

TRIGONOMETRY

Chapter 11

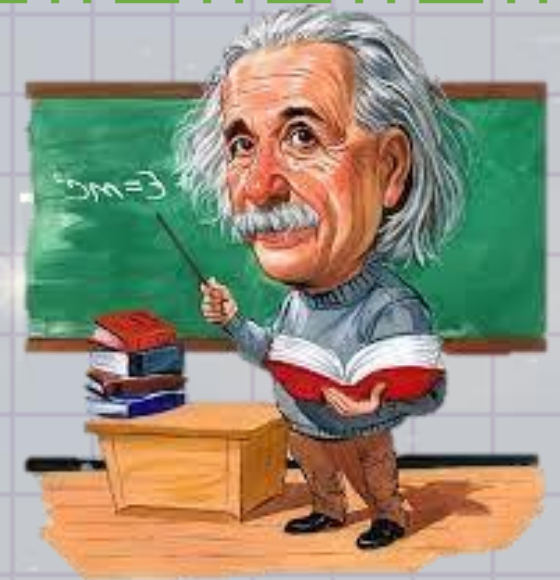
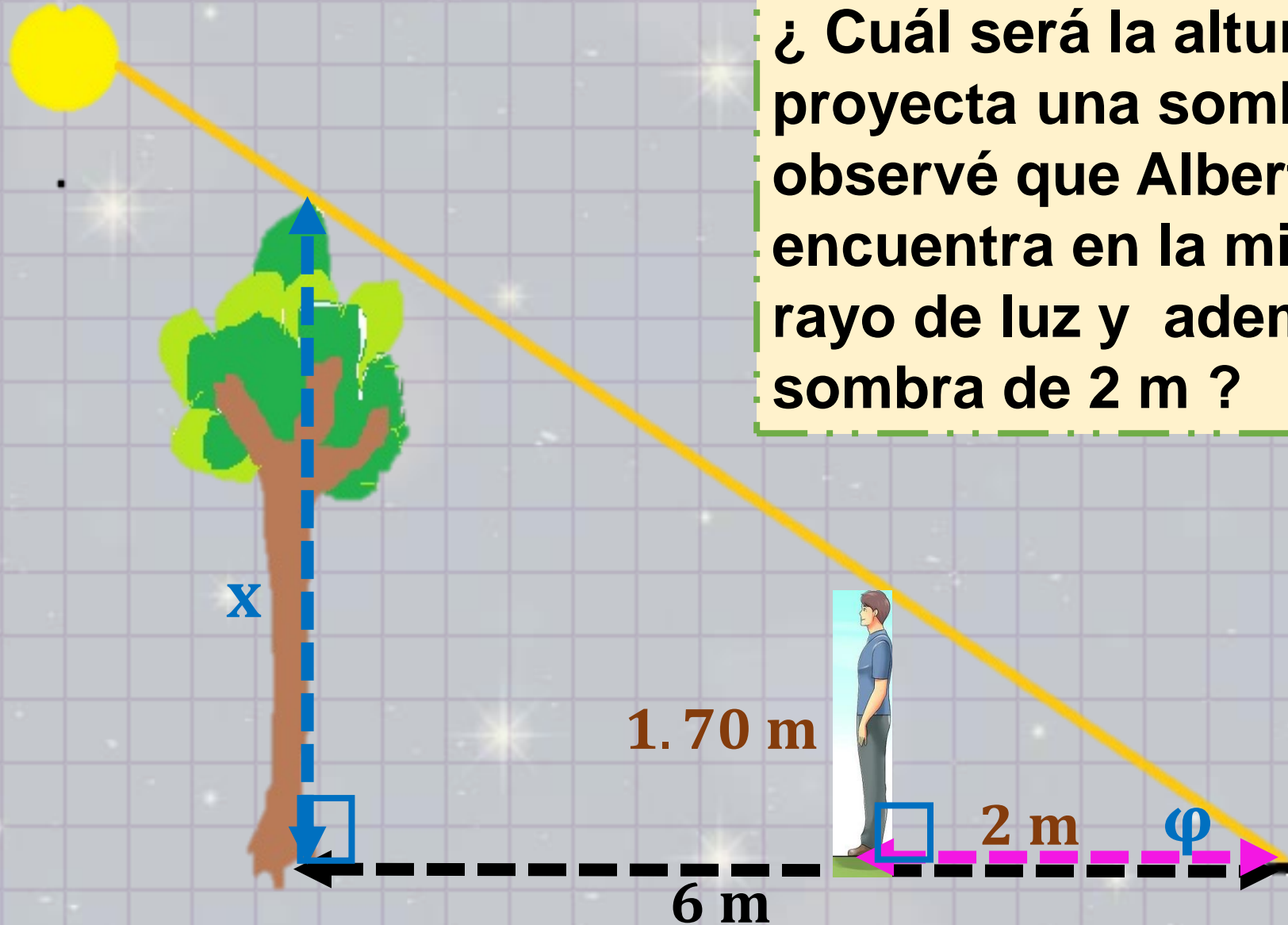
2nd
SECONDARY

**APLICACIONES DE LAS PROPIEDADES
DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS
DE UN ÁNGULO AGUDO**



HELICO MOTIVACIÓN

¿Cuál será la altura del árbol que proyecta una sombra de 6 m, si además observé que Alberto que mide 1.70 m se encuentra en la misma dirección del rayo de luz y además proyecta una sombra de 2 m ?



I) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS DE UN ÁNGULO AGUDO (RTR)

Para un mismo ángulo agudo α se cumple :

$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = \frac{\cancel{\text{CO}}}{\cancel{\text{H}}} \cdot \frac{\cancel{\text{H}}}{\cancel{\text{CO}}} = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = \frac{\cancel{\text{CA}}}{\cancel{\text{H}}} \cdot \frac{\cancel{\text{H}}}{\cancel{\text{CA}}} = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = \frac{\cancel{\text{CO}}}{\cancel{\text{CA}}} \cdot \frac{\cancel{\text{CA}}}{\cancel{\text{CO}}} = 1$$

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha \cdot \text{csc}\alpha = 1$$

$$\text{cos}\alpha \cdot \text{sec}\alpha = 1$$

$$\text{tan}\alpha \cdot \text{cot}\alpha = 1$$

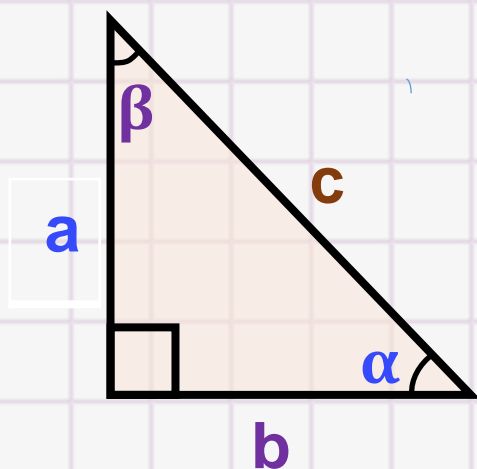
ángulos agudos iguales

Ejemplo :

$$E = \frac{7 \text{ sen}25^\circ \text{ csc}25^\circ - 3 \text{ tan}41^\circ \text{ cot}41^\circ}{2 \text{ cos}64^\circ \text{ sec}64^\circ} = \frac{7(1) - 3(1)}{2(1)} = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

II) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS AGUDOS COMPLEMENTARIOS (CO – RT)

En un triángulo rectángulo, los catetos se consideran opuestos ó adyacentes, según se elija el ángulo agudo de referencia .



RT	CO	CA	H
α	a	b	c
β	b	a	c

En general :

$$\text{Si } \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \text{RT}(\alpha) = \text{CO} - \text{RT}(\beta)$$

Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\text{sen} \alpha = \cos \beta$$

$$\text{tan} \alpha = \cot \beta$$

$$\text{sec} \alpha = \csc \beta$$

CO – RT

HELICO PRACTICE 1

Si $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$, efectúe $N = 8 \operatorname{csc} \alpha$



Recordar RTR :

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{CO}{H} \rightarrow \operatorname{csc} \alpha = \frac{H}{CO}$$

RESOLUCIÓN

Dato : $\operatorname{sen} \alpha = \frac{2}{3}$

$\rightarrow \operatorname{csc} \alpha = \frac{3}{2}$

Luego : $N = 8 \operatorname{csc} \alpha$

$$N = \cancel{8}^4 \cdot \left(\frac{3}{\cancel{2}_1} \right)$$

$\therefore N = 12$

HELICO PRACTICE 2

Si $\alpha + \beta = 90^\circ$, además $\sec\alpha = \frac{3}{2}$;

Efectúe $E = 4 \csc\beta - 1$

Recordar
CO – RT :



Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$



$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

CO – RT

RESOLUCIÓN

Por CO - RT : $\sec\alpha = \csc\beta = \frac{3}{2}$

Luego calculamos E :

$$E = 4 \csc\beta - 1$$

$$E = 4 \left(\frac{3}{2} \right) - 1 = 6 - 1$$

$$\therefore E = 5$$

HELICO PRACTICE 3

Reduzca la expresión :

$$E = (2 \operatorname{sen} 28^\circ + \operatorname{cos} 62^\circ) \operatorname{csc} 28^\circ$$

Recordar :

Definición de CO - RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cos} \beta$$

$$\operatorname{tan} \alpha = \operatorname{cot} \beta$$

$$\operatorname{sec} \alpha = \operatorname{csc} \beta$$

CO - RT

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{csc} \alpha = 1$$

$$\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sec} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tan} \alpha \cdot \operatorname{cot} \alpha = 1$$

ángulos agudos iguales

RESOLUCIÓN

Se observa que : $28^\circ + 62^\circ = 90^\circ$

Por CO - RT : $\operatorname{sen} 28^\circ = \operatorname{cos} 62^\circ$

Luego :

$$E = (2 \operatorname{sen} 28^\circ + \operatorname{sen} 28^\circ) \operatorname{csc} 28^\circ$$

$$E = 3 \operatorname{sen} 28^\circ \cdot \operatorname{csc} 28^\circ$$

Por RTR : $E = 3 (1)$

$$\therefore E = 3$$



HELICO PRACTICE 4

Reduzca :

$$R = \frac{2 \operatorname{sen} 15^\circ \cdot \sec 75^\circ \cdot \tan 20^\circ}{\cot 70^\circ \cdot \csc 19^\circ \cdot \cos 71^\circ}$$

Recordar :

Definición de CO – RT

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ ; 0^\circ < \beta < 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha = \cos \beta \\ \tan \alpha = \cot \beta \\ \sec \alpha = \csc \beta \end{array} \right\}$$

CO – RT

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} \alpha \cdot \csc \alpha = 1 \\ \cos \alpha \cdot \sec \alpha = 1 \\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \end{array} \right\}$$

ángulos agudos iguales

RESOLUCIÓN

Se observa que : $15^\circ + 75^\circ = 90^\circ$
 $20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$
 $19^\circ + 71^\circ = 90^\circ$

Por CO - RT :

$$R = \frac{2 \operatorname{sen} 15^\circ \cdot \csc 15^\circ \cdot \tan 20^\circ}{\cancel{\tan 20^\circ} \cdot \sec 71^\circ \cdot \cos 71^\circ}$$

$$R = \frac{2 \operatorname{sen} 15^\circ \cdot \csc 15^\circ}{\cos 71^\circ \cdot \sec 71^\circ}$$

Por RTR : $R = \frac{2(1)}{1}$

$$\therefore R = 2$$

HELICO PRACTICE 5

Halle el valor de α si :

$$\operatorname{sen}(3\alpha - 5^\circ) = \frac{1}{\operatorname{csc}(\alpha + 35^\circ)}$$

Recordar RTR :

Definición de RTR

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$



$$\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{csc}\alpha = 1$$

$$\operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{sec}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tan}\alpha \cdot \operatorname{cot}\alpha = 1$$

ángulos agudos iguales

RESOLUCIÓN

$$\operatorname{sen}(3\alpha - 5^\circ) = \frac{1}{\operatorname{csc}(\alpha + 35^\circ)}$$

➡ $\operatorname{sen}(3\alpha - 5^\circ) \cdot \operatorname{csc}(\alpha + 35^\circ) = 1$

Por RTR : $3\alpha - 5^\circ = \alpha + 35^\circ$

$$3\alpha - \alpha = 35^\circ + 5^\circ$$

$$2\alpha = 40^\circ$$

$$\therefore \alpha = 20^\circ$$



HELICO PRACTICE 6

Camila desea acceder a un crédito de libre disponibilidad, para lo cual visita dos agencia bancarias, las cuales cobran una cierta tasa de interés.-

¿ En cual de las agencias le conviene adquirir el préstamo ?

Banco Azteca \longrightarrow $x\%$

Banco Continental \longrightarrow $y\%$

Donde : $\cos(3x)^\circ \cdot \sec(y + 25)^\circ = 1$
 $\sin(2y)^\circ = \cos 50^\circ$

RESOLUCIÓN

Dato : $\sin(2y)^\circ = \cos 50^\circ$

Por CO - RT : $2y^\circ + 50^\circ = 90^\circ$

$$2y = 40$$

$$y = 20$$

Banco Continental : $y\% = 20\%$

Dato : $\cos(3x)^\circ \cdot \sec(y + 25)^\circ = 1$

Por RTR : $(3x)^\circ = (y + 25)^\circ$

$$3x = 20 + 25$$

$$3x = 45$$

$$x = 15$$

Banco Azteca: $x\% = 15\%$

RPTA : A Camila le conviene adquirir el préstamo en el Banco Azteca .

HELICO PRACTICE 7

En una olimpiada de matemáticas se planteó el siguiente problema :

Si $\text{sen}8x \cdot \text{sec}10^\circ = 1$; efectúe : $P = 4 \text{sen}3x + \text{sec}6x$

A) 2

B) 3

~~C) 4~~

D) 5

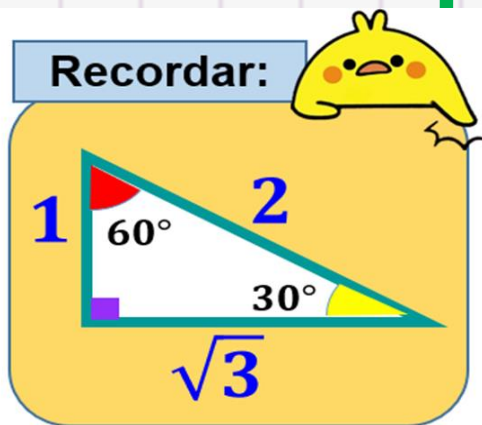
¿Cuál es la alternativa que indica la solución al problema ?

RESOLUCIÓN

Dato : $\text{sen}8x \cdot \text{sec}10^\circ = 1$

Por CO- RT : $\text{sen}8x \cdot \text{csc}80^\circ = 1$

Por RTR : $8x = 80^\circ$
 $x = 10^\circ$



Luego :

$$P = 4 \text{sen}3(10^\circ) + \text{sec}6(10^\circ)$$

$$P = 4 \text{sen}30^\circ + \text{sec}60^\circ$$

$$P = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 2$$

$$P = 2 + 2 = 4$$

∴ Clave C



SACO
OLIVEROS