MOTIVACION

Polinomio

Se denomina así a una expresión algebraica racional entera.

Ejemplos

$$P(x) = 3x^4 + 2x^3 - x^2 + 8x + 10$$

$$Q(x;y) = 5xy^3 + 10x$$

$$R(x;y;z) = 2zy^4 + 2x^3 - xy^2 + 8xz + z$$

Todo polinomio puede constar de uno o más monomios

TEMA2: POLINOMIOS

Es una expresion Algebraica Racional Entera, es decir, los exponentes de sus variables son enteros no negativos; aceptan uno o mas de términos:

Nombre del Polinomio

EXPONENTES
enteros no negativos

$$F(x;y) = -10x^{125}y^{233} + 28\,x^{35} - 92y^{233}$$

coeficientes

variables

TEORIA

Según el número de términos:

Número de términos	*Denominación*	*Ejemplo*
1	*Monomio*	$-x^5y^{233}$
2	*Binomio*	$a + bcd$
3	*Trinomio*	$x^4 + y^4 + z^4$
4	*Tetranomio*	$a_1x + a_2y + a_3z + a_4w$
. . .	. . .	. . .

$\underline{Polinomio\ en\ \ una\ variable:}$ $generalmente\ "x"$

$$\boldsymbol{P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k\,;} \qquad \boldsymbol{con:\ x^0 = 1}$$

$expandiendo:$ $\qquad a_k\ \ son\ los\ coeficientes \qquad ;\, a_n \neq 0$

$$\boldsymbol{P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n}$$

$donde:$

$x\ \ es\ la\ variable$

$n\ \ es\ el\ grado$

$a_n\ es\ el\ coeficiente\ principal$

$a_0\ es\ el\ término\ indpendiente$

ALGEBRA

VERANO 2021

TEMA2:

POLINOMIOS

SACO OLIVEROS

Coeficiente principal

Grado 5

Término independiente

$$-5x^5 + 3x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 6x - \frac{1}{9}$$

Término principal

Término de grado 3

Término de grado 2

Término de grado 1

Según el grado:

Grado	Denominación	Forma General$(a \neq 0)$	ejemplo
0	***Constante***	$\boldsymbol{a}$	-7
1	***Lineal***	$\boldsymbol{ax+b}$	$2x+126$
2	***Cuadrático***	$\boldsymbol{ax^2+bx+c}$	$9x^2-2x-84$
3	***Cúbico***	$\boldsymbol{ax^3+bx^2+cx+d}$	$8x^3+10x^2+27$
. . .	. . .	. . .	. . .

$\underline{EJEMPLO}$: *Halle el valor de m, si el polinomio es cuadrático*

$$G(x) = (5m+10)x^2 + \underbrace{(3m+15)}x^3 + m + (2m-14)x$$

$$\mathbf{3m + 15 = 0} \Rightarrow \mathbf{m = -5}$$

Polinomio Mónico: ***Cuando el primer coeficiente es igual a uno***

tenemos: $P(x) = 8 + 5x + 1x^2$ $\quad ; G(x) = 6x + 1x^3 - 11$

$\underline{EJEMPLO}$: *Determine el valor de n, si el polinomio es mónico*

$$F(x) = (11-3n)x + (6n+15)x^3 + 3n + \underbrace{(2n-14)}x^4$$

$$\mathbf{2n - 14 = 1} \Rightarrow \mathbf{n = \frac{15}{2}}$$

$\underline{Valor\ Numérico}$:

De una expresión en R, es el número que resulta al intercambiar las variables por valores, según el Conjunto de Valores Admisibles (CVA) de la expresión; para polinomios el CVA son los Reales; y luego efectuar las operaciones que se indican.

Para los ejercicios tenemos dos casos:

CASO 1: $\underline{De\ P(x)\ a\ P(número)}$ *Reemplazo directo*

Ejemplo: *tenemos* $F(x) = x^3 - 4x^2 + 15$ *Halle el valor de* $F(2)$

$$F(\mathbf{2}) = (\mathbf{2})^3 - 5(\mathbf{2})^2 + 15$$

$$= 8 - 20 + 15$$

$$F(2) = 3$$

$CASO\ 2$: <u>$De\ P(f(x))\ a\ P(número)$</u> $Primero\ una\ ecuación$

$Ejemplo$: $tenemos\ \ H(13-2x)=x^4-600$ $Halle\ el\ valor\ de\ H(3)$

$\mathbf{13-2x=3}$

$\boldsymbol{x=5}$

$H\big(13-2(5)\big)=(5)^4-600$

$\boldsymbol{H(3)=625-600\ =25}$

<u>$Observaciones$:</u>

$Como$ $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n$

$P(1)=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$$\boxed{P(1)=Suma\ de\ Coeficientes}$$

$P(0)=a_0+0+0+0+\cdots+0$

$$\boxed{P(0)=Término\ Independiente}$$

$\underline{Cambio\ de\ Variable}$:

$Es\ un\ proceso\ de\ transformación\ de\ una\ expresion, intercambiando\ sus\ variables$
$originales\ por\ otras\ en\ otra$

$Para\ los\ ejercicios\ tenemos\ tres\ casos$:

$CASO\ 1$: $\underline{De\ P(x)\ a\ P(f(x))}$ $Reemplazo\ directo$

$Ejemplo$: $tenemos$ $P(x) = 5x - 3$ $Hallemos\ P(-x) + P(2x)$

$$\boldsymbol{P(-x) = 5(-x) - 3 = -5x - 3}$$
$$\boldsymbol{P(2x) = 5(2x) - 3 = 10x - 3}$$

$$\boldsymbol{P(-x) + P(2x) = 5x - 6}$$

$CASO\ 2$: $\underline{De\ P(f(x))\ a\ P(x)}$ $\quad$ $Primero\ una\ ecuación$ $\quad$ $f(x) = y$

$Ejemplo$: $\quad$ $tenemos$ $\quad$ $R(x+3) = 4x - 1$ $\quad$ $Hallemos\ R(x)$

$\boldsymbol{x + 3 = y}$

$\boldsymbol{x = y - 3}$

$$R(\boldsymbol{y - 3} + 3) = 4(\boldsymbol{y - 3}) - 1$$

$$R(y) = 4y - 13$$

$$R(x) = 4x - 13$$

$CASO\ 3$: $\underline{De\ P(f(x))\ a\ P(g(x))}$ $\quad$ $la\ ecuación$ $\quad$ $f(x) = g(y)$

$Ejemplo$:

$$tenemos\ P(x+3) = 2x+4 \qquad Hallemos: P(5x-1)$$

$$\boldsymbol{x+3 = 5y-1}$$

$$\boldsymbol{x = 5y-4}$$

$$P(\boldsymbol{5y-4}+3) = 2(\boldsymbol{5y-4})+4$$

$$P(5y-1) = 10y-4$$

$$P(5x-1) = 10x-4$$

$Nota$:

Existen otras técnicas para efectuar el Valor Numérico y el Cambio de Variable como lo es la Regla de Ruffini, que se analizara luego

PRACTICA DE CLASE

PROBLEMA $\boxed{1}$

$$Si\ se\ cumple\ que\colon\ P(x)+P(x+1)=x^3+3x-2.\ Calcule\ P(4)-P(2)$$

$A)16$ $\quad B)20$ $\quad C)22$ $\quad D)24$

Resolución: *Evaluamos la expresion*

$para\colon x=3$

$$P(\mathbf{3})+P(\mathbf{3}+1)=(\mathbf{3})^3+3(\mathbf{3})-2$$

$para\colon x=2$

$$P(\mathbf{2})+P(\mathbf{2}+1)=(\mathbf{2})^3+3(\mathbf{2})-2$$

$tenemos\colon$

$$\cancel{P(3)}+P(4)=34$$
$$P(2)+\cancel{P(3)}=14$$

$$\boldsymbol{P(4)-P(2)=20}$$

PROBLEMA $\boxed{2}$

$$Dado\ el\ polinomio: P(x) = (2x-1)^2 - 4(x+3) + 2.$$

$$Determine\ el\ valor\ de\ P\left(P(P(3))\right)$$

$A)3$ $B)9$ $C)12$ $D)15$

Resolución:

Hallamos primero $P(3)$

$$P(\mathbf{3}) = (2(\mathbf{3}) - 1)^2 - 4(\mathbf{3}+3) + 2$$

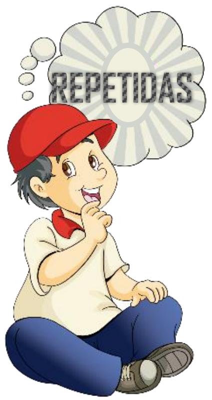
$$\boxed{P(3) = 3}$$

La expresion:

$$P\left(P(\boxed{P(3)})\right)$$

$$= P(\boxed{P(3)})$$

$$= P(3)$$



$$\boldsymbol{P\left(P(P(3))\right) = 3}$$

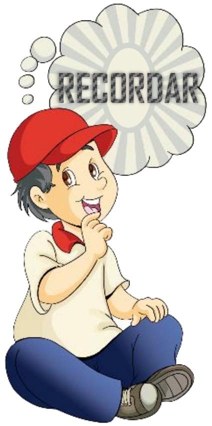
PROBLEMA 3

Sabiendo que: $H(x) = x^2 + 1$, *además*: $H(x+5) + H(x-4) = ax^2 + bx + c$.

Indique el valor de $\dfrac{c+1}{a+b}$

$A)8 \qquad B)9 \qquad C)10 \qquad D)11$

Resolución:



$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

Hacemos cambio de variable:

x *por* $x+5$: $\quad H(\boldsymbol{x+5}) = (\boldsymbol{x+5})^2 + 1 = x^2 + 10x + 26$

x *por* $x-4$: $\quad H(\boldsymbol{x-4}) = (\boldsymbol{x-4})^2 + 1 = x^2 - 8x + 17$

Sumando: $\quad H(x+5) + H(x-4) = 2x^2 + 2x + 43$

$$\frac{c+1}{a+b} = \frac{\mathbf{43+1}}{\mathbf{2+2}}$$

$$\boxed{\frac{c+1}{a+b} = 11}$$

PROBLEMA 4

Dado el polinomio lineal: $P(x) = ax + b$, *además* $P(1) = 9$, *y* $P(3) = 13$.

Determine el valor de $P(b - a)$

$A)9$ $B)11$ $C)15$ $D)17$

Resolución: *Evaluamos*

para $x = 1$: $P(\mathbf{1}) = a(\mathbf{1}) + b \Rightarrow a + b = 9$

restamos

para $x = 3$: $P(\mathbf{3}) = a(\mathbf{3}) + b \Rightarrow 3a + b = 13$

$2a = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow b = 7$

Tenemos: $P(x) = 2x + 7$

Nos piden: $P(7 - 2) = P(5) = 10 + 7$

$\boldsymbol{P(b - a) = 17}$

PROBLEMA $\boxed{5}$

Sea un polinomio $P(x)$, *tal que*: $P(1-4x) = x^{98} - 3x^{74} + 5x^{41} - 2x^{15} + 6x + 8$

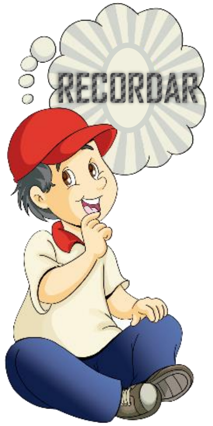
Halle el valor de $P(5)$

A) -7 B) -3 C) 1 D) 3

Resolución:

$(-1)^{PAR} = 1$

$(-1)^{IMPAR} = -1$



Una ecuación:

$1 - 4x = 5$

$\boxed{x = -1}$

Reemplazamos:

PAR PAR IMPAR IMPAR

$$P(1-4(-1)) = (-1)^{98} - 3(-1)^{74} + 5(-1)^{41} - 2(-1)^{15} + 6(-1) + 8$$

$$P(5) = 1 \quad -3 \quad -5 \quad +2 \quad +2$$

$$\boxed{P(5) = -3}$$

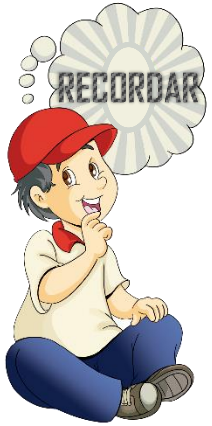
PROBLEMA 6

Sea un polinomio $P(x)$, *tal que*: $P(2x+7) = 2x^2 - 3x + 4$

Halle el valor de $P(12)$

$A)6 \qquad B)7 \qquad C)8 \qquad D)9$

Resolución:



Se realiza una ecuación:

Tenemos:

$$2x + 7 = 12$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Reemplazamos

$$P\left(2\left(\frac{5}{2}\right) + 7\right) = 2\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{5}{2}\right) + 4$$

$$P(12) = \frac{25}{2} - \frac{15}{2} + 4$$

$$\boldsymbol{P(12) = 9}$$

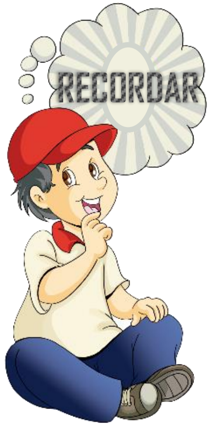
PROBLEMA $\boxed{7}$

$$Dado\ el\ polinomio\ mónico\ y\ lineal\ P(x) = (\overset{3}{a} - 3)x^2 + (\overset{8}{b} - 7)x + 2\overset{3}{a} - \overset{8}{b}$$

$$Determine\ P(b + P(a))$$

$A)8 \qquad B)7 \qquad C)9 \qquad D)10$

Resolución:



$\underline{Polinomio\ Lineal}$:

$De\ 1er.\ grado$

$\underline{Polinomio\ Mónico}$:

$De\ coeficiente\ principal\ uno$

$$a - 3 = 0 \qquad b - 7 = 1$$

$$a = 3 \qquad b = 8$$

$Entonces$:

$$\boxed{P(x) = x - 2}$$

$$P(b + P(a))$$

$$= P(8 + P(3))$$

$$= P(8 + 1)$$

$$= P(9) = 7$$

$$\boldsymbol{P(b + P(a)) = 7}$$

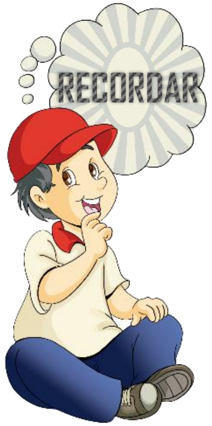
PROBLEMA 8

$$Sabiendo\ que\ f(x-2)=2x+1;\ además\ f\left(f\left(f(x)\right)\right)=ax+b.$$

$$Halle\ el\ valor\ de\ f(b-a)$$

$A)35 \qquad B)40 \qquad C)42 \qquad D)59$

Resolución:



Si:

$$F(x)=mx+n$$

Entonces:

$$\underbrace{F(\ldots F(F(x))\ldots)}_{\text{"k" veces}}$$

$$=m^k\,x+n\left(\frac{m^k-1}{m-1}\right)$$

Hacemos cambio de variable: x por $x+2$

$$f(x+2-2)=2(x+2)+1 \Rightarrow \boxed{f(x)=2x+5}$$

Aplicando la propiedad: $m=2$, $n=5$, $k=3$

$$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=(2)^{(3)}x+(5)\left(\frac{(2)^{(3)}-1}{(2)-1}\right)=ax+b$$

$a=8$

$b=35$

$$f(b-a)=f(27)=2(27)+5$$

$$\boldsymbol{f(b-a)=59}$$

PROBLEMA $\boxed{9}$

Sea $P(x) = x^3 + 5x^2 + 8$. *Pedro quiere comprar una radio que cuesta* $P(3)$*soles; sin embargo, solo ha podido ahorar* $P(2)$*soles. ¿Cuanto dinero, en soles, le falta para poder comprar la radio?*

A)32 B)36 C)40 D)44

Resolución:

Hallemos los valores numéricos:

$$P(\mathbf{3}) = (\mathbf{3})^3 + 5(\mathbf{3})^2 + 8$$

$$27 \quad +45 \quad +8 \ = 80$$

$$P(\mathbf{2}) = (\mathbf{2})^3 + 5(\mathbf{2})^2 + 8$$

$$8 \quad +20 \quad +8 \ = 36$$

Costo de la radio: $\boldsymbol{P(3) = 80}$

Dinero ahorrado: $\boldsymbol{P(2) = 36}$

Le falta: 44

PROBLEMA $\boxed{10}$

$Sea\ T(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 20.$ $La\ temperatura\ de\ hoy\ es\ T(2)\ grados\ Celsius; sin\ embargo, Senamhi\ ha\ pronosticado\ una\ temperatura\ de\ T(3) grados\ Celsius.$

$¿En\ cuántos\ grados\ Celsius\ se\ incrementará\ la\ tempertatura?$

$A)2$ B)4 C)6 D)8

Resolución:

$Hallamos\ los\ valores\ numéricos:$

$$T(\ \mathbf{2}) = (\mathbf{2}\ )^3 - 3(\ \mathbf{2})^2 + 4(\ \mathbf{2}) + 20$$

$$8 \qquad -12 \qquad +28$$

$$T(2) = 24$$

$$T(\ \mathbf{3}) = (\mathbf{3}\ )^3 - 3(\ \mathbf{3})^2 + 4(\ \mathbf{3}\ ) + 20$$

$$27 \qquad -27 \qquad +32$$

$$T(3) = 32$$

Temperatura de hoy: $\boldsymbol{T(2) = 24}$

Según Senamhi: $\boldsymbol{T(3) = 32}$

Incremento de 8