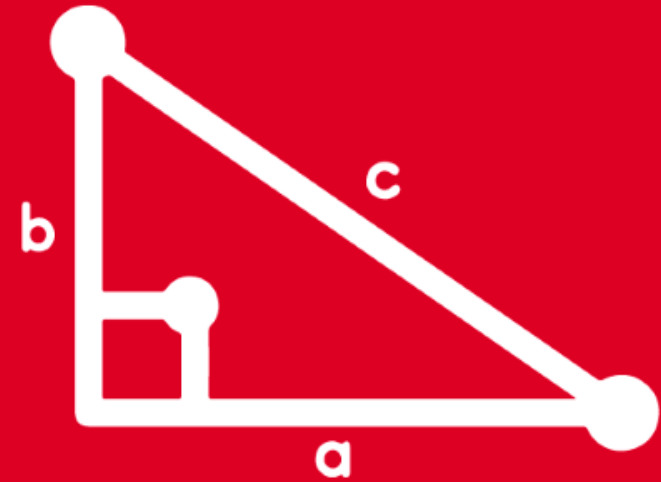




# TRIGONOMETRY

## Chapter 16

**4th**  
SECONDARY



IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS  
FUNDAMENTALES



**SACO OLIVEROS**

# ECUACIONES E IDENTIDADES

ECUACIONES Y SISTEMAS

ECUACIONES E IDENTIDADES

$$5x-2=3(x+4)$$

$$2(x-3)=2x-6$$

# IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA

**Definición** : **IDENTIDAD TRIGONOMÉTRICA** es una igualdad que contiene expresiones trigonométricas y que se verifica para todo valor admisible de la( s ) variables( s ) .

**Expresiones Trigonométricas** : Son expresiones matemáticas donde las variables están afectadas por operadores trigonométricos ( **sen**, **cos**, **tan**, **cot**, **sec**, **csc** ).

**Identidades Fundamentales** : Llamadas también identidades trigonométricas básicas, son aquellas que se obtienen luego de relacionar las líneas trigonométricas en la circunferencia trigonométrica. Se clasifican en:

# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

## A ) Identidades Recíprocas :

$$\text{sen}x \cdot \text{csc}x = 1$$

$$\text{sen}x = \frac{1}{\text{csc}x}$$

$$\text{csc}x = \frac{1}{\text{sen}x}$$

$$\text{cos}x \cdot \text{sec}x = 1$$

$$\text{cos}x = \frac{1}{\text{sec}x}$$

$$\text{sec}x = \frac{1}{\text{cos}x}$$

$$\text{tan}x \cdot \text{cot}x = 1$$

$$\text{tan}x = \frac{1}{\text{cot}x}$$

$$\text{cot}x = \frac{1}{\text{tan}x}$$

## B ) Identidades Por División :

$$\text{tan}x = \frac{\text{sen}x}{\text{cos}x}$$

$$\text{cot}x = \frac{\text{cos}x}{\text{sen}x}$$



### C ) Identidades Pitagóricas :

$$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x \end{cases}$$

$$\sec^2 x - \tan^2 x = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sec^2 x = 1 + \tan^2 x \\ \tan^2 x = \sec^2 x - 1 \end{cases}$$

$$\csc^2 x - \cot^2 x = 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} \csc^2 x = 1 + \cot^2 x \\ \cot^2 x = \csc^2 x - 1 \end{cases}$$

### Propiedades :

**Si :**  $\sec x + \tan x = a$

**Entonces :**

$$\sec x - \tan x = \frac{1}{a}$$

**Si :**  $\csc x + \cot x = b$

**Entonces :**

$$\csc x - \cot x = \frac{1}{b}$$

# PROBLEMA 1

Simplifique :  $E = \sec x \cdot \text{sen} x + \csc x \cdot \cos x - \tan x$

## Resolución

$$E = \sec x \cdot \text{sen} x + \csc x \cdot \cos x - \tan x$$

$$E = \frac{1}{\cos x} \cdot \text{sen} x + \frac{1}{\text{sen} x} \cdot \cos x - \tan x$$

$$E = \cancel{\tan x} + \cot x - \cancel{\tan x}$$

$$\therefore E = \cot x$$

Recordar :

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen} x}$$

$$\frac{\text{sen} x}{\cos x} = \tan x$$

$$\frac{\cos x}{\text{sen} x} = \cot x$$



## PROBLEMA 2

Simplifique  $E = \cot x - \frac{\csc x}{\sec x}$

### Resolución

$$E = \cot x - \frac{\csc x}{\sec x}$$

↓

$$E = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$\therefore E = 0$

Recordar :

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$





## PROBLEMA 3

Reduzca  $P = \frac{1 + \cot x}{\csc x} - \cos x$

### Resolución

$$P = \frac{1 + \cot x}{\csc x} - \cos x$$

$$P = \frac{1 + \frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{\sin x}} - \cos x$$

$$P = \frac{\sin x + \cos x}{\frac{1}{\sin x}} - \cos x$$

$$P = \sin x + \cos x - \cos x$$

$$\therefore P = \sin x$$

Recordar :

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$







## PROBLEMA 4

Si  $\sec\phi - \tan\phi = \frac{3}{5}$ , calcule

$$P = 3(\sec\phi + \tan\phi) + 2$$

### Resolución

*Recordar :*

Si :  $\sec x - \tan x = a$

Entonces :

$$\sec x + \tan x = \frac{1}{a}$$



**Dato :**  $\sec\phi - \tan\phi = \frac{3}{5}$

**Propiedad :**  $\sec\phi + \tan\phi = \frac{5}{3}$

**Luego :**  $P = 3(\sec\phi + \tan\phi) + 2$

$$P = \cancel{3} \left( \frac{5}{\cancel{3}} \right) + 2$$

$$\therefore P = 7$$



## PROBLEMA 5

Si  $\csc \alpha + \cot \alpha = 3$ ,  
calcule  $E = 10 \operatorname{sen} \alpha$

### Resolución

*Recordar :*

Si :  $\csc \alpha + \cot \alpha = a$

Entonces :

$$\csc \alpha - \cot \alpha = \frac{1}{a}$$



Dato :

$$\csc \alpha + \cot \alpha = 3$$

Propiedad :

$$\csc \alpha - \cot \alpha = \frac{1}{3}$$

$$2 \csc \alpha = \frac{10}{3}$$

$$\csc \alpha = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{5}$$



Luego:  $E = 10 \left( \frac{3}{5} \right)$

$$\therefore E = 8$$

## PROBLEMA 6

Al copiar de la pizarra la expresión  $\sec x - \tan x - 1$ , un estudiante cometió un error y escribió  $\csc x - \cot x - 1$ .

Calcule la razón geométrica entre lo que estaba escrito en la pizarra y lo que copió el alumno.

*Recordar :*

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

## Resolución

$$E = \frac{\sec x - \tan x - 1}{\csc x - \cot x - 1}$$

$$E = \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\sin x}}$$

$$E = \frac{\frac{(\cancel{1} - \cancel{\sin x} - \cos x)}{\cos x}}{\frac{(\cancel{1} - \cancel{\cos x} - \sin x)}{\sin x}}$$

$$E = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore E = \tan x$$

## PROBLEMA 7

Una plancha metálica tiene la forma de un rectángulo cuyos lados miden  $4(1 - \sen\theta)$  m y  $2(1 + \sen\theta)$  m. Si el área de la plancha mide  $2 \text{ m}^2$  y el costo de la plancha ( en soles ) está dado por  $200 ( 3\csc^2\theta + 2\sec^2\theta )$ ; ¿cuánto cuesta la plancha ?

**Recordar :**

$$1 - \sen^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\sen^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sen\theta}$$

## Resolución

Según datos (área de la plancha):

$$4(1 - \sen\theta) \cdot 2(1 + \sen\theta) = 2$$

$$4(1 - \sen^2\theta) = 1 \Rightarrow 4\cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{4} \Rightarrow \sec^2\theta = 4$$

$$\sen^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \csc^2\theta = \frac{4}{3}$$

$$\text{Costo} = 200 ( 3 \csc^2\theta + 2 \sec^2\theta )$$

$$\text{Costo} = 200 ( \cancel{3} \left( \frac{4}{\cancel{3}} \right) + 2 ( 4 ) )$$

$$\therefore \text{Costo} = 2400 \text{ soles}$$