

TRIGONOMETRY

Chapter 11

5th
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS I





En matemáticas uno no entiende las cosas, se acostumbra a ellas.

(John von Neumann)

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS I

IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA : Es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas y que se verifica para todo valor admisible de la/s variable/s .

Expresiones Trigonométricas : Son expresiones matemáticas donde las variables están afectadas por operadores trigonométricos : **sen**, **cos**, **tan**, **cot**, **sec**, **csc** .

Identidades Fundamentales : Son también llamadas identidades trigonométricas básicas, porque se obtienen luego de relacionar las líneas trigonométricas en la circunferencia trigonométrica. Se clasifican en:

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

A) Identidades Por División :

$$\tan x = \frac{\text{sen} x}{\text{cos} x}$$

$$\forall x \neq (2n + 1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = \frac{\text{cos} x}{\text{sen} x}$$

$$\forall x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}$$

B) Identidades Recíprocas :

$$\text{sen} x \cdot \text{csc} x = 1$$

$$\forall x \neq n\pi; n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{cos} x \cdot \text{sec} x = 1$$

$$\forall x \neq (2n + 1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$\forall x \neq \frac{n\pi}{2}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{sen} x = \frac{1}{\text{csc} x}$$

$$\text{csc} x = \frac{1}{\text{sen} x}$$

$$\text{cos} x = \frac{1}{\text{sec} x}$$

$$\text{sec} x = \frac{1}{\text{cos} x}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

C) Identidades Pitagóricas :

$$\text{sen}^2 x + \text{cos}^2 x = 1 ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 1 - \text{cos}^2 x \\ \text{cos}^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \end{cases}$$

$$\text{sec}^2 x - \text{tan}^2 x = 1 ; \forall x \neq (2n + 1) \frac{\pi}{2} ; n \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{sec}^2 x = 1 + \text{tan}^2 x \\ \text{tan}^2 x = \text{sec}^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\text{csc}^2 x - \text{cot}^2 x = 1 ; \forall x \neq n\pi ; n \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{csc}^2 x = 1 + \text{cot}^2 x \\ \text{cot}^2 x = \text{csc}^2 x - 1 \end{cases}$$

Propiedades :

Si : $\text{sec } x + \text{tan } x = a$

Entonces :

$$\text{sec } x - \text{tan } x = \frac{1}{a}$$

Si : $\text{csc } x + \text{cot } x = b$

Entonces :

$$\text{csc } x - \text{cot } x = \frac{1}{b}$$

HELICO PRACTICE 1

Reduzca la expresión $E = \operatorname{sen}^3 x \cdot \operatorname{csc} x + \operatorname{cos}^3 x \cdot \operatorname{sec} x$

RESOLUCIÓN

$$E = \operatorname{sen}^3 x \cdot \operatorname{csc} x + \operatorname{cos}^3 x \cdot \operatorname{sec} x$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x \cdot \underbrace{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} x}_1 + \operatorname{cos}^2 x \cdot \underbrace{\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sec} x}_1$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x$$

$$\therefore E = 1$$

Recordar las identidades:

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{csc} x = 1$$

$$\operatorname{cos} x \cdot \operatorname{sec} x = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$$

HELICO PRACTICE 2

Reduzca $W = \frac{\csc \theta + \sec \theta}{1 + \tan \theta}$

RESOLUCIÓN

$$W = \frac{\csc \theta + \sec \theta}{1 + \tan \theta}$$

$$W = \frac{\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}}{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}$$

$$W = \frac{\frac{(\cos \theta + \sin \theta) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta}{(\cos \theta + \sin \theta)}}{\cos \theta}$$

$$W = \frac{(\cancel{\cos \theta + \sin \theta}) \cdot \cancel{\cos \theta}}{\sin \theta \cdot \cancel{\cos \theta} \cdot (\cancel{\cos \theta + \sin \theta})}$$

$$W = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\therefore W = \csc \theta$$

Recordar las identidades :

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

HELICO PRACTICE 3

Reduzca $E = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} - \sec^2 x$

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} - \sec^2 x$$

$$E = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sec^2 x$$

$$E = \tan^2 x - \sec^2 x$$

$$\therefore E = -1$$

Recordar las identidades :

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

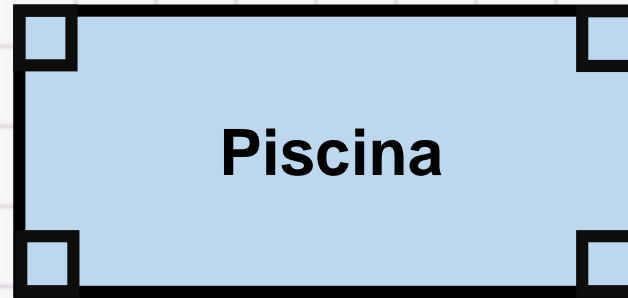
$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

HELICO PRACTICE 4

Mi amiga María se ha matriculado en una piscina que queda cerca de su casa, para aprender a nadar .- La piscina tiene forma rectangular, como muestra el dibujo y sus dimensiones son las siguientes:



Ancho: $5A$ metros

Largo: $10A$ metros

En una hora en que María está en la piscina, ella comienza nadando 3 veces el ancho para calentar los músculos, y después nada 6 largos completos como le indica su monitor.- ¿Cuántos metros nadó María?

Para resolver el problema, primero halle el valor de A en la siguiente identidad :

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = A \cot x$$

HELICO PRACTICE 4

RESOLUCIÓN

$$\frac{\cancel{\text{sen}x} + \cancel{\text{sen}x}}{1 - \cos x + 1 + \cos x} = \frac{\text{sen}x(1 + \cos x) - \text{sen}x(1 - \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$\frac{\cancel{\text{sen}x} + \text{sen}x \cdot \cos x - \cancel{\text{sen}x} + \text{sen}x \cdot \cos x}{(1 - \cos^2 x)} = \frac{2\cancel{\text{sen}x} \cdot \cos x}{\cancel{\text{sen}^2} x}$$

$$\frac{2\cos x}{\text{sen}x} = 2\cot x \quad \Rightarrow \quad 2\cot x = A \cot x \quad \Rightarrow \quad A = 2$$

Ancho : $5A = 5(2) = 10 \text{ m}$

Largo : $10A = 10(2) = 20 \text{ m}$

\Rightarrow María nadó = $3(10 \text{ m}) + 6(20 \text{ m})$

\therefore María nadó
150 m

HELICO PRACTICE 5

Si x es un ángulo del segundo cuadrante, reduzca la expresión :

$$E = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{csc} x} - \cos x \sqrt{\frac{\operatorname{csc}^2 x - \cot^2 x}{1 + \tan^2 x}}$$

RESOLUCIÓN

$$E = \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{1}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} - \cos x \sqrt{\frac{1}{\sec^2 x}}$$

$$E = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1} - \cos x \sqrt{\cos^2 x}$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x - \cos x \cdot |\cos x|$$

$$x \in \text{IIC} \Rightarrow \cos x < 0$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x - \cos x (-\cos x)$$

$$E = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$$

$$\therefore E = 1$$

$$\operatorname{csc} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\operatorname{csc}^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x}$$

HELICO PRACTICE 6

Vía internet, se realizó una encuesta para saber el número de seguidores de la página web “Trigonometry Forever”; el resultado obtenido revela que dicha página tiene: $(1000 \sec^2 x \cdot \csc^2 x + 235)$ seguidores, con la condición de $\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. – ¿Cuántos seguidores tiene dicha página?

RESOLUCIÓN

Dato : $\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Rightarrow (\operatorname{sen} x - \operatorname{cos} x)^2 = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = \frac{1}{2}$$

$$2 \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{cos} x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sec x \cdot \csc x = 4$$

$$\sec^2 x \cdot \csc^2 x = 16$$

Luego : N° de seguidores = $1000(16) + 235$

∴ La página web tiene 16235 seguidores.



Un alumno observa que las longitudes de dos lados de un cuadrado miden $(3 \operatorname{sen} x) \text{ m}$ y $(2 + 2 \operatorname{cos} x) \text{ m}$; con esta información, dar el valor de $12(1 - \cot x)$.

RESOLUCIÓN

En un cuadrado sus lados son iguales, entonces :

$$3 \operatorname{sen} x = 2 + 2 \operatorname{cos} x$$

$$\Rightarrow 3 \operatorname{sen} x = 2(1 + \operatorname{cos} x)$$

$$\frac{3}{2} = \operatorname{csc} x + \cot x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \operatorname{csc} x - \cot x$$

RESTAMOS

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = 2 \cot x$$

$$\frac{9 - 4}{6} = 2 \cot x$$

$$\frac{5}{6} = 2 \cot x$$

$$\frac{5}{12} = \cot x$$

Calculamos E :

$$E = 12(1 - \cot x)$$

$$E = 12\left(1 - \frac{5}{12}\right)$$

$$E = 12\left(\frac{7}{12}\right)$$

$$\therefore E = 7$$



SACO
OLIVEROS