



ALGEBRA

Chapter 9 5th

NÚMEROS COMPLEJOS



Helicomotivación

APLICACIONES EN LOS NÚMEROS COMPLEJOS

ABRIR ENLACE:

<https://youtu.be/zu4VplA9kks>

NÚMEROS COMPLEJOS

I) UNIDAD IMAGINARIA

$$i = \sqrt{-1}$$

Ejemplos:

$$\diamond \sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \underbrace{\sqrt{-1}}_i = 3i$$

$$\diamond \sqrt{-25} = \sqrt{25} \cdot \underbrace{\sqrt{-1}}_i = 5i$$

II) POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

Se cumple:

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+3} = -i$$

$(k \in \mathbb{Z}^+)$

Ejemplos:

$$\diamond i^{23} = i^{20+3} = i^{4k+3} = -i$$

$$\diamond i^{2022} = i^{20+2} = i^{4k+2} = -1$$

III) NÚMEROS COMPLEJOS

Definición:

$$z = (a; b) = a + bi$$

Donde: $i = \sqrt{-1}$

☐ *Parte real*: $Re(Z) = a$

☐ *Parte imaginaria*: $Im(Z) = b$

$a, b \in \text{Reales}$

Ejemplo:

❖ $z = (3; 2) = 3 + 2i$

$Re(Z) = 3$

$Im(Z) = 2$

Observación:

Dado $z = (a; b) = a + bi$

Se tendrá:

1) Complejo real

Si $b=0$

$$z = (a; 0) = a$$

2) Complejo imaginario puro

Si $a=0$

$$z = (0; b) = bi$$

3) Complejo nulo

Si $a=0; b=0$

$$z = (0; 0) = 0$$

Definiciones:

Sea: $z = a + bi$, entonces se define

1. complejo conjugado (\bar{z}):

$$\bar{z} = a - bi$$

2. complejo opuesto (z^*):

$$z^* = -a - bi$$

Ejemplo:

$$z = 3 - 4i \quad \longrightarrow \quad \bar{z} = 3 + 4i$$

$$\longrightarrow \quad z^* = -3 + 4i$$

3. Módulo de un complejo

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:

$$z = 3 - 4i \quad \longrightarrow \quad |z| = \sqrt{3^2 + (-4)^2}$$
$$|z| = 5$$

Operaciones con Números complejos

Adición y sustracción

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} \diamond z_1 = 2 + 4i \\ z_2 = 3 + 2i \end{array} \quad +$$

$$z_1 + z_2 = 5 + 6i$$

$$\begin{array}{l} \diamond z_1 = 2 + 4i \\ z_2 = 3 + 2i \end{array} \quad -$$

$$z_1 - z_2 = -1 + 2i$$

Multiplicación

$$\begin{array}{l} \text{Sea: } z_1 = 2 + 4i \\ z_2 = 3 + 2i \end{array}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2 + 4i)(3 + 2i)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6 + 4i + 12i + 8i^2$$

$$\boxed{-8}$$

$$z_1 \cdot z_2 = -2 + 16i$$

OBSERVACIÓN:

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

División:

$$z = \frac{2 + 4i}{3 - 2i}$$

$$z = \frac{(2 + 4i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)}$$

$$z = \frac{-2 + 16i}{13}$$

$$z = \frac{-2}{13} + \frac{16}{13}i$$

Resultados Importantes:

$$(1 + i)^2 = 2i$$

$$(1 - i)^2 = -2i$$

$$(1 \pm i)^4 = -4$$

$$\frac{1 - i}{1 + i} = -i$$

$$\frac{1 + i}{1 - i} = i$$

$$Z = \frac{a+bi}{n+mi} \rightarrow \mathbb{C}. \text{ imaginario puro}$$

$$\text{se cumple: } \frac{a}{m} = -\frac{b}{n}$$

$$Z = \frac{a+bi}{n+mi} \rightarrow \text{complejo real}$$

$$\text{se cumple: } \frac{a}{n} = \frac{b}{m}$$

PROBLEMA 1

Reduzca:

$$M = \frac{i^{16} + 5i^{21} + 4i^{43} + i^{81}}{2i^{440} - i^{320}}$$

Resolución

Recordar:

$$i^{4k} = 1$$

$$i^{4k+1} = i$$

$$i^{4k+2} = -1$$

$$i^{4k+3} = -i$$

$$M = \frac{i^{4k} + 5i^{4k+1} + 4i^{4k+3} + i^{4k+1}}{2i^{4k} - i^{4k}}$$

$$M = \frac{(1) + 5(i) + 4(-i) + (i)}{2(1) - (1)}$$

Rpta:

$$M = 1 + 2i$$

PROBLEMA 2

Si

$$z_1 = 3 - 2i$$

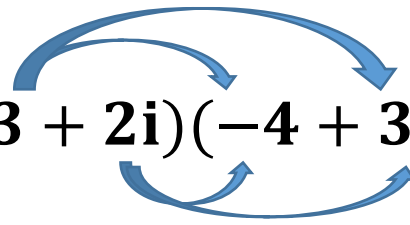
$$z_2 = -4 + 3i$$

Calcule: $\text{Im}(\overline{z_1} \cdot z_2)$

Resolución

si: $z_1 = 3 - 2i$

➔ $\overline{z_1} = 3 + 2i$

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \cdot z_2 &= (3 + 2i)(-4 + 3i) \\ \overline{z_1} \cdot z_2 &= -12 + 9i - 8i + 6i^2\end{aligned}$$


$\underbrace{6i^2}_{(-1)}$

$$\overline{z_1} \cdot z_2 = \underbrace{-18}_{Re} + \underbrace{1i}_{Im}$$

Rpta: $\text{Im}(\overline{z_1} \cdot z_2) = 1$

PROBLEMA 3

Simplifique E si $i = \sqrt{-1}$

$$E = \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1-i}}}}$$

Resolución

Propiedad:

$$\frac{1+i}{1-i} = i$$

$$E = \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1-i}}}}$$

$$E = \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1 - i}}$$

$$E = \frac{1+i}{1 - \frac{1+i}{1-i}}$$

$$E = \frac{1+i}{1-i} = i$$

Rpta:

$$\therefore E = i$$

PROBLEMA 4

Halle el valor de m para que el complejo:

$$z = \frac{m+3i}{2-5i} \text{ sea imaginario puro}$$

Resolución

Propiedad:

Si: $z = \frac{a+bi}{c+di}$
es imaginario puro

$$\rightarrow \frac{a}{d} = -\frac{b}{c}$$

$$z = \frac{m + 3i}{2 - 5i}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{-5} = -\frac{3}{2}$$

Rpta:

$$m = \frac{15}{2}$$

PROBLEMA 5

En la igualdad: $(2 + 3i)x + (1 - 2i)y = 14 + 8i$

Además $\{x, y\} \subset \mathbb{R}$. Determine x/y

Resolución

$$(2 + 3i)x + (1 - 2i)y = 14 + 8i$$

$$\underline{2x} + \underline{3ix} + \underline{y} - \underline{2iy} = 14 + 8i$$

$$(\underline{2x + y}) + (\underline{3x - 2y})i = \underline{14} + \underline{8i}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \begin{matrix} \xrightarrow{(\times 2)} \\ \xrightarrow{\quad} \end{matrix} \begin{array}{r} 4x + 2y = 28 \\ 3x - 2y = 8 \\ \hline 7x = 36 \\ x = 36/7 \end{array}$$

$$y = 26/7$$

Piden: x/y

$$\Rightarrow x/y = 36/26$$

Rpta:

$$x/y = 18/13$$

PROBLEMA 6

La edad de Ricardo hace 10 años está dado por $5M$, donde M se calcula al resolver:

$$\frac{M}{17} = \frac{5+3i}{5-3i} - \frac{3+5i}{3-5i}$$

¿Cuál es la edad de Ricardo?

Resolución

$$\frac{M}{17} = \frac{5+3i}{5-3i} \times \frac{5+3i}{5+3i} - \frac{3+5i}{3-5i} \times \frac{3+5i}{3+5i}$$

$$\frac{M}{17} = \frac{(5+3i)^2}{5^2+3^2} - \frac{(3+5i)^2}{3^2+5^2}$$

$$\frac{M}{17} = \frac{25 + \cancel{30i} - 9}{34} - \frac{9 + \cancel{30i} - 25}{34}$$

$$\frac{M}{17} = \frac{32}{34}$$

$$M = 16$$

Luego la edad de Ricardo hace 10 años

$$5M = 80$$

∴ La edad actual de Ricardo es

Rpta: 90 años

PROBLEMA 7

Tres embarcaciones pesqueras, A,B y C, salieron del puerto a la misma hora y en diferentes direcciones .Para indicar su posición exacta las embarcaciones emplean números complejos en el plano complejo, considerando que cada unidad en el plano complejo es equivalente a una milla, y que el puerto esta ubicada en el origen de coordenadas.

Transcurrida una hora de su partida se le solicito por radio indicar su posición, a lo que respondieron:

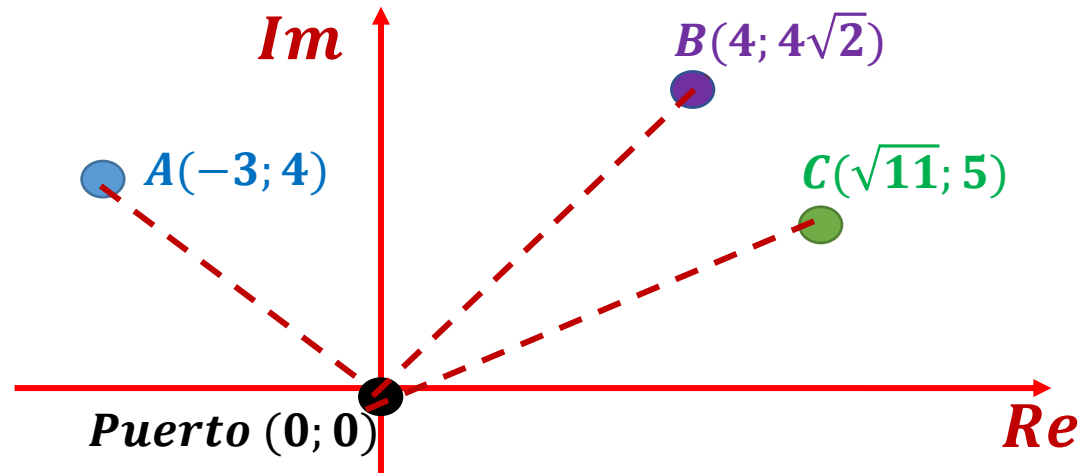
Embarcación A: $-3 + 4i$

Embarcación B: $4 + 4\sqrt{2}i$

Embarcación C: $\sqrt{11} + 5i$

¿cual de las tres embarcaciones se encuentra mas distante del puerto?

Resolución Plano complejo



Modulo de $Z=(x;y)$

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|Z_A| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{ millas}$$

$$|Z_B| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{3} \text{ millas}$$

$$|Z_C| = \sqrt{\sqrt{11}^2 + 5^2} = 6 \text{ millas}$$

Rpta: Embarcación B