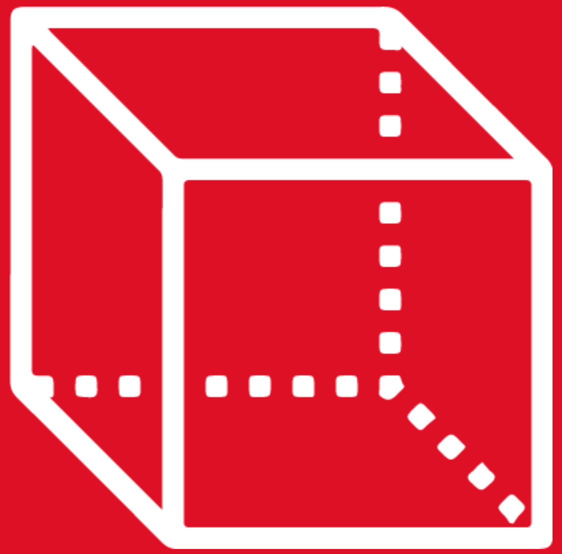
GEOMETRÍA

Capítulo 10



5th
SECONDARY

RELACIONES MÉTRICAS EN LOS TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

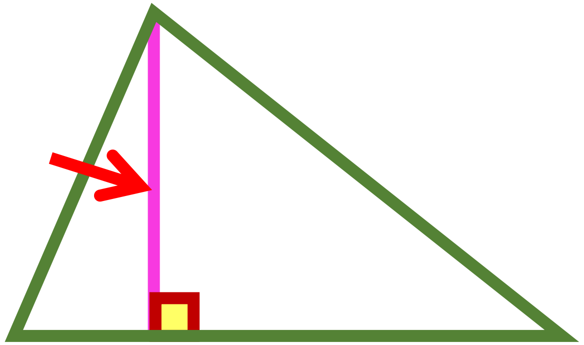
SACO OLIVEROS

Continuando con el tema de relaciones métricas, en este capítulo aprenderemos a hallar las longitudes de las líneas notables más importantes como la altura, la mediana, el segmento de bisectriz, así como también la longitud de una ceviana interior, conociendo previamente las longitudes de los tres lados del triángulo.

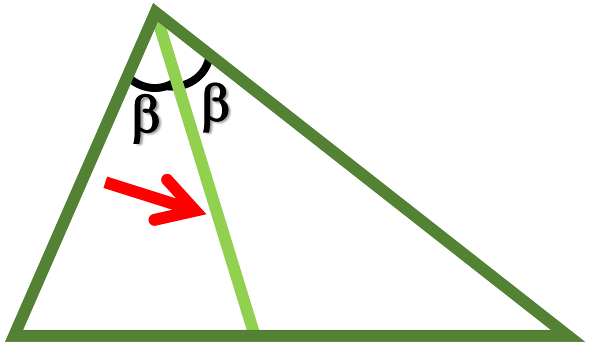
$$e^{i\pi}+1=0$$

Actividad

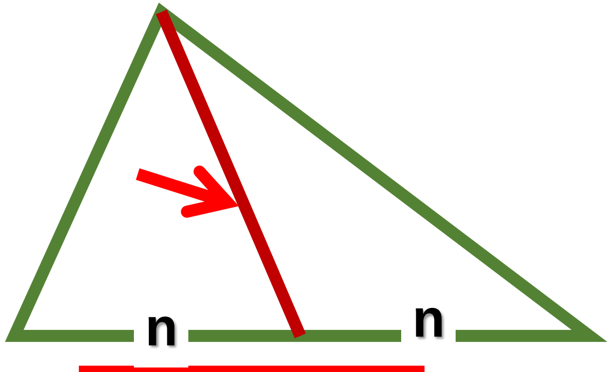
Complete los casilleros con los nombres de las líneas notables que hay en cada triángulo, señaladas con la flecha.



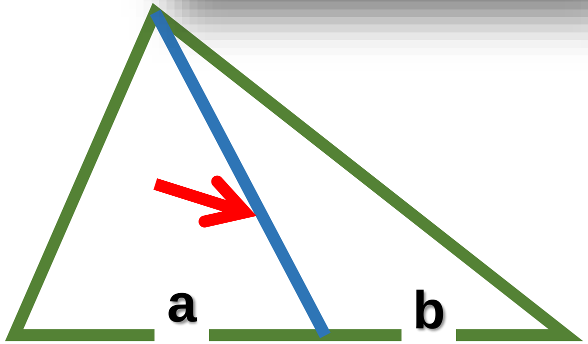
Altura



Bisectriz



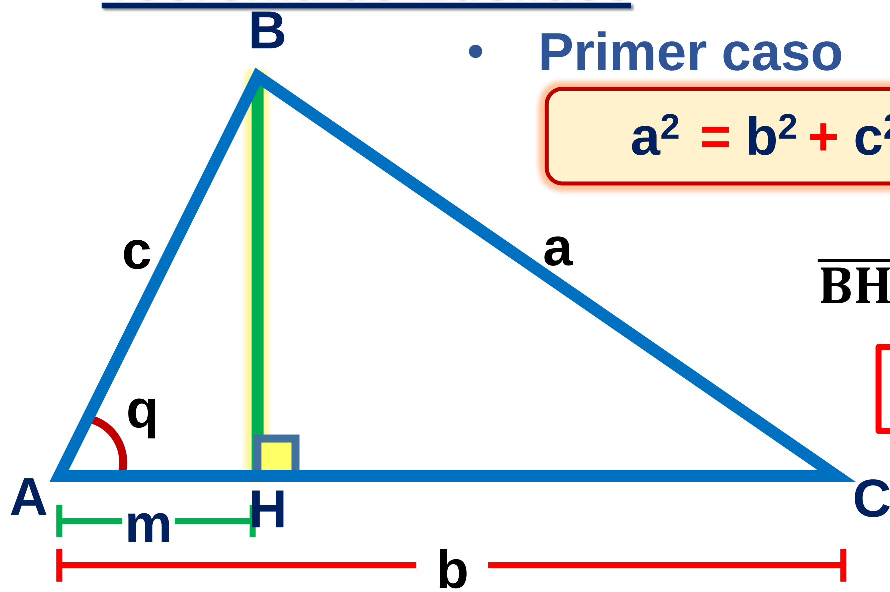
Mediana



Ceviana

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO OBLICUÁNGULO

Teorema de Euclides

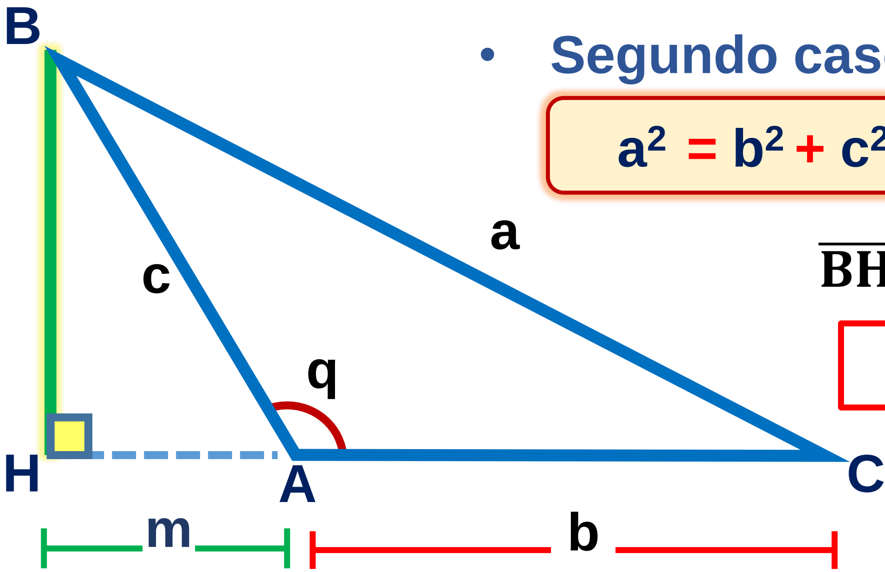


- Primer caso

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm}$$

$\overline{BH}$: Altura

$\boxed{q < 90°}$



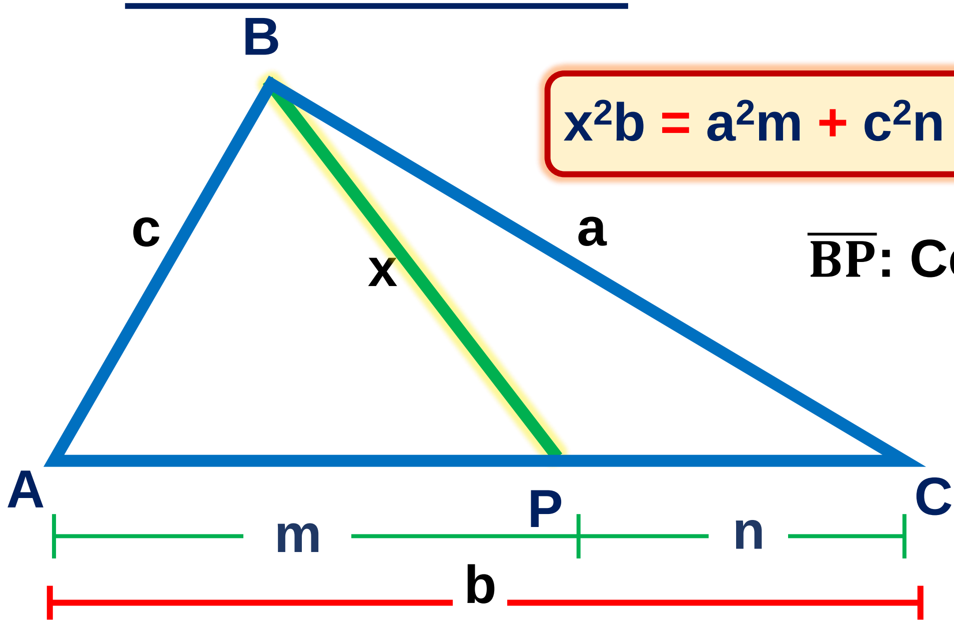
- Segundo caso

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bm}$$

$\overline{BH}$: Altura

$\boxed{90° < q}$

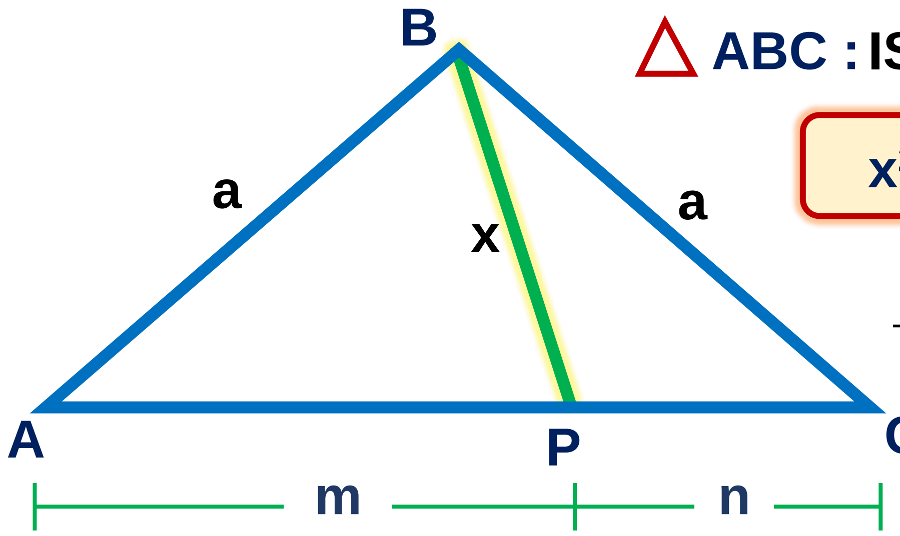
Teorema de Stewart



$$\boxed{x^2 b = a^2 m + c^2 n - mnb}$$

$\overline{BP}$: Ceviana

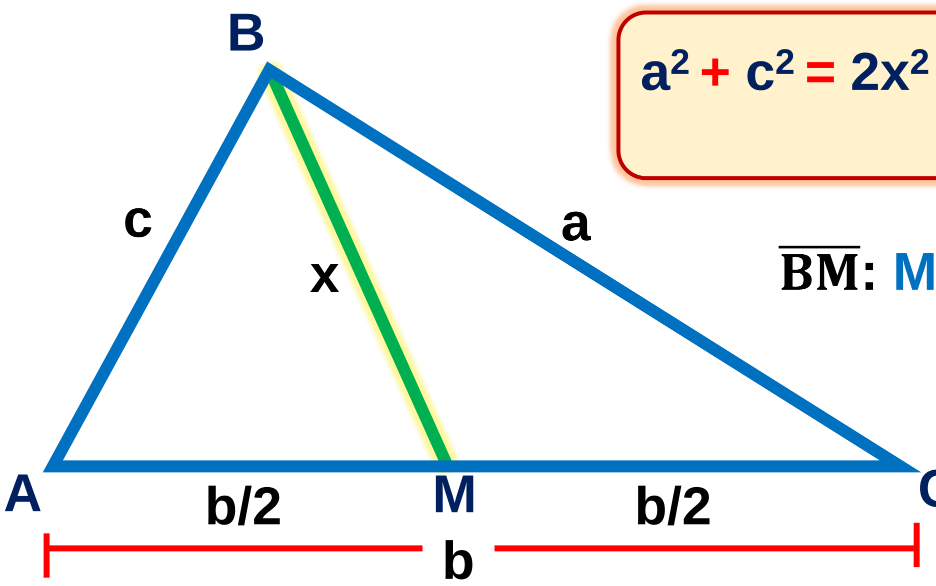
$\triangle$ ABC : ISÓSCELES



$$\boxed{x^2 = a^2 - mn}$$

$\overline{BP}$: Ceviana

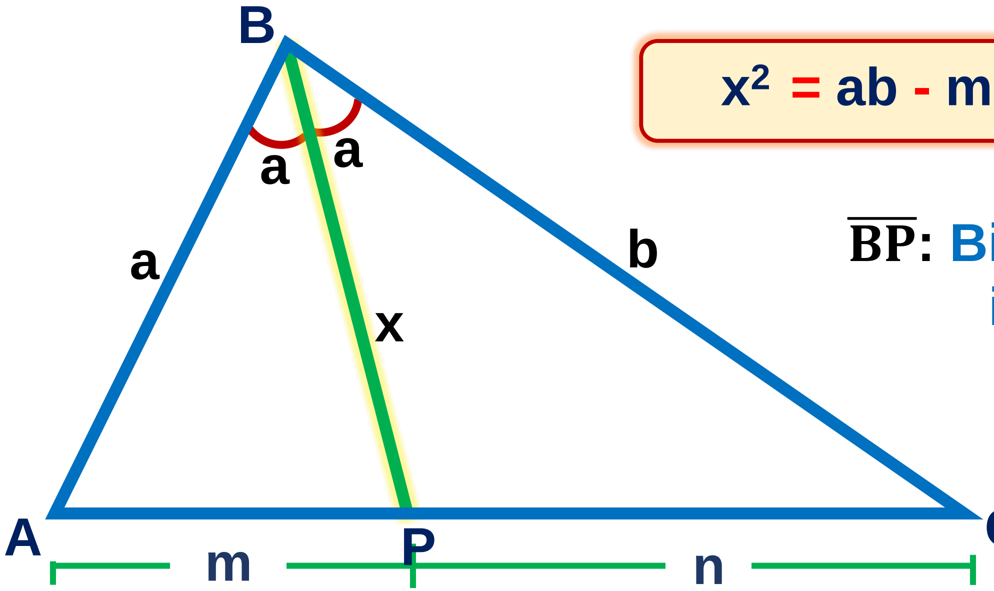
Teorema de la Mediana



$$a^2 + c^2 = 2x^2 + \frac{b^2}{2}$$

$\overline{BM}$: Mediana

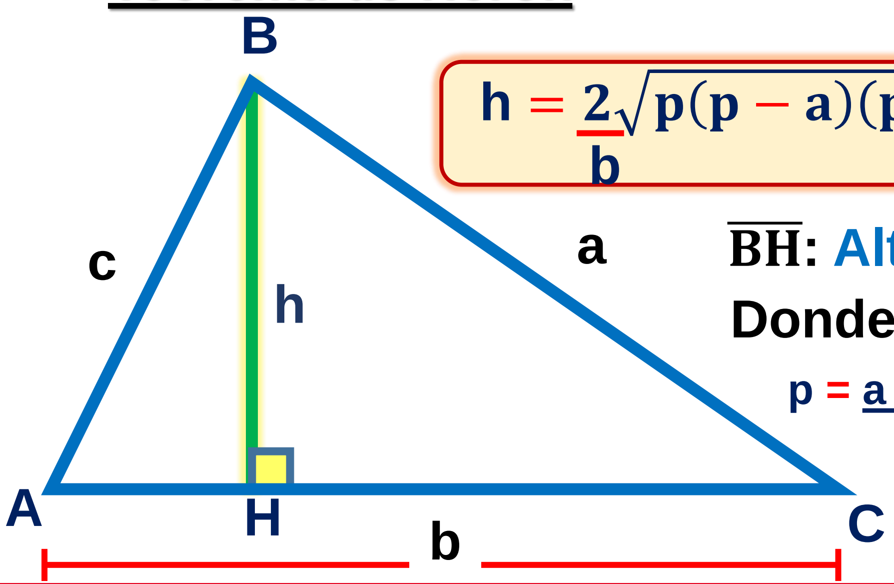
T. de la longitud de la bisectriz interior



$$x^2 = ab - mn$$

$\overline{BP}$: Bisectriz interior

Teorema de Herón



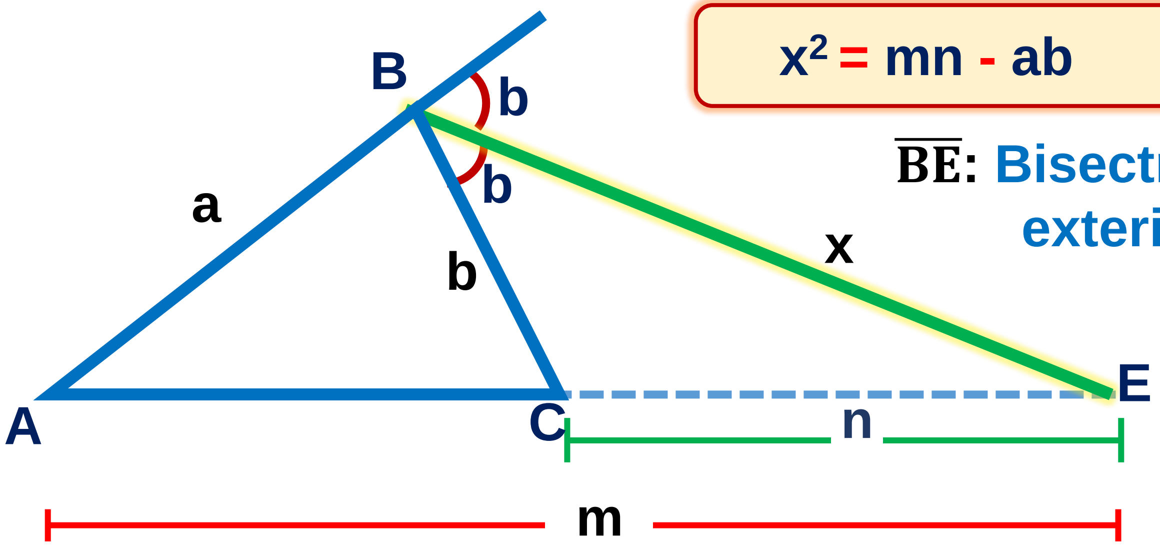
$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$\overline{BH}$: Altura

Donde:

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

T. de la longitud de la bisectriz exterior

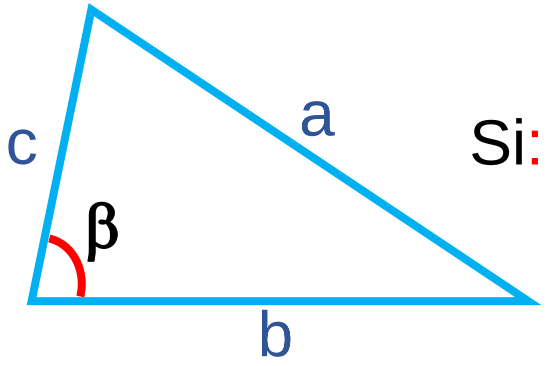


$$x^2 = mn - ab$$

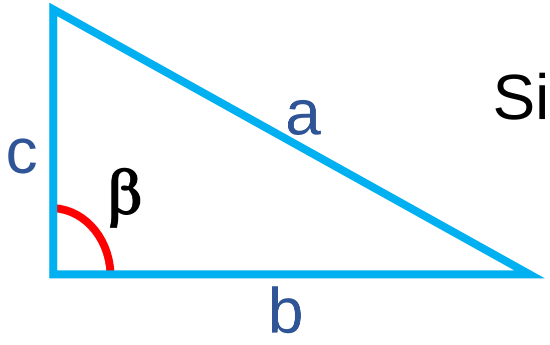
$\overline{BE}$: Bisectriz exterior

Naturaleza de un triángulo

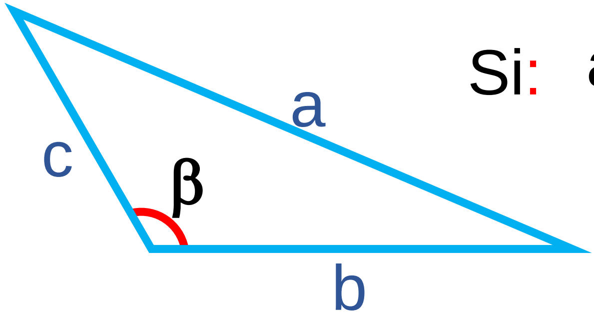
Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triangulo siendo a longitud de mayor lado:



Si: $a^2 < b^2 + c^2$ ⇒ $\boxed{\beta < 90°}$ **y el triángulo es acutángulo.**

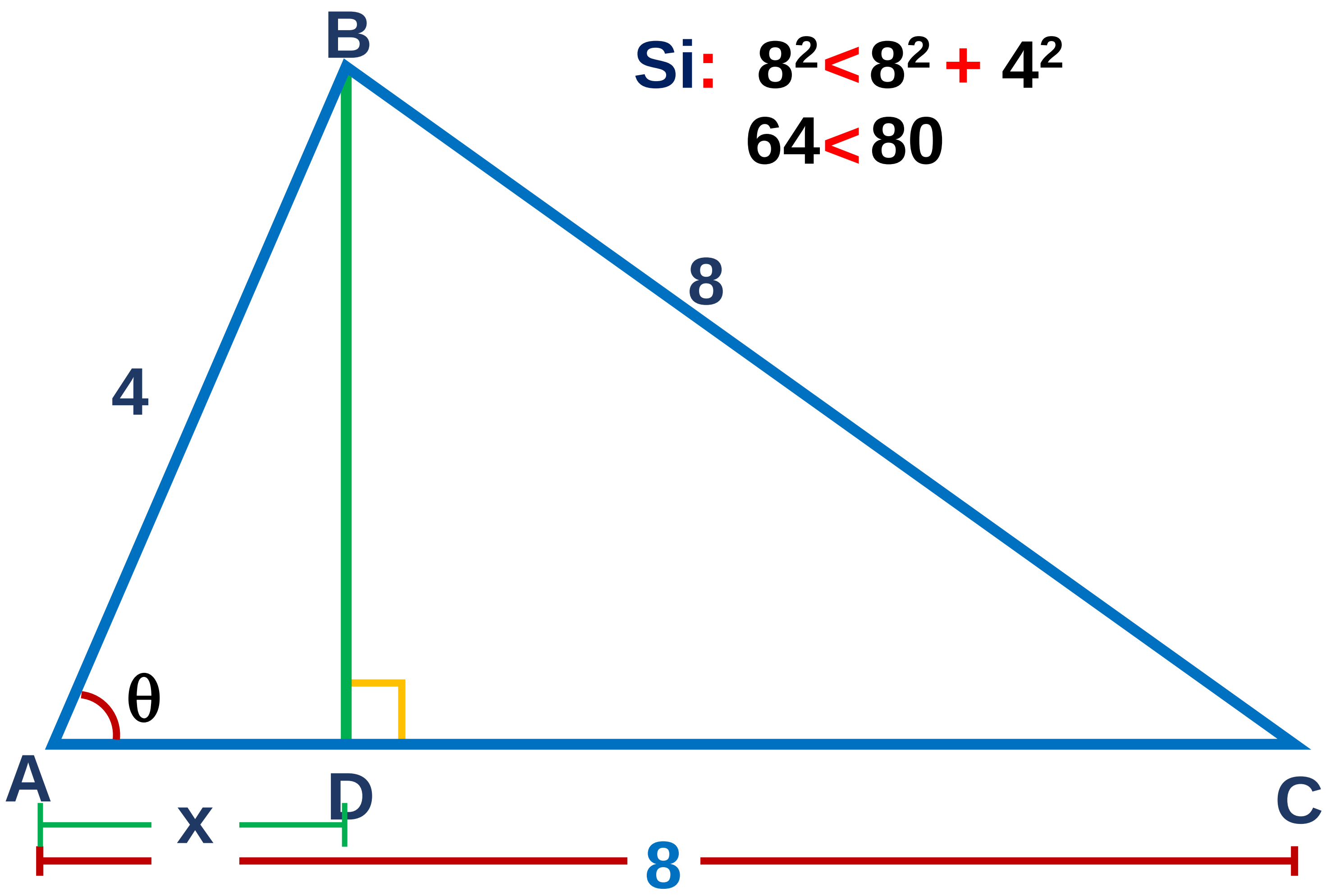


Si: $a^2 = b^2 + c^2$ ⇒ $\boxed{\beta = 90°}$ **y el triángulo es rectángulo.**



Si: $a^2 > b^2 + c^2$ ⇒ $\boxed{\beta > 90°}$ **y el triángulo es obtusángulo.**

1. En un triángulo ABC, AB = 4 y BC = AC = 8. Luego se traza la altura $\overline{BD}$. Halle AD.



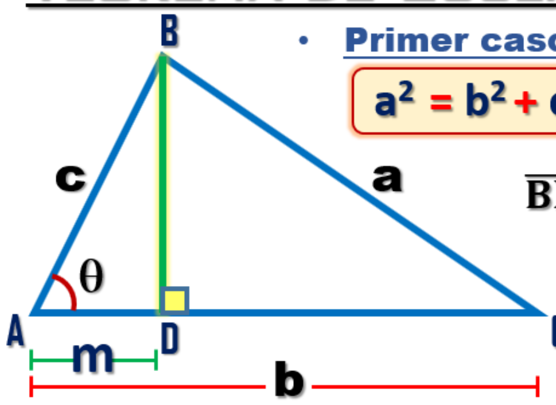
- **Naturaleza de un triángulo**

Si: $8^2 < 8^2 + 4^2$

$64 < 80$

$\boxed{\theta < 90°}$ Δ acutángulo

- **Teorema de Euclides**



- Primer caso

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm}$

$\overline{BD}$: Altura

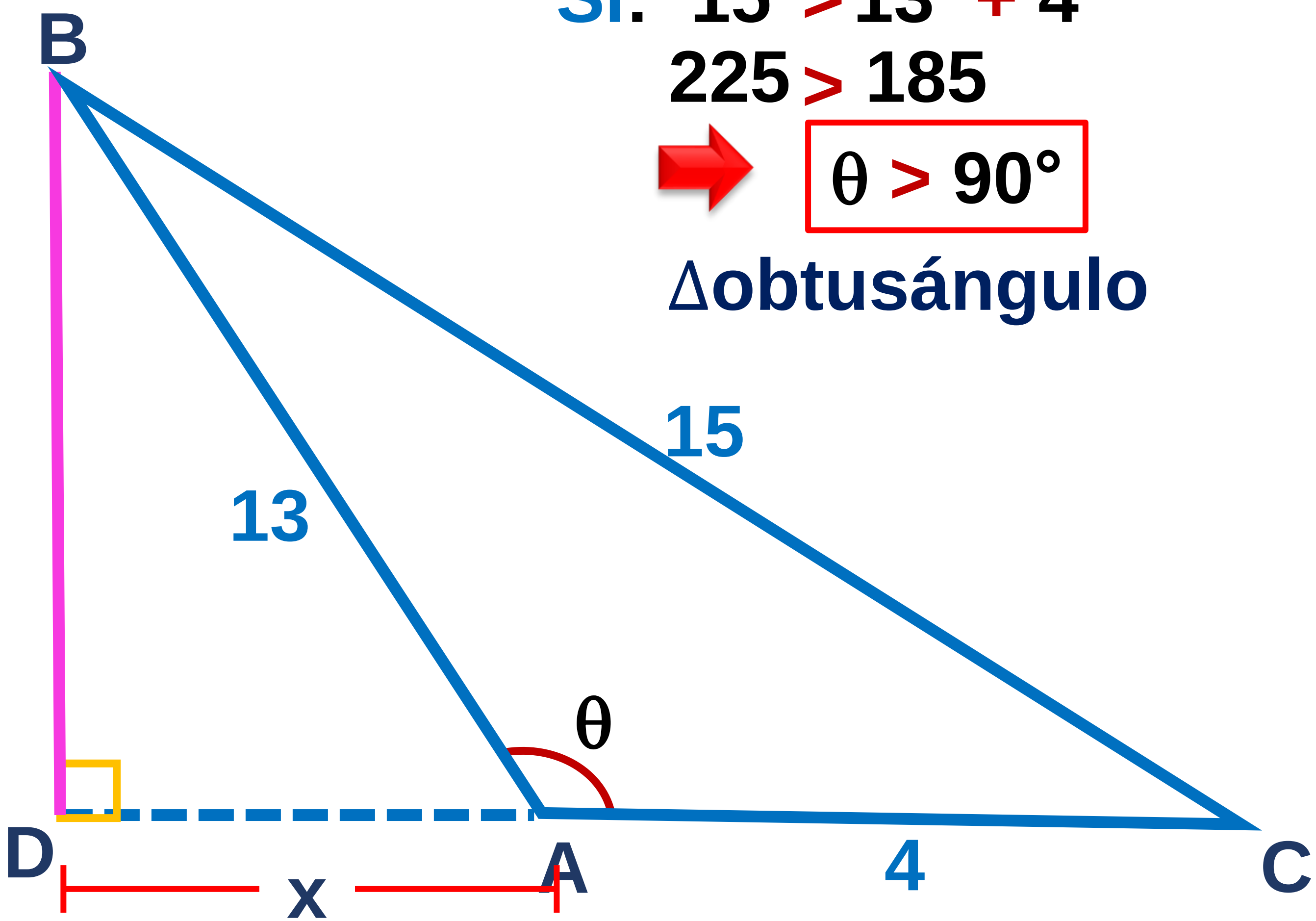
$\boxed{\theta < 90°}$

$\cancel{8^2} = \cancel{8^2} + 4^2 - 2(8)(x)$

$16x = 16$

$\boxed{x = 1}$

2. En un triángulo ABC, AB = 13 y BC = 15 y AC = 4. Se traza la altura $\overline{BD}$. Halle AD.



- **Naturaleza de un triángulo**

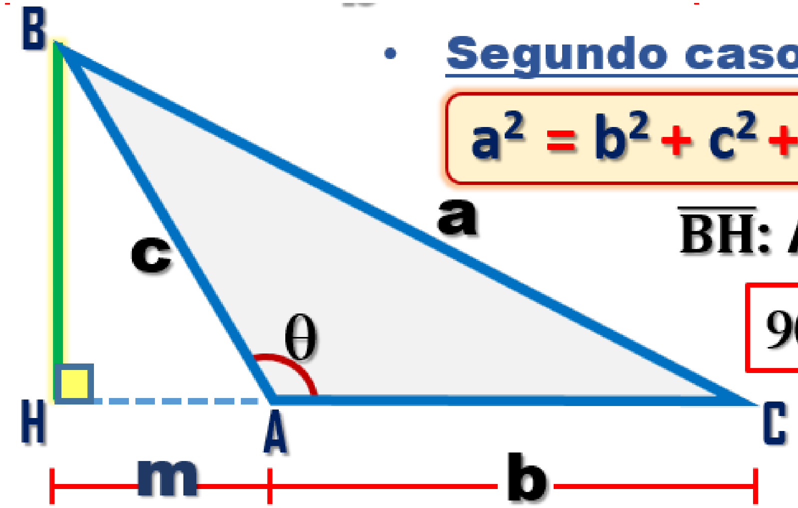
Si: $15^2 > 13^2 + 4^2$

$225 > 185$

$\boxed{\theta > 90°}$

Δobtusángulo

- **Teorema de Euclides**



- Segundo caso

$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bm}$

$\overline{BH}$: Altura

$\boxed{90° < \theta}$

$$15^2 = 4^2 + 13^2 + 2(4)(x)$$

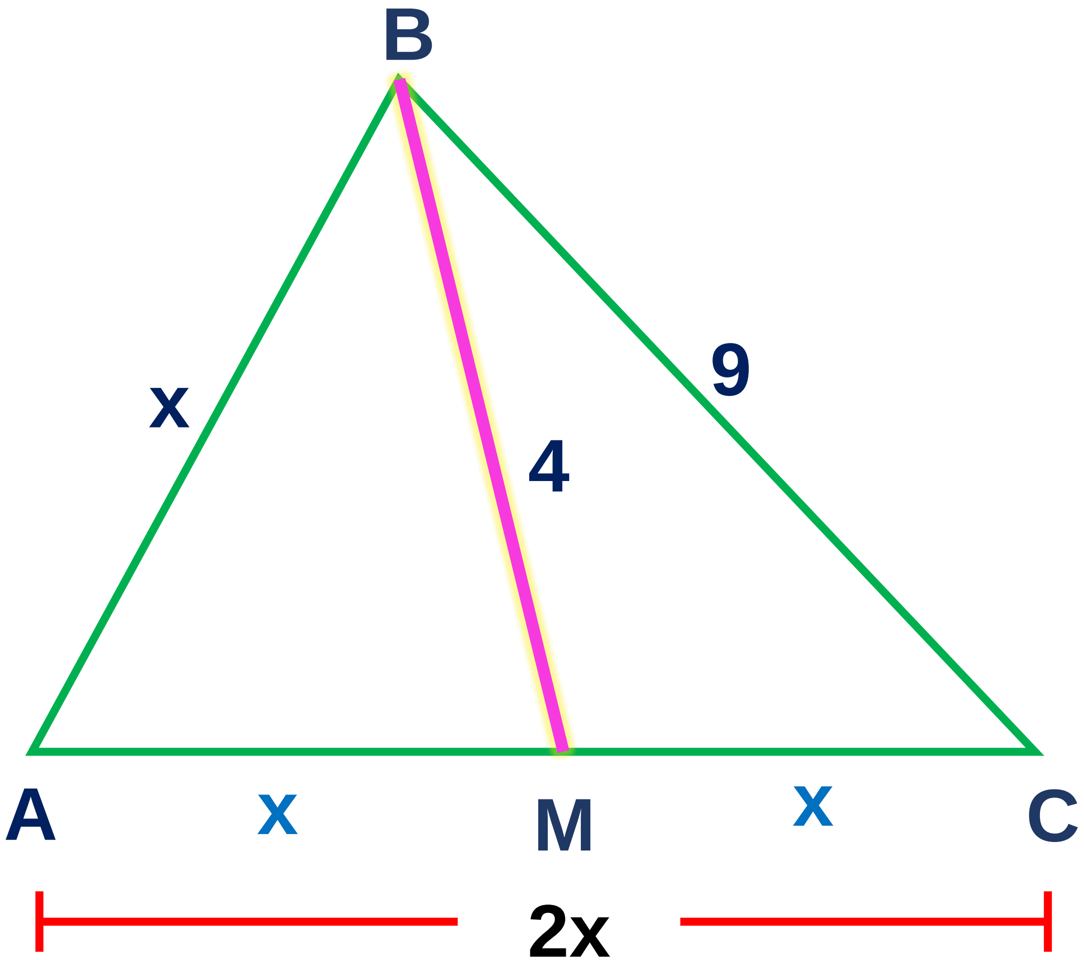
$$225 = 16 + 169 + 8x$$

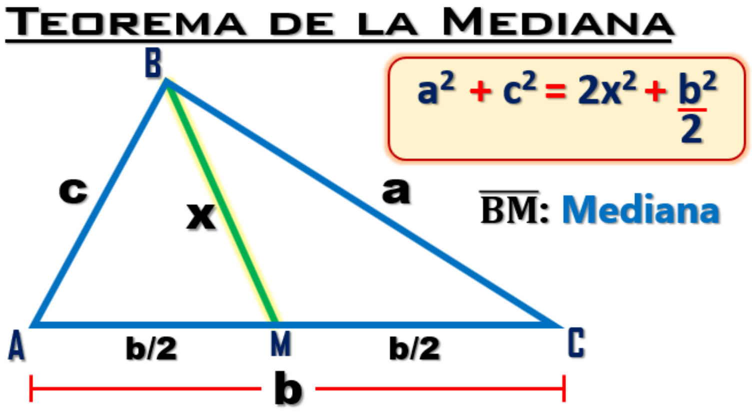
$$225 = 185 + 8x$$

$$40 = 8x$$

$$\boxed{5 = x}$$

3.En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$. Si BM = 4, BC = 9 y AB = AM = MC. Halle AB.





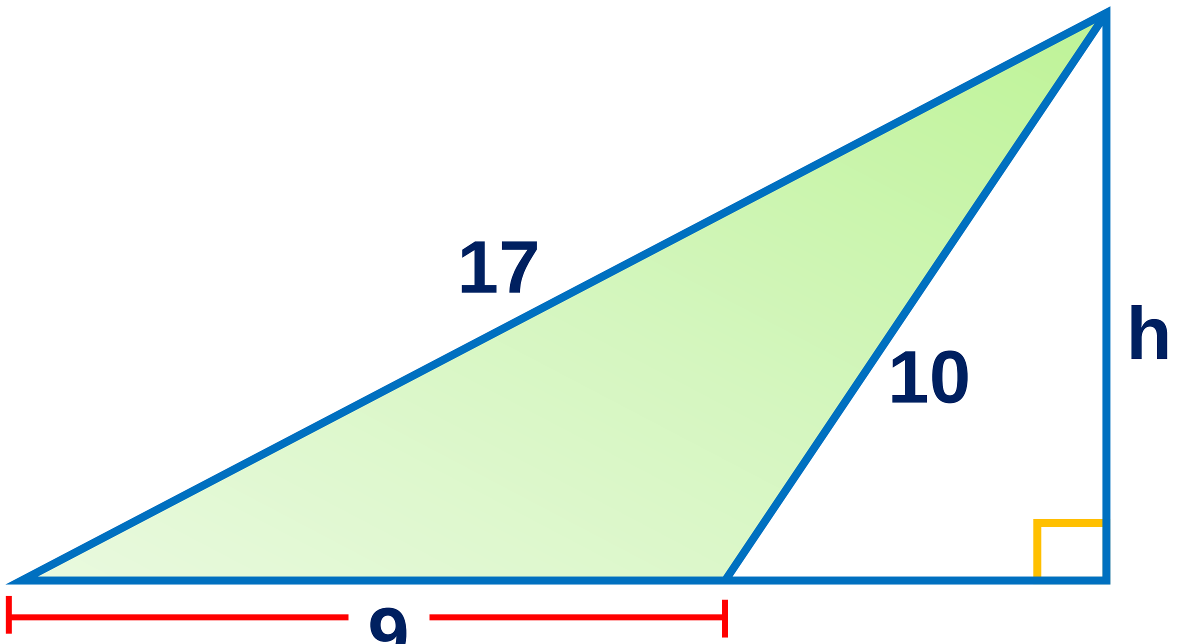
$$9^2 + x^2 = 2(4)^2 + \frac{(2x)^2}{2}$$

$$81 + x^2 = 32 + 2x^2$$

$$49 = x^2$$

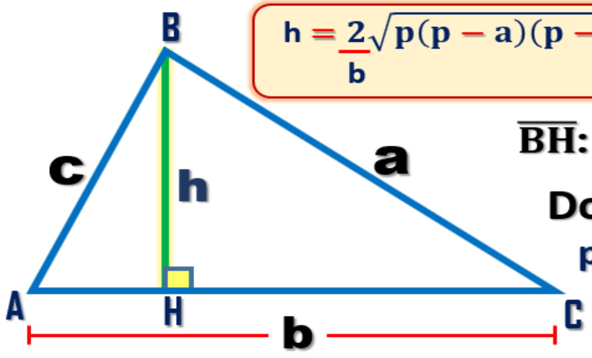
$$\boxed{7 = x}$$

4. Halle el valor de h.



Teorema de Herón

$$h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$



$\overline{BH}$: Altura

Donde:

$p = \frac{a+b+c}{2}$

- Calculamos el semiperímetro

$$p = \frac{17+10+9}{2} \Rightarrow p = 18$$

- Por teorema de Herón

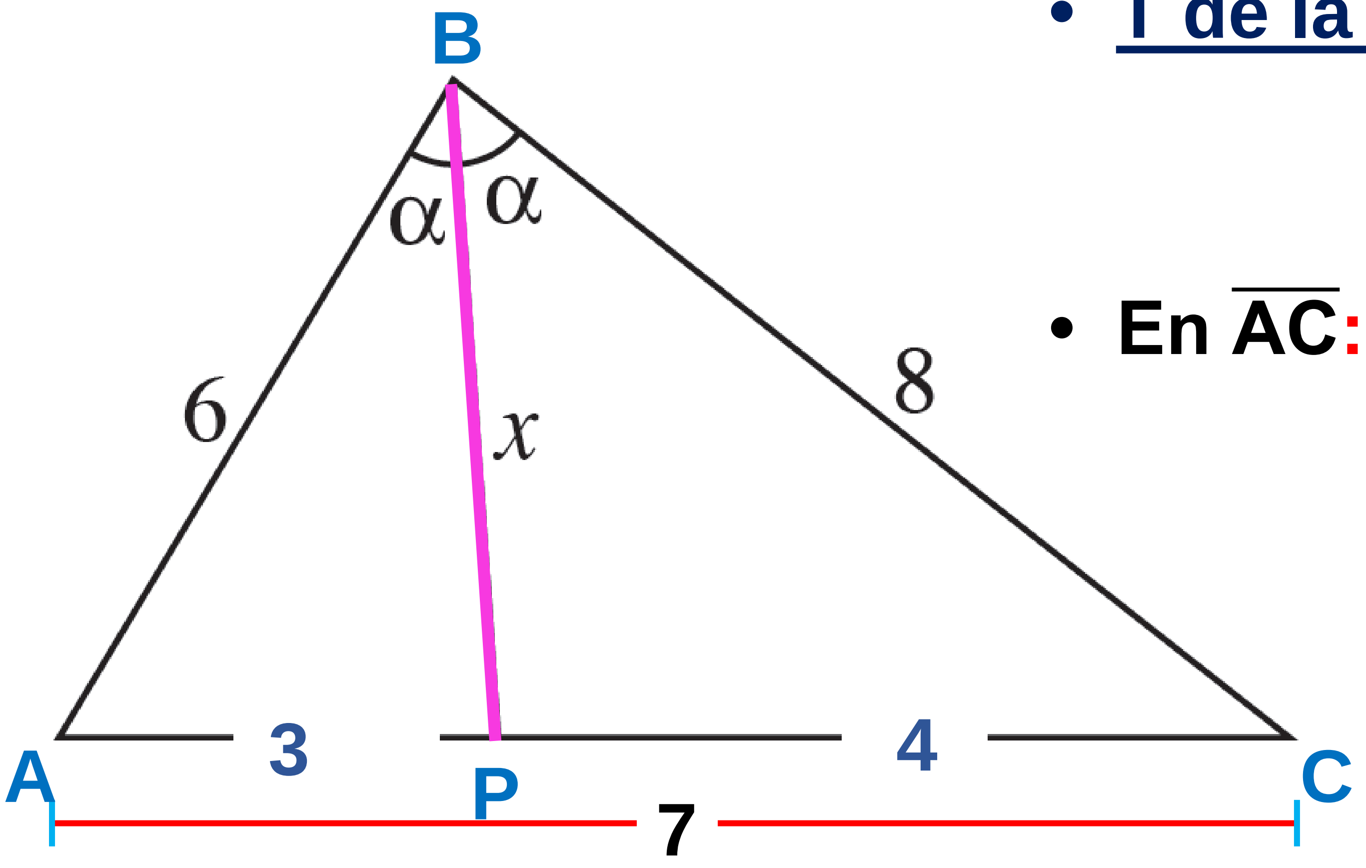
$$h = \frac{2}{9}\sqrt{18(18-10)(18-9)(18-17)}$$

$$h = \frac{2}{9}\sqrt{\underbrace{18(8)}_{144}\underbrace{(9)(1)}_{9}}$$

$$h = \frac{2(12)(3)}{9}$$

$$\boxed{h = 8}$$

5. Halle el valor de *x*.

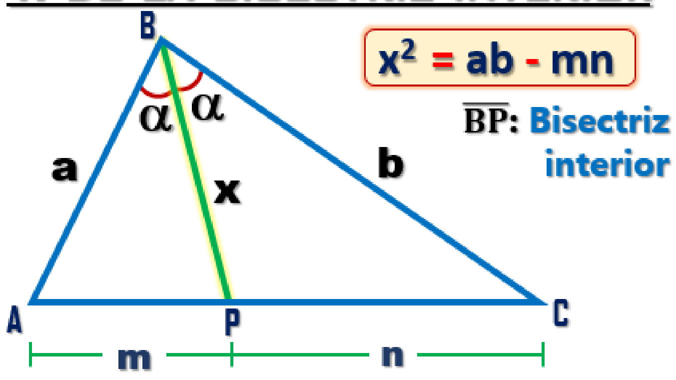


- **T de la bisectriz interior** (Proporcionalidad)

$$\frac{\overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{8}}} = \frac{AP}{PC} \qquad \begin{array}{l} AP = 3k \\ PC = 4k \end{array}$$

- En $\overline{AC}$: $3k + 4k = 7 \Rightarrow 7k = 7 \Rightarrow k = 1$

T. DE LA BISECTRIZ INTERIOR

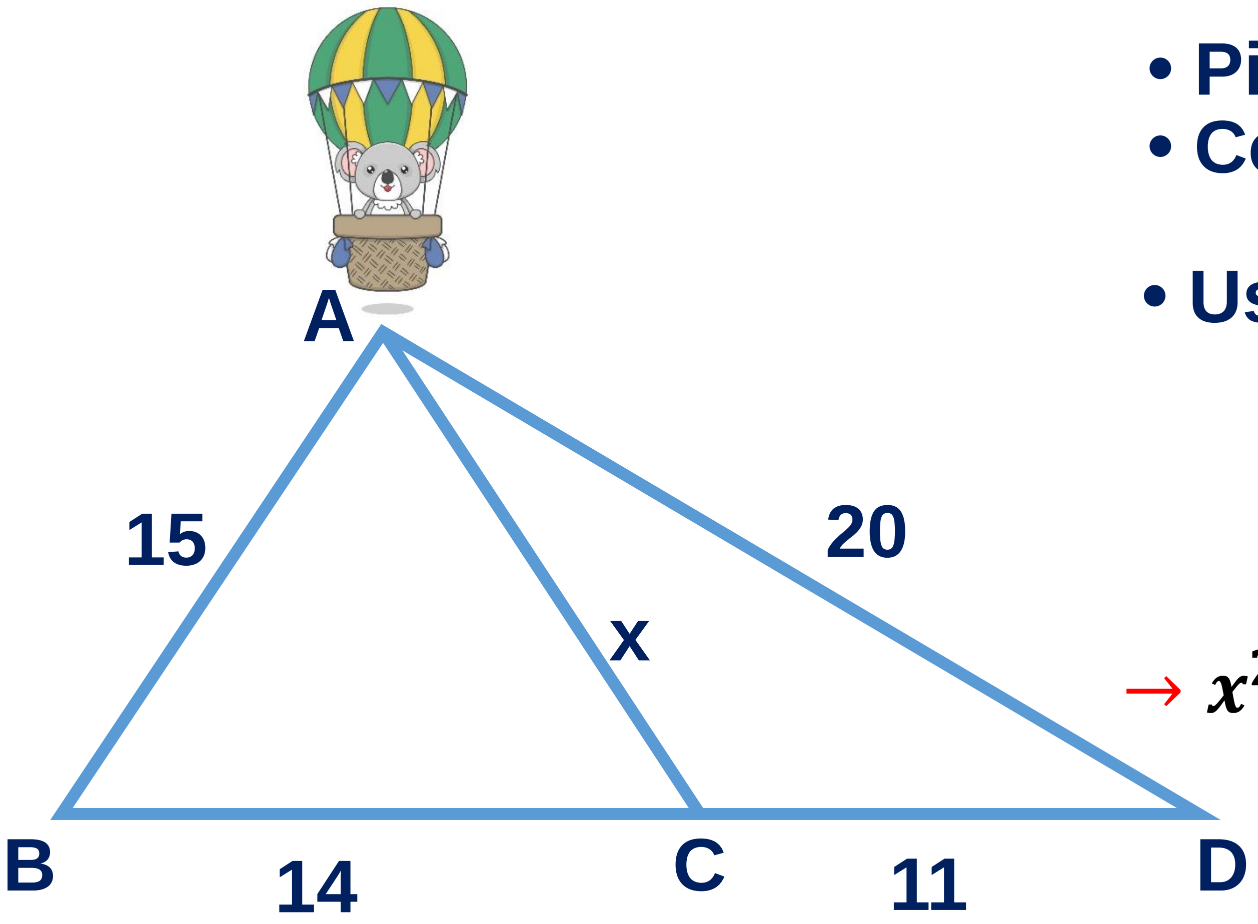


$$x^2 = 6.8 - 3.4$$
$$x^2 = 48 - 12$$
$$x^2 = 36$$

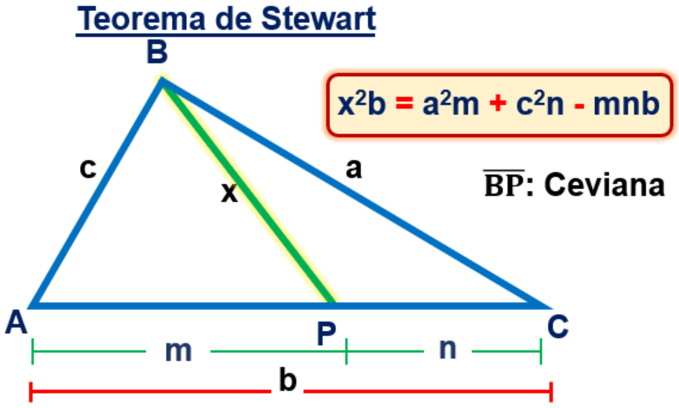
$$\boxed{x = 6}$$

- $\overline{BP}$: bisectriz interior.

6. En la figura se muestra un globo aerostático a punto de elevarse, el cual es amarrado con las sogas AB, AC y AD. Si AB=15 m, AD=20 m, BC=14 m y CD=11 m. Calcule AC.



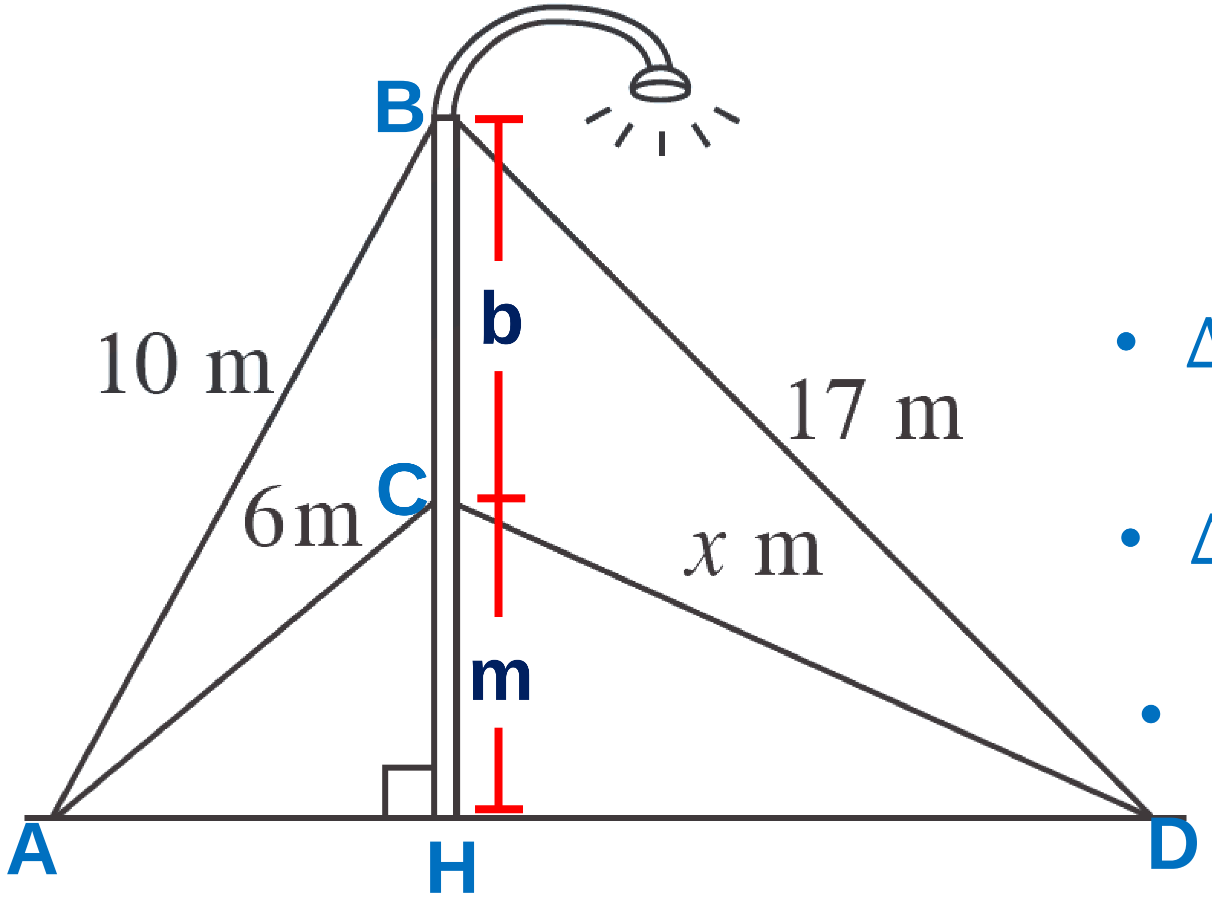
- Piden: AC
- Colocamos los datos en el gráfico
- Usaremos

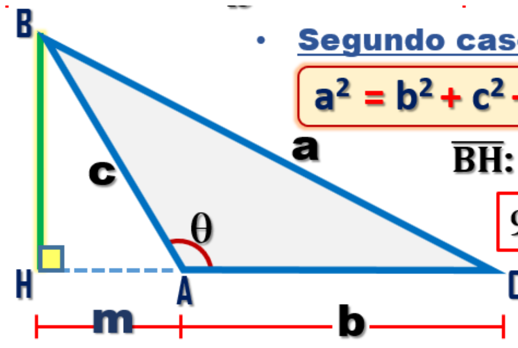


$$\rightarrow x^2 . 25 = 20^2 . 14 + 15^2 . 11 - 14 . 11 . 25$$

$\boxed{x = 13}$

8. Se muestra un poste de alumbrado público, el cual se encuentra sostenido por cuatro cables metálicos cuyas longitudes se muestran en cada uno. Halle el valor de x.





- Segundo caso

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

$\overline{BH}$: Altura

$90° < \theta$

- Δ ABC: $10^2 = b^2 + 6^2 + 2(b)(m)$

  $64 = b^2 + 2bm$ .... (1)

- Δ DBC: $17^2 = b^2 + x^2 + 2(b)(m)$

  $289 - x^2 = b^2 + 2bm$ .... (2)

- Reemplazando (1) en (2)

  $289 - x^2 = 64$

  $\Rightarrow 225 = x^2$

  $\boxed{15 = x}$