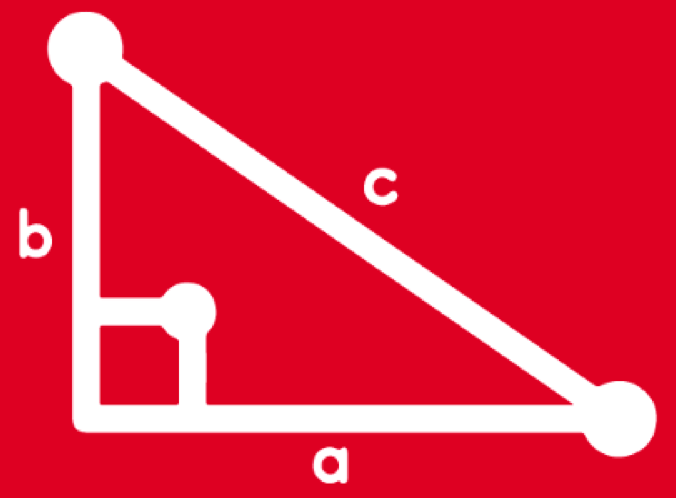
TRIGONOMETRY

Chapter 19



2nd
SECONDARY

ÁNGULOS COTERMINALES

SACO OLIVEROS

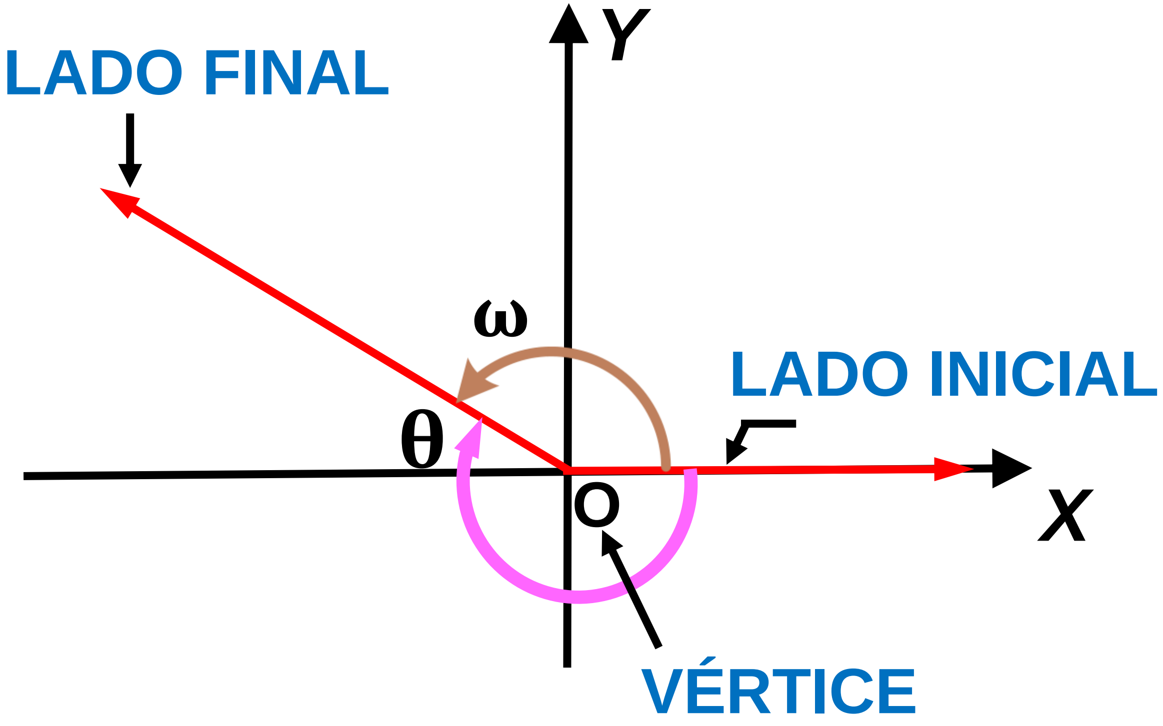
CANADARM 2

El Canadarm 2 , es un brazo robótico manipulador que está ubicado en la Estación Espacial Internacional.
Este brazo manipulador opera con control de los ángulos en sus articulaciones.

Para obtener la posición final del astronauta en el extremo del brazo , se requiere un uso repetido de las razones trigonométricas de esos ángulos que se forman según los variados movimientos que realiza.

ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial, vértice y lado final; solo se diferencian en sus medidas.

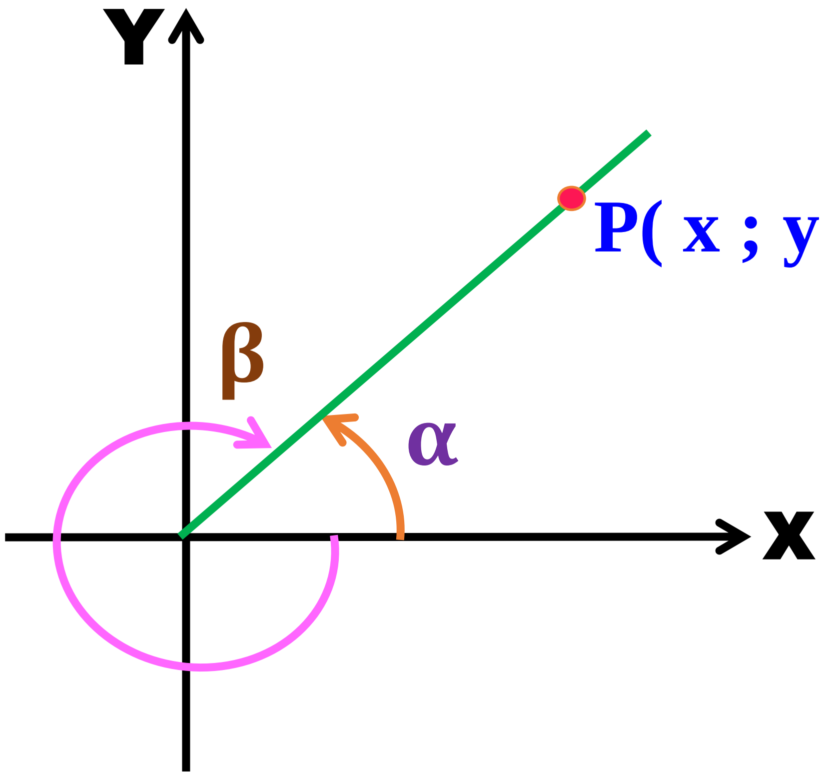


Según la figura :

θ y ω son las medidas de dos ángulos coterminales.

PROPIEDADES DE LOS ÁNGULOS COTERMINALES

Siendo α y β las medidas de dos ángulos coterminales, se verifica lo siguiente:



Propiedades :

- $\alpha - \beta = 360° n$, $\forall n \in Z - \{0\}$

- $RT(\alpha) = RT(\beta)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{sen}\alpha = \text{sen}\beta \\ \cos\alpha = \cos\beta \\ \tan\alpha = \tan\beta \\ \cot\alpha = \cot\beta \\ \sec\alpha = \sec\beta \\ \csc\alpha = \csc\beta \end{array} \right.$

HELICO PRACTICE 1

Indique cuáles de los siguientes pares de ángulos son coterminales.

I) $350°$ y $-70°$
II) $780°$ y $60°$
III) $510°$ y $170°$

RECORDAR :
Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son α y β, se cumple :

$$\alpha - \beta = 360° n \quad ; \forall\, n \in Z - \{ 0 \}$$

RESOLUCIÓN

I) $350° - (-70°) = 350° + 70° = 420°$

No son ángulos coterminales.

II) $780° - 60° = 720° = 2(360°)$

Sí son ángulos coterminales.

III) $510° - 170° = 340°$

No son ángulos coterminales.

$\therefore$ Solo la opción II contiene un par de ángulos coterminales.

HELICO PRACTICE 2

Siendo α y 53°, dos ángulos coterminales, efectúe

$P = 15\,\text{sen}\alpha - 8\cot\alpha$

RECORDAR :

Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son α y 53°, se cumple :

$$RT(\alpha) = RT(53°)$$

RESOLUCIÓN

Como α y 53° son ángulos coterminales, entonces :

$$\text{sen}\alpha = \text{sen}53°$$

$$\cot\alpha = \cot 53°$$

Luego reemplazamos en P :

$$P = 15\,\text{sen}53° - 8\cot 53°$$

$$P = 15\left(\frac{4}{5}\right) - 8\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$P = 12 - 6$$

$$\therefore\ \boxed{P = 6}$$

HELICO PRACTICE 3

Si los ángulos θ y α son coterminales, reduzca :

$$M = \frac{8\cot\alpha}{\cot\theta} - \frac{3\sec\theta}{\sec\alpha} + 2$$

RECORDAR :
Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son θ y α, se cumple :

$$\mathrm{RT}(\theta) = \mathrm{RT}(\alpha)$$

RESOLUCIÓN

Como θ y α son ángulos coterminales, entonces :

$$\cot\theta = \cot\alpha$$

$$\sec\theta = \sec\alpha$$

Reemplazamos en M :

$$M = \frac{8\,\cancel{\cot\theta}}{\cancel{\cot\theta}} - \frac{3\,\cancel{\sec\theta}}{\cancel{\sec\theta}} + 2$$

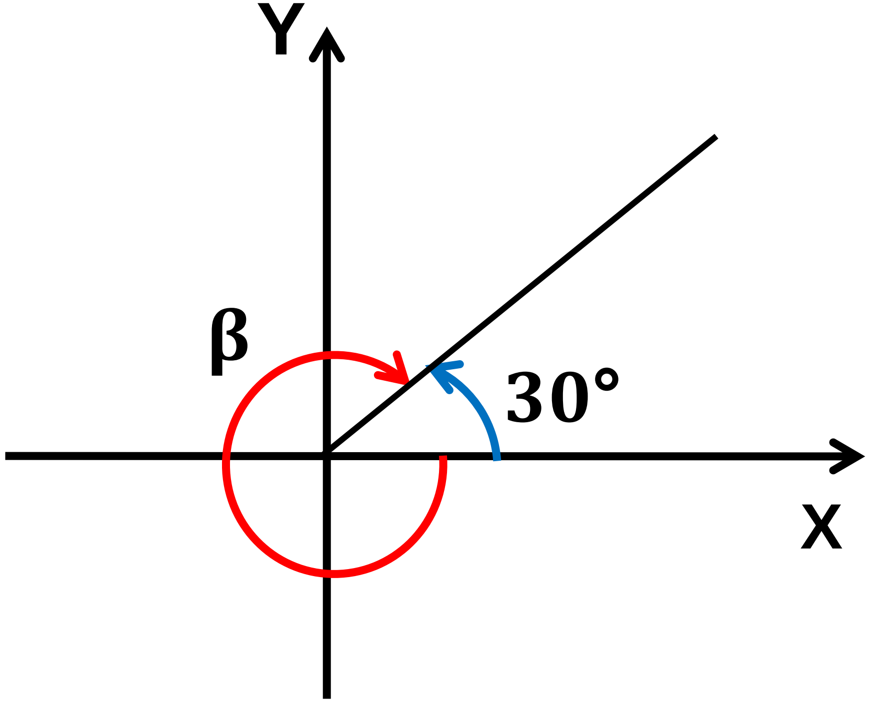
$$M = 8 - 3 + 2$$

$$\boxed{\therefore\ M = 7}$$

HELICO PRACTICE 4

Del gráfico , efectúe

E = $\sqrt{3}\,\sec\beta - \cot^2\beta$



RESOLUCIÓN

Según gráfico, β y 30° son ángulos coterminales, por lo tanto :

$$\sec\beta = \sec 30°$$

$$\cot\beta = \cot 30°$$

Reemplazamos en E :

$$E = \cancel{\sqrt{3}}\left(\frac{2}{\cancel{\sqrt{3}}}\right) - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 2 - 3$$

$$\boxed{\therefore\ E = -1}$$

HELICO PRACTICE 5

Siendo θ y β ángulos coterminales, reduzca :

$$F = (3\,\text{sen}\theta + 4\,\text{sen}\beta)\,\csc\theta$$

RECORDAR :
Para dos ángulos coterminales cuyas medidas son θ y α, se cumple :

$$RT(\theta) = RT(\beta)$$

$$\text{sen}\theta \cdot \csc\theta = 1$$

RESOLUCIÓN

Como θ y β son ángulos coterminales, entonces :

$$\text{sen}\theta = \text{sen}\beta$$

Luego reemplazamos en F :

$$F = (3\,\text{sen}\theta + 4\,\text{sen}\theta)\,\csc\theta$$

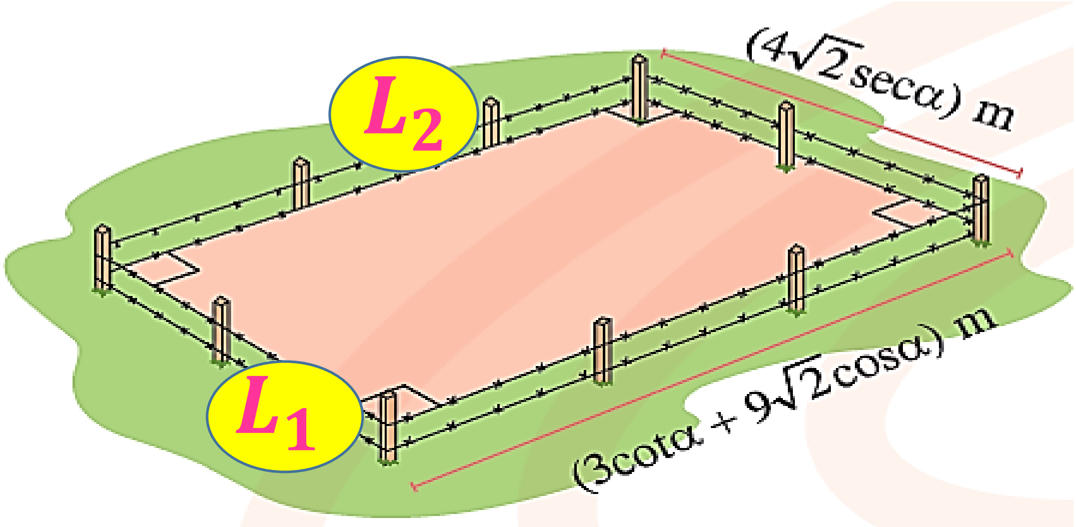
$$F = 7\,\underbrace{\text{sen}\theta \cdot \csc\theta}$$

$$F = 7 \quad (1)$$

$$\boxed{\therefore\ F = 7}$$

HELICO PRACTICE 6

David compró un terreno en forma de rectángulo, tal como se muestra en la siguiente figura :



Si α y 45° son ángulos coterminales, ¿cuánto mide el área de dicho terreno?

RESOLUCIÓN

Como α y 45° son ángulos coterminales:

$$\boxed{RT(\alpha) = RT(45°)}$$

Luego:

$$L_1 = 4\sqrt{2}\sec 45° \text{ m} = 4\sqrt{2}\,\sqrt{2} \text{ m} = 8 \text{ m}$$

$$L_2 = (3\cot 45° + 9\sqrt{2}\cos 45°) \text{ m}$$

$$L_2 = \left(3(1) + 9\cancel{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}\right)\right) \text{ m} = 12 \text{ m}$$

Área del terreno = $L_1 \cdot L_2$ = (8 m) (12 m)

$$\boxed{\therefore \text{ Área del terreno} = 96 \text{ m}^2}$$

HELICO PRACTICE 7

Como parte de un reto, una profesora planteó el siguiente ejercicio en pizarra para sus alumnos :

α es la medida de un ángulo en posición normal cuyo lado final pertenece al tercer cuadrante y $\csc\alpha = -\dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

Si α y β son coterminales y $\cot\beta = \dfrac{k-1}{k+2}$. Calcule el valor de k.

La respuesta de 4 alumnos fueron las siguientes :

- Alejandro : 5
- Carlos : 7
- Juamar : -8
- Micaela : -6

¿Quién respondió correctamente ?

HELICO PRACTICE 7

RESOLUCIÓN

Como $\alpha \in$ III C, entonces $x < 0$; $y < 0$

$$\csc\alpha = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{13}}{-3}$$

$r = \sqrt{13}$; $y = -3$

Luego : $\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

$$x^2 + (-3)^2 = \sqrt{13}^2$$

$$x^2 + 9 = 13$$

$$x^2 = 4$$

$$x = -2$$

Como α y β son ángulos coterminales :

$$\boxed{RT(\alpha) = RT(\beta)}$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \cot\beta$$

$$\frac{-2}{-3} = \frac{k-1}{k+2} \Rightarrow 2k + 4 = 3k - 3$$

$$4 + 3 = 3k - 2k$$

$$7 = k$$

$\therefore$ Carlos respondió correctamente.

SACO
OLIVEROS