ARITHMETIC

Chapter 6

Summer
San Marcos 2021

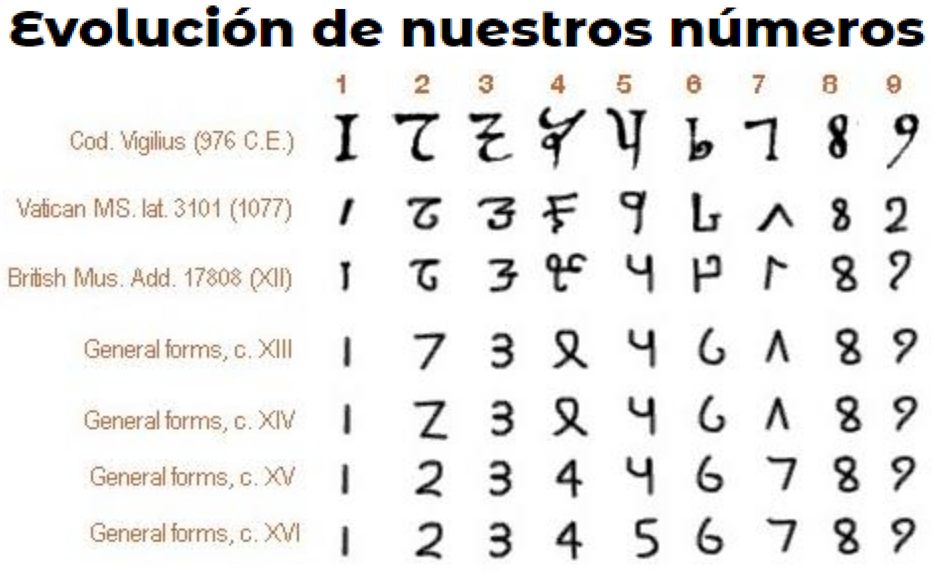
Numeración

SACO OLIVEROS

HISTORIA DE LOS NÚMEROS

La **historia de nuestros números** es una historia muy antigua. No se sabe con certeza cuánto tiempo hace que los humanos comenzaron a usarlos pero lo que sí podemos asegurar es que desde el principio el hombre necesitó palabras para expresar cantidades. Contar cuántas personas había en una cueva, expresar a qué distancia estaba el río o tomar alguna medida.

Como no hay registros escritos de cuando el lenguaje se desarrolló, es imposible saber cuándo comenzó el uso de los números. Sólo sabemos que desde muy temprano se necesitaron números para contar.



NUMERACIÓN

Es la parte de la aritmética que estudia el número en su formación y representación.

NÚMERO

Es un ente matemático, por lo tanto no tiene definición, sólo nos da la idea de cantidad.

NUMERAL

Es la figura o símbolo del número.

REPRESENTACIÓN LITERAL

Cuando no se conocen las cifras de un numeral, estas se pueden representar mediante letras afectadas por una barra a lo largo de todo el numeral.

- # de 3 cifras: $\overline{abc}$
- # de 4 cifras: $\overline{xyzw}$
- # de 5 cifras en base n: $\overline{abcde}_{(n)}$

BASE DE UN SISTEMA DE NUMERACIÓN

Es un número entero positivo mayor que uno, nos indica el número de unidades de un orden cualquiera para formar una unidad de orden superior.

ORDEN Y LUGAR DE UNA CIFRA

En todo numeral el orden de una cifra se menciona de derecha a izquierda, mientras que el lugar se menciona de izquierda a derecha.

5° 4° 3° 2° 1° :Orden

73059

Lugar: 1° 2° 3° 4° 5°

VALOR ABSOLUTO(VA) Y VALOR RELATIVO(VR) DE UNA CIFRA

El valor absoluto es el valor por la figura que representa, mientras que el valor relativo es el valor por la posición que ocupa la cifra en el numeral.

$5427_{(8)}$

- VA=7; VR=7×8^0
- VA=2; VR=2×8^1
- VA=4; VR=4×8^2
- VA=5; VR=5×8^3

DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA(DP)

Consiste en expresar al numeral como la suma de los valores relativos de sus cifras.

- $4925 = 4\times10^3 + 9\times10^2 + 2\times10^1 + 5$
- $20351_7 = 2\times7^4 + 3\times7^2 + 5\times7^1 + 1$
- $\overline{abcd}_{(n)} = a\times n^3 + b\times n^2 + c\times n^1 + d$
- $4242 = 42\times10^2 + 42$
- $3535_7 = 35_7\times7^2 + 35_7$
- $\overline{abcabc}_{(n)} = \overline{abc}_{(n)}\times n^3 + \overline{abc}_{(n)}$

CAMBIOS DE BASE

I. De base n = 10 a base n ≠ 10:

Se aplica el método de la descomposición polinómica.

Ejemplo: Convertir 1324 a base 10.

Por descomposición polinómica

$1324_{(5)} = 1\times5^3 + 3\times5^2 + 2\times5^1 + 4$

$1324_{(5)} = 125 + 75 + 10 + 4 \rightarrow 1324_{(5)} = 214$

II. De base n ≠ 10 a base n = 10:

Se aplica el método de las divisiones sucesivas.

Ejemplo: Convertir 709 a base 6.

Por divisiones sucesivas:

$$\begin{array}{l} 709 \;|\; 6 \\ 10 \quad 118 \;|\; 6 \\ \quad 49 \quad 58 \quad 19 \;|\; 6 \\ \quad 1 \quad\;\; 4 \quad\;\; 1 \quad\;\; 3 \end{array}$$

$\rightarrow 709 = 3141_{(6)}$

III. De base n ≠ 10 a base m ≠ 10:

Se aplican los dos métodos anteriores, es decir:

1°. El número se pasa a la base 10(por descomposición polinómica).

2°. El resultado obtenido se pasa a la base pedida(por divisiones sucesivas).

Ejemplo: Convertir $342_{(7)}$ a base 5

- Primer paso: A base 10

$$342_{(7)} = 3\times7^2 + 4\times7^1 + 2$$

$$342_{(7)} = 147 + 28 + 2 \rightarrow 342_{(7)} = 177$$

- Segundo paso: El resultado obtenido se pasa a base 5

$$\begin{array}{llll} 177 & \underline{|\,5} & & \\ 27 & 35 & \underline{|\,5} & \\ 2 & 0 & 7 & \underline{|\,5} \\ & & 2 & 1 \end{array}$$

$$\therefore \quad 342_{(7)} = 1202_{(5)}$$

PROPIEDAD

En toda igualdad de dos numerales se cumple, que a mayor numeral aparente le corresponde menor base y a menor numeral aparente le corresponde mayor base.

$$\overset{-}{\overline{abc}}_{\underset{+}{(x)}} = \overset{+}{\overline{mnpq}}_{\underset{-}{(y)}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{x > y}$$

1. Halle $\overline{ab}$ si $15425_{(a)} = \overline{a1}_{(b)} \times \overline{b3}_{(8)}$

A) 13 B) 26 C) 39

D) 65 ~~E)~~ 67

Resolución:

$$\underbrace{15425_{(a)}}_{5<a,} = \underbrace{\overline{a1}_{(b)}}_{a<b,} \times \underbrace{\overline{b3}_{(8)}}_{b<8}$$

$$5<a<b<8$$

$$6 \quad 7$$

$$\therefore \quad \boxed{\overline{ab} = 67}$$

2. Si $136_{(m)} + \overline{33r}_{(p)} \overline{33m}_{(r)} = \overline{44p}$ calcule $m+p+r$.

A) 20 B) 21 C) 22
D) 23 ~~E)~~ 24

Resolución:

$$\underbrace{136_{(m)}}_{6<m,} + \underbrace{\overline{33r}_{(p)}}_{r<p,} \underbrace{\overline{33m}_{(r)}}_{m<r,} = \underbrace{\overline{44p}}_{p<10}$$

$$6 < \underset{7}{m} < \underset{8}{r} < \underset{9}{p} < 10$$

$\therefore$ $\boxed{m + p + r = 24}$

3. Calcule b + n, si $\overline{bbbb}_{(n)} = 320_{(5)}$

A)4 B)6 C) 3

~~D)~~ 5 E) 7

Resolución:

$$\underbrace{\overset{+}{\overline{bbbb}}_{(n)}}_{-} = \overset{-}{320}_{\underset{+}{(5)}} \quad ...(1)$$

$$b<n \quad \wedge \quad n<5$$

En (1) DP:

$$b\times n^3+b\times n^2+b\times n+b=3\times 5^2+2\times 5$$

$$\rightarrow \quad b(n^3+n^2+n+1)=85 = \cancel{5\times 17}=1\times 85$$

$$\rightarrow \quad b(n^3+n^2+n+1)=1\times 85$$

$$\rightarrow \quad b=1, \quad n=4$$

$$\therefore \quad \boxed{b + n = 5}$$

4. Si $\overline{48ab}_{(n)} = \overline{357(2b)}$, calcule a+b.

~~A)~~ 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

Resolución:

$$\underbrace{\overline{\overset{+}{4}8a\overset{-}{b}}_{(n)}}_{8<n\ \wedge\ n<10} = \overline{\overset{-}{3}57\overset{+}{(2b)}} \quad \text{...(1)}$$

$8<n \wedge n<10 \rightarrow n=9$

En (1) DP:

$$4\times9^3+8\times9^2+a\times9+b=3570+2b$$

$$4\times729+8\times81+a\times9=3570+b$$

$$2916+648+9a=3570+b$$

$$3564+9a=3570+b$$

$$9a=6+b$$

$$\quad 1 \quad\quad 3$$

$$\therefore \boxed{a+b=4}$$

5. Calcule m+n si además $n<10_{(6)}$.

$$567_{(m)} = \overline{(n-1)n(n+1)}_{(9)}$$

A) 10
B) 11
C) 12
~~D)~~ 13
E) 14

Resolución:

$n<10_{(5)} \rightarrow n<6 \rightarrow n-1<5$

$$\rightarrow \underbrace{\overset{+}{567}_{\underset{-}{(m)}}}_{} = \overline{(n-1)n(n+1)}^{\,-}_{(9)^{+}} \quad ...(1)$$

$7<m \wedge m<9 \rightarrow m=8$

En (1) DP:

$$5\times8^2+6\times8+7=(n-1)\times9^2+n\times9+(n+1)$$

$$5\times64+48+7=(n-1)\times81+9n+n+1$$

$$320+55=81n-81+10n+1$$

$$455=91n \rightarrow n=5$$

$$\therefore \boxed{m+n=13}$$

6. Calcule ab $\overline{abba}_{(8)} = \overline{(2a)0a0}_{(7)}$.

A) 25 B) 52 ~~C)~~ 10
D) 23 E) 6

Resolución:

$$\overline{abba}_{(8)} = \overline{(2a)0a0}_{(7)}$$

DP:

$$a\times8^3+b\times8^2+b\times8+a=(2a)\times7^3+a\times7$$

$$512a+64b+8b+a=(2a)\times343+7a$$

$$513a+72b=693a$$

$$\overset{2}{\cancel{72}}b=\overset{5}{\cancel{180}}a$$

$$\rightarrow \quad 2b=5a$$

$$\therefore \quad \boxed{ab = 10}$$

7. Si $\overline{(b-4)(b+1)(b-2)}_{(7)} = \overline{kka}_{(b)}$, calcule $a+b+k$.

A) 9 B) 11 ~~C)~~ 12
D) 14 E) 16

Resolución:

$$\overline{\underbrace{(b-4)}\underbrace{(b+1)}(b-2)}_{(7)} = \overline{kka}_{(b)}$$

$$b-4>0 \ \wedge \ b+1<7 \rightarrow \ b>4 \ \wedge \ b<6$$

$$\rightarrow \ b=5$$

Luego:

$$163_{(7)} = \overline{kka}_{(5)}$$

$163_{(7)}$ a base 5:

$$163_{(7)}=1\times7^2+6\times7+3 \ =94 \rightarrow$$

94	5	
4	18	5
	3	3

$$\rightarrow \ 334_{(5)} = \overline{kka}_{(5)}$$

$$\therefore \ \boxed{a+b+k=12}$$

8. Si $\underbrace{222...22_{(3)}}_{\text{"n" cifras}} = 6560$, halle el valor de n.

A) 5　　B) 6　　C) 7
~~D)~~ 8　　E) 9

Propiedad: Numeral conformado por cifras máximas

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)...(n-1)}_{(n)}}_{\text{"k" cifras}} = n^k - 1$$

Resolución:

★ Se observa que el numeral de base 3 es un numeral conformado por cifras máximas, entonces por propiedad:

$$\underbrace{\underbrace{222...22_{(3)}}_{\text{"n" cifras}}}_{3^n - 1} = 6560$$

$$3^n - 1 = 6560$$

$$3^n = 6561$$

$$3^n = 3^8$$

$\therefore$ $\boxed{n = 8}$

6561	3
2187	3
729	3
243	3
81	3^4

3^4

9. Una persona nació en el año $\overline{19ab}$, y en el año $\overline{19ba}$ tuvo a+b años. Averigüe la edad que esta persona que tendrá en el año 2000.

~~A) 55~~ B) 32 C) 46
D) 72 E) 81

Resolución:

Datos: $\overline{19ba} - \overline{19ab} = a+b$

DP:

$$\cancel{1900}+10b+a-\cancel{1900}-10a-b = a+b$$

$$\rightarrow \quad \overset{4}{\cancel{8}}b = \overset{5}{\cancel{10}}a$$

$$\rightarrow \quad 4b = 5a$$

Luego:

$$Edad = 2000 - \underbrace{\text{año nació}}$$

$$Edad = 2000 - 1945$$

$$\therefore \quad \boxed{Edad = 55 \text{ años}}$$

10. Halle un número de tres cifras que termine en 8, tal que si se le suprime esta cifra el número resultante es $\frac{4}{41}$ del número original. Dé como respuesta la cifra de centenas de dicho número.

A) 1 B) 2 ~~C)~~ 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Sea el numeral: $\overline{ab8}$ → $\overline{ab\cancel{8}}$

→ $\overline{ab} = \frac{4}{41}\overline{ab8}$

→ $41\overline{ab} = 4\overline{ab8}$

$41\overline{ab} = 4(10\overline{ab}+8)$

$41\overline{ab} = 40\overline{ab}+32$

$\overline{ab} = 32$

→ El numeral es: 328

∴ $\boxed{\text{Cifra centenas} = 3}$