



# GEOMETRÍA

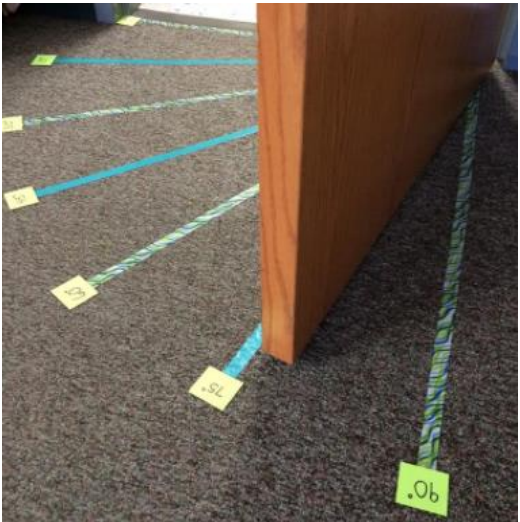
## Capítulo 2

3th  
SECONDARY

ÁNGULOS



 **SACO OLIVEROS**



# Helicomotivación



**Definición:** Es la reunión de dos rayos no colineales que tienen el mismo origen.

## ELEMENTOS

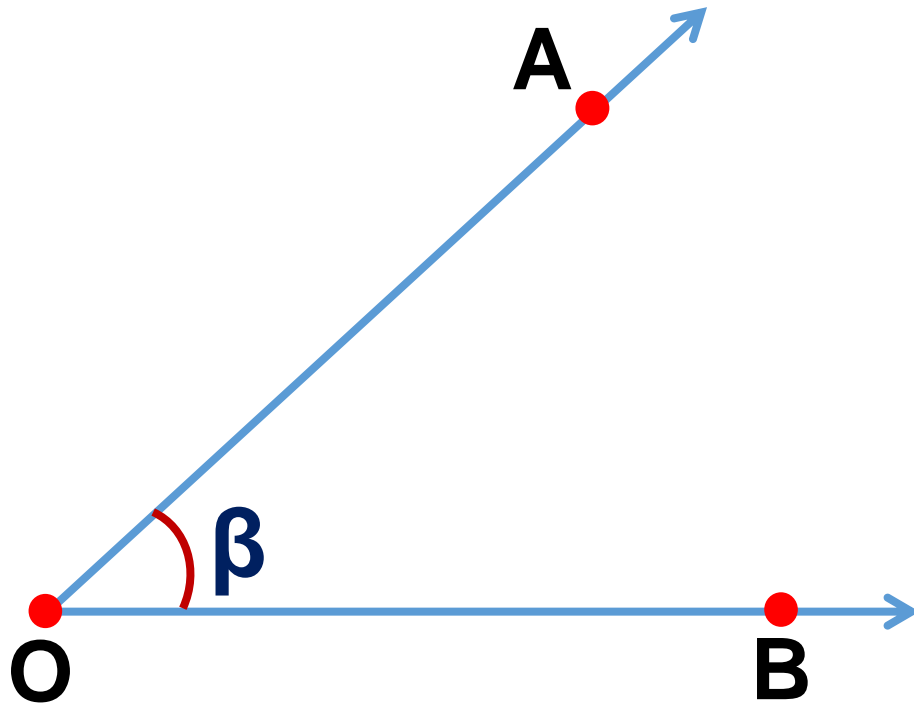
- Vértice :  $O$
- Lados :  $\overrightarrow{OA}$  y  $\overrightarrow{OB}$

## NOTACIÓN

$\sphericalangle AOB$  : Ángulo AOB.

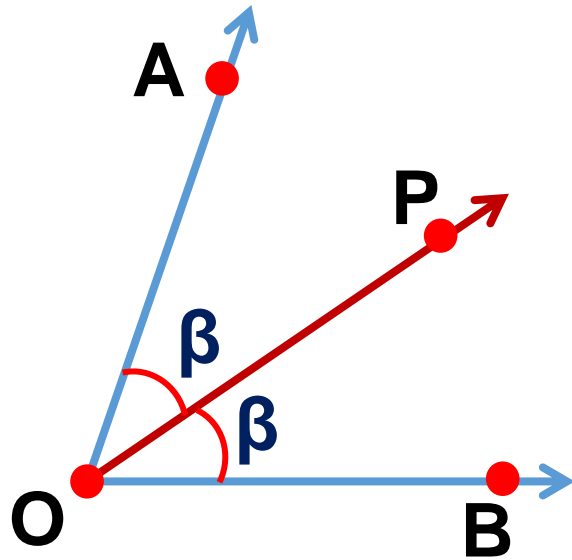
$m\sphericalangle AOB$  : medida del ángulo AOB.

$$m\sphericalangle AOB = \beta$$

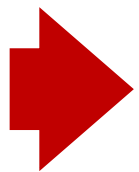


# BISECTRIZ

Es aquel rayo cuyo origen es el vértice de un ángulo y que divide a este en dos ángulos de igual medida.



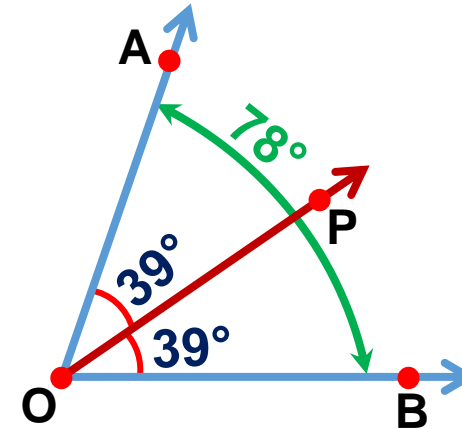
Si :  $\overrightarrow{OP}$  es bisectriz del  $\angle AOB$



$$m\angle AOP = m\angle BOP$$

Ejemplos:

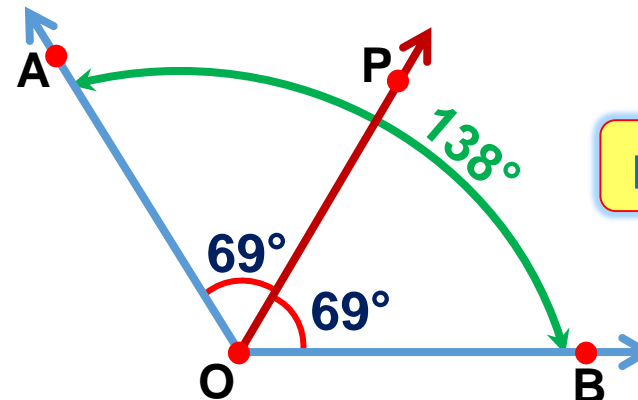
1. Calcule la  $m\angle POB$ , si  $\overrightarrow{OP}$  es bisectriz.



$$m\angle AOP = m\angle POB$$

$$m\angle POB = 39^\circ$$

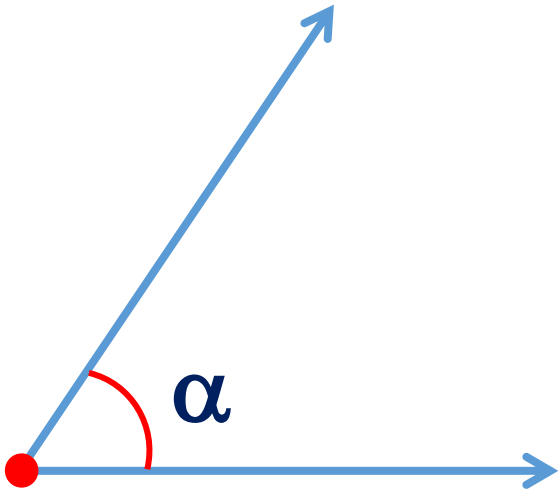
2. Calcule la  $m\angle AOB$ , si  $\overrightarrow{OP}$  es bisectriz.



$$m\angle AOP = m\angle POB$$

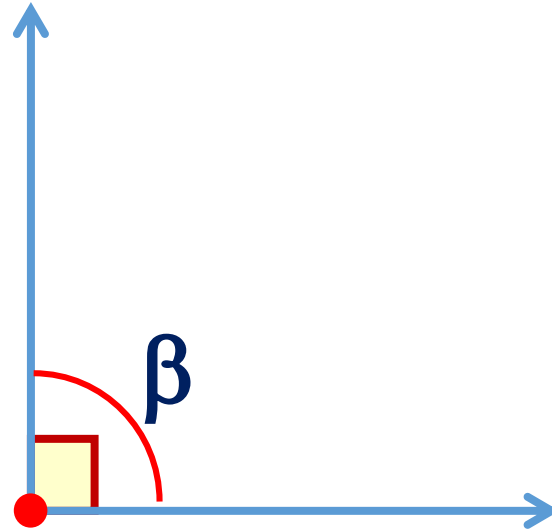
$$m\angle AOB = 138^\circ$$

- De acuerdo a su medida.



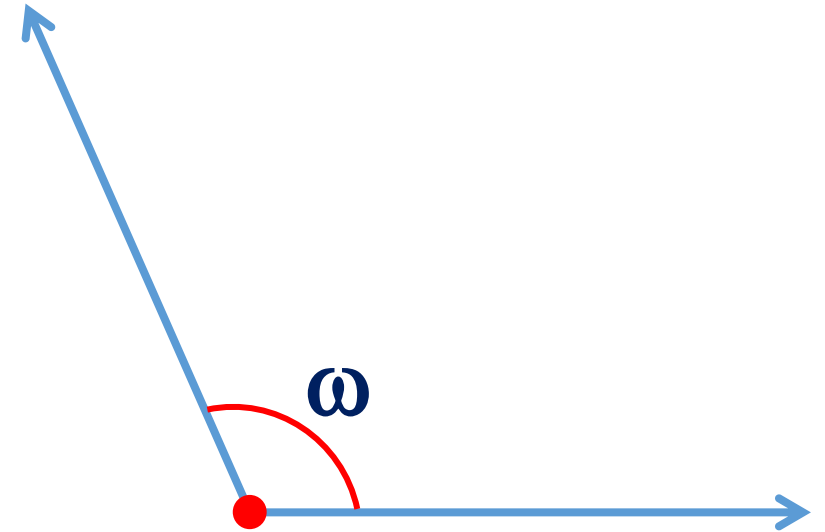
$$0^\circ < \alpha < 90^\circ$$

∠ Agudo



$$\beta = 90^\circ$$

∠ Recto



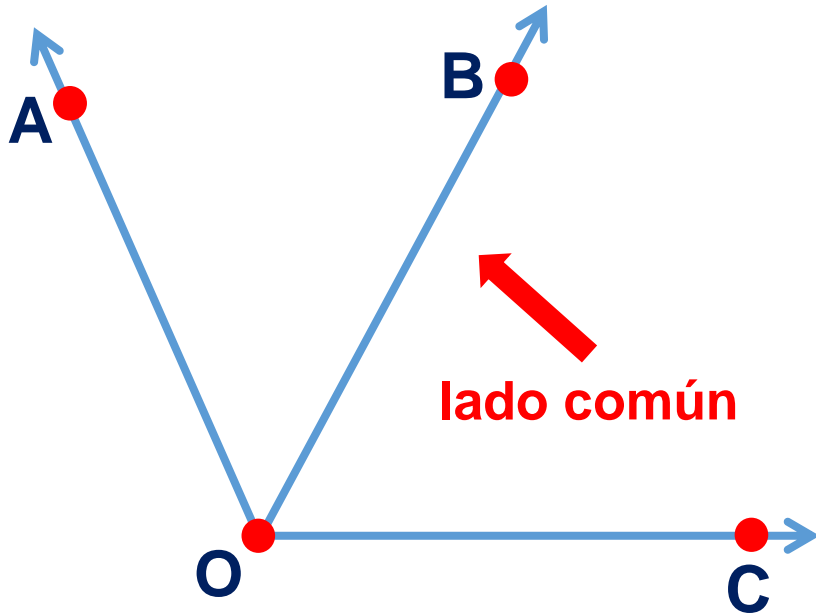
$$90^\circ < \omega < 180^\circ$$

∠ Obtuso

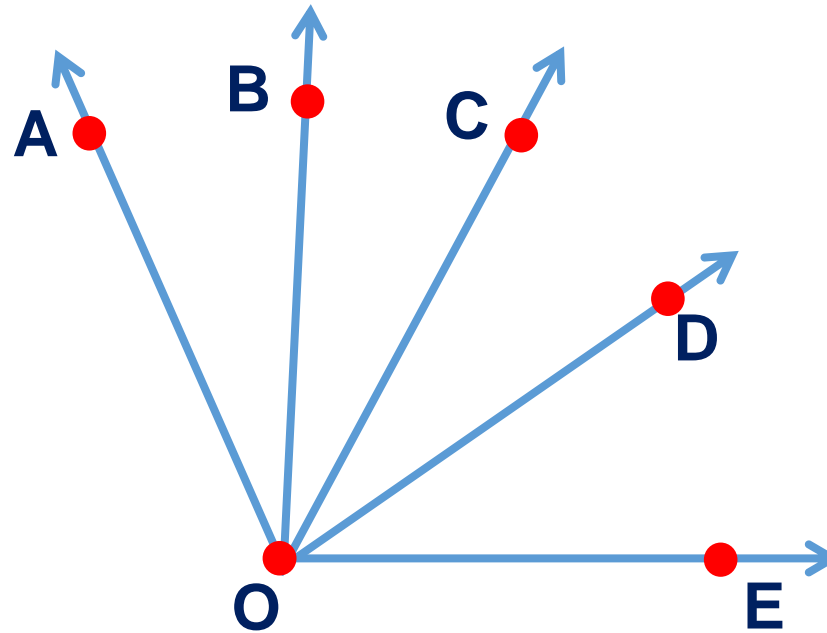


- Según la posición de sus lados

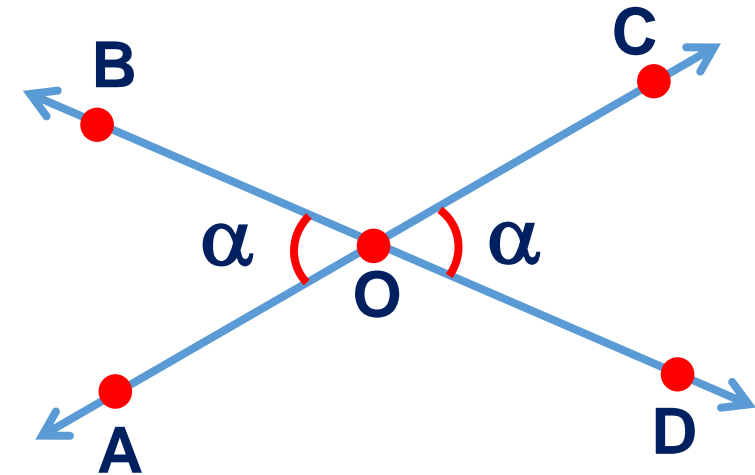
## Ángulos adyacentes

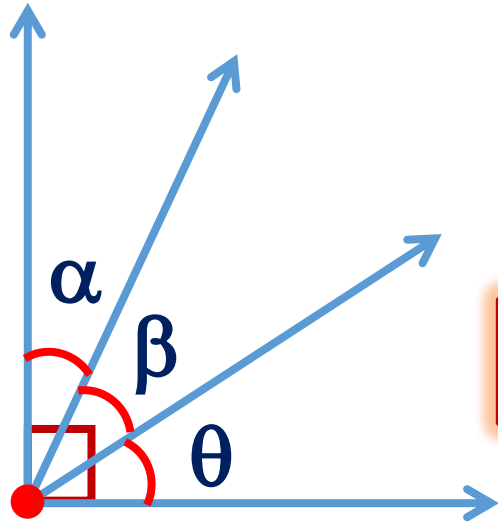


## Ángulos consecutivos

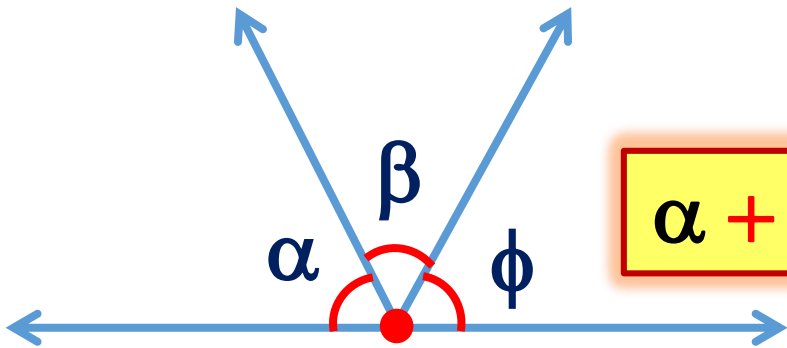


## Ángulos opuestos por el vértice

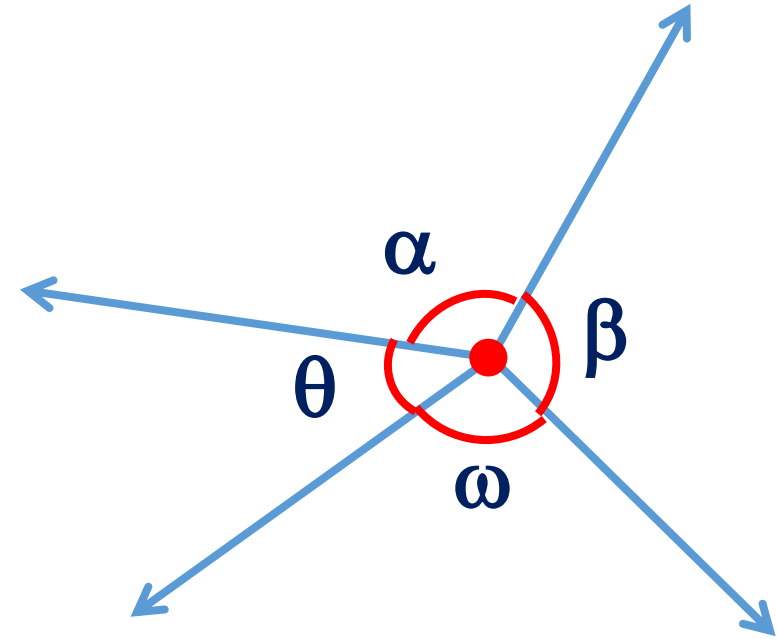




$$\alpha + \beta + \theta = 90^\circ$$



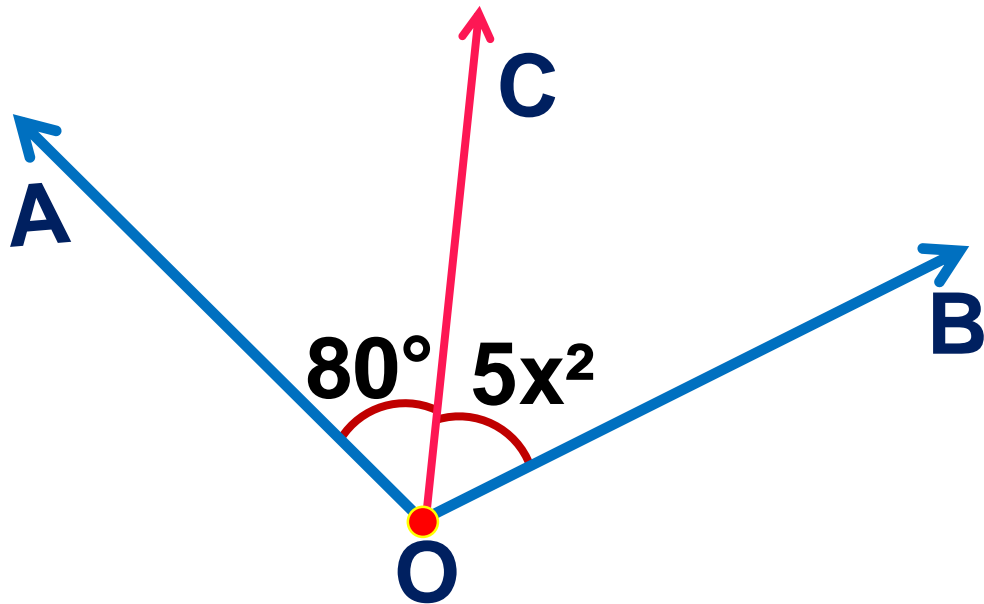
$$\alpha + \beta + \phi = 180^\circ$$



$$\alpha + \beta + \theta + \omega = 360^\circ$$



1. Se tiene el ángulo AOB, donde se traza la bisectriz  $\overrightarrow{OC}$ ,  $m\angle AOC = 80^\circ$  y  $m\angle COB = 5x^2$ . Halla el valor de x.



### Resolución

- Piden: x
- Dato:  $\overrightarrow{OC}$  es bisectriz del  $\angle AOB$

$$m\angle AOC = m\angle COB$$

$$80^\circ = 5x^2$$

$$16^\circ = x^2$$

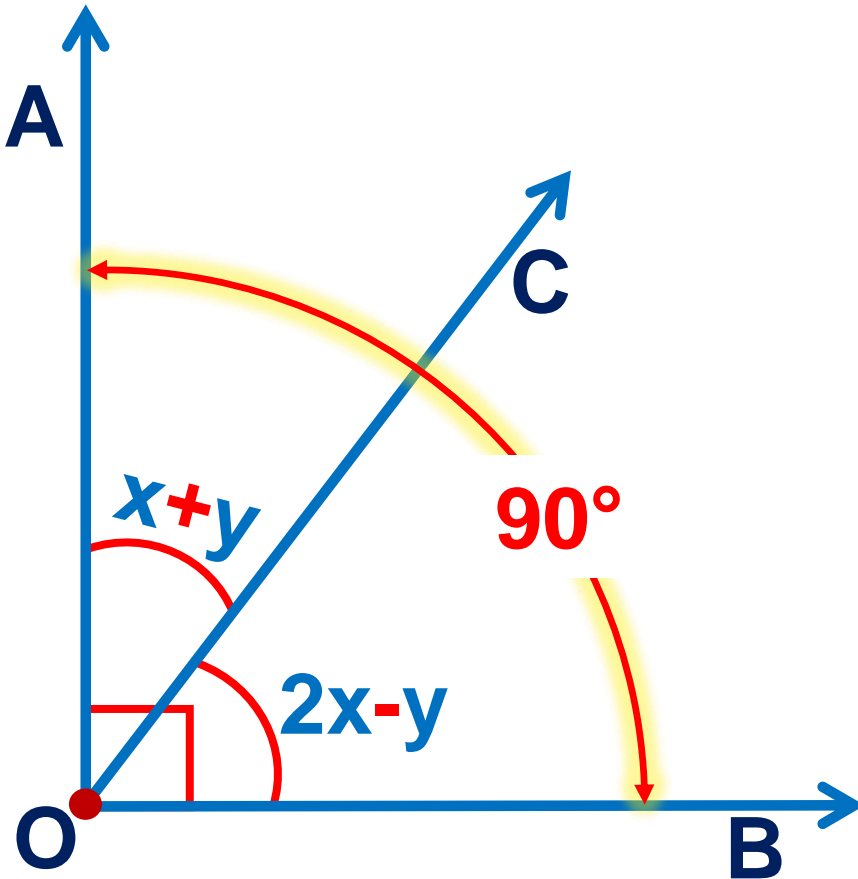
$$4^\circ = x$$

$$x = 4^\circ$$





2. Se tiene el ángulo recto AOB, en el cual se traza un rayo  $\overrightarrow{OC}$ , donde se cumple que  $m\angle AOC = x+y$ , y la  $m\angle COB = 2x-y$ . Halle el valor de  $x$ .



### Resolución

- Piden:  $x$
- Del gráfico:

$$x + y + 2x - y = 90^\circ$$

$$3x = 90^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

3. Según el gráfico, halle el mínimo valor entero de  $x$ , si el  $\angle AOB$  es obtuso.

### Resolución

• Piden:  $x_{\text{mín}}$

$$90^\circ < m\angle AOB < 180^\circ$$

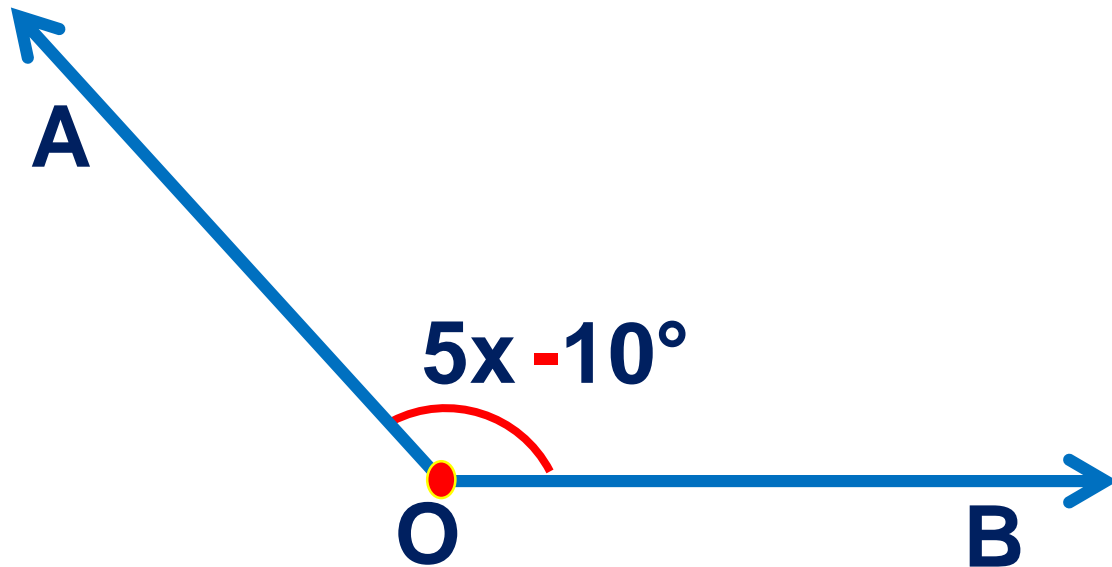
$$90^\circ < 5x - 10^\circ < 180^\circ \quad (+10^\circ)$$

$$100^\circ < 5x < 190^\circ \quad (:5)$$

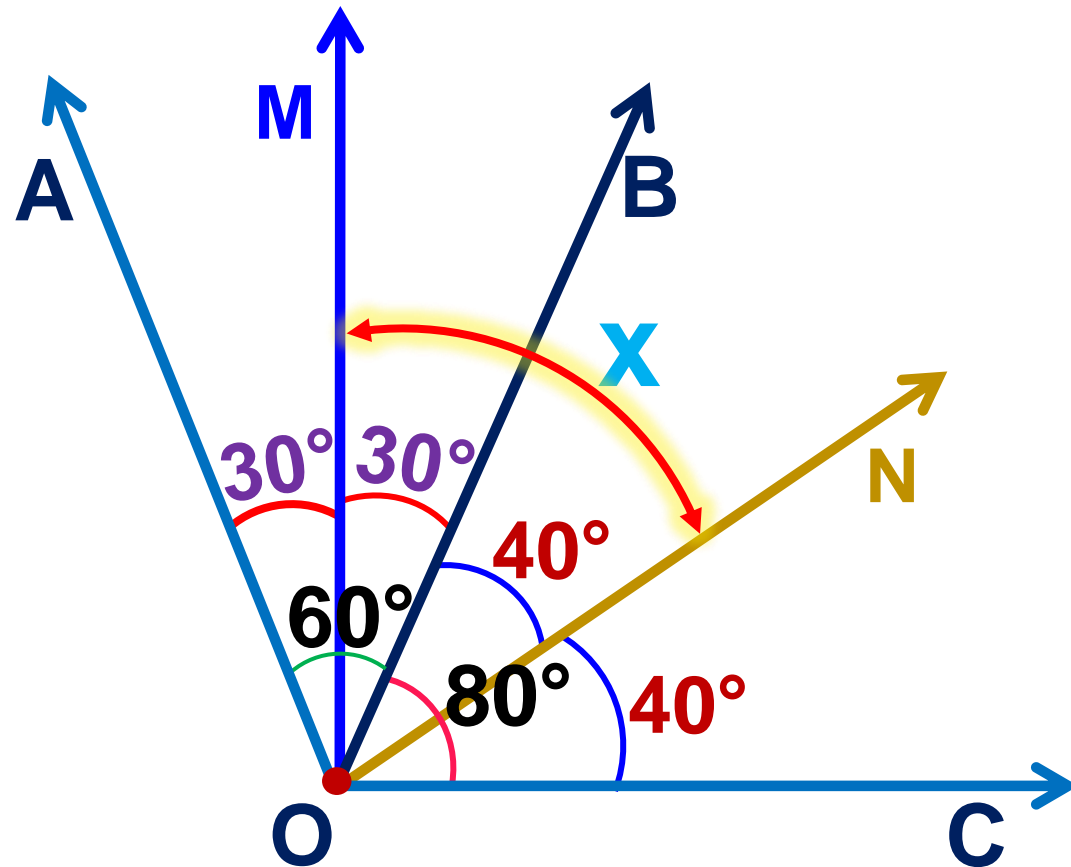
$$20^\circ < x < 38^\circ$$

$$x(\text{enteros}) = 21^\circ, 22^\circ, 23^\circ, 24^\circ, 25^\circ, 26^\circ, 27^\circ, 28^\circ, 29^\circ, 30^\circ, 31^\circ, 32^\circ, 33^\circ, 34^\circ, 35^\circ, 36^\circ, 37^\circ$$

$$x_{\text{mín}} = 21^\circ$$



4. En el gráfico, halle la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOB y BOC.



### Resolución

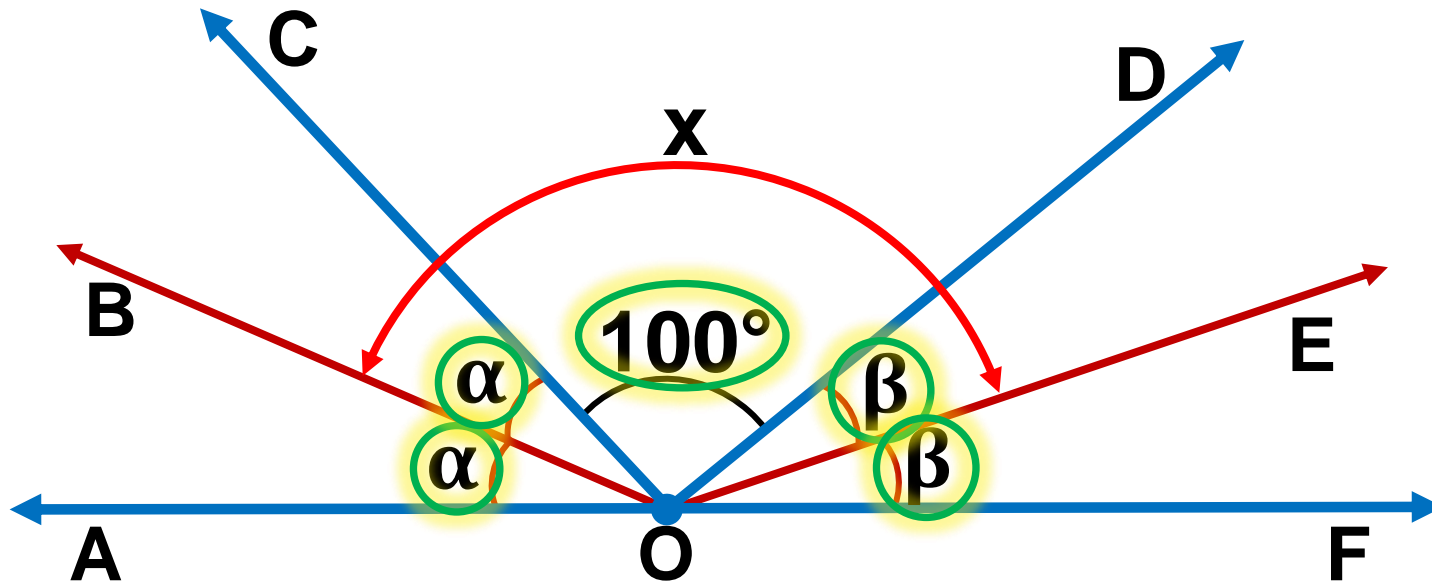
- Piden:  $m\angle MON$
- Del gráfico:

$$x = 30^\circ + 40^\circ$$

$$x = 70^\circ$$

$$m\angle MON = 70^\circ$$

## 5. En el gráfico, halle el valor de x.



### Resolución

- Piden:  $x$

$$x = \alpha + \beta + 100^\circ$$

- Del gráfico:

$$2\alpha + 2\beta + 100^\circ = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 80^\circ$$

$$\alpha + \beta = 40^\circ$$

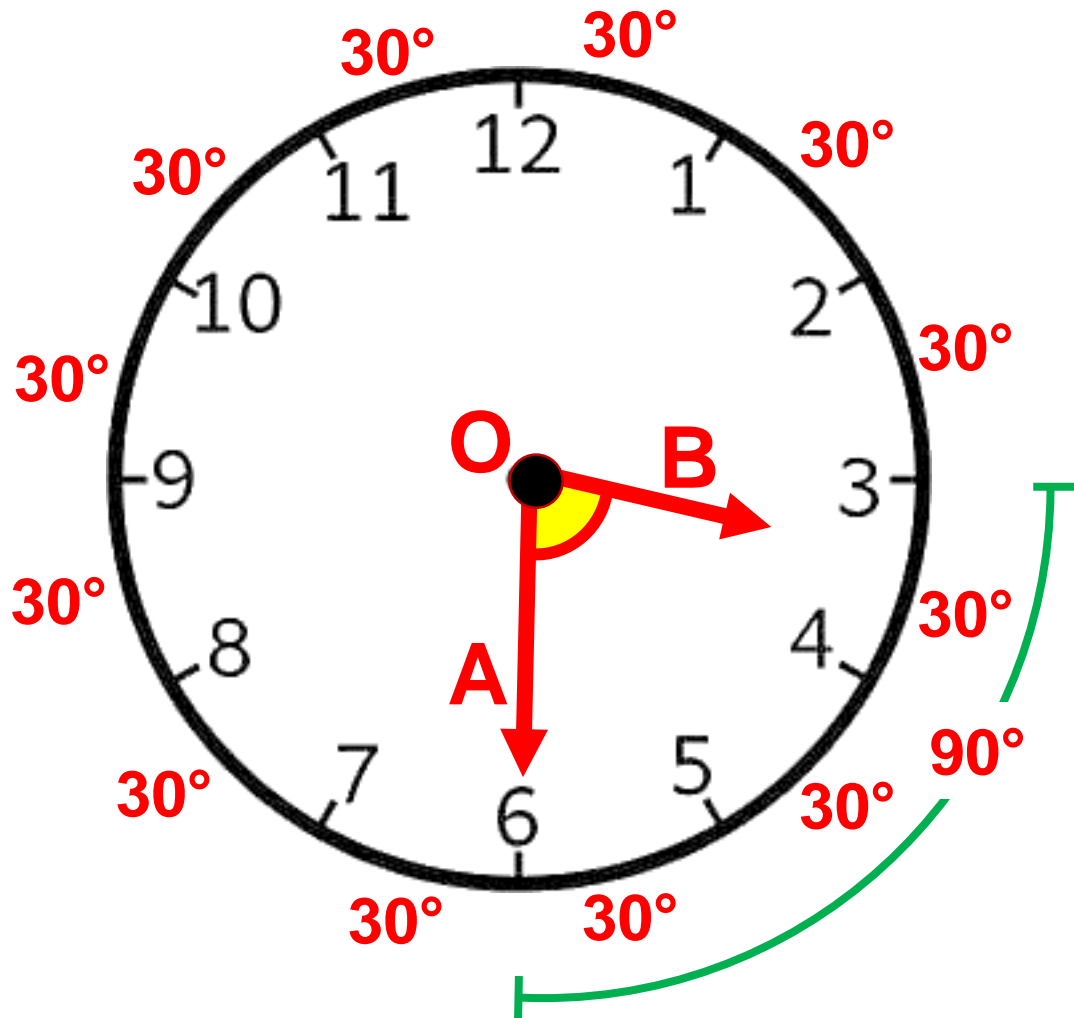
- Reemplazando:

$$x = \alpha + \beta + 100^\circ$$

$$x = 40^\circ + 100^\circ$$

$$x = 140^\circ$$

6. ¿Qué tipo de ángulo forman las manecillas de un reloj a las 3:30 p.m.?



### Resolución

• Piden: A qué clase pertenece  $\angle AOB$

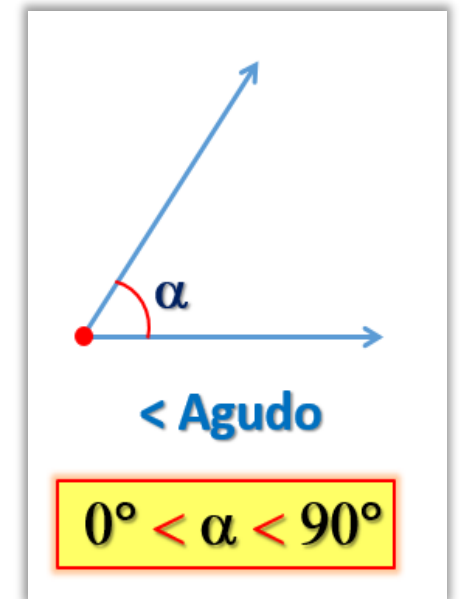
• Se sabe:

$$\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

• Luego:

$$m\angle AOB < 90^\circ$$

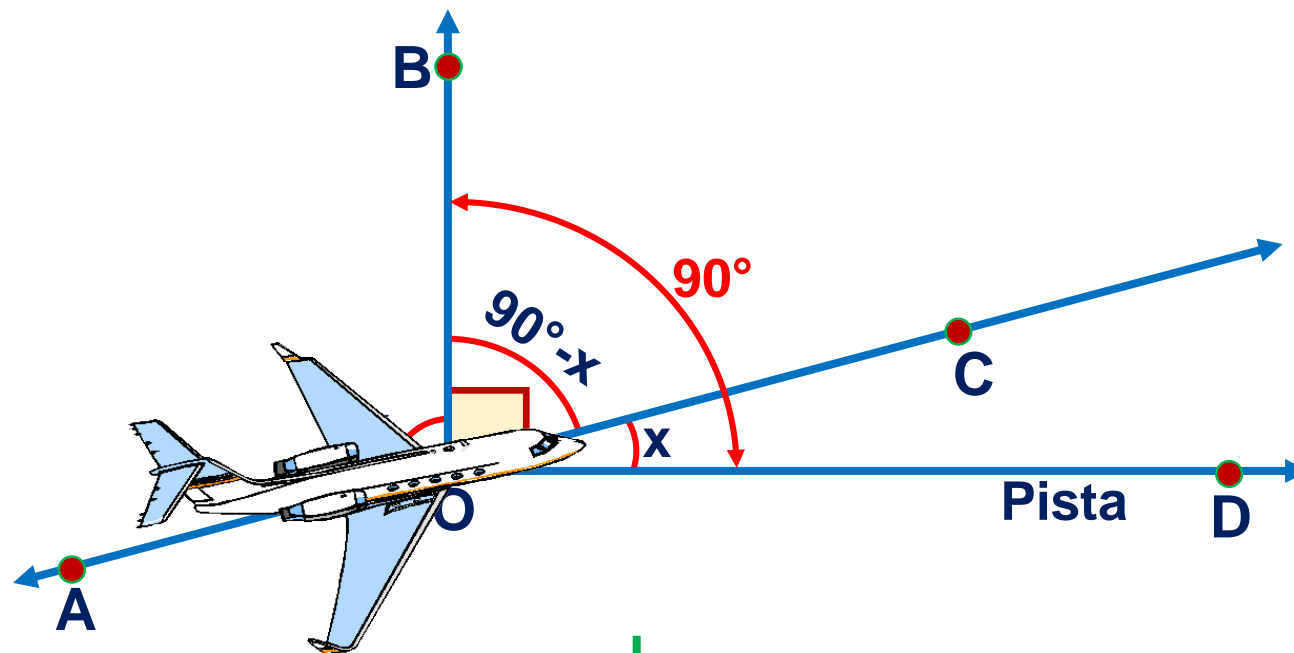
$\angle AOB$  es agudo





7. Un avión al despegar describe la siguiente trayectoria que observamos en el gráfico. Determine el ángulo de inclinación que describe el avión al despegar ( $x$ ).

## Resolución



- Piden:  $x$
- Del gráfico:

$$m\angle BOD = 90^\circ$$

• En  $\overleftrightarrow{AC}$ :

$$7x + 90^\circ - x = 180^\circ$$

$$6x = 90^\circ$$

$$x = 15^\circ$$

