ALGEBRA

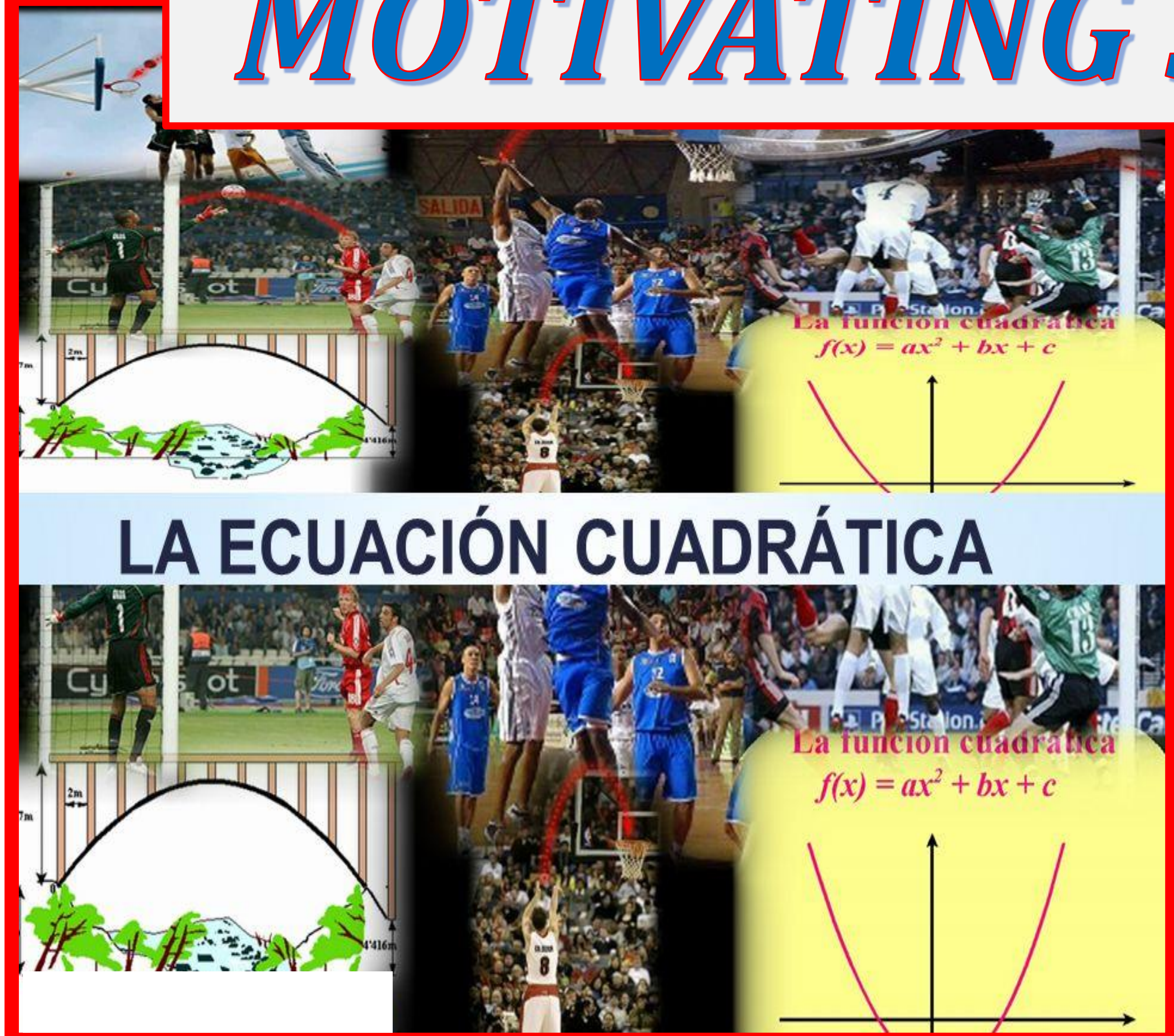
Chapter 17

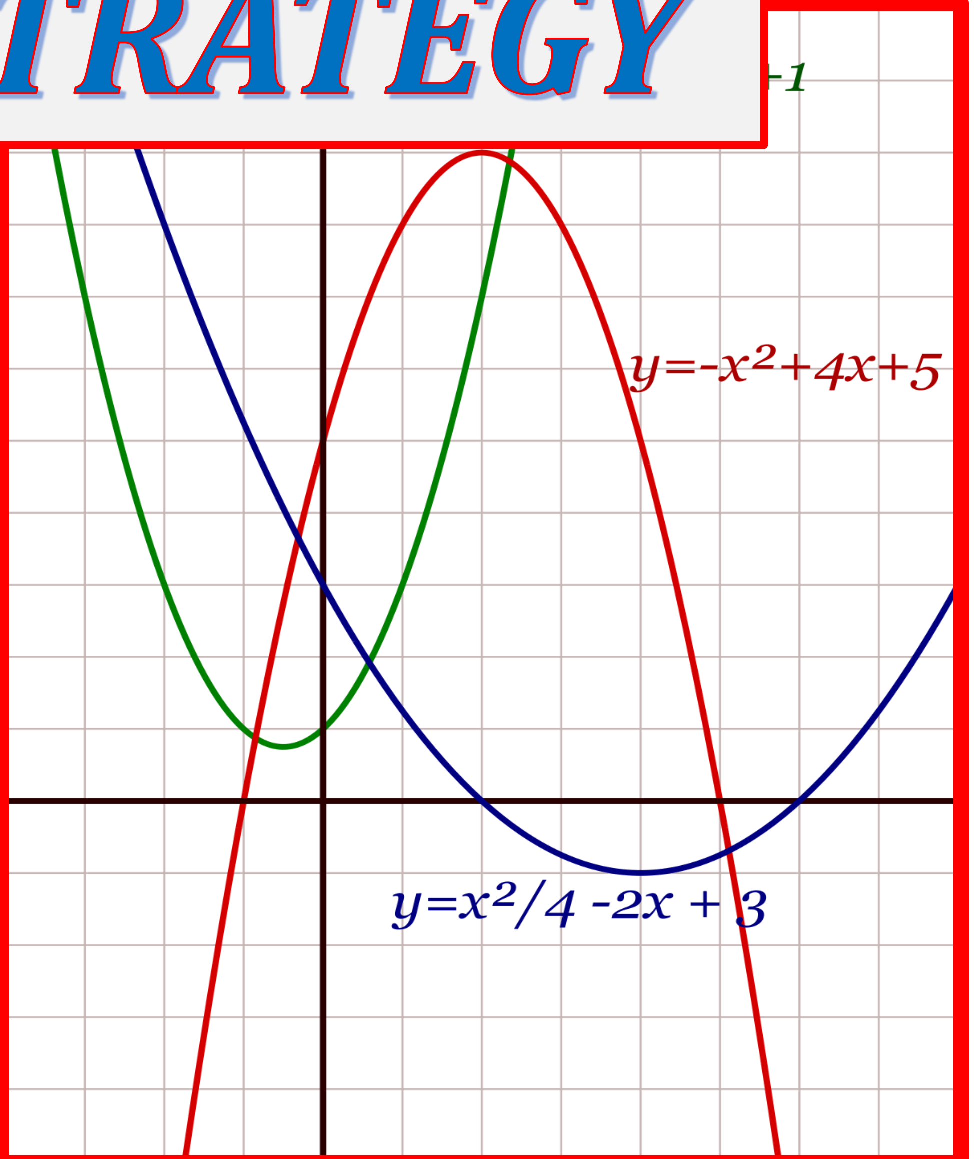
3th
SECONDARY

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY





ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Denominada también ***ECUACIÓN CUADRÁTICA***, *es aquella ecuación polinomial de una incógnita, que se reduce a la forma general:*

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}\ ;\ a \neq 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \; a \neq 0 \quad ; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Fórmula general:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Raíces de la ecuación:

$$\boxed{x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

$$\boxed{x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

Discriminante (Δ):

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

NATURALEZA DE LAS RAÍCES:

Sea la ecuación cuadrática

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \; ; \; a \neq 0$$

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Primer caso:

Si: $\boxed{\Delta > 0}$

La ecuación tiene raíces reales y diferentes.

Segundo caso:

Si: $\boxed{\Delta = 0}$

La ecuación tiene raíces reales e iguales (solución única).

Tercer caso:

Si: $\boxed{\Delta < 0}$

La ecuación tiene raíces complejas y conjugadas.

TEOREMA DE CARDANO - VIETE:

Sea la ecuación cuadrática :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad ; \ a \neq 0$$

- ✓ **Suma de Raíces:**

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

- ✓ **Producto de Raíces:**

$$P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

FORMACIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA A PARTIR DE SUS RAÍCES:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

PROPIEDADES ADICIONALES:

- La ecuación tiene raíces simétricas si y solo si:

$$\boxed{x_1 + x_2 = 0} \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

- La ecuación tiene raíces recíprocas si y solo si:

$$\boxed{x_1 . x_2 = 1} \Rightarrow \boxed{a = c}$$

Problema 1

Indique una raíz de la ecuación

$$(2x-3)(x-5)=(x-3)(x+1)$$

Resolución:

$$(2x-3)(x-5)=(x-3)(x+1)$$

$$2x^2-10x-\cancel{3x}+15=x^2+x-\cancel{3x}-3$$

$$x^2\underline{-11x}+18=0$$

$$\begin{array}{cc} x & -9 \\ x & -2 \end{array}$$

$$(x-9)(x-2)=0$$

$$x-9=0 \quad \vee \quad x-2=0$$

$$\therefore \quad \boxed{x=9} \quad \vee \quad \boxed{x=2}$$

Problema 2

Siendo x_1 y x_2 las raíces de la ecuación

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

halle el valor de $x_1 + x_2 + x_1 . x_2$.

Recordemos:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$

cuyas raíces son: x_1 y x_2

SUMA DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

PRODUCTO DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Resolución:

$$\boxed{x^2 - 5x + 3 = 0}$$

- $x_1 + x_2 = -\dfrac{(-5)}{1} \Rightarrow \boxed{x_1 + x_2 = 5}$
- $x_1 . x_2 = \dfrac{3}{1} \Rightarrow \boxed{x_1 . x_2 = 3}$

Nos piden: $\underbrace{x_1 + x_2}_{5} + \underbrace{x_1 . x_2}_{3}$

$$5 + 3$$

$$\boxed{\therefore \quad x_1 + x_2 + x_1 . x_2 = 8}$$

Problema 3

Si las raíces de la ecuación

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

son a y b, halle el valor de

$$T = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$$

Recordemos:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$

cuyas raíces son: x_1 y x_2

SUMA DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

PRODUCTO DE RAÍCES:

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

Resolución:

$$\boxed{x^2 - 2x + 3 = 0}$$

$$a + b = -\frac{(-2)}{1} = 2 \qquad a.b = \frac{3}{1} = 3$$

➤ $\underbrace{(a+b)}_{2}{}^3 = a^3 + b^3 + 3\underbrace{ab}_{3}\underbrace{(a+b)}_{2}$

$$2^3 = a^3 + b^3 + 3(3)(2)$$

$$\boxed{a^3 + b^3 = -10}$$

➤ $\underbrace{(a+b)}_{2}{}^2 = a^2 + b^2 + 2\underbrace{ab}_{3}$

$$2^2 = a^2 + b^2 + 2(3)$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = -2}$$

Nos piden:

$$T = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + b^2}$$

$$T = \frac{-10}{-2}$$

$$\boxed{\therefore \quad T = 5}$$

Problema 4

Si la siguiente ecuación

$$5x^2 + (7b - 21)x + 11 = 0$$

tiene raíces simétricas donde el valor de b representa la edad del hijo del profesor Edgar, ¿cuál será la edad del profesor Edgar si es $(9b + 5)$?

Recordemos:

Sea: $ax^2 + bx + c = 0$

cuyas raíces son: x_1 y x_2

La ecuación tiene raíces simétricas si y solo si:

$$\boxed{x_1 + x_2 = 0} \Rightarrow \boxed{b = 0}$$

Resolución:

$$5x^2 - \underbrace{(7b - 21)}_{0}x + 11 = 0$$

La ecuación tiene raíces simétricas:

$$\Rightarrow 7b - 21 = 0$$

$$\boxed{b = 3}$$ *(Edad del hijo del profesor Edgar)*

Edad del profesor Edgar:

$$9b + 5 = 9(3) + 5$$

$$\boxed{9b + 5 = 32}$$

∴ *El profesor Edgar tiene 32 años.*

Problema 5

Una televisora necesita hacer una renovación de su materiales audiovisuales por lo cual decide hacer una compra de cierto número de cámaras, si al efectuar la siguiente ecuación (3a-4)$x^2 + 6x + (2a+1) = 0$; se obtiene el valor de "a" el cual resulta ser el número de cámaras compradas, además se sabe que presenta raíces recíprocas. ¿Cuántas cámaras fueron adquiridas por la televisora?

Recordemos:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuyas raíces son: x_1 y x_2

La ecuación tiene raíces recíprocas si y solo si:

$\boxed{x_1 . x_2 = 1}$ $\boxed{a = c}$

Resolución:

$$\boxed{(3a-4)x^2 + 6x + (2a+1) = 0}$$

La ecuación tiene raíces recíprocas:

$$3a - 4 = 2a + 1$$

$$\boxed{\therefore\ a = 5}$$

$\boxed{\therefore \text{ Se comprarón 5 cámaras.}}$

Problema 6

Gary por su cumpleaños planea hacer una fiesta e invitar a sus amigos del colegio, para lo cual le pide a su mamá que compre bocaditos, además la ecuación $(n+2)x^2-6nx+9=0$ Presenta raíces iguales, ¿cuál fue la totalidad de bocaditos comprados para la fiesta de Gary? (n esta expresado en cientos de bocaditos)

Recordemos:

$$ax^2+bx+c=0$$

La ecuación tiene raíces iguales si y solo si $\Delta=0$:

$$\boxed{b^2-4ac=0}$$

Resolución:

$$\underbrace{(n+2)}_{a}x^2\underbrace{-6n}_{b}x\underbrace{+9}_{c}=0$$

La ecuación tiene raíces iguales ⇒ $\boxed{b^2-4ac=0}$

$$(-6n)^2-4(n+2)(9)=0$$

$$\cancel{36}n^2-\cancel{36}n-\cancel{72}=0$$

$$n^2-n-2=0$$

$$\begin{array}{ll} n & -2 \\ n & +1 \end{array}$$

$n-2=0$ ∨ $n+1=0$

$\boxed{n=2}$ ∨ $\boxed{n=-1}$

∴ 2 x 100 = 200 bocaditos

Problema 7

Forme la ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $5+\sqrt{2}$ ***y*** $5-\sqrt{2}$.

Resolución:

Sean: $x_1 = 5+\sqrt{2} \quad \wedge \quad x_2 = 5-\sqrt{2}$

- $S = x_1 + x_2$

  $S = 5 + \cancel{\sqrt{2}} + 5 - \cancel{\sqrt{2}}$

  $\boxed{S = 10}$

- $P = x_1 . x_2$

  $P = (5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})$

  $P = 5^2 - \sqrt{2}^2$

  $\boxed{P = 23}$

Formando la ecuación:

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Rpta: $\boxed{x^2 - 10x + 23 = 0}$