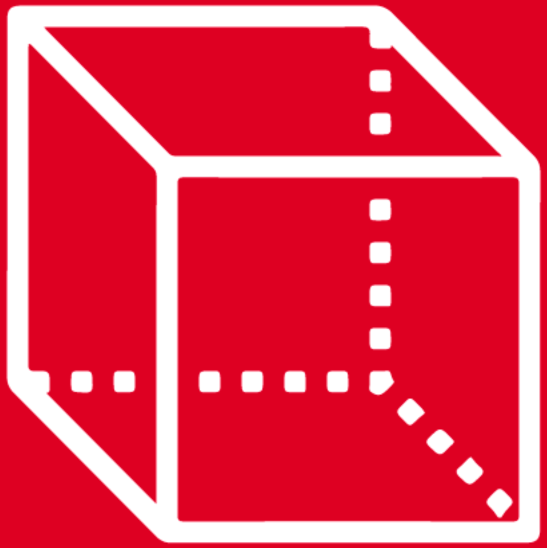
GEOMETRY

Chapter 6

VERANO SAN MARCOS

RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA Y EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO



SACO OLIVEROS


GoAnimate

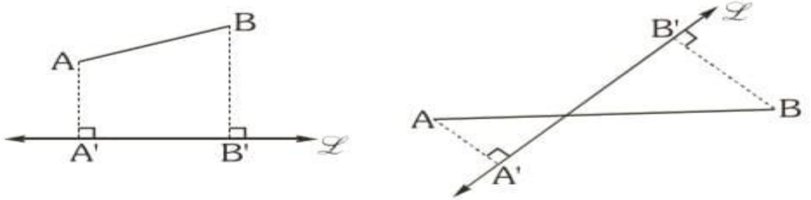
Proyección ortogonal de un punto sobre una recta

Para proyectar un punto sobre una recta, se traza desde el punto una perpendicular hacia la recta, siendo la proyección, la intersección de la recta con la perpendicular hacia ella.

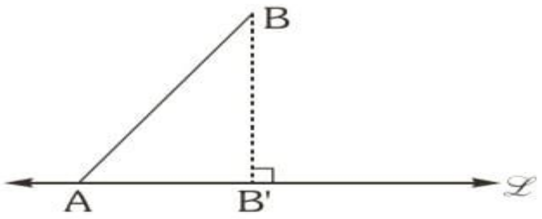
- A': es la proyección del punto A sobre la recta $\mathscr{L}$.
- AA': es la distancia del punto A a la recta $\mathscr{L}$.

Proyección ortogonal de un segmento sobre una recta

Para proyectar un segmento sobre una recta, se proyectan sus puntos extremos, siendo la proyección, el segmento que une las proyecciones de dichos puntos extremos.



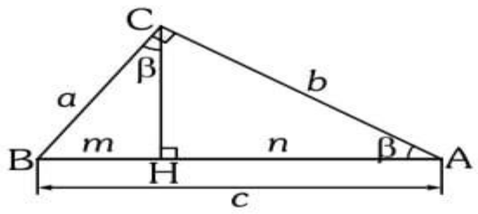
En ambas figuras, $\overline{A'B'}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre la recta $\mathscr{L}$.



En la figura, $\overline{AB'}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre la recta $\mathscr{L}$.

Relaciones métricas en un triángulo rectángulo

1. La longitud de un cateto elevado al cuadrado es igual al producto de la hipotenusa con la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa. Por semejanza de triangulos



$\triangle$BHC ~ $\triangle$BCA: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{m}{a}$

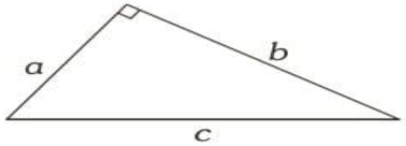
$\boxed{a^2 = cm}$ … (I)

$\boxed{b^2 = cm}$ … (II)

2. Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

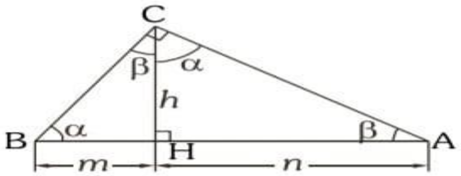
Sumando ecuación (I) + (II):



$$a^2 + b^2 = cm + cn$$
$$a^2 + b^2 = c(m + n)$$
$$a^2 + b^2 = c^2$$

3. La longitud de la altura relativa a la hipotenusa, elevado al cuadrado, es igual al producto de las longitudes de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

Por semejanza de triángulos



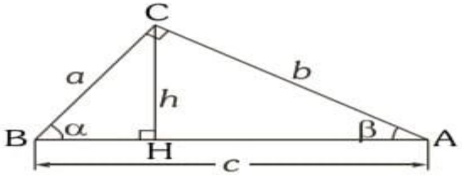
$\triangle$ BHC ~ $\triangle$ CHA

$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

$$\boxed{h^2 = mn}$$

4. El producto de las longitudes de los catetos es igual al producto de las longitudes de la hipotenusa y de la altura relativa a la hipotenusa.

Por semejanza de triángulos



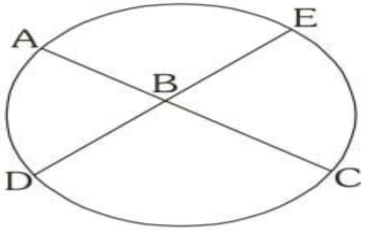
$\triangle$ BHC ~ $\triangle$ BCA

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{c}$$

$$\boxed{ab = ch}$$

Teorema de las cuerdas

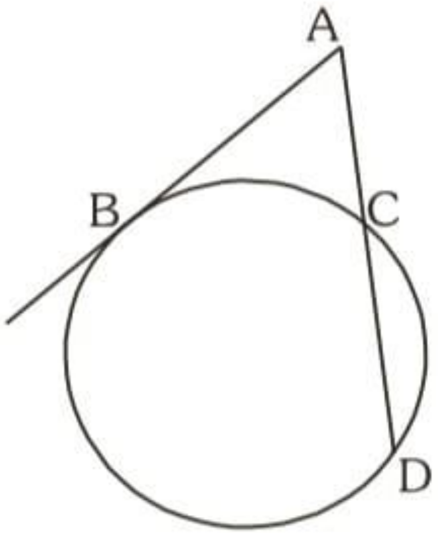
Si en una circunferencia se trazan dos cuerdas secantes, entonces el producto de las longitudes de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de las longitudes de los otros dos segmentos.



$$\boxed{(AB)(BC) = (DB)(BE)}$$

Teorema de la tangente

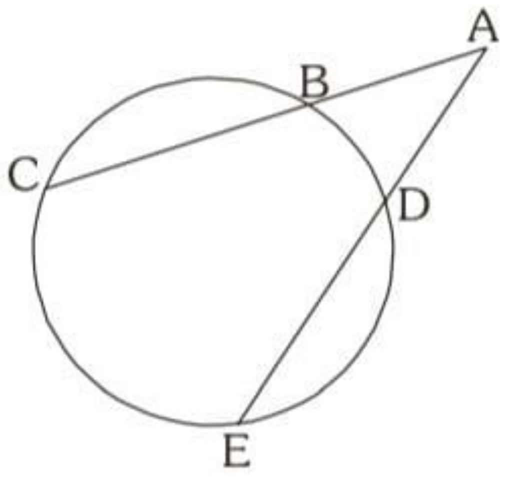
El cuadrado de la longitud de la tangente es igual al producto de la secante entera por su parte externa.



$$\boxed{(AB)^2=(AD)(AC)}$$

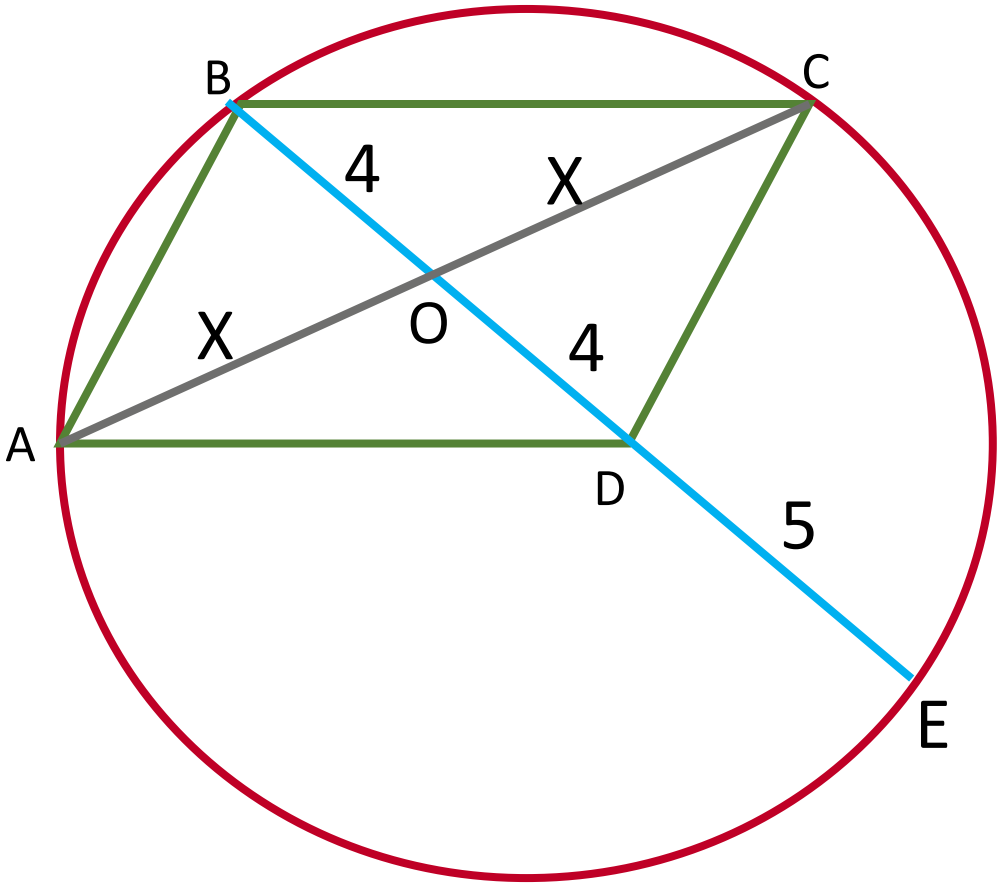
Teorema de la secante

Una secante entera por su parte externa es igual a la otra secante entera por su parte externa.



$$\boxed{(AC)(AB)=(AE)(AD)}$$

1) En la figura : ABCD es un romboide ,BD = 8 ,DE = 5 . Halle AC



RESOLUCIÓN

Piden : AC = 2X

Por teorema de las cuerdas

X.X = 4 . 9

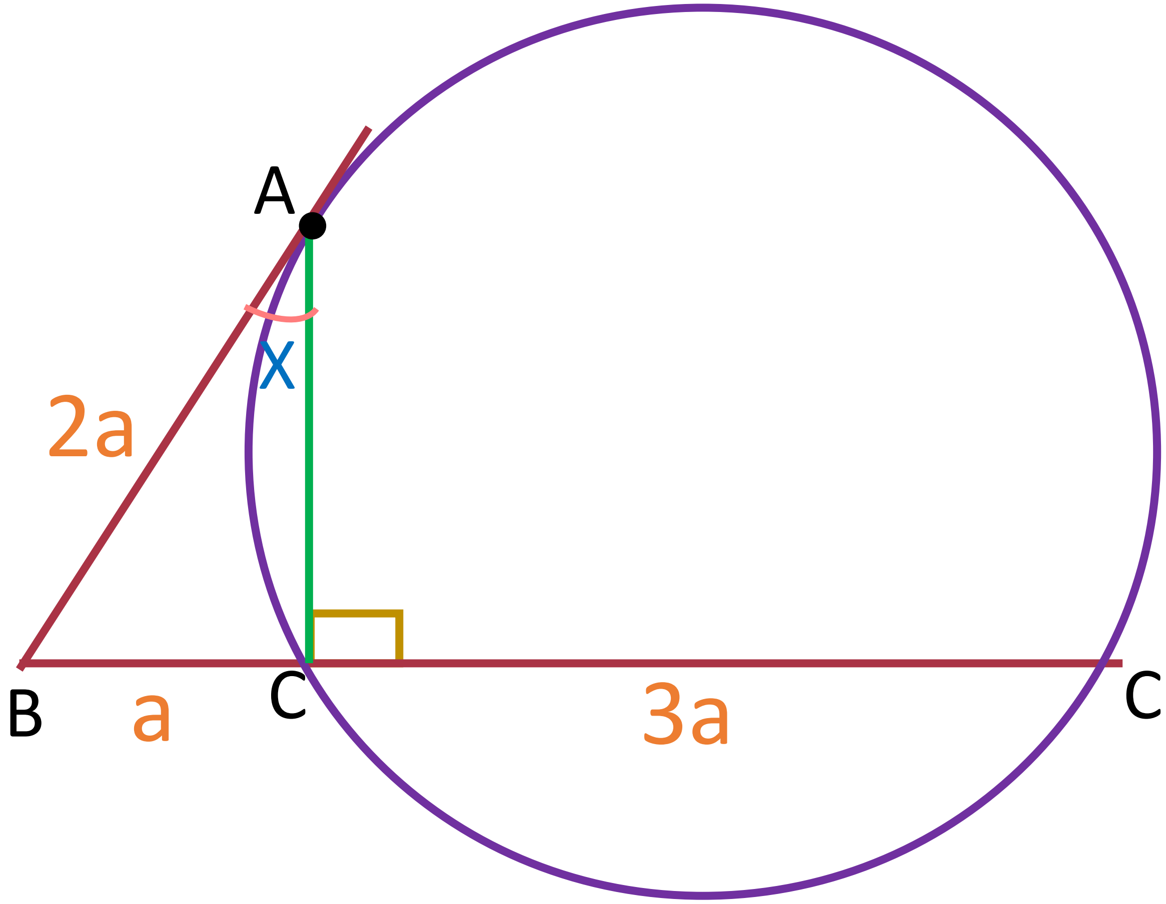
X^2 = 36

X = 6

LUEGO : AC = 6+6

⇒ AC = 12

2) En la figura : Si A es punto de tangencia y CD = 3(BC) . Halle el valor de x



RESOLUCIÓN

Piden : x

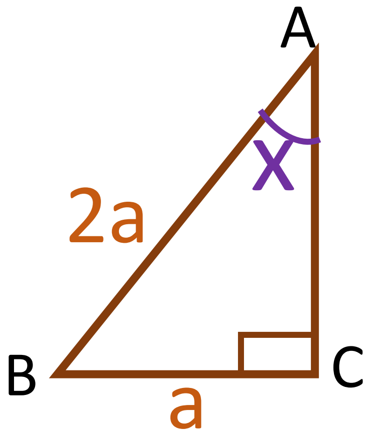
Por teorema de la tangente y la secante

AB^2 = 4a .a

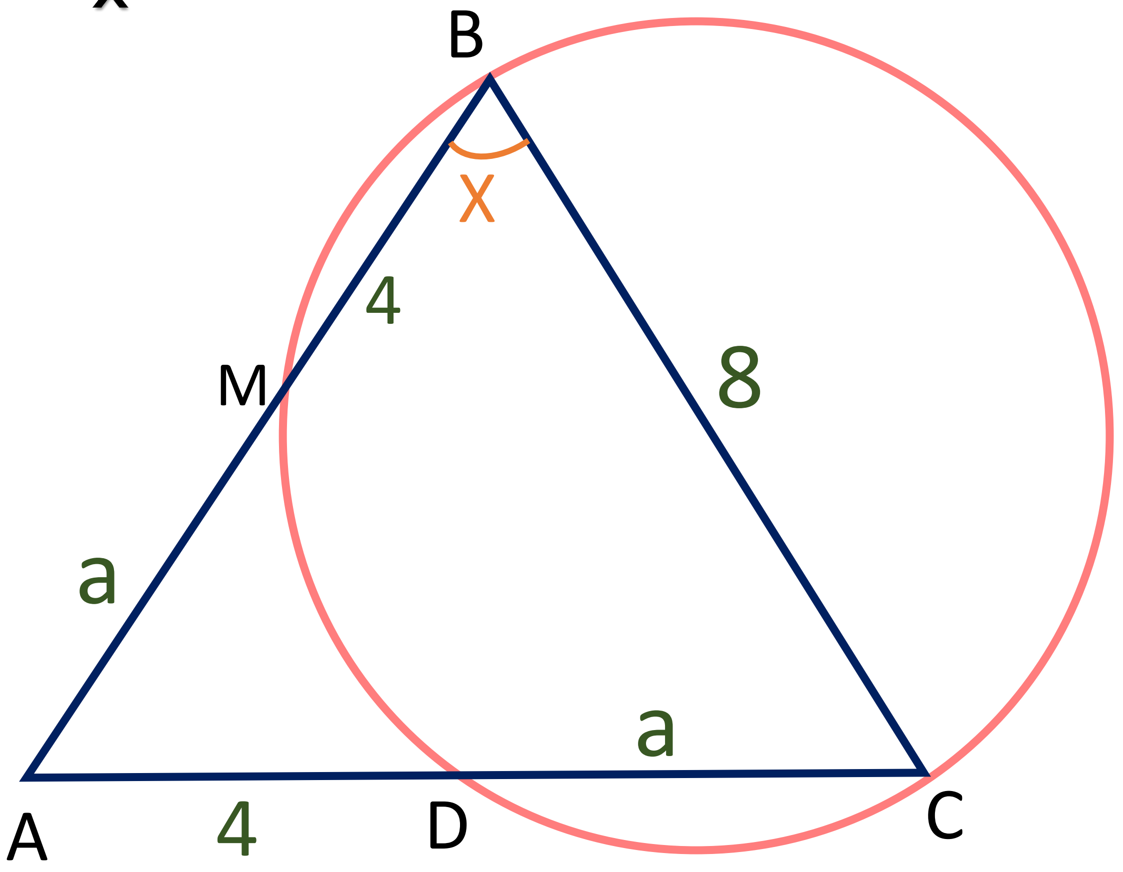
AB^2 = $4a^2$

AB= 2a

X= 30°



3) En el gráfico . Halle el valor de x



RESOLUCIÓN

Piden : x

Por teorema de las secantes

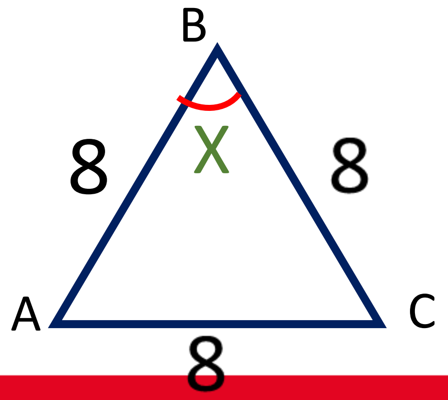
$$(a+4)a = (4+a)4$$

$$a^2\ 4\cancel{a} = 16 + 4\cancel{a}$$

$$a^2 = 16$$

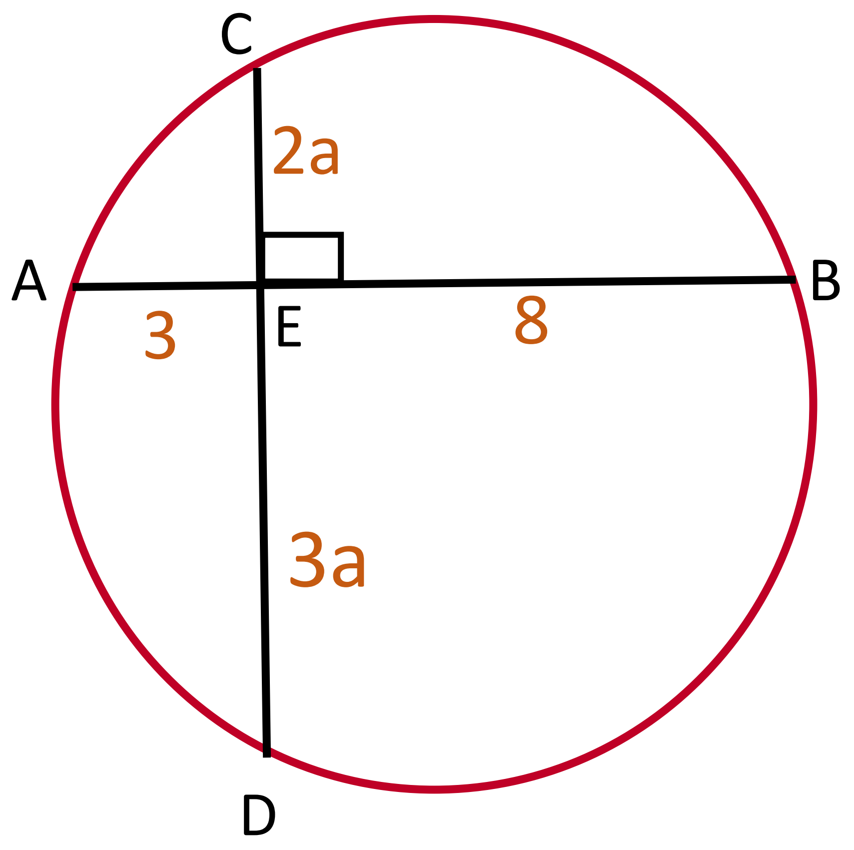
$$a = 4$$

AHORA:



X= 60°

4)En una circunferencia se tienen las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ perpendiculares en E . Si : AE= 3 , EB= 8 y 3(CE) = 2(ED) . Halle CD



RESOLUCIÓN

Piden : CD = 5a

Por teorema de las cuerdas

2a . 3a= 3.8

$6a^2 = 24$

$a^2 = 4$

a= 2

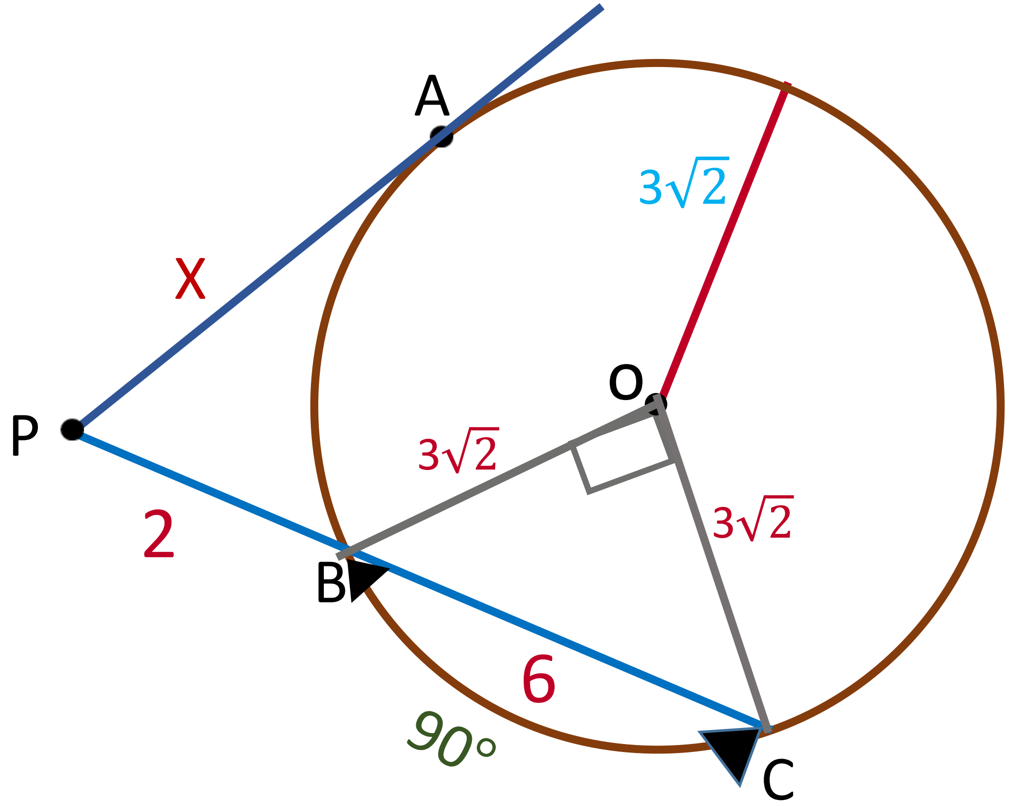
Luego :

CD= 2a+$3a = 5a$

CD= 5(2)

CD = 10

5) Desde un punto exterior P a una circunferencia de centro O y radio $3\sqrt{2}$, se traza la tangente PA y la secante PBC , de modo que : $\overline{PB}$ =2 , m $\widehat{BC}$ = 90° . ***Halle AP***



RESOLUCIÓN

Piden : AP = X

Se trazan los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$

→ OB= OC = $3\sqrt{2}$

Como m $\widehat{BC}$ = 90° → $m\measuredangle BOC = 90°$

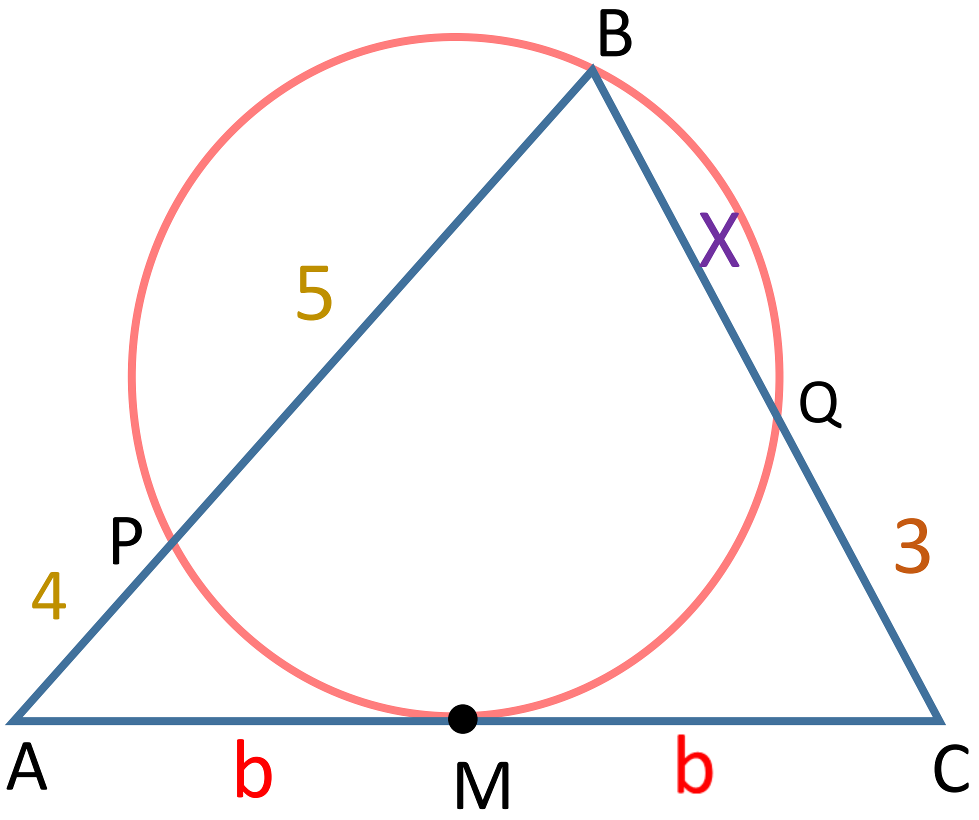
Por teorema de la tangente y la secante

x^2 = 8 . 2

x^2 = 16

X= 4

6) En un triángulo ABC ,la circunferencia que pasa por B y por el punto medio M de $\overline{AC}$, interseca en P a $\overline{AB}$ y en Q a $\overline{BC}$. Si $\overline{AP}$ = 4 , $\overline{PB}$ = 5 y $\overline{CQ}$ = 3 (M es punto de tangencia) . Halle BQ



RESOLUCIÓN

PIDEN : X

Por teorema de la tangente y secante

1) b^2 = 4 . 9

b^2 = 36

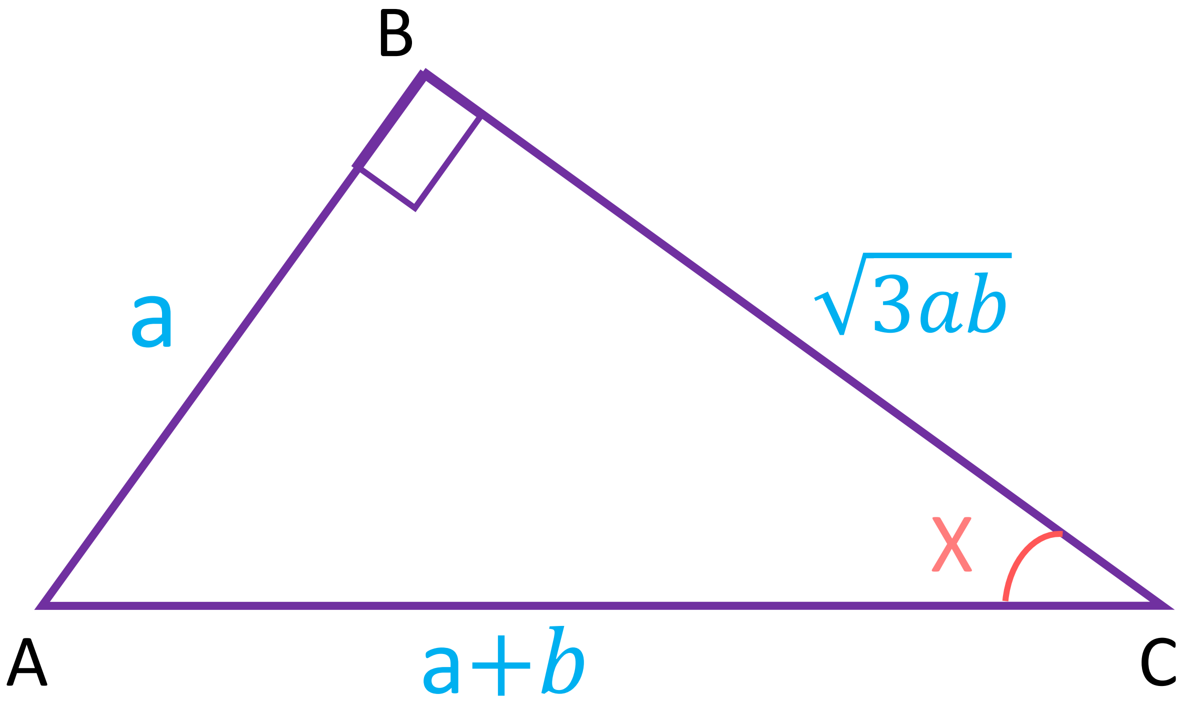
2) b^2 = 3 (3+x)

36 = 3 (3+x)

12 = 3 +x

9 = x

7) En la figura . Halle el valor de x



RESOLUCIÓN

PIDEN : X

Por teorema de pitágoras

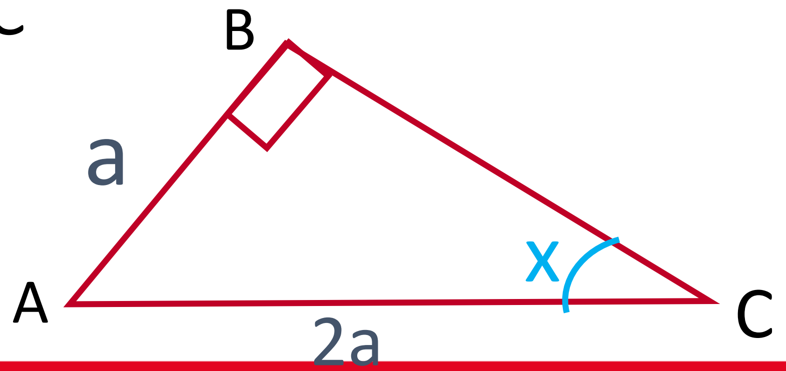
$$(a+b)^2 = a^2 + (\sqrt{3ab})^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 3ab$$

$$\cancel{b}^2 = a\cancel{b}$$

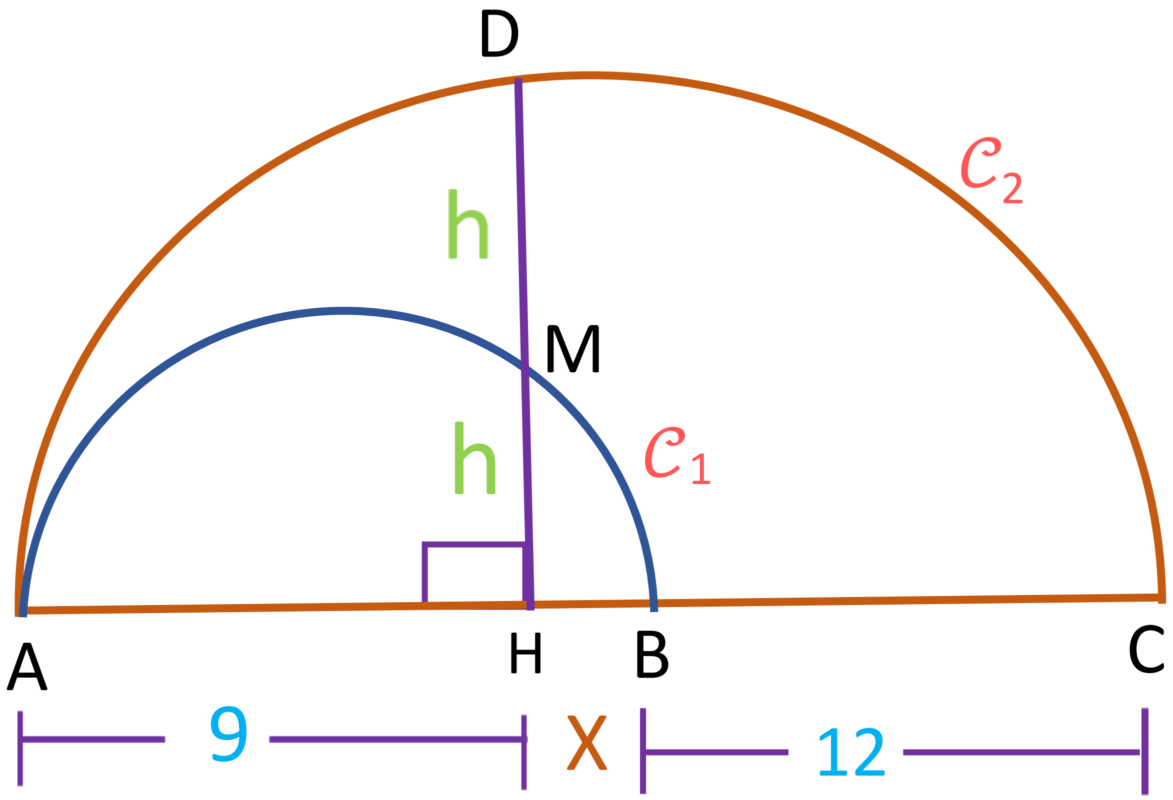
$$b = a$$

AHORA:



X= 30°

8) En las semicircunferencias : Halle el valor de x



RESOLUCIÓN

PIDEN : X

Por relaciones métricas en el triángulo rectángulo

En $\mathcal{C}1$: $h^2 = 9x$

En $\mathcal{C}2$: $(2h)^2 = 9(x+12)$

$$4h^2 = 9(x+12)$$

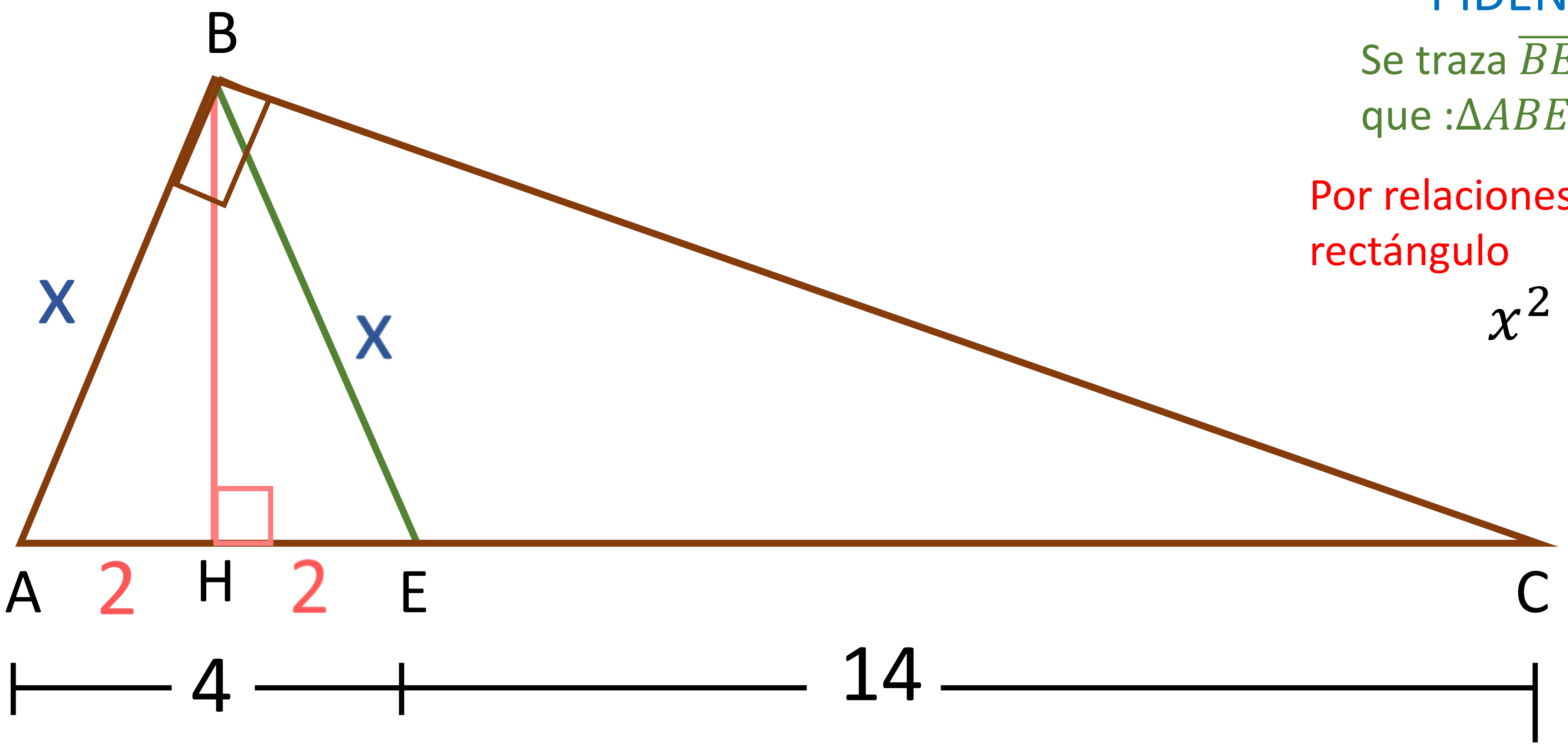
$$4(\cancel{9}x) = \cancel{9}(x+12)$$

$$4x = x+12$$

$$3x = 12$$

$$X = 4$$

9) En la figura : Hallar el valor de x



RESOLUCIÓN

PIDEN : X

Se traza $\overline{BE}$,de tal manera que :ΔABE , *sea isósceles*

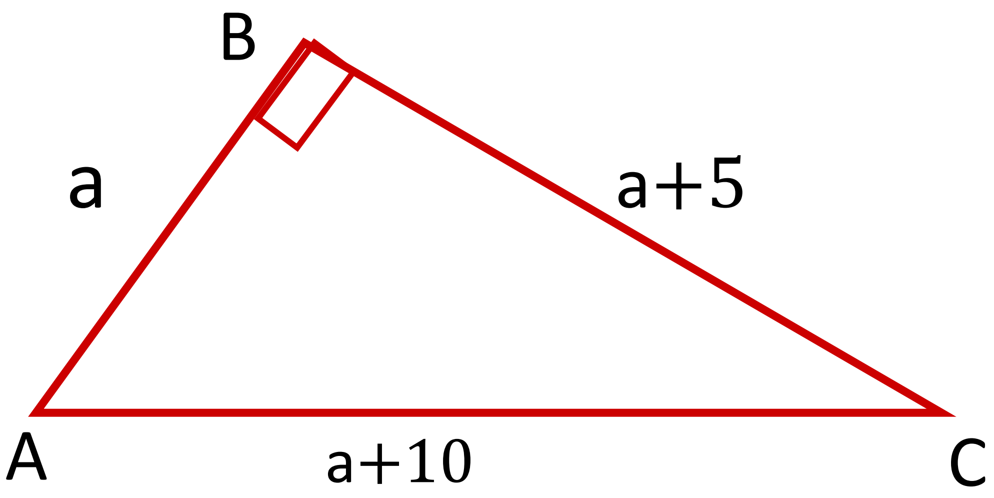
Por relaciones métricas en el triángulo rectángulo

$$x^2 = 2.\,8$$

$$x^2 = 16$$

X = 4

10) Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo se encuentran en progresión aritmética de razón 5 . Halle la longitud de la altura relativa a la hipotenusa



RESOLUCIÓN

Piden la longitud de la altura : x

POR TEOREMA DE PITÁGORAS

$$(a+10)^2 = a^2 + (a+5)^2$$

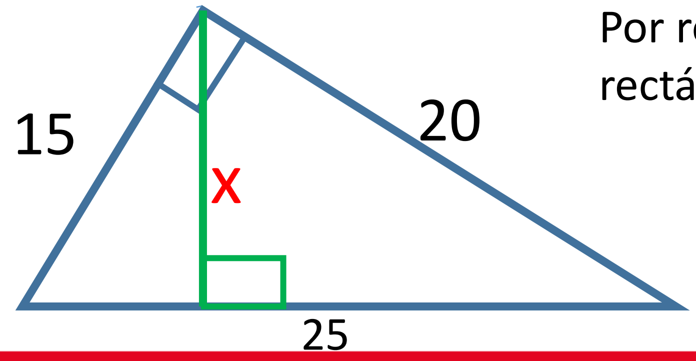
$$\cancel{a^2} + 20a + 100 = \cancel{a^2} + a^2 + 10a + 25$$

$$0 = a^2 - 10a + 75$$

$$\begin{array}{ccc} a & & +5 \\ a & & -15 \end{array}$$

$$a - 15 = 0 \rightarrow a = 15$$

Como : a = 15 ,Se tiene :



Por relaciones métricas en triángulo rectángulo:

15.20 = 25 .x

12 = x

