

ARITHMETIC

Chapter 17

4th
SECONDARY

2023



NÚMEROS RACIONALES I

 **SACO OLIVEROS**

MOTIVATING STRATEGY

Fragmento de la obra **"El Paraíso en la otra esquina"** del escritor peruano, Premio Nobel de Literatura, **Mario Vargas Llosa** (Editorial Alfaguara, 2003):

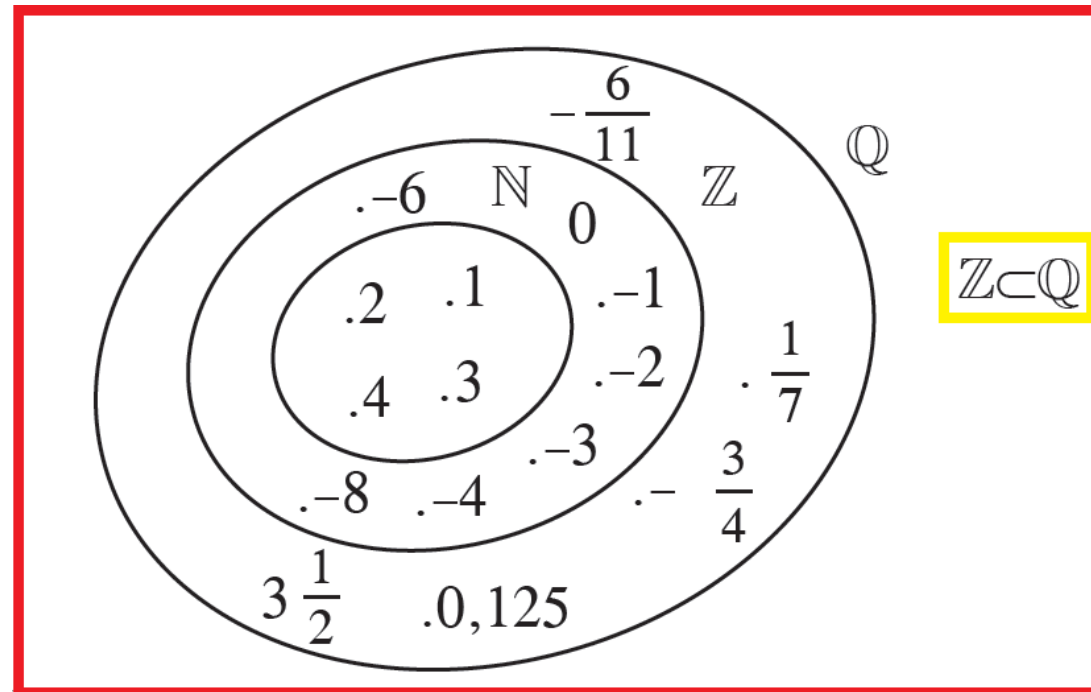
"Más grave que el número de oyentes era su composición social. Desde el proscenio, decorado con un jarroncito de flores y una pared llena de símbolos masónicos, mientras monsieur Lagrange la presentaba, Flora descubrió que tres cuartas partes de los asistentes eran patrones y sólo un tercio obreros"

Como se observa $\frac{3}{4}$ de los asistentes eran patrones y $\frac{1}{3}$ eran obreros, pero si sumamos ambas cantidades nos da $\frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{13}{12}$, que es mayor que uno. Lo cual es imposible, puesto que la suma de las partes no puede ser mayor que el total, es decir, que 1.

1 El conjunto de números Racionales: \mathbb{Q}

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

$$\frac{3}{8}; \frac{12}{3}; \frac{-4}{5}; \frac{-15}{5}; \frac{4}{-3}; \frac{21}{7}$$



2 Números Fraccionarios:

$$\frac{3}{8}; \frac{-4}{5}; \frac{4}{-3}$$

Números
fraccionarios

$$\frac{12}{3}; \frac{-15}{5}; \frac{21}{7}$$

No son números
fraccionarios

3 Fracción:

Sea la fracción:

$$f = \frac{a}{b}$$

Numerador

Denominador

donde

$$\triangleright a \in \mathbb{Z}^+ \wedge b \in \mathbb{Z}^+$$

$$\triangleright a \neq \dot{b}$$

$$\frac{3}{8}$$

Es fracción

$$\frac{-4}{5}; \frac{4}{-3}$$

No son
fracciones

* Fracciones Equivalentes:

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk}, k \in \mathbb{Z}^+, \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son PESI}$$

Ejemplo : Halle las fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$

Resolution

$$f = \frac{2}{5} \rightarrow f_e = \frac{2k}{5k} \quad k \Rightarrow 1; 2; 3; 4; \dots$$

Entonces las fracciones equivalentes a $\frac{2}{5}$, serán :

$$\left\{ \frac{2}{5} ; \frac{4}{10} ; \frac{6}{15} ; \frac{8}{20} ; \dots \right\}$$

4

Clasificación

Por la comparación de su valor con respecto a la unidad

1. Propia

$$f = \frac{N}{D} < 1 \rightarrow N < D \Rightarrow f < 1$$

Ejemplo : $\frac{15}{25}; \frac{9}{13}; \frac{19}{30}$

2. Impropia

$$f = \frac{N}{D} > 1 \rightarrow N > D \Rightarrow f > 1$$

Ejemplo : $\frac{18}{12}; \frac{11}{3}; \frac{5}{2}$

Por su denominador

1. Decimal

$$f = \frac{a}{b} \rightarrow b = 10^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo : $\frac{7}{10^2}; \frac{23}{10}; \frac{45}{10^3}$

2. Ordinaria

$$f = \frac{a}{b} \rightarrow b \neq 10^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

Ejemplo : $\frac{5}{26}; \frac{12}{8}; \frac{15}{6}$

Por la cantidad de divisores comunes de sus términos:

NO se puede simplificar

Irreducible
<p>Sus términos son números PESI.</p> <p>$\frac{a}{b} \rightarrow$ ➤ a y b son PESI. ➤ $\text{MCD}(a, b) = 1$</p>
<p><i>Ejemplos</i></p> $\frac{3}{11}, \frac{13}{5}, \frac{32}{21}$

Reducible
<p>Sus términos no son números PESI.</p> <p>$\frac{a}{b} \rightarrow$ ➤ a y b no son PESI. ➤ $\text{MCD}(a, b) \neq 1$</p>
<p><i>Ejemplos</i></p> $\frac{27}{72}, \frac{36}{40}, \frac{16}{24}$

Se puede simplificar

Por grupo de fracciones

Homogéneas

Todas las fracciones tienen el mismo denominador.

Ejemplos

$$\frac{83}{3}; \frac{8}{3}; \frac{14}{3}; \frac{17}{3}$$

Heterogéneas

Al menos una de las fracciones tendrá un denominador diferente de las demás.

Ejemplos

$$\frac{3}{8}; \frac{17}{7}; \frac{18}{8}; \frac{13}{8}$$

1

Si la fracción $\frac{a}{24}$ es propia e irreducible. Calcule la suma de todos los valores que puede tomar a.

Resolution:

➤ **F. propia:** $\frac{a}{24} < 1 \Rightarrow a < 24$

a → 1; ~~2~~; ~~3~~; ~~4~~; 5; ~~6~~; 7; ~~8~~; ~~9~~
~~10~~; 11; ~~12~~; 13; ~~14~~; ~~15~~; 16; 17
~~18~~; 19; ~~20~~; ~~21~~; ~~22~~; 23

➤ **F. irreducible:** a y 24 son (PESI)

$$\bullet \quad 24 = 2^3 \times 3 \Rightarrow a \neq 2 \wedge 3$$

Entonces : a : 1; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23.

➤ **Suma :**

$$1 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 96$$

RPTA: **96**

2

Si a los dos términos de una fracción irreducible, se le suma el triple del denominador y al resultado se le resta la fracción, resulta la misma fracción. ¿Cuánto suman los términos de la fracción original?

Resolution:

➤ F. original = $\frac{a}{b}$

Entonces :

$$\frac{a + 3b}{b + 3b} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a + 3b}{4b} = \frac{2a}{b}$$

$$a + 3b = 8a$$

$$3b = 7a$$

$$3 \cdot b = 7 \cdot a$$

$$a = 3$$

$$b = 7$$

Entonces :

$$a + b = 3 + 7$$

$$a + b = 10$$

RPTA: **10**

3

¿Cuántas fracciones de denominador 600 están comprendidas entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{2}{3}$?

Resolution :

$$\underbrace{\frac{3}{5} \times 600}_{360} < \frac{N}{\cancel{600}} \times \cancel{600} < \underbrace{\frac{2}{3} \times 600}_{400}$$

$$360 < N < 400$$

$$N = \{ 361 ; 362 ; 363 ; \dots ; 399 \}$$

$$399 - 361 + 1 = 39$$

RPTA:

39 fracciones

4

Halle una fracción equivalente a $\frac{3}{8}$ sabiendo que el producto de sus términos es 216. Dé como respuesta la suma de cifras del denominador.

Resolution :

$$f = \frac{3}{8}$$

$$f_e = \frac{3k}{8k}$$

Dato: $(3k)(8k) = 216$

$$24k^2 = 216$$

$$k^2 = 9$$

$$k = 3$$

Entonces el denominador será :

$$8k = 8(3) = 24$$

➤ **Suma de cifras :**

$$2 + 4 = 6$$

RPTA: **6**

5

Un granjero ha llevado a la ciudad cierta cantidad de gallinas. Vende primero 5 gallinas, al segundo cliente la mitad de las que le quedaba, al tercer cliente le vende los $\frac{3}{4}$ de las gallinas que restaban y al último cliente la tercera parte de las que aún había. ¿Cuántas gallinas llevó a la ciudad, si le quedaron 12 gallinas?

Resolution : Sea " N ", el número de gallinas :

VENDE	QUEDA
5	$N - 5$
$\frac{1}{2} (N - 5)$	$\frac{1}{2} (N - 5)$
$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} (N - 5) \right)$	$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} (N - 5) \right)$
$\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} (N - 5) \right) \right\}$	$\frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} (N - 5) \right) \right\}$

Pero quedaron 12 gallinas ,entonces :

$$\cancel{\frac{2}{3}} \left\{ \frac{1}{4} \left(\cancel{\frac{1}{2}} (N - 5) \right) \right\} = 12$$

$$\frac{N - 5}{12} = 12 \rightarrow N - 5 = 144$$

$$N = 149 \text{ gallinas}$$

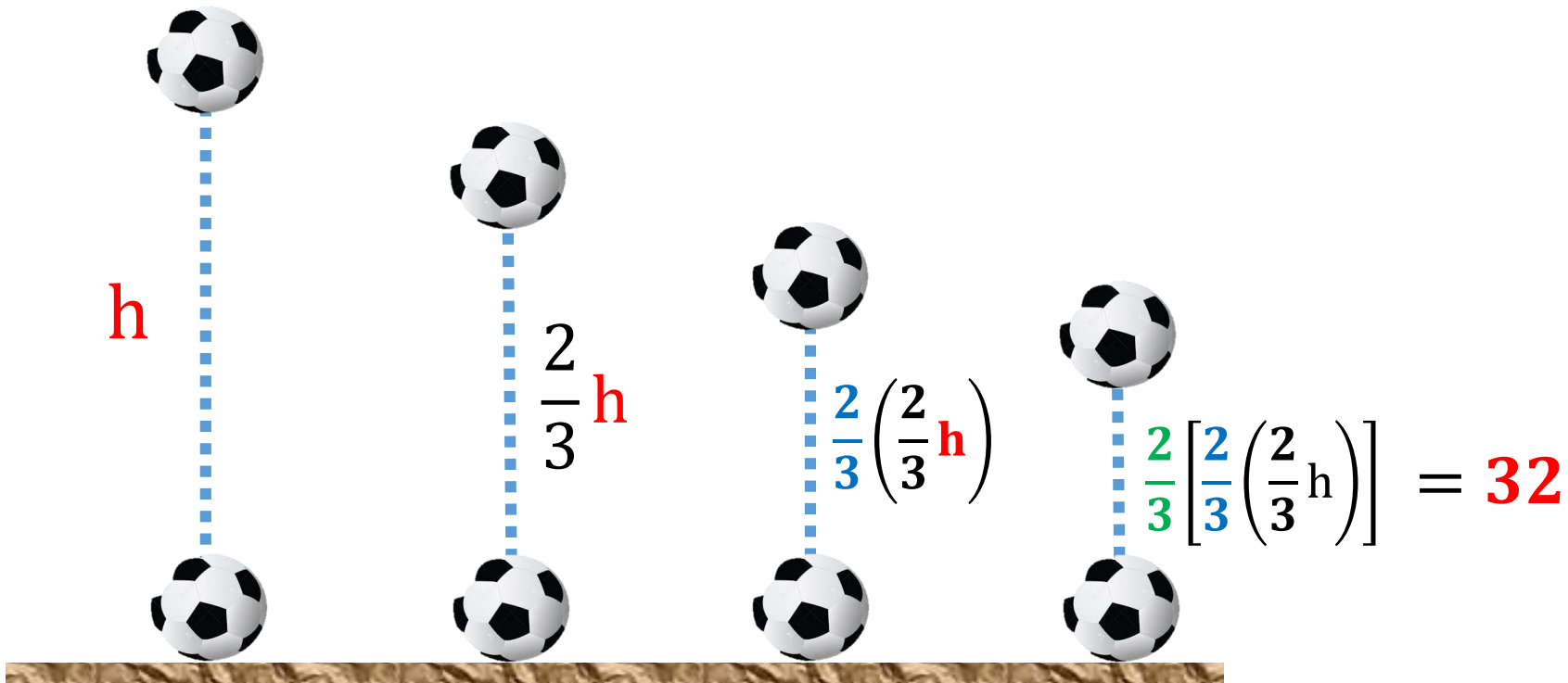


RPTA: 149

6

Una pelota cae al suelo y en cada rebote se eleva los $\frac{2}{3}$ de la altura anterior. Si después del tercer rebote se elevó 32 cm . Determine la altura inicial de donde cayó.

Resolution :



$$\frac{\cancel{8}}{27}h = \frac{\cancel{32}}{\cancel{4}}$$

$$h = 108$$

RPTA: 108 cm.

7

Jacinto experto comerciante, cierto día decide entrar al negocio de venta de manzanas para lo cual va al mercado mayorista y compra cierto número de manzanas, luego se dirige al mercado central y vende $\frac{5}{8}$ de las manzanas que tiene luego vende $\frac{1}{2}$ del resto y finalmente $\frac{3}{4}$ del nuevo resto; si todavía le quedan 153 manzanas. ¿Cuántas manzanas compró Jacinto en el mercado mayorista?

Resolution :

Sea "N" el número de manzanas

VENDE	QUEDA
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}N$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}N \right)$
$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}N \right) \right]$

$$\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{3}{8}N \right) \right] = \cancel{153}^{51}$$

$$\frac{N}{64} = 51$$



RPTA: **3264**