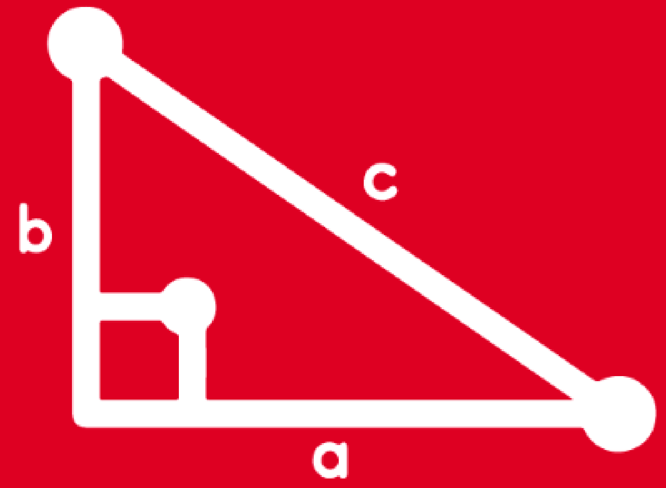
TRIGONOMETRY

Chapter 07



5th
SECONDARY

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO EN POSICIÓN NORMAL II

SACO OLIVEROS

HELICOMOTIVACIÓN

Divide las dificultades que examinas en tantas partes como sea posible para su mejor solución.

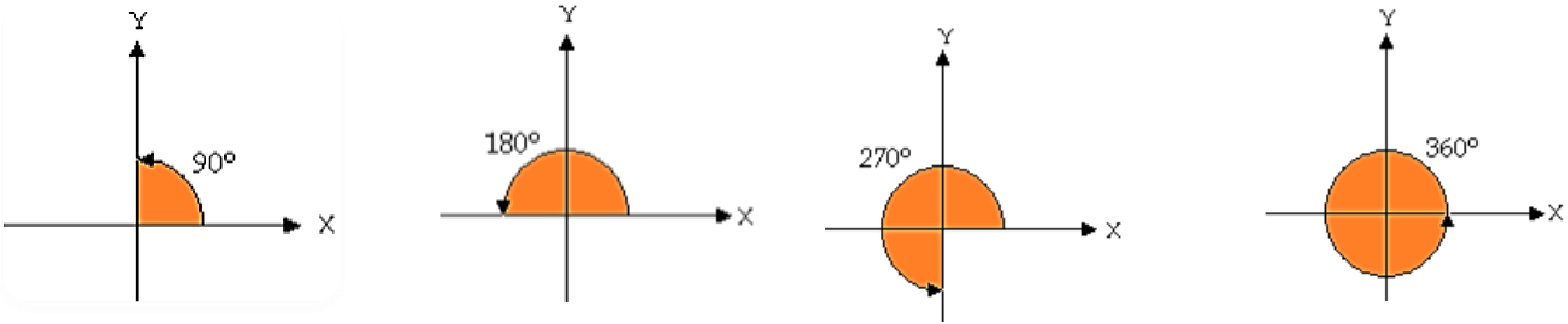
René Descartes 1596 - 1650

ÁNGULOS CUADRANTALES

Son aquellos ángulos trigonométricos cuyo lado final se encuentra sobre algún semieje, por tal razón no pertenecen a ningún cuadrante .

Conclusión : Son ángulos cuyas medidas son múltiplos del ángulo recto, por consiguiente tienen la forma :

$$\boxed{(90n)^\circ} \quad \boxed{\frac{n\pi}{2}\ \text{rad}} \quad ; n \in z$$



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS CUADRANTALES

R.T	0º ; 360º	90º	180º	270º
sen	O	1	0	-1
cos	1	O	-1	0
tan	0	N.D	0	N.D
cot	N.D	0	N.D	0
sec	1	N.D	-1	N.D
csc	N	1	N.D	-1

ND : No Determinado

Recordar : " oionin iononi "

$$\left\{ \begin{array}{l} o = 0 \\ i = \pm 1 \\ n = ND \end{array} \right\}$$

OBSERVACIONES :

Si α es un ángulo cuadrantal

senα = { -1 ; 0 ; 1 }

cosα = { -1 ; 0 ; 1 }

tanα = 0

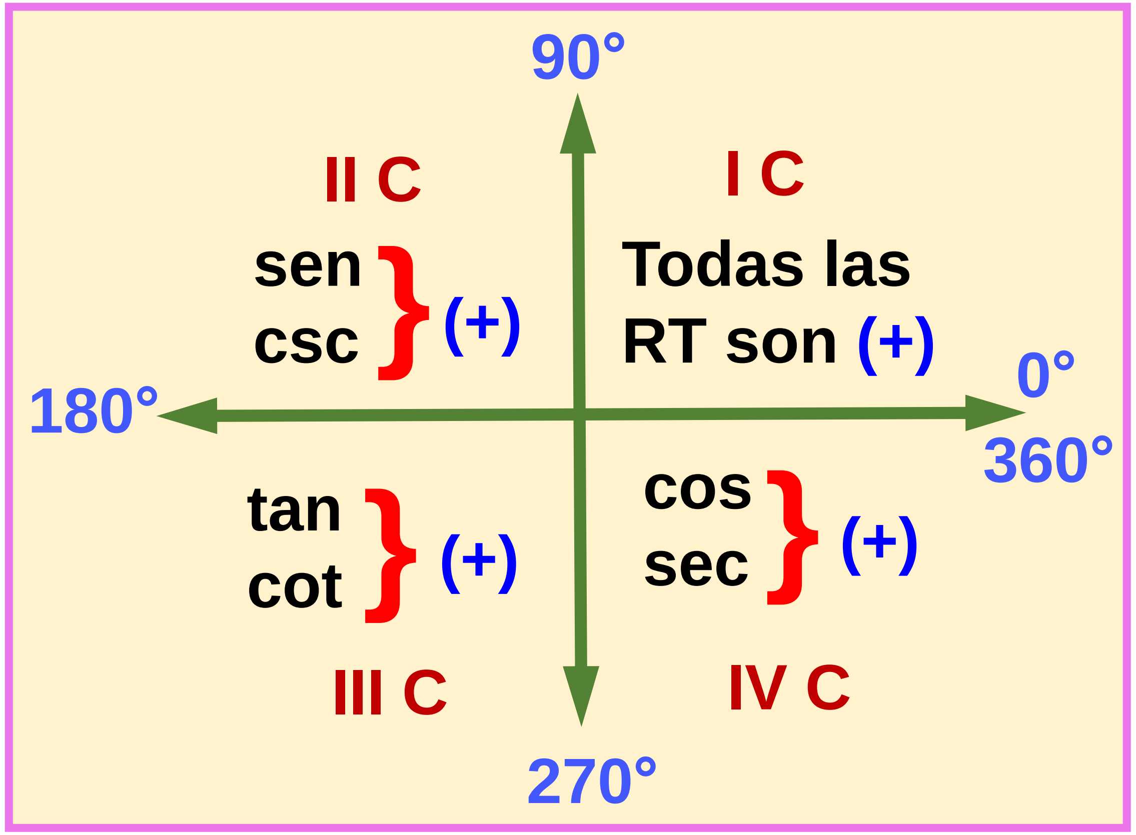
cotα = 0

secα = { -1 ; 1 }

cscα = { -1 ; 1 }

SIGNOS DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN CADA CUADRANTE

Regla práctica :

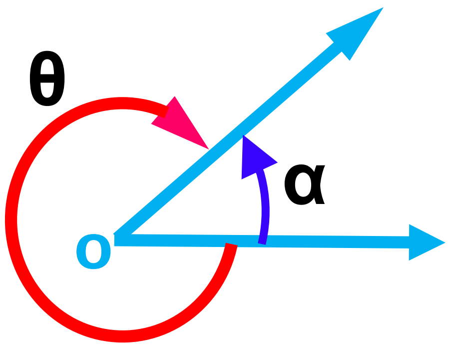


OBSERVACIONES :

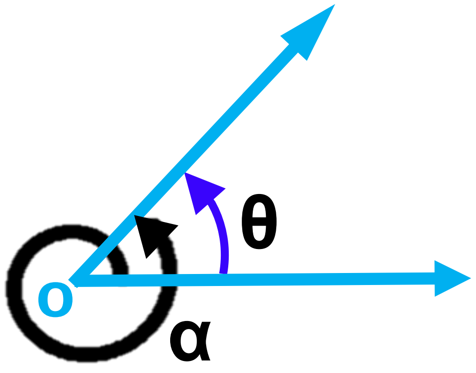
- Si $0° < \alpha < 90°$ ➡ $\alpha \in$ IC
- Si $90° < \alpha < 180°$ ➡ $\alpha \in$ IIC
- Si $180° < \alpha < 270°$ ➡ $\alpha \in$ IIIC
- Si $270° < \alpha < 360°$ ➡ $\alpha \in$ IVC

ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos trigonométricos que tienen el mismo lado inicial, lado final y vértice.



α y θ son las medidas de los ángulos coterminales en sentidos opuestos.



α y θ son las medidas de los ángulos coterminales en el mismo sentido.

Siendo α y θ las medidas de dos ángulos coterminales, se cumple :

I) $\alpha - \theta = 360°n$; $n \in z$

II) $Rt(\alpha) = Rt(\theta)$

HELICO PRACTICE 1

Siendo θ y β, ángulos cuadrantales diferentes, positivos y menores o iguales a 360°; se cumple que $\sqrt{1-\cos\theta}+\sqrt{\cos\theta-1}=1+\operatorname{sen}\beta$; calcule θ + β .

RESOLUCIÓN

Por existencia de raíz cuadrada real :

$$1-\cos\theta \geq 0 \quad \wedge \quad \cos\theta - 1 \geq 0$$

$$\underbrace{\cos\theta \leq 1 \quad \wedge \quad \cos\theta \geq 1}$$

$$\cos\theta = 1$$

Como 0°< θ ≤ 360° ➡ θ = 360°

Luego : $1+\operatorname{sen}\beta=\sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}$

$$\operatorname{sen}\beta = -1$$

Como 0°< β ≤ 360° ➡ β = 270°

Luego : $\theta+\beta = 360° + 270°$

$$\boxed{\therefore\ \theta+\beta = 630°}$$

Recordar :

R.T	0° ; 360°	90°	180°	270°
sen	O	1	0	-1
cos	1	O	-1	0
tan	0	N.D	0	N.D
cot	N.D	0	N.D	0
sec	1	N.D	-1	N.D
csc	N	1	N.D	-1

HELICO PRACTICE 2

Siendo α y θ, ángulos cuadrantales positivos y menores a una vuelta, tal que se cumple : $\operatorname{sen}\alpha + \tan\theta = -1$; efectúe $F = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{3}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\csc(\alpha - \theta)}$

RESOLUCIÓN

Datos : $0° < \alpha , \theta < 360°$

$\operatorname{sen}\alpha + \tan\theta = -1$

$-1 \quad + \quad 0 \quad = -1$

$\alpha = 270°$; $\theta = 180°$

Luego :

$$F = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{270°}{3}\right) + \cos\left(\frac{180°}{2}\right)}{\csc(270° - 180°)}$$

$$F = \frac{\operatorname{sen}90° + \cos 90°}{\csc 90°} = \frac{1 + 0}{1}$$

$$\boxed{\therefore \; F = 1}$$

Recordar :

R.T	0° ; 360°	90°	180°	270°
sen	O	1	0	-1
cos	1	O	-1	0
tan	0	N.D	0	N.D
cot	N.D	0	N.D	0
sec	1	N.D	-1	N.D
csc	N	1	N.D	-1

HELICO PRACTICE 3

Siendo θ un ángulo positivo y menor a una vuelta, que cumple :
$\tan\theta \cdot \text{sen}120° < 0$; $\cos\theta \cdot \tan 300° > 0$.- Indique el signo de sen2θ .

RESOLUCIÓN

Datos : $\tan\theta \cdot \text{sen}120° < 0$

$(-) \cdot (+) < 0$

$\theta \in \text{IIC} \vee \theta \in \text{IVC}$

$\cos\theta \cdot \tan 300° > 0$

$(-) \cdot (-) > 0$

$\theta \in \text{IIC} \vee \theta \in \text{IIIC}$

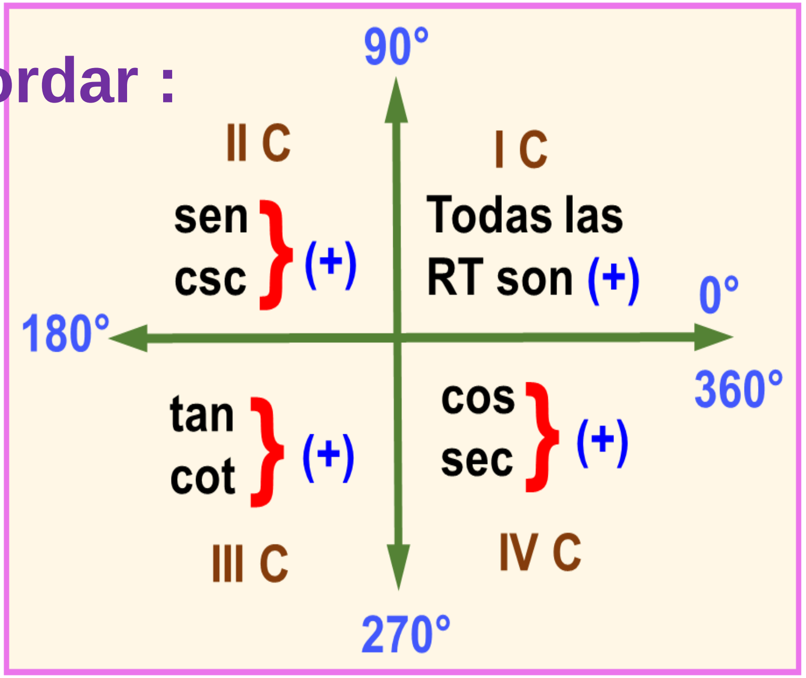
$\theta \in \text{IIC}$

Luego : $90° < \theta < 180°$ → $180° < 2\theta < 360°$

→ $2\theta \in \text{IIIC} \vee \text{IVC}$

$\boxed{\therefore\ \text{sen}2\theta = -}$

Recordar :



HELICO PRACTICE 4

El profesor de matemática pidió a sus alumnos que indiquen el cuadrante al cual pertenece el ángulo θ que cumple :

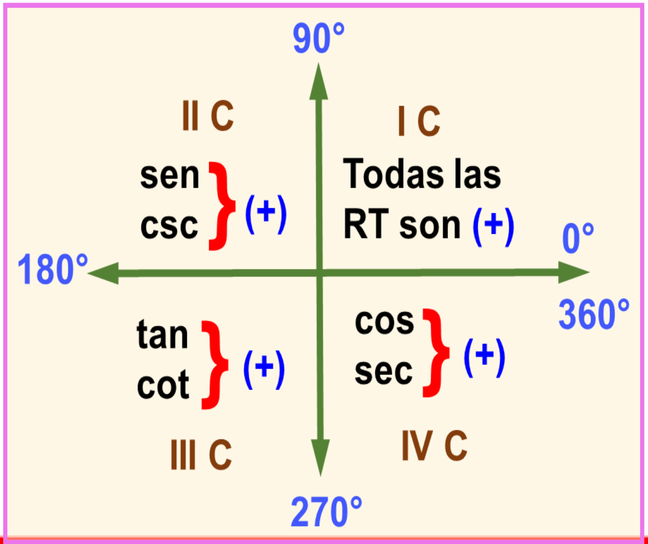
$$\operatorname{sen}\theta \,.\, \sqrt{\tan\theta + \cot\theta} < 0$$

Los alumnos respondieron :

Andrea : $\theta \in IC$; Bernardo : $\theta \in IIC$; Carlos : $\theta \in IIIC$; Daniela : $\theta \in IVC$.

¿ Quién dio la respuesta correcta ?

Recordar :



RESOLUCIÓN

Por existencia de raíz cuadrada real :

$\tan\theta + \cot\theta > 0$ ⇒ $\theta \in IC \ \vee \ \theta \in IIIC$

Luego : $\operatorname{sen}\theta \,.\, \sqrt{\tan\theta + \cot\theta} < 0$

$(-) \ . \ (+) < 0$

$\theta \in IIIC \ \vee \ \theta \in IVC$

$\theta \in IIIC$

∴ Carlos dio la respuesta correcta.

HELICO PRACTICE 5

El código de una caja fuerte está dado por un número de tres cifras, las cuales son : $a = 9\sec 0° - \operatorname{sen} 90° + \tan 360°$

$b = 5\tan 45° - 3\cos 180° + \cos 0°$

$c = \cos 90° - 9\csc 270° - 2\sec 60°$

Efectúe las operaciones, ordene en forma decreciente estas cifras y averigüe dicho código.

Recordar :

R.T	0° ; 360°	90°	180°	270°
sen	O	1	0	-1
cos	1	O	-1	0
tan	0	N.D	0	N.D
cot	N.D	0	N.D	0
sec	1	N.D	-1	N.D
csc	N	1	N.D	-1

RESOLUCIÓN

Calculamos las cifras :

$$a = 9(1) - (1) + (0) \quad = 9 - 1$$

$$a = 8$$

$$b = 5(1) - 3(-1) + (1) = 5 + 3 + 1$$

$$b = 9$$

$$c = (0) - 9(-1) - 2(2) = 9 - 4$$

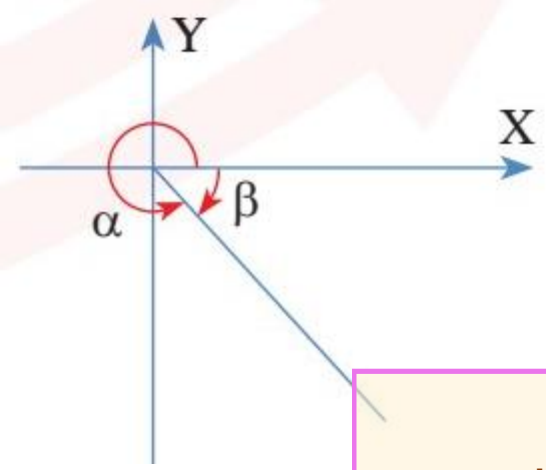
$$c = 5$$

Luego : $b > a > c$

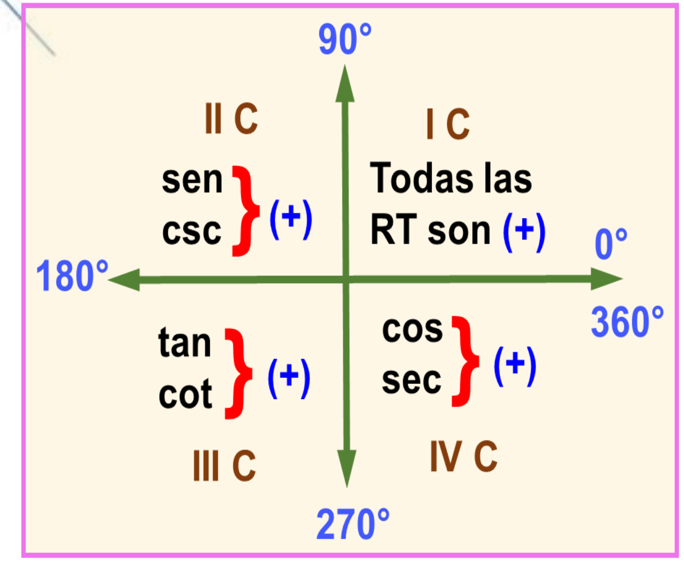
$\therefore$ **Código = 985**

HELICO PRACTICE 6

En la figura, se cumple que :
tanα . tanβ + senα . cscβ = 5 .
Calcule tanα .



Recordar :



RESOLUCIÓN

Según figura :

α , β son ángulos coterminales del IVC

Propiedad : Rt (α) = Rt (β)

➡ tanα = tanβ ∧ cscα = cscβ

Reemplazamos β por α en el dato :

$$\tan\alpha \cdot \tan\alpha + \underbrace{\operatorname{sen}\alpha \cdot \csc\alpha}_{1} = 5$$

$$\tan^2\alpha + 1 = 5$$

$$\tan^2\alpha = 4$$

$$\boxed{\therefore\ \tan\alpha = -2}$$

HELICO PRACTICE 7

La secretaria del colegio actualmente tiene K años.- Si le preguntan su edad, ella indica que los ángulos α y θ son coterminales del segundo cuadrante y cumplen :

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}\ ;\ \csc\theta = \frac{4K-10}{2K+10}$$

¿ Cuál será la edad de la secretaria dentro de 5 años ?

RESOLUCIÓN

Dato : $\cos\alpha = \dfrac{-\sqrt{5}}{3} = \dfrac{x}{r}$

Luego : $x^2 + y^2 = r^2$; $y > 0$

$$\left(-\sqrt{5}\right)^2 + y^2 = 3^2$$

$$5 + y^2 = 9 \Rightarrow y = 2$$

Luego : $\csc\alpha = \csc\theta$

$$\frac{r}{y} = \frac{4K - 10}{2K + 10}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{2K - 5}{K + 5}$$

$$3k + 15 = 4k - 10$$

$$25 = k$$

$$K + 5 = 25 + 5$$

$$K + 5 = 30$$

∴ Dentro de 5 años la secretaria tendrá 30 años de edad .

SACO
OLIVEROS