



ARITHMETIC

Chapter 13

4th
SECONDARY



MCD-MCM

 **SACO OLIVEROS**



Una regla muy poco considerada para el cálculo del MCD es la REGLA DE STURM

Calcule el MCD de 2520; 3060; 2790 y 4545.

Resolución

2520	3060	2790	4545	
↓	-2520	-2520	-2520	
<hr/>				
2520	540	270	2025	← <i>Residuo</i>
-2430	-540	↓	-1890	
<hr/>				
90	0	270	135	← <i>Residuo</i>
↓		-270	-90	
<hr/>				
90		0	45	
-90			↓	
<hr/>				
0			45	= MCD



MCD - MCM

1 MCD Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCD es aquel número que cumple dos condiciones.

- ✦ Es un divisor común de dichos números.
- ✦ Es el mayor de los divisores comunes.

Ejm Sean los números 18 y 24

#	Divisores \mathbb{Z}^+
18	1; 2; 3; 6; 9; 18
24	1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 24

$$\text{MCD}(18; 24) = 6$$

Divisores comunes de 18 y 24

→ 1; 2; 3 y 6

En conclusión:

Sean los números A y B

$$CD_{\text{comunes de A y B}} = CD_{\text{MCD}(A;B)}$$



2

MCM

Dado un conjunto de números enteros positivos, su MCM es aquel número que cumple dos condiciones.



Es múltiplo común de dichos números.



Es el menor posible.

Ejm

Sean los números 8 y 12

#	Múltiplos \mathbb{Z}^+
8	8; 16; 24; 32; 40; 48; ...
12	12; 24; 36; 48; 60; ...

Múltiplos comunes de 8 y 12

→ 24; 48; 72; 96; ...

$$\text{MCM}(8; 12) = 24$$



MÉTODOS PARA DETERMINAR EL MCD-MCM

Por descomposición canónica

El MCD es igual al producto de sus factores primos comunes elevados a los menores exponentes posibles.

Ejm

Dados los números A, B y C

Si

$$A = 2^4 \times 3^5 \times 5^2$$

$$B = 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$$

$$C = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$$

$$\text{MCD}(A, B, C) = 2^2 \times 3^3 \times 5^2$$

El MCM es igual al producto de sus factores primos comunes y no comunes elevados a los mayores exponentes posibles.

Ejm

Dados los números A, B y C

$$\text{Si } A = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

$$B = 2^2 \times 3^4 \times 5^3 \times 7^2$$

$$C = 2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 7$$

$$\text{MCM}(A, B, C) = 2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 7^2$$



Por descomposición simultanea

El **MCD** es el producto de sus factores comunes. (**El procedimiento termina al encontrar los números PESI**)

Ejm

Calcule el MCD de 56; 140 y 168

$$\begin{array}{rcl}
 56 & - & 140 & - & 168 & & 2 \\
 28 & - & 70 & - & 84 & & 2 \\
 14 & - & 35 & - & 42 & & 7 \\
 2 & - & 5 & - & 6 & &
 \end{array}$$

PES

$$\text{MCD}(56; 140; 168) = 2^2 \times 7 = 28$$

El **MCM** es el producto de sus factores (**El procedimiento termina al encontrar La unidad**)

Ejm

Calcule el MCM de 35; 15 y 21

$$\begin{array}{rcl}
 35 & - & 15 & - & 21 & & 3 \\
 35 & - & 5 & - & 7 & & 5 \\
 7 & - & 1 & - & 7 & & 7 \\
 1 & - & 1 & - & 1 & &
 \end{array}$$

$$\text{MCM}(35; 15; 21) = 3 \times 5 \times 7 = 105$$

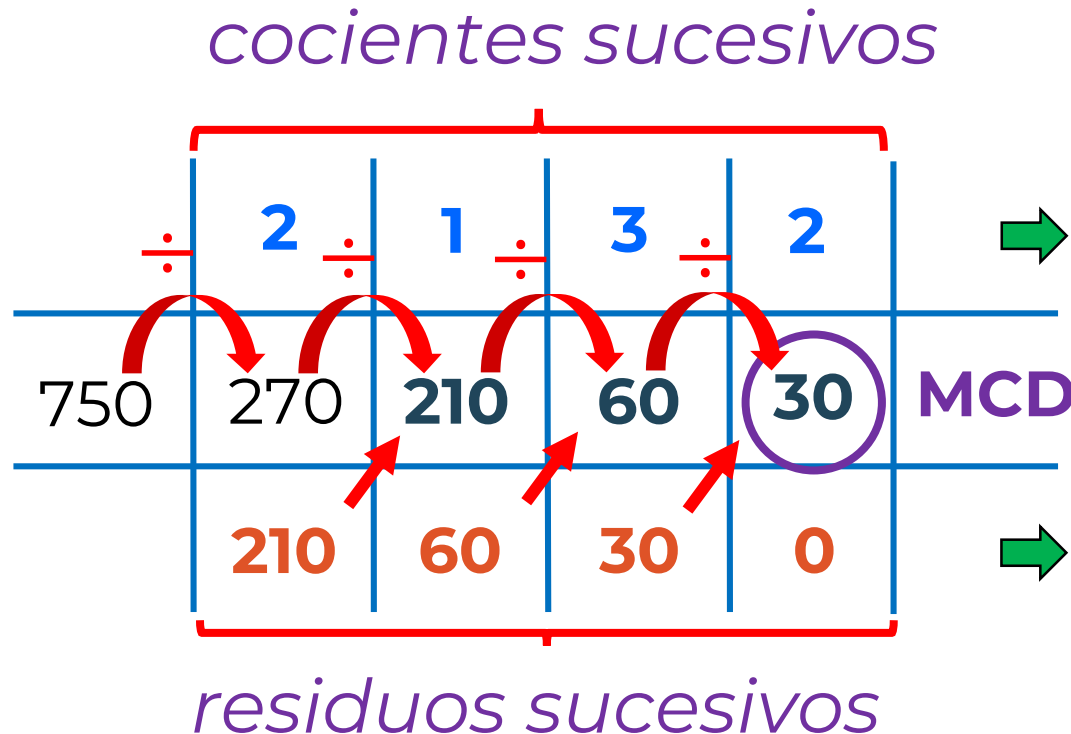


C Divisiones sucesivas o algoritmo de Euclides

Solo para determinar el MCD de dos números A y B.

Aplic

Al calcular el MCD de 750 y 270, indique los cocientes y residuos respectivos.



→ **Cocientes sucesivos:**

2; 1; 3 y 2

→ **Residuos sucesivos:**

210; 60; 30



PROBLEMA 1.

Resolución:

¿Cuántos múltiplos comunes de 4 cifras tienen los números 18, 40 y 56?

➤ por lo tanto :

multiplos comunes = 2520k

Sabemos: $\text{MCM}_{(18,40,56)} = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7$
 $= 2520$

$$\begin{aligned} &= 2520 \times 1 \\ &= 2520 \times 2 \\ &= 2520 \times 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 18 &= 2 \times 3^2 \\ 40 &= 2^3 \times 5 \\ 56 &= 2^3 \times 7 \end{aligned}$$



Respuesta: 3 múltiplos

**PROBLEMA 2.**

Hallar “n” sabiendo que el
M.C.D. de $A = 8 \times 6^n$ y
 $B = 6 \times 8^n$ tiene 18 divisores

Resolución:

➤ **Por dato :**

$$\text{CANTIDAD DE DIVISORES}_{(MCD)} = 18$$

$$(n + 3 + 1) (1 + 1) = 18$$

$$n + 4 = 9$$

$$n = 5$$

$$A = 8 \times 6^n = 2^{n+3} \times 3^n$$

$$B = 6 \times 8^n = 2^{3n+1} \times 3$$

$$MCD_{(A,B)} = 2^{n+3} \times 3$$

Respuesta: 5



PROBLEMA 3.

Resolución:

Los cocientes sucesivos obtenidos en la determinación del MCD de A y B mediante el algoritmo de Euclides, han sido 14; 1; 1; 1; y 2 respectivamente y si ambos números son primos entre sí. ¿Cuál es la suma de éstos?

➤ Por dato :

cocientes	14	1	1	1	2	$\left. \begin{array}{l} \times \\ + \end{array} \right\} = \text{MCD}$
117	8	5	3	2	1	
residuos	5	3	2	1	0	



Ambos números son primos entre sí.

$$\text{MCD}_{(A,B)} = 1$$

Piden:

$$117 + 8 = 125$$

Respuesta:

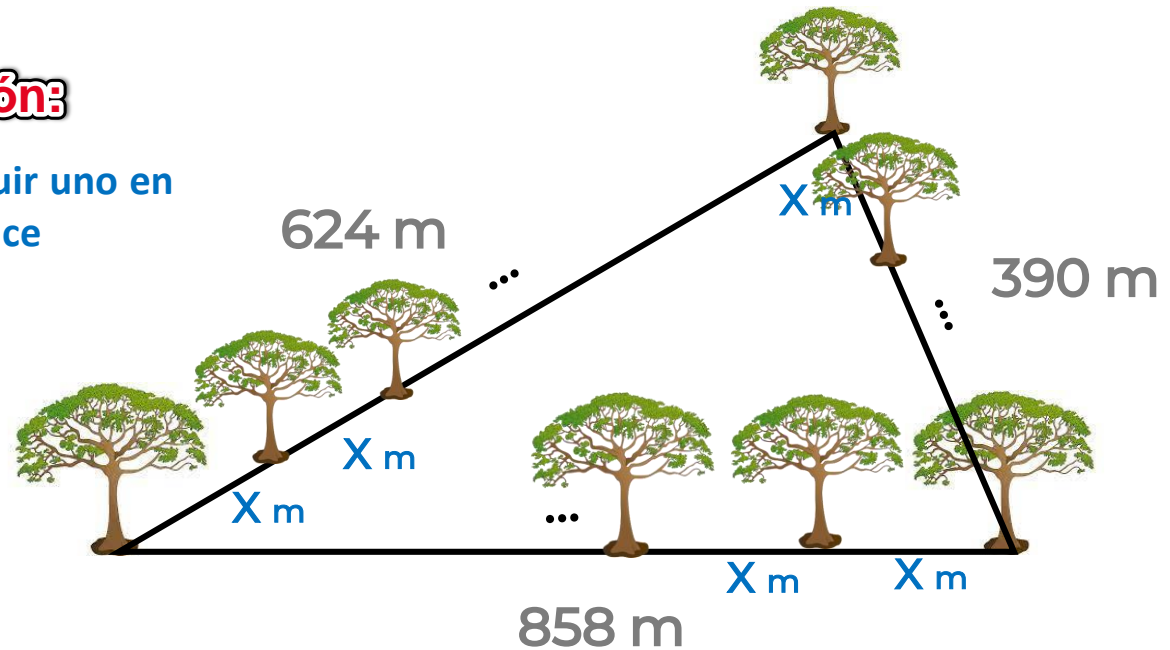
125

PROBLEMA 4.

En un terreno triangular de dimensiones 390 m, 858 m y 624 m se va a plantar árboles igualmente espaciados en el perímetro del terreno. ¿Cuál es la menor cantidad de árboles que se debe de plantar, si se debe incluir uno en cada vértice?

Resolución:

debe incluir uno en cada vértice



Sabemos:

$$X = \text{MCD}_{(390, 858, 640)} = 2$$

$$390 = 2 \times 3 \times 5 \times 13$$

$$858 = 2 \times 3 \times 11 \times 13$$

$$640 = 2^7 \times 5$$

Piden:

$$\begin{aligned} \text{Cant. árboles} &= \frac{390 + 858 + 624}{2} \\ &= 936 \end{aligned}$$

Respuesta: 936 árboles

OBSERVACIÓN:

se va a plantar árboles igualmente espaciados en el perímetro del terreno

PROBLEMA 5.

Aaron y Aariana están jugando boliche con pinos de plástico en la sala de su casa, sorprendentemente, Aaron derriba 8 pinos en cada tiro y su hermana Aariana 9 pinos en cada tiro. Al final del juego se dan cuenta que han derribado la misma cantidad de pinos ¿Cuál será dicha cantidad si es el mayor numeral de 3 cifras cuyo valor de mayor orden es 2 ?

Resolución:**Sabemos:**

Aaron derriba 8 pinos en cada tiro y su hermana Aariana 9 pinos en cada tiro

han derribado la misma cantidad de pinos

$$\text{MCM}_{(8,9)} = 72$$

$$\begin{array}{r|l} 8 - 9 & 8 \\ 1 - 9 & 9 \\ 1 - 1 & \end{array}$$



mayor numeral de 3 cifras cuyo valor de mayor orden es 2

$$= 72k$$

$$= 72 \times 1 = 72$$

$$= 72 \times 2 = 144$$

$$= 72 \times 3 = 216$$

$$= 72 \times 4 = 288$$

⋮

Respuesta:

288 pinos derribados

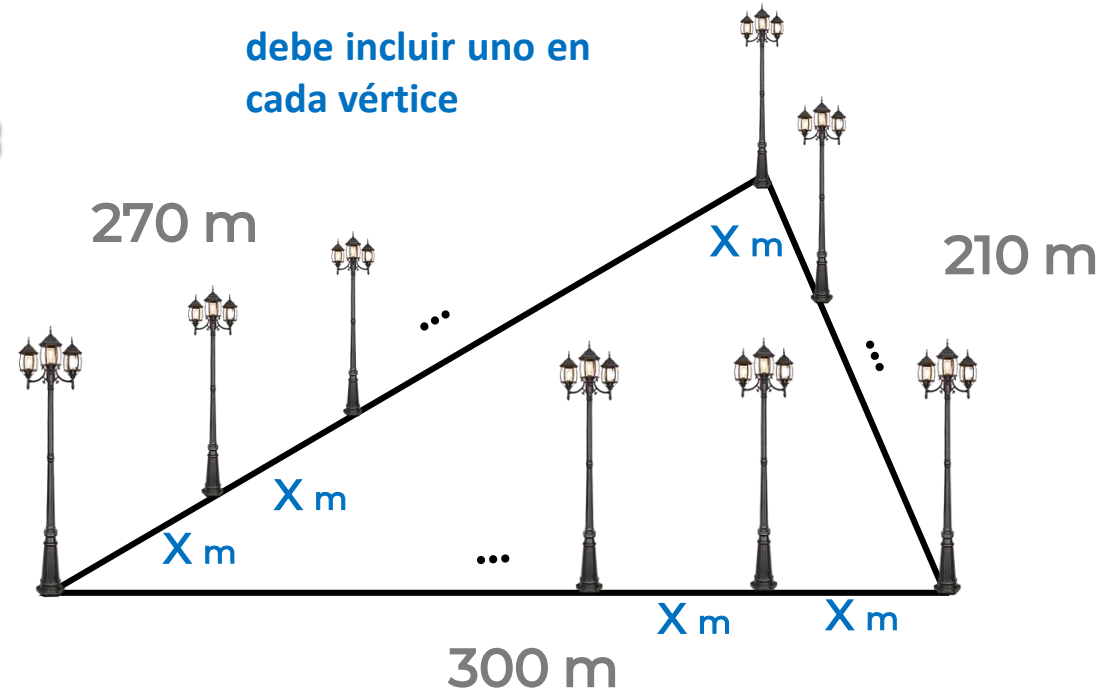
PROBLEMA 6.

Se han colocado postes igualmente espaciados en el contorno de un campo triangular cuyos lados miden 210, 270 y 300 m respectivamente. Sabiendo que hay un poste en cada vértice y que la distancia entre poste y poste es la mayor posible. ¿Cuántos postes se colocaron?

OBSERVACIÓN:

se va a colocar postes igualmente espaciados en el perímetro del terreno

Resolución:



Sabemos:

$$X = \text{MCD}_{(210, 270, 300)} = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$210 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$270 = 2 \times 3^3 \times 5$$

$$300 = 2^2 \times 3 \times 5^2$$

Piden:

$$\begin{aligned} \text{Cant. postes} &= \frac{210 + 270 + 300}{30} \\ &= 26 \end{aligned}$$

Respuesta: 26 postes





PROBLEMA 7.

Un comerciante de vino, tiene 3 barriles de vino de 540; 960 y 1260 litros de capacidad. Si desea vender este vino en recipientes todos iguales, cuya capacidad esté comprendida entre 25 y 48 litros, además están contenidos exactamente en cada uno de los barriles. Calcular la cantidad de recipientes que se utilizarán.

Resolución:



Capacidad entre 25 y 48 litros



DIVISOR COMÚN = 30

Están contenidos exactamente en cada uno de los barriles

$$540 - 960 - 1260$$

$$54 - 96 - 126$$

$$18 - 32 - 42$$

$$\left. \begin{array}{l} 10 \\ 3 \end{array} \right\} 30$$

$$\begin{aligned} \text{cantidad de recipientes} &= 18+32+42 \\ &= 92 \end{aligned}$$

Respuesta: 92 recipientes