ARITHMETIC

Chapter 2

Summer
San Marcos 2021

Promedios

SACO OLIVEROS

PROMEDIOS

La palabra"promedio"es tan antigua como el principio de contar, pero los frecuentes abusos en su utilización nos han conducido a una verdadera crisis en su manejo, hasta el punto de pensar que un "mal promedio“ puede convertirse en un "buen promedio" o viceversa, mediante argucias matemáticas.

El promedio es un concepto muy importante que se usa frecuentemente en la vida cotidiana para dar un valor representativo sobre registros de datos variados: calificaciones, encuestas, censos de población, salarios, velocidades, etc. El promedio se encuentra también en varias disciplinas educativas como la física, la medicina, la sociología, etc. y está inmerso en la estadística como una idea fundamental que aparece reiteradamente.

PROMEDIO(P)

Es un valor que puede representar o substituir a todos los elementos de un conjunto de datos sin alterar una cierta característica de la misma.

Dicho valor se encuentra comprendido entre el mínimo y máximo dato del conjunto.

Sean los datos:

$$a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$$

Donde:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n$$

Se tiene que:

$$\boxed{a_1 \leq P \leq a_n}$$

Clases de Promedios:

Promedio Aritmético (PA):

Es igual a la suma total de los datos entre el total de datos.

$$\boxed{PA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}}$$

Ejemplo:

Hallar el PA de 9; 13; 18; 23 y 30

$$\rightarrow \quad PA = \frac{9 + 13 + 18 + 23 + 30}{5} = \frac{93}{5} = 18{,}5$$

Promedio Geométrico (PG):

Es igual a la raíz del total de datos del producto de todos ellos.

$$\boxed{PG = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n}}$$

Ejemplo:

Hallar el PG de 6; 8; 12; y 36

$$\rightarrow \quad PG = \sqrt[4]{6\times8\times12\times36} = \sqrt[4]{2^8\times3^4} = 12$$

Promedio Armónico (PH):

Es igual al total de datos entre la suma de las inversas de los datos.

$$PH = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Ejemplo:

Hallar el PH de 2; 3; 4; y 6

$$\rightarrow \quad PH = \frac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{4}{\frac{6+4+3+2}{12}} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

Promedio Ponderado(PP):

Sean los datos $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ con pesos o promedios respectivamente iguales a $p_1; p_2; p_3; \ldots; p_n$. Se define:

$$PP = \frac{a_1\times p_1 + a_2\times p_2 + a_3\times p_3 + \ldots + a_n\times p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}$$

Ejemplo:

Se tiene un conjunto de 100 números cuya MA es n. Si la MA de 20 de estos 100 números es (n+4). Halle el valor de n si la MA de los otros 80 números es 13.

$$\rightarrow \quad n = \frac{\overset{1}{\cancel{20}}\times(n+4) + \overset{4}{\cancel{80}}\times13}{\underset{5}{\cancel{100}}}$$

$$\rightarrow \quad 5n = n + 4 + 52 \quad \rightarrow \quad \boxed{n = 14}$$

Propiedades:

★ Para "n" Datos:

$$\begin{matrix}\text{Mayor}\\\text{Dato}\end{matrix} \geq PA \geq PG \geq PH \geq \begin{matrix}\text{Menor}\\\text{Dato}\end{matrix}$$

★ Para "n" datos iguales:

$$PA = PG = PH = \text{Dato}$$

★ Para 2 números a y b:

$$MA \times MH = MG^2$$

$$(a-b)^2 = 4(MA^2 - MG^2)$$

Ejemplo:

Si la diferencia de dos números es 180, además su MA y MG son entre sí como 5 es a 4, determine la suma de dichos números.

Sea los números: a y b

Datos: $a-b = 180$; $MA = 5k$; $MG = 4k$

Se sabe que:

$$\boxed{(a-b)^2 = 4(MA^2 - MG^2)}$$

$\rightarrow$ $(180)^2 = 4((5k)^2 - (4k)^2)$

$\rightarrow$ $180 \times \overset{5}{\cancel{180}} = \cancel{4} \times (k) \times (\cancel{9}k)$ $\rightarrow$ $k = 30$

$\rightarrow$ $MA = 5 \times 30$ $\rightarrow$ $\dfrac{a+b}{2} = 5 \times 30$

$\therefore$ $\boxed{a+b = 300}$

1. En el aula A de un colegio hay 60 alumnos y en el aula B, 40 alumnos. El promedio de notas en matemáticas de los alumnos del aula A es 15 y el de los de B es 16. Si se juntaran ambos salones en uno solo, ¿cuál sería el pro- medio de notas en matemáticas de los 100 alumnos?

A) 15,3 ~~B)~~ 15,4 C) 15,6
D) 15,7 E) 15,8

Resolución:

	# alumnos	Promedio
aula A:	60	15
aula B:	40	16

$$\rightarrow \quad P = \frac{60\times 15 + 40\times 16}{100}$$

$$\rightarrow \quad P = \frac{900 + 640}{100}$$

$$\therefore \quad \boxed{P = 15{,}4}$$

2. Dado cuatro números enteros positivos, se sabe que el promedio geométrico de todos ellos es $2\sqrt{2}$. ¿Cuál es el valor de su promedio aritmético si se sabe, además, que los números son diferentes entre sí?

A) 4,25 ~~B)~~ 3,75 C) 6,50
D) 4 E) 5,75

Resolución:

Sea los números: a, b, c, d

Dato:

$$\sqrt[4]{a \times b \times c \times d} = 2\sqrt{2}$$

→ $a \times b \times c \times d = (2\sqrt{2})^4 = 2^4 \times 2^2$

→ $a \times b \times c \times d = 2 \times 2^2 \times 2^3 \times 1$

→ los números son: 2; 4; 8 y 1

Luego:

$$PA = \frac{2+4+8+1}{4} = \frac{15}{4}$$

$\therefore$ $\boxed{PA = 3{,}75}$

3. El promedio de 12 números es 15, al agregarle 2 números, el promedio aumenta en cinco unidades. Halle el mayor número agregado, sabiendo que la diferencia de estos dos números es 50.

A) 82 ~~B)~~ 75 C) 48
D) 85 E) 78

Resolución:

$$\underset{6}{\cancel{12}}\times 15 + \underset{1}{\cancel{2}}\times P = \underset{7}{\cancel{14}}\times 20$$

$\rightarrow$ $90 + P = 140$

$P = 50$

$\rightarrow$ $\dfrac{a+b}{2} = 50$

$\rightarrow$ $\left.\begin{aligned} a+b &= 100 \\ a-b &= 50 \end{aligned}\right\} +$

$a = 75;\ b = 25$

$\therefore$ $\boxed{\#\ \text{mayor} = 75}$

4. La edad promedio de 25 personas es 22 años. Determine cuántas personas de las que tienen 25 años deben retirarse para que el promedio de los restantes sea de 20 años.

A) 10 B) 11 C) 20
D) 25 E) 15

Resolución:

$$\begin{array}{ccccc} 22 & & 25 & & 20 \\ 25 & - & n & = & 25 - n \end{array}$$

$\rightarrow$ $22.25 - 25n = 20(25 - n)$

$\rightarrow$ $22.25 - 20.25 = 25n - 20n$

$$2.\cancel{25}^{\,5} = \cancel{5}n$$

$$n = 10$$

$\therefore$ $\boxed{\text{Se retiran} = 10 \text{ personas}}$

5. El promedio armónico de tres números enteros consecutivos en el cual uno de ellos es impar es 16,9607... Determine la MA entre el mayor y menor de los números.

A) 21 B) 24 C) 25
D) 19 ~~E)~~ 17

✶ Se sabe que:

$$\boxed{\#Mayor > MA > MG > MH > \#Menor}$$

Resolución:

Sea los números consecutivos:

$$a;\ (a+1);\ (a+2)$$

Por dato; uno de los números es impar, entonces $(a+1)$ es impar.

$$\underbrace{a;}_{\#Menor} < \underbrace{(a+1);}_{MA} < \underbrace{(a+2)}_{\#Mayor}$$

$$MH = 16{,}9607\ldots \rightarrow a = 16$$

Luego:

$$MA = \frac{16+18}{2}$$

$$\therefore \boxed{MA = 17}$$

6. Si se cumple para dos números que el producto de su media aritmética y su media armónica es igual a 196 y se sabe, además, que el producto de la media aritmética y la media geométrica es igual a 245, calcule la diferen- cia de los números.

A) 19 B) ~~21~~ C) 25
D) 23 E) 17

Resolución:

Sea los números a y b:

★ $MA \times MH = 196$

$\rightarrow \quad MG^2 = 196 \quad \rightarrow \quad MG = 14$

★ $MA \times MG = 245$

$\rightarrow \quad MA \times \overset{2}{\cancel{14}} = \overset{35}{\cancel{245}} \quad \rightarrow \quad MA = \frac{35}{2}$

Luego: $\boxed{(a-b)^2 = 4(MA^2 - MG^2)}$

$\rightarrow \quad (a-b)^2 = 4\left(\frac{35}{2} - 14\right)\left(\frac{35}{2} + 14\right) = \cancel{4}.\left(\frac{7}{\cancel{2}}\right)\left(\frac{63}{\cancel{2}}\right)$

$\therefore \quad \boxed{a - b = 21}$

7. El producto de la MA, MH y MG de dos números es de 8000 y la mayor diferencia entre dos de las medias es 9. Calcule la diferencia de los números.

A) 45 B) 40 C) 35

~~D)~~ 30 E) 25

Resolución:

Sea los números a y b:

★ $\underbrace{MA \times MH}_{MG^2} \times MG = 8000 \rightarrow MG^3 = 8000$

$\rightarrow MG = 20$

★ $MA - MH = 9$

$MA \times MH = 20^2 = 25 \times 16$

$\rightarrow MA = 25; \quad MH = 16$

Luego: $\boxed{(a-b)^2 = 4(MA^2 - MG^2)}$

$\rightarrow (a-b)^2 = 4(25^2 - 20^2)$

$(a-b)^2 = 4 \times (5) \times (45)$

$\therefore \boxed{a - b = 30}$

8. El promedio aritmético de tres números es 7, el promedio geométrico de los mismos es igual a uno de ellos y su promedio armónico es 36/7. Halle el mayor de los tres números.

A) 4 B) 6 C) 9
D) 15 ~~E)~~ 12

Resolución:

Sea los números a, b y c:

★ $\dfrac{a+b+c}{3} = 7 \rightarrow a + b + c = 21$ ...(1)

★ $\sqrt[3]{a\times b\times c} = a \rightarrow \cancel{a}\times b\times c = \cancel{a^3}$

$\rightarrow b\times c = a^2$ ...(2)

★ $\dfrac{\cancel{3}\cancel{a}\times \overbrace{b\times c}^{a^2}}{\cancel{a}\times b+\underbrace{b\times c}_{\cancel{a^2}\,a}+\cancel{a}\times c} = \dfrac{\cancel{36}^{12}}{7} \rightarrow \dfrac{a^2}{\underbrace{b+a+c}_{\cancel{21}\,3}} = \dfrac{12}{\cancel{7}}$

$\rightarrow a = 6 \rightarrow$ En (1): $b + c = 15$

En (2): $b\times c = 36 = 12\times 3$

$\rightarrow b = 12;\quad c = 3$

$\therefore$ $\boxed{\#\ \text{mayor} = 12}$

9. Una nave espacial gira alrededor de la Tierra; la primera vuelta la hace a razón de 900 km/h; la segunda vuelta a razón de 1000 km/h y la tercera a razón de 1100 km/h. La velocidad media de la nave será (en km/h)

A) 1000 B) 998 ~~C)~~ 993,3
D) 1100 E) 998,6

Resolución:

$$\star\ V_m = \frac{e_{Total}}{T_{Total}} = \frac{e + e + e}{t_1 + t_2 + t_3} \rightarrow$$

$$V_m = \frac{3\cancel{e}}{\frac{\cancel{e}}{v_1} + \frac{\cancel{e}}{v_2} + \frac{\cancel{e}}{v_3}} = \frac{3}{\frac{1}{900} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1100}}$$

$$V_m = \frac{300}{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}} = \frac{300 \times 9 \times 10 \times 11}{110 + 99 + 90}$$

$$\rightarrow \quad V_m = \frac{297000}{299}$$

$$\therefore \quad \boxed{V_m = 993,3}$$

10. Si la media geométrica de dos números es menor en 12 unidades que el mayor de di- chos números y su media aritmética es mayor en 10 unidades que el menor de estos números. Calcule la suma de los números.

A) 36 ~~B)~~ 52 C) 46
D) 56 E) 62

Resolución:

Sea los números a y b (a>b):

★ $a - \sqrt{ab} = 12$ ...(1)

★ $\dfrac{a+b}{2} - b = 10$ ...(2)

De (2) se tiene: $a - b = 20$

→ $a = b+20$ ...(3)

(3) en (1): $b + 20 - \sqrt{(b+20).b} = 12$

→ $b + 8 = \sqrt{(b+20)\,b}$ → al □

$\cancel{b^2} + 16b + 64 = \cancel{b^2} + 20b$ → $b = 16$

En (3): $a = 36$

∴ $\boxed{a + b = 52}$