GEOMETRY

Chapter 4

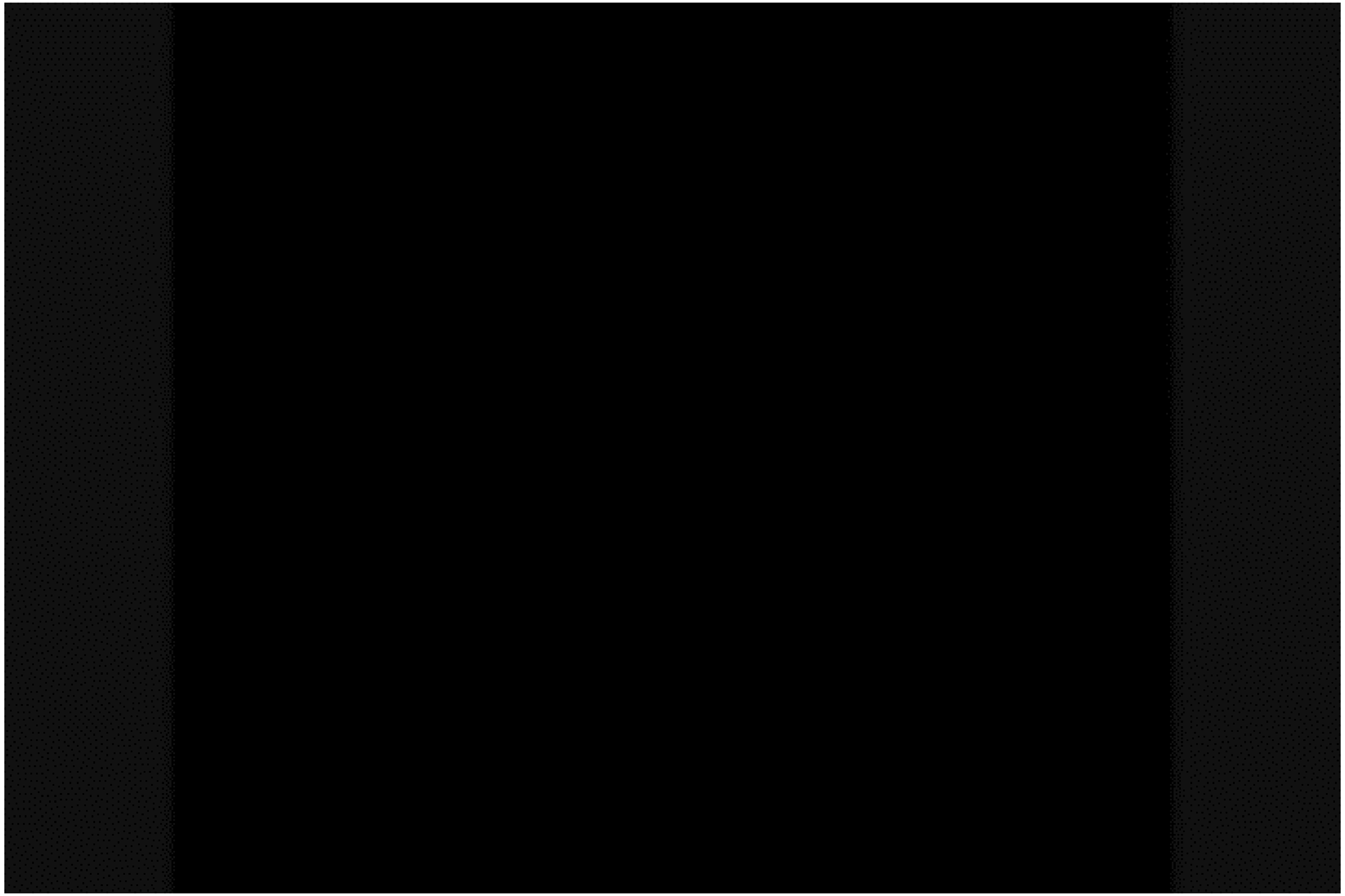
VERANO

SAN MARCOS 2021

CIRCUNFERENCIA

SACO OLIVEROS

MOTIVATING | STRATEGY



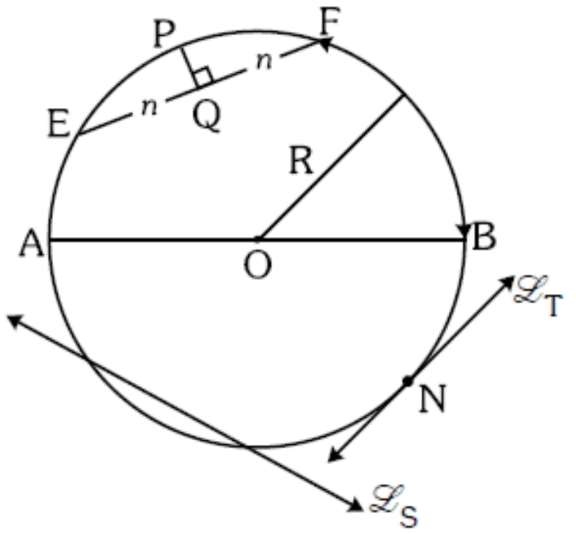
CIRCUNFERENCIA

Figura geométrica formada por un conjunto de infinitos puntos del plano que equidistan de otro punto fijo del mismo plano llamado centro.

Círculo

Parte del plano limitada por la circunferencia y los puntos de ella.

En la circunferencia se observan:



Centro: O

Radio: R

Cuerda: $\overline{EF}$

Diámetro: $\overline{AB}$

Flecha: $\overline{PQ}$

Arco: $\overset{\frown}{FB}$

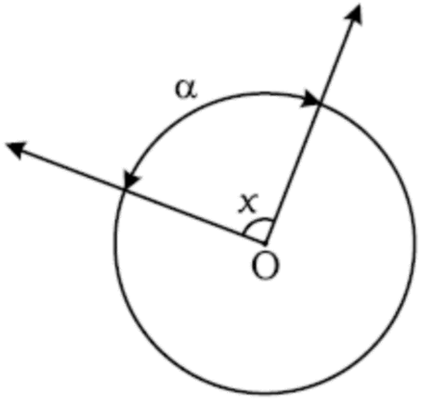
Recta secante: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_S}$

Recta tangente: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}_T}$

Punto de tangencia: N

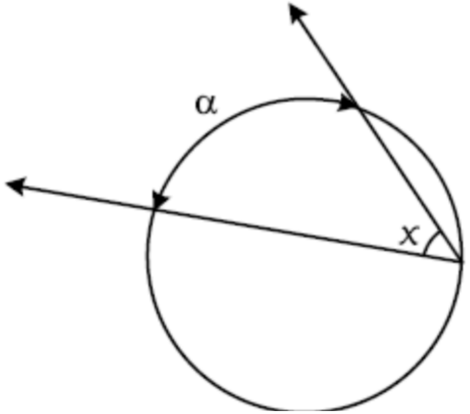
Ángulos relacionados con arcos de circunferencia

1. Ángulo central



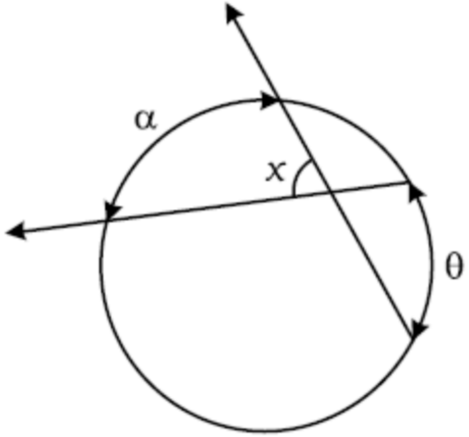
$$\boxed{x = \alpha}$$

2. Ángulo inscrito



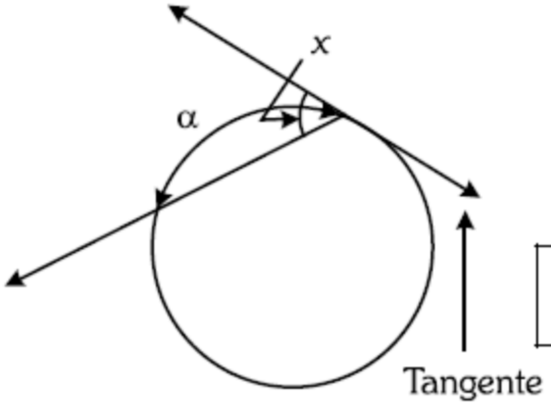
$$\boxed{x = \frac{\alpha}{2}}$$

3. Ángulo interior



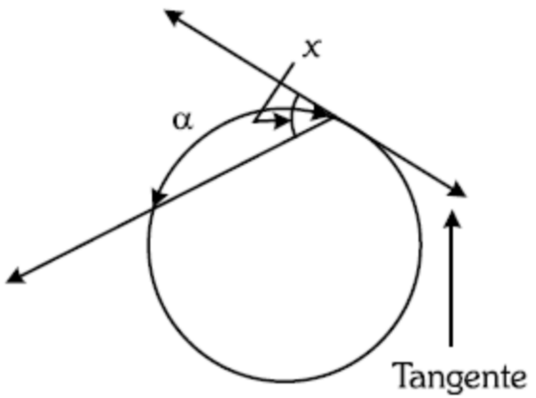
$$\boxed{x = \frac{\alpha + \theta}{2}}$$

4. Ángulo semiinscrito



$$\boxed{x = \frac{\alpha}{2}}$$

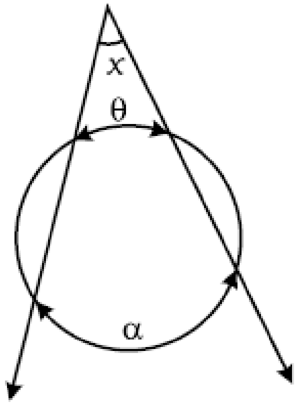
4. Ángulo semiinscrito



$$\boxed{x = \frac{\alpha}{2}}$$

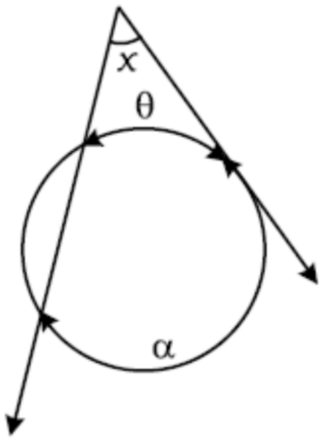
5. Ángulo exterior

a) Dos secantes



$$\boxed{x = \frac{\alpha - \theta}{2}}$$

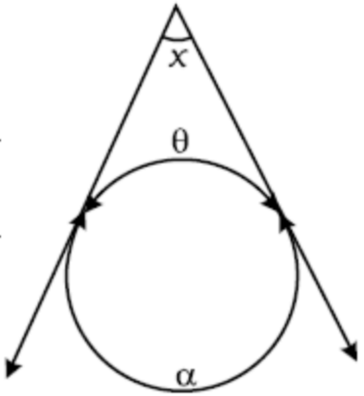
b) Tangente y secante



$$\boxed{x = \frac{\alpha - \theta}{2}}$$

c) Dos tangentes

$$\boxed{x = \frac{\alpha - \theta}{2}}$$



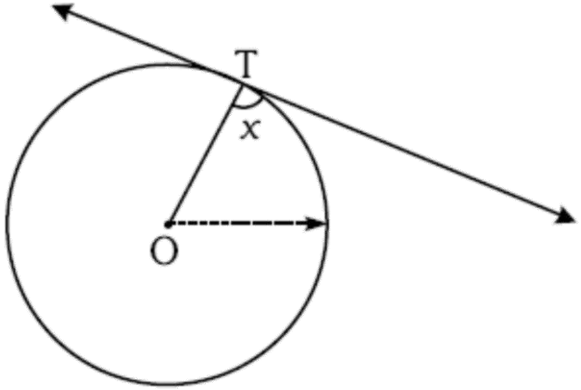
Además

$$\boxed{x + \theta = 180^\circ}$$

$$\boxed{\alpha + x = 180^\circ}$$

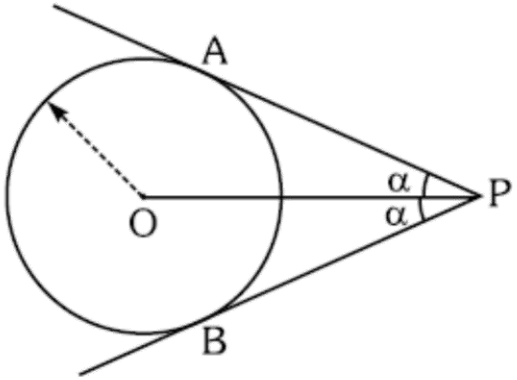
Teoremas

1. El radio trazado al punto de tangencia con una recta, es perpendicular a ella.



$$\boxed{x = 90^\circ}$$

2. Los segmentos tangentes trazados desde el mismo punto, son congruentes.

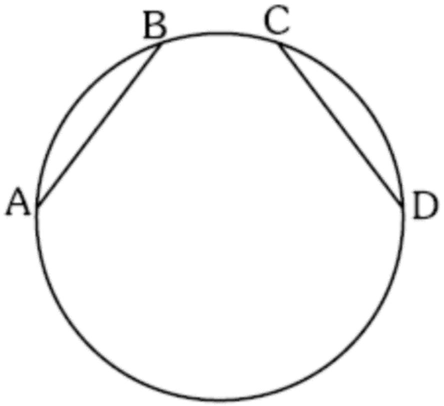


A y B: puntos de tangencia

$\overleftrightarrow{PO}$ biseca el $\measuredangle$ P

$$\boxed{PA = PB}$$

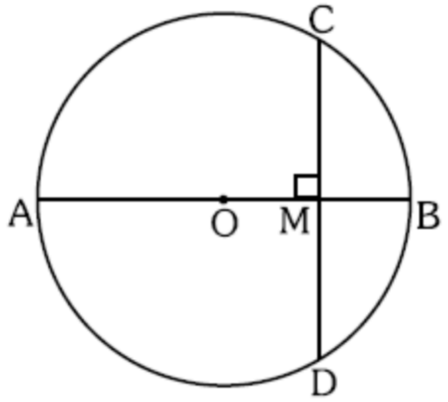
3. En la misma circunferencia, arcos congruentes subtienden cuerdas congruentes, y recíprocamente.



Si $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$

$\rightarrow$ $\boxed{\overline{AB} \cong \overline{CD}}$

4. Todo diámetro perpendicular a una cuerda, divide dicha cuerda y a los arcos, en partes congruentes.

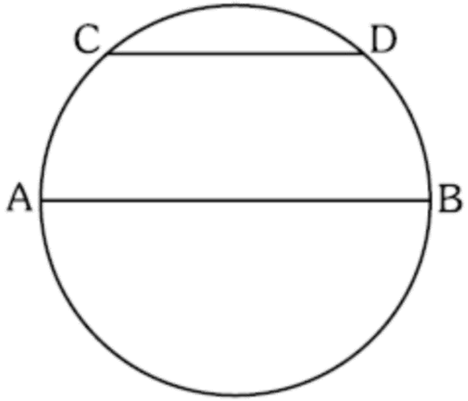


$\overline{AB}$: diámetro

Si $\overline{AB} \perp \overline{CD}$

$\rightarrow \boxed{\overline{CM} \cong \overline{MD} \quad \overset{\frown}{CB} \cong \overset{\frown}{BD}}$

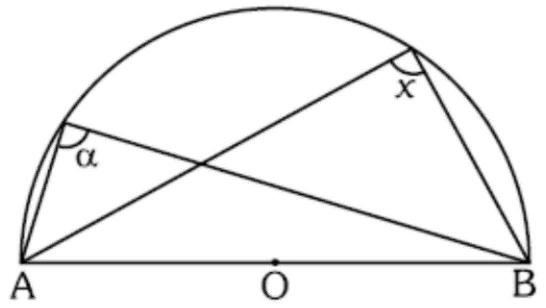
5. En la misma circunferencia, cuerdas paralelas determinan arcos congruentes.



Si $\overline{CD} // \overline{AB}$

$\rightarrow \boxed{\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BD}}$

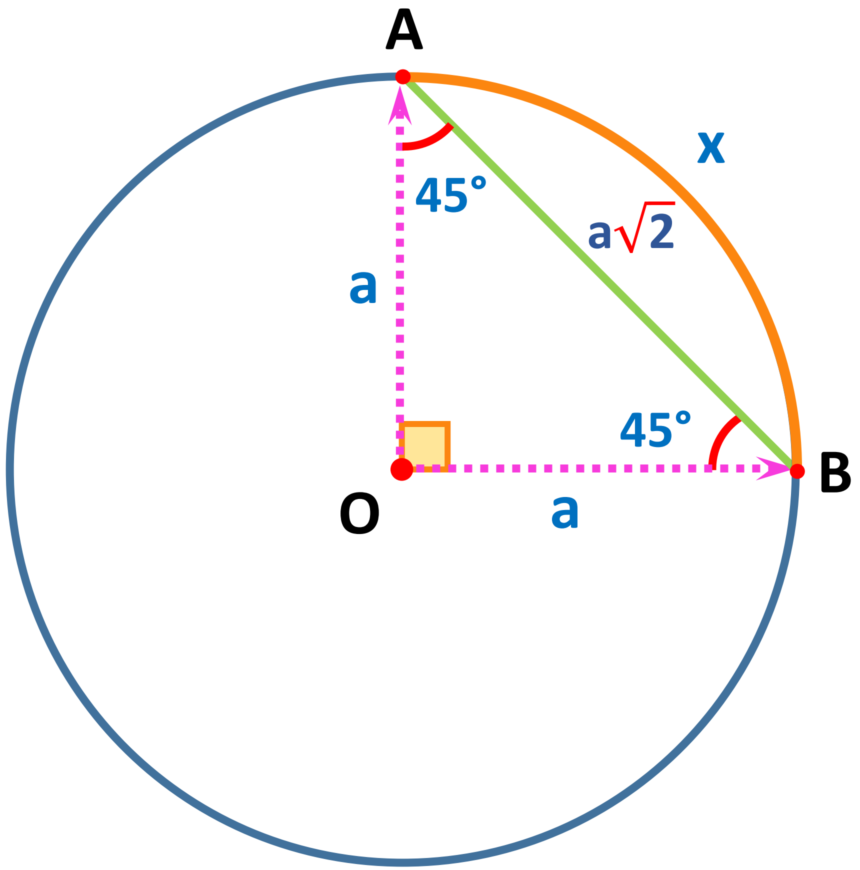
6. Los ángulos inscritos en cualquier semicircunferencia, son rectos.



Si $\overline{AB}$: diámetro

$\rightarrow \boxed{x = 90^\circ}$ y $\boxed{\alpha = 90^\circ}$

1. En la figura, O es centro. Halle m $\overset{\frown}{AB}$.



Resolución:

Piden: m $\overset{\frown}{AB}$ = x

Dato:

OA = OB = a

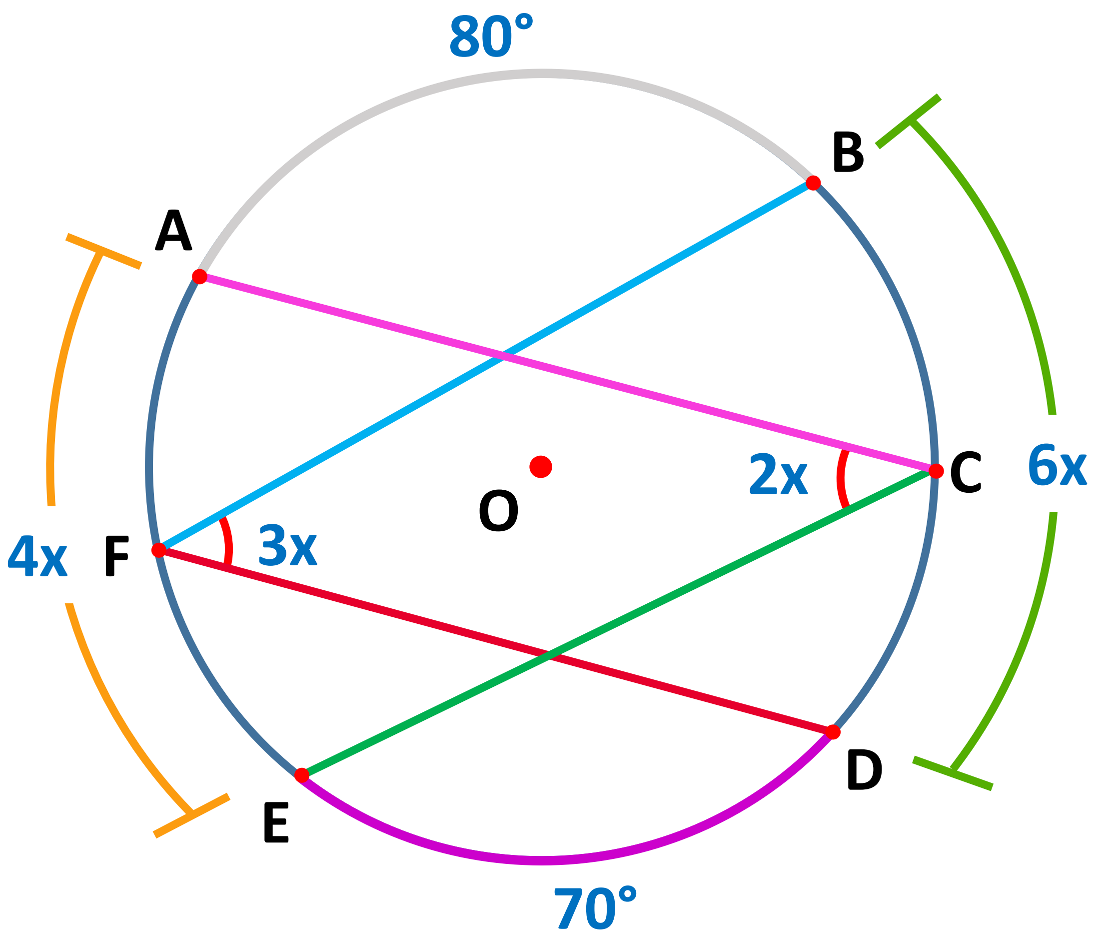
⊿ AOB notable de 45°

Entonces, por ángulo central

m∡AOB = m $\overset{\frown}{AB}$

$\therefore$ x = 90°

2. En la figura, halle el valor de x.



Resolución:

Piden el valor de x

Datos:

$m\measuredangle BFD \Rightarrow m\overset{\frown}{BCD} = 6x$

(ángulo inscrito)

$m\measuredangle ACE \Rightarrow m\overset{\frown}{AFE} = 4x$

(ángulo inscrito)

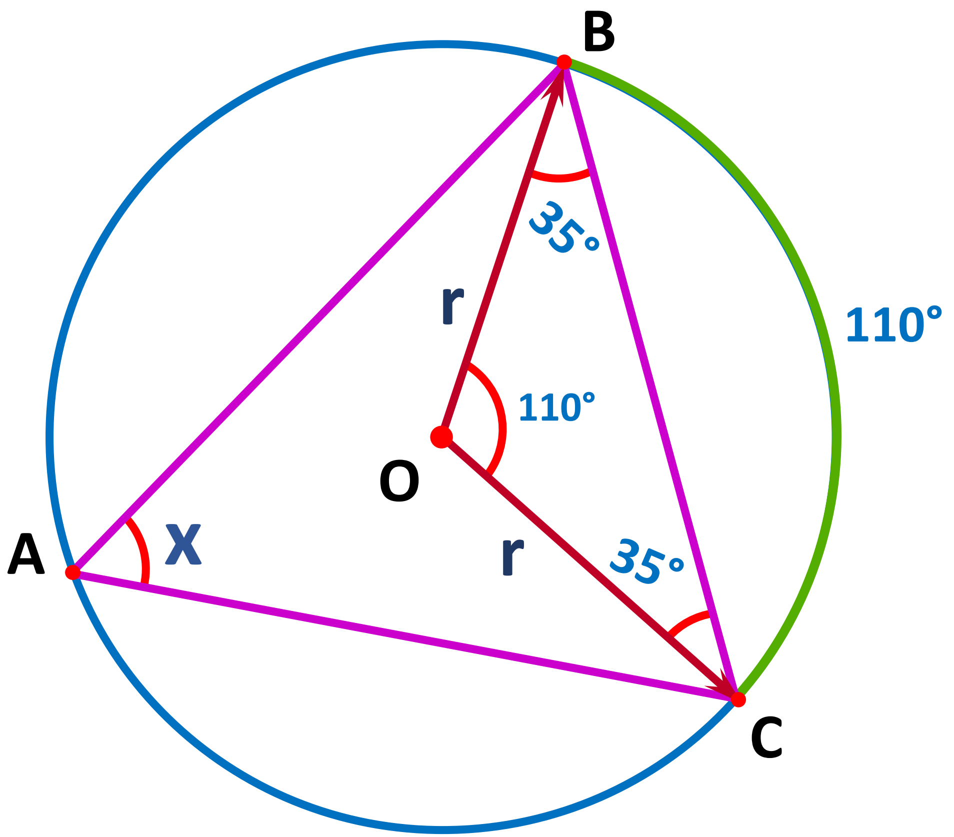
Del gráfico:

$$4x + 80° + 6x + 70° = 360°$$

$$21x = 210°$$

$$\therefore\ x = 21°$$

3. Se tiene un triángulo acutángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro O. Si m ∡ BCO = 35°, halle m ∡ BAC.



Resolución:

Piden m ∡ BAC

Donde OB y OC son los radios

Tal que: Δ BOC es isósceles

m∡BOC = 110° = m $\overset{\frown}{BC}$

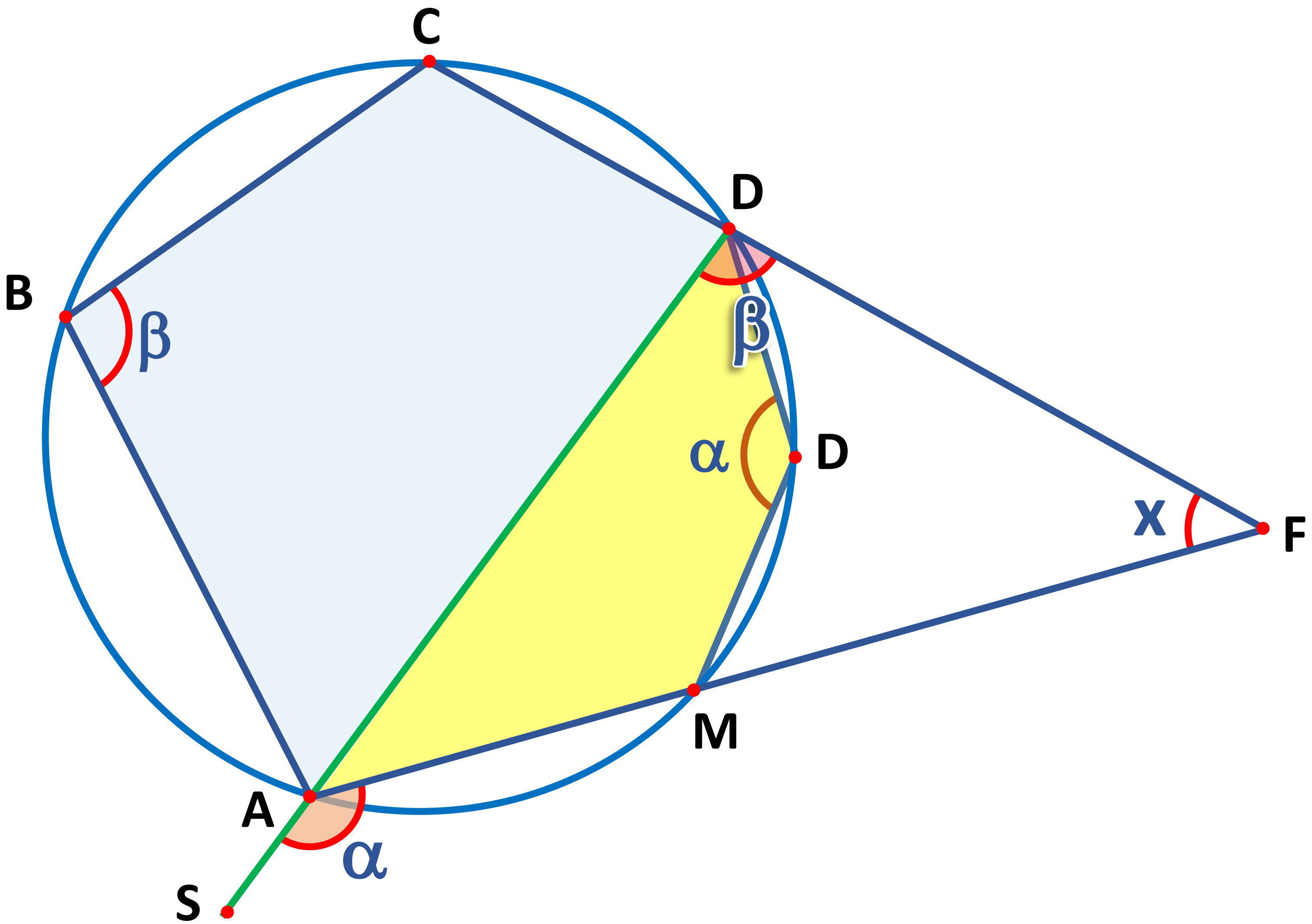
(ángulo central)

Entonces: m∡BAC es ángulo inscrito

$$m∡BAC = x = \frac{110°}{2}$$

.: m∡BAC = 55°

4. Halle el valor de x si $\alpha - \beta = 30°$.



Resolución:

Piden el valor de x

Dato: $\alpha - \beta = 30°$

* Se traza AD entonces los cuadriláteros ABCD y ADEM son inscritos.

$\Rightarrow m\measuredangle ADF = \beta$

$\Rightarrow m\measuredangle SAF = \alpha$

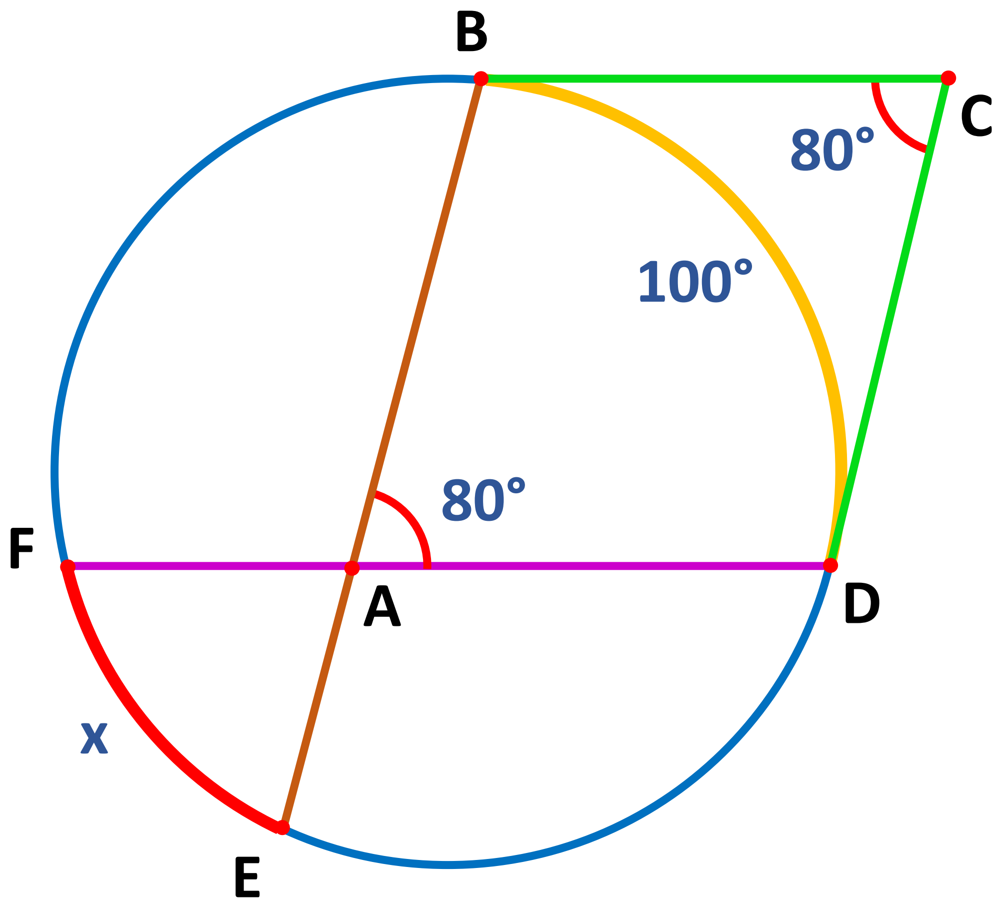
Luego: En Δ ADF

$$\alpha = \beta + x$$

$$\alpha - \beta = x$$

$$\therefore x = 30°$$

5. En la figura, B y D son puntos de tangencia y ABCD es un romboide. Halle el valor de x.



Resolución:

Piden el valor de x

$\Rightarrow m\measuredangle BCD = m\measuredangle BAD = 80°$

Siendo B y D puntos de tangencia

* Donde se cumple el teorema :

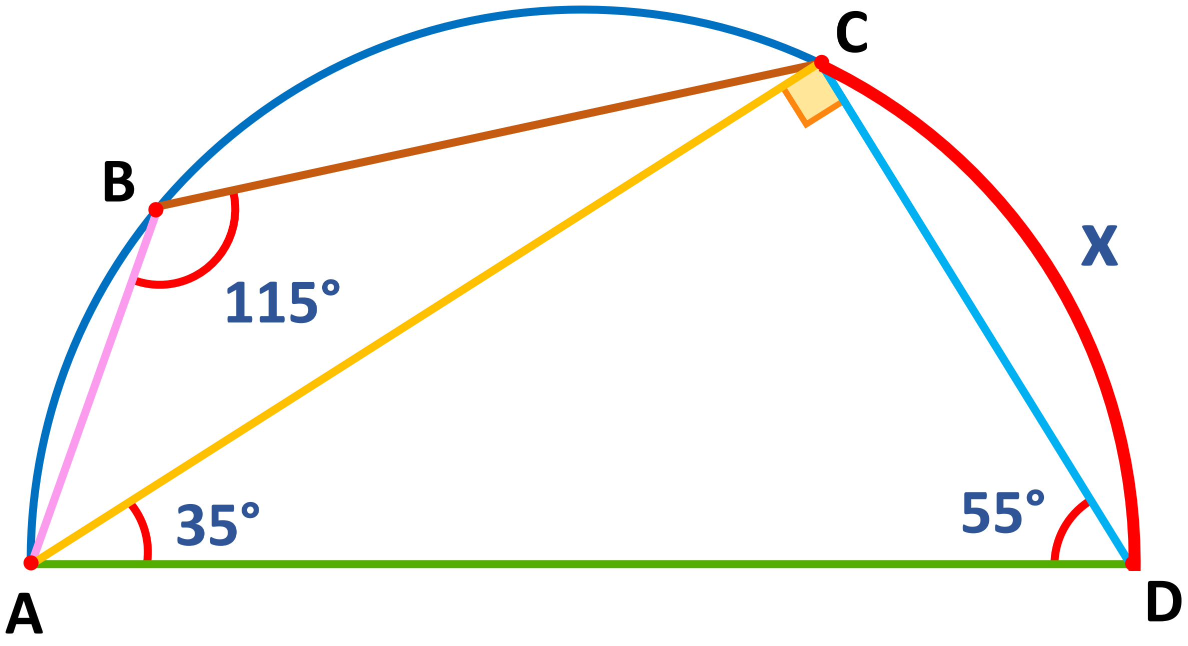
$80° + m\overset{\frown}{BD} = 180° \quad \Rightarrow m\overset{\frown}{BD} = 100°$

* Por teorema de ángulo interior

$$80° = \frac{x + 100°}{2}$$

$\therefore x = 60°$

6. En la figura, halle m $\overset{\frown}{CD}$ si $\overline{AC}$ es diámetro.



Resolución:

Piden el valor de m $\overset{\frown}{CD}$ = x

Se traza la diagonal $\overline{AC}$

Entonces: m∡ACD = 90°

En ⊿ACD:

m∡CAD + 55° = 90°

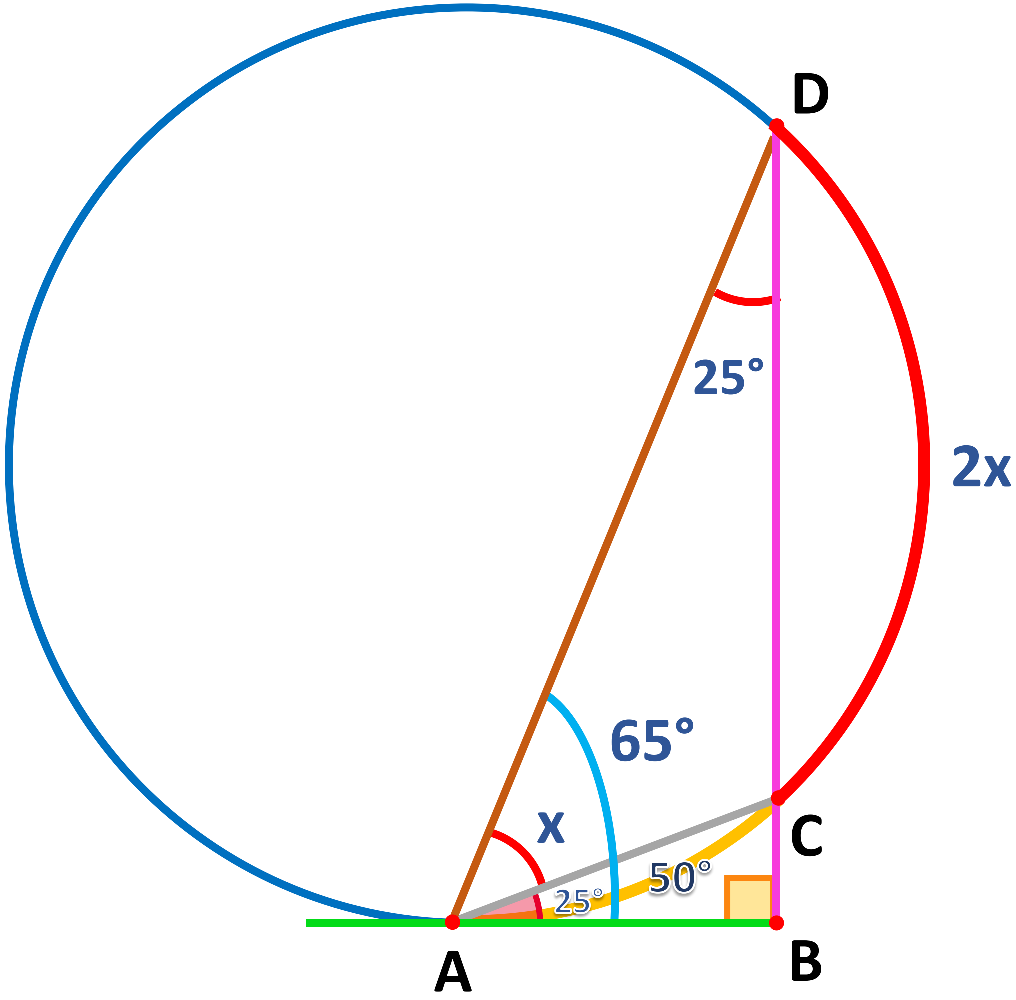
m∡CAD = 35°

Luego:

$$35° = \frac{x}{2}$$

$$\therefore\ m\overset{\frown}{CD} = 70°$$

7. En la figura, A es punto de tangencia. Halle m $\overset{\frown}{CD}$.



Resolución:

Piden: m $\overset{\frown}{CD}$ = 2x

Se traza AC

Donde el ∡ DAC es inscrito:

Si m∡ ADC= 25° ⇒ m $\overset{\frown}{AC}$ = 50°

Entonces: m ∡ DAB = 65°

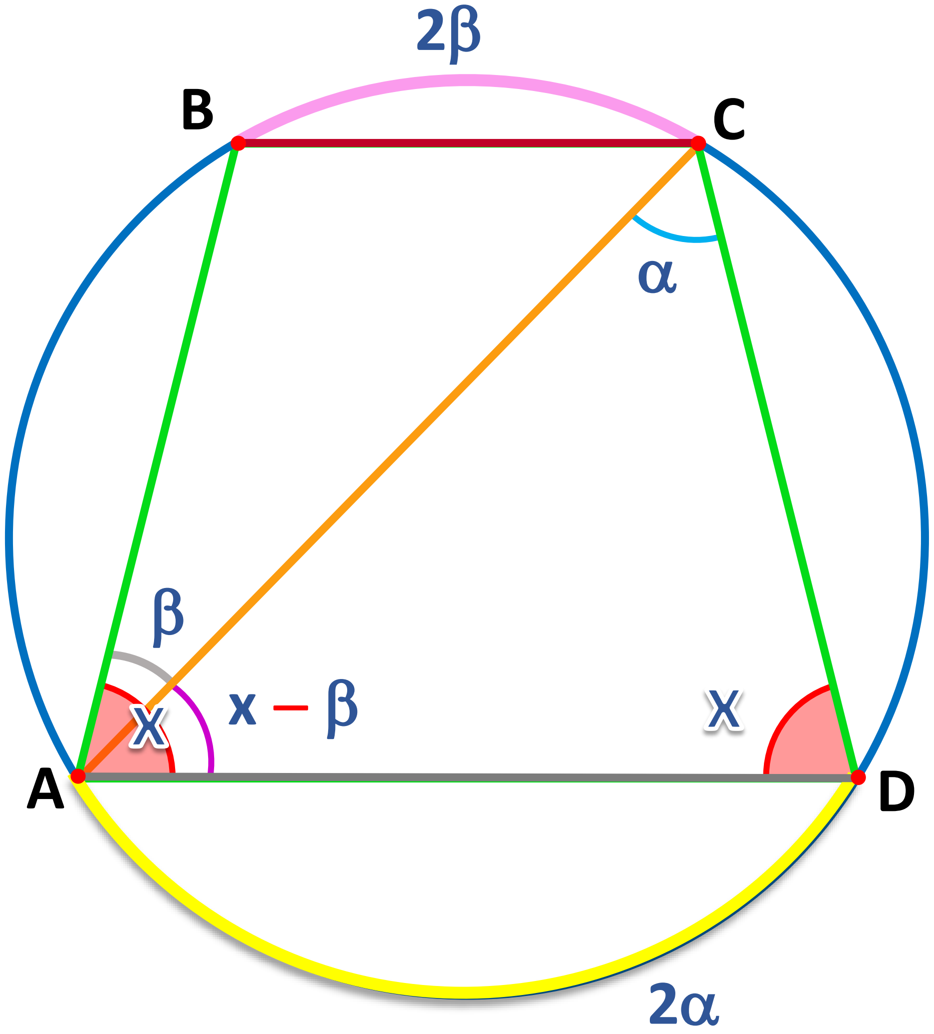
⇒ x + 25° = 65° ⇒ x = 40°

Luego:

m $\overset{\frown}{CD}$ = 2(40°)

∴ m $\overset{\frown}{CD}$ = 80°

8. Se tiene un trapecio ABCD inscrito en una circunferencia, tal que BC es la base menor. Si $m\overset{\frown}{AD} - m\overset{\frown}{BC} = 80°$, halle $m\measuredangle BAD$.



Resolución:

Piden $m\measuredangle BAD = x$

Dato : $m\overset{\frown}{AD} - m\overset{\frown}{BC} = 80°$

$2\alpha - 2\beta = 80° \Rightarrow \alpha - \beta = 40°$

* Siendo ⏢ABCD isósceles

$m\measuredangle BAD = m\measuredangle ADC = x$

* $m\measuredangle CAD = x - \beta°$

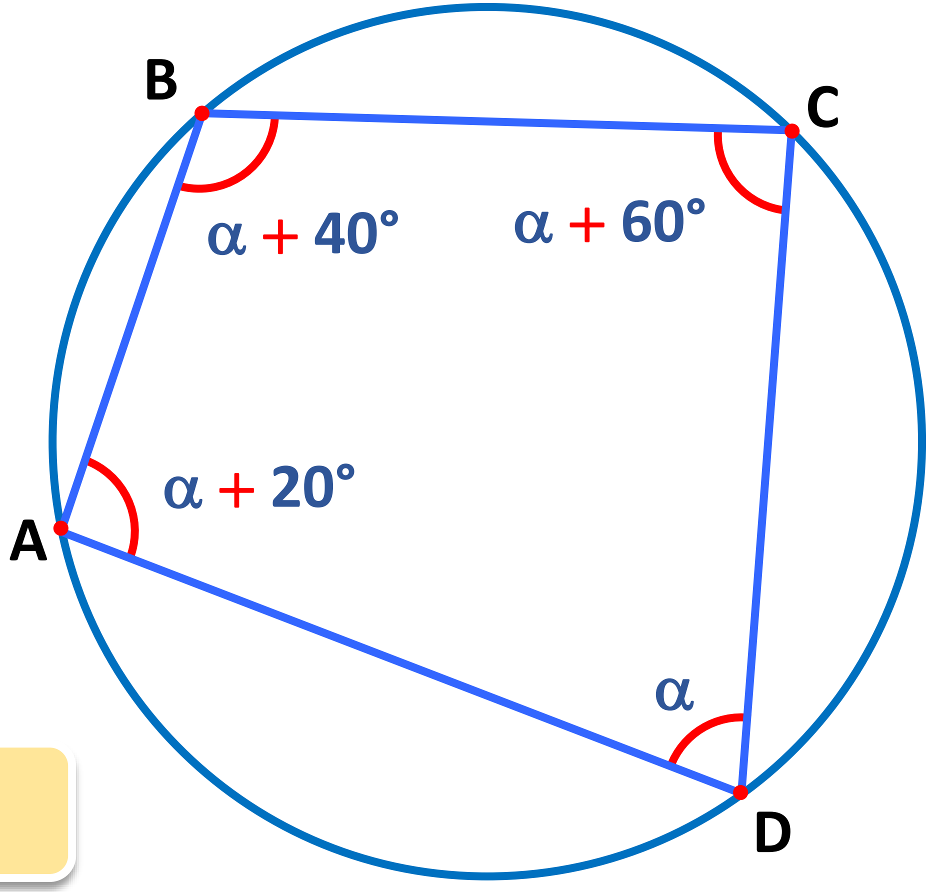
Ahora, en △ ACD:

$$x \underbrace{- \beta + \alpha +}\ x = 180°$$

$$2x + 40° = 180°$$

$\therefore x = 70°$

9. Se tiene un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, donde las medidas de sus ángulos internos al ser ordenados de menor a mayor, forman una progresión aritmética de razón 20°. Halle la medida del mayor de dichos ángulos.



Resolución:

Piden el mayor ángulo interno

Por teorema:

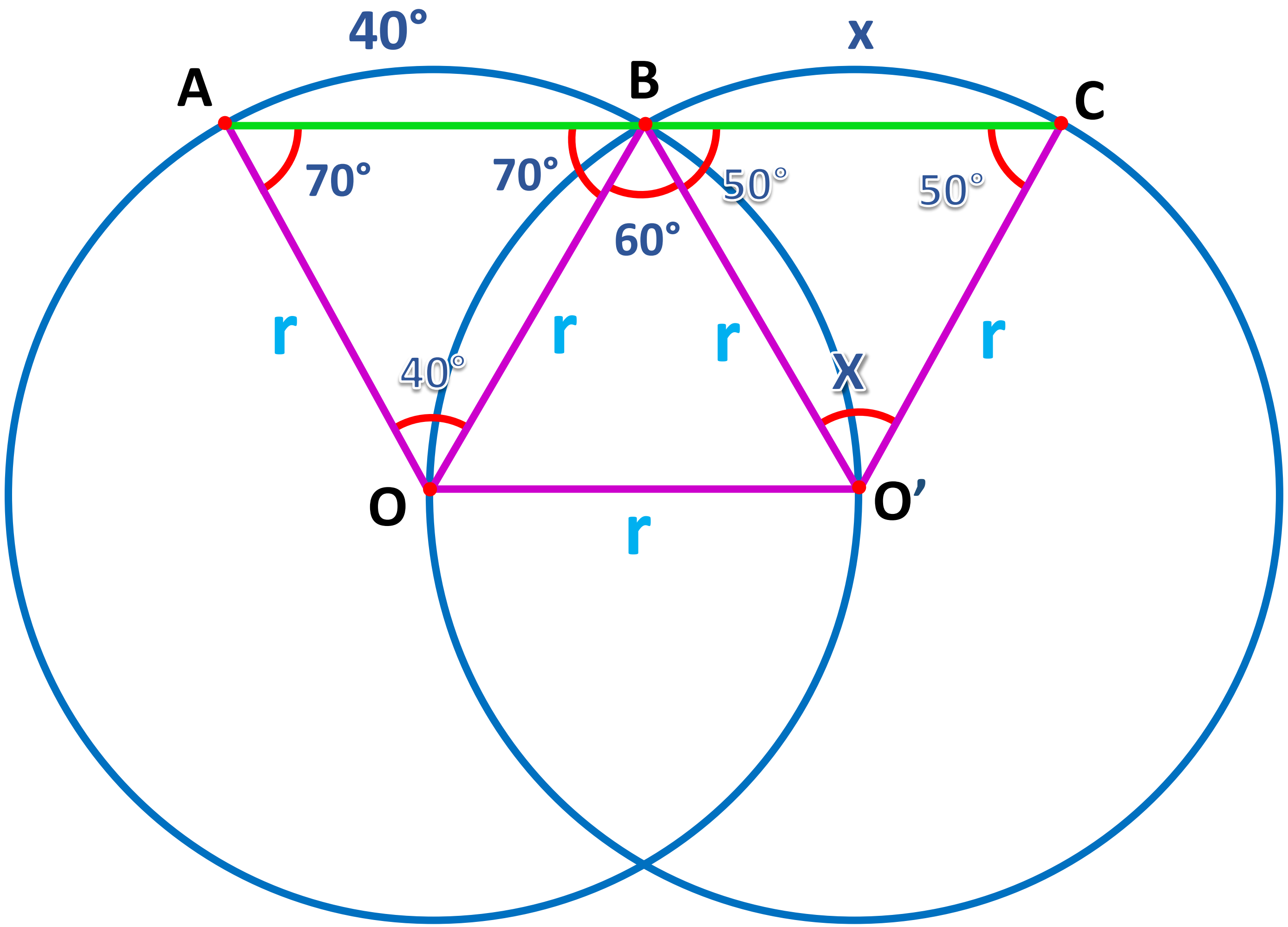
$\alpha + \alpha + 40° = 180° \Rightarrow \alpha = 70°$

Entonces, el mayor ángulo interno es:

$\alpha + 60° = 70° + 60°$

$\therefore$ el mayor ángulo es de 130°

10. En la figura, halle el valor de x si O y O’ son centros.



Resolución:

Piden el valor de x.

Se trazan los radios OA, OB y OC

Δ AOB es isósceles

Δ OBO’ es equilátero

Δ BO’C es isósceles

En Δ BO’C

$$50° + 50° + x = 180°$$

$$\therefore\ x = 80°$$