ARITHMETIC

Chapter 3

5°

San Marcos 2022

Promedios

Y+X=

SACO OLIVEROS

PROMEDIOS

La palabra "promedio“ es tan antigua como el principio de contar, pero los frecuentes abusos en su utilización nos han conducido a una verdadera crisis en su manejo, hasta el punto de pensar que un "mal promedio“ puede convertirse en un "buen promedio" o viceversa, mediante argucias matemáticas.

El promedio es un concepto muy importante que se usa frecuentemente en la vida cotidiana para dar un valor representativo sobre registros de datos variados: calificaciones, encuestas, censos de población, salarios, velocidades, etc. El promedio se encuentra también en varias disciplinas educativas como la física, la medicina, la sociología, etc. y está inmerso en la estadística como una idea fundamental que aparece reiteradamente.

PROMEDIO(P)

Es un valor que puede representar o substituir a todos los elementos de un conjunto de datos sin alterar una cierta característica de la misma.

Dicho valor se encuentra comprendido entre el mínimo y máximo dato del conjunto.

Sean los datos:

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n$$

Donde:

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n$$

Se tiene que:

$$\boxed{a_1 \le P \le a_n}$$

Clases de Promedios:

Promedio Aritmético (PA):

Es igual a la suma total de los datos entre el total de datos.

$$\boxed{PA = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}}$$

Ejemplo:

Hallar el PA de 9; 13; 18; 23 y 30

$$\rightarrow \quad PA = \frac{9 + 13 + 18 + 23 + 30}{5} = \frac{93}{5} = 18{,}6$$

Promedio Geométrico (PG):

Es igual a la raíz del total de datos del producto de todos ellos.

$$\boxed{PG = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n}}$$

Ejemplo:

Hallar el PG de 6; 8; 12; y 36

$$\rightarrow \quad PG = \sqrt[4]{6\times8\times12\times36} = \sqrt[4]{2^8\times3^4} = 12$$

Promedio Armónico (PH):

Es igual al total de datos entre la suma de las inversas de los datos.

$$PH = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

Ejemplo:

Hallar el PH de 2; 3; 4; y 6

$$\rightarrow \quad PH = \frac{4}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = \frac{4}{\frac{6+4+3+2}{12}} = \frac{16}{5} = 3{,}2$$

Promedio Ponderado (PP):

Sean los datos $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ con pesos o promedios respectivamente iguales a $p_1; p_2; p_3; \ldots; p_n$. Se define:

$$PP = \frac{a_1\times p_1 + a_2\times p_2 + a_3\times p_3 + \ldots + a_n\times p_n}{p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n}$$

Ejemplo:

Se tiene un conjunto de 100 números cuya MA es n. Si la MA de 20 de estos 100 números es (n+4). Halle el valor de n si la MA de los otros 80 números es 13.

$$\rightarrow \quad n = \frac{\overset{1}{\cancel{20}}\times(n+4) + \overset{4}{\cancel{80}}\times13}{\underset{5}{\cancel{100}}}$$

$$\rightarrow \quad 5n = n + 4 + 52 \quad \rightarrow \quad \boxed{n = 14}$$

Propiedades:

- Para "n" Datos:

$$\begin{matrix}\text{Mayor}\\\text{Dato}\end{matrix} \geq PA \geq PG \geq PH \geq \begin{matrix}\text{Menor}\\\text{Dato}\end{matrix}$$

- Para "n" datos iguales:

$$PA = PG = PH = \text{Dato}$$

- Para 2 números a y b:

$$MA \times MH = MG^2$$

$$(a-b)^2 = 4(MA^2 - MG^2) = 4(MA+MG)(MA-MG)$$

Ejemplo:

Si la diferencia de dos números es 180, además su MA y MG son entre sí como 5 es a 4, determine la suma de dichos números.

Sea los números: a y b

Datos: $a-b = 180$; $MA = 5k$; $MG = 4k$

Se sabe que:

$$(a-b)^2 = 4(MA+MG)(MA-MG)$$

$\rightarrow$ $(180)^2 = 4(5K+4K)(5K-4K)$

$\rightarrow$ $180 \times \cancel{180}^{5} = \cancel{4} \times (\cancel{9}k) \times (k)$ $\rightarrow$ $k = 30$

$\rightarrow$ $MA = 150$ $\rightarrow$ $\dfrac{a+b}{2} = 150$

$\therefore$ $\boxed{a+b = 300}$

1. En la tabla adjunta, se muestran los sueldos en soles que reciben los trabajadores de la compañía "MJBO Producciones".

Sueldo (S/)	N° de empleados
1200	6
950	N
1320	4
1500	5
1000	6

Si el salario promedio es S/1151, ¿cuántos empleados ganan S/950?

A) 7 B) 8

~~C)~~ 9 D) 10

Resolución:

$$P = \frac{1200(6)+950(N)+1320(4)+1500(5)+1000(6)}{6+N+4+5+6}$$

$$1151 = \frac{7200 + 950N + 5280 + 7500 + 6000}{21 + N}$$

$$24171 + 1151N = 25980 + 950N$$

$$\underbrace{1151N - 950N}_{21N} = \underbrace{25980 - 24171}_{1809}$$

$$21N = 1809$$

$$N = 9$$

$\therefore$ $\boxed{\text{C) } 9}$

2. Usted, en un mercado, compra tres docenas de manzanas por un sol; luego, en otro mercado, compra cuatro docenas de manzanas por un sol, y finalmente, en otro mercado, compra cinco docenas de manzanas por un sol. El precio promedio por docena de manzanas es

A) 0,20 B) 0,45

C) 0,2611 ~~D~~) 0,25

Resolución:

N° de docenas	Precio
3 doc	S/1
4 doc	S/1
5 doc	S/1
12 doc	S/3

$$\rightarrow P_{prom} = \frac{3}{12}$$

$$\rightarrow P_{prom} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$\therefore$ $\boxed{\text{D) } 0{,}25}$

3. La media aritmética de 15 impares de 2 cifras es 35 y de otros 20 impares, también de 2 cifras, es 52, halle la media aritmética de los impares de 2 cifras no considerados.

A) 71 B) 81 ~~C~~) 91 D) 46

Resolución:

Los números impares de 2 cifras son:

$$\underbrace{11;\ 13;\ 15;\ 17;\ ,,,,;\ 99}_{45\text{ números}}$$

Hallando la suma:

$$S = \frac{(11+99)45}{2}$$

$$S = \frac{\overset{55}{\cancel{110}} \times 45}{\cancel{2}}$$

$$S = 2475$$

➢ $\underbrace{MA_{(15\ \#s)}} = 35$

$$\frac{\Sigma\, 15\ \#s}{15} = 35$$

$$\Sigma\, 15\ \#s = 525$$

➢ $\underbrace{MA_{(20\ \#s)}} = 52$

$$\frac{\Sigma\, 20\ \#s}{20} = 52$$

$$\Sigma\, 20\ \#s = 1040$$

Luego:

$$\Sigma 45\#s = \Sigma 15\#s + \Sigma 20\#s + \Sigma 10\ \#s$$

$$2475 = 525 + 1040 + \Sigma\, 10\ \#s$$

$$2475 = 1565 + \Sigma\, 10\ \#s$$

$$910 = \Sigma\, 10\ \#s$$

Piden:

$$MA_{(10\ \#s)} = \frac{\Sigma\, 10\ \#s}{10}$$

$$MA_{(10\ \#s)} = \frac{910}{10}$$

$$MA_{(10\ \#s)} = 91$$

$\therefore$ $\boxed{\text{C) } 91}$

4. La nota promedio en un examen de Cálculo I es N, luego de aceptar los reclamos y al revisar los exámenes, el profesor del curso decidió aumentar tres puntos a la nota del examen de la cuarta parte de alumnos que rindieron el examen y solo un punto al resto, resultado que 14,5 es la nueva nota promedio. Determine la suma de cifras de N.

A) 7 B) 6 ~~C)~~ 4 D) 3

Resolución:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = N \\ P_2 = 14{,}5 \end{array}\right\} N < 14{,}5$$

Variación del promedio:

$$14{,}5 - N$$

Sea el número de alumnos:

$$4a$$

Luego:

$$4a \rightarrow \frac{1}{4}(4a) = a$$

$$4a \rightarrow \text{Resto: } 3a$$

Obs.: La variación de un promedio es igual al promedio de la variación de sus datos:

$$14{,}5 - N = \frac{a(3) + 3a(1)}{4a}$$

$$14{,}5 - N = \frac{\overset{3}{\cancel{6}}\cancel{a}}{\underset{2}{\cancel{4}}\cancel{a}}$$

$$29 - 2N = 3$$

$$26 = 2N$$

$$13 = N$$

Piden: $Q = 1 + 3$

$Q = 4$

$\therefore$ $\boxed{\text{C) } 4}$

5. Si la media aritmética y la media geométrica de dos números enteros positivos x e y son enteros consecutivos, entonces el valor absoluto de $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ es

~~A)~~ $\sqrt{2}$ B) 2

C) 1 D) $3\sqrt{2}$

Resolución:

$$\underbrace{MA}_{\frac{x+y}{2}} - \underbrace{MG}_{\sqrt{x.y}} = 1$$

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{x.y} = 1$$

$$\frac{x+y-2\sqrt{x.y}}{2} = 1$$

$$\underbrace{x+y-2\sqrt{x.y}}_{\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2} = 2$$

$$\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 = 2$$

$$\sqrt{x}-\sqrt{y} = \sqrt{2}$$

Piden:

$$E = \sqrt{x}-\sqrt{y}$$

$$E = \sqrt{2}$$

$\therefore$ $\boxed{A)\ \sqrt{2}}$

6. La MG de tres números enteros es $5\sqrt[3]{18}$. Si la MA de dos de ellos es 12,5. Halle la MA de los tres números.

A) 15,1 B) 12,3

C) 14,2 ~~D)~~ 13,3

Resolución:

Sean los números:

a, b y c

$$MG(a;b;c) = 5\sqrt[3]{18}$$

$$\underbrace{MA(a;b)} = 12,5$$

$$\frac{a+b}{2} = 12,5$$

$$a + b = 25$$

$$\underbrace{MG(a;b;c)} = 5\sqrt[3]{18}$$

$$\sqrt[3]{a.b.c} = 5\sqrt[3]{18}$$

$$\left(\sqrt[3]{a.b.c}\right)^3 = \left(5\sqrt[3]{18}\right)^3$$

$$a.b.c = 5^3.18$$

$$a.b.c = 5.5.5.2.3.3$$

$$a.b.c = 15.10.15$$

Piden:

$$MA = \frac{a+b+c}{3}$$

$$MA = \frac{15+10+15}{3}$$

$$MA = \frac{40}{3}$$

$$MA = 13,3$$

$\therefore$ $\boxed{D)\ 13,3}$

7. La cantidad de botellas de vino que vende diariamente una bodega son números enteros positivos diferentes, siendo las dos ultimas ventanas 48 y 54 botellas. En promedio la bodega vende 27 botellas por día. Sin embargo, sin considerar estas dos ultimas ventas, el promedio de las que quedan es 23. ¿Cuál es el máximo número de botellas vendidas un día cualquiera?

A) 225 B) 242 C) 210 D) 212

Resolución:

Sea el número total de días: n

Luego:

N° de días	Promedio	Total de botellas
n	27	27n
2	51	102
n – 2	23	23(n – 2)

$$\underbrace{23(n-2)} + 102 = 27n$$

$$23n - 46 + 102 = 27n$$

$$56 = 4n$$

$$n = 14 \text{ días}$$

En (n – 2) días se vendieron:

$$23(14-2) = 276 \text{ botellas}$$

$$12 \text{ días} \rightarrow 276 \text{ botellas}$$

Para que en 1 días, la venta sea máxima, los 11 días restantes deben ser mínimos.

Luego:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + 11} + x = 276$$

$$\frac{11(11+1)}{2} + x = 276$$

$$66 + x = 276$$

$$x = 210$$

$\therefore$ $\boxed{\text{C) } 210}$

8. La MG de 2 números es $7\sqrt{2}$; la cuarta proporcional de dichos números y de su tercera proporcional es 56. ¿Cuál es el mayor de los números?

A) 21 B) 12 ~~C)~~ 14 D) 7

Resolución:

Sean los números: a y b

$$MG(a;b) = 7\sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{a.b}\right)^2 = \left(7\sqrt{2}\right)^2$$

$$a.b = 49.2$$

$$a.b = 98$$

$$a = \frac{98}{b}$$

Hallando la 3ra proporcional:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$$

$$x = \frac{b^2}{a}$$

4ta proporcional de a, b y x

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{56}$$

$$56a = b.x$$

$$56a = b\,.\frac{b^2}{a}$$

$$56.a^2 = b^3$$

$$56\left(\frac{98}{b}\right)^2 = b^3$$

$$56\,.\frac{98^2}{b^2} = b^3$$

$$56\,.\,98^2 = b^5$$

$$2^3\,.\,7\,(7^2.\,2)^2 = b^5$$

$$2^3\,.\,7\,.\,7^4.\,2^2 = b^5$$

$$2^5\,.\,7^5 = b^5$$

$$b = 14$$

Luego: a = 7

Piden: El # mayor

$b = 14$ ∴ $\boxed{\text{C) 14}}$

9. El tren “Macho” recorre desde el distrito de Huancan (Huancayo) hasta Huancavelica con velocidad de 80 km/h, pero al regreso de Huancavelica hacia Huancan lo hace a 120 km/h. ¿Cuál es la velocidad promedio, en km/h, para todo el recorrido?

A) 90 B) 96 C) 100 D) 60

Resolución:

Obs.: Para recorridos iguales, con velocidades distintas

Velocidad promedio = promedio armónico de las velocidades

Luego:

$$Vp = \frac{2 \times 80 \times 120}{80 + 120}$$

$$Vp = \frac{\cancel{2} \times 8\cancel{0} \times 12\cancel{0}}{\cancel{2}\cancel{0}\cancel{0}}$$

$$Vp = 8 \times 12$$

$$Vp = 96 \text{ km/h}$$

$\therefore$ $\boxed{\text{B) 96}}$

10. En una pista circular, un automóvil se desplaza a velocidades de:

2 ; 6 ; 12 ; 20 ; ... ; 380 km/h

La velocidad promedio del automóvil es

A) $18/19^2$ B) 19 ~~C)~~ 20 D) $21^2/20$

Resolución:

Obs.: Para distancias recorridas iguales, empleando tiempo distintos:

V_p = Al promedio armónico de las velocidades

Luego:

$$\underbrace{\underset{1\times2}{2}\ ;\ \underset{2\times3}{6}\ ;\ \underset{3\times4}{12}\ ;\ \underset{4\times5}{20}\ ;\ \ldots\ ;\ \underset{19\times20}{380}}_{19 \text{ datos}}$$

$$MH = \frac{19}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{380}}$$

$$MH = \frac{19}{1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{20}}$$

$$MH = \frac{19}{1-\frac{1}{20}}$$

$$MH = \frac{19}{\frac{19}{20}}$$

$$MH = \frac{20\times\cancel{19}}{\cancel{19}}$$

$$MH = 20$$

$\therefore$ $\boxed{\text{C) } 20}$