



# MATHEMATICAL REASONING

## Chapter 7

**5th**  
SECONDARY

## INTERPRETACIÓN DE ENUNCIADOS II



 **SACO OLIVEROS**

# HELICO THEORY

## ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Se denomina Ecuación Diofántica (en recuerdo a Diofanto de Alejandría) a aquella ecuación algebraica con coeficientes enteros, generalmente de varias variables, definidas en el conjunto de los  $\mathbb{Z}$  o  $\mathbb{N}$ , es decir, sus soluciones son números enteros.

### Ejemplos

$$11x + 7y = 90$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$7x + y + xy = 41$$

### TENGA EN CUENTA

- Por tratarse de problemas contextualizados solo veremos ecuaciones diofánticas lineales cuyas variables  $\in \mathbb{Z}^+$ .

$$ax + by = c.$$

$$ax + by + cz = d.$$

$$ax + by + cxy = d.$$

Donde:  $a; b; c; d$ : *coeficientes*

$x; y; z$ : *variables*

# ECUACIONES DIOFÁNTICAS

## DETERMINACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

### • CRITERIO DE MULTIPLICIDAD

Se emplea cuando el resultado es múltiplo de uno de los coeficientes de los sumandos.

Ejemplo

$$\begin{array}{c}
 \overset{\bullet}{3} \quad \quad \overset{\bullet}{3} \quad \quad \overset{\bullet}{3} \\
 \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\
 3x + 4y = 33 ; \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+ \\
 \downarrow \quad \quad \downarrow \\
 7 \quad \quad 3 \\
 3 \quad \quad 6
 \end{array}$$

### • Tenga en cuenta

- PRINCIPIO DE DIVISIBILIDAD

$$\overset{\bullet}{a} \pm \overset{\bullet}{a} = \overset{\bullet}{a} ; \\
 \text{si } a \text{ es no nulo}$$

# ECUACIONES DIOFÁNTICAS

Veamos algo más en el ejemplo.

Ejemplo

$$\overset{\cdot 3}{\underbrace{3x}} + \overset{\cdot 3}{\underbrace{4y}} = \overset{\cdot 3}{\underbrace{33}} ; \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ -4 \left( \begin{array}{c} 7 \\ 3 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \begin{array}{c} 3 \\ 6 \end{array} \right) +3 \end{array}$$



## OBSERVACIÓN

Mientras una de las variables ( $x$ ) disminuye en tantas unidades como el coeficiente de su vecina ( $y$ ), esta aumenta en tantas unidades como el coeficiente de  $x$ .

## TENGA EN CUENTA

- Si bien se indica que  $\{x; y\} \in \mathbb{Z}^+$ , según el contexto del problema, podría incluirse la solución:

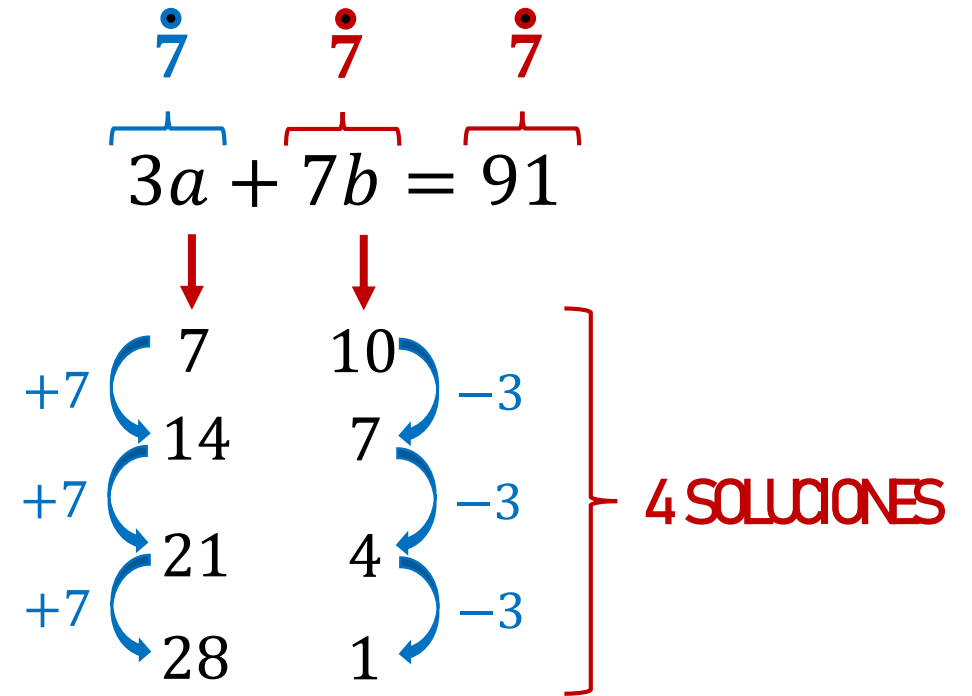
$$x = 11 ; y = 0$$



# ECUACIONES DIOFÁNTICAS

## • CRITERIO DE MULTIPLICIDAD

Sebastián compra lápices a S/.3 cada uno y lapiceros de S/.7 soles cada uno. Si gastó 91 soles exactamente comprando ambos artículos, ¿de cuántas maneras diferentes pudo Sebastián realizar la compra?



∴ *Nº de maneras diferentes* 4



# ECUACIONES DIOFÁNTICAS

## DETERMINACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

- CRITERIO DE LA ÚLTIMA CIFRA

Se emplea cuando uno de los coeficientes de los sumandos es 5 o termina en cifra 5.

### Ejemplo

$$3x + 5y = 37 ; \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+$$

### Resolución

Multiplicamos por 2 toda la ecuación

$$\begin{array}{ccc} \dots 4 & \dots 0 & \dots 4 \\ \underbrace{\phantom{6x}} & + & \underbrace{\phantom{10y}} = \underbrace{\phantom{74}} \\ 6x & + & 10y = 74 \\ \downarrow & & \downarrow \\ +5 \begin{array}{c} 4 \\ \curvearrowright \\ 9 \end{array} & & \begin{array}{c} 5 \\ \curvearrowright \\ 2 \end{array} -3 \end{array}$$



# ECUACIONES DIOFÁNTICAS

## DETERMINACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE UNA ECUACIÓN DIOFÁNTICA.

### • CRITERIO DE FACTORIZACIÓN

Se emplea cuando en los sumandos se encuentran las variables en operaciones de adición y multiplicación.

#### Ejemplo

$$x + 3y + xy = 74 ; \{x; y\} \in \mathbb{Z}^+ ; y > x$$

Factor común:  $y$  (indicated by a red arrow from  $3y$  and  $xy$  to the  $y$  in  $3y$ )

Factor común:  $x$  (indicated by a red arrow from  $x$  and  $xy$  to the  $x$  in  $x$ )

Factorizo  $x$

$$x(y + 1) + 3y = 74$$

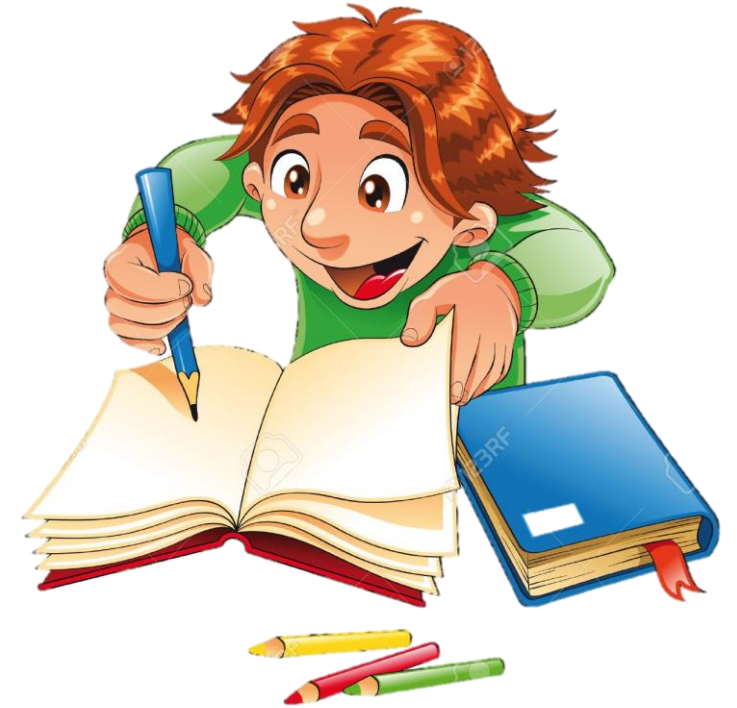
$$(+3) \text{ m.a.m. } x(y + 1) + 3(y + 1) = 74 + 3$$

$$\text{Factorizo } (y + 1) \quad (y + 1)(x + 3) = 7(11)$$

(indicated by red arrows from  $y+1$  and  $x+3$  to the  $y+1$  in  $(y+1)(x+3)$ )

$$\therefore x = 4; y = 10$$

# RESOLUCIÓN DE LA PRÁCTICA

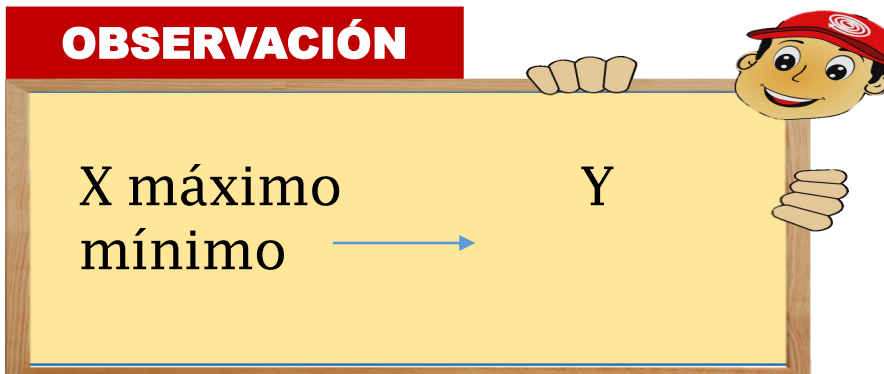




## PROBLEMA 1

Halle el máximo valor de  $x$  en  $3x + 5y = 70$  si  $x, y \in \mathbb{N}$

### RESOLUCIÓN



$$3x + 5y = 70$$
$$\underline{3(x)} + 5(\underline{2}) = 70$$
$$60$$
$$\therefore \underline{\underline{X = 20}}$$

# PROBLEMA 2

Una persona compró pelotas, a S/21 la unidad; medias, a S/15 la unidad y gorros, a S/35 la unidad. Si gastó S/219,

¿cuántos

## OBSERVACIÓN

CRITERIO DE DIVISIBILIDAD DEL 3

Suma de cifras es 3°

3° + 3° + 3° = 3°

21 = 3 (7)

=3°

15 = 3(5) =

3°

219= 3(73)=

3°

# RESOLUCIÓN

ARTÍCULO	CANTIDAD	COSTO UNIDAD
PELOTAS	p	21
MEDIAS	m	15
GORROS	g	35

GASTO TOTAL:  $21p + 15m + 35g = 219$

$21p + 15m + 35(3) = 219$

$21p + 15m = 114$

$7(4) + 5(2) = 38$

TOTAL DE ARTÍCULOS  $\therefore \underline{\underline{X=9}}$

### PROBLEMA 3

¿De cuántas maneras diferentes se puede pagar una deuda de S/200 con billetes de S/10 y S/20, únicamente?

### RESOLUCIÓN



a



b



$$10a + 20b =$$

$$200$$
$$10a + 2b = 20$$

18  
16  
14  
—  
2

1  
2  
3  
—  
9

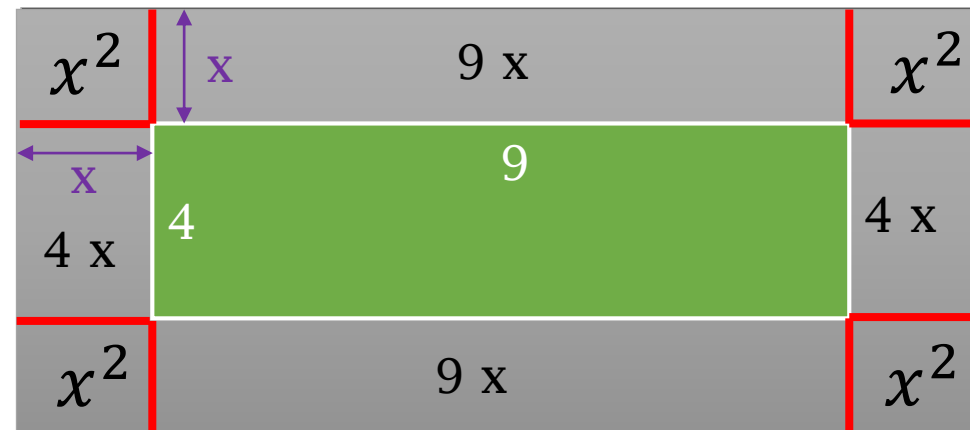
∴ **Maneras: 9**

## PROBLEMA 4

Una piscina rectangular de 4 m de ancho por 9 m de largo tiene alrededor un ***paseo de ancho uniforme***.

Si el área del paseo es 68m<sup>2</sup> ¿cuánto será el ancho del paseo, en metros?

## RESOLUCIÓN



ÁREA DEL PASEO

:

$$4x^2 + 26x = 68$$

$$2x^2 + 13x - 34 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x \\ x \end{array} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{r} +17 \\ -2 \end{array}$$

$$x - 2 = 0 \quad \therefore \underline{\underline{x = 2}}$$

## PROBLEMA 5

Se desea comprar el máximo número de aves con S/169, entre palomas y canarios de S/9 y S/4 cada una, respectivamente.  
¿Cuántas aves se compraron?

### RESOLUCIÓN

PALOMAS: P



S/9

CANARIOS: C



S/4

### OBSERVACIÓN

**Máxima**  
cantidad de  
aves:

**Mínima**  
cantidad de  
palomas

Mínimo

$$\begin{aligned} \rightarrow 9P + 4C &= 169 \\ 9(1) + 4(40) &= 169 \end{aligned}$$

**∴ Total de aves: 41**

## PROBLEMA 6

Una promoción de verano ofrecía un gran premio al que llegaba a juntar cierto número de chapas marcadas. Ana y Bety se aliaron para ganar el premio. Al cabo de una semana, hicieron sus cuentas:

Ana: ¡Bety, solo has juntado los 7/20

de lo necesario!...

Bety: ¡No reclames!, pues tú has juntado 2/5 de lo mío. ¡Así no llegamos ni a 50!

¿Cuántas chapas eran necesarias para cobrar el premio?

## RESOLUCIÓN

TOTAL:

$$\text{Bety: } \frac{7}{20} (100K) = 35K$$

$$\text{Ana: } \frac{2}{5} (35K) = 14K$$



$$\begin{aligned} \text{JUNTAS} \rightarrow 35K + 14K &< 50 \\ 49K &< 50 \\ K &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Total} = \underline{\underline{100}}$$

## PROBLEMA 7

Por la cuarentena establecida y las nuevas normas para poder reanudar el trabajo presencial, una fábrica debía transportar a sus 178 operarios en vehículos de dos tipos: unos tienen capacidad para 17 empleados y otros que tienen capacidad solo para 5. ¿Cuál es el menor número de vehículos que debe habilitar la fábrica si ninguna persona debe ir de pie y ningún asiento debe quedar vacío?

## RESOLUCIÓN

	# VEHÍCULOS	#ASIENTOS
	$a$	17
	$b$	5

**Máximo**

$$\rightarrow 17a + 5b = 178$$
$$17(9) + 5b = 178$$
$$153 + \underbrace{5(5)}_{25} = 178$$

**$\therefore$  #VEHÍCULOS: 14**