ALGEBRA

Chapter 13

1st
SECONDARY

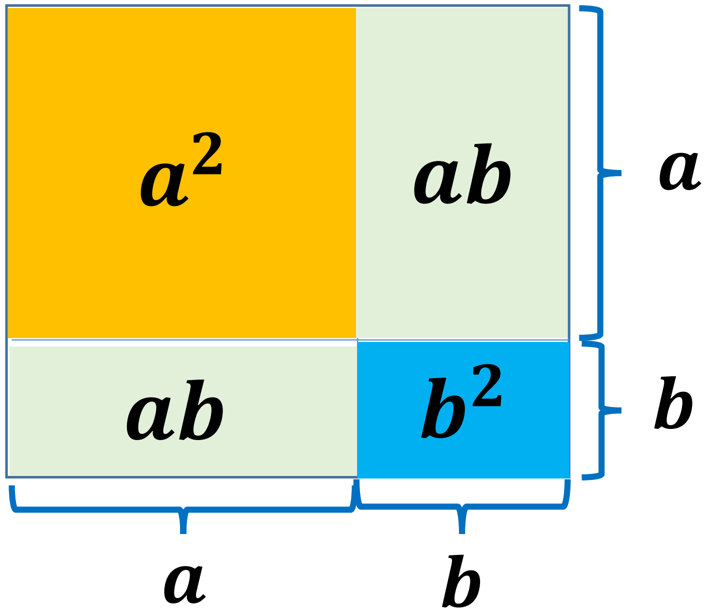
Productos notables I

SACO OLIVEROS

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Demostración Geométrica.

Consideramos un cuadrado que es dividido en cuatro partes, de tal manera que la longitud de su lado es "a+b"



El área del cuadrado es:

$$lado^2 = (a+b)^2 \text{.....(1)}$$

Si calculamos las áreas de las cuatro partes que forman el cuadrado por separado obtenemos

Sumando las areas obtenemos

Área $= a^2 + ab + ab + b^2 \text{......(2)}$

Las areas son iguales

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

PRODUCTOS NOTABLES

I.- TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejemplo

$$(2x+3y)^2$$

$$= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2$$

$$= 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

Ejemplo

$$(m-5n)^2$$

$$= (m)^2 - 2(m)(5n) + (5n)^2$$

$$= m^2 - 10mn + 25n^2$$

II.- IDENTIDADES DE LEGENDRE

$$(a+b)^2+(a-b)^2 \equiv 2\left(a^2+b^2\right)$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2 \equiv 4ab$$

Ejemplos

- $(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 = 2\left(\cancel{\sqrt{7}^2}+\cancel{\sqrt{3}^2}\right) = 20$

- $(3x+1)^2-(3x-1)^2 = 4(3x)(1) = 12\,x$

HELICO PRACTICE

CHAPTHER 13

SACO OLIVEROS

PROBLEMA 1:

Desarrolle cada uno de los productos notables:

a) $(3m^3 + 4)^2$ **b)** $(2x^2 - 7)^2$

RESOLUCIÓN:

a) $(3m^3 + 4)^2 = (3m^3)^2 + 2(3m^3)(4) + (4)^2$

$= 9m^6 + 24m^3 + 16$

b) $(2x^2 - 7)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2)(7) + (7)^2$

$= 4x^4 - 28x^2 + 49$

PROBLEMA 2:

Reduzca

$$\mathbf{M = (2x + 3)^2 - 12x - 4x^2}$$

RESOLUCIÓN:

$$M = \underbrace{(2x + 3)^2} - 12x - 4x^2$$

$$M = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2 - 12x - 4x^2$$

$$M = \cancel{4x^2} + \cancel{12x} + 9 - \cancel{12x} - \cancel{4x^2}$$

$$M = \boxed{9}$$

PROBLEMA 3:

Reduzca

$$\mathbf{P} = \frac{\overbrace{(\mathbf{a}+\mathbf{4})^2 - (\mathbf{a}-\mathbf{4})^2}}{\mathbf{8a}} - \mathbf{1}$$

RESOLUCIÓN: *Usaremos la identidad de Legendre*

$$(a+b)^2-(a-b)^2 \equiv 4ab$$

$$(a+4)^2-(a-4)^2 = 4\,(a)(4) = 16a$$

Reemplazamos

$$P = \frac{16\cancel{a}}{8\cancel{a}} - 1$$

$$P = \boxed{1}$$

PROBLEMA 4:

Reduzca

$$\mathbf{M} = \frac{\overbrace{\left(7\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 - \left(7\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}}{7\sqrt{10}} + 2$$

RESOLUCIÓN: *Usaremos la identidad de Legendre*

$$\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2 \equiv 4ab}$$

$$\left(7\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2 - \left(7\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2 = 4\left(7\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{2}\right) = 28\sqrt{10}$$

Reemplazamos $M = \dfrac{28\cancel{\sqrt{10}}}{7\cancel{\sqrt{10}}} + 2$

$$M = \boxed{6}$$

PROBLEMA 5:

Reduzca

$$\mathbf{A} = \frac{\overbrace{\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^2}}{4}$$

RESOLUCIÓN: *Usaremos la identidad de Legendre*

$$\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2 \equiv 4ab}$$

$$\left(\sqrt{11}+\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^2 = 4\left(\sqrt{11}\right)\left(\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{22}$$

Reemplazamos $A = \frac{\cancel{4}\sqrt{22}}{\cancel{4}}$

$$A = \boxed{\sqrt{22}}$$

PROBLEMA 6:

Hoy es el cumpleaños del profesor Eduardo, *si deseas saber* su edad actual, resuelve el siguiente ejercicio:

Si $x + x^{-1} = 7$ $\quad calcule \quad x^2 + x^{-2}$,

¿Cuántos años tiene el profesor Eduardo?

RESOLUCIÓN:

Usaremos el trinomio cuadrado perfecto

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Reemplazamos $\underbrace{(x + x^{-1})}^2 = (x)^2 + 2\underbrace{(x)(x^{-1})} + (x^{-1})^2$

$$(7)^2 = x^2 + 2(1) + x^{-2}$$

$$49 = x^2 + 2 + x^{-2}$$

$$x^2 + x^{-2} = \boxed{47}$$

Tiene 47 años

PROBLEMA 7

Los alumnos de Saco Oliveros, Rubén, Carmen y Rosa, al resolver el ejercicio: Si , $m - n = 5$; $mn = 7$, calcule $m^2 + n^2$ Obtienen los resultados 39; 25 y 49 , respectivamente. ¿Quién obtuvo el resultado correcto?

RESOLUCIÓN: *Usaremos el trinomio cuadrado perfecto*

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\underbrace{(m-n)^2} = m^2 - 2\underbrace{(m)(n)} + (n)^2$$

$$(5)^2 = m^2 - 2(7) + n^2$$

$$25 = m^2 - 14 + n^2$$

$$m^2 + n^2 = 39$$

Rubén es correcto

PROBLEMA 1

a) $(3m^3+4)^2 = (3m^3)^2 + 2(3m^3)(4) + 4^2$

$= 9m^6 + 24m^3 + 16$

b) $(2x^2-7)^2 = (2x^2)^2 - 2(2x^2)(7) + 7^2$

$= 4x^4 - 28x^2 + 49$

PROBLEMA 2

Desarrollamos el Producto Notable

$$(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3) + 3^2$$

$$= 4x^2 + 12x + 9$$

Reemplazamos:

$$M = \cancel{4x^2} + \cancel{12x} + 9 - \cancel{12x} - \cancel{4x^2}$$

Rpta: $M = 9$

PROBLEMA 3

Usamos la identidad de Legendre $\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2 \equiv 4ab}$

$$(a+4)^2-(a-4)^2 = 4(a)(4) = 16a$$

Remplazamos:

$$P = \frac{16\cancel{a}}{8\cancel{a}} - 1$$

Rpta: $P = 1$

PROBLEMA 4

Usamos la identidad de Legendre $\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2 \equiv 4ab}$

$$(7\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-(7\sqrt{5}-\sqrt{2})^2 = 4(7\sqrt{5})(\sqrt{2}) = 28\sqrt{10}$$

Remplazamos:

$$M = \frac{28\cancel{\sqrt{10}}}{7\cancel{\sqrt{10}}} + 2$$

Rpta: $M = 6$