VERANO 2021

ALGEBRA

TEMA 8:

LOGARITMOS

SACO OLIVEROS

L O G A R I T M O S

I) DEFINICIÓN

Sea $N > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$:

$$\boxed{\log_a N = x \Leftrightarrow a^x = N}$$

Donde:

N : es el **número o argumento**

a : es la **base**

x : es el **logaritmo**

Ejemplo **Halle el Logaritmo de 81 en base 3**

$$\log_3 81 = x \quad \Leftrightarrow \quad 3^x = 3^4 = 81 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4$$

$$\Rightarrow \quad \log_3 81 = 4$$

II) IDENTIDAD FUNDAMENTAL

Por definición

$$\underbrace{\log_a N = x}_{\alpha} \Leftrightarrow \underbrace{a^x = N}_{\beta}$$

reemplazando "α" en "β":

$$\boxed{a^{\log_a N} = N}$$

$$N > 0\,,\, a > 0 \;\; y \;\; a \neq 1$$

Ejemplos

- $\cancel{7}^{\cancel{\log_7} 4} = 4$
- $\cancel{10}^{\cancel{\log_{10}} 9} = 9$

NOTA

Si no hay base, se sobreentiende que es la base 10.

III) PROPIEDADES

1) $\boxed{\log_a 1 = 0}$

$\Rightarrow$ $\log_{10} 1 = 0$

2) $\boxed{\log_a a = 1}$

$\Rightarrow$ $\log_7 7 = 1$

3) $\boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$

$\Rightarrow$ $\log_{12} 4 + \log_{12} 3 = \log_{12} 12 = 1$

4) $\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$

$\Rightarrow$ $\log_3 90 - \log_3 10 = \log_3 9 = 2$

5) $\boxed{\log_a N^p = p\log_a N}$

$\log_5 5^4 = 4\log_5 5 = 4(1)=4$

6) $\boxed{\log_{a^n} b^m = \dfrac{m}{n}\log_a b}$

$\log_{3^4} 3^9 = \dfrac{9}{4}\log_3 3 = \dfrac{9}{4}$

7) $\boxed{\log_a N = \dfrac{1}{\log_N a}}$

$\dfrac{1}{\log_{125} 5} = \log_5 125 = 3$

8) $\boxed{\log_a b = \log_{(a^n)}(b^n)}$

$9^{\log_{3^2} 4^2} = 9^{\log_9 16} = 16$

HELICO PRACTICE

SACO OLIVEROS

1. ¿Cuál es el valor numérico de la expresión?

$$\frac{\log_2 64}{\log_5 25}+\frac{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)}{\log 1000}-\log_3 9\cdot\log_{\sqrt{2}} 4$$

A) 8
B) –1
C) –4
D) –8

RESOLUCIÓN

La expresión:

$$\frac{6}{2}+\frac{3}{3}-(2)(4)\boxed{=-4}$$

$\log_2 64 = x_1$

$2^{x_1} = 64$

$2^{x_1} = 2^6$

$x_1 = 6$

$\log_5 25 = x_2$

$5^{x_2} = 25$

$5^{x_2} = 5^2$

$x_2 = 2$

$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = x_3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3} = \frac{1}{8}$

$2^{-x_3} = 2^{-3}$

$x_3 = 3$

$\log 1000 = x_4$

$10^{x_4} = 1000$

$10^{x_4} = 10^3$

$x_4 = 3$

$\log_3 9 = x_5$

$3^{x_5} = 9$

$3^{x_5} = 3^2$

$x_5 = 2$

$\log_{\sqrt{2}} 4 = x_6$

$\sqrt{2}^{x_6} = 4$

$2^{\frac{x_6}{2}} = 2^2$

$x_6 = 4$

2. Si $x = \log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt[3]{81}$, halle el valor de x.

A) $-\dfrac{7}{3}$

B) $\dfrac{7}{3}$

C) $\dfrac{3}{7}$

D) $\dfrac{4}{3}$

RESOLUCIÓN

$$\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt[3]{81} = x$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{(x)} = \left(3\sqrt[3]{81}\right)$$

$$3^{-x} = (3^{1})(3^{\frac{4}{3}})$$

$$3^{-x} = 3^{\frac{7}{3}}$$

$$-x = \frac{7}{3}$$

$$\boxed{x = -\frac{7}{3}}$$

3. Si

$$\log_2 4+\log_2 4^2+\ldots+\log_2 4^n=\log_2 4^6$$

halle el valor de n.

A) 4 B) 2

C) 3 D) 5

RESOLUCIÓN

$$\log_2[(4)(4^2)(4^3)\ldots(4^n)] =$$

$$\log_2(4^{1+2+3+\cdots+n}) =$$

$$\log_2 4^{\frac{n(n+1)}{2}} = \log_2 4^6 \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 6 \quad \boxed{n = 3}$$

SACO OLIVEROS APEIRON

4. Si $\boxed{\log_3 5 = x,}$ halle el valor de $\log_{45} 243$ es

A) $\frac{6}{x-4}$.

B) $\frac{4}{x+3}$.

C) $\frac{5}{x+2}$.

D) $\frac{4}{x+5}$

RESOLUCIÓN

$$\log_{45} 3^5 =$$

$$5(\log_{45} 3) =$$

$$5\left(\frac{1}{\log_3 45}\right) =$$

$$5\left(\frac{1}{\log_3 (5.9)}\right) =$$

$$\frac{5}{\log_3 5 + \log_3 9} =$$

$$\boxed{\frac{5}{x+2}}$$

5. Reduzca la siguiente expresión

$$E = \log_9 5^{\boxed{\log_5 2^{\boxed{\log_2 7}}}} + \log_9 \frac{1}{7}$$

A) 9

B) 3

C) 1

D) 0

RESOLUCIÓN

$$(\log_2 7)(\log_5 2)$$

$$(\log_{\cancel{2}} 7)(\log_{\cancel{5}} \cancel{2})(\log_9 \cancel{5})$$

$$E = \log_9 7 + \log_9 \frac{1}{7}$$

$$E = \log_9 \left[(7)\left(\frac{1}{7}\right)\right] = \log_9 1$$

$$\boxed{E = 0}$$

6. Si

$$x = \log_2(\log_4 \boxed{\log_8 64)} = \log_2 \ (\log_4 (x_1)) = \log_2 \ \boxed{(\log_4 2)})$$

$$= \log_2 \ (x_2)$$

halle el valor de $3^{1+x} + 3^{1-x}$.

A) 6 B) 7

C) 10 D) 8

RESOLUCIÓN

$$\log_8 64 = x_1$$
$$8^{x_1} = 64$$
$$8^{x_1} = 8^2$$
$$x_1 = 2$$

$$\log_4 2 = x_2$$
$$4^{x_2} = 2$$
$$2^{2x_2} = 2^1$$
$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{2}\right) = x$$
$$2^x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$x = -1$$

$$3^{1+(-1)} + 3^{1-(-1)} = \boxed{10}$$

7. Resuelva

$$2^{\log_8(x+1)}=3$$

A) {15} B) {9}
C) {26} D) {21}

RESOLUCIÓN

$$2^{\log_{\sqrt[3]{8}}\sqrt[3]{x+1}}=\cancel{2}^{\cancel{\log_2}\sqrt[3]{x+1}}=$$

$$\sqrt[3]{x+1}=3$$

$$x+1=27$$

$$\boxed{\{26\}}$$

8. El valor de x

$$3\log_2 x+2\log_4 x+4\log_8 x = 32$$

es

A) 32. B) 16.
C) 64. D) 8.

RESOLUCIÓN

Cambio de Variable:

$* \ (2^2)^{3m}$ $\quad x = 2^{6m}$ $\quad * \ (2^3)^{2m}$

$x = 4^{3m}$ $\qquad x = 8^{2m}$

La ecuación:

$$3\cancel{\log_2}\left(\cancel{2}^{6m}\right) + 2\cancel{\log_4}\left(\cancel{4}^{3m}\right) + 4\cancel{\log_8}\left(\cancel{8}^{2m}\right) = 32$$

$$18m + 6m + 8m$$

$$32m = 32 \quad \Rightarrow \quad m = 1 \Rightarrow x = 2^6$$

$$\boxed{x = 64}$$

9. Halle el producto de las soluciones de la ecuación

$$\log x = \sqrt{\log x^7 - 12}$$

A) 10^9 B) 10^6
C) 10^7 D) 10^3

RESOLUCIÓN

Al Cuadrado:

$$(\log x)^2 = 7\log x - 12$$

$$(\log x)^2 - 7\log x + 12 = 0$$

Ecuación Cuadrática Logarítmica,

cuyas dos raíces, serían: $\log x_1 \,;\, \log x_2$

"SUMA DE RAÍCES"

$$\log x_1 + \log x_2 = 7$$

$$\log_{10}(x_1 x_2) = 7$$

$$\boxed{x_1 x_2 = 10^7}$$

SACO OLIVEROS APEIRON

10. Halle las raíces de la siguiente ecuación:

$$\log_2(\log_4(\log_{16}(x^2))) = 1$$

A) $x_1 = 16^4,\ x_2 = 16^4$

B) $x_1 = 16^8,\ x_2 = -16^8$

C) $x_1 = 16^{16},\ x_2 = -16^{16}$

D) $x_1 = 4^{16},\ x_2 = -4^{16}$

RESOLUCIÓN

$$\log_2(\log_4(\log_{16}(x^2))) = 1$$

$$x^2 = 16^{16} = 16^{4^2} = 16^{4^{2^1}}$$

$$x = \pm 16^8$$

$$\boxed{x_1 = 16^8;\ x_2 = -16^8}$$