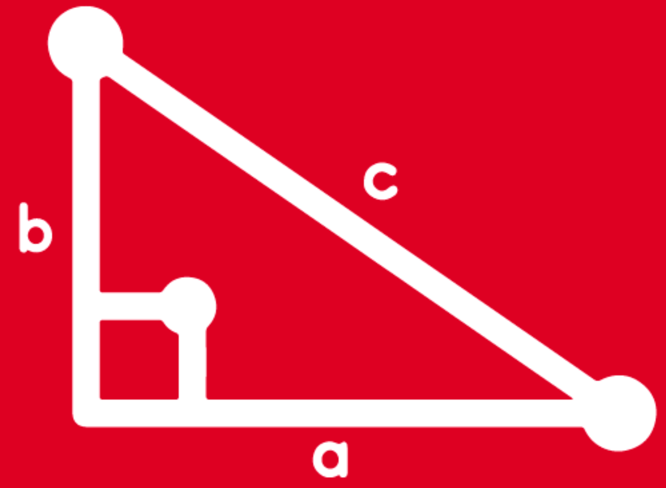
TRIGONOMETRY

Chapter 07



5th
SECONDARY

Razones trigonométricas de un ángulo en posición normal II

SACO OLIVEROS

Divide las dificultades que examinas en tantas partes como sea posible para su mejor solución.

René Descartes 1596 - 1650

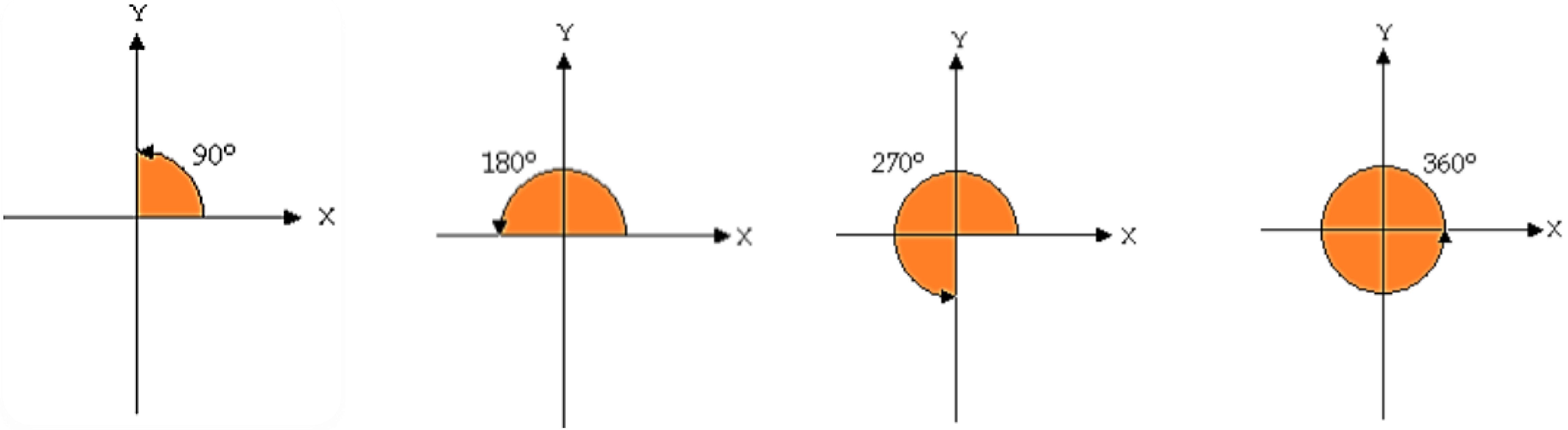
ÁNGULOS CUADRANTALES

Son aquellos ángulos trigonométricos cuyo lado final se encuentra sobre algún semieje, por tal razón no pertenecen a cuadrante alguno

Podemos decir: *Que es todo ángulo múltiplo del ángulo recto, por consiguiente tendrán la forma:*

$90°n$	$\frac{\pi}{2}\text{rad}\ n$

$n \in \mathbb{Z}$



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

RT \ ∡	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0
cot	ND	0	ND	0	ND
sec	1	ND	–1	ND	1
csc	ND	1	ND	–1	ND

N.D : No Determinado

OBSERVACIÓN:

Si α es un ángulo cuadrantal

senα = { -1; 0; 1 }

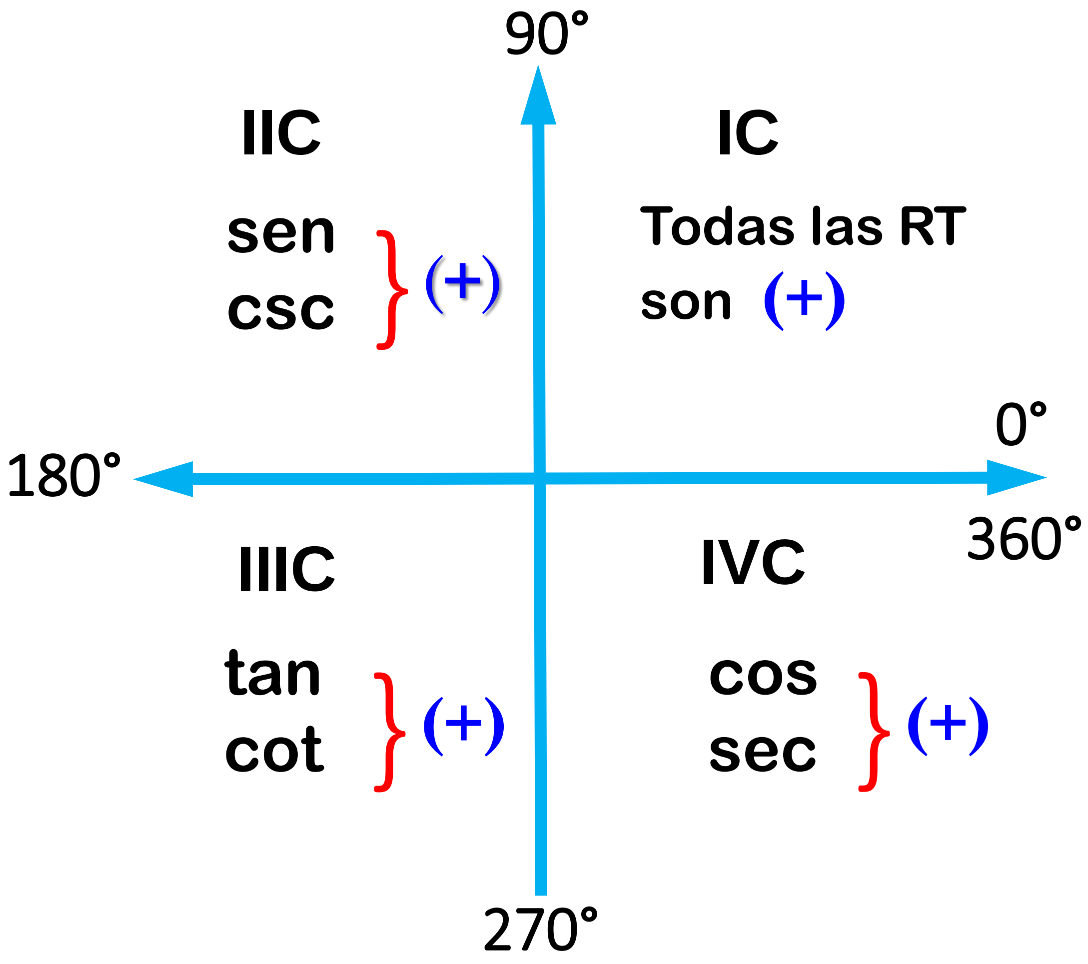
cosα = { -1; 0; 1 }

tanα = 0

cotα = 0

SIGNO DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN LOS CUADRANTES

Regla práctica:



OBSERVACIÓN

Si $0° < \alpha < 90° \Rightarrow \alpha \in IC$

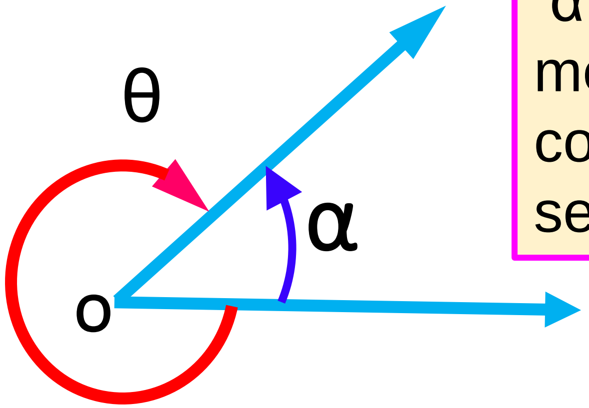
Si $90° < \alpha < 180° \Rightarrow \alpha \in IIC$

Si $180° < \alpha < 270° \Rightarrow \alpha \in IIIC$

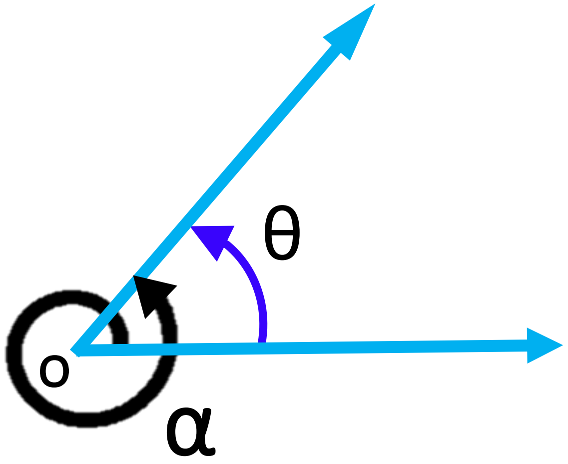
Si $270° < \alpha < 360° \Rightarrow \alpha \in IVC$

ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial, lado final y vértice.



α y θ son las medidas de los ángulos coterminales en sentidos opuestos.



α y θ son las medidas de los ángulos coterminales en el mismo sentido.

Siendo **α** y **θ** las medidas de dos ángulos coterminales, se cumple.

I. $\alpha - \theta = 360°n;\ n \in \mathbb{Z}$

II. Rt (α) = Rt (θ)

1. Siendo θ y β ángulos cuadrantales diferentes, positivos y menores o iguales a 360°, se cumple que $\sqrt{1-\cos\theta}+\sqrt{\cos\theta-1}=1+\operatorname{sen}\beta$ ... (*) calcule θ + β.

RESOLUCIÓN

$$1-\cos\theta \geq 0 \quad \wedge \quad \cos\theta - 1 \geq 0$$

$$\underbrace{\cos\theta \leq 1 \quad \wedge \quad \cos\theta \geq 1}$$

$$\cos\theta = 1$$

$$\theta = \{0°; 360°\},\ \text{como } 0° < \theta \leq 360°$$

$$\theta = 360°$$

REEMPLAZANDO EN (*)

$$\underbrace{\cancel{\sqrt{1-\cos\theta}}}_{0}+\underbrace{\cancel{\sqrt{\cos\theta-1}}}_{0}=1+\operatorname{sen}\beta$$

$$-1 = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \beta = 270°$$

$$\therefore \boxed{\theta+\beta = 630°}$$

2. Siendo los ángulos α y θ ángulos cuadrantales, positivos y menores a una vuelta, tal que se cumple $\operatorname{sen}\alpha + \tan\theta = -1$, efectúe

$$F = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\csc(\alpha - \theta)}$$

Recordar:

RT \ ∡	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0

RESOLUCIÓN

Como $0° < \alpha$ y $\theta < 360°$ y $\underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{-1} + \underbrace{\tan\theta}_{0} = -1$

$\theta = 180°$

$\alpha = 270°$

Reemplazando en F:

$$F = \frac{\operatorname{sen}90° + \cos 90°}{\csc 90°}$$

$$F = \frac{1 + 0}{1}$$

$$\therefore \boxed{F = 1}$$

3. Siendo θ un ángulo positivo y menor a una vuelta se cumple

$\tan\theta \cdot \operatorname{sen}120° < 0 \qquad \cos\theta \cdot \tan 300° > 0$

Indique el signo de sen2θ

Recordar:

sen, csc (+) | Todas las RT son (+)
tan, cot (+) | cos, sec (+)

RESOLUCIÓN

$\underbrace{\tan\theta}_{(-)} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}120°}_{(+)} < 0$

θ ∊ IIC ∨ θ ∊ IVC

$\underbrace{\cos\theta}_{(-)} \cdot \underbrace{\tan 300°}_{(-)} > 0$

θ ∊ IIC ∨ θ ∊ IIIC

Así: θ ∊ IIC

$\boxed{90° < \theta < 180°}$

$180° < \underbrace{2\theta}_{} < 360°$

2θ ∊ IIIC ∨ IVC

∴ **signo de sen2θ es (–)**

4. El profesor de matemática pide a sus alumnos que indiquen el cuadrante al cual pertenece el ángulo θ que cumple

$$\operatorname{sen}\theta.\sqrt{\tan\theta+\cot\theta}<0$$

Los alumnos respondieron:

Andrea: $\theta \in \mathrm{IC}$

Fernando: $\theta \in \mathrm{IIC}$

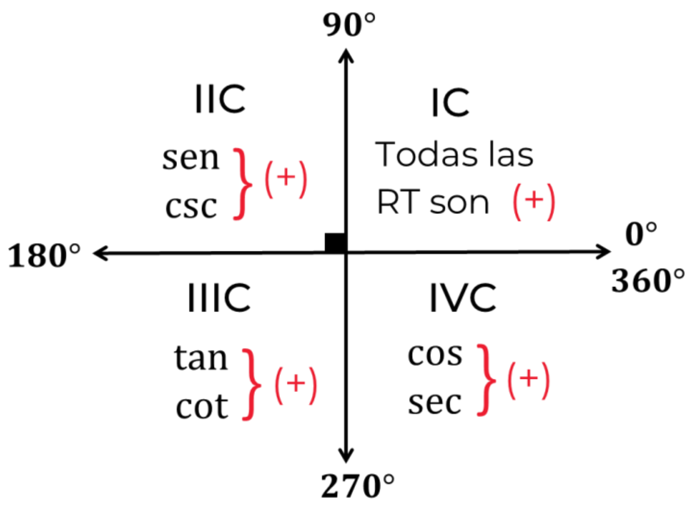
Carlos: $\theta \in \mathrm{IIIC}$

Daniela: $\theta \in \mathrm{IVC}$

¿ Quién dio la respuesta correcta?

RESOLUCIÓN

Recordar



Dato:

$$\underbrace{\operatorname{sen}\theta}_{(-)}.\underbrace{\sqrt{\tan\theta+\cot\theta}}_{(+)}<0$$

$\longrightarrow \theta \in \mathrm{IIIC}$

$\therefore$ **La respuesta correcta fue de Carlos**

5. El código de una caja fuerte está dado por un número de tres cifras, las cuales son

$$a = 9\sec 0° - \text{sen}90° + \tan 360°$$

$$b = 5\tan 45° - 3\cos 180° + \cos 0°$$

$$c = \cos 90° - 9\csc 270° - 2\sec 60°$$

Efectúe las operaciones, ordena en **forma decreciente** y averigüe dicho código.

RESOLUCIÓN

Recordar

RT ∡	0°	90°	180°	270°	360°
sen	0	1	0	–1	0
cos	1	0	–1	0	1
tan	0	ND	0	ND	0
cot	ND	0	ND	0	ND
sec	1	ND	–1	ND	1
csc	ND	1	ND	–1	ND

$$a = 9(1) - 1 + 0 \longrightarrow a = 8$$

$$b = 5(1) - 3(-1) + 1 \longrightarrow b = 9$$

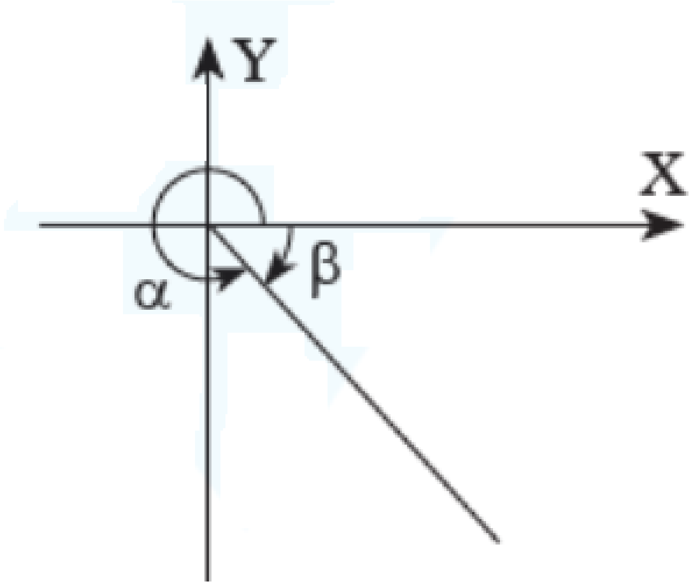
$$c = (0) - 9(-1) - 2(2) \longrightarrow c = 5$$

Ordenando en forma decreciente: 985

$\therefore$ El código será: 985

6. En la figura, se cumple que $\tan\alpha.\tan\beta + \text{sen}\alpha.\csc\beta = 5$. Calcule $\tan\alpha$

RESOLUCIÓN



α y $\beta \in$ IVC

Del gráfico se observa que α y β son las medidas de dos ángulos coterminales, luego se cumple :

$$Rt(\alpha) = Rt(\beta)$$

Del dato:

$$\tan\alpha.\tan\beta + \text{sen}\alpha.\csc\beta = 5$$

$$\tan\alpha.\tan\alpha + \underbrace{\text{sen}\alpha.\csc\alpha}_{1} = 5$$

$$\tan^2\alpha + 1 = 5$$

$$\tan^2\alpha = 4 \Rightarrow \tan\alpha = \pm 2$$

Como $\alpha \in$ IVC

$$\therefore \boxed{\tan\alpha = -2}$$

7. La secretaria del colegio tiene actualmente K años; para averiguar su edad, ella dice que para los ángulos α y θ coterminales del segundo cuadrante se cumple:

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{y} \quad \csc\theta = \frac{4K-10}{2K+10}$$

¿Cuál será la edad de la secretaria dentro de 5 años?

RESOLUCIÓN

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{5}}{3} = \frac{x}{r}$$

$$\longrightarrow \; x = -\sqrt{5} \;, r = 3$$

Sabemos:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$3 = \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + y^2}$$

$$\longrightarrow \; y = \pm 2$$

Como $\alpha \in IIC$

$$\longrightarrow \; y = 2$$

Luego:

$$\csc\alpha = \csc\theta = \frac{3}{2}$$

$$\csc\theta = \frac{4K-10}{2K+10} = \frac{3}{2}$$

$$2(4K-10) = 3(2K+10)$$

$$K = 25$$

$\therefore$ Dentro de 5 años la secretaria tendrá 30 años