ARITHMETIC

Chapter 3

Summer
San Marcos 2021

Magnitudes Proporcionales

SACO OLIVEROS

HISTORIA DE LA PROPORCIONALIDAD

A lo largo de la historia los orígenes de la proporcionalidad han estado presentes en el estudio del mundo que rodea al hombre. La proporcionalidad es una relación entre magnitudes medibles. Es uno de los escasos conceptos matemáticos ampliamente difundido en la población. Esto se debe a que es en buena medida intuitiva y de uso muy común.

La proporcionalidad es un concepto básico en las matemáticas y es un tema de gran importancia, debido a que guarda relación con la mayor parte de los contenidos matemáticos y con las de otras áreas de la ciencia como las ciencias económicas, ciencias naturales, etc. También desempeña un papel importante en la industria y la agricultura, por ejemplo para relacionar la producción y el consumo que se obtiene de ellas.

Magnitudes Proporcionales

MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES (DP):

Dos magnitudes serán directamente proporcionales si al aumentar o disminuir los valores de una de ellas, entonces los valores correspondientes de la otra magnitud también aumentan o disminuyen en la misma proporción.

$$A \text{ DP } B \quad \boxed{\leftrightarrow} \quad \frac{\text{Valor Magnitud A}}{\text{Valor Magnitud B}} = k$$

Ejemplo:

Si el costo de dos polos es de S/ 70, veamos la relación que existe entre las magnitudes Cantidad de Polos y Costo:

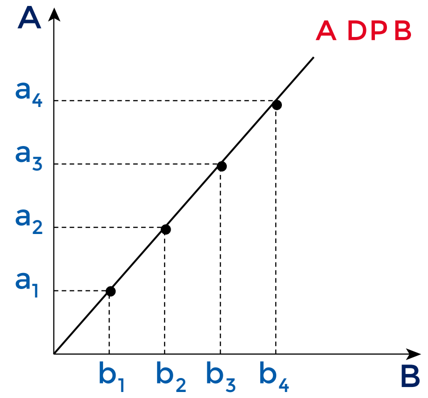
Cantidad de Polos	2	4	12	36	3
Costo	S/ 70	S/ 140	S/ 420	S/ 1260	S/ 105

De la información anterior podemos calcular el valor de cada Polo:

$$\frac{\text{Costo}}{\text{Cantidad de Polos}} = \frac{70}{2} = \frac{140}{4} = \frac{420}{12} = \frac{1260}{36} = \frac{105}{3} = 35$$

Observación:

La gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es un conjunto de puntos que están contenidos sobre una misma recta que pasa por el origen de coordenadas.



MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES (IP):

Dos magnitudes serán inversamente proporcionales si al aumentar o disminuir los valores de una de ellas, entonces los valores correspondientes de la otra magnitud disminuyen o aumentan en la misma proporción.

$$A \text{ IP } B \quad \boxed{\leftrightarrow} \quad \text{Valor } A \times \text{Valor } B = k$$

Ejemplo:

Si dos obreros pintan una casa en 12 días, la relación que existe entre las magnitudes número de obreros y el número de días será:

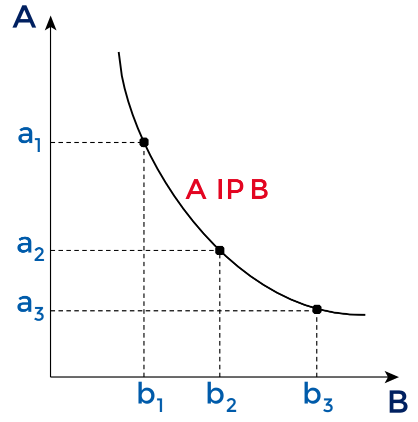
# Obreros	2	4	12	3	6
# Días	12	6	2	8	4

De la información anterior se tiene:

$$\#\text{ Obreros} \times \#\text{ Días} = 2\times12 = 4\times6 = 12\times2 = 3\times8 = 6\times4 = 24$$

Observación:

La gráfica de dos magnitudes inversamente proporcionales es un conjunto de puntos que están contenidos sobre una rama de una hipérbola equilátera.



Propiedades:

1. A DP B $\leftrightarrow$ B DP A

   A IP B $\leftrightarrow$ B IP A

2. A DP B $\leftrightarrow$ A IP 1/B

   A IP B $\leftrightarrow$ A DP 1/B

3. A DP B $\leftrightarrow$ A^m DP B^m $m \in \mathbb{Q}$ y $m \neq 0$

   A IP B $\leftrightarrow$ A^n IP B^n $n \in \mathbb{Q}$ y $n \neq 0$

4. Si se cumple que
   A DP B (cuando C no varía)
   A IP C (cuando B no varía)

   Entonces:

$$\frac{A \times C}{B} = k$$

Ejemplo:

Para tres magnitudes, A; B y C, se cumple

- A DP $\sqrt{B}$ (C es constante)
- A IP C (B es constante)

Calcule m + n a partir del siguiente cuadro:

A	48	72	6
B	25	n	64
C	m	12	192

Resolución:

$$\frac{A \times C}{\sqrt{B}} = k$$

$\star \; \dfrac{\overset{3}{\cancel{48}} \times m}{\underset{5}{\cancel{\sqrt{25}}}} = \dfrac{6 \times \overset{4}{\cancel{192}}}{\underset{8}{\cancel{\sqrt{64}}}}$ $\star \; \dfrac{\overset{6}{\cancel{72}} \times \cancel{12}}{\sqrt{n}} = \dfrac{\overset{2}{\cancel{6}} \times \overset{16}{\cancel{192}}}{\underset{8}{\cancel{\sqrt{64}}}}$

$\rightarrow$ m = 15 $\rightarrow$ n = 36

$\therefore$ m+n = 51

1. Se sabe que A es DP a $\sqrt{B}$ e IP a C^2. Si A=3 cuando B=16 y C=8, halle el valor de B cuando A=6 y C=4.

A) 2 ~~B)~~ 4 C) 8
D) 3 E) 6

Resolución:

★ A es DP a $\sqrt{B}$
★ A es IP a C^2

$$\frac{A \times C^2}{\sqrt{B}} = k$$

$$\rightarrow \quad \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \overset{\overset{1}{\cancel{4}}}{\cancel{8^2}}}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{16}}}} = \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \times \overset{1}{\cancel{4^2}}}{\sqrt{B}}$$

$$\rightarrow \quad \sqrt{B} = 2$$

$$\therefore \quad \boxed{B = 4}$$

2. Se sabe que una magnitud A es IP a B^2. Halle el valor de A sabiendo que si disminuye en 36 unidades, el valor de B varía en un 25 %.

A) 106 B) 108 C) 200
D) 360 ~~E)~~ 100

Resolución:

A es IP a B^2 $\Big\}$ $A \times B^2 = k$

$\rightarrow A \times B^2 = (A-38) \times (B+25\,\%)^2$

$\rightarrow A \times B^2 = (A-38) \times (125\,\%B)^2$

$\rightarrow A \times B^2 = (A-38) \times (\overset{5}{\cancel{125}}\,\underset{4}{\cancel{\%}}B)^2$

$\rightarrow A \times \cancel{B^2} = (A-38) \times \dfrac{25\cancel{B^2}}{16}$

$16A = 25A - 38 \times 25$

$\overset{4}{\cancel{38}} \times 25 = \overset{1}{\cancel{9}}A$

$\therefore$ $\boxed{A = 100}$

3. El costo de un cuaderno varía en forma DP al número de hojas que tiene e IP al cuadrado del número de cuadernos que se producen; y el precio de venta de c/u es los 17/12 de su costo. Si cuando se producen 15 cuader- nos de 100 hojas su precio de venta es S/ 680, ¿cuántas hojas tienen los 30 cuadernos que se produjeron y que luego se vendieron en S/ 255?

A) 110 B) 120 C) 130
D) 140 ~~E)~~ 150

Resolución:

★ Costo: Pc ★ #Cuadernos: C
★ #Hojas: H ★ Precio venta: Pv

→ • Pc es DP a H
• Pc es IP a C^2

$$\frac{Pc \times C^2}{H} = k \quad ...(1)$$

• $Pv = \frac{17}{12} Pc \rightarrow Pc = \frac{12}{17} Pv \quad ...(2)$

(2) en (1): $\frac{12Pv \times C^2}{17H} = k \rightarrow \frac{Pv \times C^2}{H} = k$

Luego: $\frac{\cancel{680}^{\cancel{40}\,10} \times \cancel{15^2}}{\cancel{100}} = \frac{\cancel{255}^{15} \times \cancel{30^2}^{\cancel{4}}}{H}$

$\therefore$ $\boxed{H = 150}$

4. En el recorrido de un taxi se observa que el cuadrado del tiempo de permanencia del chofer en el auto varía en forma DP al consumo de gasolina e IP a la velocidad, y la velocidad varía en forma IP al peso del pasajero. Para un pasajero robusto consume 4 galones de gasolina en un recorrido que dura 8 horas. ¿Cuántos galones de gasolina se consumirán en un viaje que dura 1/4 de día en otro pasajero cuyo peso es los 3/4 del anterior?

~~A)~~ 3 B) 4 C) 6

D) 8 E) 12

Resolución:

- Tiempo: T
- Velocidad: V
- Gasolina: G
- Peso: P

→ • T^2 es DP a G
• T^2 es IP a V
$\Rightarrow \frac{T^2 \times V}{G} = k_1$

• V es IP a P → $V \times P = k_2$

÷

$$\rightarrow \frac{\frac{T^2 \times \cancel{V}}{G}}{\cancel{V} \times P} = \frac{k_1}{k_2} \rightarrow \frac{T^2}{G \times P} = k$$

Luego:

$$\frac{\cancel{8}^{2}}{\cancel{4} \times \cancel{4P}} = \frac{\cancel{6}^{2}}{G \times \cancel{3P}}$$

$\therefore$ $\boxed{G = 3}$

5. Se sabe que la cantidad de trabajo hecho por un obrero en una hora varía en razón directa a su salario por hora y directamente proporcional a la raíz cuadrada del número de horas que trabaja. Si puede terminar una pieza en 6 días cuando trabaja 9 horas diarias. ¿Cuántos días tardará en terminar la misma pieza cuando trabaja 16 horas diarias a S/ 15 por hora, sabiendo que en el primer caso ganaba S/ 10 por hora?

A) 1　　B) 1,5　　C) 2
D) 2,5　　E) 3

Resolución:

- ★ Cantidad de trabajo: C
- ★ Salario por hora: S
- ★ # de horas de trabajo: H

- C es DP a S
- C es DP a $\sqrt{H}$

$$\frac{C}{S\times\sqrt{H}} = k$$

Luego:

$$\frac{\cancel{C}}{\underset{2}{\cancel{10}}\times\sqrt{6\times9}} = \frac{\cancel{C}}{\underset{3}{\cancel{15}}\times\sqrt{16d}}$$

Elevando al $\square$:

$$\cancel{4}\times\overset{3}{\cancel{6}}\times\cancel{9} = \cancel{9}\times\overset{\cancel{4}\;2}{\cancel{16}}d$$

$\therefore$ $\boxed{d = 1,5}$

6. Una rueda A de 90 dientes engranada en otra B de 18 dientes. Fija al eje de esta va montada una rueda C de 114 dientes que engrana con otra D de 19 dientes. Se pregunta: ¿Cuántas R.P.M. habrá dado la rueda D cuando A haya dado 245 R.P.M.?

A) 7350 B) 7375 C) 7400
D) 7425 E) 7450

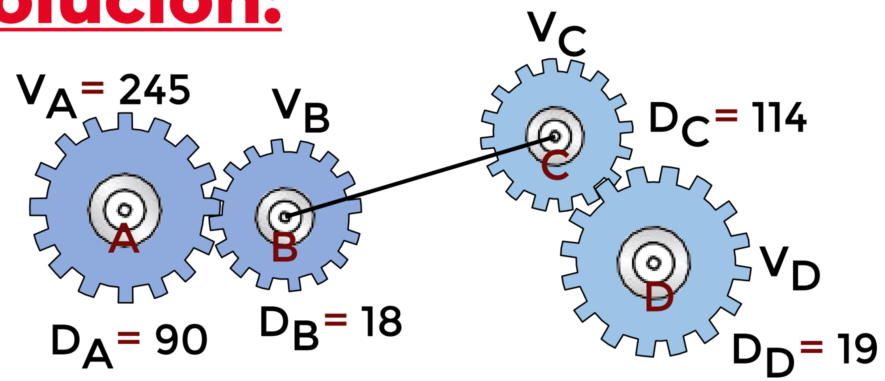
★ Ruedas engranadas:

$$\boxed{(\#\text{Vueltas})\times(\#\text{ Dientes})=k}$$

★ Ruedas con un mismo eje:

$$\boxed{\#\text{Vueltas de las ruedas son iguales}}$$

Resolución:



★ Para las ruedas A y B:

$$V_A \times D_A = V_B \times D_B$$

★ Para las ruedas C y D: ×

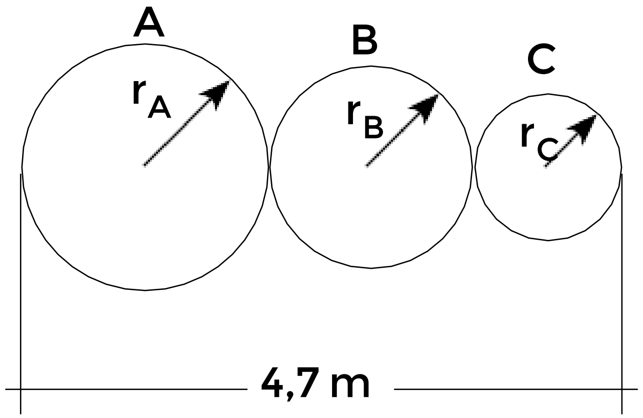
$$V_C \times D_C = V_D \times D_D$$

$$V_A \times D_A \times \cancel{V_C} \times D_C = \cancel{V_B} \times D_B \times V_D \times D_D$$

$$\rightarrow \quad 245 \times \cancel{90}^{5} \times \cancel{114}^{6} = \cancel{18}^{1} \times \cancel{19}^{1} \times V_D$$

$$\therefore \quad \boxed{V_D = 7350}$$

7. En la figura, ¿qué diámetro debe tener B si se sabe que cuando C da 10 vueltas, B da 8 y A da 6?



A) 2 m ~~B)~~ 1,5 m C) 1,2 m
D) 2,7 m E) 1,8 m

Resolución:

Se cumple que:

$$\boxed{\#\text{Vueltas es IP Radio}}$$

De la figura:

$$V_A \times R_A = V_B \times R_B = V_C \times R_C$$

$$\rightarrow \quad \cancel{6}^{3} \times R_A = \cancel{8}^{4} \times R_B = 1\cancel{0}^{5} \times R_C$$

mcm(3; 4; 5)=60; → Dividimos ÷ 60

$$\frac{R_A}{20} = \frac{R_B}{15} = \frac{R_C}{12} \rightarrow \frac{2.R_A}{2.20} = \frac{2.R_B}{2.15} = \frac{2.R_C}{2.12}$$

$$\frac{2R_A + 2R_B + 2R_C}{40+30+24} = \frac{2R_B}{30} \rightarrow \frac{4,7}{94} = \frac{2R_B}{30}$$

$$\therefore \boxed{2R_B = 1,5}$$

8. En una empresa, el sueldo es directamente proporcional a la edad y a los años de servicio del empleado e inversamente proporcional al cuadrado de la categoría. María, empleada de segunda categoría, con 10 años de servicio en la empresa y de 56 años de edad gana S/ 200. Alejandra entró 3 años después que María, gana S/ 50 y es empleada de tercera categoría. ¿Quién es la mayor y por cuántos años?

A) ~~María por 11 años~~
B) Alejandra por 11 años
C) María por 12 años
D) Alejandra por 12 años
E) María por 13 años

Resolución:

- Sueldo: S
- Años de Servicio: A
- Edad: E
- Categoría: C

- S es DP a E
- S es DP a A
- S es IP a C^2

$$\frac{S \times C^2}{E \times A} = k$$

Luego:

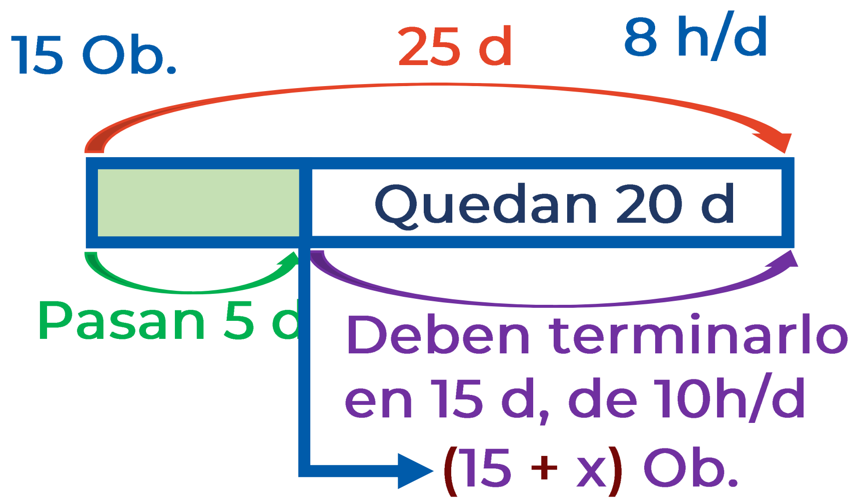
$$\frac{\cancel{200} \times \cancel{2^2}}{\cancel{56} \times \cancel{10}} = \frac{\cancel{50} \times 3^2}{E_A \times \cancel{7}} \rightarrow E_A = 45$$

∴ $\boxed{\text{María por 11 años}}$

9. 15 obreros se comprometieron a realizar una obra en 25 días trabajando 8 horas diarias; al cabo del quinto día se les pidió que entreguen la obra 5 días antes de lo pactado, razón por la cual se decide trabajar 10 horas diarias y contratar más obreros. ¿Cuántos fueron estos?

A) 16 ~~B)~~ 1 C) 4
D) 5 E) 12

Resolución:



Para la parte no sombreada:

(Obreros)(Días)(H/d) = k

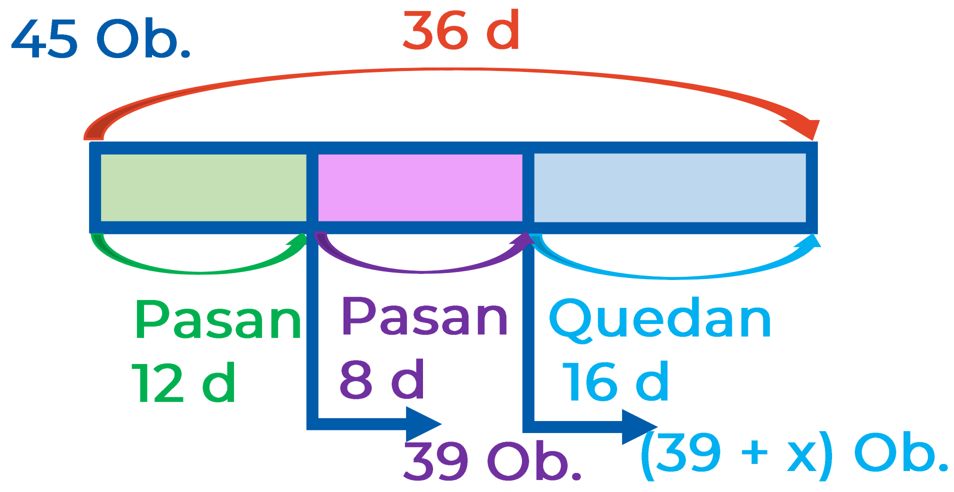
$$\rightarrow \quad (\overset{1}{\cancel{15}})(\overset{2}{\cancel{20}})(8) = (15 + x)(\overset{1}{\cancel{15}})(\overset{1}{\cancel{10}})$$

$$\therefore \quad \boxed{x = 1}$$

10. Se ha estimado que 45 obreros pueden concluir una obra en 36 días. Pasado 12 días se accidentaron 6 de ellos y no pudieron continuar laborando. Ocho días más tarde, se tuvo que contratar otros obreros y así entregar la obra en la fecha establecida. ¿Cuántos obreros se contrataron sabiendo que son de la misma eficiencia que los accidentados?

A) 6 ~~B)~~ 9 C) 7
D) 10 E) 11

Resolución:



De la fig.:

$$(\text{Obreros})(\text{Días}) = k$$

$$(45)(36) = (45)(12)+(39)(8)+(39+x)(16)$$

$$(24)(45) = (39)(8)+(39)(16) + 16x$$

$$(24)(45) - (24)(39)=16x \rightarrow 144=16x$$

$$\therefore \boxed{x = 9}$$