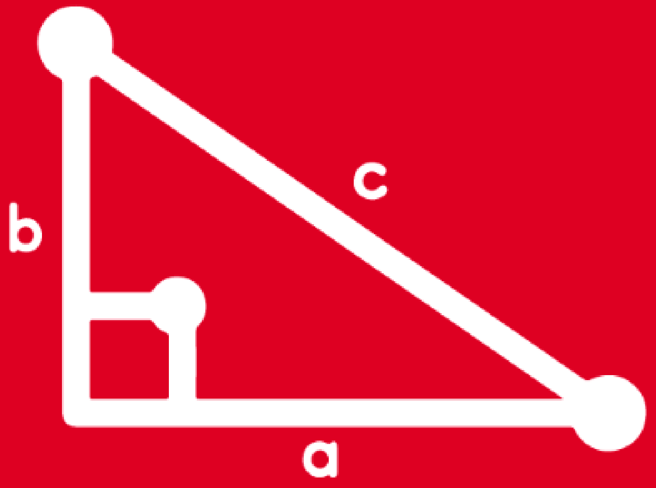
TRIGONOMETRY

Chapter 15

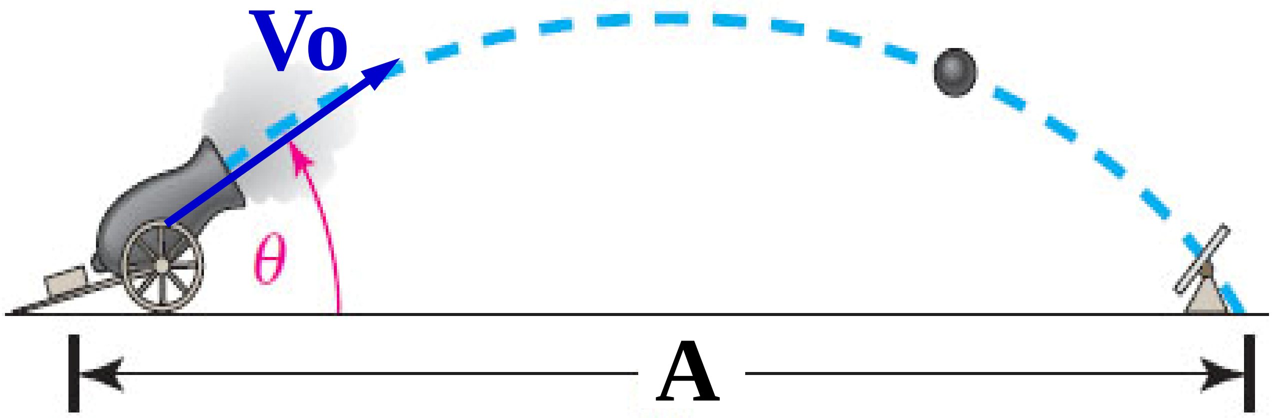


5th
SECONDARY

Identidades trigonométricas del ángulo doble I

SACO OLIVEROS

Un objeto se dispara hacia arriba con un ángulo “ **θ** ” respecto de la horizontal , con una velocidad inicial de “ **Vo** ” pies por segundo. Ignorando la resistencia del aire, el alcance “ **A** ” está dado por :



$$A = \frac{1}{16} V_o^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

Pregunta:

Calcule el ángulo “ θ ” , para **Vo = 80** pies por segundo y **A = 160** pies. Use la siguiente identidad: $\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$

Rpta: $\theta = 53^o/2$

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO DOBLE

$$sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$$

$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

$$\begin{cases} cos(2x) = 2cos^2(x) - 1 \\ cos(2x) = 1 - 2sen^2(x) \end{cases}$$

$$tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1 - tan^2(x)}$$

1 Si $\cot\alpha = \dfrac{1}{3}$ y $\alpha \in$ IIIC, calcule $\operatorname{sen}2\alpha$

Resolución:

$$\cot\alpha = \frac{1}{3} = \frac{x}{y}$$

$Como\ \alpha \in IIIC(-;-)$

$\boldsymbol{x = -1 \ ; \ \ y = -3}$

$Radio\ Vector$:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2}$$

$$r = \sqrt{10}$$

Calculamos

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\underbrace{\operatorname{sen}\alpha}_{\frac{y}{r}}.\underbrace{\cos\alpha}_{\frac{x}{r}}$$

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\left(\frac{-\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{10}}}\right)\left(\frac{-\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{10}}}\right) = \frac{6}{10}$$

$$\therefore \boxed{\boldsymbol{sen2\alpha = \frac{3}{5}}}$$

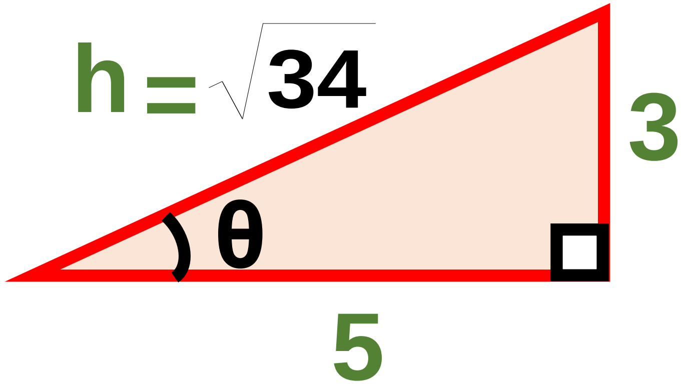
2

Si θ es un ángulo agudo y se cumple que $\frac{5}{\cos\theta} = \frac{3}{\operatorname{sen}\theta}$

calcule cos2θ.

Resolución:

Del dato: $tan\theta = \frac{3}{5}$



Calculamos:

$$cos2\theta = cos^2\theta - sen^2\theta \quad cos2\theta = \left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right)^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)^2$$

$$cos2\theta = \left(\frac{25}{34}\right) - \left(\frac{9}{34}\right) = \frac{16}{34} \quad \therefore \quad \boxed{cos2\theta = \frac{8}{17}}$$

3

En el siguiente cuadro se observa el tamaño de las carpetas de música que Camila tiene almacenada en su memoria de USB.

Carpeta	Tamaño (GB)
Pop	A
Cumbia	B

Donde:

$$A = 12\sqrt{2}sen22°30'.cos22°30'$$

$$B = \frac{10\sqrt{3}\,tan15°}{1-tan^2 15°}$$

Indique cuál de las carpetas tiene el mayor tamaño.

Resolución:

$$A = 6\sqrt{2}.\underbrace{2sen22°30'.cos22°30'}$$

$$2senx\,cosx = sen2x$$

$$A = 6\sqrt{2}.sen45° = 6\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\boxed{A = 6}$$

$$B = 5\sqrt{3}.\frac{2tan15°}{1-tan^2 15°}$$

$$\frac{2tanx}{1-tan^2x} = tan2x$$

$$B = 5\sqrt{3}\,tan30° = 5\sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{B = 5}$$

$\therefore$ **La carpeta de mayor tamaño es la de POP.**

4

Demuestre que la expresión: $E = \dfrac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta} - \dfrac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$

se reduce a $2\tan 2\theta$.

Resolución:

$$E = \frac{\cos\theta + sen\theta}{\cos\theta - sen\theta} - \frac{\cos\theta - sen\theta}{\cos\theta + sen\theta}$$

$$E = \frac{(\cos\theta + sen\theta)^2 - (\cos\theta - sen\theta)^2}{(\cos\theta - sen\theta)(\cos\theta + sen\theta)}$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$E = \frac{4\cos\theta sen\theta}{\cos^2\theta - sen^2\theta}$$

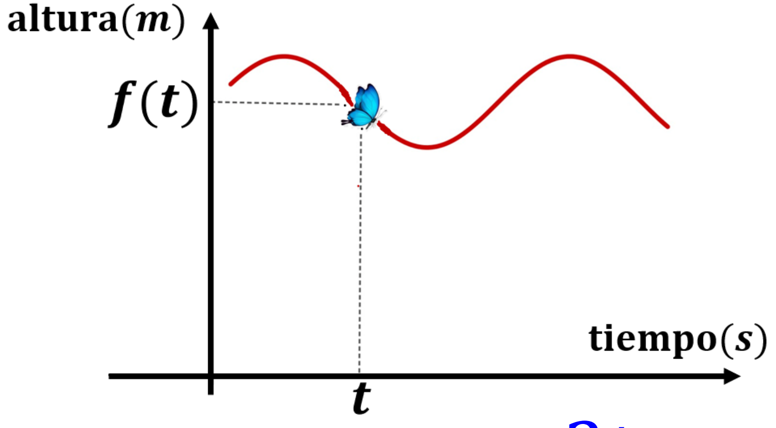
$$E = \frac{2.2sen\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - sen^2\theta}$$

$$E = \frac{2sen2\theta}{\cos 2\theta}$$

$$\therefore \boxed{E = 2\tan 2\theta}$$

5 Un experto en entomología (ciencia que estudia los insectos) observa el movimiento de una mariposa en el aire y ve que en un instante de tiempo t la altura en metros, respecto al suelo, está dada por la expresión $f(t) = 1,5 + sent.cost.cos2t$. Si t esta dado en segundos, ¿cuál es la altura de la mariposa cuando $t = \frac{5\pi}{8}$?

Resolución:



$$f(t) = 1,5 + \frac{\overbrace{2\,sent.cost}^{sen2t}.cos2t}{2}$$

$$f(t) = 1,5 + \frac{\overbrace{2\,sen2t.cos2t}^{sen(2(2t))}}{2\text{x}2} = 1,5 + \frac{sen4t}{4}$$

Calculamos:

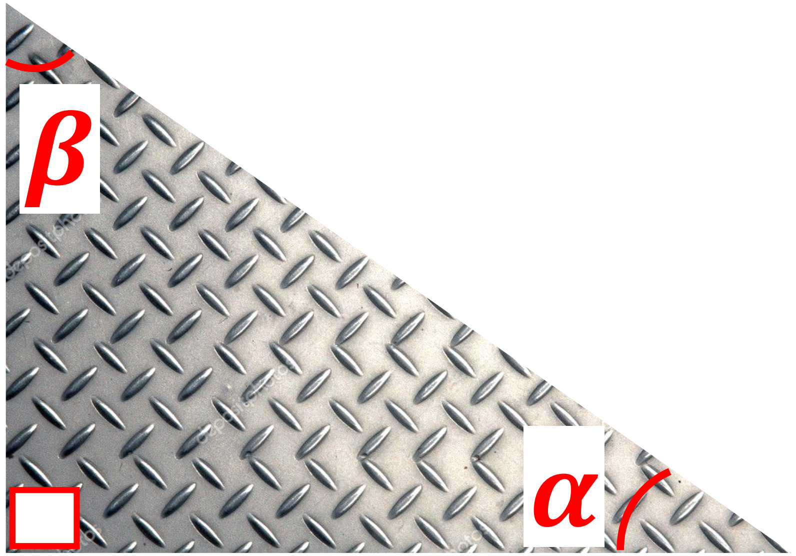
$$f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 1,5 + \frac{sen(4.\frac{5\pi}{8})}{4} = \frac{3}{2} + \frac{\overbrace{sen(\frac{5\pi}{2})}^{1}}{4} = \frac{7}{4}$$

RPTA: La altura de la mariposa a los $\frac{5\pi}{8}$s es de 1,75m

6 Una plancha metálica tiene la forma de un triángulo rectángulo, cuyos lados menores miden $(1 - cos80°)m$ y $(sen80°)m$. Calcule la diferencia entre los ángulos agudos de dicho triángulo

Resolución:

$(1 - cos80°)m$



$(sen80°)m$

$$\tan\alpha = \frac{(1 - cos80°)\cancel{m}}{(sen80°)\cancel{m}}$$

$$\tan\alpha = \frac{1 - cos2(40°)}{sen2(40°)}$$

$$1 - cos(2x) = 2sen^2(x)$$

$$sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$$

$$\tan\alpha = \frac{\cancel{2}sen^2 40°}{\cancel{2}sen40°.cos40°}$$

$$\tan\alpha = \frac{\cancel{sen40°}.sen40°}{\cancel{sen40°}.cos40°}$$

$$\tan\alpha = tan40°$$

$$\alpha = 40°$$

Del gráfico

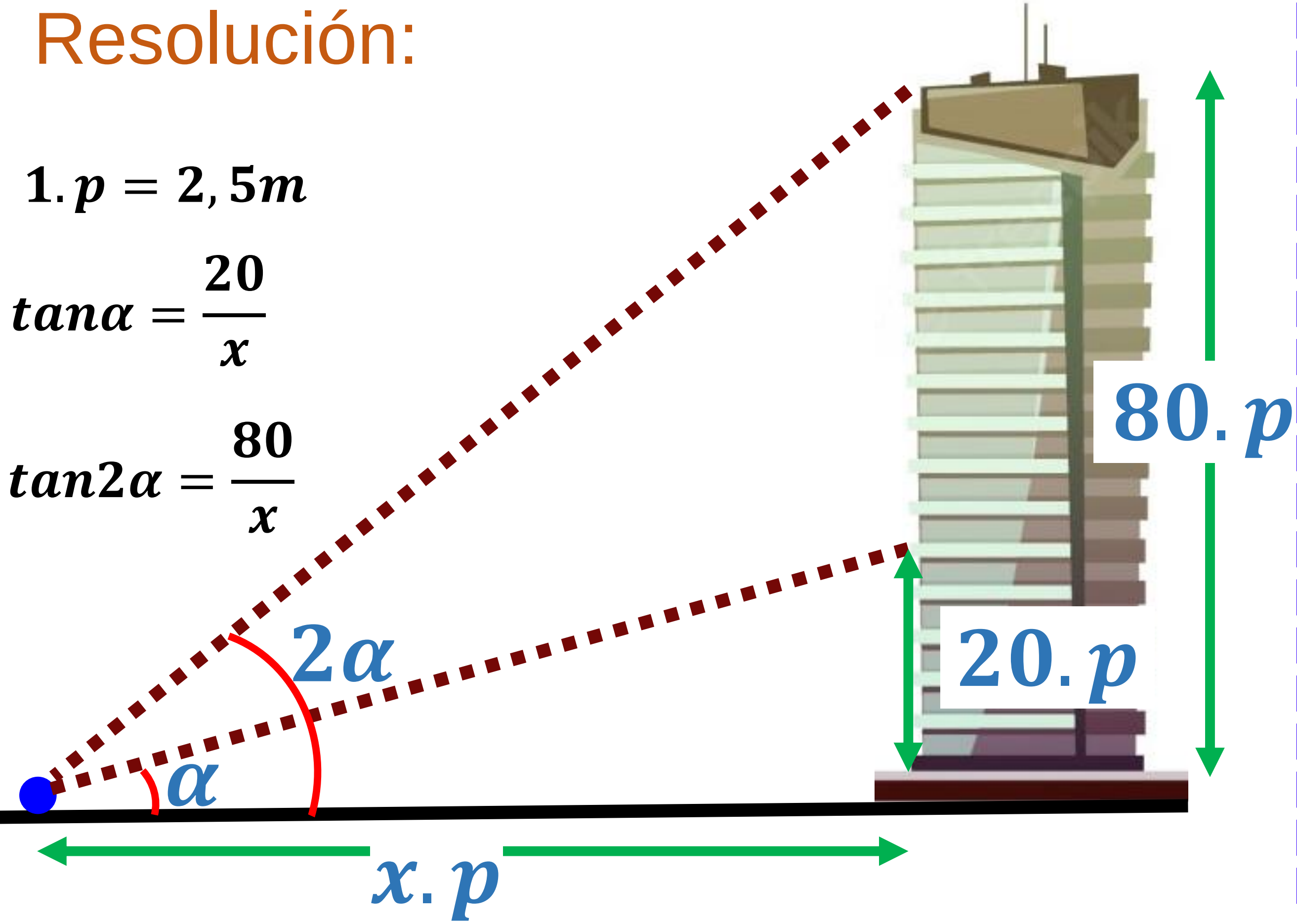
$$\alpha + \beta = 90°$$

$$\beta = 50°$$

RPTA: La diferencia positiva entre los ángulos agudos es $10°$

7 En la ciudad de New York, nuestro amigo Panchito se detiene frente a un edifico de 80 pisos (cada piso de 2,5 m de alto) y nota que cuando mira a la azotea, el ángulo de elevación se duplica respecto al ángulo de elevación al mirar el piso 20. ¿A qué distancia del edificio se encuentra Panchito?

Resolución:



$$1.\ p = 2,5m$$

$$tan\alpha = \frac{20}{x}$$

$$tan2\alpha = \frac{80}{x}$$

$$tan2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1 - tan^2\alpha}$$

$$\frac{80}{x} = \frac{2\left(\frac{20}{x}\right)}{1 - \left(\frac{20}{x}\right)^2}$$

$$80\left[1 - \left(\frac{20}{x}\right)^2\right] = \cancel{x}\left[2\left(\frac{20}{\cancel{x}}\right)\right]$$

$$80 - 80\left(\frac{20}{x}\right)^2 = 40$$

$$80 - \frac{80.20^2}{x^2} = 40$$

$$40 = \frac{80.20^2}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{80.20^2}{40}$$

$$x^2 = 2.20^2$$

$$x = 20\sqrt{2}$$

<u>RPTA</u>: La distancia es $x.p = 50\sqrt{2}\ m$