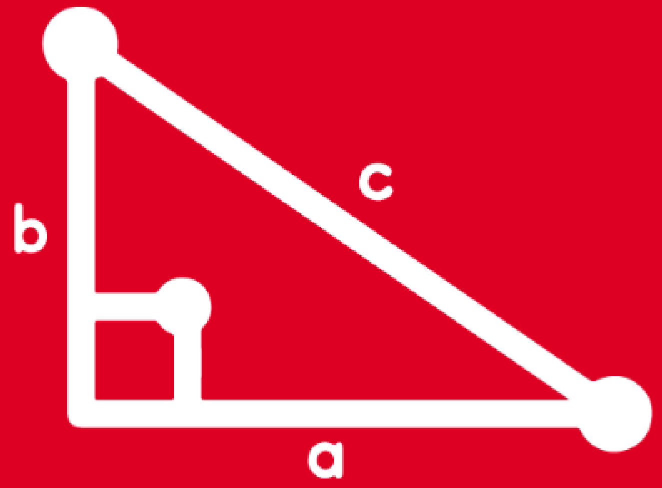
TRIGONOMETRY

Chapter 19

5th
SECONDARY



TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

En el siglo XVI aparecieron en Europa una serie de identidades conocidas como Reglas de Prostaféresis, las que actualmente son conocidas como Identidades de Transformaciones Trigonométricas; éstas convierten una suma o diferencia de senos y cosenos a productos y viceversa.

Para deducir estas identidades se utilizan las identidades del ángulo compuesto :

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x.\cos y+\cos x.\operatorname{sen}y \quad \ldots (1)$$

$$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen}x.\cos y-\cos x.\operatorname{sen}y \quad \ldots (2)$$

Sumando (1) y (2) :

$$\operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(x-y)=2\operatorname{sen}x.\cos y \quad \ldots (*)$$

Hacemos cambios de variables :

Sea $\begin{cases} x+y=A \\ x-y=B \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{A+B}{2} \;;\; y=\frac{A-B}{2}$$

Reemplazando en (*) , se obtiene :

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

1ER CASO : De suma o diferencia de senos y cosenos a produto .

$$\operatorname{sen}A+\operatorname{sen}B=2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen}A-\operatorname{sen}B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A-\cos B=-2\operatorname{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Ejemplos :

- $\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}x=2\operatorname{sen}2x\cos x}$

- $\cos 80^{o}+\cos 40^{o}=2\cos\left(\frac{80^{o}+40^{o}}{2}\right)\cos\left(\frac{80^{o}-40^{o}}{2}\right)$

$\Rightarrow \cos 80^{o}+\cos 40^{o}=2\underbrace{\cos 60^{o}}_{1/2}\cos 20^{o}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\cos 80^{o}+\cos 40^{o}=\cos 20^{o}}$

TRANSFORMACIONES TRIGONOMÉTRICAS

2DO CASO : De producto de senos y cosenos a suma o diferencia .

$$2\,\text{sen}\alpha\cos\beta = \text{sen}(\alpha+\beta) + \text{sen}(\alpha-\beta)$$

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\,\text{sen}\alpha\,\text{sen}\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

Observación:

Si al aplicar transformaciones trigonométricas obtenemos ángulos negativos, se debe usar :

$$\text{sen}(-x) = -\text{sen}x \qquad \cos(-x) = \cos x$$

Ejemplos:

- $2\,\text{sen}3x\cos x = \text{sen}(3x+x) + \text{sen}(3x-x)$

$$\Rightarrow \; 2\,\text{sen}3x\cos x = \text{sen}4x + \text{sen}2x$$

- $2\cos 20^\circ\cos 10^\circ = \cos(20^\circ+10^\circ) + \cos(20^\circ-10^\circ)$

$$\Rightarrow \; 2\cos 20^\circ\cos 10^\circ = \underbrace{\cos 30^\circ} + \cos 10^\circ$$

$$\Rightarrow \; 2\cos 20^\circ\cos 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 10^\circ$$

HELICO PRACTICE 1

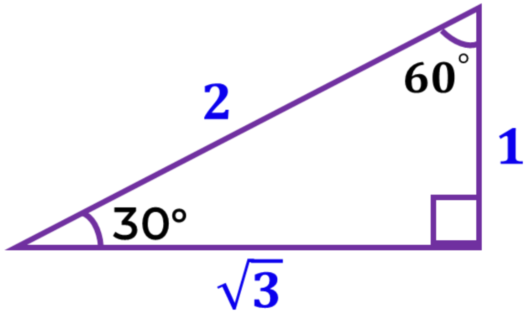
Reduzca $E = \dfrac{\text{sen}40° + \text{sen}20°}{\cos 40° + \cos 20°}$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$



$$E = \frac{\text{sen}40° + \text{sen}20°}{\cos 40° + \cos 20°}$$

$$E = \frac{\cancel{2}\,\text{sen}\left(\frac{40°+20°}{2}\right).\cancel{\cos\left(\frac{40°-20°}{2}\right)}}{\cancel{2}\cos\left(\frac{40°+20°}{2}\right).\cancel{\cos\left(\frac{40°-20°}{2}\right)}}$$

$$E = \tan 30°$$

$$\therefore\ E = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

HELICO PRACTICE 2

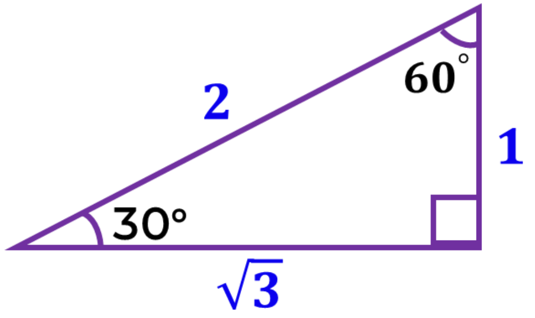
Halle el valor del ángulo agudo x en $\dfrac{\text{sen}9x - \text{sen}3x}{\cos 9x + \cos 3x} = \sqrt{3}$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\text{sen}A - \text{sen}B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\ \text{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\ \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$



$$\frac{\text{sen}9x - \text{sen}3x}{\cos 9x + \cos 3x} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\cancel{2\cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right)}.\ \text{sen}\left(\frac{9x-3x}{2}\right)}{\cancel{2\cos\left(\frac{9x+3x}{2}\right)}.\ \cos\left(\frac{9x-3x}{2}\right)} = \sqrt{3}$$

$\tan 3x = \sqrt{3}$

$3x = 60°$

$$\boxed{\therefore\ x = 20°}$$

HELICO PRACTICE 3

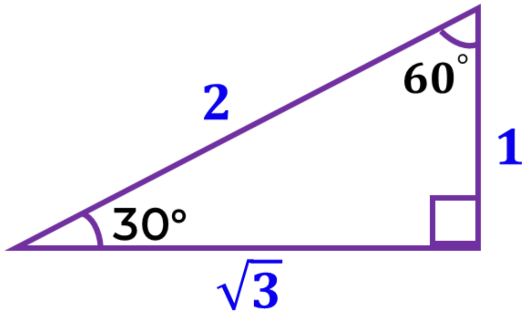
Para $x = \frac{\pi}{24}$, calcule el valor de

$$E = \frac{\text{sen}6x + \text{sen}4x + \text{sen}2x}{\cos 6x + \cos 4x + \cos 2x}$$

Recordar :

$$\text{sen}A + \text{sen}B = 2\,\text{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$



RESOLUCIÓN

$$E = \frac{\text{sen}6x + \text{sen}2x + \text{sen}4x}{\cos 6x + \cos 2x + \cos 4x}$$

$$E = \frac{2\,\text{sen}4x.\cos 2x + \text{sen}4x}{2\cos 4x.\cos 2x + \cos 4x}$$

$$E = \frac{\text{sen}4x\,\cancel{(2\cos 2x + 1)}}{\cos 4x\,\cancel{(2\cos 2x + 1)}}$$

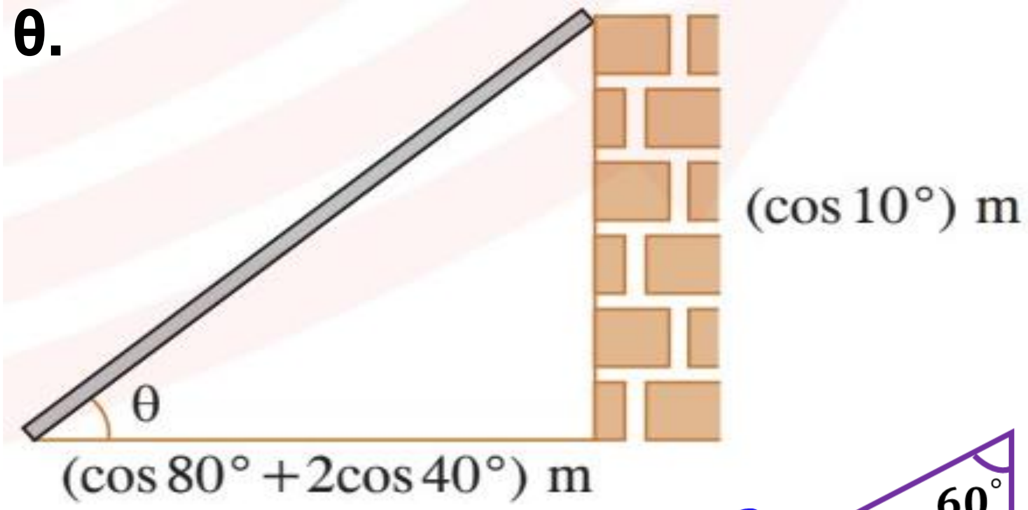
$$E = \tan 4x = \tan 4\left(\frac{\pi}{24}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

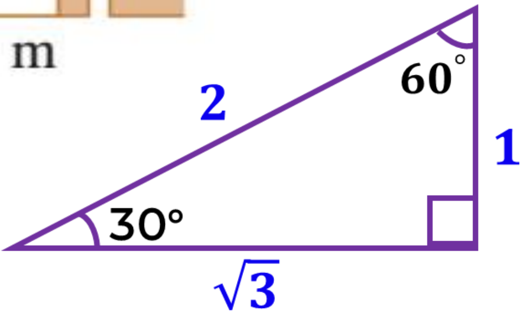
$$E = \tan 30°$$

$$\therefore E = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

HELICO PRACTICE 4

Una barra metálica descansa sobre una pared lisa, tal como se muestra en la figura.- Halle el valor de θ.





Recordar :

$$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right).\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

RESOLUCIÓN

$$\cot\theta = \frac{(\cos 40° + \cos 80° + \cos 40°)\,\cancel{m}}{(\cos 10°)\,\cancel{m}}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos 40° + 2\cos 60°\,.\,\cos 20°}{\cos 10°}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos 40° + \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)\ \cos 20°}{\cos 10°}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos 40° + \cos 20°}{\cos 10°} = \frac{2\cos 30°\,\cancel{.\cos 10°}}{\cancel{\cos 10°}}$$

$$\cot\theta = \cancel{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right) = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ \theta = 30°$$

HELICO PRACTICE 5

Halle el valor del ángulo α que cumple

$$\text{sen}\alpha = 2\cos 40°.\cos 10° - \cos 50°$$

RESOLUCIÓN

$$\text{sen}\alpha = 2\cos 40°.\cos 10° - \cos 50°$$

Recordar : $2\cos\alpha.\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

$$\text{sen}\alpha = \cos(40° + 10°) + \cos(40° - 10°) - \cos 50°$$

$$\text{sen}\alpha = \cancel{\cos 50°} + \cos 30° - \cancel{\cos 50°}$$

$$\text{sen}\alpha = \cos 30°$$

Por CO – RT : $\alpha + 30° = 90°$ ⇒ $\boxed{\alpha = 60°}$

HELICO PRACTICE 6

Simplifique la expresión

$$R = \frac{2\cos 4x \cdot \cos 3x - \cos 7x}{\operatorname{sen} 2x}$$

Recordar :

$$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha = 1$$

RESOLUCIÓN

$$R = \frac{2\cos 4x \cdot \cos 3x - \cos 7x}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$R = \frac{\cos(4x + 3x) + \cos(4x - 3x) - \cos 7x}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$R = \frac{\cancel{\cos 7x} + \cos x - \cancel{\cos 7x}}{\operatorname{sen} 2x}$$

$$R = \frac{1\,\cancel{\cos x}}{2\operatorname{sen} x \cdot \cancel{\cos x}}$$

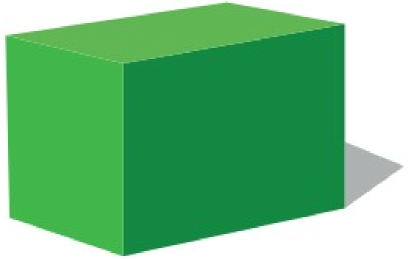
$$\therefore\ R = \frac{\csc x}{2}$$

HELICO PRACTICE 7

Se tiene una pequeña pieza de juguete cuyas aristas miden (2 cos6x) cm, (2 cos4x) cm y (cos2x) cm; tal que $0 < x < 15°$. - Si el volumen de la pieza se expresa así :

$V = (1 + \cos Ax + \cos Bx + \cos Cx)\ cm^3$, considerando positivos a los números A, B y C.

Dar el valor de A + B + C.



Recordar :

$$2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$$

$$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

RESOLUCIÓN

$V = (2\cos 6x \cdot \cos 2x \cdot 2\cos 4x)\ cm^3$

$V = ((\cos 8x + \cos 4x)\ 2\cos 4x)\ cm^3$

$V = (2\cos 8x \cdot \cos 4x + 2\cos^2 4x)\ cm^3$

$V = (\cos 12x + \cos 4x + 1 + \cos 8x)\ cm^3$

$V = (1 + \cos 4x + \cos 8x + \cos 12x)\ cm^3$

$V = (1 + \cos Ax + \cos Bx + \cos Cx)\ cm^3$

Luego : A = 4 ; B = 8 ; C = 12

$$\therefore\ A + B + C = 24$$

SACO OLIVEROS