

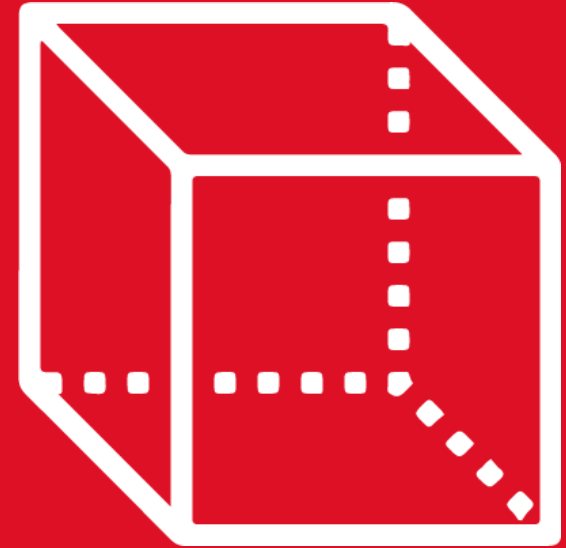


GEOMETRÍA

Capítulo 24

5st
SECONDARY

ECUACIÓN DE LA ELIPSE

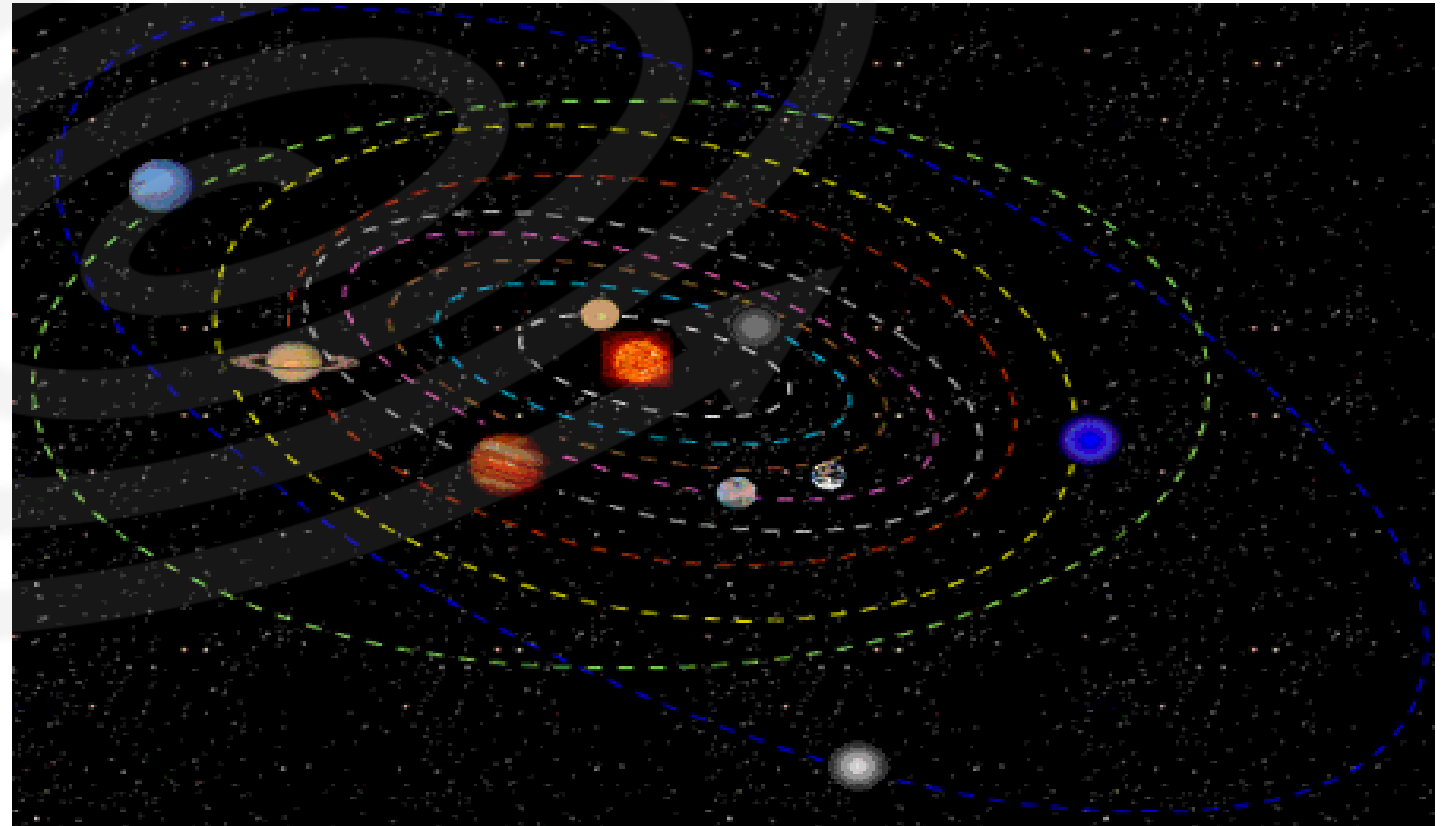
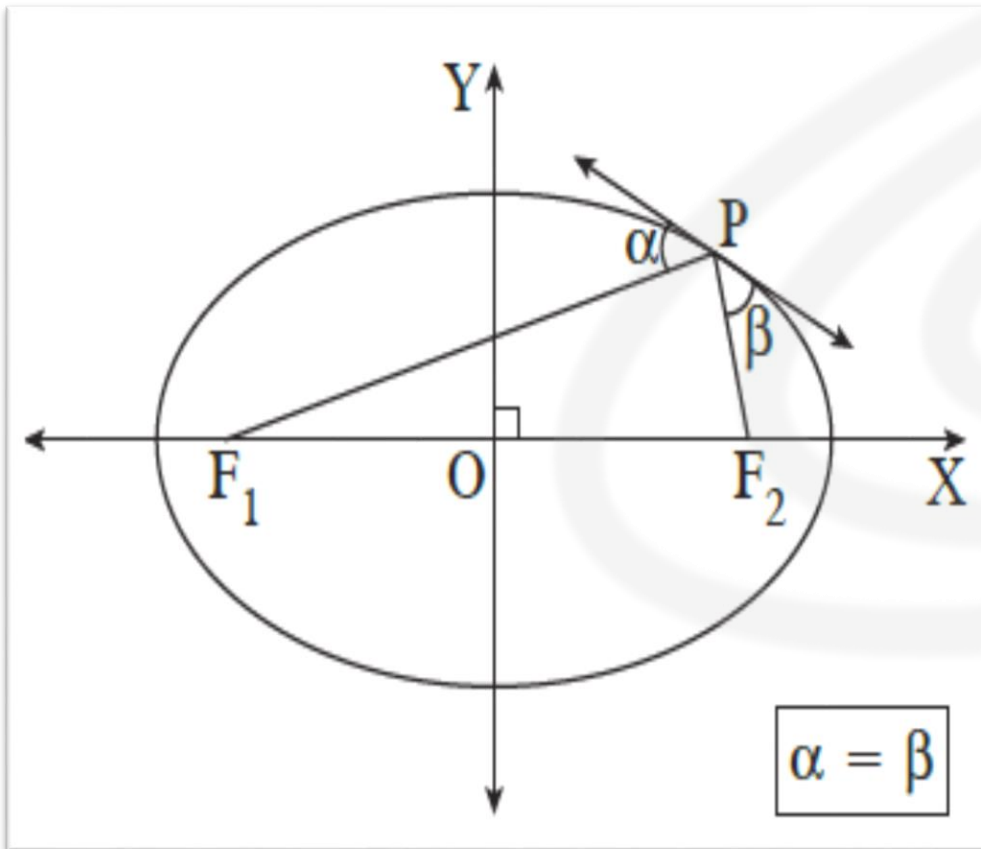


 **SACO OLIVEROS**



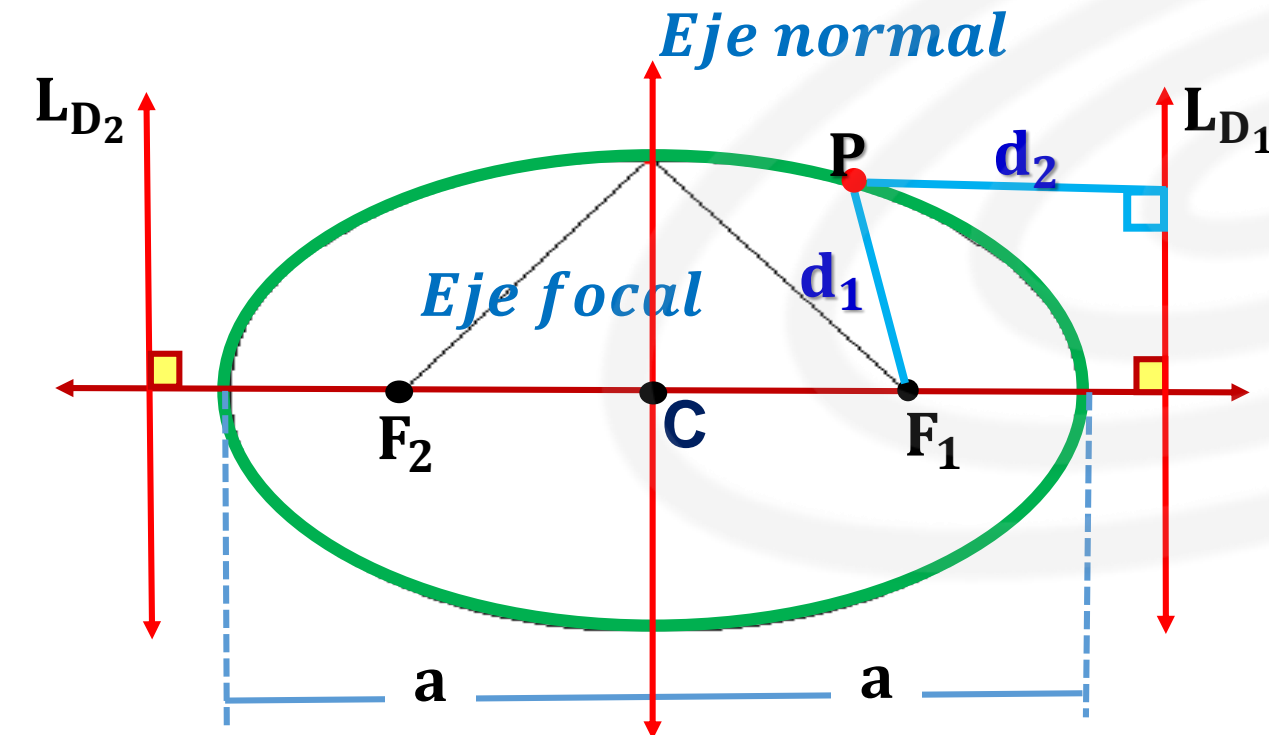
Aplicaciones de una elipse

La elipse tiene una propiedad muy interesante: Si unimos cualquier punto P , de la elipse con sus focos, el ángulo que forman los radios focales con la tangente en ese punto son iguales. Esta propiedad se utiliza en construcción de espejos (de luz y sonido), pues por la emisión de luz o sonido, desde uno de los focos se refleja en el otro foco.





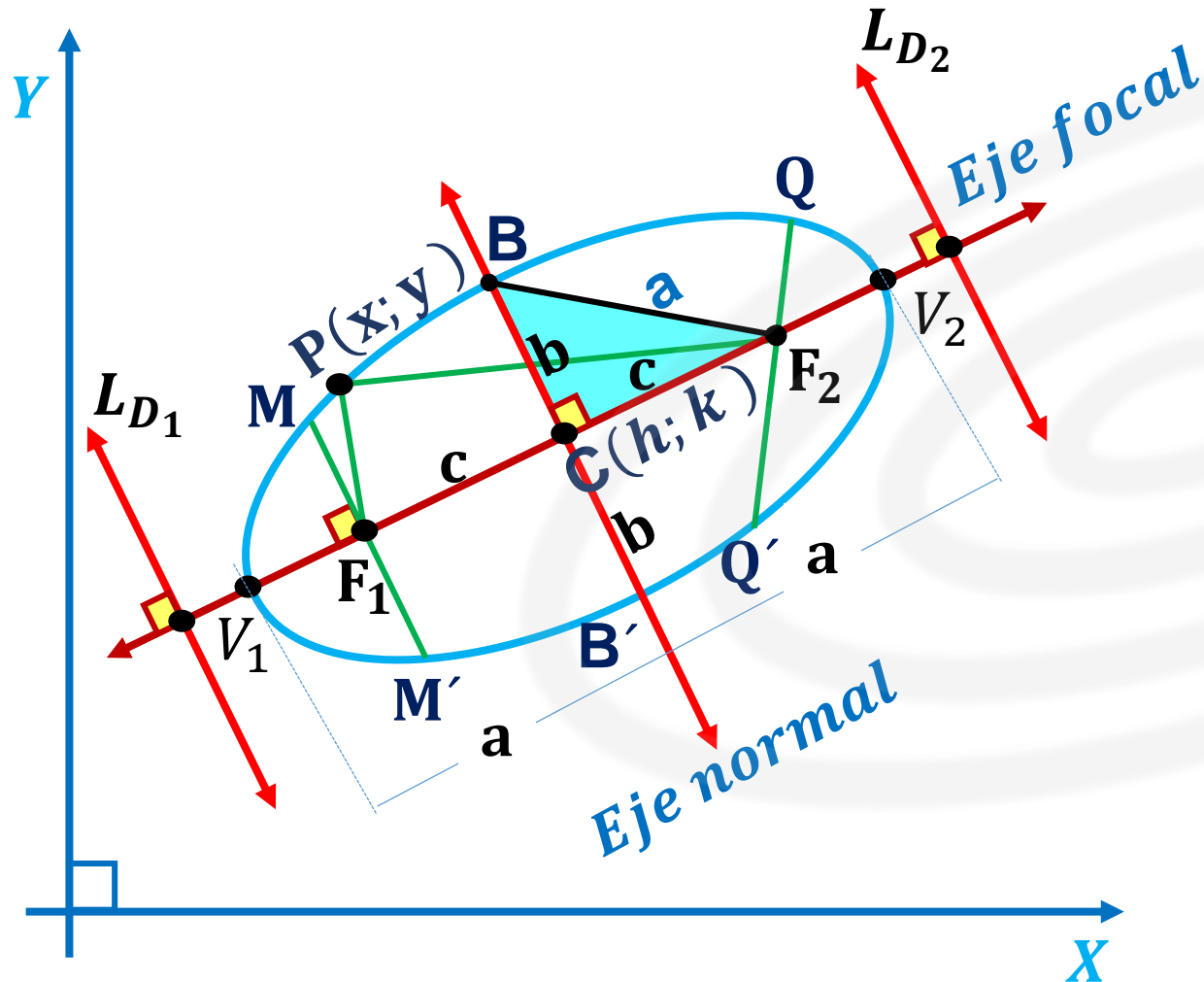
Dados dos puntos fijos F_1 y F_2 distintos, denominados focos, se define la elipse como el lugar geométrico del conjunto de puntos $P(x; y)$ tales que la suma de distancias de P a los focos F_1 y F_2 es igual a una constante convencional $2a$.



Por definición de cónica se tiene

$$\frac{d(P; F_1)}{d(P; L_{D_1})} = e$$

Donde e es la excentricidad de la elipse y se demuestra que siempre es menor que uno ($e < 1$).

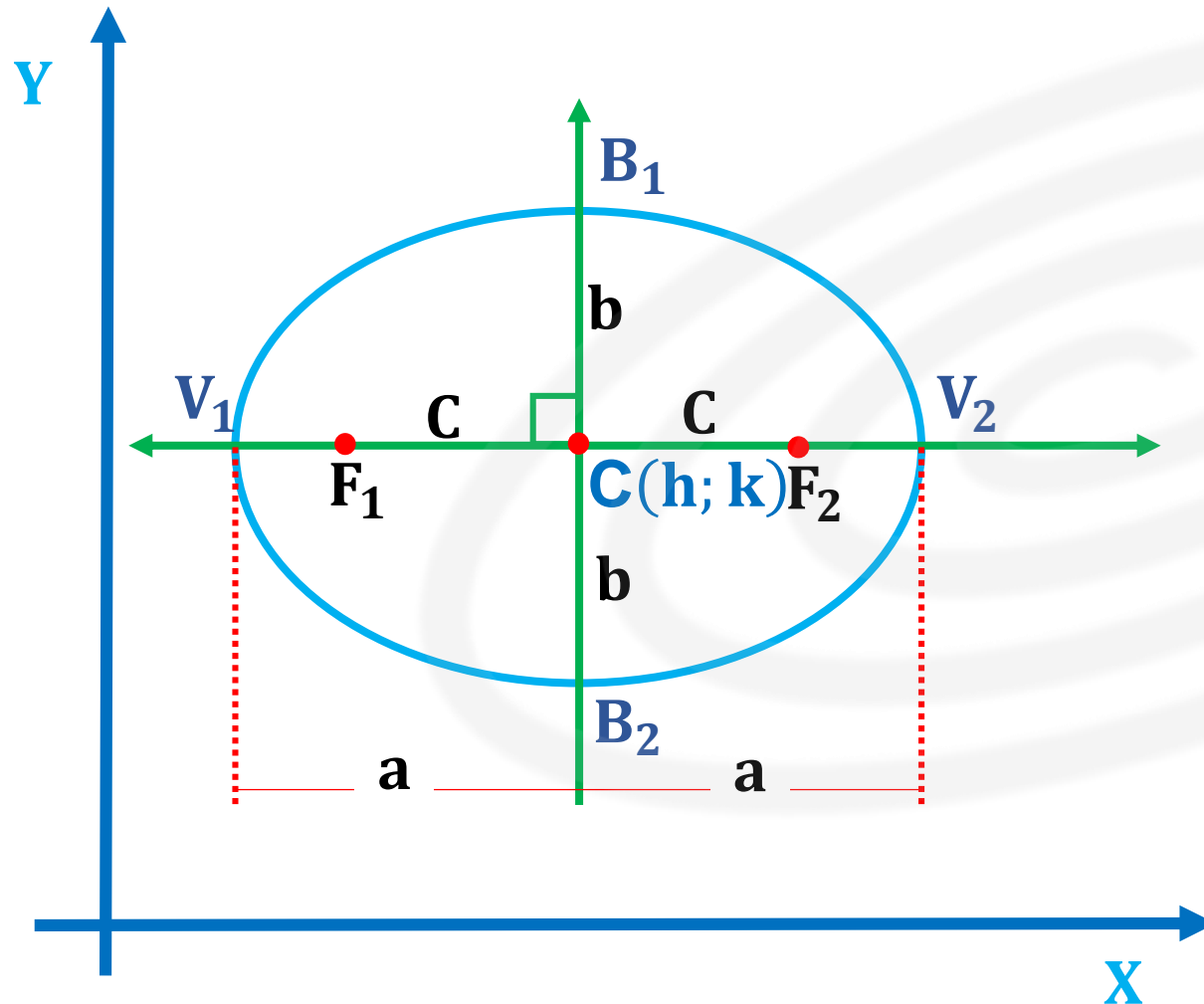


- **FOCOS** : F_1 y F_2 ($F_1F_2 = 2c$)
- **CENTRO** : $C(h; k)$
- **Vértices de la elipse** : V_1 y V_2
- **Eje mayor** : $\overline{V_1V_2}$ ($V_1V_2 = 2a$)
- **Eje menor** : $\overline{B_1B_2}$ ($B_1B_2 = 2b$)
- **CUERDA FOCAL** : $\overline{QQ'}$
- **LADO RECTO** : $\overline{MM'}$
- **DIRECTRICES** : $\overleftrightarrow{L_{D_1}}$ y $\overleftrightarrow{L_{D_2}}$

$$c^2 + b^2 = a^2$$

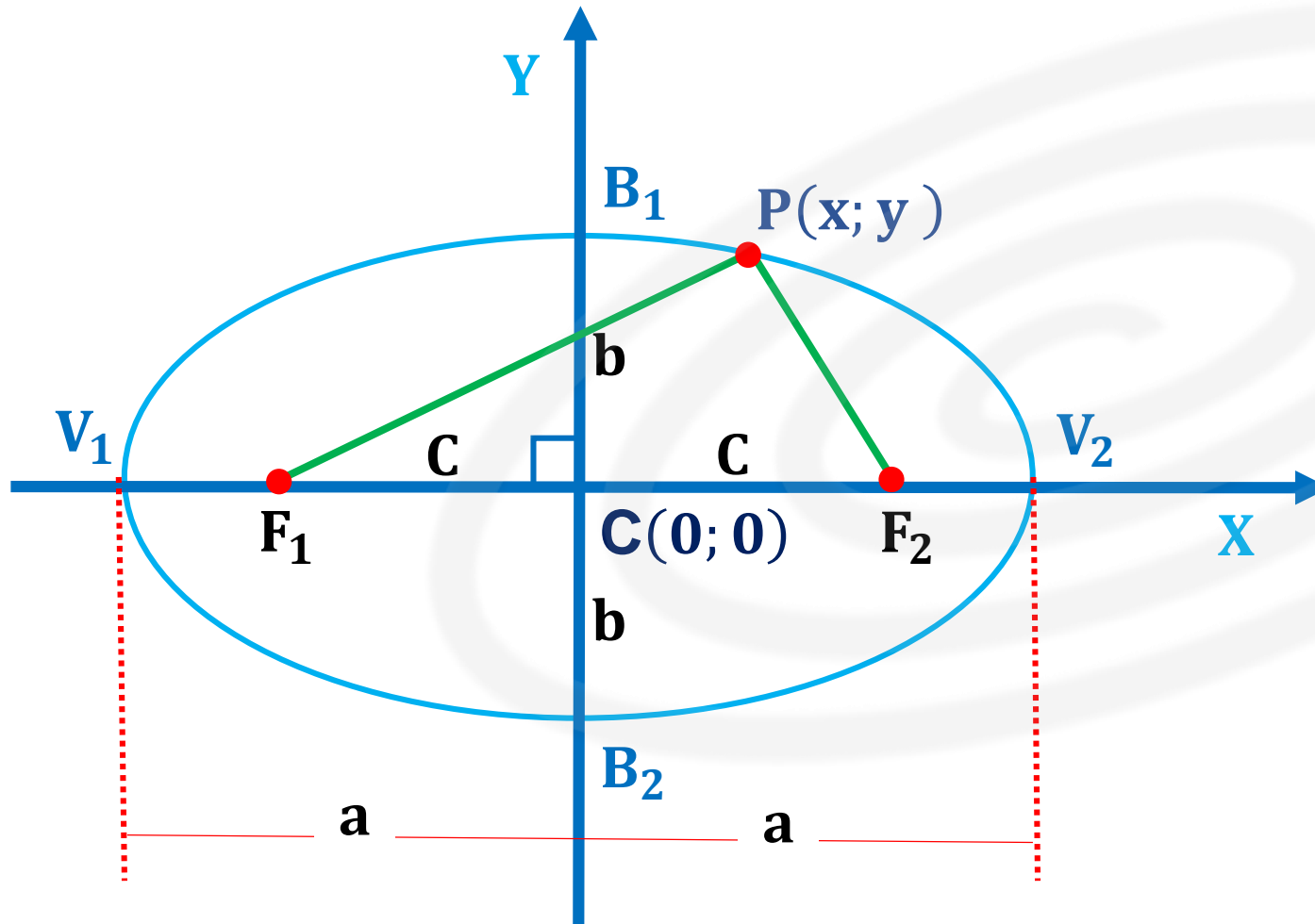


Ecuación de la elipse con eje paralelo al eje X



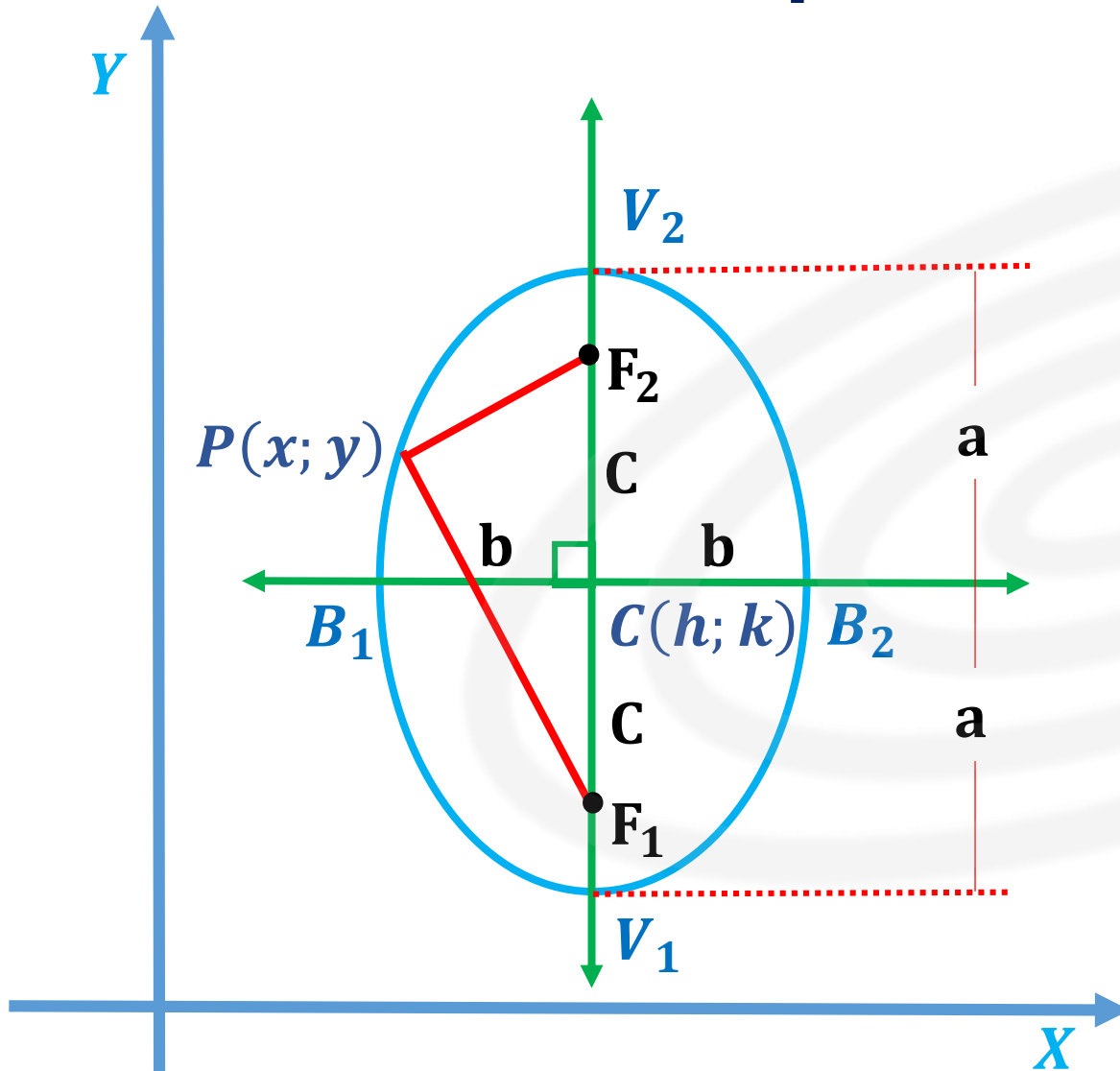
$$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la elipse con eje focal en el eje X



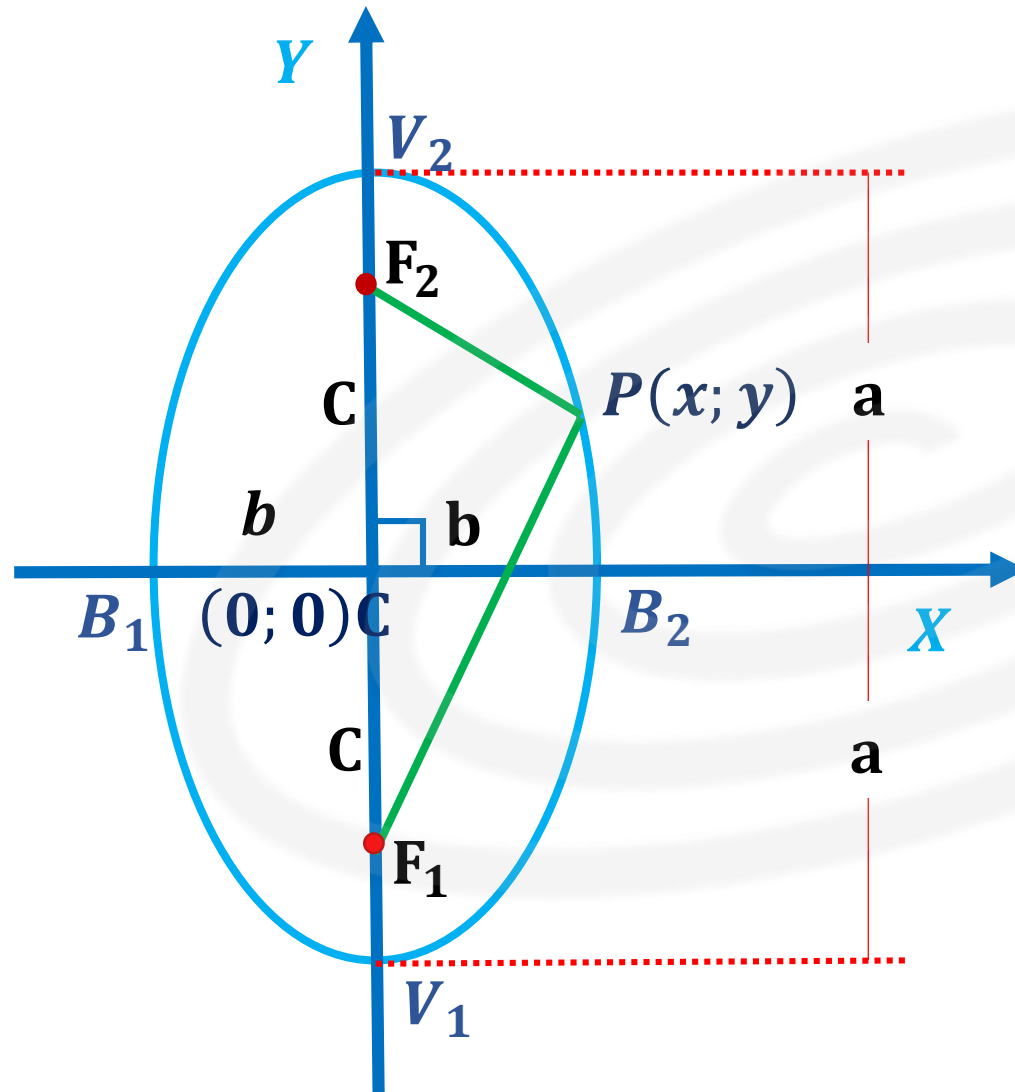
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuación de la elipse con eje focal paralelo el eje Y



$$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$$

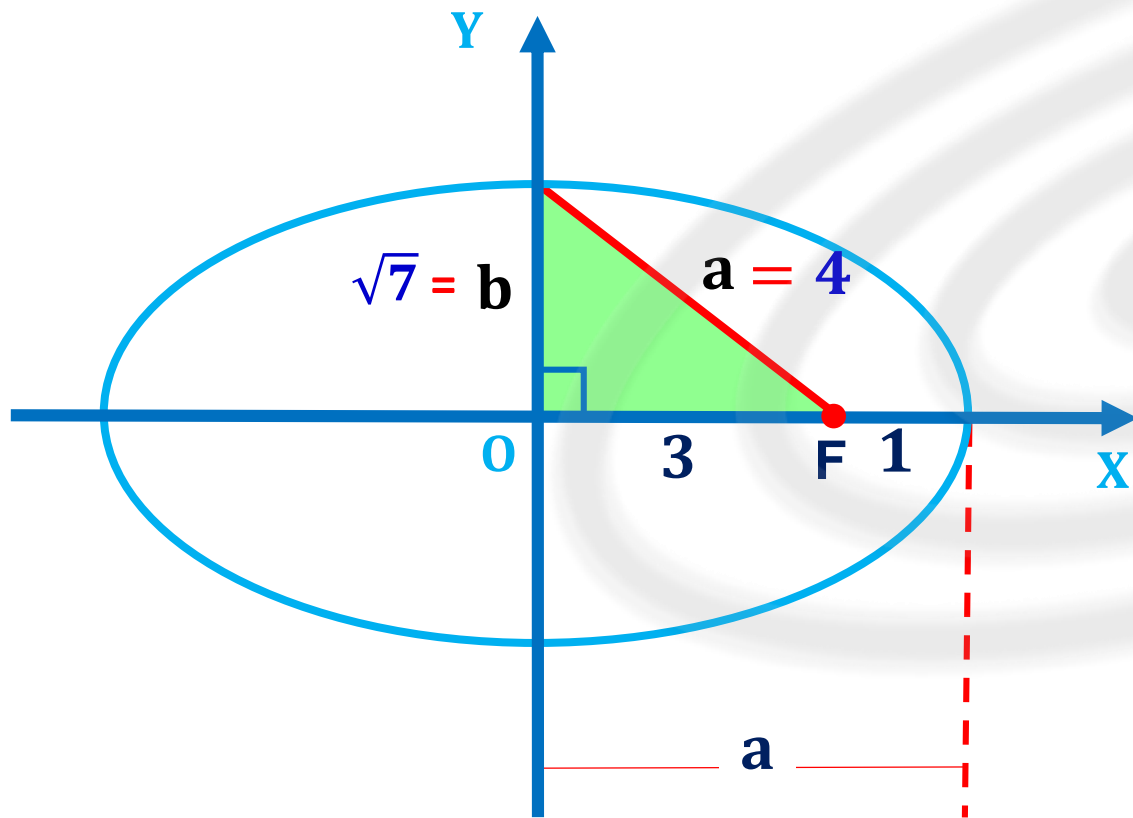
Ecuación de la elipse con eje focal en el eje Y



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

1. Calcule la ecuación de la elipse mostrada, si F es un foco y O es su centro.

Resolución



- Piden: La ecuación de la elipse.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a = 4$$

- Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$3^2 + b^2 = 4^2$$

$$b = \sqrt{7}$$

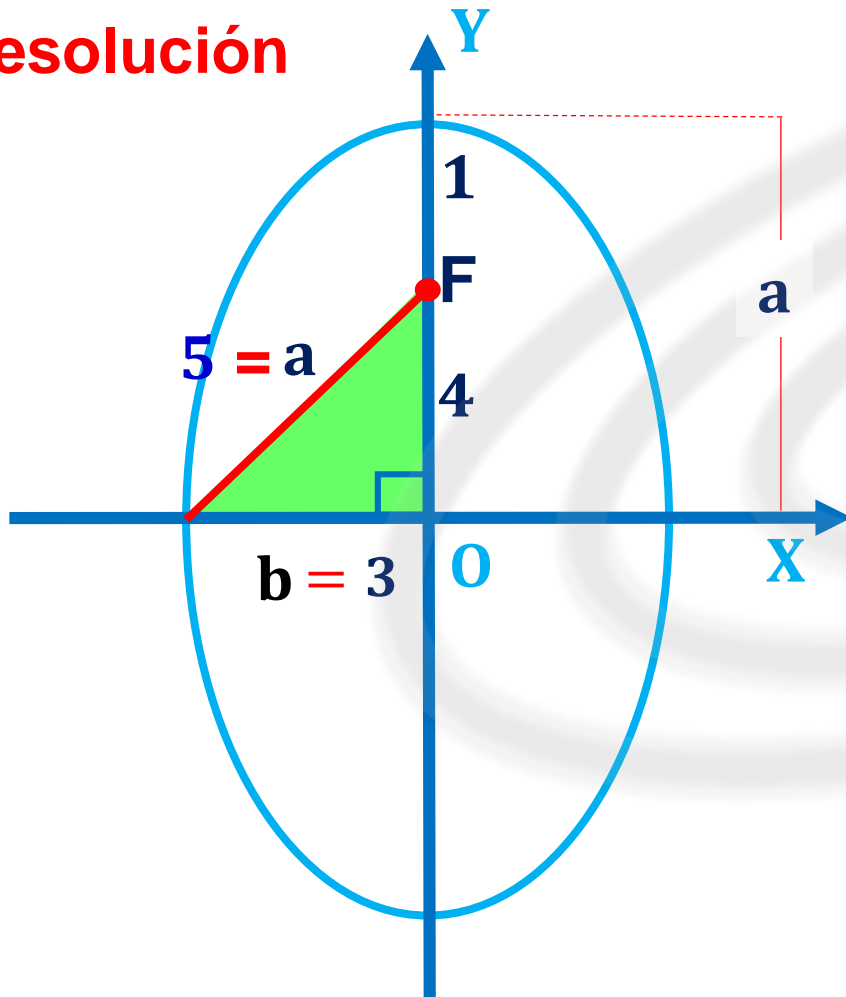
- Reemplazando:

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{\sqrt{7}^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

2. Calcule la ecuación de la elipse mostrada, si F es un foco y O es su centro.

Resolución



- Piden: La ecuación de la elipse.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$a = 5$$

- Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$4^2 + b^2 = 5^2$$

$$b = 3$$

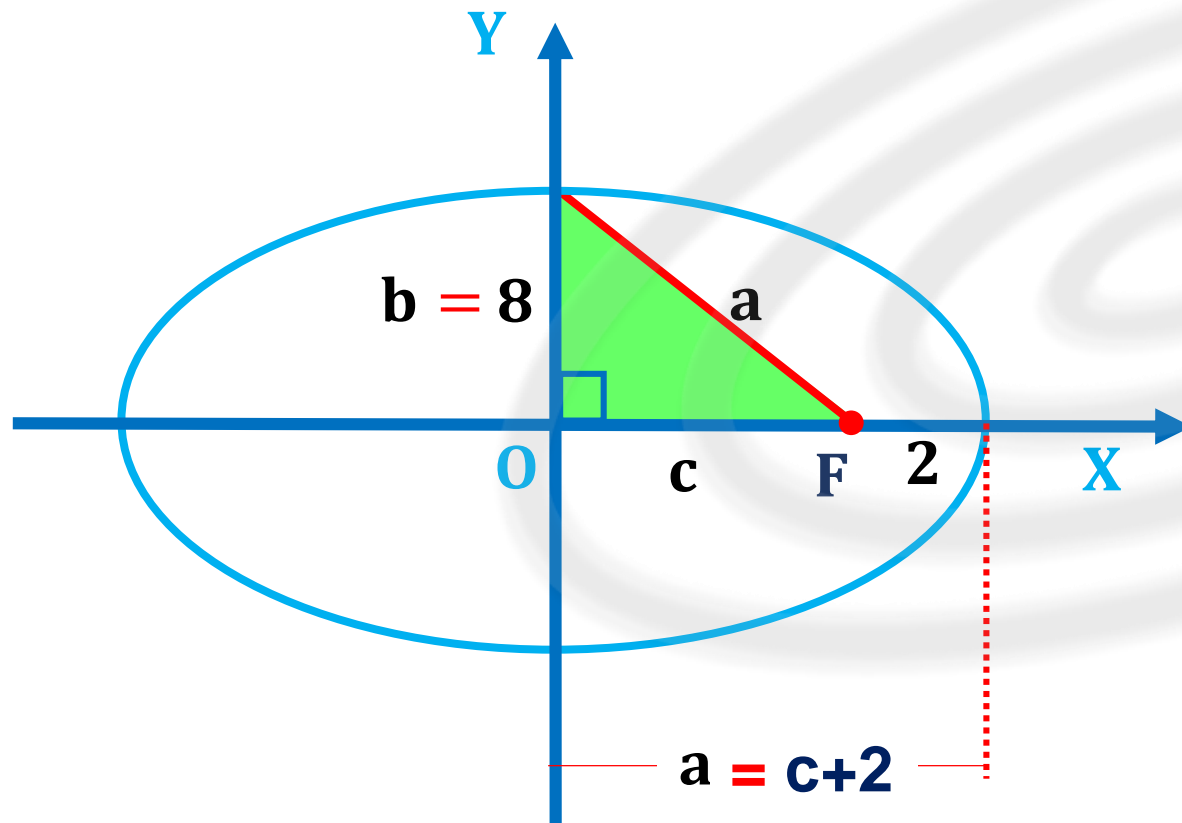
- Remplazando:

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

3. Determine la excentricidad de la elipse mostrada si F es un foco y O es su centro.

Resolución



- Piden: La excentricidad.

$$e = \frac{c}{a}$$

- Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$8^2 + c^2 = a^2$$

$$8^2 + c^2 = (c + 2)^2$$

$$c = 15$$

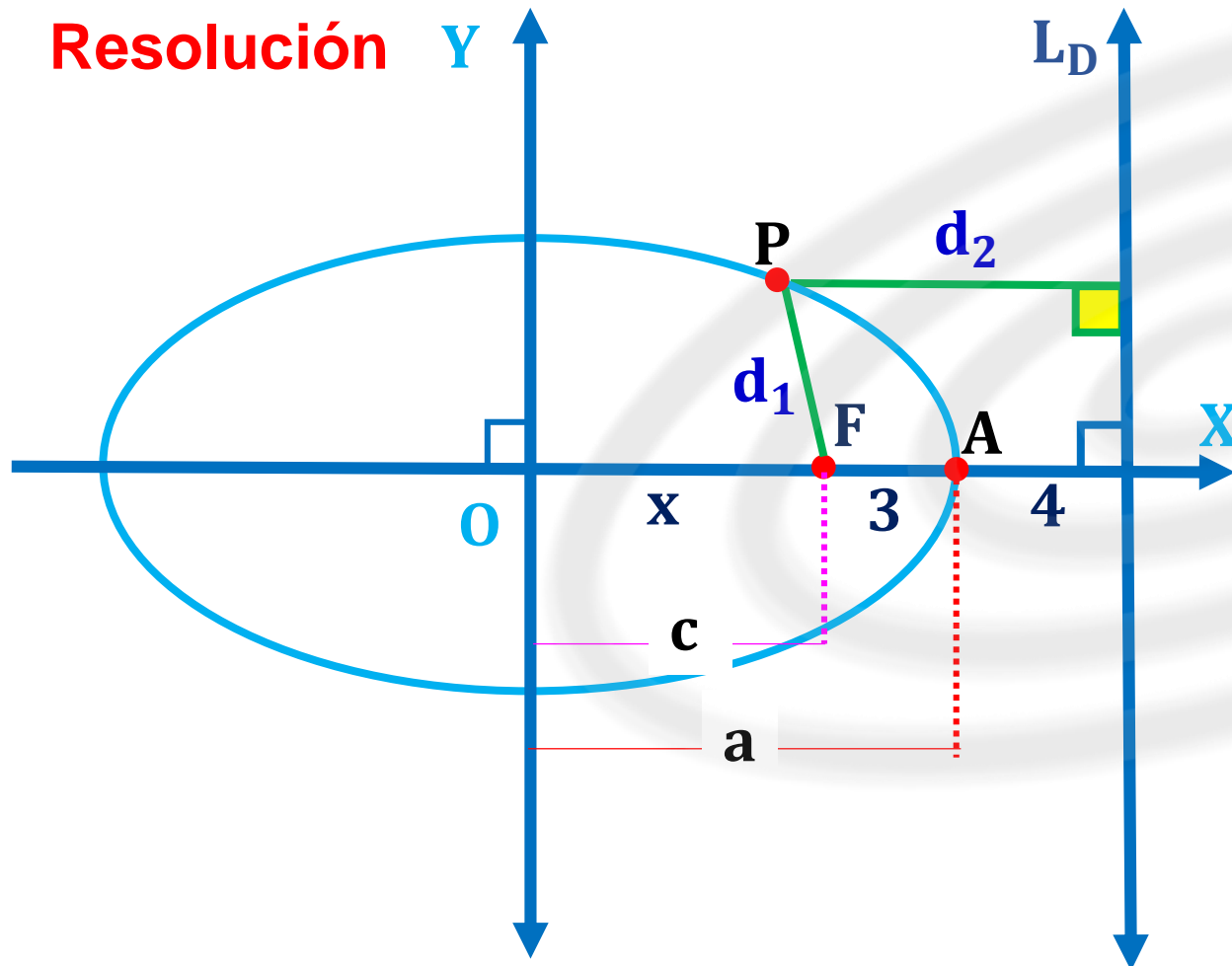
$$a = 17$$

- Reemplazando:

$$e = \frac{15}{17}$$

4. Calcule el valor de x , si en la elipse mostrada F es un foco y L_D es una directriz.

Resolución



- Piden: x .
- Por excentricidad:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{d_1}{d_2}$$

- Reemplazando.

$$e = \frac{x}{x+3}$$

$$e = \frac{3}{4}$$

- Igualando.

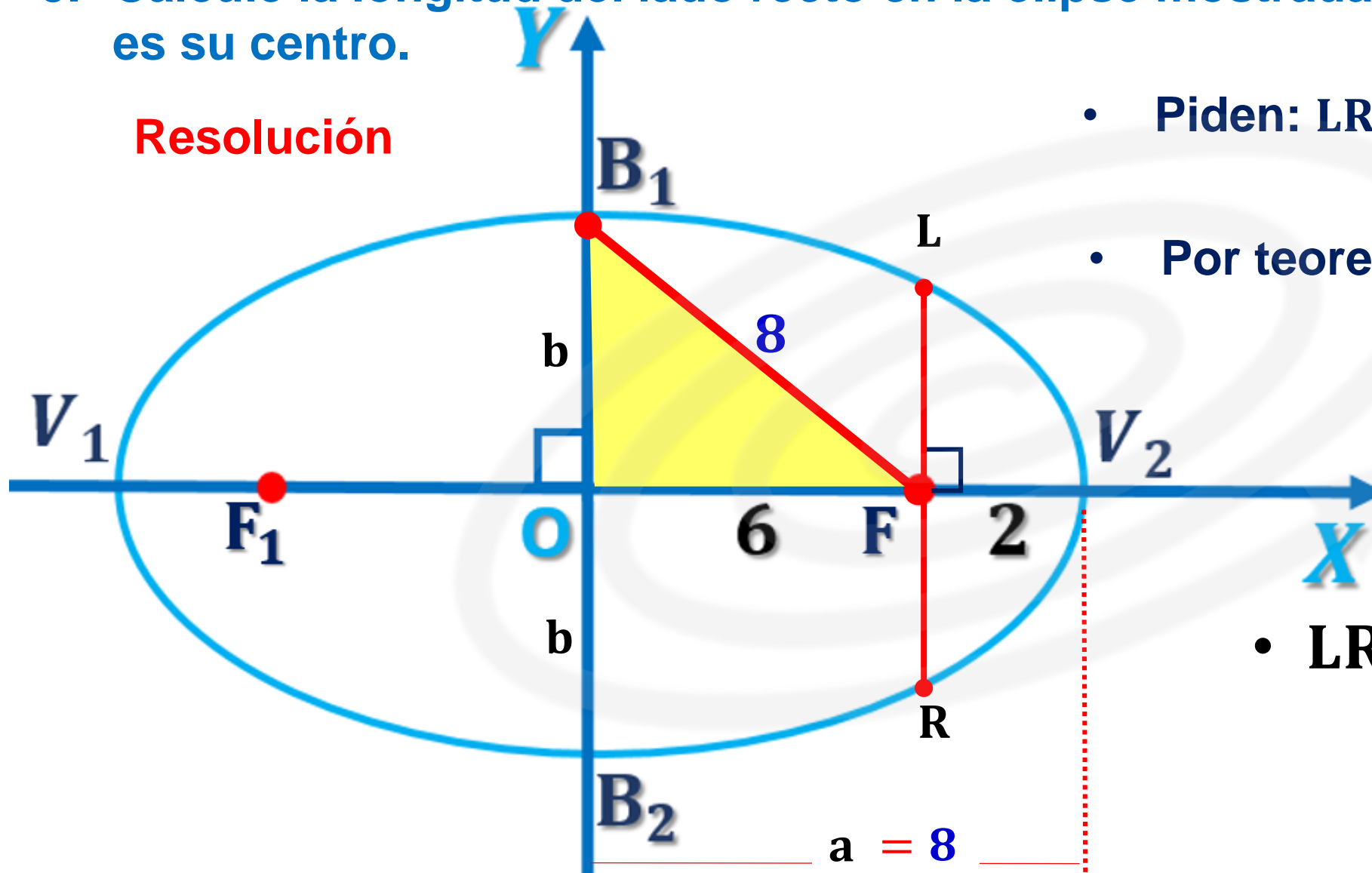
$$\frac{x}{x+3} = \frac{3}{4}$$

$$4x = 3x + 9$$

$$x = 9$$

5. Calcule la longitud del lado recto en la elipse mostrada, si F es un foco y O es su centro.

Resolución



• Piden: LR.

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

• Por teorema de Pitágoras.

$$b^2 + 6^2 = 8^2$$

$$b^2 + 36 = 64$$

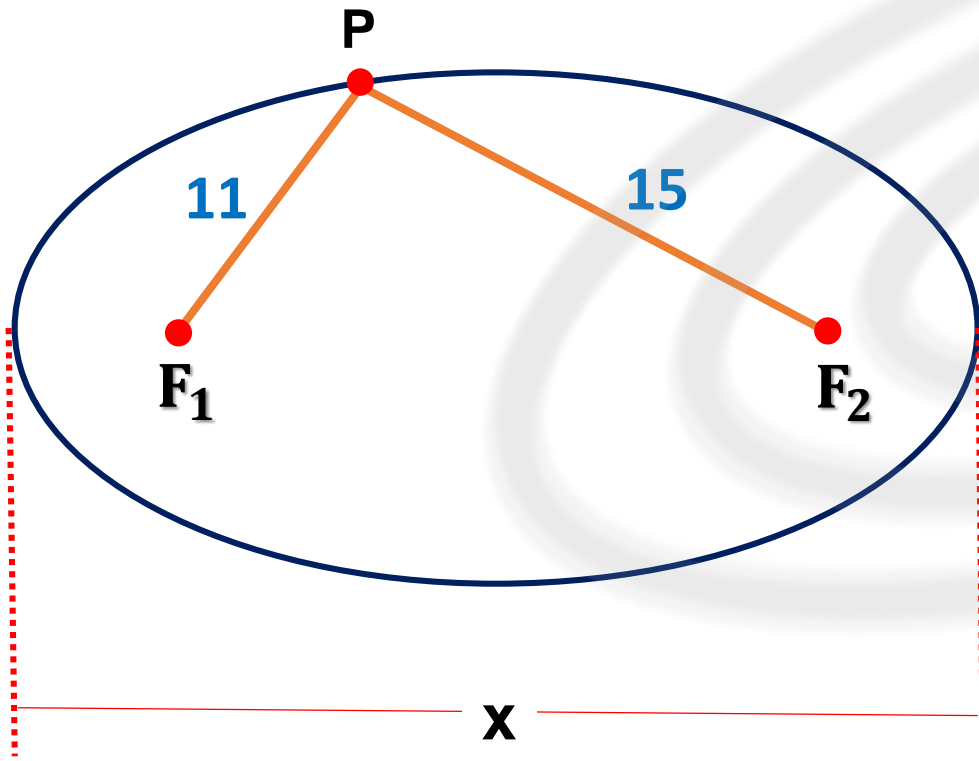
$$b^2 = 28$$

• $LR = \frac{2(28)}{8}$

$$LR = 7$$

6. En la figura mostrada, la elipse representa el contorno de un jardín, en el punto P hay un caño y en los focos F_1 y F_2 hay dos arbustos. Si $PF_1 = 11$ m; $PF_2 = 15$ m y $F_1F_2 = 24$ m; halle el largo de dicho jardín (x).

Resolución



Piden: x

- Según el gráfico, el largo de la elipse es el eje mayor.
- Luego: $x = 2a$... (I)
- Por definición, $PF_1 + PF_2 = 2a$
 $11 + 15 = 2a$
 $26 = 2a$... (II)
- Reemplazando (II) en (I)

$$x = 26 \text{ m}$$

7. En la figura se muestra el diseño de un individual para la mesa de un comedor, en el cual su borde es de forma elíptico, donde F_1 y F_2 son sus focos. Si $PF_1 = 10$ cm, $PF_2 = 30$ cm y $F_1F_2 = 32$ cm, halle la longitud del eje menor.

Resolución

• Piden: $2b$

• Por definición

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$10 + 30 = 2a$$

$$a = 20$$

• Del gráfico: $2c = 32$

$$c = 16$$

• Por teorema. $a^2 = b^2 + c^2$

• Reemplazando.

$$(20)^2 = b^2 + (16)^2$$

$$144 = b^2$$

$$2b = 24$$

