ARITHMETIC

Chapter 13

4th
SECONDARY

MCD-MCM

SACO OLIVEROS

Una regla muy poco considerada para el cálculo del MCD es la REGLA DE STURM

Calcule el MCD de 2520; 3060; 2790 y 4545.

Resolución

2520	3060	2790	4545	
	-2520	-2520	-2520	
2520	540	270	2025	← *Residuo*
-2430	-540		-1890	
90	0	270	135	← *Residuo*
		-270	-90	
90		0	45	
-90				
0			45	= MCD

MCD - MCM

1 MCD

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCD es aquel número que cumple dos condiciones.

- Es un divisor común de dichos números.
- Es el mayor de los divisores comunes.

Ejm

Sean los números 18 y 24

#	Divisores Z^+
18	1; 2; 3; 6; 9; 18
24	1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24

MCD(18; 24) = 6

Divisores comunes de 18 y 24

➡ 1; 2; 3 y 6

En conclusión:

Sean los números A y B

$$CD_{comunes\ de\ A\ y\ B} = CD_{MCD(A;B)}$$

2 MCM

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCM es aquel número que cumple dos condiciones.

- Es múltiplo común de dichos números.
- Es el menor posible.

Ejm Sean los números 8 y 12

#	Múltiplos Z^+
8	8; 16; 24; 32; 40; 48; ...
12	12; 24; 36; 48; 60; ...

Múltiplos comunes de 8 y 12

➡ 24; 48; 72; 96; ...

MCM(8; 12) = 24

MÉTODOS PARA DETERMINAR EL MCD-MCM

A Por descomposición canónica

El MCD es igual al producto de sus factores primos comunes elevados a los menores exponentes posibles.

Ejm **Dados los números A,B y C**

Si

$$A = 2^4 \times 3^5 \times 5^2$$
$$B = 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$$
$$C = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$$

$$\text{MCD(A, B, C)} = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$$

El MCM es igual al producto de sus factores primos comunes y no comunes elevados a los mayores exponentes posibles.

Ejm **Dados los números A,B y C**

Si

$$A = 2^4 \times 3 \times 5^2$$
$$B = 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$$
$$C = 2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 7$$

$$\text{MCM(A,B,C)} = 2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^2$$

B

Por descomposición simultanea

El **MCD** es el producto de sus factores comunes. (**El procedimiento termina al encontrar los números PESI**)

Ejm

Calcule el MCD de 56; 140 y 168

$$\begin{array}{ccccc|c} 56 & - & 140 & - & 168 & 2 \\ 28 & - & 70 & - & 84 & 2 \\ 14 & - & 35 & - & 42 & 7 \\ 2 & - & 5 & - & 6 & \end{array}$$

PESI

$\mathrm{MCD}(56; 140; 168) = 2^2 \times 7 = 28$

El **MCM** es el producto de sus factores (**El procedimiento termina al encontrar La unidad**)

Ejm

Calcule el MCM de 35; 15 y 21

$$\begin{array}{ccccc|c} 35 & - & 15 & - & 21 & 3 \\ 35 & - & 5 & - & 7 & 5 \\ 7 & - & 1 & - & 7 & 7 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

$\mathrm{MCM}(35; 15; 21) = 3x5x7 = 105$

C Divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides

Solo para determinar el MCD de dos números A y B.

Aplic **Al calcular el MCD de 750 y 270, indique los cocientes y residuos respectivos.**

cocientes sucesivos

	÷	÷	÷	÷	
	2	1	3	2	
750	270	210	60	30	MCD
	210	60	30	0	

residuos sucesivos

Cocientes sucesivos:

2; 1; 3 y 2

Residuos sucesivos:

210; 60; 30

PROBLEMA 1.

¿Cuántos múltiplos comunes de 4 cifras tienen los números 18, 40 y 56?

Sabemos:

$$MCM_{(18,40,56)} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$$

$$= 2520$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$40 = 2^3 \times 5$$

$$56 = 2^3 \times 7$$

Resolución:

➤ por lo tanto :

$$multiplos\ comunes = \underbrace{2520k}$$

$$= 2520 \times 1$$

$$= 2520 \times 2$$

$$= 2520 \times 3$$

Respuesta: 3 múltiplos

PROBLEMA 2.

Hallar "n" sabiendo que el M.C.D. de $A = 8 \times 6^n$ y $B = 6 \times 8^n$ tiene 18 divisores

Sabemos:

$$MCD_{(A,B)} = 2^{n+3} \times 3$$

$$A = 8 \times 6^n = 2^{n+3} \times 3^n$$

$$B = 6 \times 8^n = 2^{3n+1} \times 3$$

Resolución:

➢ **Por dato :**

$$\underbrace{CANTIDAD\ DE\ DIVISORES_{(MCD)}}\ = 18$$

$$(n+3+1)\,(1+1) = 18$$

$$n+4 = 9$$

$$n = 5$$

Respuesta: 5

PROBLEMA 3.

Los cocientes sucesivos obtenidos en la determinación del MCD de A y B mediante el algoritmo de Euclides, han sido 14; 1; 1; 1; y 2 respectivamente y si ambos números son primos entre sí. ¿Cuál es la suma de estos?

Ambos números son primos entre sí.

$MCD_{(A,B)} = 1$

Resolución:

➤ **Por dato :**

cocientes	14	1	1	1	2	x
117	8	5	3	2	1	= MCD
residuos	5	3	2	1	0	+

Piden:

$117 + 8 = 125$

Respuesta: 125

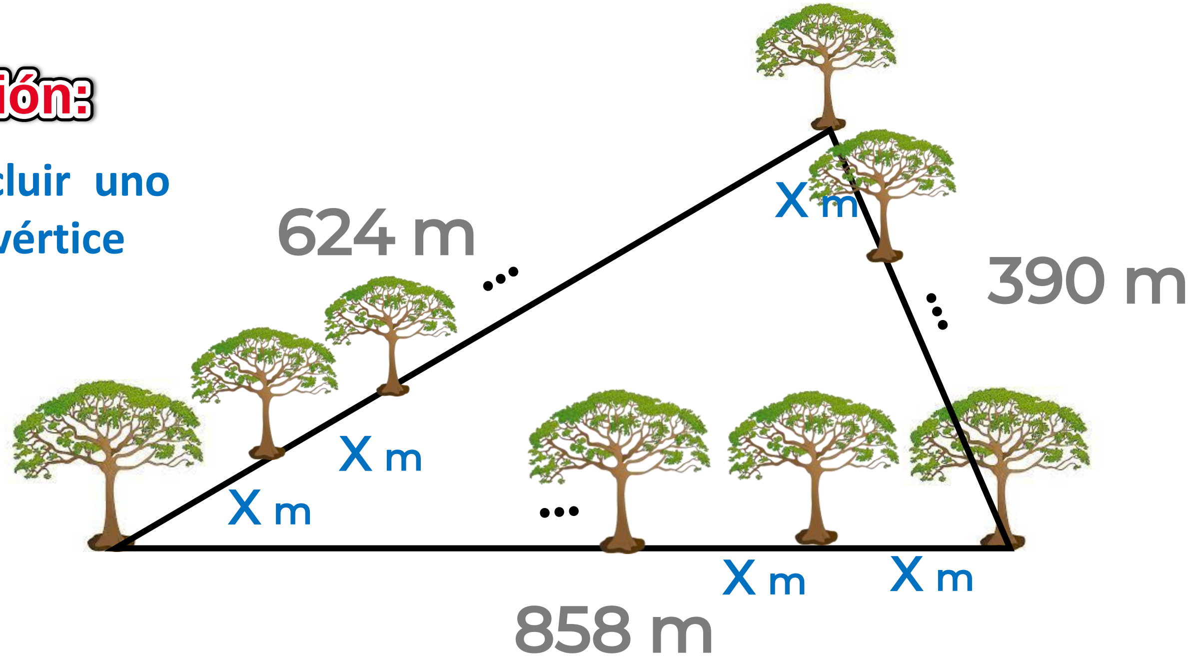
PROBLEMA 4.

En un terreno triangular de dimensiones 390 m, 858 m y 624 m se va a plantar árboles igualmente espaciados en el perímetro del terreno. ¿Cuál es la menor cantidad de árboles que se debe de plantar, si se debe incluir uno en cada vértice?

OBSERVACIÓN:
se va a plantar árboles igualmente espaciados en el perímetro del terreno

Resolución:

debe incluir uno en cada vértice



Sabemos:

$$X = MCD_{(390,858,640)} = 2$$

$390 = 2 \times 3 \times 5 \times 13$

$858 = 2 \times 3 \times 11 \times 13$

$640 = 2^7 \times 5$

Piden:

$$\text{Cant. árboles} = \frac{390 + 858 + 624}{2}$$

$= 936$

Respuesta: 936 árboles

PROBLEMA 5.

Aaron y Aariana están jugando boliche con pinos de plástico en la sala de su casa, sorprendentemente, Aaron derriba 8 pinos en cada tiro y su hermana Aariana 9 pinos en cada tiro. Al final del juego se dan cuenta que han derribado la misma cantidad de pinos ¿Cuál será dicha cantidad si es el mayor numeral de 3 cifras cuyo valor de mayor orden es 2 ?

Resolución:

Sabemos:

Aaron derriba 8 pinos en cada tiro y su hermana Aariana 9 pinos en cada tiro

han derribado la misma cantidad de pinos

$$MCM_{(8,9)} = 72$$

$$\begin{array}{c|c} 8 - 9 & 8 \\ 1 - 9 & 9 \\ 1 - 1 & \end{array}$$

mayor numeral de 3 cifras cuyo valor de mayor orden es 2

$= 72k$

$= 72x1 = \cancel{72}$

$= 72x2 = \cancel{144}$

$= 72x3 = \cancel{216}$

$= 72x4 = 288$

$\vdots$

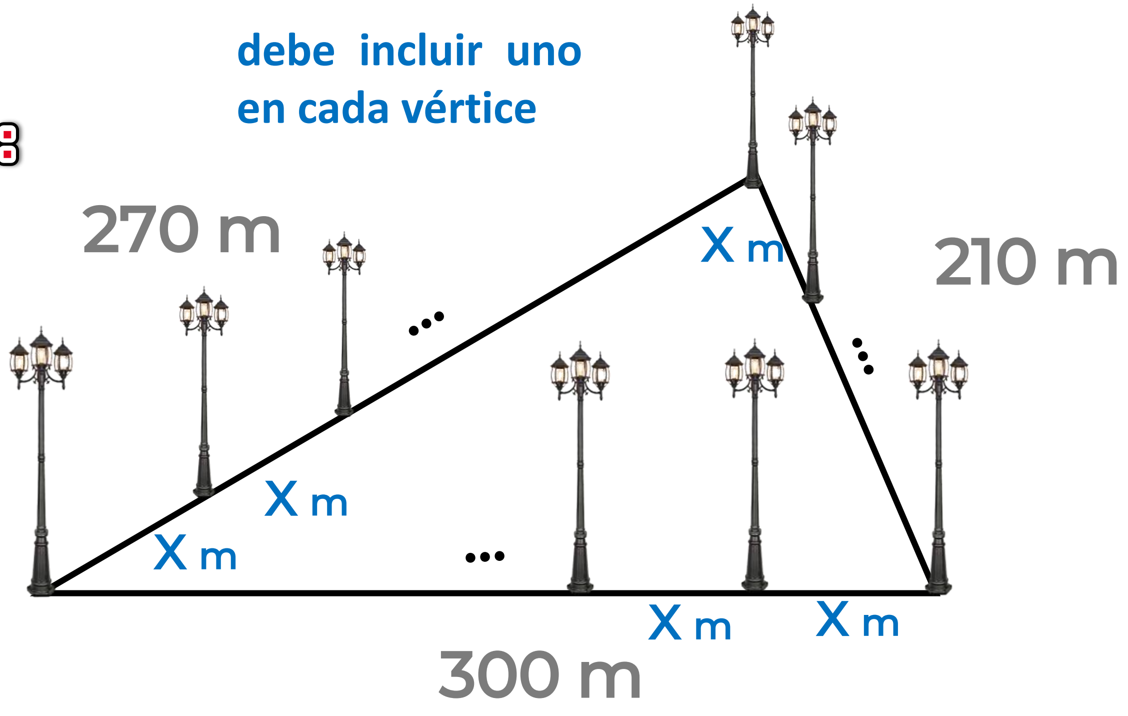
Respuesta: 288 pinos derribados

PROBLEMA 6.

Se han colocado postes igualmente espaciados en el contorno de un campo triangular cuyos lados miden 210, 270 y 300 m respectivamente. Sabiendo que hay un poste en cada vértice y que la distancia entre poste y poste es la mayor posible. ¿Cuántos postes se colocaron?

Resolución:

debe incluir uno en cada vértice



Sabemos:

$X = MCD_{(210,270,300)} = 2 \times 3 \times 5$

$= 30$

$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

$270 = 2 \times 3^3 \times 5$

$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

Piden:

$$\text{Cant. postes} = \frac{210 + 270 + 300}{30}$$

$= 26$

Respuesta: 26 postes

OBSERVACIÓN:

se va a colocar postes igualmente espaciados en el perímetro del terreno

PROBLEMA 7.

Un comerciante de vino, tiene 3 barriles de vino de 540; 960 y 1260 litros de capacidad. Si desea vender este vino en recipientes todos iguales, cuya capacidad esté comprendida entre 25 y 48 litros, además están contenidos exactamente en cada uno de los barriles. Calcular la cantidad de recipientes que se utilizarán.

Resolución:

Capacidad entre 25 y 48 litros

...

DIVISOR COMÚN = 30

Están contenidos exactamente en cada uno de los barriles

$$\begin{array}{ccccc|l} 540 & - & 960 & - & 1260 & 10 \\ 54 & - & 96 & - & 126 & 3 \\ 18 & - & 32 & - & 42 & \end{array} \Bigg\} \; 30$$

cantidad de recipientes $= 18+32+42$

$= 92$

Respuesta: 92 recipientes