ALGEBRA

VERANO 2021

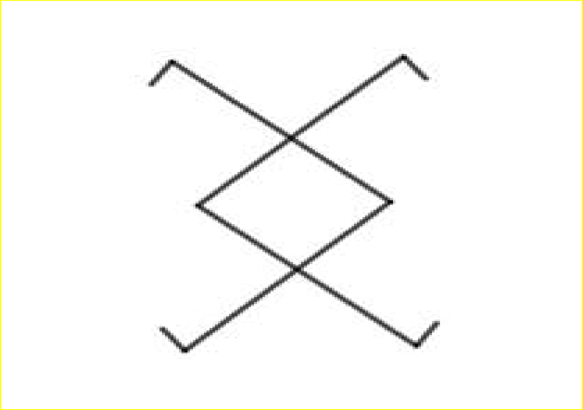
TEMA 6:

DESIGUALDADES E INECUACIONES

SACO OLIVEROS

¿QUIÉN INVENTÓ LOS SÍMBOLOS DE LAS DESIGUALDADES >; < ?

Los símbolos < y > se introdujeron por primera vez por el matemático inglés Thomas Harriot (1560-1621) en su obra Artis Analyticae Praxis publicada en Londres en 1631. Se comenta que Harriot fue inspirado por un símbolo que había visto en el brazo de un nativo americano (ver Figura) para "inventar" los símbolos de las desigualdades.



Thomas Harriot

DESIGUALDADES

Es la comparación que se realiza entre dos números reales mediante los signos de desigualdades $(> ; < ; \leq ; \geq)$

Ley de tricotomía

Para dos números reales a y b solo se cumple una de las siguientes prelaciones:

$$a > b \quad \vee \quad a < b \quad \vee \quad a = b$$

Propiedades

1) *Si* $a > b$ *y* $b > c$ $\Rightarrow$ $a > b > c$

2) *Si* $a > b$ *y* $m \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $a + m > b + m$ $\quad a - m > b - m$

3) *Si* $a > b$ *y* $m > 0$ $\Rightarrow$ $a \cdot m > b \cdot m$ $\quad \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m}$

4) *Si* $a > b$ *y* $m < 0$ $\Rightarrow$ $a.m < b.m$ $\quad \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m}$

Intervalos

Definición:

Es un subconjunto de los números reales, generalmente comprendido entre 2 valores extremos.

Ejemplo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,/ 2 \leq x < 12\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} \,/ -5 \leq x \leq 6\}$$

Clasificación

I. ACOTADOS O FINITOS

- Cerrado $[\,a; b\,]$
- Abierto $\langle\, a; b\,\rangle$
- Semicerrado $\langle a; b]$

II. NO ACOTADOS

I. Intervalo acotado

INTERVALOS	Desigualdad	Notación de Intervalos	Representación Gráfica
1.- Cerrado	$a \leq x \leq b$	$x \in [a\,;b]$	
2.- Abierto	$a < x < b$	$x \in \langle a;b\rangle$	
3.- Semiabierto	$a \leq x < b$	$x \in [a;b\rangle$	
	$a < x \leq b$	$x \in \langle a;b]$	

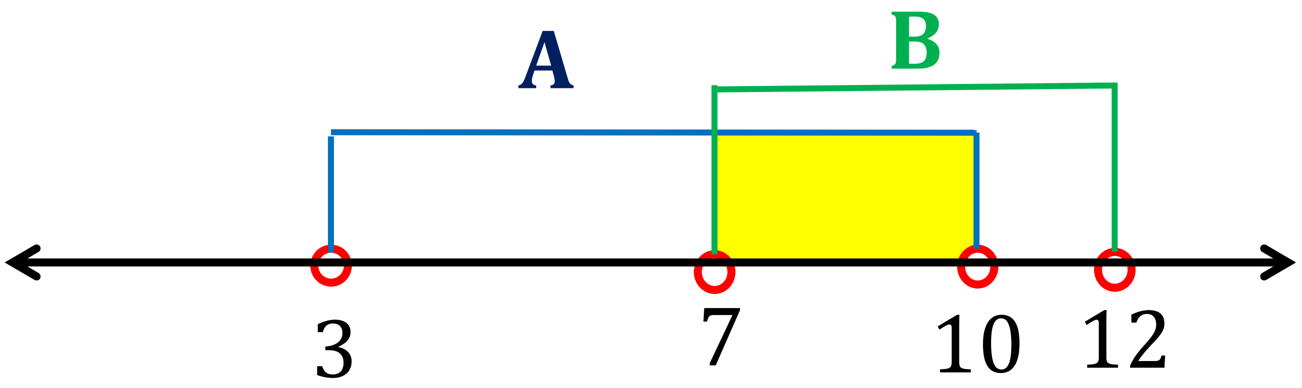
II. Intervalo no acotado

Desigualdad	Notación de Intervalos	Representación Gráfica
$x \leq b$	$x \in \langle -\infty; b]$	
$x < b$	$x \in \langle -\infty; b\rangle$	
$x \geq b$	$x \in [b; \infty\rangle$	
$x > b$	$x \in \langle b; \infty\rangle$	

Ejemplo 1

Sean $A = \langle 3\,;10\rangle$ y $B = \langle 7;12\rangle$. Halle $A \cap B$

RESOLUCIÓN

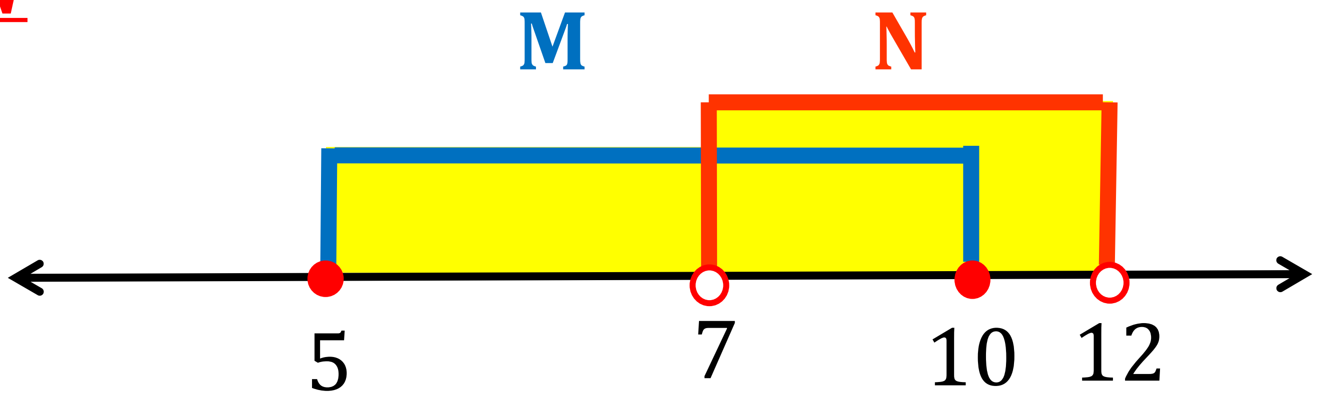


Rpta $\boxed{A \cap B = \langle 7; 10\rangle}$

Ejemplo 2

Sabiendo que M= [5 ; 10] y N=⟨7; 12⟩. Halle $M \cup N$

RESOLUCIÓN

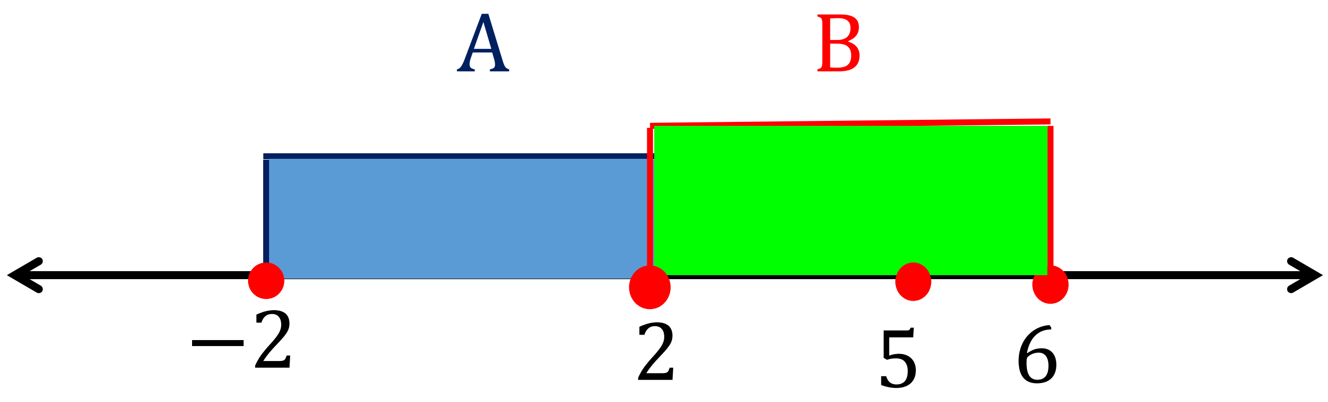


Rpta $\boxed{M \cup N = [5; 12\rangle}$

Ejemplo 3

Si A= [-2 ; 5] y B=[2; 6]. Halle $\boldsymbol{A-B}$

RESOLUCIÓN



Rpta $\boxed{A-B=[-2;2\rangle}$

Ejemplo 4

Si $x \in [1;4]$, indique el intervalo al cual pertenece $3x-2$

RESOLUCIÓN

$$\begin{aligned} &1 \leq x \leq 4 \\ \times 3 \quad &\downarrow \\ &3 \leq 3x \leq 12 \\ -2 \quad &\downarrow \\ &1 \leq 3x-2 \leq 10 \end{aligned}$$

Rpta $\boxed{[1;10]}$

INECUACIONES

DEFINICIÓN

Es una desigualdad en la que hay una o más incógnitas; y que solo *se verifica para un conjunto de valores de las incógnitas.*

Ejemplos:

$i)\ \ 2x + 1 < 5$ Inecuación lineal

$ii)\ 2x^2 - 3 > 13$ Inecuación cuadrática

Resolver una inecuación

Consiste en hallar el conjunto de valores que puede tomar la incógnita de modo que se cumpla la desigualdad.

INECUACIÓN DE PRIMER GRADO

FORMA GENERAL : $\begin{cases} ax + b < 0 \\ ax + b \leq 0 \\ ax + b > 0 \\ ax + b \geq 0 \end{cases}$

$con\ \ a, b \in \mathbb{R}\ ; \quad a \neq 0$

Ejemplo: Resolver

$$4(x - 3) - (x - 1) < 5 + x$$

Resolución :

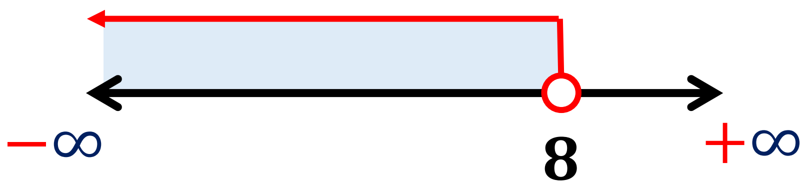
$$4x - 12 \quad -x + 1 \quad < \quad 5 + x$$

$$3x - 11 < 5 + x$$

$$3x - x < 5 + 11$$

$$2x < 16$$

$$x < 8$$



$$\boxed{C.S = \langle -\infty; 8 \rangle}$$

INECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO (factorizables)

Forma general

Siendo : $a > 0$

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \begin{cases} < 0 & > 0 \\ \leq 0 & \geq 0 \end{cases}$$

Resolución de una inecuación de segundo grado

INECUACIÓN CUADRÁTICA	RESOLUCIÓN
P(X)>0	X<MENOR v X>MAYOR
P(X)≥ 0	X≤MENOR v X≥MAYOR
P(X)<0	MENOR< X <MAYOR
P(X)≤ 0	MENOR≤ X ≤MAYOR

PRÁCTICA PARA LA CLASE

1. Si $(2x-3) \in [-5; 1\rangle$, ¿a qué intervalo pertenece $(4-5x)$?

A) $\langle -6; 9]$ B) $\langle -6; 10]$

C) $\langle -9; 6]$ D) $[-6; 9\rangle$

RESOLUCIÓN

$$-5 \leq 2x-3 < 1$$

$+3$

$$-2 \leq 2x < 4$$

$\div 2$

$$-1 \leq x < 2$$

$\times -5$

$$-10 < -5x \leq 5$$

$\div 5$

$+4$

$$-6 \leq 4-5x < 9$$

$$(4-5x) \in \boxed{[-6; 9>}$$

2. Si $-1 \le \dfrac{3x-2}{4} < 7$, determine el mayor valor de $(2-x)$.

A) $\dfrac{1}{3}$ B) $\dfrac{2}{3}$

C) $\dfrac{3}{2}$ D) $\dfrac{4}{3}$

RESOLUCIÓN

$$-1 \le \frac{3x-2}{4} < 7$$

$\times 4$

$$-4 \le 3x-2 < 28$$

$+2$

$$-2 \le 3x < 30$$

$\div 3$

$$-\frac{2}{3} \le x < 10$$

$\times -1$

$$-10 < -x \le \frac{2}{3}$$

$+2$

$$-8 < 2-x \le \frac{8}{3}$$

$$(2-x) \in \left< -8; \boxed{\frac{8}{3}} \right]$$

MAYOR VALOR

3. Halle el mayor valor de

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}\leq\frac{x-3}{4}+\frac{x-4}{5}$$

A) 2 B) 1

C) –1 D) 0

RESOLUCIÓN

$$MCM(denominadores) = 60$$

$$60\left(\frac{x-1}{2}\right)+60\left(\frac{x-2}{3}\right)\leq 60\left(\frac{x-3}{4}\right)+60\left(\frac{x-4}{5}\right)$$

$$30x-30+20x-40\leq 15x-45+12x-48$$

$$50x-70\leq 27x-93$$

$$23x\leq -23 \quad\Rightarrow\quad x\leq -1$$

$$CS =< -\infty; \boxed{-1}]$$

MAYOR VALOR

4. Resuelva la siguiente inecuación:

$$\frac{a}{b}x+\frac{b}{a}\leq\frac{b}{a}x+\frac{a}{b}$$

Considere $\boxed{a > b > 0.}$

A) $\langle -\infty; 1]$ B) $[0; +\infty\rangle$

C) $[1; +\infty\rangle$ D) $\langle -\infty; -1]$

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right): es\ positivo$$

RESOLUCIÓN

$$\frac{a}{b}x+\frac{b}{a}\leq\frac{b}{a}x+\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b}x-\frac{b}{a}x\leq\frac{a}{b}-\frac{b}{a}$$

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)x\leq 1\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x\leq 1$$

$$CS=\boxed{<-\infty;\ 1\,]}$$

5. Resuelva la inecuación cuadrática

$$x^2 + 11x + 28 > 0$$

A) $\langle -7; -4\rangle$
B) $\langle -\infty; -7\rangle \cup \langle -4; +\infty\rangle$
C) $\langle 4; 7\rangle$
D) $\langle -\infty; 4\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$

RESOLUCIÓN

$$x^2 + 11x + 28 > 0$$

$$(x+7)(x+4) > 0$$

$$\boxed{-7} \qquad \boxed{-4}$$

$$x < -7 \quad \vee \quad x > -4$$

$$CS = \boxed{< -\infty; -7 > \cup < -4; +\infty >}$$

6. Resuelve la siguiente inecuación:

$$(x-2)^2 \geq 25$$

A) $\langle -3; 7]$ B) $\langle -\infty; -7] \cup [3; +\infty\rangle$

C) $\langle -7; 3\rangle$ D) $\langle -\infty; -3] \cup [7; +\infty\rangle$

RESOLUCIÓN

$$(x-2)^2 \geq 25$$

$$x-2 \leq -5 \quad \vee \quad x-2 \geq 5$$

$$x \leq -3 \quad \vee \quad x \geq 7$$

$$CS = \boxed{< -\infty;\ -3\,] \cup\ [7; +\infty >}$$

7. Luego de resolver la inecuación

$$(2x+1)(x-6)\leq(x+4)(x-6)$$

¿cuántos valores enteros hay?

A) 3 B) 4

C) 5 D) 6

RESOLUCIÓN

$$(2x+1)(x-6)\leq(x+4)(x-6)$$

$$(2x+1)(x-6)-(x+4)(x-6)\leq 0$$

$$[(2x+1)-(x+4)](x-6)\leq 0$$

$$(x-3)(x-6)\leq 0$$

$$\boxed{3} \qquad \boxed{6}$$

$$3\leq x\leq 6$$

$$ENTEROS = 3;4;5;6$$

$$\boxed{4}\ enteros$$

8. Resuelva la inecuación en x

$$3x^2-(a+3b)x+ab<0;\ \boxed{(a-3b)\in\mathbb{R}^+}$$

A) $\langle b;\ a\rangle$ B) $\left\langle \frac{a}{3};\ b\right\rangle$

C) $\left\langle b;\ \frac{a}{3}\right\rangle$ D) $\mathbb{R}/\left[b;\ \frac{a}{3}\right]$

$$a-3b>0$$

$$a>3b$$

$$\frac{a}{3}>b$$

RESOLUCIÓN

$$3x^2-(a+3b)x+ab<0$$

$$3x \qquad -a$$

$$x \qquad -b$$

$$(3x-a)(x-b)<0$$

$$\boxed{\frac{a}{3}} \qquad \boxed{b}$$

$$b<x<\frac{a}{3}$$

$$CS=\boxed{<b;\frac{a}{3}>}$$

9. Resuelve

$$\boxed{x^2-5 \le 3x+5} < x^2+5$$

A) $[-2; 0) \cup (3; 5]$ B) $[-2; 5]$

C) $[0; 2) \cup [3; 5)$ D) $\mathbb{R}$

RESOLUCIÓN

$$x^2-5 \le 3x+5$$

$$x^2-3x-10 \le 0$$

$$(x-5)(x+2) \le 0$$

$$\boxed{5} \qquad \boxed{-2}$$

$$-2 \le x \le 5$$

$$3x+5 < x^2+5$$

$$0 < x^2-3x$$

$$0 < x(x-3)$$

$$(x-0)(x-3) > 0$$

$$\boxed{0} \qquad \boxed{3}$$

$$x < 0 \quad \vee \quad x > 3$$

Intersectando

$$-2 \le x < 0 \quad \vee \quad 3 < x \le 5$$

$$CS = \boxed{[-2; 0 > \cup < 3;\ 5]}$$

10. Al resolver el sistema de inecuaciones

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases}x(x-3)>x-3\\x(x+1)<5(x+1)\end{cases}$$

se obtiene como CS $=\langle a;b\rangle\cup\langle c;d\rangle$, halle el valor de $a+b+c+d$.

A) 5 B) 7

C) 8 D) –7

RESOLUCIÓN

De (2): $x(x+1)-5(x+1)<0$

$$(x+1)(x-5)<0$$

$$\boxed{-1}\qquad\boxed{5}$$

$$-1<x<5$$

De (1): $x(x-3)-(x-3)>0$

$$(x-3)(x-1)>0$$

$$\boxed{3}\qquad\boxed{1}$$

$$x<1\quad\vee\quad x>3$$

Intersectando:

$$-1<x<1\quad\vee\quad 3<x<5$$

$$CS=<\underset{a}{-1};\underset{b}{1}>\cup<\underset{c}{3};\underset{d}{5}>$$

$$a+b+c+d=\boxed{8}$$