ALGEBRA

Chapter 1

EXPONENTES EN R

PROF. ARTURO CÓRDOVA C.

SACO OLIVEROS

Queridos Estudiantes:

Álgebra es un curso importante de las Matemáticas, pues abarca una infinidad de escenarios no solo dentro de las matemáticas, sino también aplicadas en la ingeniería, en la arquitectura, en las finanzas, en la logística, en las física, en la química, etc.

El dominio del presente capitulo que trata sobre los exponentes y las ecuaciones exponenciales debe darse con total claridad ya que se aplicara en varios capítulos posteriores (ecuaciones; funciones; logaritmos; series etc) .

En los cursos de Física y Química su utilidad se hace necesaria sobre todo para las mediciones ya sea a una escala microscópica o sideral .

Debido a esta útil herramienta la ciencia ha hecho adelantos sorprendentes en las mediciones y unidades para las magnitudes físicas y químicas.

EXPONENTES EN R

A) *EXPONENTE NATURAL*

$$\underbrace{a.a.a.a.a\ldots\ldots\ldots\ldots.a}_{"n"\ factores} = a^n; \quad n \in \mathbb{N}$$

* $\underbrace{\sqrt[5]{3}.\sqrt[5]{3}.\sqrt[5]{3}\ldots\ldots\ldots\ldots.\sqrt[5]{3}}_{30\ factores} = \sqrt[\cancel{5}]{3}^{\overset{6}{\cancel{30}}} = 3^6 = 729$

B) *EXPONENTE CERO*

$$a^0 = 1$$

$\forall\ a \neq 0$

* $(-2022)^0 = 1$

* $-\pi^0 = -1$

C) EXPONENTE NEGATIVO

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n} \qquad \forall\ a \neq 0$$

* $2^{-7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{1}{128}$

* $\left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{4} = \frac{16}{81}$

* $(x^{-1} + y^{-1})^{-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^{-1}$

$\left(\frac{x+y}{x.y}\right)^{-1} = \frac{x.y}{x+y}$

D) EXPONENTE FRACIONARIO

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^{m}} \qquad m; n \in \mathbb{N} \quad \forall\ a > 0$$

* $32^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{32^{4}} = \sqrt[5]{32}^{\,4}$

$= 2^{4} = 16$

* $27^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^{5}}} = \frac{1}{3^{5}} = \frac{1}{243}$

TEOREMAS

I. $$\boxed{x^{a}.x^{b}=x^{a+b}}$$

$*$ $5^{n-4}.5^{8-n}=5^{4}=625$

II. $$\boxed{\frac{x^{a}}{x^{b}}=x^{a+b}}$$

$*$ $\dfrac{2^{n-3}}{2^{n-9}}=2^{n-3-(n-9)}=2^{6}$

$=64$

III. $$\boxed{x^{a.b}=(x^{a})^{b}}$$

$*$ $(x^{4})^{n+1}=x^{4n+4}$

$*$ $(a^{b})^{c}=(a^{c})^{b}=a^{b.c}$

IV. $$x^{a^{b^{c^{d}}}}$$

$*$ $2^{3^{2^{4^{0}}}}$

$=512$

V. $(a.b)^n = a^n.b^n$

* $6^x = (2.3)^x = 2^x.3^x$

VI. $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$; $\forall\ b \neq 0$

* $(\frac{3}{5})^x = \frac{3^x}{5^x}$;

VII. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$

* $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}} = \sqrt[12]{x}$

VIII.

$$E = \sqrt[m]{x^a.\sqrt[n]{x^b.\sqrt[p]{x^c}}}$$

$$E = x^{\frac{[a(n)+b].p+c}{m.n.p}}$$

* $\sqrt[5]{x^2.\sqrt[3]{x^1.\sqrt[2]{x^7}}} = x^{\frac{21}{30}}$

ECUACIÓN EXPONENCIAL

Son igualdades en donde la incognita esta como exponente y se resuelve aplicando la teoria de exponentes y además el siguiente teorema:

$$Si: \quad a^x = a^y \quad \rightarrow \quad \boxed{x = y}$$

Ejemplo

Resuelva: $27^{5x-7} = 81^{4x+1}$

RESOLUCIÓN

ponemos a base 3

$$(3^3)^{5x-7} = (3^4)^{4x+1}$$

$$3^{15x-21} = 3^{16x+4}$$

por teorema:

$$16x + 4 = 15x - 21$$

$$x = -25$$

$$CS = \{-25\}$$

PRÁCTICA PARA LA CLASE

1. ***Efectue:***

$$S = 16^{4^{-2^{-1}}} + 25^{-8^{-3^{-1}}}$$

RESOLUCIÓN

por exponente negativo y exponente fraccionario

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^{\left(\frac{1}{8}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

Luego:

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

$$\boxed{S = \frac{9}{20}}$$

2. ***Reduzca:***

$$E = \frac{21^6 \cdot 35^3 \cdot 80^3}{15^4 \cdot 14^9 \cdot 30^2}$$

RESOLUCIÓN

Descomponiendo las bases

$$E = \frac{(3.7)^6.(5.7)^3.(2^4.5)^3}{(3.5)^4.(7.2)^9.(2.3.5)^3}$$

$$E = \frac{\cancel{3^6}.\cancel{7^6}.5^3.\cancel{7^3}.2^{12}.5^3}{\cancel{3^4}.5^4.\cancel{7^9}.\underline{2^9.2^2}.\cancel{3^2}.5^2}$$

$$E = \frac{\cancel{5^3}.2^{12}.\cancel{5^3}}{\cancel{5^4}.2^{11}.\cancel{5^2}}$$

$$\boxed{E = 2}$$

3. *Simplifique:*

$$H = \sqrt[2n]{\frac{80^n + 16^n}{20^n + 4^n}}$$

RESOLUCIÓN

por teoria:

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$(4.20)^n = 4^n.20^n$$

$$80^n = 4^n.\ 20^n$$

$$H = \sqrt[2n]{\frac{4^n.20^n + 4^n.4^n}{20^n + 4^n}}$$

$$H = \sqrt[2n]{\frac{4^n.\cancel{(20^n + 4^n)}}{\cancel{20^n + 4^n}}}$$

$$H = \sqrt[2n]{(2^2)^n}$$

$$H = \sqrt[\cancel{2n}]{2^{\cancel{2n}}}$$

$$\boxed{H = 2}$$

4. ***Efectue:***

$$E=\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{27}\right)^{-1/3}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{16}{81}\right)^{-1/4}$$

RESOLUCIÓN

Efectuando la expresión:

$$E=\frac{5}{4}+(27)^{\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$E=\frac{5}{4}+\sqrt[3]{27}+\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$$

$$E=\frac{5}{4}+3+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$E=\frac{5}{4}+3+\frac{3}{4}$$

$$E=2+3$$

$$\boxed{E=5}$$

5.

Si $\{\alpha\}$ es el conjunto solución de la ecuación

$$8^{x-5} \cdot 16^{x+2} \cdot 32^{x-1} = 4^{5x-2}$$

RESOLUCIÓN

Ponemos todo a base 2

$$8^{x-5} = (2^3)^{x-5} = 2^{3x-15}$$

$$16^{x+2} = (2^4)^{x+2} = 2^{4x+8}$$

$$32^{x-1} = (2^5)^{x-1} = 2^{5x-5}$$

$$4^{5x-2} = (2^2)^{5x-2} = 2^{10x-4}$$

$$\underbrace{2^{3x-15} \cdot 2^{4x+8} \cdot 2^{5x-5}}_{\text{sumando exponentes}} = 2^{10x-4}$$

$$2^{3x-15+4x+8+5x-5} = 2^{10x-4}$$

$$\cancel{2}^{12x-12} = \cancel{2}^{10x-4}$$

$$12x-12 = 10x-4$$

$$2x = 8 \quad \rightarrow \quad x = 4$$

$$CS = \{4\} \rightarrow \alpha = 4$$

"α" es un cuadrado perfecto

6. Dadas las expresiones

$$M = \frac{6^x + 10^x}{12^x + 20^x} \quad y \quad N = \frac{12^x + 28^x}{6^x + 14^x}$$

calcule $M \cdot N$.

RESOLUCIÓN

Descomponiendo numerador y denominador

$$M = \frac{2^x.3^x + 2^x.5^x}{4^x.3^x + 4^x.5^x}$$

$$M = \frac{2^x.\cancel{(3^x+5^x)}}{4^x.\cancel{(3^x+5^x)}} = \frac{2^x}{4^x}$$

$$N = \frac{4^x.3^x + 4^x.7^x}{2^x.3^x + 2^x.7^x}$$

$$N = \frac{4^x.\cancel{(3^x+7^x)}}{2^x.\cancel{(3^x+7^x)}} = \frac{4^x}{2^x}$$

$$\boxed{M.N = 1}$$

7. $\boldsymbol{Al\ reducir:}$

$$N=\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x\sqrt{x^3}}}\ ,\ x>1$$

se obtiene $x^{\frac{a}{54}}$, determine el valor de $\sqrt{a-2}$.

RESOLUCIÓN

$\boldsymbol{Reduciendo\ por\ regla\ práctica:}$

$$N=\ x^{\frac{[2(3)+1].2+3}{3.3.2}}$$

$$N=x^{\frac{17}{18}}=x^{\frac{a}{54}}$$

$\boldsymbol{igualando:}$ $\dfrac{a}{\cancel{54}_{\,3}}=\dfrac{17}{\cancel{18}}$

$$\boxed{a=51}$$

$\boldsymbol{piden:}$

$$\sqrt{a-2}=\sqrt{49}=\boxed{7}$$

8. En la expresión

$$W=n^{n^{n}}$$

indique el exponente de n^n.

RESOLUCIÓN

aplicaremos los teoremas

$$x^a.x^b = x^{a+b}$$

$$x^{a.b} = (x^a)^b$$

$$W = n^{n^1.n^{n-1}}$$

$$W = \left(n^{n^1}\right)^{n^{n-1}}$$

$$W = \left(n^{n}\right)^{n^{n-1}}$$

Se observa que el exponente

de n^n *es:* $\boxed{n^{n-1}}$

9. La velocidad de un móvil es 8^{x-3} m/s y un tiempo de 4^{x+7} s recorre un espacio de 128^{x-1} m. Indique el valor de x^2-1.

RESOLUCIÓN

Sabemos que:

$$\boldsymbol{e = v.t}$$

reemplazando:

$$128^{x-1} = 8^{x-3}.\ 4^{x+7}$$

$$(2^7)^{x-1} = (2^3)^{x-3}.(2^2)^{x+7}$$

$$2^{7x-7} = 2^{3x-9}.\ 2^{2x+14}$$

$$2^{7x-7} = 2^{5x+5}$$

$$7x-7 = 5x+5$$

$$2x = 12 \ \rightarrow \ x = 6$$

$$x^2-1 = \boxed{35}$$

10. La Sra. Irene mayorista del mercado de productos de Santa Anita compra limones a x soles el kg siendo x el resultado de la ecuación

$$3^{4^{2x}} = 81^{2^6}$$

si compra 200 kg, ¿cuánto gastará?

RESOLUCIÓN

$$3^{4^{2x}} = (3^4)^{2^6}$$

$$\cancel{3}^{4^{2x}} = \cancel{3}^{4.2^6}$$

$$4^{2x} = 4.2^6$$

ponemos a base 2

$$(2^2)^{2x} = 2^2.2^6$$

$$2^{4x} = 2^8$$

$$4x = 8 \rightarrow x = 2$$

Cada kilo de limón cuesta 2 soles

200 *kilos costaran* :

$$200x2 = \boxed{400soles}$$