

ALGEBRA

Chapter 1



FACTORIZACIÓN



MOTIVATING STRATEGY

Diofanto nació en Alejandría (ubicada en Egipto) alrededor de 200/214 y falleció alrededor de 284/298.

De su vida personal se sabe muy poco sólo que se casó a los 26 años y tuvo un hijo que falleció a la edad de 42 años, luego 4 años después Diofanto fallece a los 84 años.

Fue un matemático griego. Por su originalidad y sus aportaciones, Diofanto fue llamado por muchos historiadores el padre del álgebra moderna.

Generalmente se le atribuye la introducción del cálculo algebraico en las matemáticas, el cuál permite utilizar como una gran herramienta la Factorización. Por su superior habilidad en el cálculo, logró dar una colección de problemas resueltos sin recurrir a la presentación geométrica empleada por Euclides.



FACTORIZACIÓN

CONCEPTO: Es el proceso de transformar un polinomio como la multiplicación indicada de otros polinomios llamados factores.

$$x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$$

factorización

NOTAS:

- Se considera que el polinomio a factorizar y sus factores tienen coeficientes enteros.
- Los factores que ya no se pueden factorizar se llaman factores primos.

A) CRITERIOS PARA FACTORIZAR

FACTOR COMÚN: Factor que se repite.

Ejemplo: Factorice $P(x) = x^3 + x^2$

F.C: x^2

$$P(x) = x^2 (x + 1)$$

AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS:

Se agrupa de acuerdo a un factor común.

Ejemplo:

Factorice $ax + by + ay + bx$

$$= a(\underline{x + y}) + b(\underline{x + y})$$

Luego $(x + y)(a + b)$

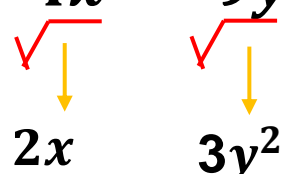
B) CRITERIOS POR IDENTIDADES

DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$a^{2m} - b^{2n} = (a^m + b^n)(a^m - b^n)$$

Ejemplo: Factorice

$$P(x, y) = 4x^2 - 9y^4 = (2x - 3y^2)(2x + 3y^2)$$

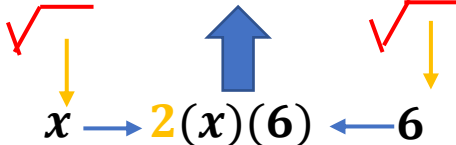


TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (T.C.P)

$$a^{2m} + 2a^m b^n + b^{2n} = (a^m + b^n)^2$$

Ejemplo: Factorice $P(x) = x^2 - 12x + 36$

$$P(x) = (x - 6)^2$$



SUMA DE CUBOS


$$a^{3m} + b^{3n} = (a^m + b^n)(a^{2m} - a^m b^n + b^{2n})$$

DIFERENCIA DE CUBOS

$$a^{3m} - b^{3n} = (a^m - b^n)(a^{2m} + a^m b^n + b^{2n})$$

Ejemplo: Factorice

$$R(x, y) = 27x^3 - 125y^3$$



$$= (3x - 5y)(9x^2 + 15xy + 25y^2)$$

C) ALGUNOS CRITERIOS DE ASPAS

ASPA SIMPLE: Generalmente se utiliza en polinomios de la forma:

$$P(x; y) = ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}$$

Ejemplo: Factorice e indique un factor

primo $P(x) = x^2 + 3x - 40$

Resolución

$$\begin{array}{ccc} x^2 & + & 3x & - & 40 \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x & & & & +8 \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ x & & & & -5 \end{array}$$

Luego $P(x) = (x + 8)(x - 5)$

Un factor primo: $(x + 8)$ ó $(x - 5)$

ASPA DOBLE ESPECIAL: Generalmente se utiliza en polinomios de la forma:

$$P(x) = ax^{4n} + bx^{3n} + cx^{2n} + dx^n + e$$

Ejemplo: Factorice e indique un factor primo

$$x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 7x + 2$$

Resolución

$$\begin{array}{ccccccc} x^4 & + & 6x^3 & + & 8x^2 & + & 7x & + & 2 \\ & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\ x^2 & & & & 5x & & & & +2 \\ & \nwarrow & & \nearrow & & \nwarrow & & \nearrow & \\ x^2 & & & & x & & & & +1 \end{array}$$

$+2x^2 +$
 $+x^2$
 $+3x^2$

$+5x^2$

$$FALTA = +8x^2 - (+3x^2) = +5x^2$$

$$P(x) = (x^2 + 5x + 2)(x^2 + x + 1)$$

Un factor primo: $(x^2 + 5x + 2)$ ó $(x^2 + x + 1)$



Al factorizar

$$P(x, y) = x^2 - 6x - y^2 + 9$$

Señale la suma de los factores primos.

RECORDEMOS

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (T.C.P)

$$a^{2m} + 2a^m b^n + b^{2n} = (a^m + b^n)^2$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$a^{2m} - b^{2n} = (a^m + b^n)(a^m - b^n)$$

Resolución:

$$P(x, y) = x^2 - 6x - y^2 + 9$$

Reordenando

$$P(x, y) = \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} - y^2$$

$$\Rightarrow P(x, y) = (x - 3)^2 - y^2$$

$\begin{array}{cc} \sqrt{} & \sqrt{} \\ \downarrow & \downarrow \\ x-3 & y \end{array}$

Luego

$$P(x; y) = (x - 3 + y)(x - 3 - y)$$

Sumando los F.P.

$$x - 3 + y + x - 3 - y = 2x - 6$$

Rpta.: $2(x - 3)$



Indique la suma de los términos independientes de los factores primos en $\mathbb{Z}_{[x]}$

$$P(x) = 2x^4 - 27x^2 - 80$$

RECORDEMOS

Aspa simple

DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$a^{2m} - b^{2n} = (a^m + b^n)(a^m - b^n)$$

Resolución:

$$2x^4 - 27x^2 - 80$$

$$\rightarrow P(x) = (2x^2 + 5)(x^2 - 16)$$

$$= (2x^2 + 5)(\sqrt{x^2 + 4})(\sqrt{x^2 - 4})$$

Términos independientes: +5, +4, -4

$$\text{Suma} = +5 + 4 - 4 = 5$$

Rpta.:

5



Indique la suma de los términos independientes de los factores primos en $\mathbb{Z}[x]$

$$7x^4 - 37x^3 + 36x^2 - 31x + 15$$

Resolución:

$$\begin{array}{rcl}
 7x^4 - 37x^3 + 36x^2 - 31x + 15 & \rightarrow & +21x^2 + \\
 7x^2 & \rightarrow & +5x^2 \\
 x^2 & \rightarrow & +26x^2 \\
 & & +10x^2
 \end{array}$$

Diagram showing the decomposition of the polynomial into two quadratic factors: $(7x^2 - 2x + 5)(x^2 - 5x + 3)$. The terms are connected by arrows: $7x^4$ to $7x^2$ and x^2 ; $-37x^3$ to $-2x$ and $-5x$; $36x^2$ to $+5$ and $+3$; $-31x$ to $-2x$ and $-5x$; and $+15$ to $+5$ and $+3$.

$$\text{Falta: } +36x^2 - (+26x^2) = +10x^2$$

$$P(x) = (7x^2 - 2x + 5)(x^2 - 5x + 3)$$

Suma de T.I. de los Factores primos: $5 + 3 = 8$

RECORDEMOS

Aspa doble especial

Rpta.: 8



En un hospital de la región de Tacna, debido a la pandemia se requiere comprar mascarillas. El pedido es de $40N^5$ mascarillas.

Si N indica el número de factores primos del polinomio:

$$P(x) = 4x^4 - 29x^2 + 45$$

Indique el número de mascarillas a comprar.

Resolución:

$$P(x) = 4x^4 - 29x^2 + 45$$

$$\Rightarrow P(x) = (4x^2 - 9)(x^2 - 5)$$

$$= (2x + 3)(2x - 3)(x^2 - 5)$$

Nº factores primos: 3

$$40(3^5) = 40(243) = 9720$$

RECORDEMOS

Aspa simple

Rpta.:

9720
mascarillas



En una ciudad se sugiere que para hacer frente al coronavirus, el número de dosis que se deben aplicar a las personas está dado por la menor suma de los coeficientes de los factores primos en:

$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2$
¿Cuál es el número de dosis?

RECORDEMOS
Aspa Doble Especial
Resolución:

$$\begin{array}{rcl}
 x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 2 & & \\
 x^2 & \swarrow \quad \searrow & \\
 x^2 & \swarrow \quad \searrow & \\
 & +x^2 & \\
 & & +2 \rightarrow +2x^2 + \\
 & & +1 \rightarrow \frac{+x^2}{+3x^2}
 \end{array}$$

Falta: $+4x^2 - (+3x^2) = +x^2$

$$P(x) = (x^2 + x + 2)(x^2 + x + 1)$$

Un factor primo: $(x^2 + x + 2)$ ó $(x^2 + x + 1)$

Rpta.: 2 dosis

Problema 06



Señale la suma de los factores primos en:

$$P(x, y) = x^2 - 10x - y^2 + 25$$

Problema 07



Indique la suma de los términos independientes de los factores primos en $\mathbb{Z}_{[x]}$

$$P(x) = 3x^4 - 73x^2 - 50$$

Problema 08



Indique la suma de los términos independientes de los factores primos en $\mathbb{Z}_{[x]}$

$$5x^4 - 27x^3 + 47x^2 - 24x + 14$$

Problema 09



A Carlos se le indica que su primera dosis contra la COVID-19 esta programada para el día $4N$ del mes de julio de 7 a 8am. Si se sabe que N indica el numero de factores primos del polinomio

$$P(x) = 9x^4 - 49x^2 + 20$$

Indicar el día programado en el mes de julio.

Problema 10



La edad de Andrés hace 5 años esta dado por la mayor suma de los coeficientes de los factores primos en:

$$x^4 + 5x^3 + 13x^2 + 17x + 12$$

¿Cuál será la edad de Andrés dentro de 7 años?