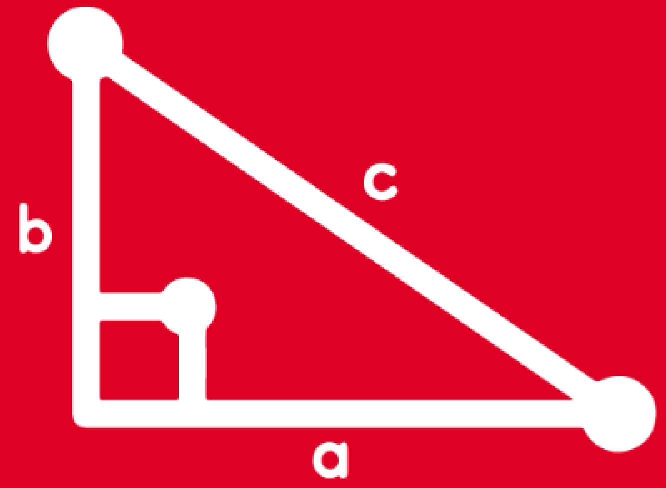
TRIGONOMETRY

Chapter 16

5th
SECONDARY

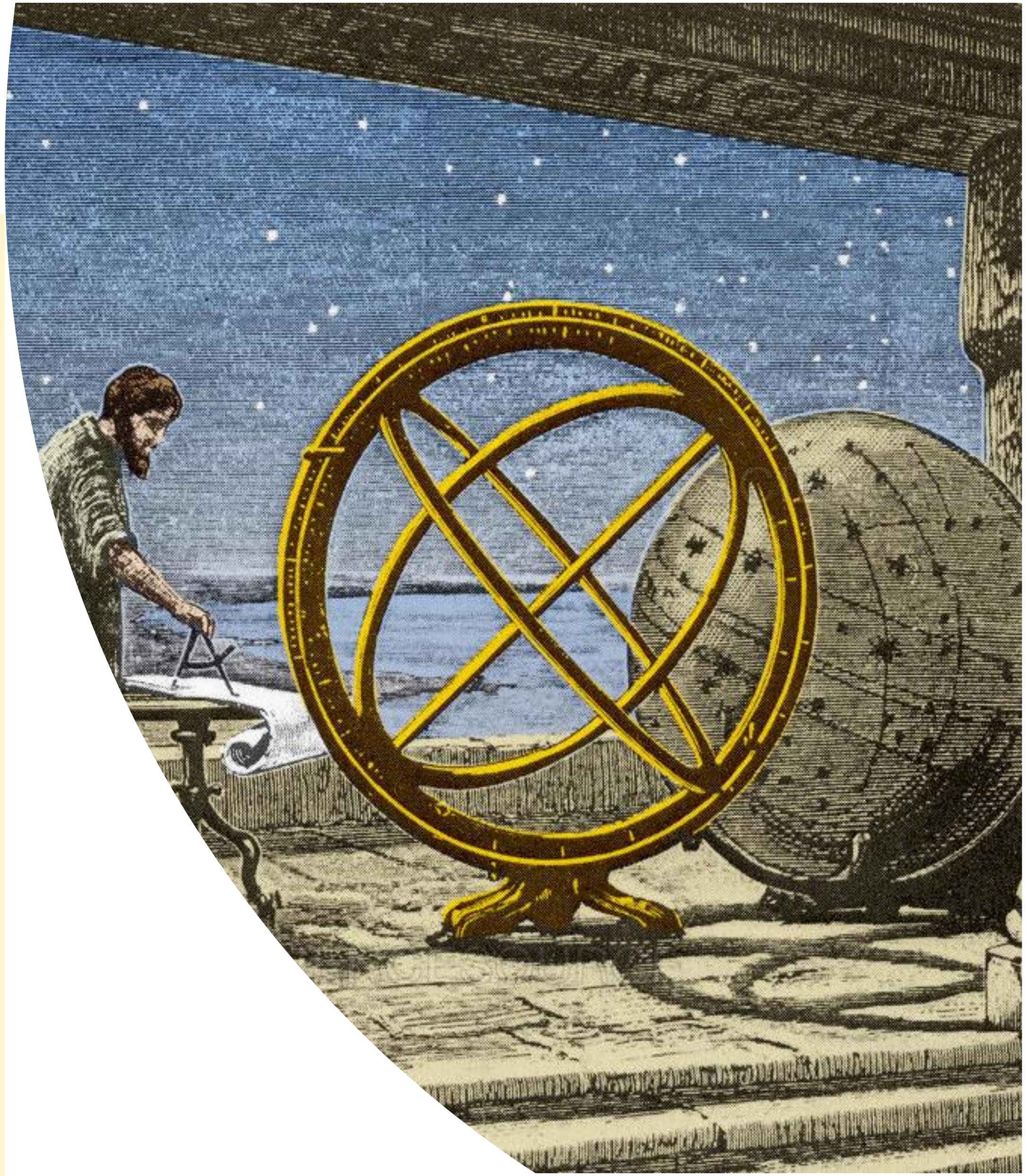


IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES DEL ÁNGULO DOBLE

SACO OLIVEROS

HISTORIA DE LA TRIGONOMETRÍA

- El padre de la trigonometría es Hiparco: nació en Nicea de Bithynia (actualmente Iznik, al noroeste de Turquía).
- Nació alrededor del año 190 A.C; efectuó sus primeras observaciones astronómicas en su ciudad natal y más tarde se marchó a la isla de Rodas en la zona suroeste del Mar Egeo, fue aquí donde realizó sus principales trabajos, algunos historiadores lo sitúan como un astrónomo visitante en Alejandría y también fue ahí donde realizó otros importantes trabajos.
- Este genio de la antigüedad vivió en el periodo conocido como Helenismo.



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES DEL ÁNGULO DOBLE

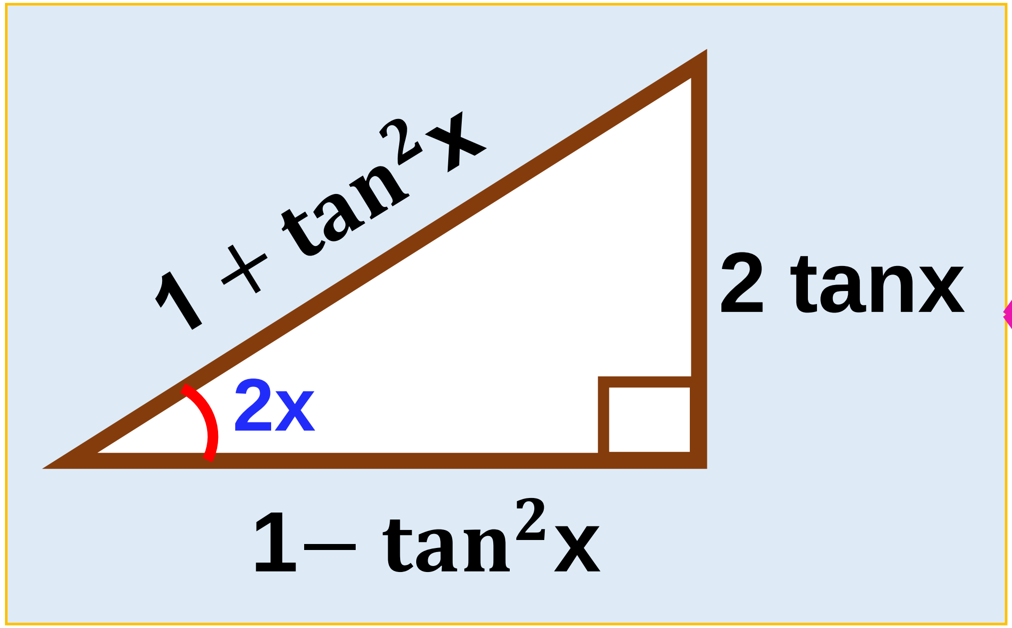
I) IDENTIDADES DE DEGRADACIÓN :

$\cos 2x =$

- $2\cos^2 x - 1 \;\longrightarrow\; 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$
- $1 - 2\,\mathrm{sen}^2 x \;\longrightarrow\; 2\,\mathrm{sen}^2 x = 1 - \cos 2x$



II) TRIÁNGULO PRÁCTICO DEL ÁNGULO DOBLE :



$$\operatorname{sen}2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

III) OTRAS IDENTIDADES AUXILIARES :

$$\cot x - \tan x = 2\cot 2x$$

$$\cot x + \tan x = 2\csc 2x$$

$$(\operatorname{sen} x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \operatorname{sen} 2x$$

$$\sec 2x - 1 = \tan 2x \cdot \tan x$$

$$\sec 2x + 1 = \tan 2x \cdot \cot x$$

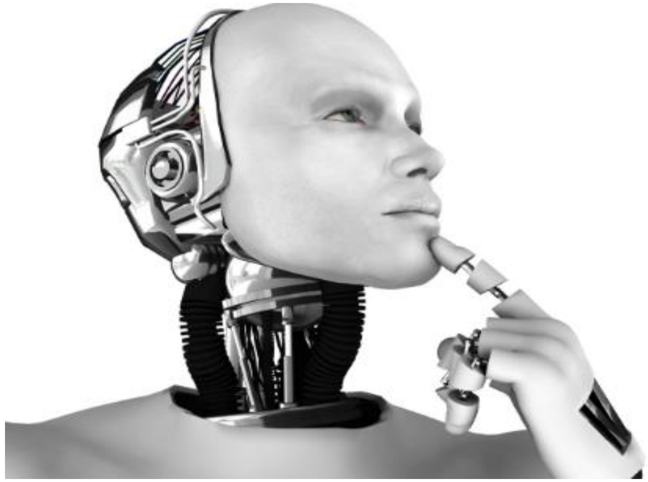
HELICO PRACTICE 1

Simplifique la expresión $E = (\cot x + \tan x)\,\operatorname{sen}2x$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\cot x + \tan x = 2\csc 2x$$



$$E = (\underbrace{\cot x + \tan x}) \operatorname{sen}2x$$

$$E = 2\,\underbrace{\csc 2x \;.\; \operatorname{sen}2x}$$

$$E = 2\;(1)$$

$$\therefore E = 2$$

HELICO PRACTICE 2

Si para un ángulo agudo θ se cumple que :

$$\frac{1-\cos 2\theta+\operatorname{sen} 2\theta}{1+\cos 2\theta+\operatorname{sen} 2\theta}=\frac{1}{5}\text{ ; calcular sen}2\theta$$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$1-\cos 2\theta = 2\operatorname{sen}^2\theta$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\,.\,\cos\theta$$

$$1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$$\frac{2\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\,.\,\cos\theta}{2\cos^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\,.\,\cos\theta}=\frac{1}{5}$$

$$\frac{\cancel{2}\operatorname{sen}\theta\,\cancel{(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}}{\cancel{2}\cos\theta\,\cancel{(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}}=\frac{1}{5} \Rightarrow \tan\theta=\frac{1}{5}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{\frac{2}{5}}{1+\frac{1}{25}}=\frac{\frac{2}{5}}{\frac{26}{25}}=\frac{2\,.\,25}{5\,.\,26}$$

$$\therefore\ \operatorname{sen} 2\theta = \frac{5}{13}$$

HELICO PRACTICE 3

Al copiar de la pizarra la expresión 1 + cos80°, un estudiante cometió un error y escribió sen80° .
Calcule la razón entre lo que estaba escrito en la pizarra y lo que copió el estudiante .

RESOLUCIÓN

Recordar :

$1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta$

$$\frac{\text{pizarra}}{\text{cuaderno}} = \frac{1+\cos 80^\circ}{\operatorname{sen} 80^\circ}$$

$$\frac{\text{pizarra}}{\text{cuaderno}} = \frac{\cancel{2}\cos^2 40^\circ}{\cancel{2}\operatorname{sen}40^\circ \cdot \cos 40^\circ} = \frac{\cos 40^\circ}{\operatorname{sen}40^\circ}$$

$$\therefore \frac{\text{pizarra}}{\text{cuaderno}} = \cot 40^\circ$$

HELICO PRACTICE 4

Un árbol, al caer se inclina 7°30’ respecto a la vertical y luego se rompe generando una sombra de 8 m , tal como muestra la figura.

Si $4\sqrt{4+\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ m es la altura original del árbol, calcule a + b .

RESOLUCIÓN

$$\left\{\cancel{4}\sqrt{4+\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\overset{2}{\cancel{8}}\left[\text{sen}\left(\frac{15°}{2}\right)+\cos\left(\frac{15°}{2}\right)\right]\right\}^2$$

$$4+\sqrt{a}-\sqrt{b}=4[\,1+\text{sen}15°\,]$$

$$\left\{\cancel{4}+\sqrt{a}-\sqrt{b}=\cancel{4}+4\,\text{sen}15°\right\}^2$$

$$a+b-2\sqrt{ab}=8\,(\,2\,\text{sen}^2 15°\,)=8\,(\,1-\cos30°\,)$$

$$=8-8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=8-4\sqrt{3}=8-2\sqrt{4\,.\,3}$$

$$a+b-2\sqrt{ab}=8-2\sqrt{12}$$

$$\boxed{\therefore\ a+b=8}$$

HELICO PRACTICE 5

Calcule el valor de E = $\dfrac{\cot\left(\frac{\pi}{12}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{8}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$

RESOLUCIÓN

Recordar :

cotx + tanx = 2 csc2x

cotx – tanx = 2 cot2x

π rad <> 180°

$$E=\frac{\cot\left(\frac{\pi}{12}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{8}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$$

$$E=\frac{\cancel{2}\csc\left(\frac{2\pi}{12}\right)}{\cancel{2}\cot\left(\frac{2\pi}{8}\right)}$$

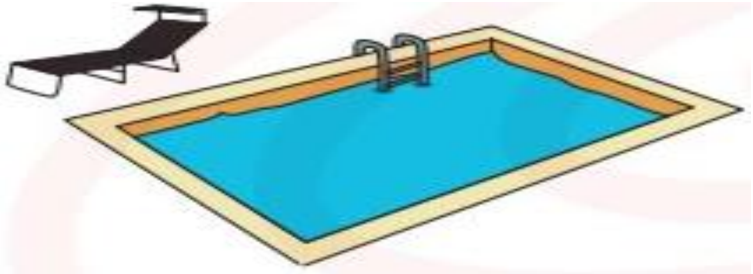
$$E=\frac{\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$E=\frac{\csc 30^\circ}{\cot 45^\circ}=\frac{2}{1}$$

$$\therefore E=2$$

HELICO PRACTICE 6

El señor Castillo compró una casa en el distrito de La Molina ; en la parte posterior de la vivienda se ubica una piscina rectangular cuyas longitudes de dos lados adyacentes son (3A) m y (4B) m ; además, la piscina tiene una profundidad uniforme de 2 m.



Si $A = (\cot 40° + \tan 40°)\cos 10°$ y
$B = (\cot 35° - \tan 35°)\cot 20°$;
calcule el volumen necesario de agua para llenar la piscina .

RESOLUCIÓN

$A = (\cot 40° + \tan 40°)\cos 10°$

$A = (2\csc 2(40°)) \cdot \text{sen}\,80°$

$A = 2\csc 80° \cdot \text{sen}\,80° = 2(1) \Rightarrow A = 2$

$B = (\cot 35° - \tan 35°)\cot 20°$

$B = (2\cot 2(35°)) \cdot \tan 70°$

$B = 2\cot 70° \cdot \tan 70° = 2(1) \Rightarrow B = 2$

$V = (3 \cdot 2\text{ m})(4 \cdot 2\text{ m})(2\text{ m})$

$V = (6\text{ m})(8\text{ m})(2\text{ m})$

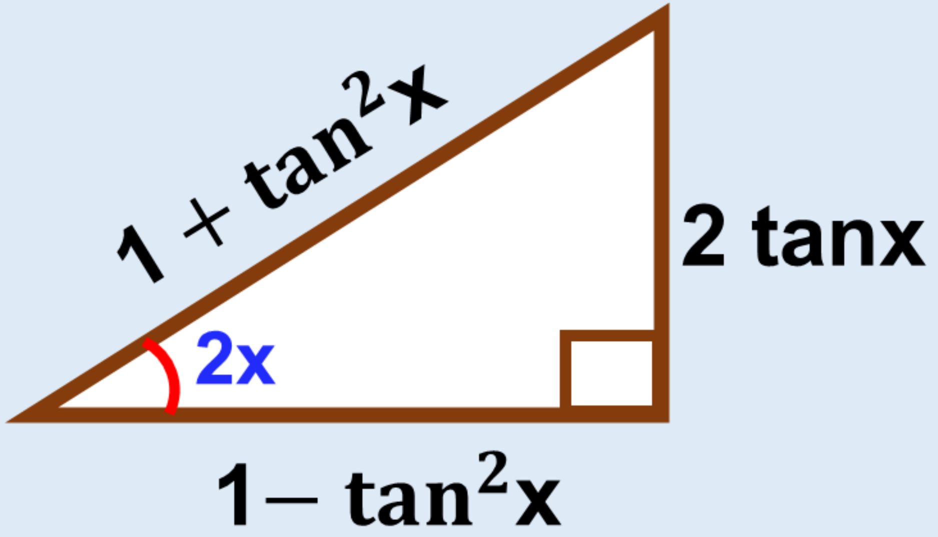
$\therefore$ **Volumen = 96 m^3**

HELICO PRACTICE 7

Simplifique y evalúe M para $x = \frac{\pi}{8}$; $M = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$

RESOLUCIÓN

Recordar :



$$M = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} + \frac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$$

$$M = \operatorname{sen}2x + \sec 2x = \operatorname{sen}2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sec 2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$M = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \sec\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}45° + \sec 45°$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\therefore M = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

SACO OLIVEROS