



ALGEBRA

Chapter 8

5th OF SECONDAR Y RADICACIÓ N



Helicomotivación



Ramanujan's nested radical



S. Ramanujan (1887-1920)

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}}$$

Proof: Define $f(x) = x + n + a$, so that $f(x)^2 = ax + (n + a)^2 + xf(x + n)$.

Set $a = 0$, $n = 1$, $x = 2$ and substitute recursively for $f(x)$.

RADICACIÓN



I) Simplificación de radicales

$$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

Recuerda

II) RADICALES DOBLES

Radicales dobles a simples

$$\sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}; x > y$$

$$\sqrt{10 + 2\sqrt{21}} = \sqrt{7} + \sqrt{3}$$

$$7 + 3 = 10$$

$$7(3) = 21$$

$$\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$3 + 2 = 5$$

$$3(2) = 6$$

III)

RACIONALIZACIÓN

N

PRIMER

CASO

multiplicando por el factor racionalizante

$$\frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \right) = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5}{\sqrt{7}} \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \right) = \frac{5\sqrt{7}}{7}$$



SEGUNDO

CASO

Multiplicando por el factor racionalizante y luego diferencia de cuadrados

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{3}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \right) = \frac{3(\sqrt{5} - \sqrt{2})}{5 - 2} = (\sqrt{5} - \sqrt{2})$$

$$\frac{7}{3 - \sqrt{2}} = \frac{7}{(3 - \sqrt{2})} \left(\frac{3 + \sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} \right) = \frac{7(3 + \sqrt{2})}{9 - 2} = (3 + \sqrt{2})$$



Simplifique:

$$\frac{3\sqrt{8}+5\sqrt{32}+\sqrt{128}}{\sqrt{50}-\sqrt{18}}$$

Resolución

Transformando a radicales semejantes

→
$$\frac{3\sqrt{(4)(2)}+5\sqrt{(16)(2)}+\sqrt{(64)(2)}}{\sqrt{(25)(2)}-\sqrt{(9)(2)}}$$

→
$$\frac{6\sqrt{2}+20\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-3\sqrt{2}}$$

→
$$\frac{34\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \rightarrow \therefore \boxed{17}$$

PROBLEMA 2

Halle el valor de:

$$T = \sqrt{9 + \sqrt{80}} + \sqrt{7 - \sqrt{48}} - \sqrt{8 - \sqrt{60}}$$

Resolución

$$T = \sqrt{9 + \sqrt{4 \cdot 20}} + \sqrt{7 - \sqrt{4 \cdot 12}} - \sqrt{8 - \sqrt{4 \cdot 15}}$$

Aplicando el método práctico

$$T = \sqrt{9 + 2\sqrt{20}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} - \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}$$

$$T = \cancel{\sqrt{5}} + \sqrt{4} + \sqrt{4} - \cancel{\sqrt{3}} - (\cancel{\sqrt{5}} - \cancel{\sqrt{3}})$$

$$\therefore T = 4$$

Radicales dobles a simples

$$\sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}; x > y$$

Recuerda



PROBLEMA 3

Efectúe $T = \frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}}$

Resolución

multiplicando por el factor racionalizante

$$K = \frac{2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})} + \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{5}{\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$$

$$K = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2} + \frac{3\sqrt{3}}{3} - \frac{5\sqrt{5}}{5}$$

$$K = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$$



$$\therefore K = 0$$

PROBLEMA 4



Calcule el valor de $M = \frac{22}{2\sqrt{3}+1} - \frac{4}{2-\sqrt{3}}$

Resolución

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Multiplicando por el factor racionalizante luego diferencia de cuadrados

$$M = \frac{22}{(2\sqrt{3} + 1)} \frac{(2\sqrt{3} - 1)}{(2\sqrt{3} - 1)} - \frac{4}{(2 - \sqrt{3})} \frac{(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})}$$

$$M = \frac{22(2\sqrt{3} - 1)}{12 - 1} - \frac{4(2 + \sqrt{3})}{4 - 3}$$

$$M = 2(2\sqrt{3} - 1) - 4(2 + \sqrt{3})$$

$$M = 4\cancel{\sqrt{3}} - 2 - 8 - 4\cancel{\sqrt{3}}$$

$$\therefore M = -10$$

PROBLEMA 5



Calcule A+B , si: $\frac{2}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}} + \frac{5}{\sqrt{7+2\sqrt{6}}} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$

Resolución

Recuerda

Aplicando el método práctico

$$\frac{2}{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3 \cdot 1}}} + \frac{5}{\sqrt{(6+1)+2\sqrt{6 \cdot 1}}} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{5}{\sqrt{6}+1}$$

Radicales dobles a simples
 $\sqrt{x+y} \pm 2\sqrt{xy} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y}; x > y$

$$\frac{2}{(\sqrt{3}-1)} \frac{(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} + \frac{5}{\sqrt{6}+1} \frac{(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}-1)} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} + \frac{5(\sqrt{6}-1)}{6-1} = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{6} - 1$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{6} = \sqrt{A} + \sqrt{B}$$

Identificando

$$A=3 \text{ y } B=6$$

$$\therefore \boxed{A+B=9}$$

PROBLEMA 6

Un padre le dice a sus dos hijos Ignacio y Marcelo: La propina en soles que recibirán a diario está dada al hallar los valores de A y B de:

$$\sqrt{5\sqrt{6}+12} = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B}, A > B.$$

A y B es la propina de Ignacio y Marcelo respectivamente.

¿Cuánto de propina reciben Ignacio y Marcelo juntos?

Resolución

$$12 = \sqrt{144} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{6}\sqrt{24}$$

$$\sqrt{24} = 2\sqrt{6} = 2\sqrt{3 \cdot 2}$$

$$\begin{aligned} &\sqrt{5\sqrt{6} + \sqrt{144}} \\ &\sqrt{5\sqrt{6} + \sqrt{6}\sqrt{24}} \\ &\sqrt{\sqrt{6}(5 + \sqrt{24})} \end{aligned}$$

$$\sqrt[4]{6} \sqrt{5 + \sqrt{24}}$$

$$\sqrt[4]{6} \sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$$

$$\sqrt[4]{6} (\sqrt{3} + \sqrt{2})$$

Homogenizando índices

$$\sqrt[4]{6} (\sqrt[4]{9} + \sqrt[4]{4})$$

$$\sqrt[4]{54} + \sqrt[4]{24} = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B}$$

Identificando

Juntos reciben

$$A=54 \text{ y } B=24$$

∴ **78 soles**

PROBLEMA 7

Andrea y Beatriz son dos amigas que cumplen años el mismo mes; Andrea cumple años el día ***m*** de dicho mes, mientras que Beatriz cumple años el día ***n***. Determine, quien cumple años primero y que día, sabiendo que ***m*** y ***n*** se obtienen de

$$\frac{N^4}{\sqrt{2}\sqrt{7-\sqrt{45}}} = m + \sqrt{n} \quad \text{donde:} \quad N = \sqrt{10 + 2\sqrt{15} + \sqrt{24} + \sqrt{40}} - \sqrt{8 + 2\sqrt{15}}$$

Resolución

$$N = \sqrt{\underbrace{10}_{2+3+5} + \underbrace{2\sqrt{15}}_{3 \cdot 5} + \underbrace{2\sqrt{6}}_{2 \cdot 3} + \underbrace{2\sqrt{10}}_{2 \cdot 5}} - \sqrt{\underbrace{8}_{3+5} + \underbrace{2\sqrt{15}}_{3 \cdot 5}}$$

$$N = (\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}) - (\sqrt{3} + \sqrt{5})$$

$$N = \sqrt{2}$$

Reemplazando:

$$\frac{\sqrt{2}^4}{\sqrt{2}\sqrt{7-\sqrt{45}}} = m + \sqrt{n}$$

$$\frac{4}{\sqrt{\underbrace{14}_{5+9} - \underbrace{2\sqrt{45}}_{5 \cdot 9}}} = m + \sqrt{n}$$

$$\frac{4}{\sqrt{9} - \sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{9} + \sqrt{5}}{\sqrt{9} + \sqrt{5}} \right) = m + \sqrt{n}$$

$$\frac{4}{9-5} (\sqrt{9} + \sqrt{5}) = m + \sqrt{n}$$

$$3 + \sqrt{5} = m + \sqrt{n}$$

$$\rightarrow m = 3 ; n = 5$$

Andrea cumple años primera el día 3