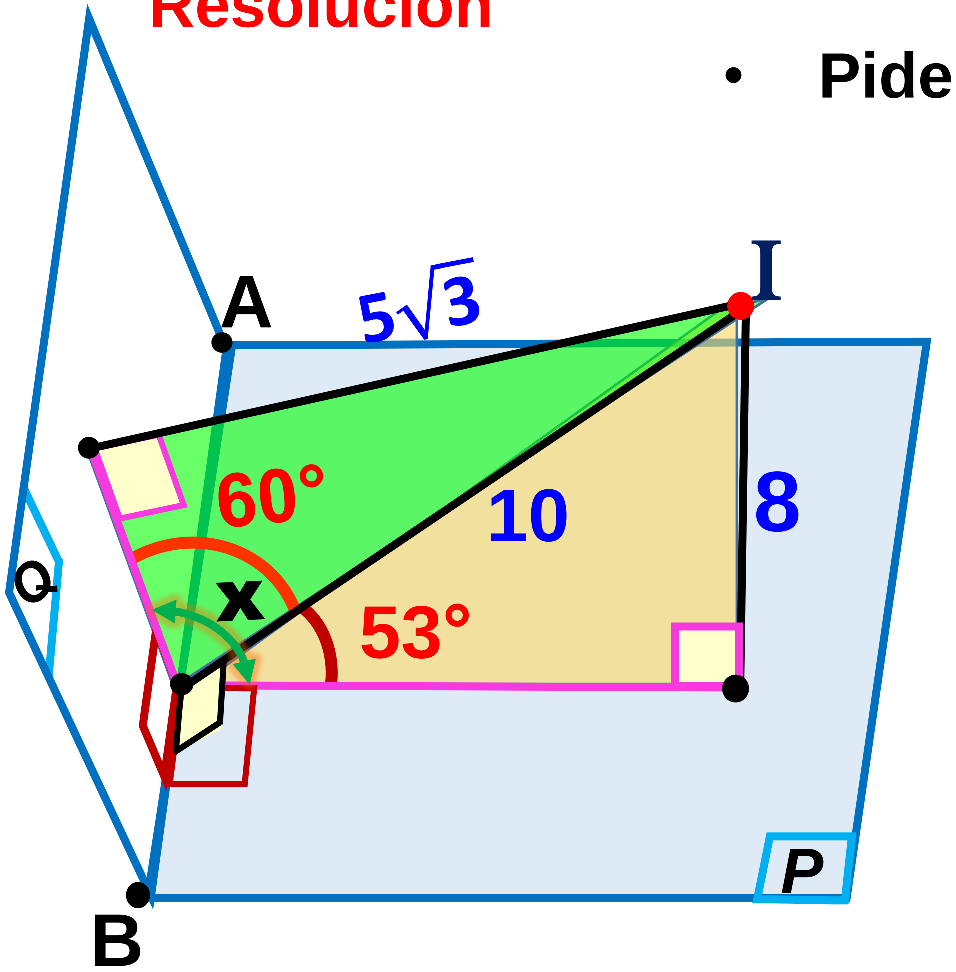
- ◺ACD:

Notable de 37° - 53°

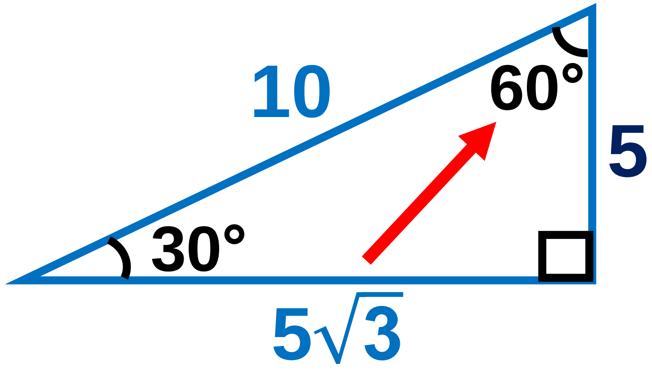
$\boxed{x = 37°}$

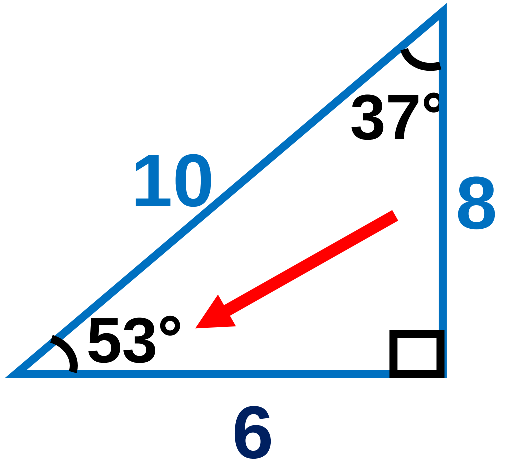
4. Halle la medida de un ángulo diedro si se sabe que un punto interior de dicho diedro, dista de las caras $5\sqrt{3}$ u y 8 u, y dista de la arista 10 u.

Resolución

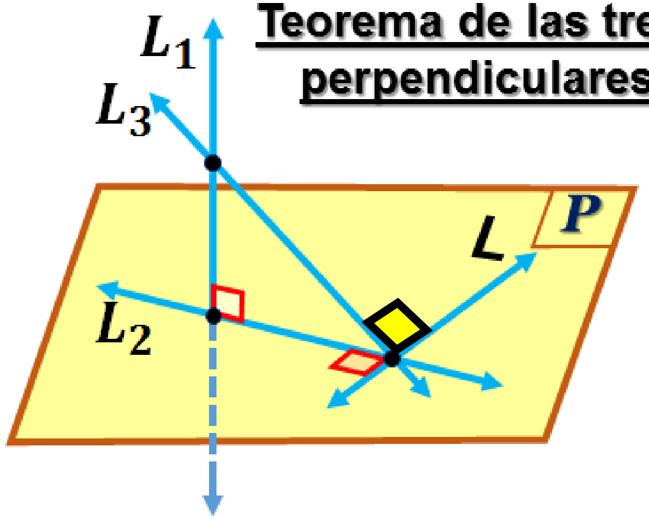


- Piden x.





Teorema de las tres perpendiculares



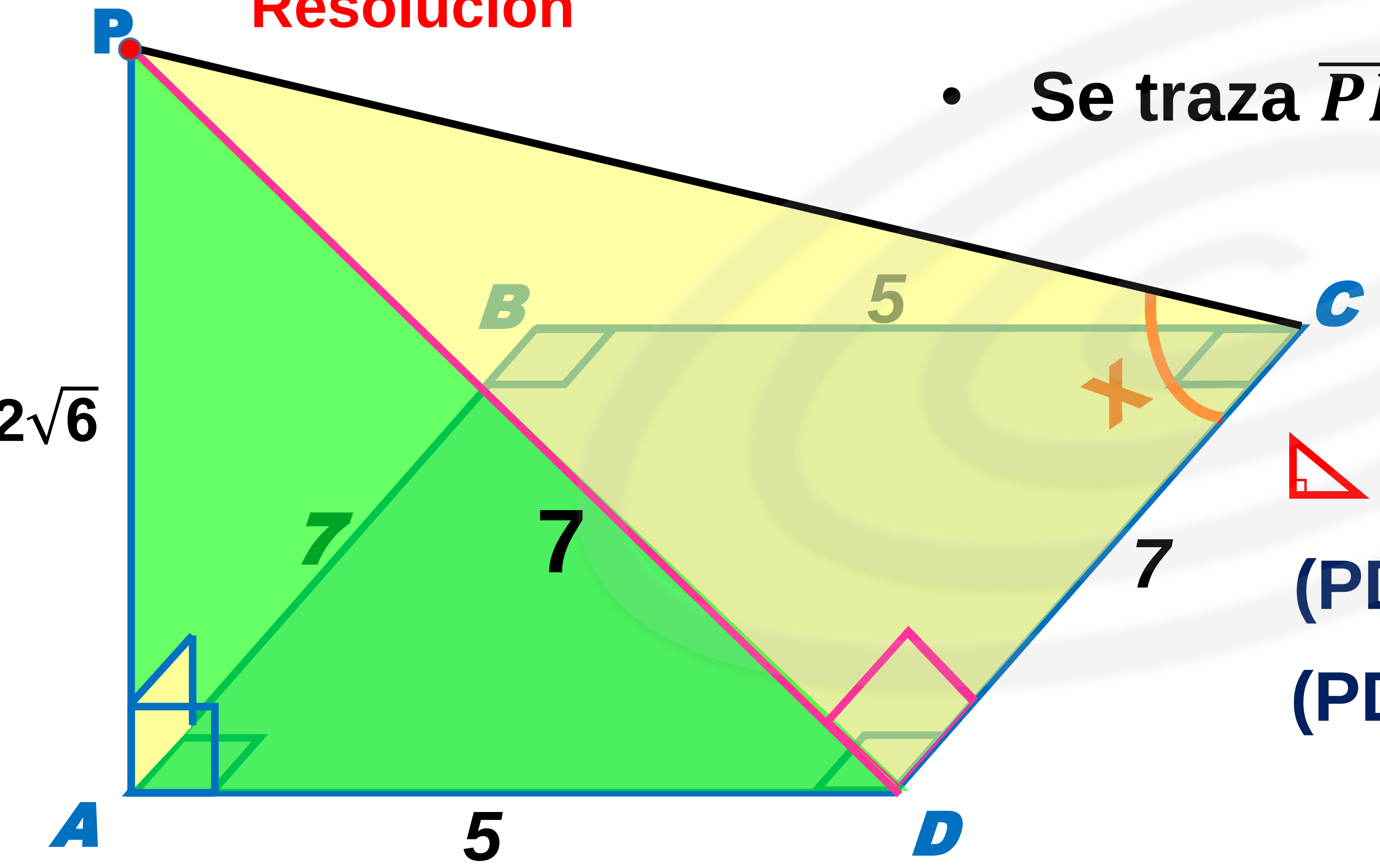
- Del gráfico

$x = 53° + 60°$

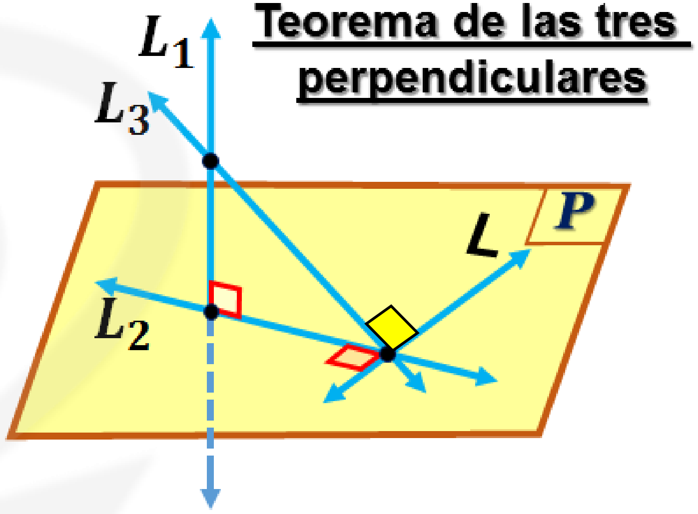
$\boxed{x = 113°}$

5. Se tiene una región rectangular ABCD donde AB = 7 y BC = 5. Luego, por el extremo A se traza la perpendicular $\overline{AP}$ a dicha región, tal que $AP = 2\sqrt{6}$. Halle la m∢PCD.

Resolución



- Piden m∢PCD = x.
- Se traza $\overline{PD}$



◺ APD : Pitágoras

$(PD)^2 = 5^2 + (2\sqrt{6})^2$

$(PD)^2 = 49$

$PD = 7$

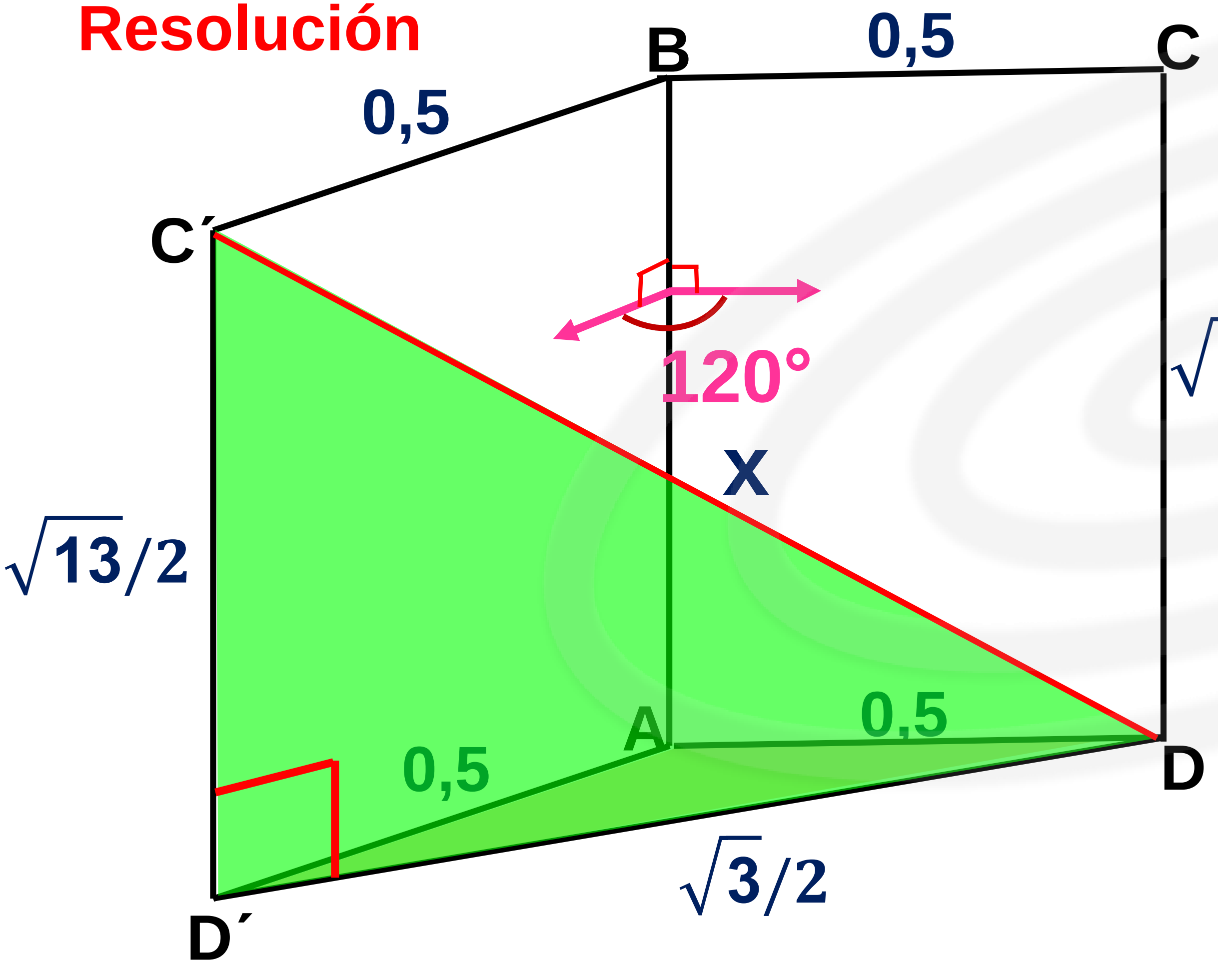
◺ CDP :

Notable de 45° y 45°

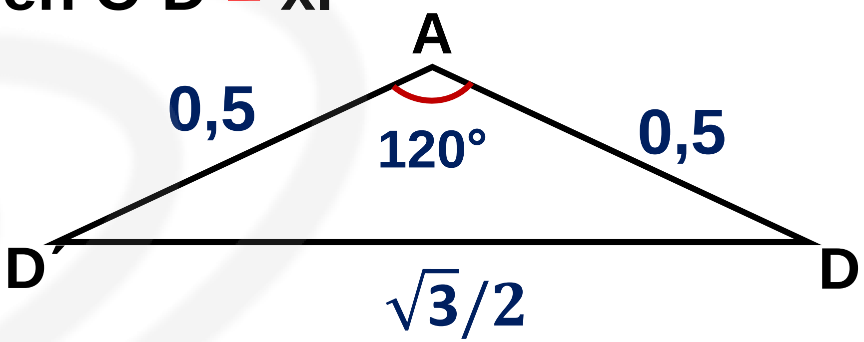
$x = 45°$

6. En la figura, el rectángulo ABCD representa el borde de una puerta, que al abrirla alrededor de $\overline{AB}$ hasta la posición ABC´D´ determina un ángulo diedro de 120°. Si BC = 0,5m y CD = $\sqrt{13}$ / 2 m; calcule C´D

Resolución



- Piden C´D = x.



- ◺ C´D´D : Pitágoras

$$\left(\sqrt{13}/2\right)^2 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2 = x^2$$

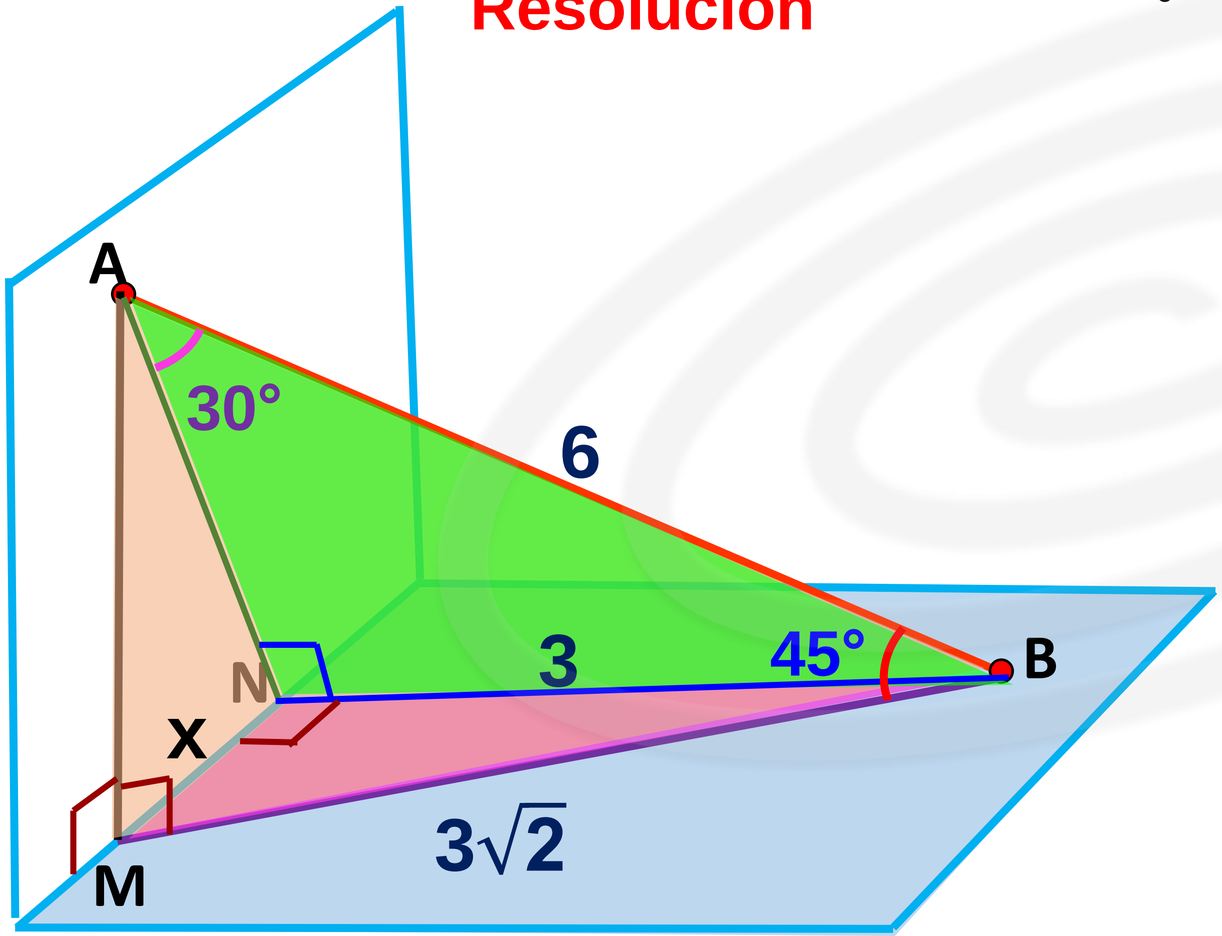
$$13/4 + 3/4 = x^2$$

$$2 = x$$

$$\boxed{C´D = 2\ m}$$

7. En la figura, el $\overline{AB}$ representa a un cable metálico bien tensado, el cual forma 30° con la pared vertical y 45° con el piso horizontal, siendo AB = 6m. Si desde A y B se trazan los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ perpendiculares a la línea del borde común; calcule MN.

Resolución



- Piden MN = x.

ANB: Notable de 30° y 60°

NB = 3 m

AMB: Notable de 45° y 45°

MB = $3\sqrt{2}$ m

~~MNB:~~ Teorema de Pitágoras

$$x^2 + 3^2 = (3\sqrt{2})^2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$

$$\boxed{MN = 3\text{ m}}$$