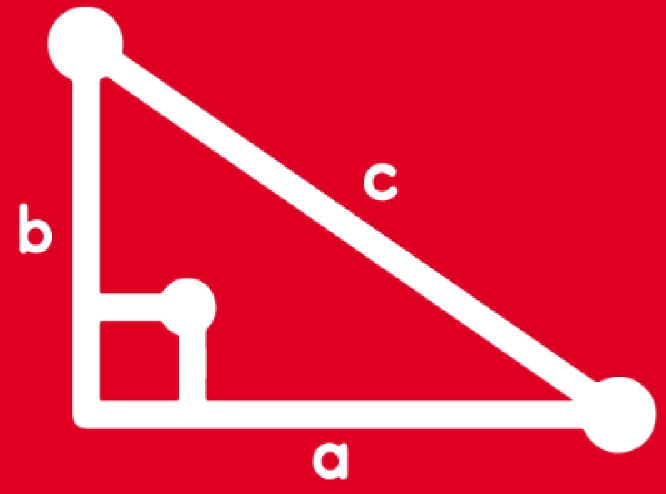
TRIGONOMETRY

Chapter 22



4th
SECONDARY

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS I

SACO OLIVEROS

HELICOMOTIVACIÓN

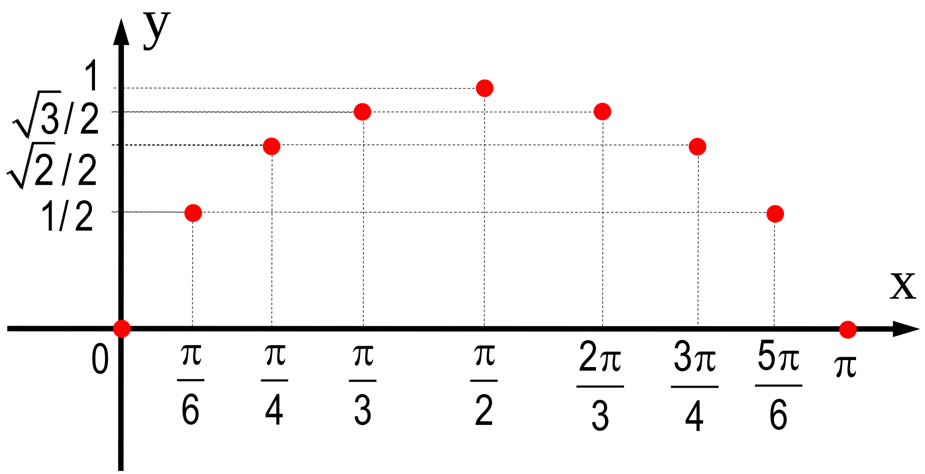
HELICOTEORÍA

FUNCION SENO:

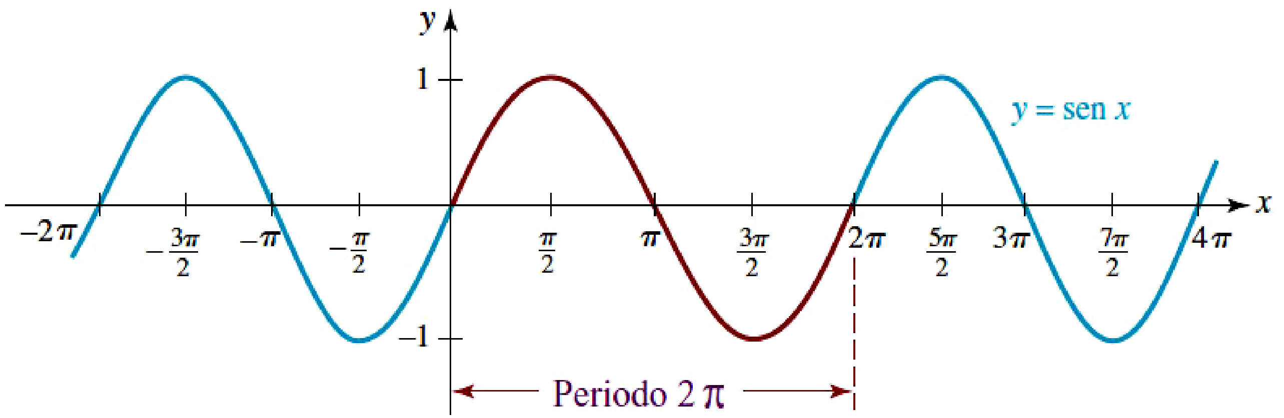
$$F=\{(x;y)/\,y=\operatorname{sen}x\ ;\ x\in R\}$$

Tabulando algunos valores para x e y :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y = senx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



Tabulando mas valores y uniendo con una curva dichos puntos , tenemos :



Dominio : $\operatorname{Dom}F=R\ ;\ x\in R$

Rango : $\operatorname{Ran}F=[-1;1]\Rightarrow -1\le \operatorname{sen}x\le 1$

Periodo : $T=2\pi$

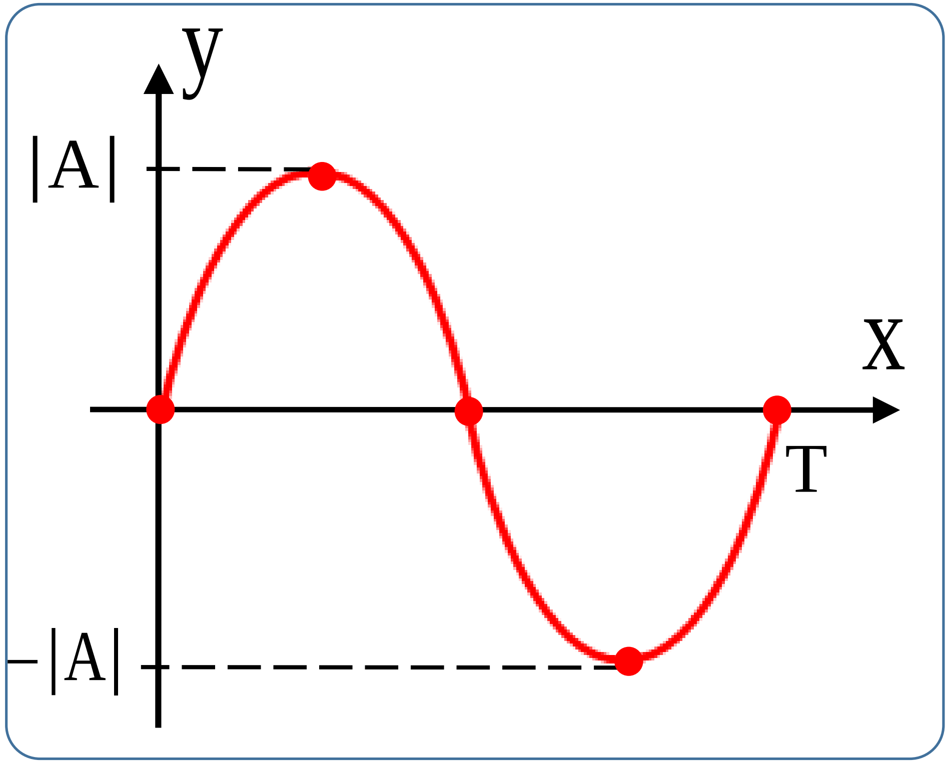
Es una función impar : $\operatorname{sen}(-x)=-\operatorname{sen}x$

HELICOTEORÍA

OBSERVACION:

Sea la función : $y = A.\text{sen}Bx$

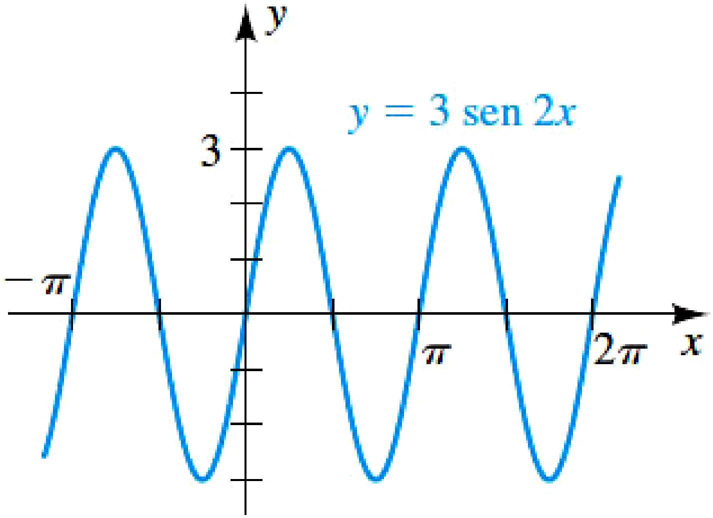
Amplitud: $|A|$; Período: $T = \dfrac{2\pi}{|B|}$



Ejemplos:

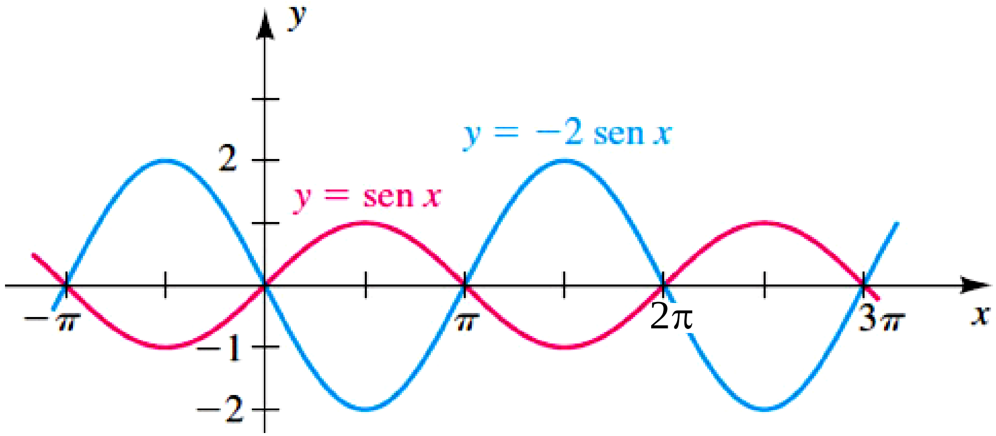
- $y = 3\text{sen}2x$

$$\begin{cases} |A| = 3 \\ T = \pi \end{cases}$$



- $y = -2\text{sen}x$

$$\begin{cases} |A| = 2 \\ T = 2\pi \end{cases}$$



PROBLEMA 1

Halle el rango de la función : $f(x) = 5\,senx - 3$

Resolución

Recordemos que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq senx \leq 1} \;\cdots (*)$$

De (*) :

$$-1 \leq \text{senx} \leq 1$$

$$\xrightarrow{\times 5} \quad -5 \leq 5\,\text{senx} \leq 5$$

$$\xrightarrow{-3} \quad -8 \leq \underbrace{5\,\text{senx} - 3}_{} \leq 2$$

$$-8 \leq f(x) \leq 2$$

$$\boxed{\therefore\; Ran(f) = [-8\,;2\,]}$$

PROBLEMA 2

Halle el rango de la función : $g(x) = \dfrac{2\,sen3x - 1}{3}$

Resolución

Recordemos que :

$\forall\, x \in \mathbb{R} : \quad 3x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\forall\, 3x \in \mathbb{R} : -1 \leq sen3x \leq 1}$ ... (*)

De (*) :

$$-1 \leq \text{sen}3\text{x} \leq 1$$

$\times 2$

$$-2 \leq 2\,\text{sen}3\text{x} \leq 2$$

-1

$$-3 \leq 2\,\text{sen}3\text{x} - 1 \leq 1$$

$\div 3$

$$-1 \leq \underbrace{\frac{2\,\text{sen}3\text{x} - 1}{3}}_{\text{g(x)}} \leq \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{Ran}(g) = \left[-1 ; \frac{1}{3}\right]$$

PROBLEMA 3

Halle el rango de la función : $f(x) = 6\,senx\,.\,cosx + 2$

Resolución

Recordemos que :

2 senx . cosx = sen2x

$\forall\, x \in \mathbb{R}:\ \ 2x \in \mathbb{R}$

$\boxed{\forall\, 2x \in \mathbb{R} : -1 \leq sen2x \leq 1}$ ... (*)

$f(\,x\,) = 3\,.\,2\,senx\,.\,cosx + 2$

$f(\,x\,) = 3\,.\ sen2x\ + 2$

De (*) :

$-1 \leq \text{sen2x} \leq 1$

x 3

$-3 \leq 3\ \text{sen2x} \leq 3$

+ 2

$-1 \leq \underbrace{3\ \text{sen2x} + 2}_{\text{f}(\,x\,)} \leq 5$

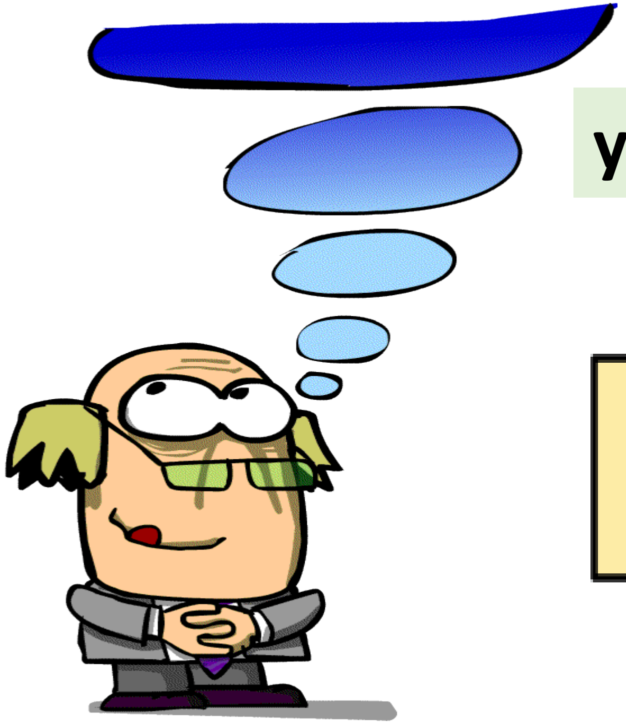
$\boxed{\therefore\ \textbf{Ran (f)} = [\,-1\,;\,5\,]}$

PROBLEMA 4

Calcule $T_1 + T_2$, siendo T_1 y T_2 los periodos de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, donde : $f(x) = 3\,\text{sen}(5x)$ y $g(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{x}{3}\right)$

Resolución

Recordemos que :



$$y = A\,\text{sen}(Bx)$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{|B|}} \; ; B \neq 0$$

$$f(x) = 3\,\text{sen}(\underset{\Uparrow}{\overset{B}{5}}x)$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{|5|} = \frac{2\pi}{5}$$

$$g(x) = 2\,\text{sen}\left(\underset{B}{\frac{1}{3}}x\right)$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}}$$

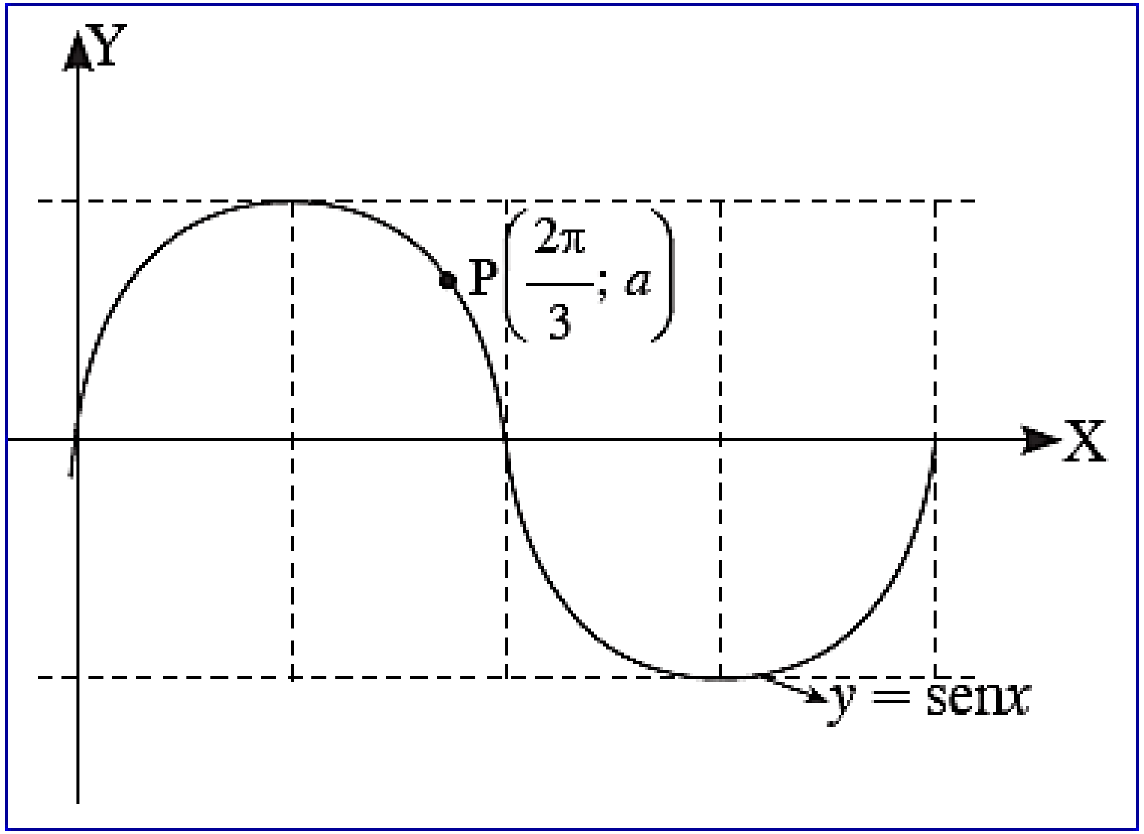
$$T_2 = 6\pi$$

$$T_1 + T_2 = \frac{2\pi}{5} + 6\pi$$

$$\boxed{\therefore \quad T_1 + T_2 = \frac{32\pi}{5}}$$

PROBLEMA 5

Del gráfico, halle el valor de a



Resolución

Sea : $f(x) = y = \text{sen}x$

Se cumple que : $P\left(\frac{2\pi}{3}; a\right) \in f$

Luego : $a = \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \text{sen}\underbrace{\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)}_{\text{II C}}$

$$a = +\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\boxed{\therefore\ a = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

PROBLEMA 6

Las ganancias de una empresa del rubro metal mecánica, están definidas por : $f(x) = a\,\mathrm{sen}(x) + b$; donde a y b son los costos fijos y variables. Además el rango de la función pertenece al intervalo $[-2\,;\,4]$; calcule el valor de E = 3a + b

Resolución

Recordemos que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : -1 \le \mathrm{sen}x \le 1}$$

x a

$$-a \le a\,\mathrm{sen}x \le a$$

+ b

$$-a + b \le \underbrace{a\,\mathrm{sen}x + b}_{f(x)} \le a + b$$

$$-2 = -a + b \le f(x) \le a + b = 4$$

Luego : $-a + b = -2$

$a + b = 4$ (+)

$2b = 2 \Rightarrow b = 1$

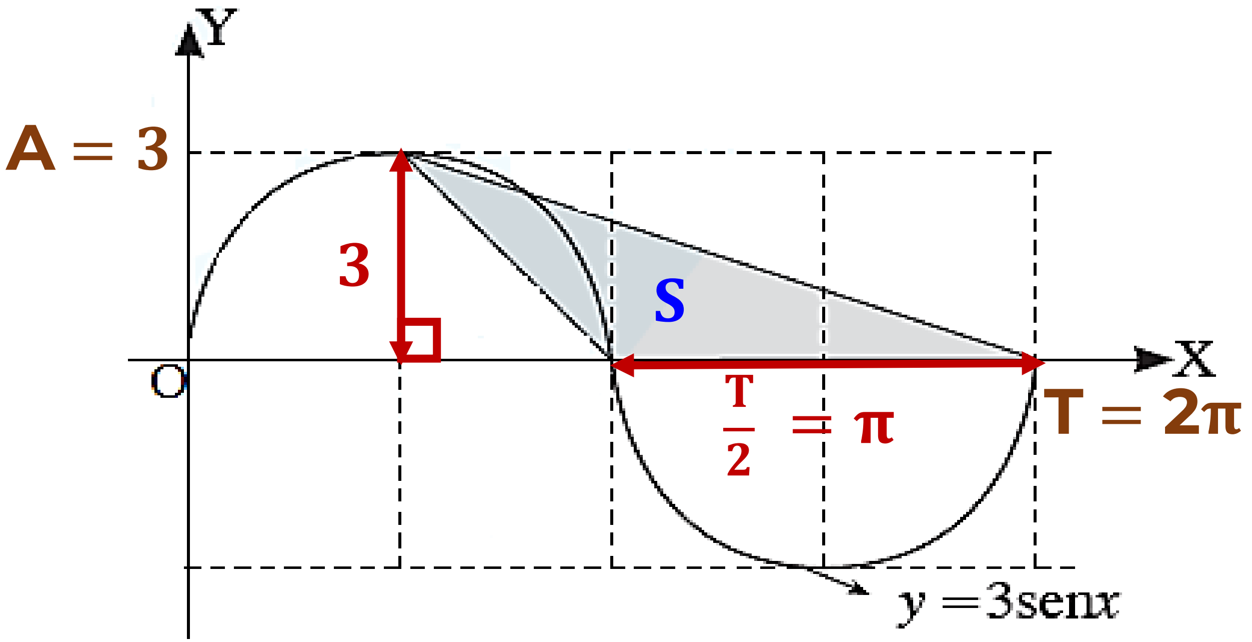
$a + b = 4 \Rightarrow a + 1 = 4 \Rightarrow a = 3$

Calculamos E : E = 3 (3) + 1

$$\boxed{\therefore E = 10}$$

PROBLEMA 7

El movimiento de las olas de una playa está representado en un gráfico donde se indican los puntos más altos y más bajos en ellas . Determine el área sombreada en el gráfico .



Resolución

Dato : $y = 3\,\text{sen}(1\,x)$

$\Uparrow$ A $\qquad \Uparrow$ B

Luego : $T = \dfrac{2\pi}{|B|} = \dfrac{2\pi}{|1|} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

Calculamos S : $S = \dfrac{(\pi)(3)}{2}$

$$\therefore S = \frac{3\pi}{2}\,u^2$$