MATHEMATICAL REASONING

Chapter 19

2nd

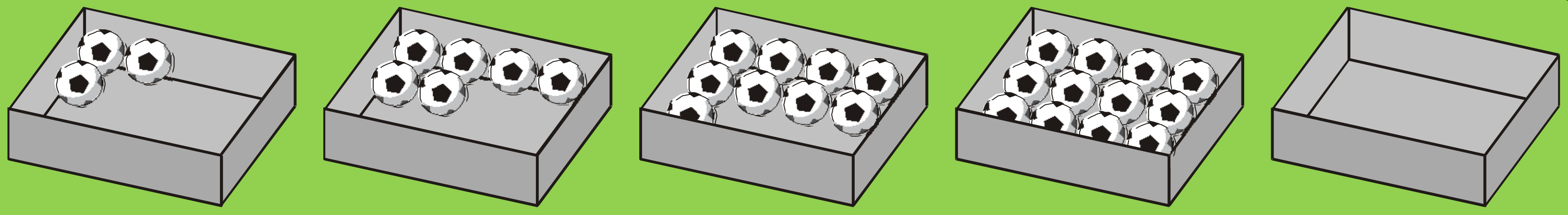
SECONDARY

SERIES II

SACO OLIVEROS

En la primera caja voy a colocar 3 pelotas, en la segunda 6 pelotas, en la tercera 9 pelotas y en la cuarta 12 pelotas. ¿Y en la quinta caja? Para seguir la sucesión debería colocar en ella 15 pelotas ¡Jo, Jo, Jo!

¿ cuántas pelotas habrá en total, en las 5 cajas ?



Caja1 Caja2 Caja3 Caja4 Caja5

Solución:

$$3 + 6 + 9 + 12 + 15 = 45$$

PRINCIPALES SERIES NOTABLES

SERIE DE LOS PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

$S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \longrightarrow \boxed{S = \frac{n(n+1)}{2}}$

SERIE DE LOS PRIMEROS NÚMEROS PARES

$S = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n \longrightarrow \boxed{S = n(n+1)}$

SERIE DE LOS PRIMEROS NÚMEROS IMPARES

$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) \longrightarrow \boxed{S = n^2}$

PRINCIPALES SERIES NOTABLES

SERIE DE LOS PRIMEROS NÚMEROS CUADRADOS

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 \longrightarrow \boxed{S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

SERIE DE LOS PRIMEROS NÚMEROS CÚBICOS

$$S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3 \longrightarrow \boxed{S = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$$

SERIE GEOMÉTRICA

Es la adición de los términos de una sucesión geométrica. Ahora, la serie geométrica puede ser finita o infinita según sea la naturaleza de la sucesión asociada a ella.

Serie geométrica finita

$$t_1 \underbrace{+}_{\times q} t_2 \underbrace{+}_{\times q} t_3 \underbrace{+}_{\times q} t_4 + \ldots + t_n$$

$$\boxed{S_n = a_1\left[\frac{q^n - 1}{q - 1}\right]}$$

Donde:

a_1: primer término

n: número de términos

q: razón

Serie geométrica infinita

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + \ldots\infty$$

xq xq xq

$$\boxed{S_L = \frac{a_1}{1-q}}$$

Donde:

a_1: primer término

q: razón

Ejemplo:

$$S = 81+27+9+3+\cdots\infty$$

$\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$ $\times\frac{1}{3}$

$$S = \frac{81}{1-\frac{1}{3}}$$

$$S = \frac{81}{\frac{2}{3}}$$

$$S = \frac{243}{2}$$

OTRAS SERIES

DE LOS PRIMEROS PRODUCTOS CONSECUTIVOS TOMADOS DE 2 EN 2

$$S_n = 1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1) \longrightarrow \boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

DE LOS PRIMEROS PRODUCTOS CONSECUTIVOS TOMADOS DE 3 EN 3

$$S_n = 1\times 2\times 3 + 2\times 3\times 4 + \cdots + n\times(n+1)\times(n+2)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

SUMA DE LAS INVERSAS DE LOS PRODUCTOS CONSECUTIVOS TOMADOS DE 2 EN 2

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n\times(n+1)}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{n+1}}$$

1 Halle el valor de la serie:

$S = 2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 80$

Resolución:

$$2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + \underbrace{80}_{2n}$$

RECORDEMOS:

De los primeros números pares

$$S = 2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 2n \quad \boxed{S = n(n+1)}$$

$S = n(n+1)$

$S = 40(40+1)$

$S = 1640$

Rpta. 1640

2

El alumno Ricardito decide ahorrar todas sus propinas empezando así con S/8 la primera semana, a partir de la siguiente semana él depositará la misma cantidad que depositó la semana anterior. Como se observa en el siguiente cuadro:

Semana de ahorro	1	2	3	4	...
Dinero ahorrado (en soles)	8	16	32	64	...

¿Cuánto dinero ahorró Ricardito en 20 semanas?

2

Resolución:

RECORDEMOS:

$$S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\overbrace{\underset{\times 2}{8 + 16} + \underset{\times 2}{32} + \underset{\times 2}{64} + \cdots}^{\text{20 términos}}$$

$$\frac{8(2^{20}-1)}{2-1}$$

Rpta. $8(2^{20} - 1)$

3

Halle el valor de la serie:

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 81$$

Resolución:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + \underbrace{81}_{2n-1}$$

$$\begin{cases} 2n - 1 = 81 \\ 2n = 82 \\ n = 41 \end{cases}$$

RECORDEMOS:

De los primeros números impares

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1) \quad \boxed{S = n^2}$$

$S = n^2$

$S = (41)^2$

$S = 1681$

Rpta. 1681

4 Calcule el valor de la serie

$$A = \underbrace{3 + 9 + 27 + 81 + \dots}_{20 \text{ términos}}$$

Resolución:

RECORDEMOS:

$$\boxed{S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

$$\overbrace{3 \underset{x3}{+} 9 \underset{x3}{+} 27 \underset{x3}{+} 81 + \cdots}^{20 \text{ términos}}$$

$$\frac{3(3^{20}-1)}{3-1} = \frac{3(3^{20}-1)}{2}$$

Rpta. $\dfrac{3(3^{20}-1)}{2}$

5

Halle el valor de E.

$$E = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots\ldots\infty =$$

Resolución:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots\ldots\infty$$

$$\times\frac{1}{3} \qquad \times\frac{1}{3} \qquad \times\frac{1}{3}$$

RECORDEMOS:

$$S_L = \frac{a_1}{1-q}$$

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

Rpta.

$$\frac{3}{2}$$

6

Calcule la suma de los elementos de F_{20}

$$\begin{array}{l} F_1 \rightarrow 1 \\ F_2 \rightarrow 1 \quad 2 \\ F_3 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \\ F_4 \rightarrow 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ \quad \vdots \end{array}$$

RECORDEMOS:

De los primeros números naturales

$$S = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n$$

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Resolución:

$F_1 \rightarrow 1$

$F_2 \rightarrow 1 + 2$

$F_3 \rightarrow 1 + 2 + 3$

$F_4 \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4$

$\vdots$

$F_{20} \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots\ldots + 20$

$$S = \left(\frac{20(21)}{2}\right) = 210$$

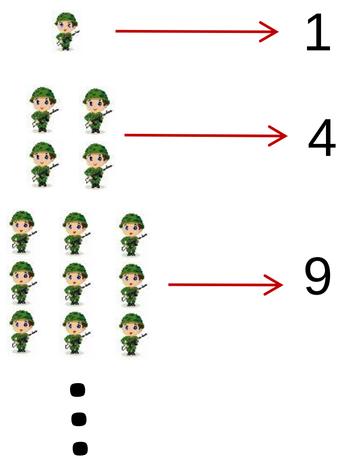
Rpta. 210

7 Un instructor del ejercito formó a su batallón de la siguiente manera: el sargento al frente; atrás un cuadrado de 2 filas por 2 columnas ; más atrás otro cuadrado de 3 filas por 3 columnas , y así sucesivamente continúo formando cuadrados hasta completar 20 grupos , incluyendo al sargento. ¿ Cuántos soldados conformaban el batallón ?

RECORDEMOS:

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Resolución:



$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots\ldots + 20^2$

$$S = \frac{\overset{10}{\cancel{20}}(\overset{7}{\cancel{21}})(41)}{\underset{\cancel{2}}{\cancel{6}}} = 70\,(41) = 2870$$

Rpta. **2870**