

TRIGONOMETRY

Chapter 20

4th
SECONDARY

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO TRIPLE



FLAVIO VEGA VILLANUEVA

Nació en Carhuaz, Áncash, Perú, el 10 de abril de 1915 y falleció en Lima el 10 de enero del 2011.

Fue matemático y profesor que se desempeñó durante varias décadas como catedrático de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, donde alcanzó a ser su decimosexto Decano . Allí modernizó la enseñanza de las ciencias básicas : matemática, física y biología.

Fue miembro fundador y primer secretario de la Sociedad Matemática Peruana (SMP); también fue miembro de la Asociación Peruana de Computación e Informática y del Colegio de Matemáticos del Perú.



IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DEL ÁNGULO TRIPLE

Identidades básicas

$$\operatorname{sen} 3x = 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\tan 3x = \frac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$$

Identidades auxiliares

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x (2 \cos 2x + 1)$$

$$\cos 3x = \cos x (2 \cos 2x - 1)$$

HELICO PRACTICE 1

Si $3 \operatorname{sen} \alpha = 1$, calcule $27 \operatorname{sen} 3\alpha$.

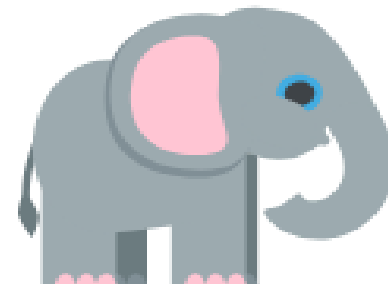
RESOLUCIÓN

Dato : $3 \operatorname{sen} \alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$

Recordar : $\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \operatorname{sen} \alpha - 4 \operatorname{sen}^3 \alpha$

Luego : $\operatorname{sen} 3\alpha = 3 \left(\frac{1}{3} \right) - 4 \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{27}{27} - \frac{4}{27} = \frac{23}{27}$

$\therefore 27 \operatorname{sen} 3\alpha = 23$



HELICO PRACTICE 2

Si $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, calcule $\cos 3\alpha$.

RESOLUCIÓN

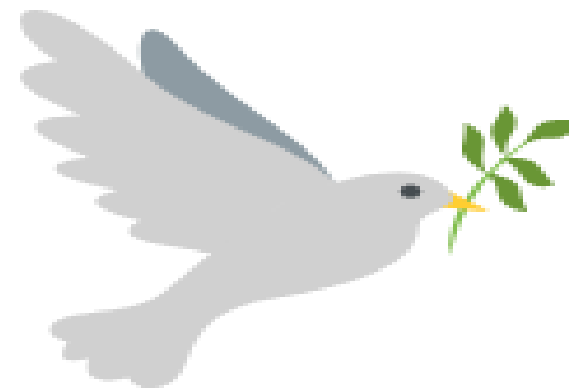
Dato : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Recordar :

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\text{Luego : } \cos 3\alpha = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right)^3 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{3} \right) = \frac{4(2\sqrt{2})}{27} - \frac{27\sqrt{2}}{27}$$

$$\therefore \cos 3\alpha = -\frac{19\sqrt{2}}{27}$$



HELICO PRACTICE 3

Si $\tan\theta = \frac{1}{2}$, calcule $\tan 3\theta$

RESOLUCIÓN

Dato : $\tan\theta = \frac{1}{2}$

Recordar :

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3 \tan^2\theta}$$

Luego : $\tan 3\theta = \frac{3\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)^3}{1 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{8}}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{11}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{11(4)}{8}$



$$\therefore \tan 3\theta = \frac{11}{2}$$

HELICO PRACTICE 4

Si $m = 4 \cos^3 15^\circ - 3 \cos 15^\circ$,
 $n = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ$,
 calcule $m^2 + n^2$.

Recordar :

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$



RESOLUCIÓN

$$m = 4 \cos^3 15^\circ - 3 \cos 15^\circ$$

$$\text{Luego : } m = \cos 3(15^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$n = 3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ$$

$$\text{Luego : } n = \sin 3(10^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$m^2 + n^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore m^2 + n^2 = \frac{3}{4}$$

HELICO PRACTICE 5

Simplifique $M = 8 \cos^3 \left(\frac{2\pi}{9} \right) - 6 \cos \left(\frac{2\pi}{9} \right) + 1$

Recordar :

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$



RESOLUCIÓN

$$M = 2 \left[\underbrace{4 \cos^3 \left(\frac{2\pi}{9} \right) - 3 \cos \left(\frac{2\pi}{9} \right)} \right] + 1$$

$$M = 2 \left[\cos \left(3 \cdot \frac{2\pi}{9} \right) \right] + 1$$

$$M = 2 \cos 120^\circ + 1$$

$$M = 2 \cos \left(\underbrace{180^\circ - 60^\circ} \right) + 1$$

II C

$$M = 2 (-\cos 60^\circ) + 1$$

$$M = 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 1$$

$$M = -1 + 1$$

$$\therefore M = 0$$

HELICO PRACTICE 6

De un total de 100 invitados a una fiesta, el A% representa la cantidad de varones y el B% la cantidad de mujeres.- Si en la fiesta hay 12 niños, indique el número de personas que no asistieron.

$$A = 30\sqrt{2}(4 \cos^3 15^\circ - 3 \cos 15^\circ), B = 80(3 \sin 10^\circ - 4 \sin^3 10^\circ)$$

RESOLUCIÓN

Recordar :

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

Luego : $A = 30\sqrt{2} \cdot \cos 3(15^\circ) = 30\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 30\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 30 \text{ varones}$

$$B = 80 \cdot \sin 3(10^\circ) = 80 \cdot \sin 30^\circ = 80 \cdot \frac{1}{2} = 40 \text{ mujeres}$$

No asistieron = (100 - 30 - 40 - 12) personas

\therefore No asistieron 18 personas .



HELICO PRACTICE 7

El 5 de octubre del 2022 , en Perú se jugó el partido final para la clasificación al mundial de Qatar 2022.- Se fijó el precio de la entrada popular en y soles, mediante la siguiente ecuación: $y = -55 \tan x$, además se sabe que

$$\frac{\sin 3x + \sin^3 x}{\cos 3x - \cos^3 x} = \frac{1}{2} \text{ .- ¿Cuánto fue el valor de una entrada popular ?}$$

RESOLUCIÓN

Aplicamos identidades del ángulo triple en el dato :



$$\frac{1}{2} = \frac{\sin 3x + \sin^3 x}{\cos 3x - \cos^3 x} = \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x + \sin^3 x}{4 \cos^3 x - 3 \cos x - \cos^3 x} = \frac{3 \sin x - 3 \sin^3 x}{3 \cos^3 x - 3 \cos x}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3 \sin x (1 - \sin^2 x)}{3 \cos x (\cos^2 x - 1)} = \frac{\sin x (\cos^2 x)}{\cos x (-\sin^2 x)} = -\frac{\cos x}{\sin x} \Rightarrow -2 = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Luego : $y = -55 (-2)$

∴ La entrada popular costó S/. 110



SACO
OLIVEROS