ALGEBRA

Chapter 3

PRODUCTOS NOTABLES

PROF. ARTURO CÓRDOVA C.

SACO OLIVEROS

Queridos Estudiantes:

Álgebra es un curso importante de las Matemáticas, pues abarca una infinidad de escenarios, no solo dentro de las matemáticas, sino también aplicado en la Ingeniería, en la Arquitectura, en las Finanzas, en la Logística, en la Física, en la Química, etc.

El dominio del presente capítulo que trata sobre los productos notables e identidades notables nos va a ser de mucha utilidad, ya que lo aplicaremos en futuros temas, además su aplicación en la matemática superior es muy frecuente.

En la Ingeniería se aplica en los cálculos de mediciones de áreas, perímetros, volúmenes, flujos eléctricos entre otras aplicaciones.

También se aplica en la maximización de funciones aplicadas en las ramas de Economía, Estadística, Logística, etc. Debido a esta gran herramienta la ciencia ha simplificado operaciones que antes eran extensas y muy tediosas.

PRODUCTOS NOTABLES

Son los resultados de ciertas multiplicaciones indicadas que se obtienen en forma directa, considerando implícita la propiedad distributiva de la multiplicación, por la forma que se presentan.

Trinomio cuadrado perfecto (Binomio al cuadrado)

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(5x+4)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(4) + (4)^2$$

$$(5x+4)^2 = 25x^2 + 40x + 16$$

T.C.P

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(\sqrt{3}-5)^2 = \sqrt{3}^2 - 2.\sqrt{3}.5 + 5^2$$

$$(\sqrt{3}-5)^2 = 3 - 10\sqrt{3} + 25$$

$$(\sqrt{3}-5)^2 = 28 - 10\sqrt{3}$$

Identidades de Legendre

$$\boxed{(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)}$$

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 = 2\left[\cancel{\sqrt{7}^2}+\cancel{\sqrt{3}^2}\right]$$

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2 = 2\ (7+3) = 20$$

$$\boxed{(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab}$$

$$(3x+2)^2-(3x-2)^2 = 4.(3x).(2)$$

$$(3x+2)^2-(3x-2)^2 = 24x$$

$\underline{Diferencia\ de\ cuadrados}$

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

$$(2x+3)(2x-3)=(2x)^2-(3)^2$$

$$(2x+3)(2x-3)=4x^2-9$$

$$235^2-234^2\ =(235+234).(235-234)$$

$$235^2-234^2\ =(469).(1)=469$$

$\underline{Trinomio\ al\ cuadrado}$

$$\boxed{(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)}$$

Binomio al cubo *(Forma desarrollada)*

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Identidad de Cauchy *(Forma Semidesarrollada)*

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)}$$

Suma y diferencia de cubos

$$\boxed{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3}$$

$$(2x+3)\left(4x^2-6x+9\right)=(2x)^3+(3)^3$$

$$(2x+3)\left(4x^2-6x+9\right)=8x^3+27$$

$$\boxed{(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3}$$

$$(x-5)\left(x^2+5x+5^2\right)\ =\ x^3-5^3$$

$$(x-5)\left(x^2+5x+5^2\right)\ =\ x^3-125$$

Otras aplicaciones

$$\left(x^2 + x + 1\right).\left(x^2 - x + 1\right) = x^4 + x^2 + 1$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$$

$$(x + a).(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

$$(x + a).(x + b).(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$$

$$(a + b)^2 + (a + c)^2 + (b + c)^2 = (a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2$$

$$(a + b).(a + c).(b + c) + abc = (a + b + c)(ab + ac + bc)$$

PRÁCTICA PARA LA CLASE

1. De los datos

$U=(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2$

$N=(\sqrt{5}+2)^2-(\sqrt{5}-2)^2$

$I=\underline{(\sqrt[8]{5}+1)(\sqrt[8]{5}-1)}(\sqrt[4]{5}+1)+1$

halle el valor de $W=\sqrt{U+N\cdot I}$.

RESOLUCIÓN

Por identidad de Legendre

$$U=2\left[(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{2})^2\right]$$

$$U=2\,(12+18)$$

$$U=2\,(30)\ \rightarrow\ U=60$$

$$N=4.(\sqrt{5}).(2)\ \rightarrow\ N=8\sqrt{5}$$

$$U=(\sqrt[4]{5}-1)(\sqrt[4]{5}+1)+1$$

$$U=\sqrt{5}-\cancel{1}+\cancel{1}\ \rightarrow\ U=\sqrt{5}$$

piden:

$$W=\sqrt{60+8\sqrt{5}.\sqrt{5}}$$

$$W=\sqrt{60+40}=\sqrt{100}$$

$$\boxed{W=10}$$

2. Sabiendo que

$$E=\sqrt{(2018)(2019)(2020)(2021)+1}-1$$

halle el valor de $E.(2018)^{-1}$

RESOLUCIÓN

Sea: $2018 = a$

$$E = \sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}-1$$

$$E = \sqrt{(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1}-1$$

Hacemos: $a^2+3a = x$

$$E = \sqrt{(x)(x+2)+1}-1$$

$$E = \sqrt{(x+1)^2} - 1$$

$$E = x+1-1 \rightarrow E = x$$

$$a^2+3a = a(a+3)$$

piden:

$$E.\frac{1}{a} = a+3$$

2021

3. De los datos $m+n=3$ y $mn=\sqrt{2}$, halle el valor de

$$\frac{1}{9}\left(m^3+n^3\right)$$

RESOLUCIÓN

$$(m+n)^3 = m^3+n^3+3mn(m+n)$$

reemplazando datos:

$$(3)^3 = m^3+n^3+3.\sqrt{2}.(3)$$

$$27 = m^3+n^3+9\sqrt{2}$$

$$m^3+n^3 = 27-9\sqrt{2}$$

piden:

$$\frac{1}{9}(27-9\sqrt{2})$$

$$3-\sqrt{2}$$

4. Sabiendo que

$$x^2+y^2=11$$
$$xy=7$$

calcule x^3+y^3 si $xy>0$.

RESOLUCIÓN

Sabemos que:

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2.xy$$

reemplazando datos:

$$(x+y)^2 = 11+2.(7)$$
$$(x+y)^2 = 25$$

$$x+y = 5$$

elevando al cubo

$$(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)$$

reemplazando datos:

$$(5)^3 = x^3+y^3+3.7.(5)$$

$$125 = x^3+y^3+105$$

$$x^3+y^3 = 20$$

5. Sabiendo que

$$m+n=8$$
$$mn=5$$

calcule m^2+n^2.

RESOLUCIÓN

aplicando binomio al cuadrado:

$$(m+n)^2 = m^2+n^2+2.mn$$

reemplazando datos:

$$(8)^2 = m^2+n^2+2.(5)$$

$$64 = m^2+n^2+10$$

$$64-10 = m^2+n^2$$

$$m^2+n^2 = 54$$

6. Sabiendo que

$$a^3+b^3=14$$
$$a+b=2$$

calcule a^2+b^2.

RESOLUCIÓN

aplicando binomio al cubo:

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$$

reemplazando datos:

$$(2)^3 = 14+3ab(2)$$

$$8 = 14+6ab$$

$$-6 = 6ab \rightarrow ab = -1$$

aplicando binomio al cuadrado:

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2.ab$$

reemplazando datos:

$$(2)^2 = a^2+b^2+2.(-1)$$

$$4 = a^2+b^2-2$$

$$a^2+b^2=-6$$

7. Simplifique

$$E=(3x-4)\left[\frac{(3x+2)^2-(2x+4)^2}{(4x+1)^2-(x+5)^2}\right]$$

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

RESOLUCIÓN

$$E=(3x-4).\left\{\frac{(3x+2+2x+4).(3x+2-2x-4)}{(4x+1+x+5).(4x+1-x-5)}\right\}$$

$$E=\cancel{(3x-4)}.\left\{\frac{\cancel{(5x+6)}.(x-2)}{\cancel{(5x+6)}.\cancel{(3x-4)}}\right\}$$

$$\boxed{E=x-2}$$

8. La edad de Pepe es igual al resultado de la siguiente expresión:

$$P=\frac{(2x+3)^2+(2x-3)^2+14}{(x+2)^2+(x-2)^2}$$

¿Dentro de cuántos años Pepe tendrá el triple de la edad que tiene?

RESOLUCIÓN

Por identidad de Legendre

$$P=\frac{2[(2x)^2+(3)^2]+14}{2[(x)^2+(2)^2]}$$

$$P=\frac{\cancel{2}[4x^2+9]+\cancel{14}^{\,7}}{\cancel{2}[x^2+4]}$$

$$P=\frac{4x^2+16}{x^2+4}=\frac{4\cancel{(x^2+4)}}{\cancel{x^2+4}}$$

$P=4$ (*Edad actual de Pepe*)

12 (*triple de la edad de Pepe*)

Dentro de 8 años

9. Halle el valor de

$$F=\sqrt[16]{8\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)\left(x^8+1\right)\left(x^{16}+1\right)\left(x^{32}+1\right)+1}\quad \text{para } x=3.$$

RESOLUCIÓN

$$F=\sqrt[16]{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(x^2-1)(x^2+1)}_{(x^4-1)}(x^4+1)}_{(x^8-1)}(x^8+1)}_{(x^{16}-1)}(x^{16}+1)}_{(x^{32}-1)}(x^{32}+1)}_{x^{64}-\cancel{1}}+\cancel{1}}$$

$$8$$

$$F=\sqrt[16]{x^{64}}$$

$$F=x^4=3^4=\boxed{81}$$

10. José va al mercado y compra (x+9) kilos de limón a (x+2) soles cada kilo y (x+7) kilos de tomate a (x+4) cada kilo. Si fue con 2(x+8) (x+3) soles, ¿con cuánto de vuelto regresó?

RESOLUCIÓN

Del enunciado

en limones gasto:

$$(x+9).(x+2) = x^2 + 11x + 18$$

en tomates gasto:

$$(x+7).(x+4) = x^2 + 11x + 28$$

en total gasto:

$$2x^2 + 22x + 46$$

José fue al mercado con:

$$2(x+8).(x+3) = 2(x^2 + 11x + 24)$$

$$2x^2 + 22x + 48$$

Su vuelto es :

$$2x^2 + 22x + 48 - (2x^2 + 22x + 46)$$

$$\cancel{2x^2} + \cancel{22x} + 48 - \cancel{2x^2} - \cancel{22x} - 46$$

2 soles