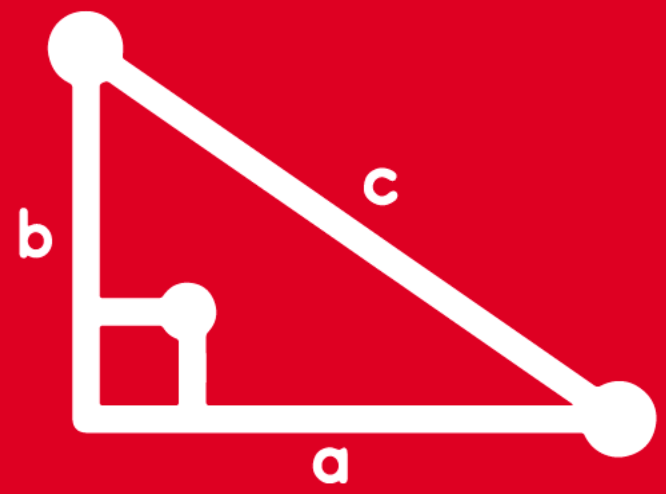
TRIGONOMETRY

Chapter 2



5th
SECONDARY

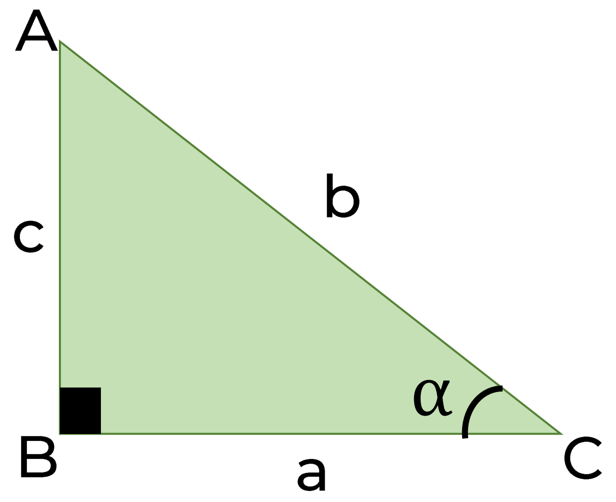
PROPIEDADES DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS AGUDOS

SACO OLIVEROS

MOTIVATING STRATEGY

HELICO THEORY

I) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS RECÍPROCAS



De la figura se tiene:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{c}{b} \quad \wedge \quad \csc\alpha = \frac{b}{c}$$

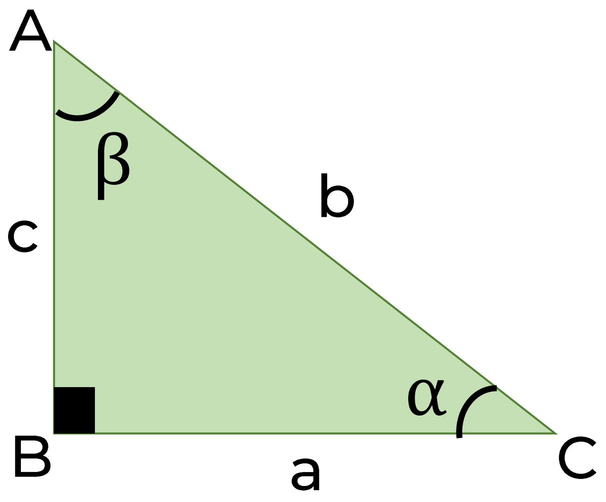
$$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha . \csc\alpha = \frac{\cancel{c}}{\cancel{b}} \times \frac{\cancel{b}}{\cancel{c}} = 1$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha . \csc\alpha = 1}$$

$$\boxed{\cos\alpha . \sec\alpha = 1}$$

$$\boxed{\tan\alpha . \cot\alpha = 1}$$

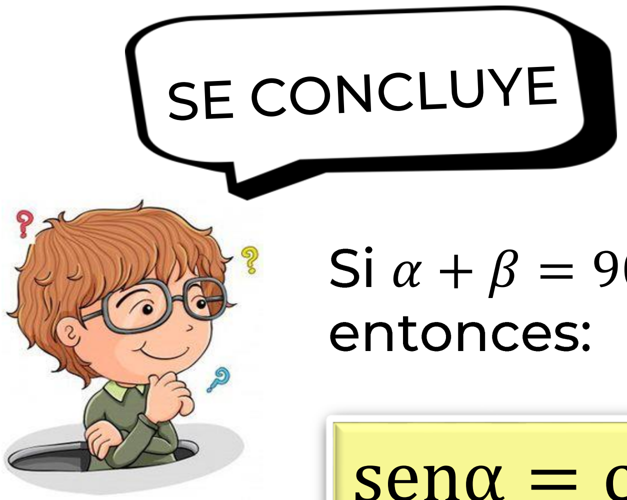
II) RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS



De la figura se tiene:

$$\text{sen}\alpha = \frac{c}{b} \quad \wedge \quad \cos\beta = \frac{c}{b}$$

$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$



Si $\alpha + \beta = 90°$ entonces:

$$\text{sen}\alpha = \cos\beta$$

$$\tan\alpha = \cot\beta$$

$$\sec\alpha = \csc\beta$$

HELICO-PRACTICE 1

Las edades de Juan e Iván son m y n años respectivamente, si dichos valores se pueden calcular al resolver las siguientes expresiones:

$$\cos(2m+30)°.\sec70° = 1 \quad \wedge \quad \tan(3n)° = \cot54°$$

a) ¿Cuál es la edad de Juan e Iván?
b) ¿Cuál es la suma de ambas edades?

Resolución:

Usando las RT recíprocas:

$$\cos\underbrace{(2m+30)°.\sec70°}_{} = 1 \text{......(I)}$$

$$(2m+30)\cancel{°} = 70\cancel{°}$$

$$2m+30 = 70$$

$$2m = 40 \Rightarrow \boxed{m = 20}$$

Usando las RT de ángulos complementarios:

$$\tan\underbrace{(3n)° = \cot}_{}54° \text{......(II)}$$

$$(3n)°+54° = 90°$$

$$(3n)\cancel{°} = 36\cancel{°} \Rightarrow \boxed{n = 12}$$

Piden:

a) Juan= **20 años**

Iván= **12 años**

b) 20+12= **32**

HELICO-PRACTICE 2

Si α es la medida de un ángulo agudo tal que

$$\tan(45° + 2\alpha) . \cot(60° - \alpha) = 1$$

Efectúe $M = (\sec 12\alpha + \tan 9\alpha)^2$

Resolución:

Del dato:

RT recíprocas:

$$\tan(\underbrace{45° + 2\alpha) . \cot(60°}) - \alpha) = 1$$

$$45° + 2\alpha = 60° - \alpha$$

$$3\alpha = 15°$$

$$\boxed{\alpha = 5°} \quad ....(\mathrm{I})$$

Piden :

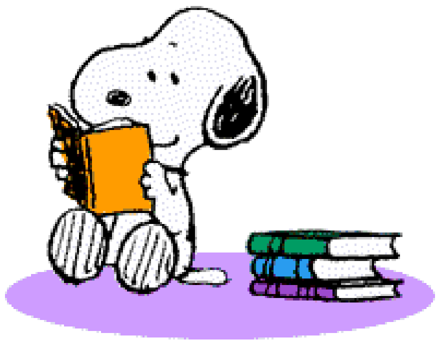
$$M = (\sec 12\alpha + \tan 9\alpha)^2$$

Reemplazando (I) en M

$$M = (\sec 60° + \tan 45°)^2$$

$$M = (2 + 1)^2$$

$$\therefore M = 9$$



HELICO-PRACTICE 3

Siendo α y β la medida de dos ángulos agudos, los cuales cumplen que

$$\operatorname{sen}\alpha - \cos 2\beta = 2\operatorname{sen}30° - 1 \quad ....(I)$$

$$\operatorname{sen}\alpha . \csc 4\beta = \tan 45° \quad ....(II)$$

Calcule $\tan(\alpha - \beta)$

Resolución:

De (I):

RT de ángulos complementarios:

$$\operatorname{sen}\alpha - \cos 2\beta = \cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right) - 1$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \cos 2\beta$$

$$\boxed{\alpha + 2\beta = 90°} \quad ....(*)$$

De (II):

RT recíprocas:

$$\operatorname{sen}\alpha . \csc 4\beta = 1$$

$$\boxed{\alpha = 4\beta} \quad ...(**)$$

Reemplazando(*) en (**)

$$\alpha + 2\beta = 90°$$

$$4\beta + 2\beta = 90°$$

$$6\beta = 90°$$

$$\beta = 15°$$

$$\alpha = 60°$$

Piden :

$$\tan(\alpha - \beta)$$

$$\tan(60° - 15°)$$

$$\tan(45°)$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = 1$$

HELICO-PRACTICE 4

Determine la medida del ángulo agudo x, que cumple

$$(\tan 10°)^{\operatorname{sen}(20°+x)} = (\cot 80°)^{\cos(x-2°)}$$

Resolución:

$$(\tan 10°)^{\operatorname{sen}(20°+x)} = (\cot 80°)^{\cos(x-2°)}$$

Usando las RT de ángulos complementarios:

$$\cot 80° = \tan 10°$$

$$(\tan 10°)^{\operatorname{sen}(20°+x)} = (\tan 10°)^{\cos(x-2°)}$$

A bases iguales → Exponentes iguales

$$\operatorname{sen}(20°+x) = \cos(x-2°)$$

$$20° + x + x - 2° = 90°$$

$$2x = 72°$$

$$\therefore x = 36°$$

HELICO-PRACTICE 5

Si θ es la medida de un ángulo agudo y cumple que: $\sec\theta = \dfrac{3\mathrm{sen}70° + \cos20°}{5\mathrm{sen}70° - 2\cos20°}$

Efectúe: $E = \sqrt{7}(\tan\theta + \cot\theta)$

Resolución:

RECORDAR

RT de ángulos complementarios

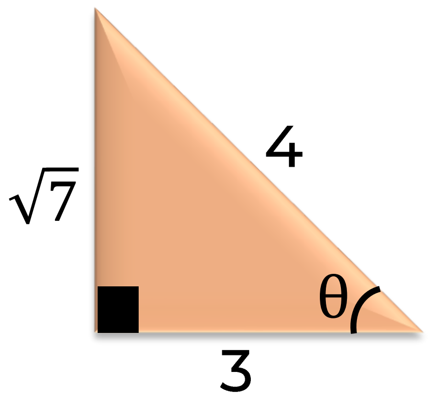
$\text{si } \alpha + \beta = 90°$

$\Rightarrow \mathrm{sen}\alpha = \cos\beta$

Así: $\mathrm{sen}70° = \cos20°$

Vamos a reemplazar:

$$\sec\theta = \frac{3\cos20° + \cos20°}{5\cos20° - 2\cos20°} \Rightarrow \sec\theta = \frac{4\cancel{\cos20°}}{3\cancel{\cos20°}} \Rightarrow \sec\theta = \frac{4}{3}$$



Piden :

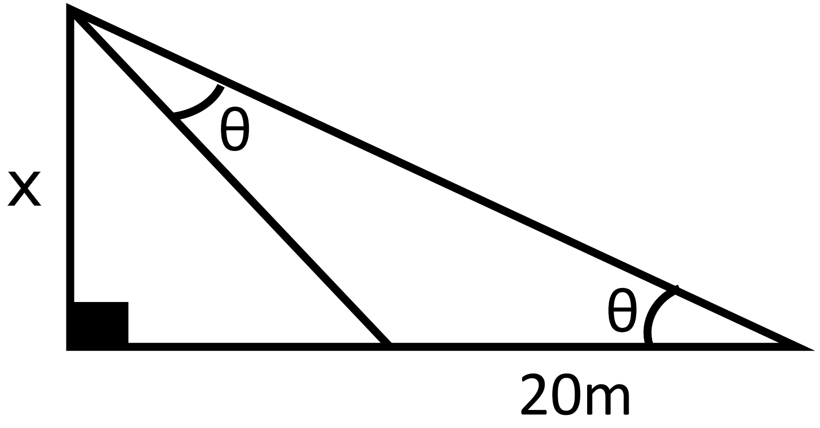
$$E = \sqrt{7}(\tan\theta + \cot\theta)$$

$$E = \sqrt{7}\left(\frac{\sqrt{7}}{3} + \frac{3}{\sqrt{7}}\right) = (\sqrt{7})\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) + (\cancel{\sqrt{7}})\left(\frac{3}{\cancel{\sqrt{7}}}\right)$$

$$E = \frac{7}{3} + 3 \Rightarrow \boxed{\therefore E = \frac{16}{3}}$$

HELICO-PRACTICE 6

Halle el valor de x, si en el gráfico se cumple: $\tan(30° - \theta) - \cot(30° + 3\theta) = 0$



Resolución:

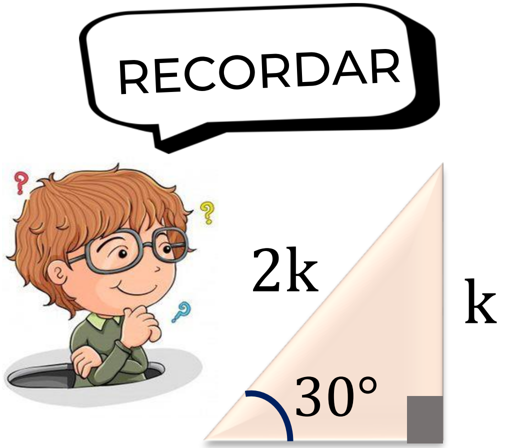
Del dato:

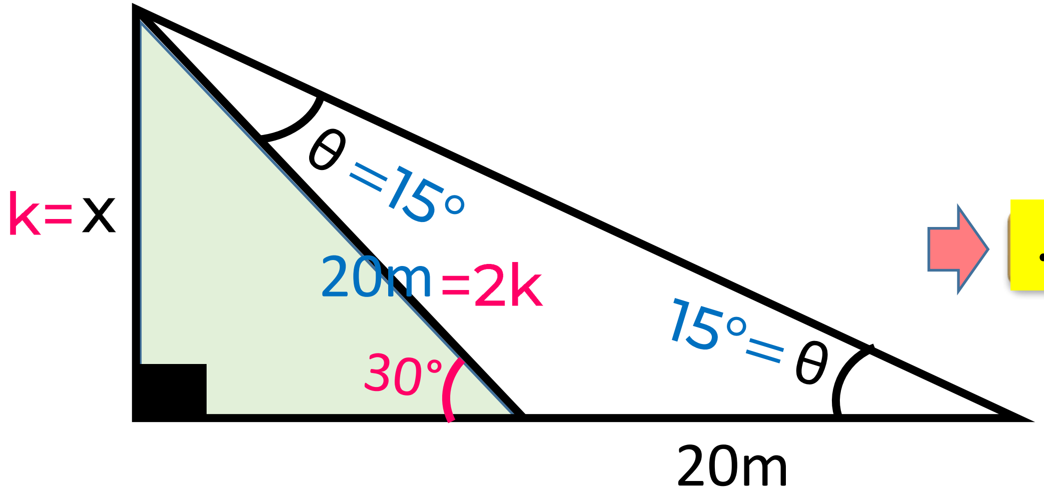
$$\tan(30° - \theta) - \cot(30° + 3\theta) = 0$$

$$\underbrace{\tan(30° - \theta) = \cot(30° + 3\theta)}$$

$$(30° - \theta) + (30° + 3\theta) = 90°$$

$$60° + 2\theta = 90° \Rightarrow \boxed{\theta = 15°}$$

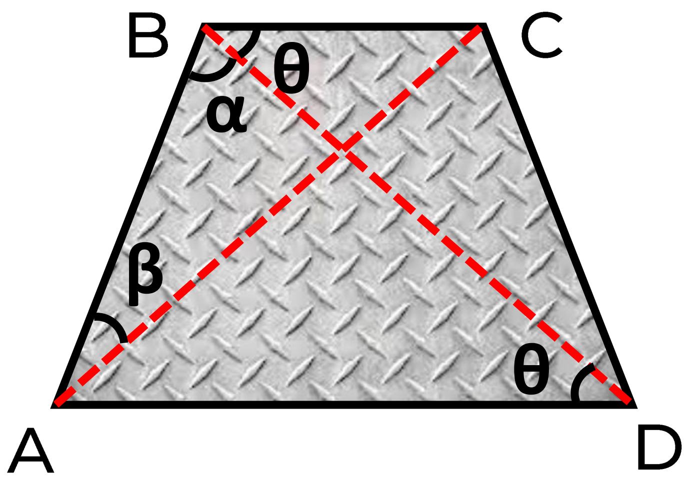




$\therefore x = 10m$

HELICO-PRACTICE 7

Miguel trabaja en un taller y tiene una pequeña pieza metálica ABCD, en la cual desea hacer los cortes $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ tal como muestra la figura.



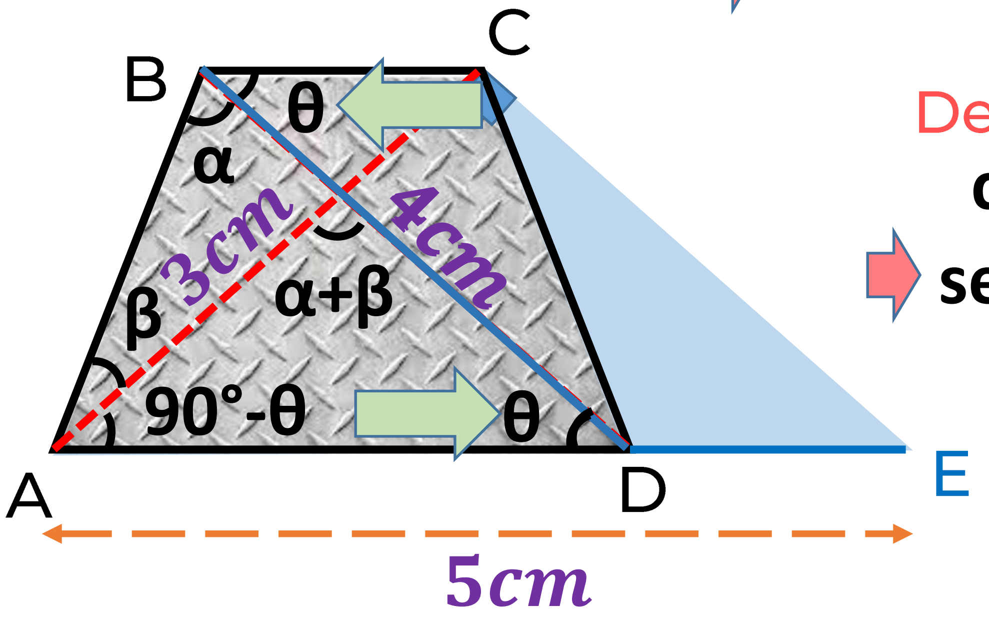
Si se cumple: $AC = 3cm$, $BD = 4cm$ y $AD + BC = 5cm$. calcule:

$$E = \frac{\tan(\alpha + \beta - \theta)}{\cot(\theta)} + sen(\alpha).\sec(\beta)$$

Resolución:

Del gráfico: $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ADB$ ⇒ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

Del gráfico: $BC = DE$ ⇒ $AD + DE = 5$



Del gráfico:
α+β=90°
⇒ **senα=cosβ**

Calculamos:

$$E = \frac{\tan(90° - \theta)}{\cot(\theta)} + \cos(\beta).\sec(\beta) = \frac{4/3}{4/3} + 1 = 2$$