

# TRIGONOMETRY

## Chapter 21

**5th**  
SECONDARY

**FUNCIONES**  
**TRIGONOMÉTRICAS II**



# MOTIVATING STRATEGY

## FENÓMENOS PERIÓDICOS

Son aquellos que se repiten en el tiempo de forma idéntica; entre ellos podemos mencionar al movimiento de rotación de la tierra, el péndulo, la corriente alterna, la luz, las mareas, el ciclo económico, la temperatura, los latidos del corazón, etc.

Para un mejor estudio de estos fenómenos, se usan a las funciones trigonométricas para crear los modelos de dichos fenómenos.

### Ejemplo:

En un pueblo de la sierra, la temperatura en grados centígrados, puede calcularse por:

$$T(t) = 16 - 7\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

Donde  $t$  está en horas y  $t = 0$  corresponde a la medianoche.

¿Cuál es la temperatura a las 4 pm?



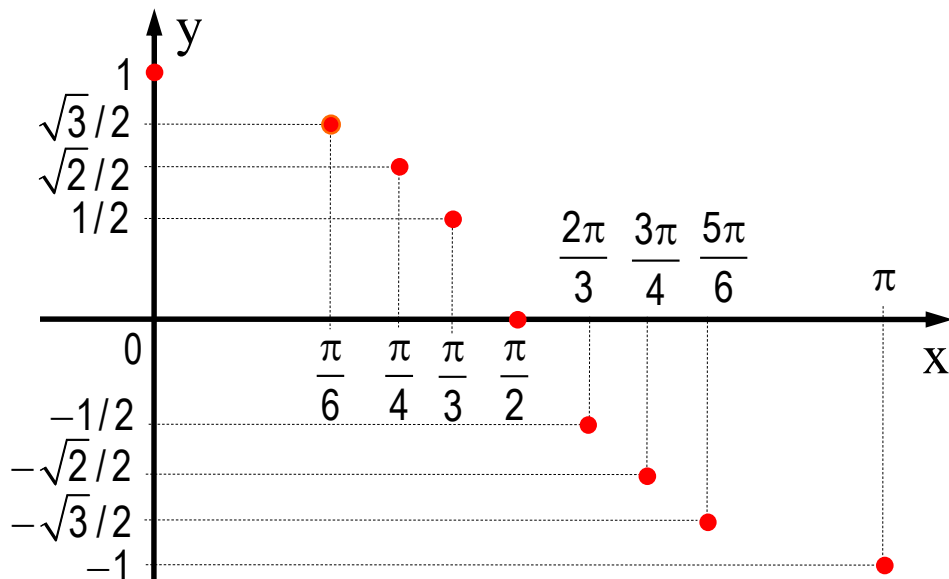
Rpta : **19,5°C**

# FUNCION COSENO :

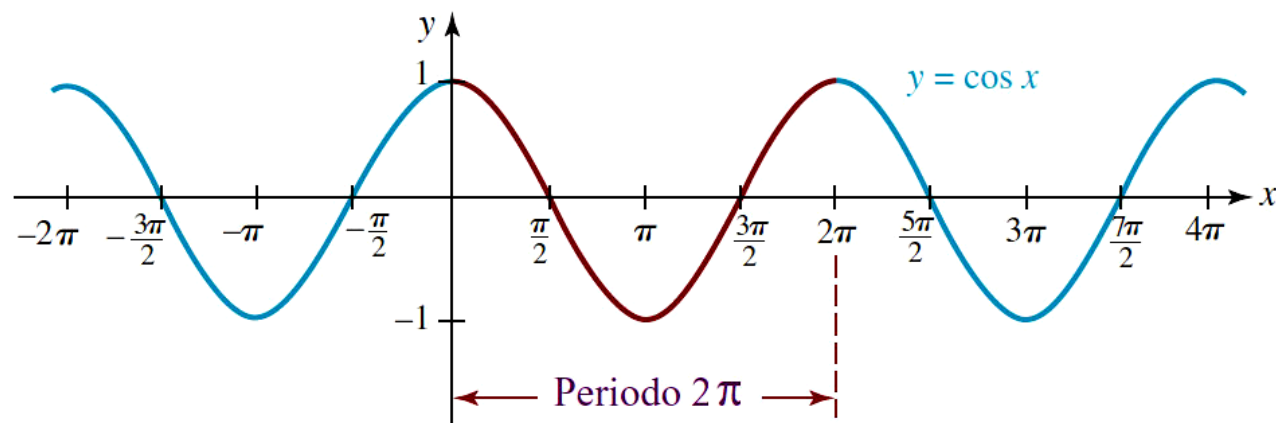
$$F = \{ (x; y) / y = \cos x ; x \in \mathbb{R} \}$$

Tabulando para algunos valores de x :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
y = cosx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1



Tabulando para más valores y uniendo dichos puntos obtenemos la curva :



**Dominio :**  $\text{Dom}(F) = \mathbb{R} ; x \in \mathbb{R}$

**Rango :**  $\text{Ran}(F) = [-1 ; 1] \Rightarrow -1 \leq \cos x \leq 1$

**Periodo :**  $T = 2\pi$

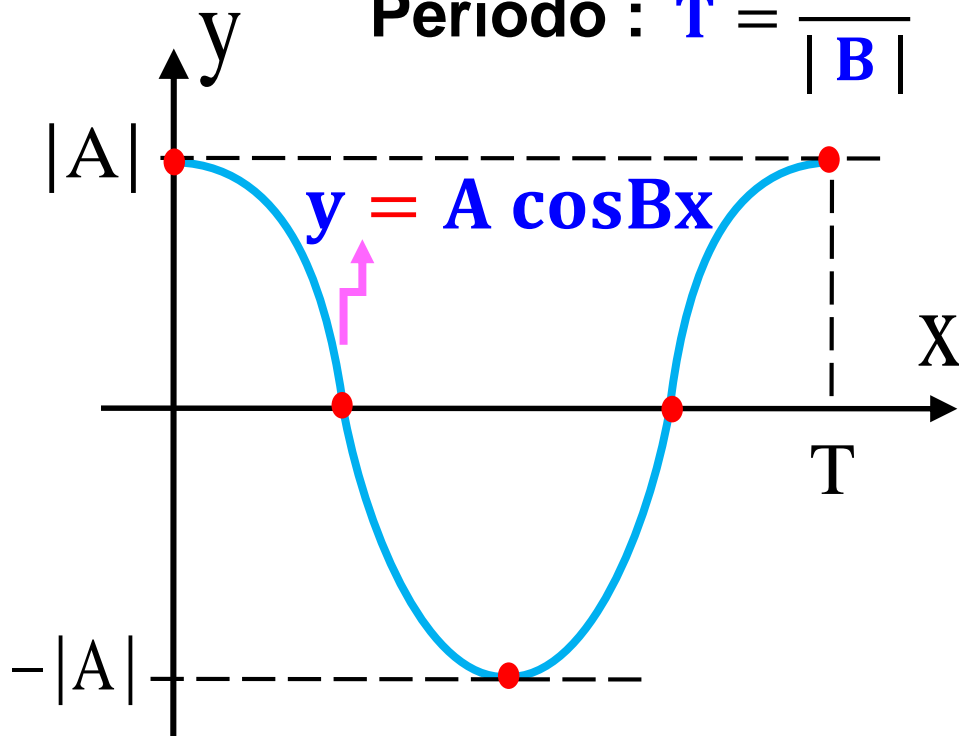
**Es función par :**  $\cos(-x) = \cos x$

## OBSERVACIÓN :

Sea la función :  $y = A \cos Bx$

➡ Amplitud :  $|A|$

Período :  $T = \frac{2\pi}{|B|}$

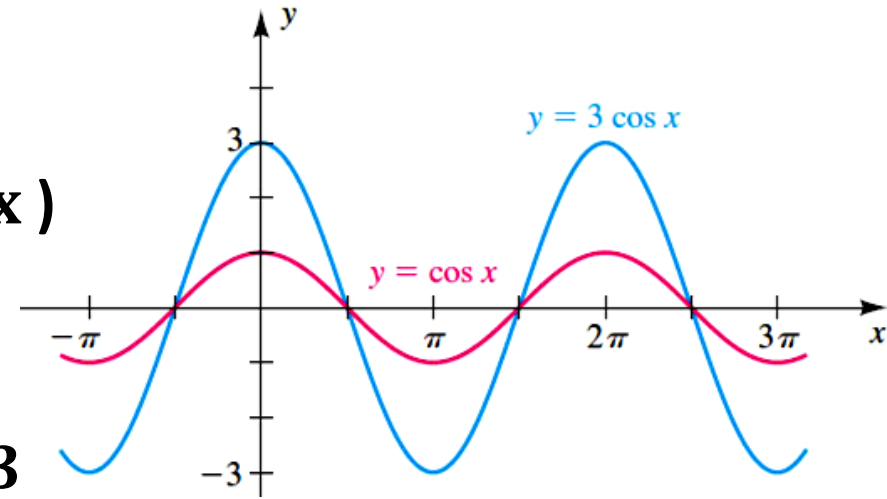


## Ejemplos :

•  $y = 3 \cos (1x)$

↑  
 $A$

↑  
 $B$



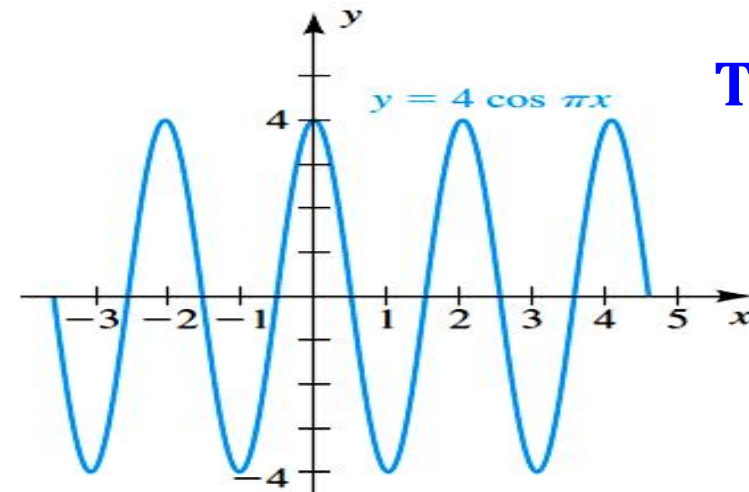
$|A| = |3| = 3$

$T = \frac{2\pi}{|B|} = \frac{2\pi}{|1|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

•  $y = 4 \cos (\pi x)$

$|A| = |4| = 4$

$T = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2$



# HELICO PRACTICE 1

Halle el rango de la función  $f(x) = 2 \cos x - 3$

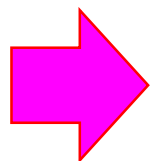
## RESOLUCIÓN

Recordar :  $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos x \leq 1$

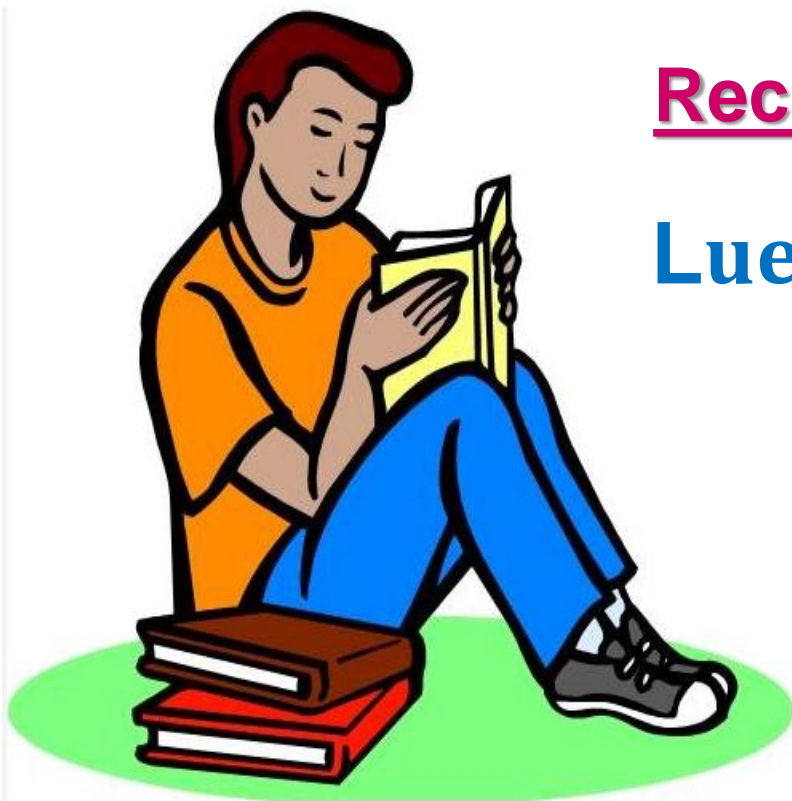
Luego :  $(-1 \leq \cos x \leq 1)(2)$

$$-2 - 3 \leq \underbrace{2 \cos x - 3}_{f(x)} \leq 2 - 3$$

$$-5 \leq f(x) \leq -1$$



$$\text{Ran}(f) = [-5; -1]$$



## HELICO PRACTICE 2

Halle el rango de la función  $g(x) = 4 \cos^2 x - 3$

### RESOLUCIÓN

Recordar :  $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq \cos x \leq 1$

Luego :  $(-1 \leq \cos x \leq 1)^2$

$$(0 \leq \cos^2 x \leq 1)(4)$$

$$0 - 3 \leq 4 \cos^2 x - 3 \leq 4 - 3$$

$$-3 \leq g(x) \leq 1$$

$$\text{Ran}(g) = [-3; 1]$$



## HELICO PRACTICE 3

Calcular  $T_1 + T_2$ , siendo  $T_1$  y  $T_2$  los periodos de las funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ , respectivamente ; donde  $f(x) = 3 \cos(2x)$  ;  $g(x) = 5 \cos\left(\frac{x}{4}\right)$

### RESOLUCIÓN

$$f(x) = 3 \cos(2x)$$

$\uparrow$   
 $B_1$

$$T_1 = \frac{2\pi}{|B_1|} = \frac{2\pi}{|2|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$g(x) = 5 \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$$

$\uparrow$   
 $B_2$

$$T_2 = \frac{2\pi}{|B_2|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$$

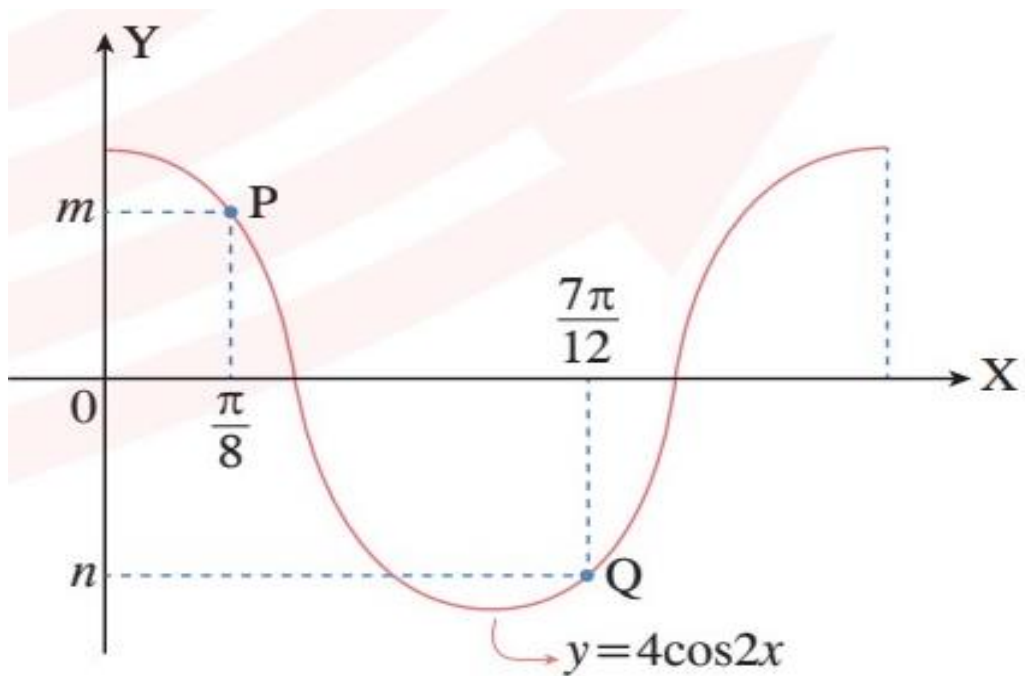
Luego :  $T_1 + T_2 = \pi + 8\pi$

$$\therefore T_1 + T_2 = 9\pi$$



# HELICO PRACTICE 4

Del gráfico, calcule  $E = m \cdot n$



**RESOLUCIÓN**

**Dato :**  $f(x) = y = 4 \cos 2x$

$$P\left(\frac{\pi}{8}; m\right) \in f$$

$$\Rightarrow m = 4 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right)$$

$$m = 4 \cos 45^\circ$$

$$m = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$m = 2\sqrt{2}$$

$$Q\left(\frac{7\pi}{12}; n\right) \in f$$

$$\Rightarrow n = 4 \cos\left(2 \cdot \frac{7\pi}{12}\right)$$

$$n = 4 \cos 210^\circ$$

III C

$$n = 4 \cos(180^\circ + 30^\circ)$$

$$n = 4 (-\cos 30^\circ)$$

$$n = 4 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$n = -2\sqrt{3}$$

Luego :

$$E = m \cdot n$$

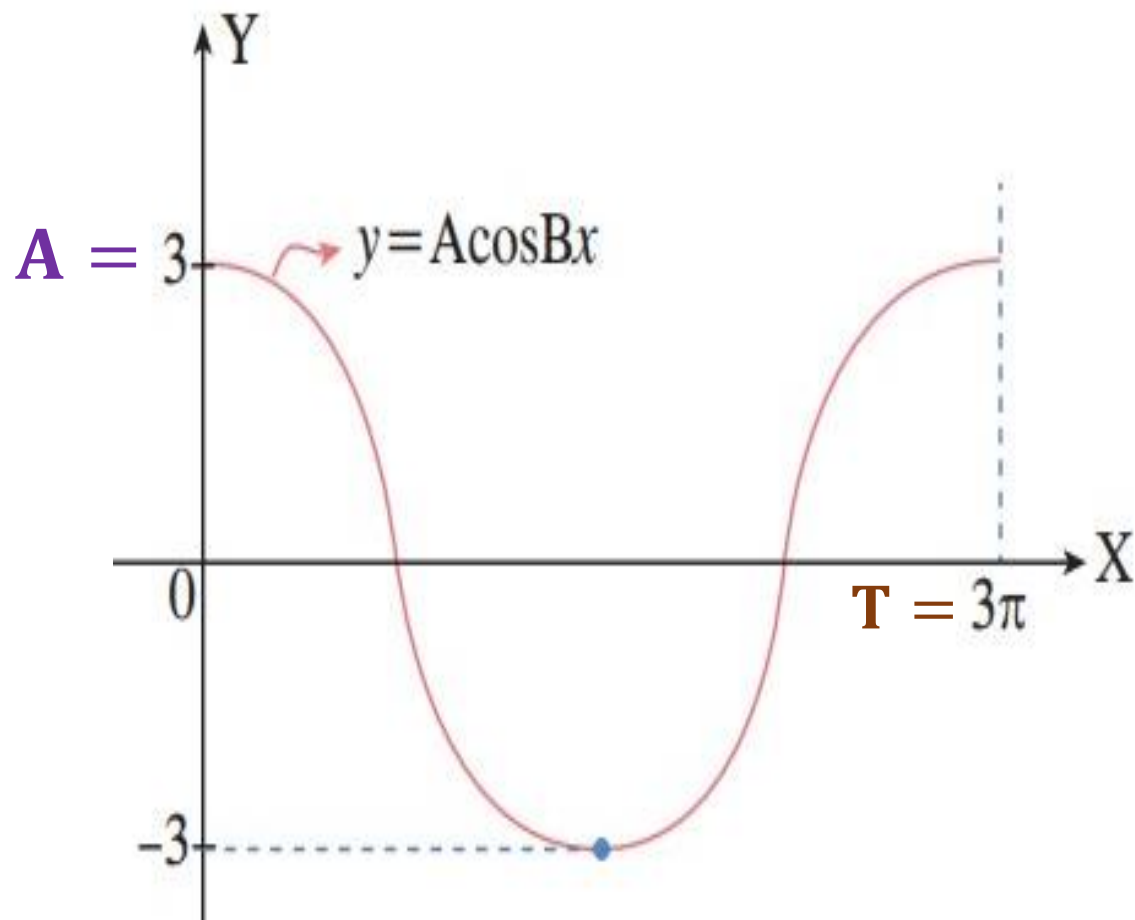
$$E = (2\sqrt{2})(-2\sqrt{3})$$

$$\therefore E = -4\sqrt{6}$$



# HELICO PRACTICE 5

Del gráfico calcule  $A + B$  .



## RESOLUCIÓN

Según figura :  $A > 0$  ;  $B > 0$

$$A = 3 ; T = 3\pi$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{B} = 3\pi \Rightarrow B = \frac{2}{3}$$

$$\text{Luego : } A + B = 3 + \frac{2}{3}$$

$$\therefore A + B = \frac{11}{3}$$

# HELICO PRACTICE 6

Una población de aves silvestres tiene modelo de crecimiento dado por :  
 $P(t) = 1000 \left[ 2 \cos \left( \frac{\pi}{n} t \right) + 5 \right]$  aves ; donde  $t$  se expresa en años, con  
 fluctuaciones periódicas de 7 años.- Determine el menor tiempo en el que  
 la población será de 6000 aves.

## RESOLUCIÓN

**Dato :**  $T = 7$

→  $\frac{2\pi}{B} = 7$

$$\frac{2\pi}{7} = B = \frac{\pi}{n}$$

$$P(t) = 1000 \left[ 2 \cos \left( \frac{2\pi}{7} t \right) + 5 \right]$$

$$6000 = 1000 \left[ 2 \cos \left( \frac{2\pi}{7} t \right) + 5 \right]$$

$$6 = 2 \cos \left( \frac{2\pi}{7} t \right) + 5$$

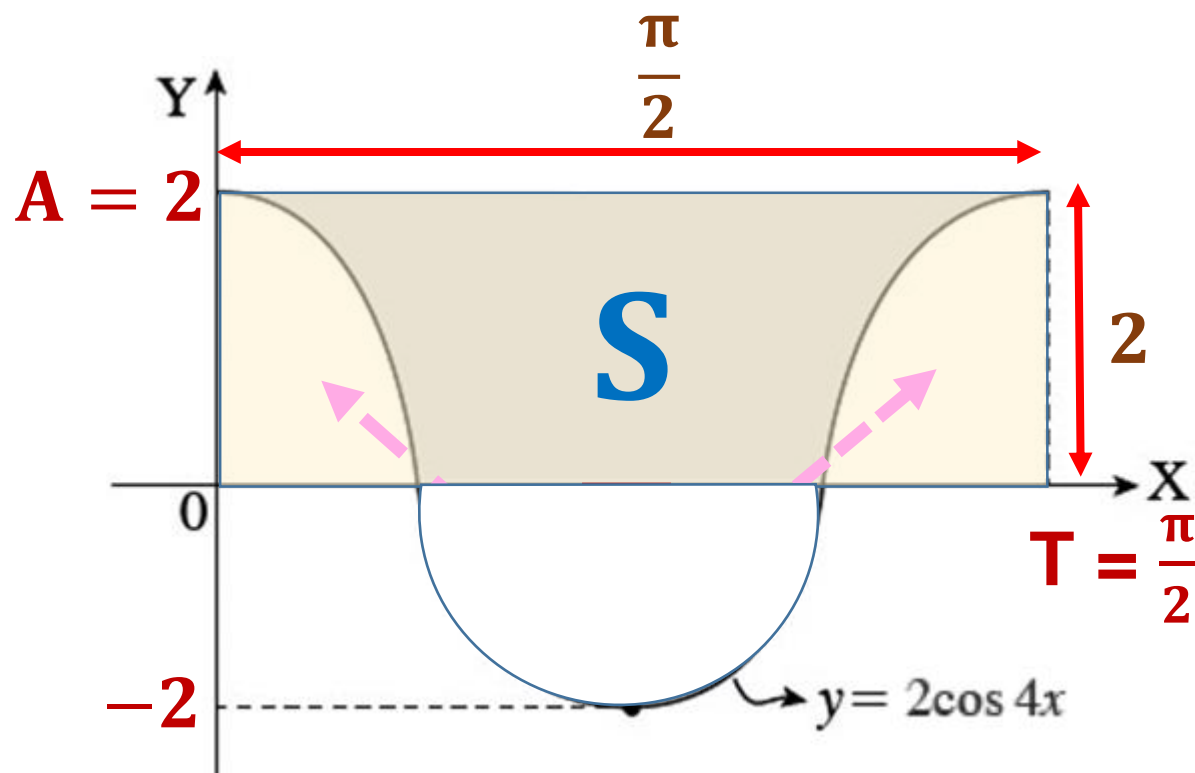
$$\frac{1}{2} = \cos \left( \frac{2\pi}{7} t \right)$$

**Luego :**  $\frac{2\pi}{7} t = \frac{\pi}{3}$   
 $t = \frac{7}{6}$  años

∴ El menor tiempo  
 es 1 año y 2 meses .

# HELICO PRACTICE 7

El siguiente gráfico muestra las ondas emitidas por un teléfono móvil .- Calcule el área de la región sombreada .



## RESOLUCIÓN

**Dato :**  $f(x) = y = 2 \cos(4x)$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
**A**                      **B**

Calculamos el periodo :

$$T = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{4} \rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

Calculamos el área sombreada :

$$S = \left(\frac{\pi}{2}\right)(2)$$

$$\therefore S = \pi u^2$$



**SACO**  
**OLIVEROS**