



# GEOMETRÍA

## Chapter 20

**4th**  
SECONDARY

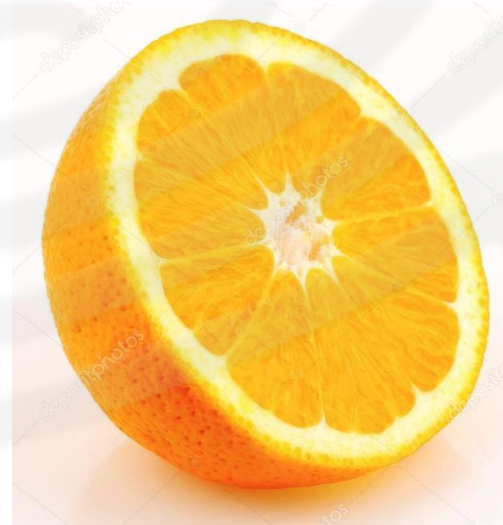
**ESFERA – TEOREMA DE  
PAPPUS - GULDIN**



 **SACO OLIVEROS**

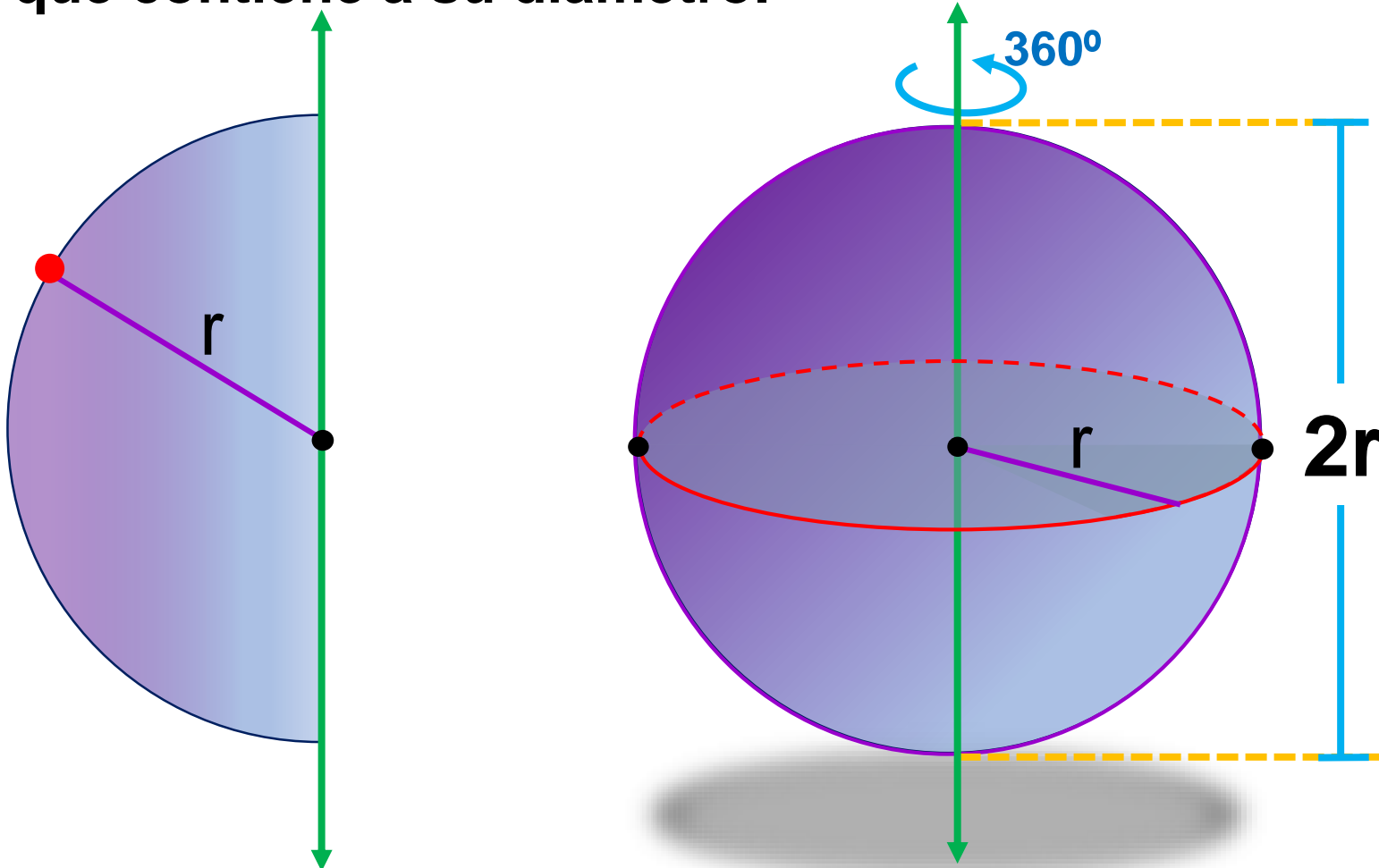


La esfera es el sólido que tiene infinitos ejes de simetría nos sirve para diseñar objetos como una billa de acero, un balón de fútbol, un globo terráqueo, se usa en rodamientos, etc. La naturaleza nos brinda frutas de forma esférica, una naranja, el limón, la lima, una cereza, etc.





Es el sólido generado por un semicírculo cuando gira  $360^\circ$  alrededor de la recta que contiene a su diámetro.



Área de la superficie esférica:

$$S_E = 4 \pi r^2$$

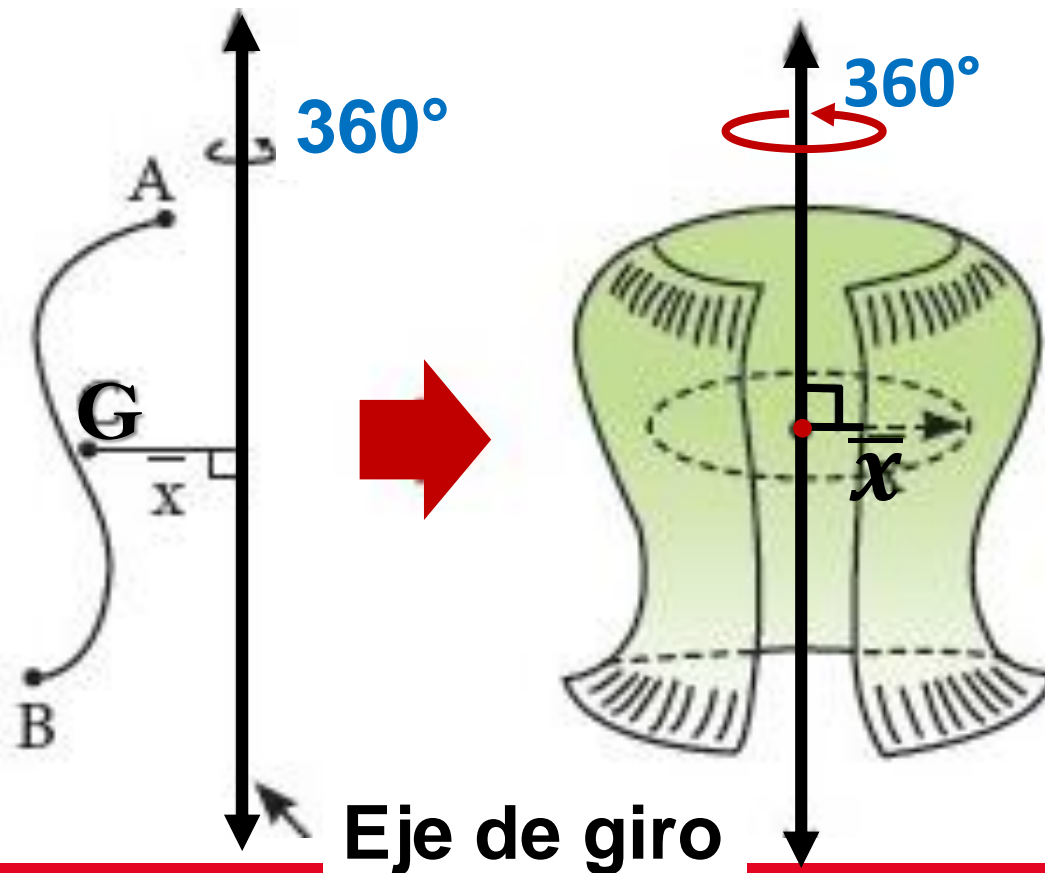
Volumen de la esfera:

$$V_E = \frac{4}{3} \pi r^3$$

# TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN

## Superficie de revolución

Es el área de la superficie generada por una línea plana al girar  $360^\circ$  en torno a una recta coplanar y no secante a dicha línea.



## Área de la superficie generada

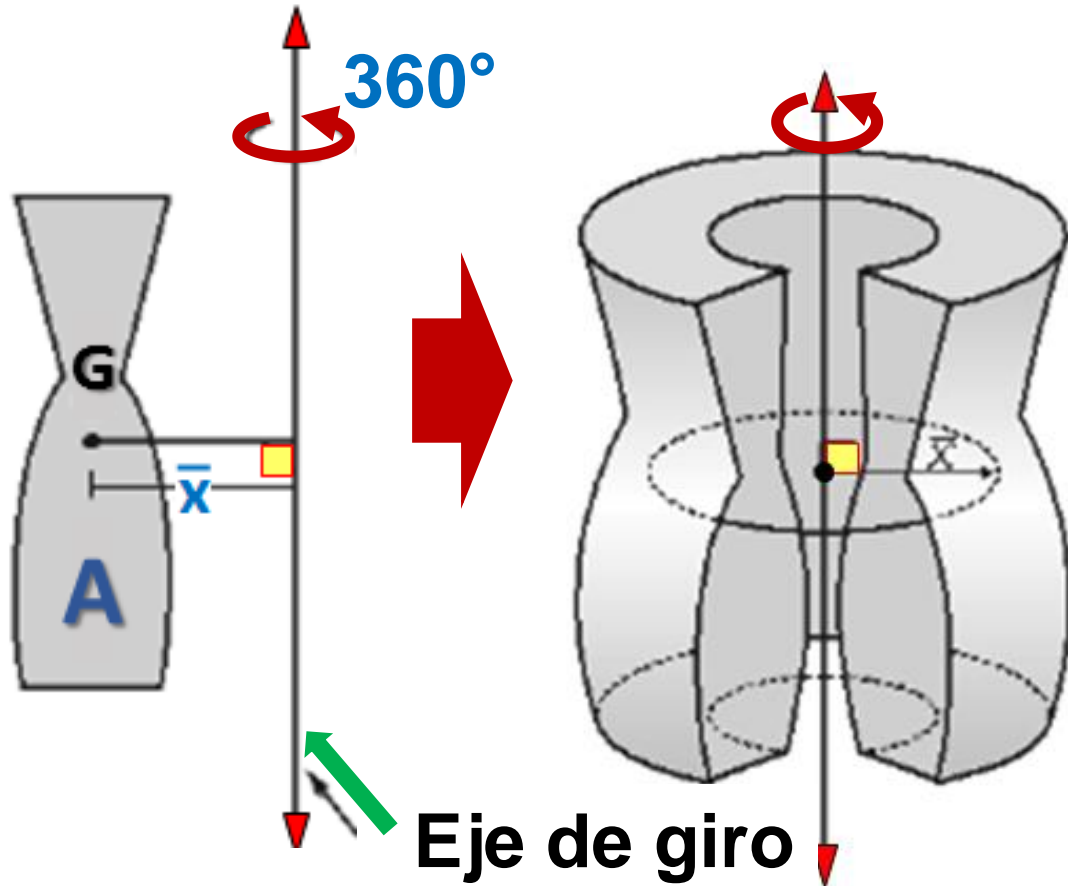
$$A_{SG} = 2 \pi \bar{x} L$$

- L** : longitud de la línea AB.
- G** : centroide de la línea AB.
- $\bar{x}$  : Longitud del radio de la circunferencia descrita por el centroide.

# TEOREMA DE PAPPUS Y GULDIN

## Sólido de revolución

Es el volumen del sólido generado por una región plana al girar  $360^\circ$  en torno a una recta coplanar y no secante a dicha región.



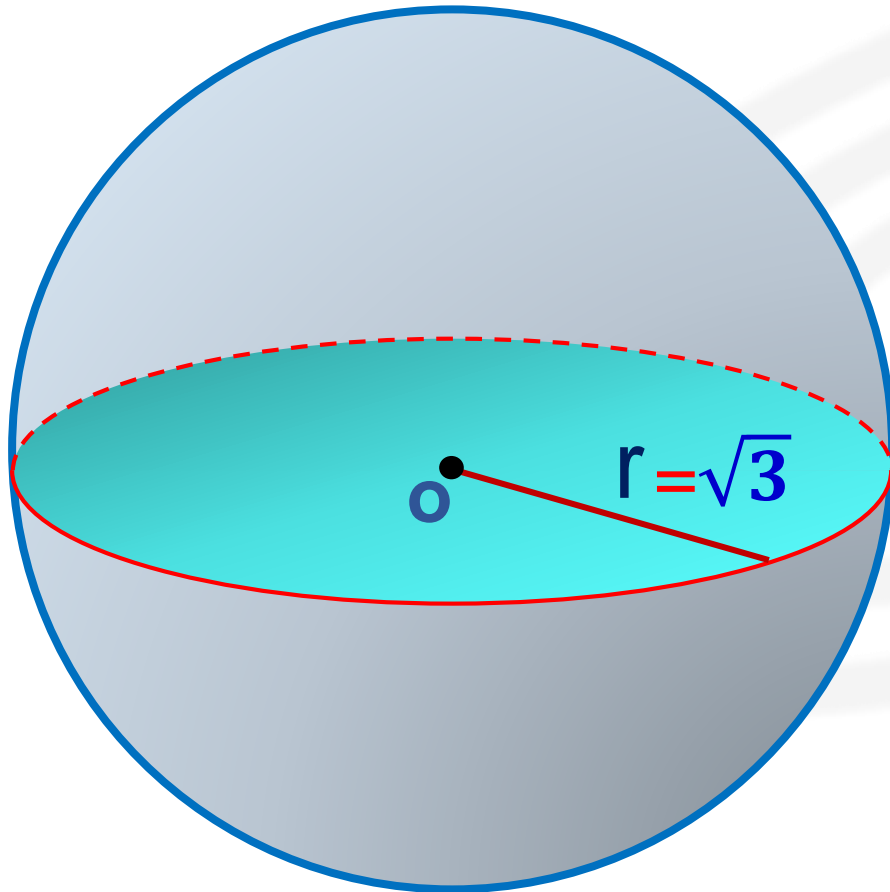
Volumen del sólido generado

$$V_{SG} = 2 \pi \bar{x} A$$

- A** : Área de la región generadora.  
**G** : Centroide de la región generadora.  
 **$\bar{x}$**  : Longitud radio de la circunferencia descrita por el centroide.

1. Calcule el volumen de una esfera, si el área de su superficie es  $12\pi u^2$ .

Resolución



• Piden:  $V$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \quad \dots (1)$$

• Por dato:

$$S_E = 12\pi$$

$$\cancel{4\pi} r^2 = \cancel{12\pi}$$

$$r = \sqrt{3} \quad \dots (2)$$

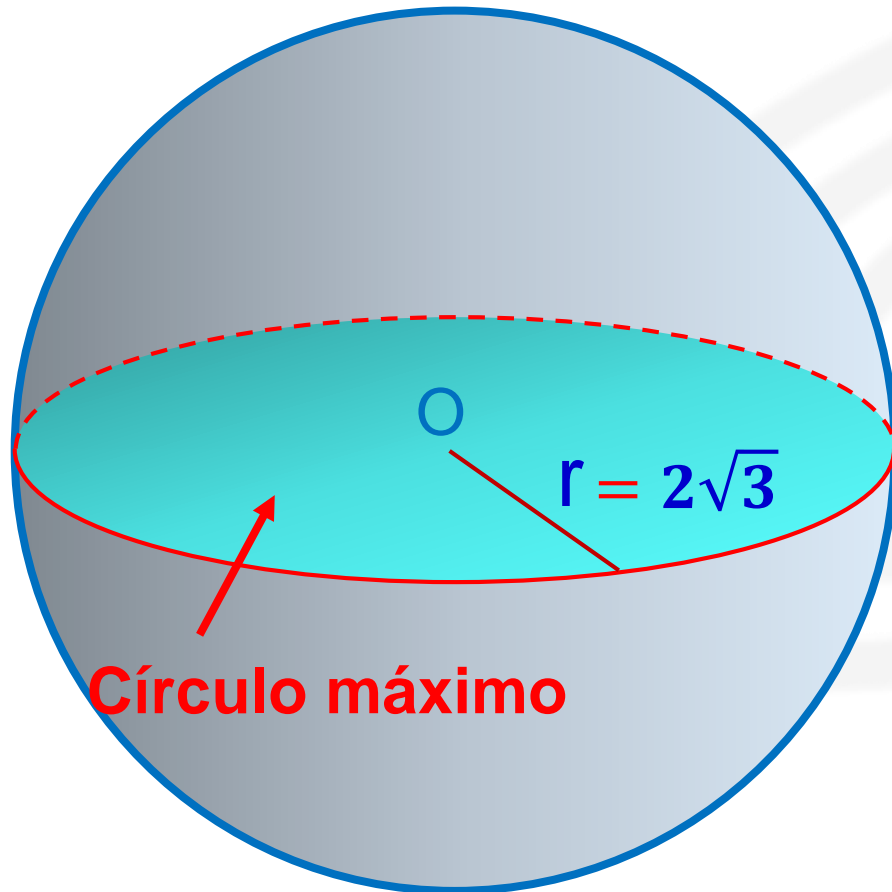
• Reemplazando 2 en 1.

$$V = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{3})^3 = \cancel{\frac{4}{3}} \pi \cdot \cancel{3} \sqrt{3}$$

$$V = 4\sqrt{3}\pi u^3$$

2. Calcule el volumen de una esfera, si el área de su círculo máximo es  $12\pi u^2$ .

Resolución



• Piden:  $V$

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \quad \dots (1)$$

• Por dato:  $S_{\text{cir}} = 12\pi$

$$\cancel{\pi} r^2 = 12\cancel{\pi}$$

$$r = 2\sqrt{3} \quad \dots (2)$$

• Reemplazando 2 en 1.

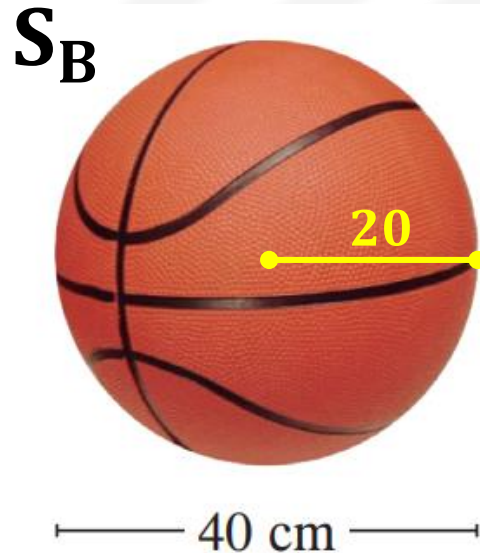
$$V = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{3})^3 = \frac{4}{\cancel{3}}\pi(8.\cancel{3}\sqrt{3})$$

$$V = 32\sqrt{3}\pi u^3$$



3. Se muestra dos pelotas una de fútbol y otra de baloncesto. Calcule la relación de sus áreas de sus respectivas superficies esférica

### Resolución



• Piden:  $\frac{S_A}{S_B}$

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{\cancel{4}\pi(15)^2}{\cancel{4}\pi(20)^2}$$

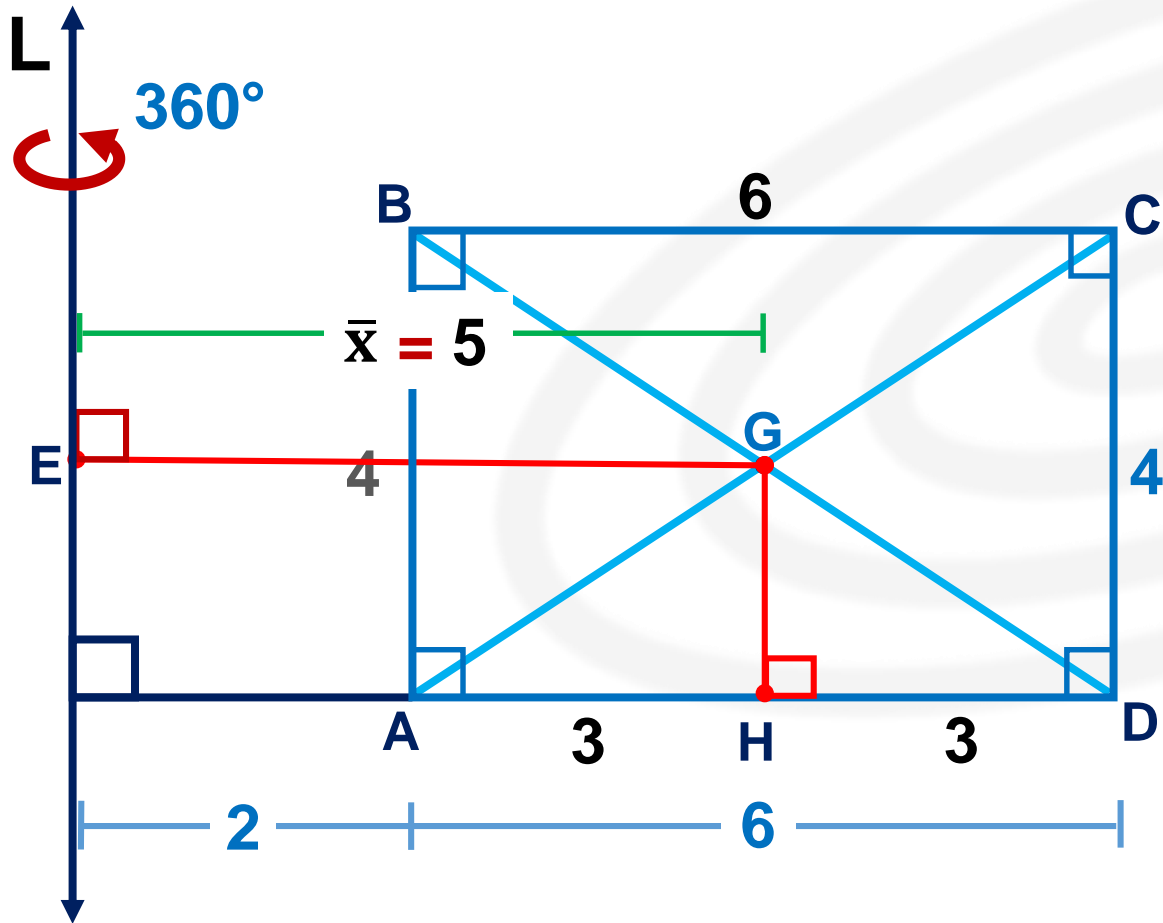
$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{\cancel{225}}{\cancel{400}}$$

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{9}{16}$$



4. Calcule el área de la superficie generada, por el rectángulo al girar  $360^\circ$  alrededor de la recta L.

### Resolución



• Piden:  $A_{SG}$

$$A_{SG} = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot L$$

• Del gráfico:

$$L = 6 + 4 + 6 + 4 = 20$$

• Se traza  $\overline{GE} \perp \vec{L}$

• Se traza  $\overline{GH} \perp \overline{AD}$   $AH = HD = 3$

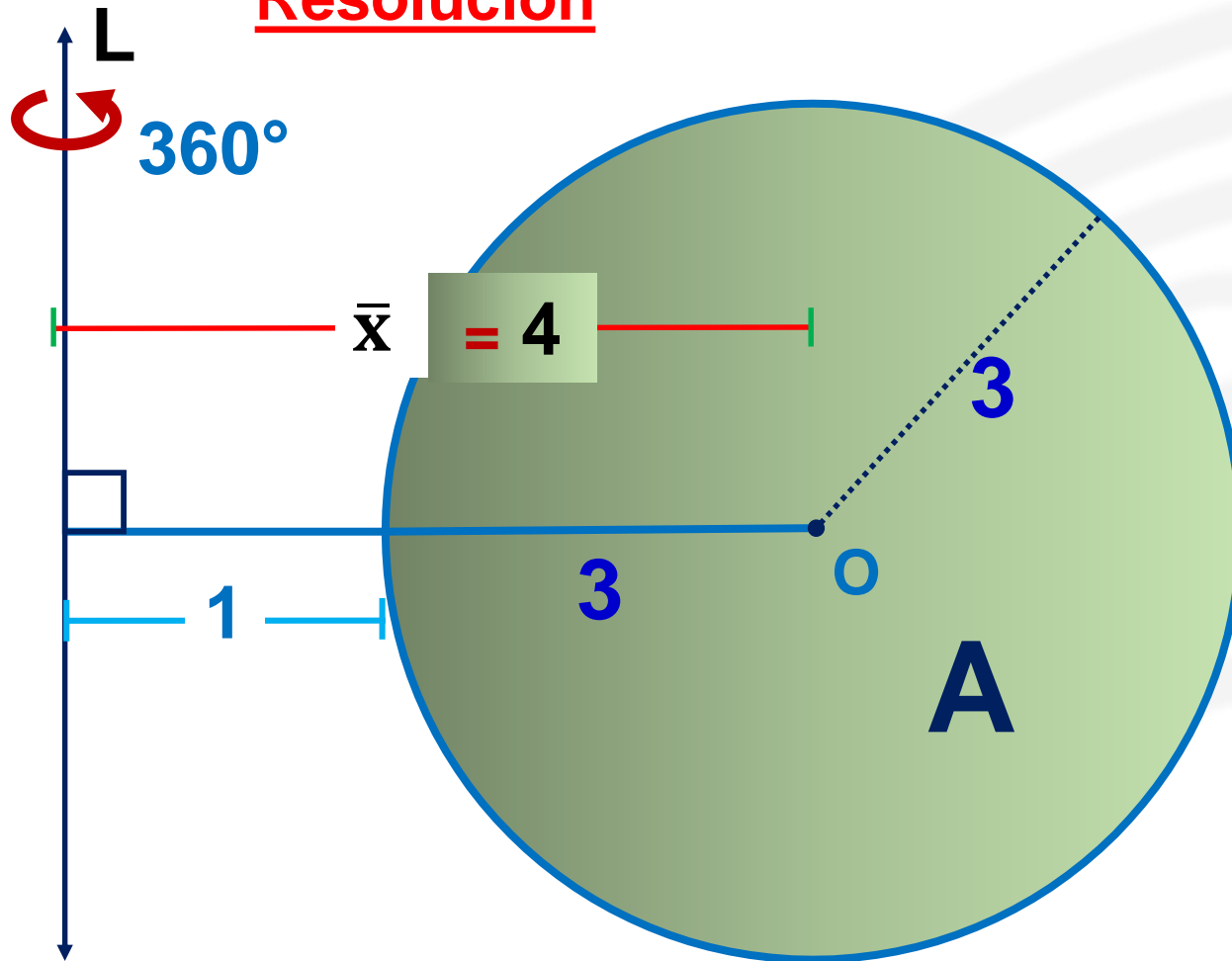
• Reemplazando al teorema.

$$A_{SG} = 2\pi \cdot 5 \cdot 20$$

$$A_{SG} = 200\pi \text{ u}^2$$

5. Calcule el volumen de sólido generado por el círculo al girar  $360^\circ$  alrededor de la recta L.

Resolución



• Piden:  $V_{SG}$

$$V_{SG} = 2 \pi \cdot \bar{x} \cdot A$$

• Reemplazando:

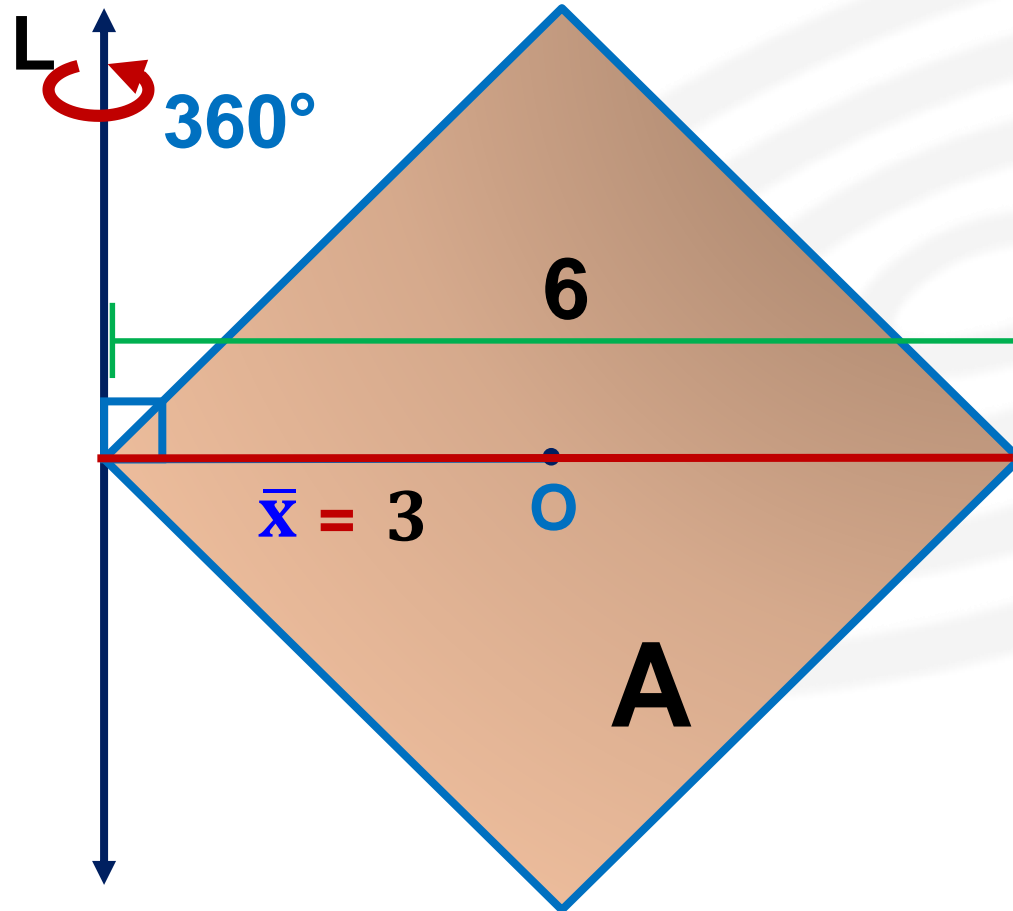
$$V_{SG} = 2 \pi (4) (\pi \cdot 3^2)$$

$$V_{SG} = 2 \pi (4) (9\pi)$$

$$V_{SG} = 72\pi^2 u^3$$

6. Calcule el volumen de sólido generado por la región cuadrada de centro O, al girar  $360^\circ$  alrededor de la recta L.

### Resolución



• Piden:  $V_{SG}$

$$V_{SG} = 2\pi \cdot \bar{x} \cdot A$$

• Reemplazando:

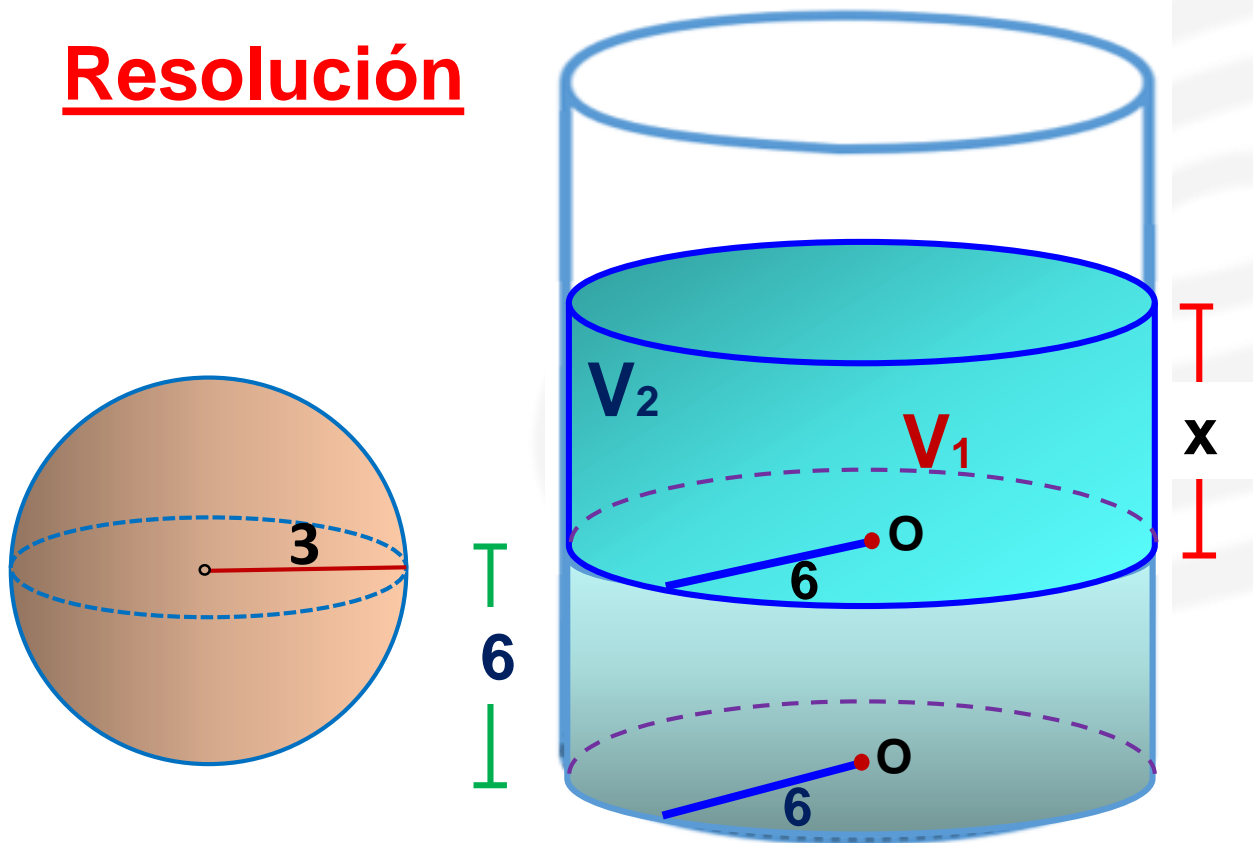
$$V_{SG} = 2\pi (3) \left(\frac{6^2}{2}\right)$$

$$V_{SG} = 2\pi \cdot (3) \cdot (18)$$

$$V_{SG} = 108\pi \text{ u}^3$$

7. Se tiene un recipiente en forma de cilindro circular recto de 6 cm de radio el cual contiene agua hasta una altura de 6 cm. Luego se echa una esfera metálica de radio 3 cm. Determine la altura que sube el agua en dicho recipiente.

### Resolución



- Piden:  $x$
- En la figura:

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{4}{3} \pi \cdot (3)^3 = \pi (6)^2 (x)$$

$$36 = 36x$$

$$x = 1 \text{ cm}$$