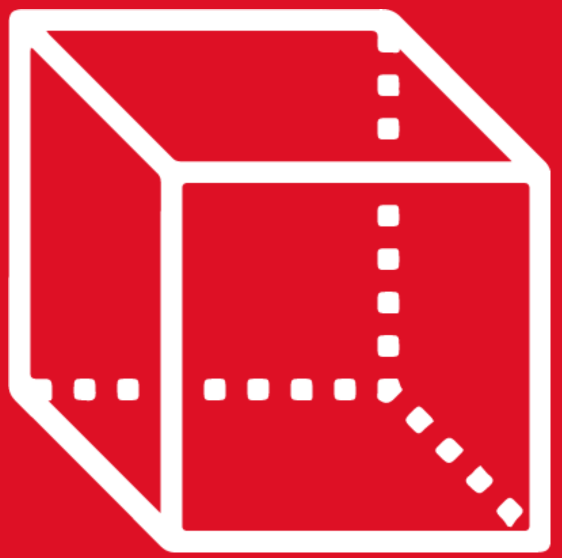
GEOMETRÍA

Capítulo 24



5st

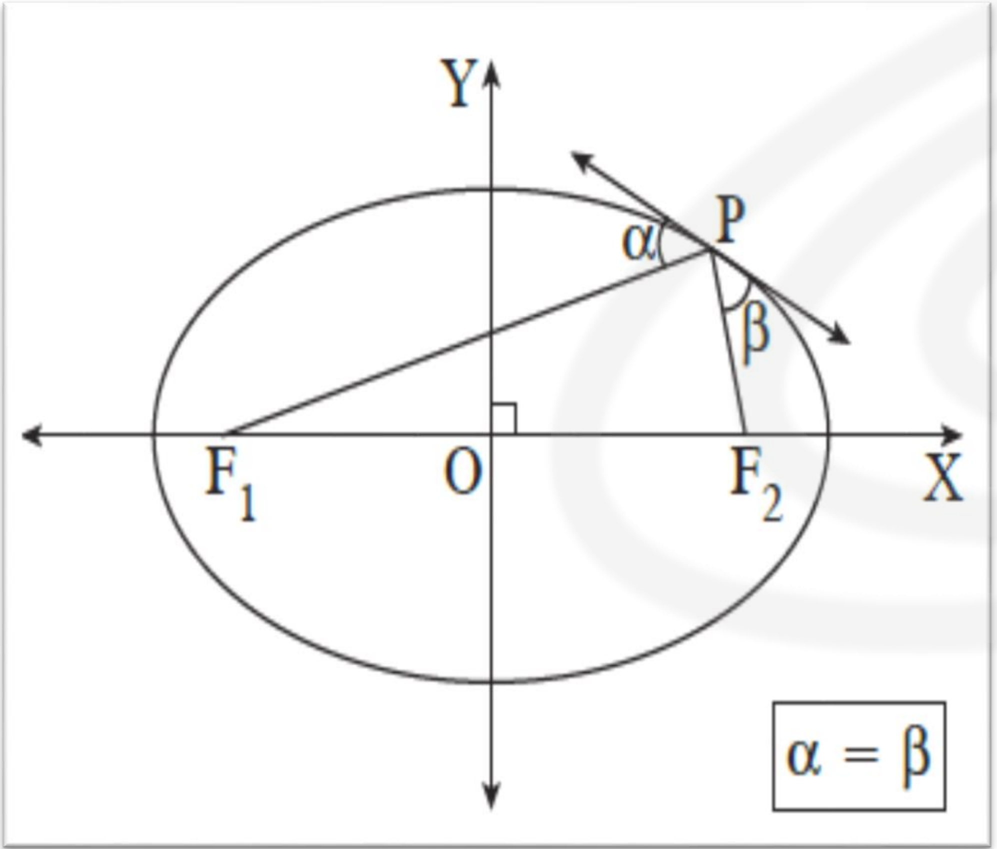
SECONDARY

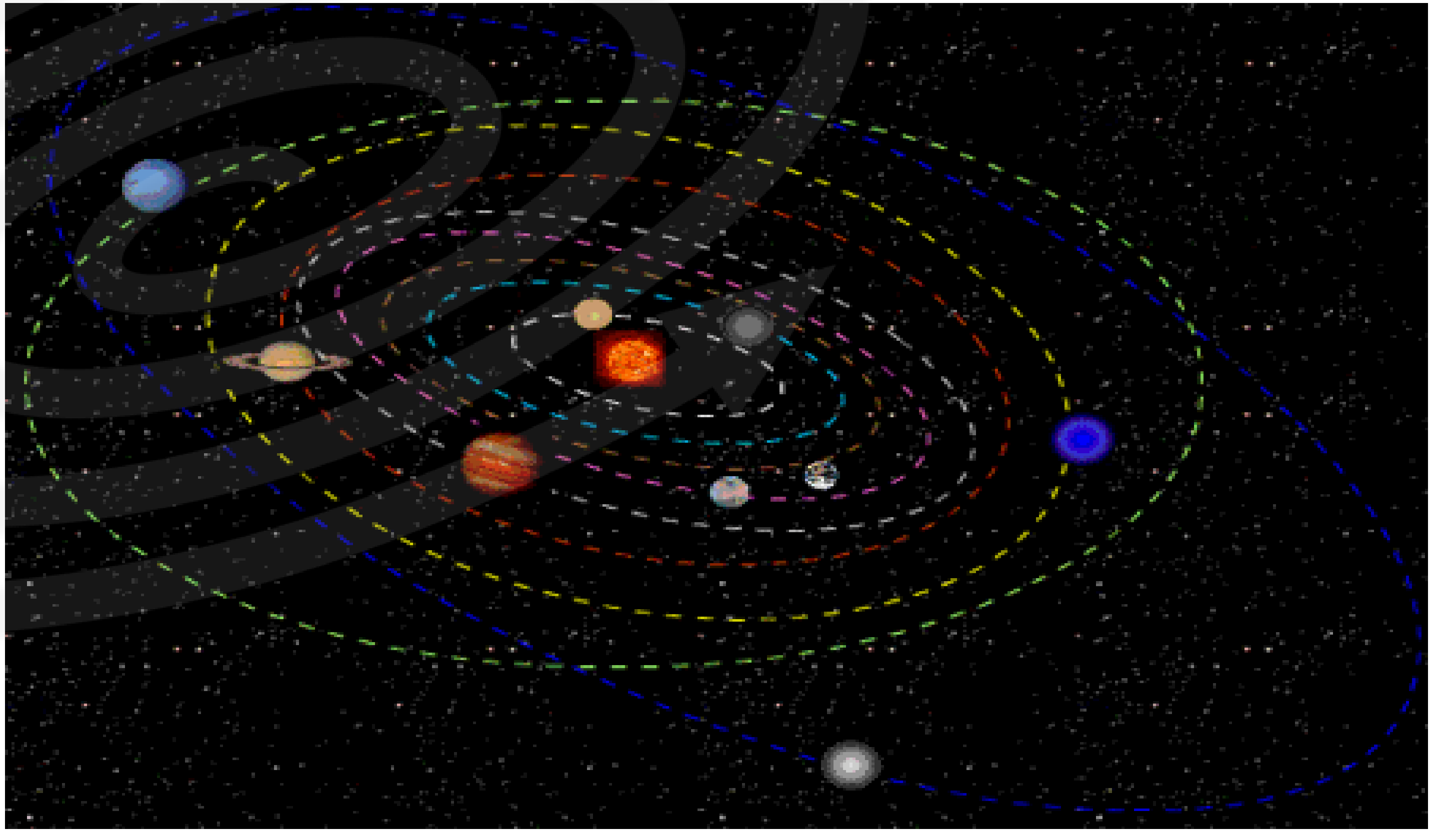
SACO OLIVEROS

ECUACIÓN DE LA ELIPSE

Aplicaciones de una elipse

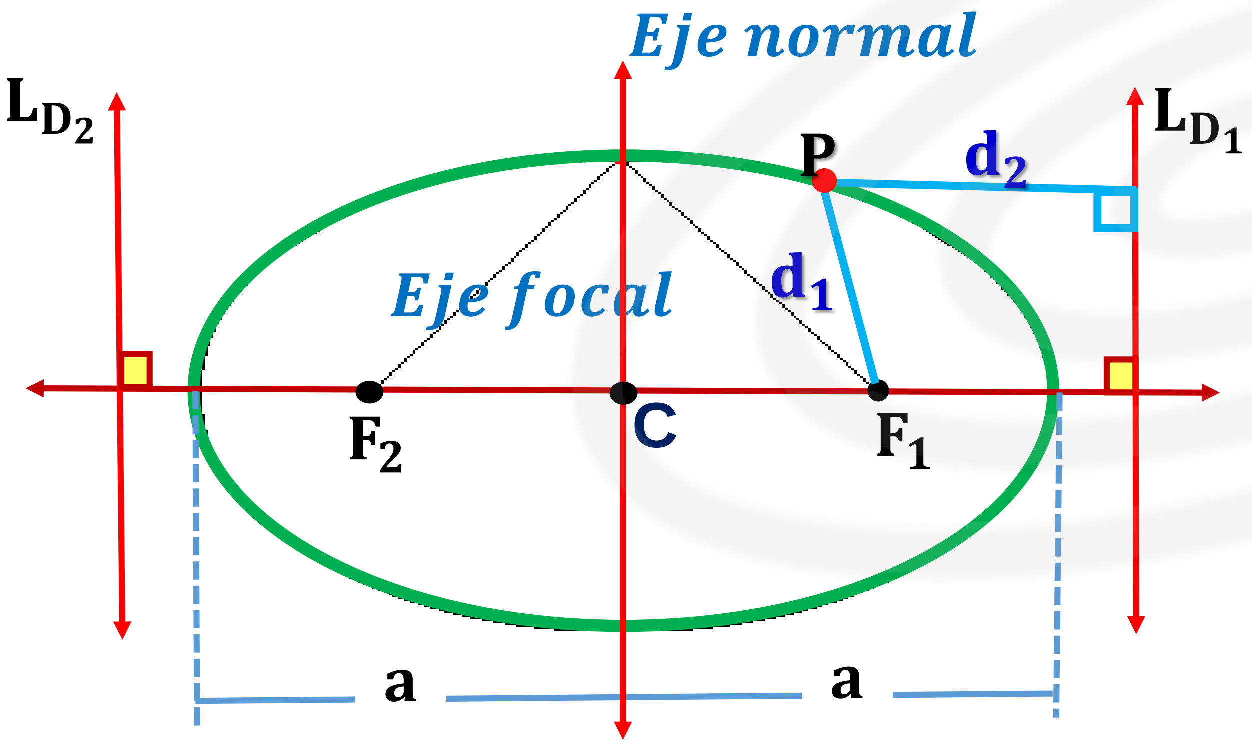
La elipse tiene una propiedad muy interesante: Si unimos cualquier punto P, de la elipse con sus focos, el ángulo que forman los radios focales con la tangente en ese punto son iguales. Esta propiedad se utiliza en construcción de espejos (de luz y sonido), pues por la emisión de luz o sonido, desde uno de los focos se refleja en el otro foco.





ECUACIÓN DE LA ELIPSE

Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 distintos, denominados focos, se define la elipse como el lugar geométrico del conjunto de puntos P(x ; y) tales que la suma de distancias de P a los focos F_1 y F_2 es igual a una constante convencional 2a.

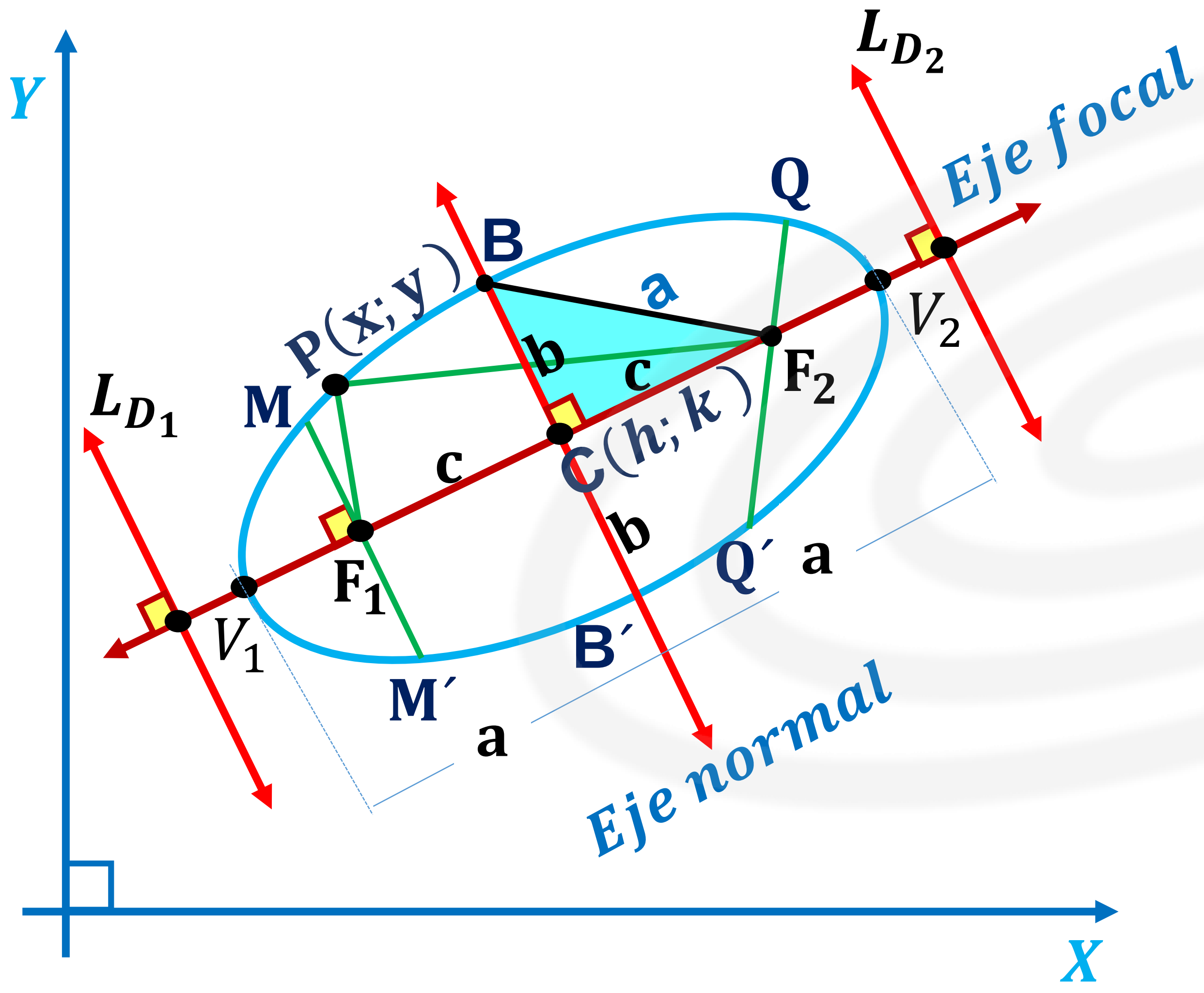


Por definición de cónica se tiene

$$\frac{d(P;F_1)}{d(P;L_{D_1})} = e$$

Donde e es la excentricidad de la elipse y se demuestra que siempre es menor que uno (e < 1).

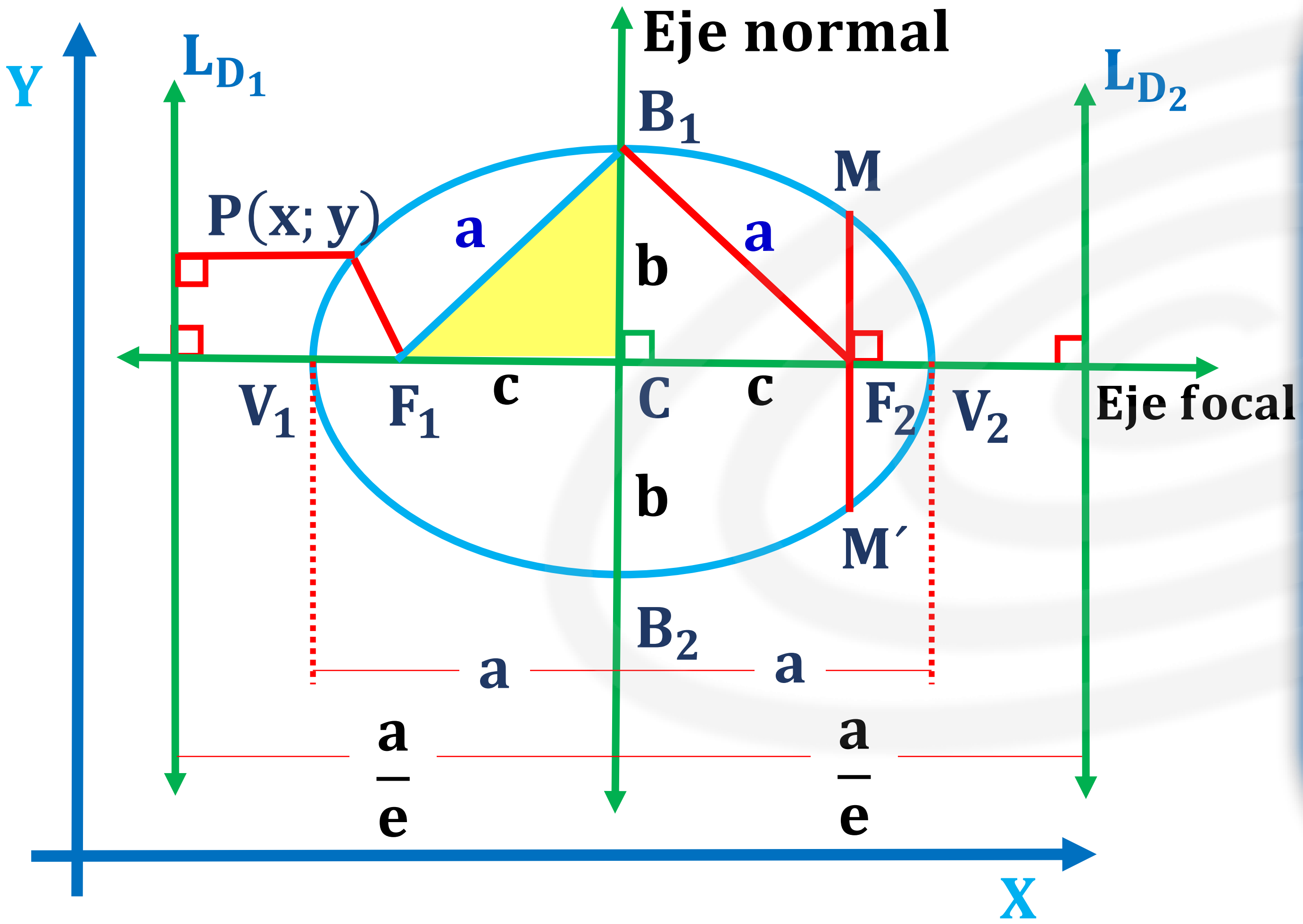
Elementos asociados a la Elipse



- FOCOS : F_1 y F_2 $(F_1F_2 = 2c)$
- CENTRO : $C(h; k)$
- Vértices de la elipse : V_1 y V_2
- Eje mayor : $\overline{V_1V_2}$ $(V_1V_2 = 2a)$
- Eje menor : $\overline{B_1B_2}$ $(B_1B_2 = 2b)$
- CUERDA FOCAL : $\overline{QQ'}$
- LADO RECTO : $\overline{MM'}$
- DIRECTRICES : $\overleftrightarrow{L_{D_1}}$ y $\overleftrightarrow{L_{D_2}}$

$$\boxed{c^2 + b^2 = a^2}$$

Propiedades básicas de la elipse



1. $d(B_1; F_1) = d(B_1; F_2) = a$

   $d(B_2; F_1) = d(B_2; F_2) = a$

2. $d(C; L_1) = d(C; L_2) = \frac{a}{e}$

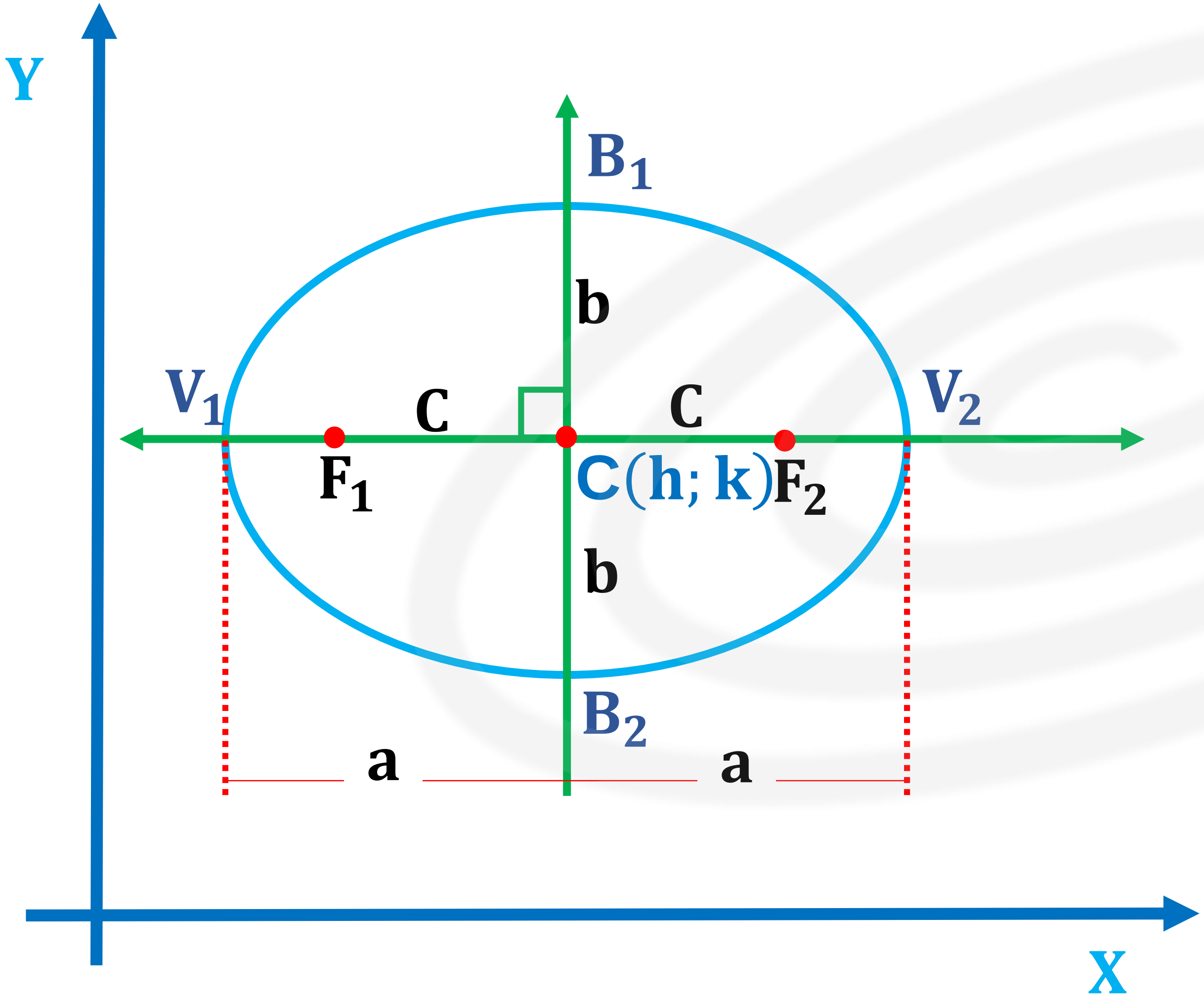
3. $c = ae$

4. $a^2 = b^2 + c^2$

5. $0 < e < 1$ ó $e = \frac{c}{a} < 1$

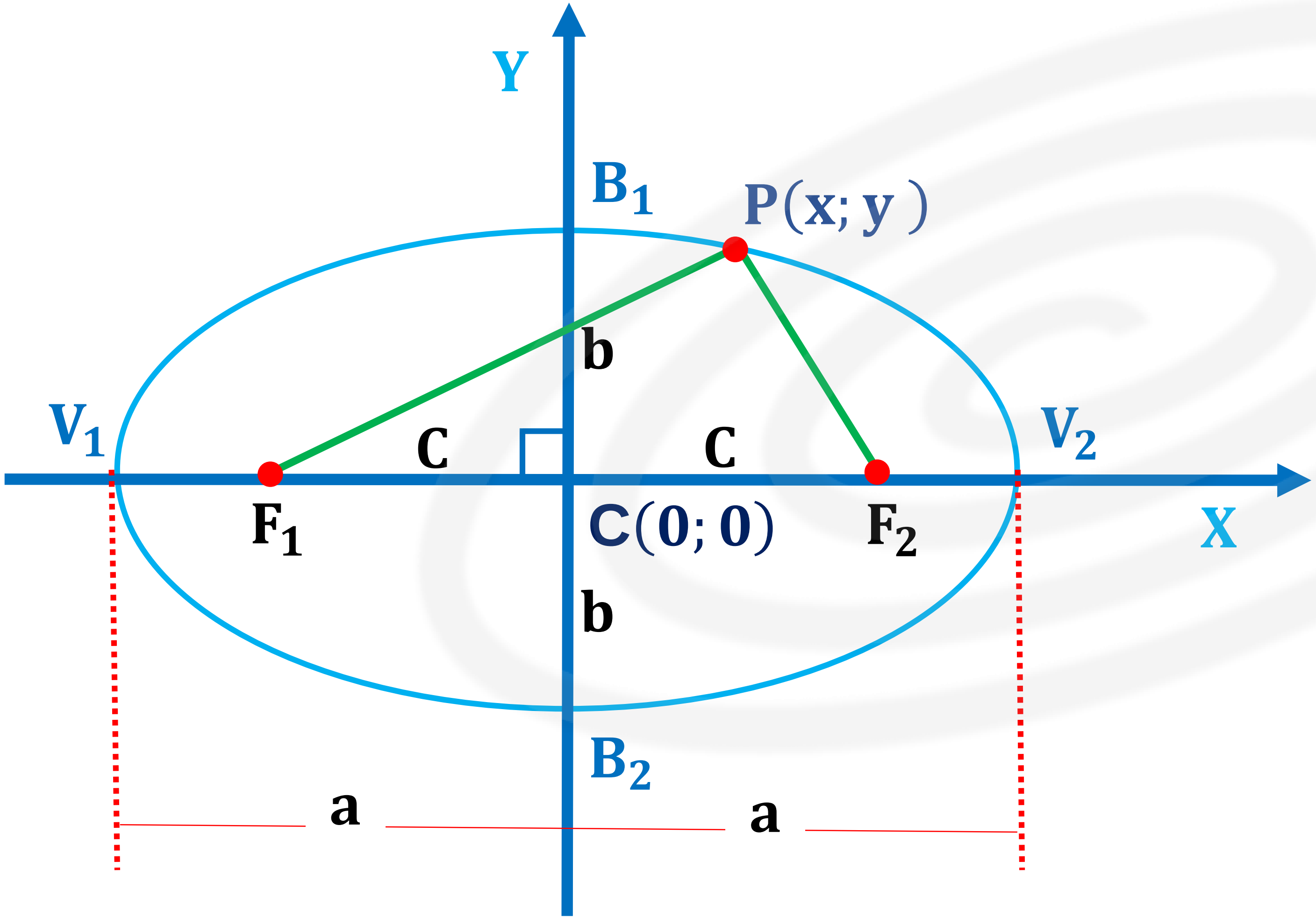
6. Lado recto$(MM') = \frac{2b^2}{a}$

Ecuación de la elipse con eje paralelo al eje X



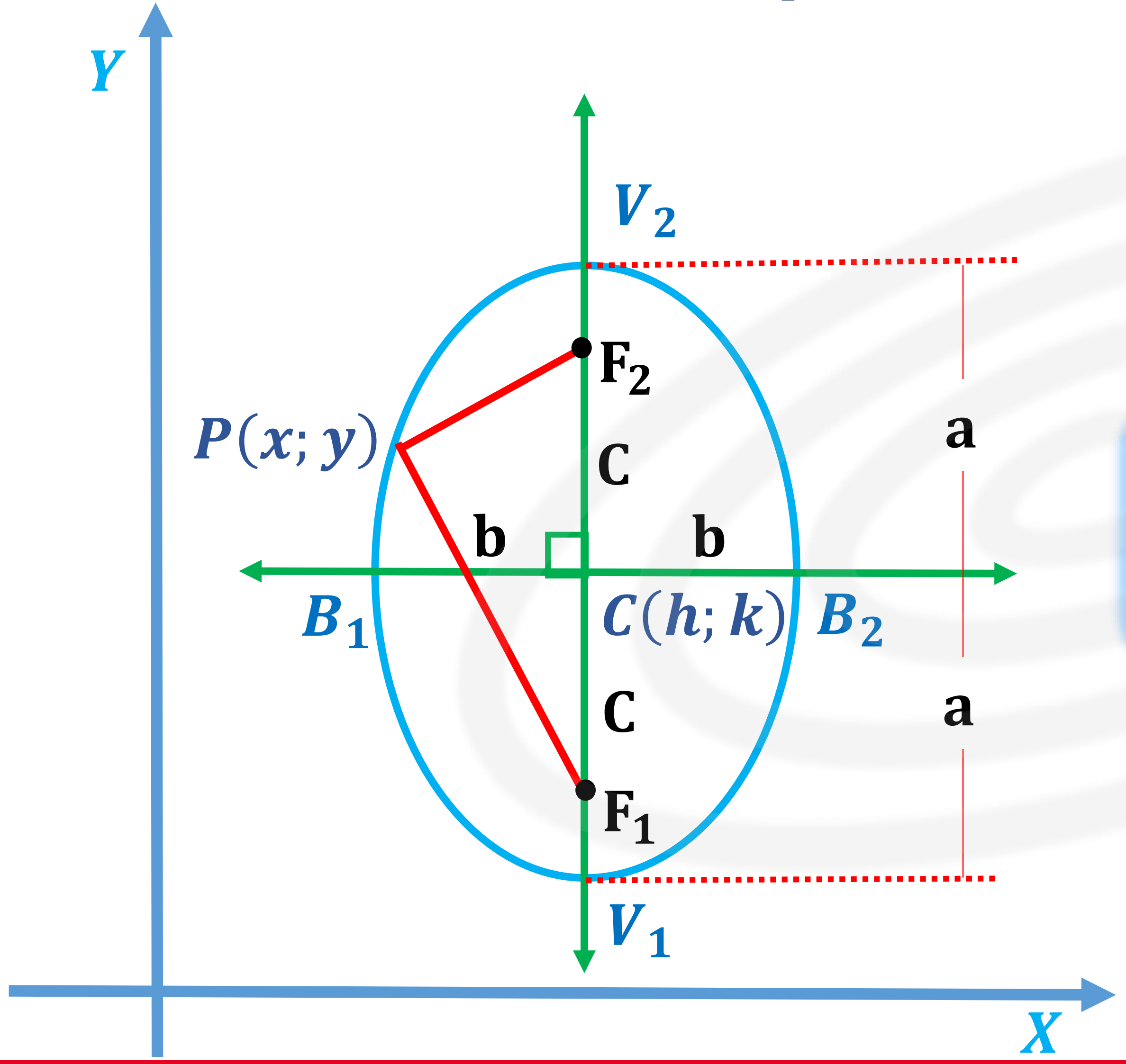
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Ecuación de la elipse con eje focal en el eje X



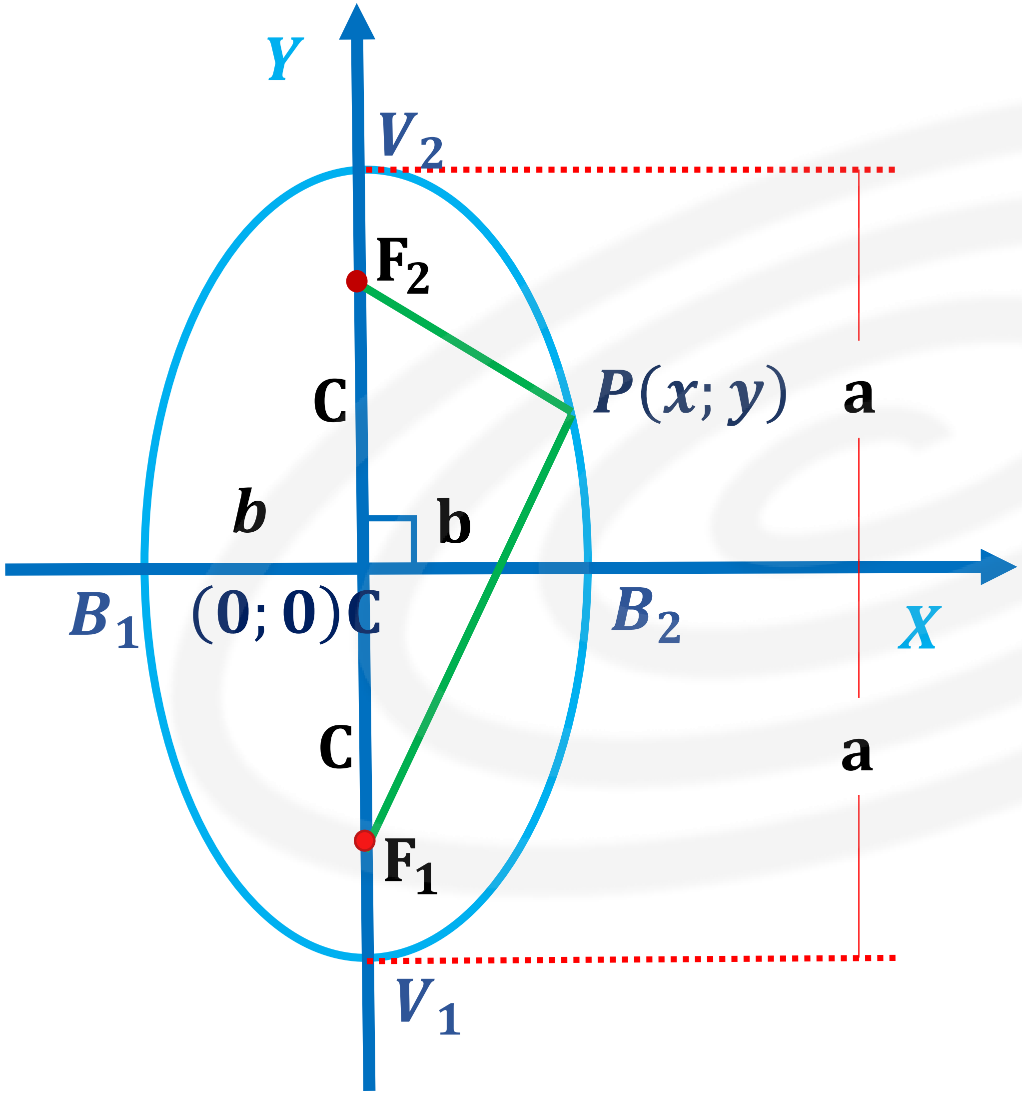
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la elipse con eje focal paralelo el eje Y



$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

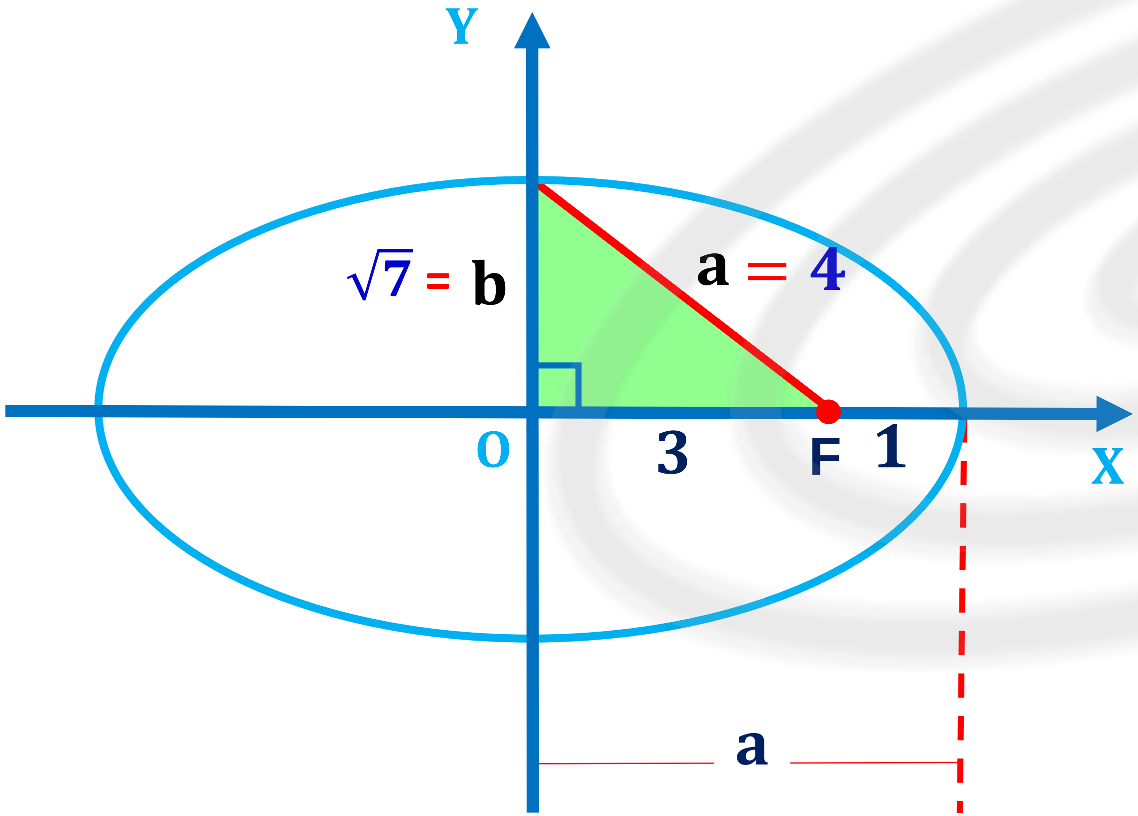
Ecuación de la elipse con eje focal en el eje Y



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

1. Halle la ecuación de la elipse mostrada, si F es un foco y O es su centro.

Resolución



- Piden: La ecuación de la elipse.

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \qquad a = 4$$

- Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$3^2 + b^2 = 4^2$$

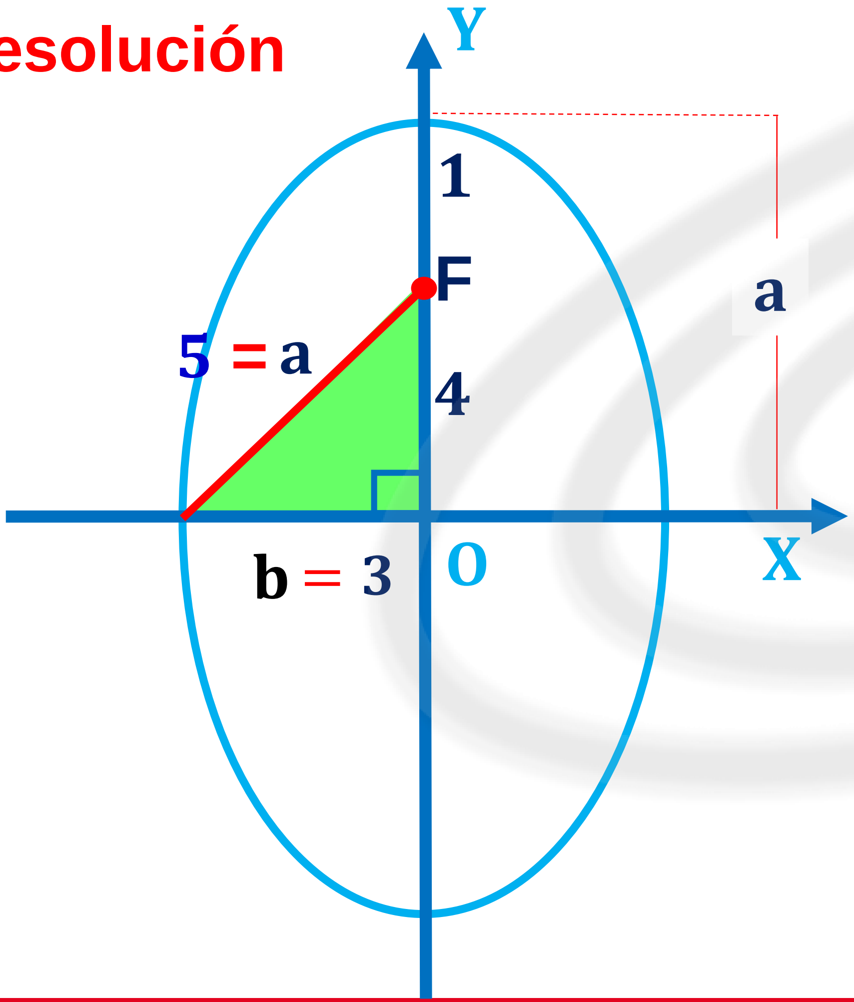
$$\boxed{b = \sqrt{7}}$$

- Reemplazando:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{\sqrt{7}^2} = 1 \qquad \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1}$$

2. Halle la ecuación de la elipse mostrada, si F es un foco y O es su centro.

Resolución



- **Piden: La ecuación de la elipse.**

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$$

$$a = 5$$

- **Aplicando el teorema de Pitágoras:**

$$4^2+b^2=5^2$$

$$\boxed{b=3}$$

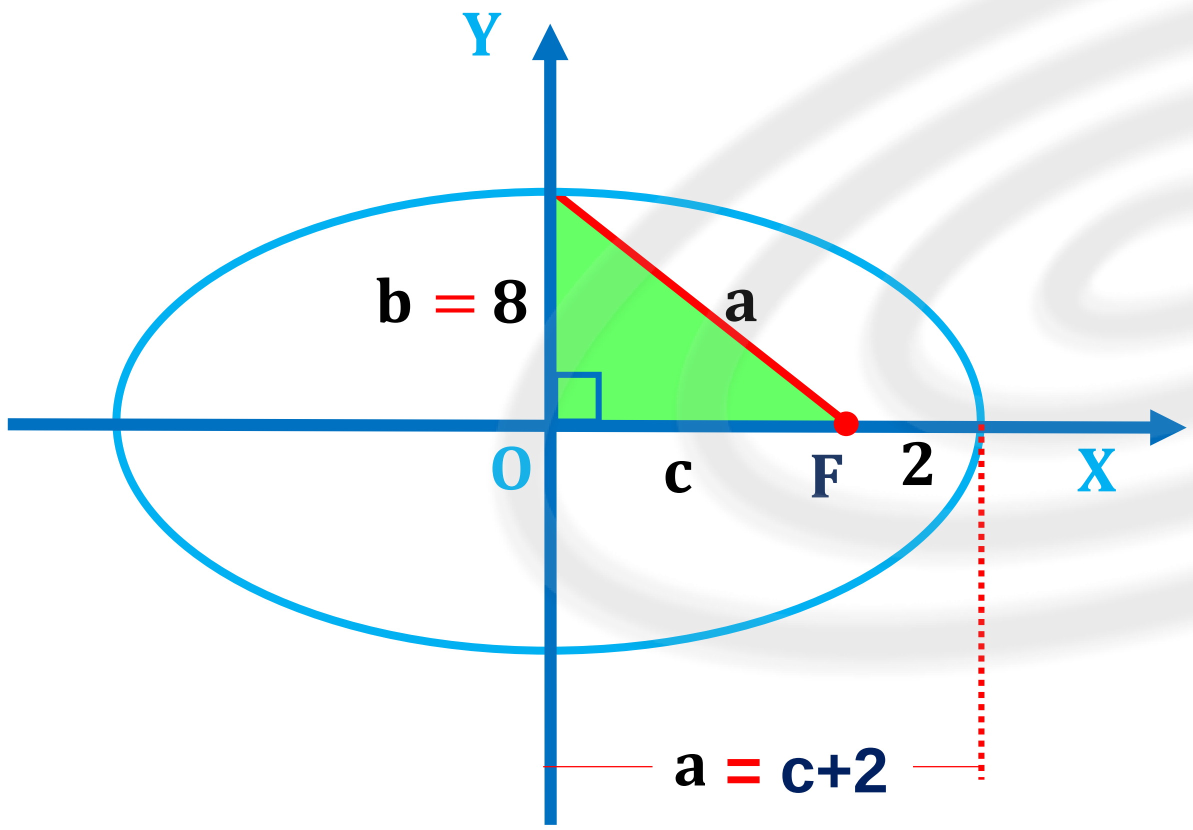
- **Remplazando:**

$$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$$

3. Determine la excentricidad de la elipse mostrada si F es un foco y O es su centro.

Resolución



- Piden: La excentricidad.

$$e = \frac{c}{a}$$

- Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$8^2 + c^2 = a^2$$
$$8^2 + c^2 = (c + 2)^2$$

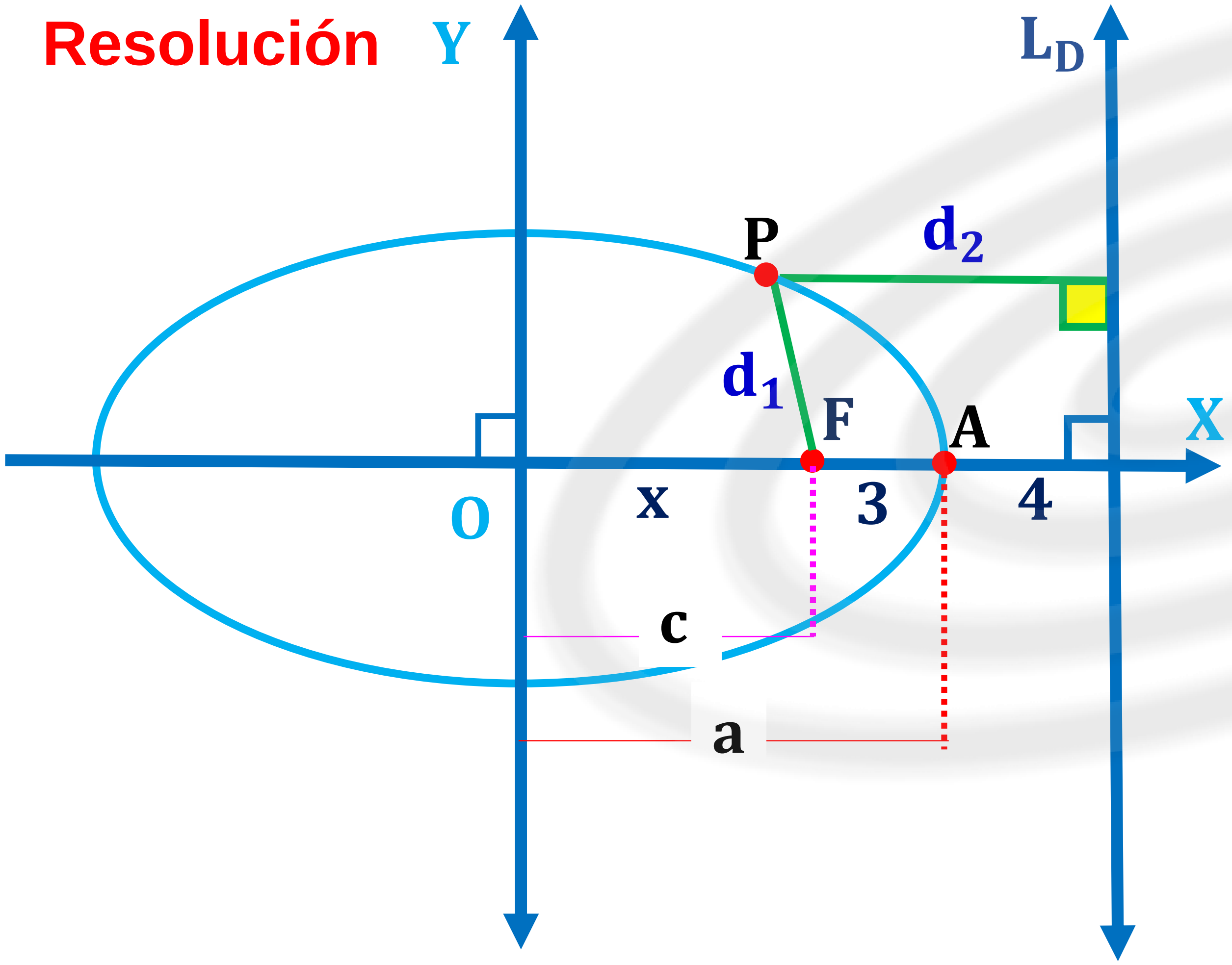
$$\boxed{c = 15} \qquad \boxed{a = 17}$$

- Reemplazando:

$$e = \frac{15}{17}$$

4. Halle el valor de x, si en la elipse mostrada F es un foco y L_D es una directriz.

Resolución



- **Piden: x.**
- **Por excentricidad:**

$$\boxed{e = \frac{c}{a}} \qquad \boxed{e = \frac{d_1}{d_2}}$$

- **Reemplazando.**

$$e = \frac{x}{x+3} \qquad \Big| \qquad e = \frac{3}{4}$$

- **Igualando.**

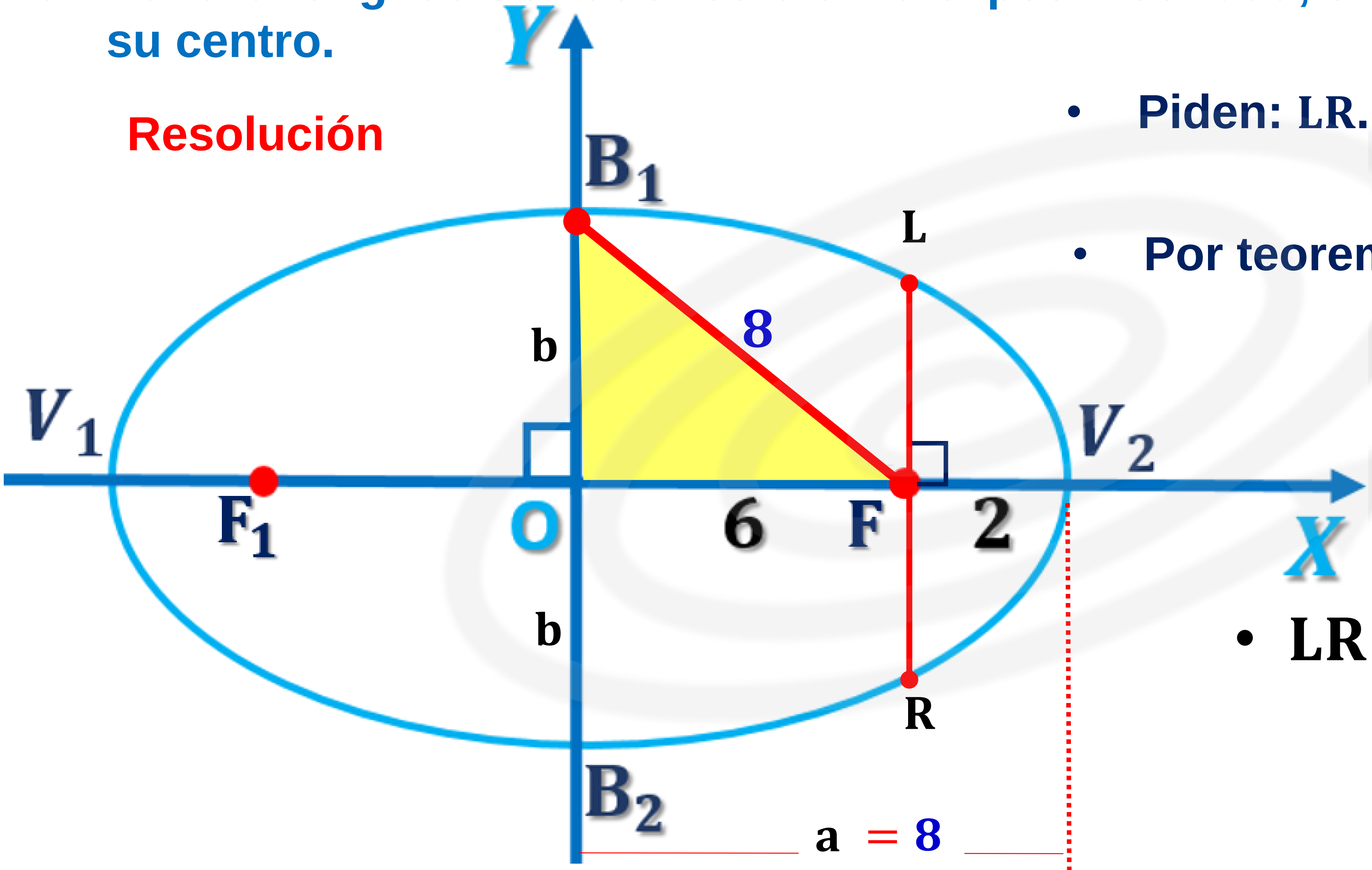
$$\frac{x}{x+3} = \frac{3}{4}$$

$$4x = 3x + 9$$

$$\boxed{x = 9}$$

5. Halle la longitud del lado recto en la elipse mostrada, si F es un foco y O es su centro.

Resolución



- Piden: LR.

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

- Por teorema de Pitágoras.

$$b^2 + 6^2 = 8^2$$

$$b^2 + 36 = 64$$

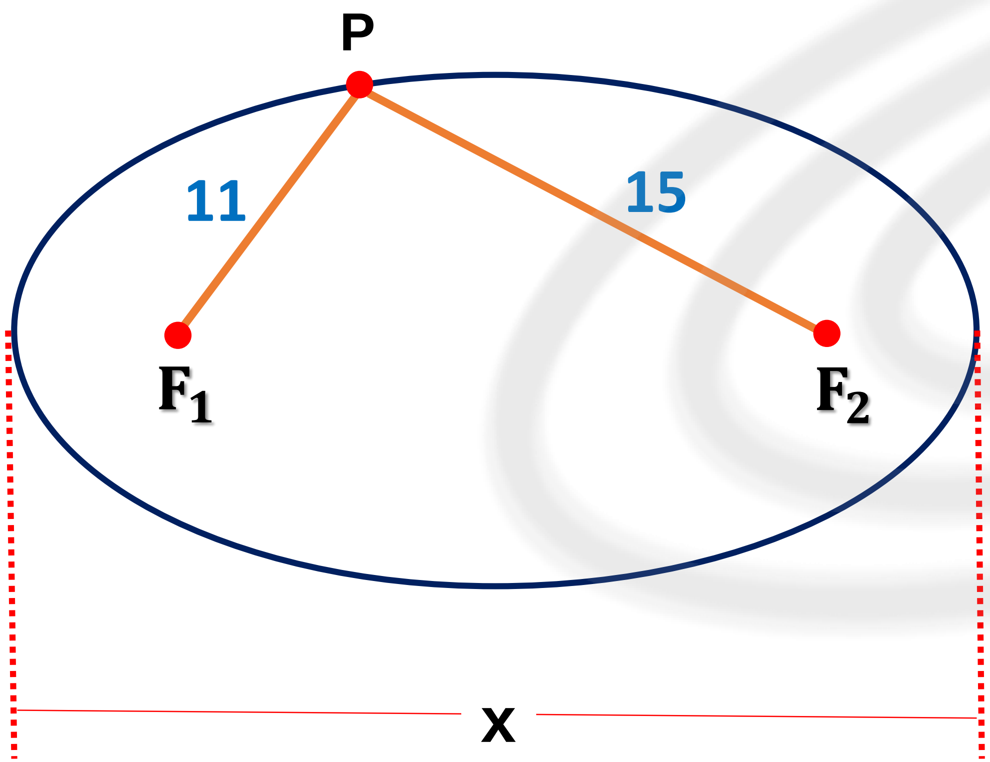
$$b^2 = 28$$

- $LR = \dfrac{2(28)}{8}$

$$\boxed{LR = 7}$$

6. En la figura mostrada, la elipse representa el contorno de un jardín, en el punto P hay un caño y en los focos F_1 y F_2 hay dos arbustos. Si $PF_1 = 11$ m; $PF_2 = 15$ m y $F_1F_2 = 24$ m; halle el largo de dicho jardín (x).

Resolución



Piden: x

- Según el gráfico, el largo de la elipse es el eje mayor.
- Luego: $x = 2a$ …(I)
- Por definición, $PF_1 + PF_2 = 2a$

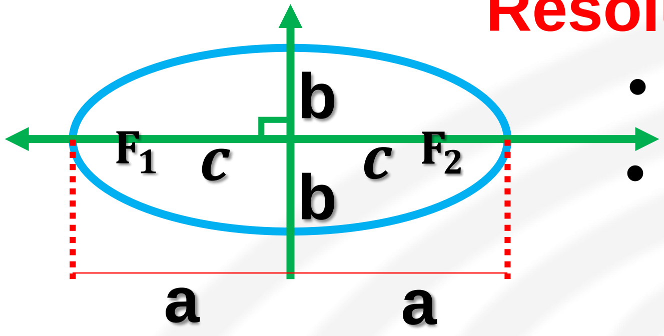
$$11 + 15 = 2a$$

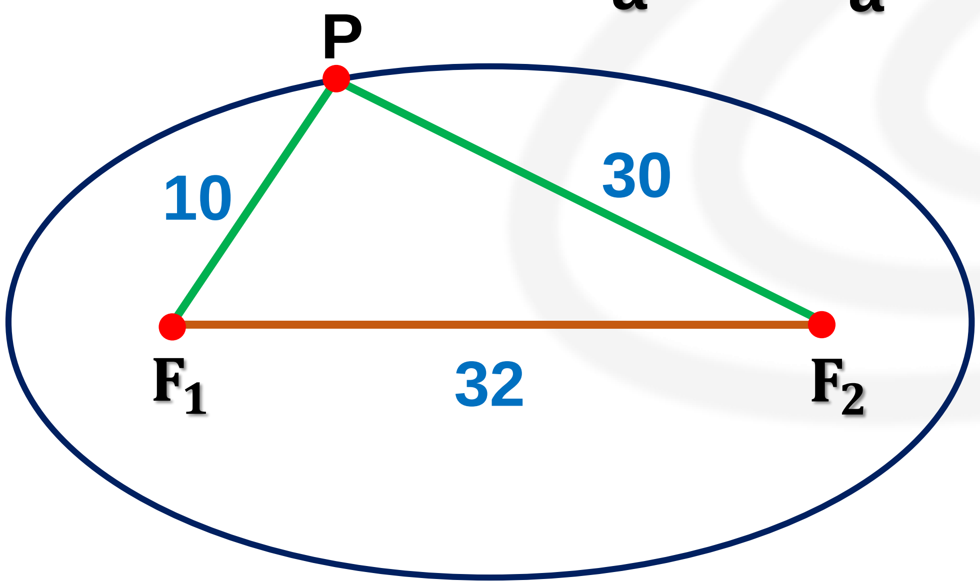
$$26 = 2a \quad \text{…(II)}$$

- Reemplazando (II) en (I)

$$\therefore\ x = 26\text{m}$$

7. En la figura se muestra el diseño de un individual para la mesa de un comedor, en el cual su borde es de forma elíptico, donde F_1 y F_2 son sus focos. Si $PF_1 = 10$ cm, $PF_2 = 30$ cm y $F_1F_2 = 32$ cm, halle la longitud del eje menor.





Resolución

- Piden: $2b$
- Por definición $\quad PF_1 + PF_2 = 2a$

$$10 + 30 = 2a$$
$$a = 20$$

- Del gráfico: $2c = 32$

$$c = 16$$

- Por teorema. $\quad a^2 = b^2 + c^2$
- Reemplazando.

$$(20)^2 = b^2 + (16)^2$$
$$144 = b^2$$

$$\boxed{2b = 24}$$