MATHEMATICAL REASONING

Chapter 23

5th
SECONDARY

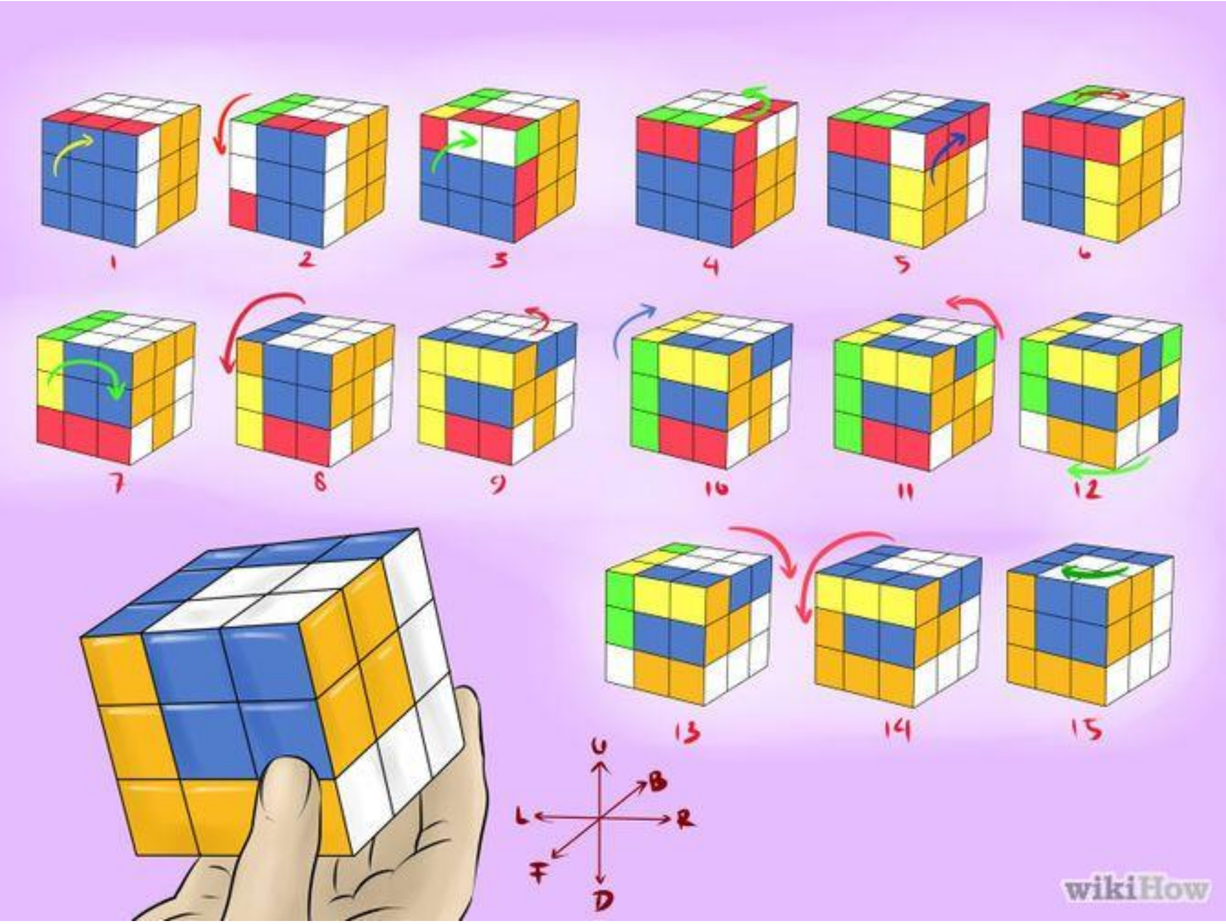
ANÁLISIS COMBINATORIO II

SACO OLIVEROS

HELICO MOTIVATION

- !SABÍAS QUÉ!

Un Cubo Rubik tiene más de 43 TRILLONES de combinaciones posibles, pero sólo una solución. Si tardaras un segundo por cada movimiento, te tomaría 1,4 billones de años pasar por todas las posibles combinaciones.



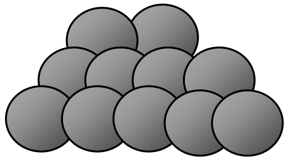
HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO II

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

Si se tiene n elementos diferentes, con ellos se puede realizar lo siguiente:

n elementos diferentes



ORDENAR

PERMUTACIONES

(Interesa el orden en que se tomen los elementos)

AGRUPAR

COMBINACIONES

(No interesa el orden en que se tomen los elementos)

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO II

PERMUTACIONES

Son los diferentes arreglos u ordenamientos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos disponibles de un conjunto. En una permutación interesa el orden o ubicación de los elementos. Se pueden presentar los siguientes casos:

PERMUTACIÓN LINEAL

- Permutación de todos los elementos

El número de maneras diferentes de permutar (ordenar) “n” elementos diferentes se calcula de la siguiente manera:

$$\boxed{P_n = n!}$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras diferentes seis caballos podrán llegar a la meta en una carrera en el hipódromo si no hay empates?

$$P_6 = 6!$$
$$P_6 = 720$$

$\therefore$ 720

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO II

PERMUTACIONES

- PERMUTACIÓN LINEAL

- Permutación de algunos elementos

El número de permutaciones diferentes de n elementos ordenados en grupos de k en k se calcula del siguiente modo:

$$\boldsymbol{P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar cuatro de un total de seis niños en una banca de cuatro asientos?

$$P_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!} \longrightarrow P_4^6 = \frac{6!}{2!}$$

$$P_4^6 = \frac{720}{2}$$

$$\therefore \quad 360$$

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO II

PERMUTACIONES

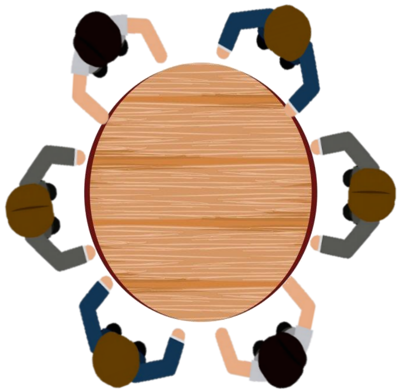
PERMUTACIÓN CIRCULAR

El número de permutaciones circulares diferentes de n elementos distintos se calcula así:

$$P_{C_n} = (n-1)!$$

Ejemplo:

Seis amigos se ubican en seis sillas alrededor de una mesa circular. ¿De cuántas maneras diferentes podrán ubicarse?



$$n = 6$$

$$N°de\ maneras = P_{C_6}$$

$$N°de\ maneras = (6-1)!$$

$$N°de\ maneras = 5!$$

$$N°de\ maneras = 120$$

$$\therefore \quad 120$$

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO II

PERMUTACIONES

PERMUTACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS

El número de permutaciones de n elementos donde r_1 son iguales, r_2 también iguales, r_3 también iguales,..., y r_k también iguales, se calcula de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{P^{n}_{r_1;r_2;r_3;\ldots;r_k} = \frac{n!}{r_1! \times r_2! \times r_3! \times \cdots \times r_k!}}$$

Ejemplo:

¿Cuántas palabras que tengan sentido o no se pueden leer con todas las letras de la palabras MIMOSO?

$\underbrace{\text{MIMOSO}}_{\text{6 letras}}$

n = 6

Se repiten:

M ⟶ 2 veces:

O ⟶ 2 veces:

$$P^{6}_{2;2} = \frac{6!}{2! \times 2!} \longrightarrow P^{6}_{2;2} = \frac{720}{4}$$

$\therefore$ 180

ANÁLISIS COMBINATORIO II

COMBINACIONES

Son las diferentes selecciones o agrupamientos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos disponibles de un conjunto. En una combinación no interesa el orden ni ubicación de sus elementos.

EN GENERAL:

El número de combinaciones diferentes de n elementos agrupados de k en k se calcula de la siguiente manera:

$$C_k^n = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Ejemplo:

Se tienen 6 personas. ¿Cuántos grupos distintos de 3 personas se puede formar?

$$C_3^6 = \frac{6!}{3! \times (6-3)!}$$

$$C_3^6 = \frac{720}{36}$$

$\therefore \quad \underline{\underline{20}}$

HELICO THEORY

ANÁLISIS COMBINATORIO II

COMBINACIONES

DESARROLLO SIMPLIFICADO (FORMA PRÁCTICA)

$$C_k^n = \frac{\overbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots}^{k\ factores}}{k!}$$

Ejemplo 1:

$$C_3^8 = \frac{8 \times 7 \times \cancel{6}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 56$$

Ejemplo 2:

$$C_3^9 = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \times \overset{4}{\cancel{8}} \times 7}{\underset{1}{\cancel{3}} \times \underset{1}{\cancel{2}} \times 1} = 84$$

Ejemplo 3:

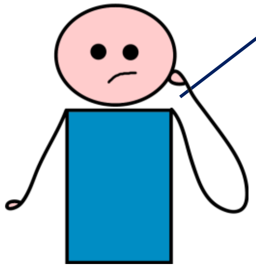
$$C_2^{20} = \frac{\overset{10}{\cancel{20}} \times 19}{\underset{1}{\cancel{2}} \times 1} = 190$$

ANÁLISIS COMBINATORIO II

Problemitas:

Ejemplo :

¿Cuántos partidos de fútbol se juegan en total en un campeonato en el que participan 20 equipos, jugando todos contra todos a una sola rueda?



Para que se juegue un partido de fútbol se necesitan dos equipos, entonces, se tiene que elegir grupos conformados por 2 equipos

Resolución:

$$C_2^{20} = \frac{20!}{2! \times (20-2)!}$$

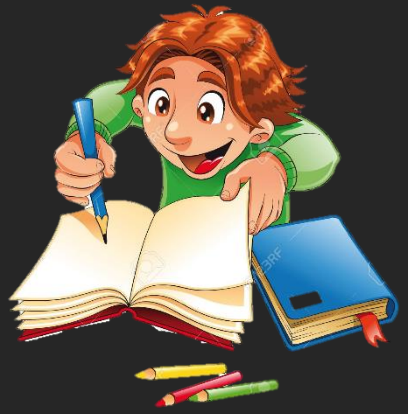
$$C_2^{20} = \frac{\cancel{20}^{10} \times 19 \times \cancel{18!}}{\cancel{2}_{1} \times \cancel{18!}} \qquad C_2^{20} = 190$$

Forma práctica:

$$C_2^{20} = \frac{20 \times 19}{2 \times 1}$$

$$C_2^{20} = 190 \qquad \therefore \quad \underline{\underline{190}}$$

RESOLUCIÓN DE LA PRÁCTICA

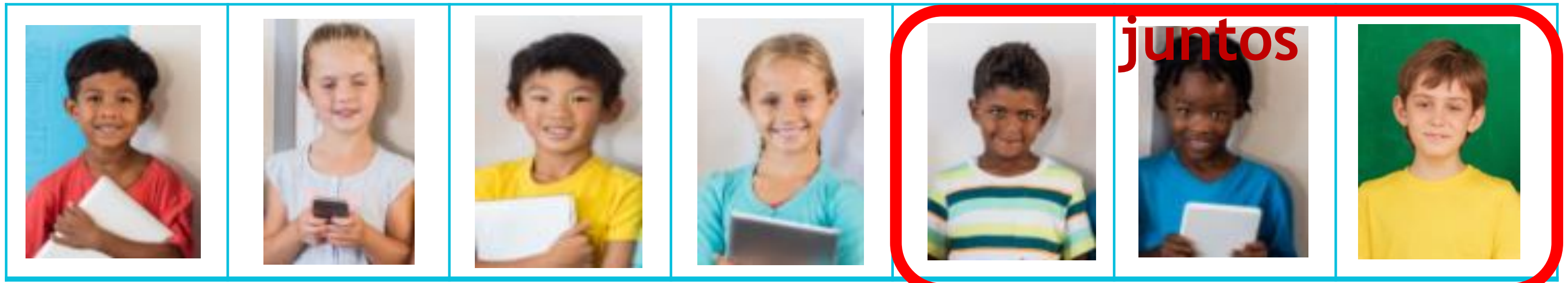


PROBLEMA 1

¿De cuántas maneras pueden sentarse siete alumnos en una banca si tres de ellos en particular deben sentarse juntos?

Resolución:

Se sientan juntos



1 2 3 4 5

n = 5

$$P_{total} = 5! \times 3!$$

$$P_{total} = 120 \times 6$$

$$P_{total} = 720$$

RECORDEMOS:

$$P_n = n!$$

$\therefore$ 720

PROBLEMA 2

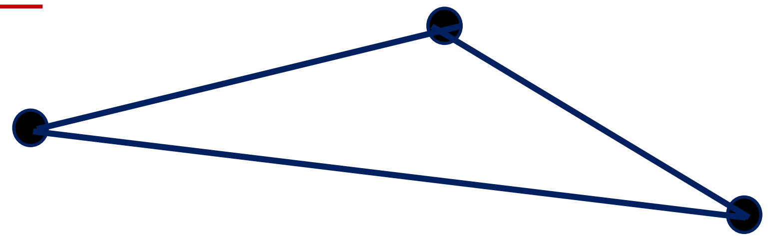
En un plano se tienen 12 puntos no colineales, ¿Cuántos triángulos se pueden formar?

RECORDE

Para formar un triángulo se necesitan unir 3 puntos no colineales y no importa el orden.

Resolución:

n = 12



k = 3

$$C_3^{12} = \frac{12!}{3! \times (12-3)!}$$

$$C_3^{12} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}} \times 11 \times 10 \times \cancel{9!}}{\underset{1}{\cancel{6}} \times \cancel{9!}} \rightarrow C_3^{12} = 220$$

Forma práctica:

$$C_3^{12} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}} \times 11 \times 10}{\cancel{3 \times 2 \times 1}}$$

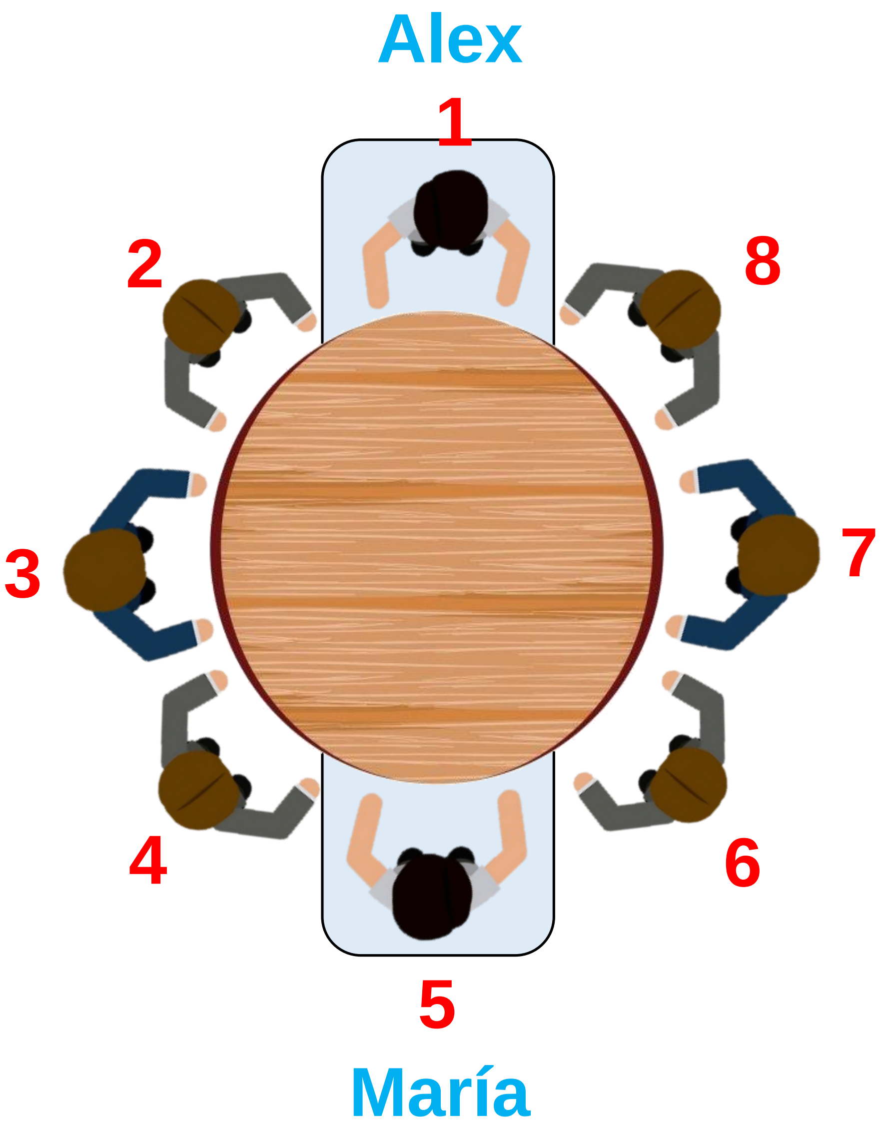
$$C_3^{12} = 220$$

$\therefore$ 220

PROBLEMA 3

¿De cuántas maneras diferentes podrá ubicarse 8 amigos alrededor de una mesa circular, si Alex y María siempre deben ubicarse frente a frente?

Resolución:



RECORDE MOS:

$$\boldsymbol{P_n = n!}$$

$$P_6 = 6!$$

$$P_6 = 720$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{720}}$$

PROBLEMA 4

¿De cuántas maneras pueden ordenarse las letras de la palabra PAPAYAS?

Resolución:

$$\underbrace{\text{PAPAYAS}}_{\text{7 letras}}$$

n = 7

Se repiten:

P ⟶ 2 veces:

A ⟶ 3 veces:

Recordemos:

$$\boxed{P^{n}_{r_1;r_2} = \frac{n!}{r_1! \times r_2!}}$$

$$P^{5}_{2;3} = \frac{7!}{2! \times 3!} \longrightarrow P^{5}_{2;3} = \frac{5040}{2 \times 6}$$

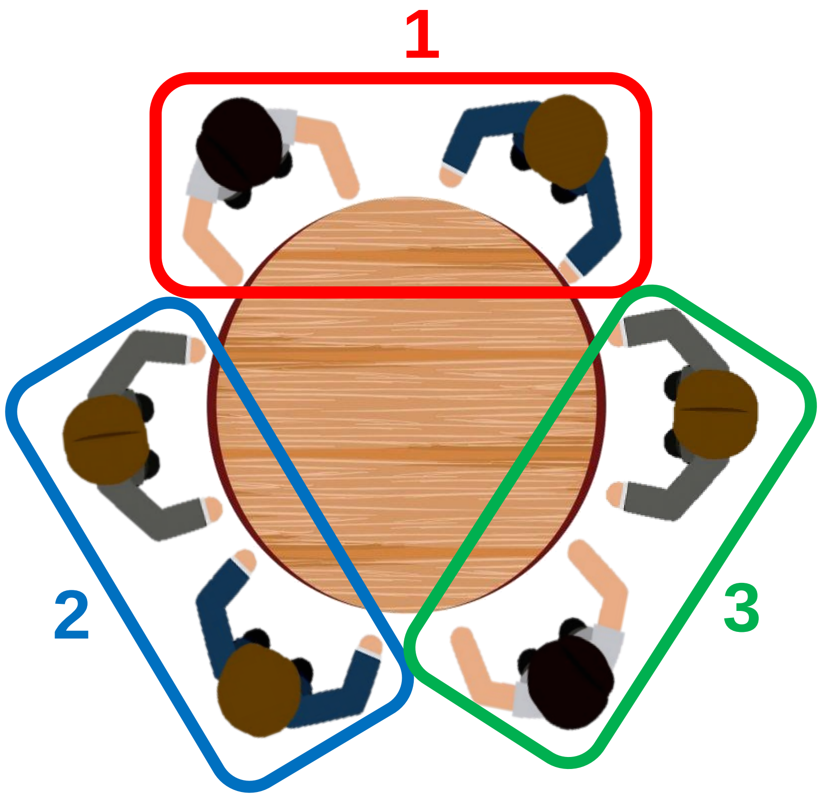
$$P^{5}_{2;3} = 420$$

$$\therefore \quad 420$$

PROBLEMA 5

¿De cuántas maneras 3 parejas de esposos se pueden sentar alrededor de un mesa circular si las parejas siempre se sientan juntas?

Resolución:



n = 3

$$\boxed{P_{C_n} = (n-1)!}$$

$$P_{Total} = (3-1)!\ \text{x}2!\ \text{x}2!\ \text{x}2!$$

$$P_{Total} = 2!\ \text{x}2!\ \text{x}2!\ \text{x}2!$$

$$P_{Total} = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2$$

$$P_{Total} = 2^4$$

$$P_{Total} = 16$$

$\therefore$ **16**

PROBLEMA 6

En el último clásico entre Alianza y Universitario, en el que, como de costumbre, Alianza terminó goleando a la U, se produjo un altercado por una jugada ocasionada por la inmadurez de un jugador crema; así, el árbitro, ante el reclamo de 5 jugadores por cobrar la falta, mostró 3 tarjetas amarillas y 2 rojas, ¿de cuántas maneras diferentes pudo mostrar el árbitro dicho castigo?

Resolución:

Se repiten:

Rojas ⟶ 2 veces:

Amarillas ⟶ 3 veces:

Recordemos:

$$\boxed{P^{n}_{r_1;r_2} = \frac{n!}{r_1! \times r_2!}}$$

$$P^{5}_{3;2} = \frac{5!}{3! \times 2!} \longrightarrow P^{5}_{3;2} = \frac{120}{12}$$

$$P^{5}_{3;2} = 10$$

$\therefore$ 10

PROBLEMA 7

En el campeonato peruano se juegan partidos en dos ruedas, es decir, con partidos de ida y vuelta. Si este año participarán 20 equipos profesionales, ¿cuántos partidos en total tendrá que programar la Asociación de fútbol?

Resolución:

Para que se juegue un partido de fútbol se necesitan dos equipos, entonces, se tiene que elegir grupos conformados por 2 equipos

PRIMERA RUEDA

n = 20 k = 2

Por lo tanto:

$$C_2^{20} = \frac{\overset{10}{\cancel{20}} \times 19}{\underset{1}{\cancel{2}} \times 1} \longrightarrow C_2^{20} = 190$$

SEGUNDA RUEDA(REVANCHA)

La cantidad de partidos es la misma que la primera rueda: 190

$$Total\ partidos = 190 + 190 = 380$$

$$\therefore \underline{\underline{380}}$$