ARITHMETIC

Chapter 2

5°
San Marcos 2021

Serie de razones geométricas equivalentes

SACO OLIVEROS

Historia de las proporcionalidades

También puede ser útil recordar los orígenes históricos de este objeto matemático llamado razón. Para ello citamos unos párrafos: “Los pitagóricos (s. VI a.c.) consideraban como números solamente a los números naturales”. Pensaban, además, “que la naturaleza se reducía a estos números, en el sentido de que todo objeto podía expresarse con un número (la medida de su magnitud), y las relaciones entre objetos (entre sus magnitudes), siempre como una relación entre números naturales”.

“Para lograr esta relación suponían que siempre funcionaría el principio de conmensurabilidad, es decir, que dadas dos magnitudes (por ejemplo, dos segmentos), siempre era posible encontrar una magnitud (un segmento) menor que “encajara” un número exacto de veces en cada una de las dos magnitudes (los dos segmentos) relacionadas. Es decir, dados los segmentos a y b, podía suceder que ni a encajara un número exacto de veces en b, ni viceversa. Pero entonces, siempre era posible encontrar un segmento menor c, tal que estuviera contenido “n veces” en a y “m veces” en b, con lo que la relación entre a y b podía denotarse mediante la expresión n/m.

Serie de razones geométricas equivalentes

Para n razones de igual valor numérico:

ANTECEDENTES

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \ldots = \frac{a_n}{c_n} = k$$

CONSECUENTES

CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD

$$a_1 = c_1 \cdot k$$
$$a_2 = c_2 \cdot k$$
$$a_3 = c_3 \cdot k$$
$$\vdots$$
$$a_n = c_n \cdot k$$

Principio fundamental:

$$a_i = c_i \cdot k \;;$$

ANTECEDENTE = CONSECUENTE · CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD

PROPIEDADES

1 De la proporción tenemos:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n}{c_n} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n} = k$$

Textualmente:

$$\frac{\text{Suma de antecedentes}}{\text{Suma de consecuentes}} = k$$

Ejemplo:

$$\frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{12}{4} = \frac{21}{7} = \frac{6 + 15 + 12 + 21}{2 + 5 + 4 + 7} = \frac{\cancel{54}}{\cancel{18}} = 3$$

2 De la proporción tenemos:

$$\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n}{c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdot \ldots \cdot c_n} = k^n = \left(\frac{a_1}{c_1}\right)^n = \left(\frac{a_2}{c_2}\right)^n = \left(\frac{a_3}{c_3}\right)^n = \ldots = \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^n$$

Textualmente

$$\frac{\text{Producto de antecedentes}}{\text{Producto de consecuentes}} = k^n$$

n = número de razones consideradas

Ejemplo:

$$\frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{12}{4} = \frac{21}{7} = 3 \Rightarrow \frac{6 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 21}{2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7} = 3^4$$

3 De la proporción tenemos:

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n}{c_n} = k \Rightarrow \left(\frac{a_1}{c_1}\right)^m = \left(\frac{a_2}{c_2}\right)^m = \left(\frac{a_3}{c_3}\right)^m = \dots = \left(\frac{a_n}{c_n}\right)^m = k^m$$

Donde:

$$\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \dots + a_n^m}{c_1^m + c_2^m + c_3^m + \dots + c_n^m} = k^m$$

Textualmente:

$$\frac{\text{Suma de antec. elevados a la m}}{\text{Suma de consec. elevados a la m}} = k^m$$

Serie de razones geométricas equivalentes continuas

En general:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_4} = \dots = \frac{a_n}{a_{n+1}} = k$$

Donde:

$$\frac{a_1}{\cancel{a_2}} \cdot \frac{\cancel{a_2}}{\cancel{a_3}} \cdot \frac{\cancel{a_3}}{\cancel{a_4}} \cdot \dots \cdot \frac{\cancel{a_n}}{a_{n+1}} = k^n \Rightarrow$$

Propiedad

$$\frac{a_1}{a_{n+1}} = k^n$$

Ejemplos:

$$\frac{243}{81} = \frac{81}{27} = \frac{27}{9} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = k \quad \begin{cases} d = ek \\ c = ek^2 \\ b = ek^3 \\ a = ek^4 \end{cases}$$

1. Jaimito le pregunta por su edad a su profesor de Aritmética y éste le responde, "Mi edad en años es el valor de (a + b + c – d), siendo $\frac{a}{65} = \frac{14}{b} = \frac{c}{40} = \frac{10}{d}$; además a, b, c y d en ese orden forman una proporción aritmética". ¿Cuántos años tiene el profesor?

A) 42 B) 32 C) 54 D) 52

Resolución:

del dato tenemos:

$$\frac{a}{65} = \frac{14}{b} = \frac{c}{40} = \frac{10}{d} = k$$

además:

$$a - b = c - d$$

$$65k - \frac{14}{k} = 40k - \frac{10}{k}$$

$$25k = \frac{4}{k} \Rightarrow k^2 = \frac{4}{25}$$

$$\boxed{k = \frac{2}{5}}$$

Piden:

la edad del profesor

$$E = a + b + c - d$$

$$E = 26 + 35 + 16 - 25$$

$$\therefore E = 52 \text{ años}$$

D) 52

2. Se tiene una serie de tres razones geométricas continuas equivalentes, donde la suma de sus antecedentes es 152 y la suma de sus consecuentes es 228. Determine la suma del menor y mayor término de dicha serie.

~~A)~~ 140 B) 160 C) 168 D) 124

Resolución:

del dato tenemos:

$$\frac{nk^3}{nk^2} = \frac{nk^2}{nk} = \frac{nk}{n} = k$$

- suma ant. $= 152$
- suma con. $= 228$

propiedad:

$$\frac{\cancel{152}}{\cancel{228}} = k \Rightarrow \boxed{k = \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow nk^3 + nk^2 + nk = 152$$

$$\frac{8}{27}n + \frac{4}{9}n + \frac{2}{3}n = 152$$

$$\frac{8n + 12n + 18n}{27} = 152$$

$$\frac{\cancel{38}}{27}n = \overset{4}{\cancel{152}} \Rightarrow \boxed{n = 108}$$

Piden:

menor + mayor

$$n + nk^3$$

$$\Rightarrow 108 + \overset{4}{\cancel{108}} \cdot \frac{8}{\cancel{27}}$$

$$108 + 32$$

$$\therefore 140$$

A) 140

3. Seis amigos tienen cantidades enteras de soles que forman tres razones geométricas continuas donde la suma de los antecedentes es 70. Si lo que tiene el mayor es a lo que tiene el menor como 8 es a 1. ¿Cuántos soles suman las seis cantidades?

A) 105 B) 210 C) 268 D) 184

Resolución:

del dato tenemos:

$$\frac{nk^3}{nk^2} = \frac{nk^2}{nk} = \frac{nk}{n} = k$$

- suma ant. $= 70$ ...(I)

- $\frac{\cancel{n}k^3}{\cancel{n}} = \frac{8}{1} \Rightarrow k^3 = 8$ $\boxed{k = 2}$

además en ...(I)

$nk^3 + nk^2 + nk = 70$

$\Rightarrow 8n + 4n + 2n = 70$

$14n = 70 \Rightarrow \boxed{n = 5}$

Piden:

suma de cantidades

$40 + 20 + 20 + 10 + 10 + 5$

$\therefore$ 105 soles

A) 105

4. La suma de cada antecedente con su respectivo consecuente de una serie de tres razones geométricas equivalentes es 8, 16 y 32 respectivamente. Si el producto de los antecedentes es 64. Halle la suma de los consecuentes.

A) 30 B) 40 ~~C)~~ 42 D) 36

Resolución:

del dato tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

- $a + b = 8$
- $c + d = 16$
- $e + f = 32$

propiedad:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} = \frac{e}{e+f}$$

$$\frac{a}{\cancel{8}_1} = \frac{c}{\cancel{16}_2} = \frac{e}{\cancel{32}_4} = k$$

dato: $a \cdot c \cdot e = 64$

$k \cdot 2k \cdot 4k = 64$

$8k^3 = 64 \Rightarrow \boxed{k = 2}$

reemplazando:

$a = 2 \quad c = 4 \quad e = 8$

$b = 6 \quad d = 12 \quad f = 24$

Piden:

suma de consecuentes

$\therefore \; b + d + f = 42$

C) 42

5. Sea: $\dfrac{A}{x} = \dfrac{B}{y} = \dfrac{C}{z} = k$

Si

$$\frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2} + \frac{C^2}{z^2} + \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{x^2+y^2+z^2}} = 14$$

Hallar el valor de k:

A) 1 ~~B)~~ 2

C) 3 D) 4

del dato tenemos:

$$\frac{A}{x} = \frac{B}{y} = \frac{C}{z} = k$$

además:

$$\frac{A^2}{x^2} + \frac{B^2}{y^2} + \frac{C^2}{z^2} + \sqrt{\frac{A^2+B^2+C^2}{x^2+y^2+z^2}} = 14$$

propiedad

$$k^2 + k^2 + k^2 + \cancel{\sqrt{k^2}} = 14$$

$$3.k^2 + k = 14$$

Piden: $\therefore$ k = 2 $\boxed{B)\ 2}$

6. Si $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$ y $\frac{a^3+b^3+c^3}{m^3+n^3+p^3} = 125$

Calcule $E = \frac{a^2m+b^2n+c^2p}{m^3+n^3+p^3}$.

A) 23 B) 24

~~C)~~ 25 D) 28

del dato tenemos:

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = k$$

además

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{m^3+n^3+p^3} = 125$$

propiedad

$$k^3 = 125 = 5^3$$

$$\boxed{k = 5}$$

Luego:

$$E = \frac{a^2m+b^2n+c^2p}{m^3+n^3+p^3}$$

propiedad

$$E = \frac{a^2\cancel{m}}{\cancel{m^3}} = \frac{b^2\cancel{n}}{\cancel{n^3}} = \frac{c^2\cancel{p}}{\cancel{p^3}}$$

$$E = \frac{a^2}{m^2} = \frac{b^2}{n^2} = \frac{c^2}{p^2} = k^2$$

Piden:

$\therefore$ $E = 25$

$\boxed{\text{C) 25}}$

7. Si: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = k$

Además

$$(a+b)(c+d)(e+f) = 8^{16}$$

Halle $\sqrt[3]{a \cdot c \cdot e} + \sqrt[3]{b \cdot d \cdot f}$.

A) 2^{12} B) 16

~~C)~~ 2^{16} D) 2^{20}

del dato tenemos:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$$

además

$$(a+b)(c+d)(e+f) = 8^{16}$$

donde

$$(bk+b).(dk+d).(fk+f) = 8^{16}$$

$$b(k+1).d(k+1).f(k+1) = 8^{16}$$

$$b.d.f.(k+1)^3 = 8^{16}$$

extrayendo la raíz cubica:

$$\boxed{\sqrt[3]{b.d.f}.(k+1) = 2^{16}} \ldots (I)$$

propiedad

$$\frac{a.c.e}{b.d.f} = k^3$$

$$a.c.e = b.d.f.k^3$$

reemplazando:

$$\sqrt[3]{b.d.f.k^3} + \sqrt[3]{b.d.f}$$

$$\sqrt[3]{b.d.f}.k + \sqrt[3]{b.d.f}$$

$$\boxed{\sqrt[3]{b.d.f}.(k+1)}$$

Piden: de ... (I)

$\therefore$ 2^{16}

$\boxed{C)\ 2^{16}}$

8. Sea: $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \mathbf{h}$

Hallar el valor de :

$$x = \frac{a \cdot b(p^3 + q^3)(a + c)}{p \cdot q(a^3 + b^3)(p + r)}$$

~~A)~~ 1 B) h

C) h^2 D) $\frac{1}{h}$

del dato tenemos:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = h$$

además:

$$x = \frac{a \cdot b(p^3 + q^3)(a + c)}{p \cdot q(a^3 + b^3)(p + r)}$$

propiedad

$$x = h \cdot h \cdot \frac{1}{h^3} \cdot h$$

$$x = \cancel{h^3} \cdot \frac{1}{\cancel{h^3}}$$

Piden: $\therefore\ x = 1$

$\boxed{\text{A) 1}}$

9. Si: $\frac{D}{N} = \frac{I}{A} = \frac{A}{8} = C$

Además: D + I + A + N + A = 220

Donde: D + N = 100

Halle: C + A + N + A + D + A .

A) 120 B) 125

C) 175 D) 180

Resolución:

del dato tenemos:

$$\frac{D}{N} = \frac{I}{A} = \frac{A}{8} = C$$

$$\frac{D}{N} = \frac{8C^2}{8C} = \frac{8C}{8} = C$$

además:

D + I + A + N + A = 220

reemplazando:

$$100 + 8C^2 + 2 . 8C = 220$$

$$\cancel{8}C^2 + 2 . \cancel{8}C = \cancel{120}$$

$$C^2 + 2 . C = 15$$

$$\boxed{C = 3}$$

Donde:

A = 8(3) = 24

I = $8(3^2)$ = 72

Piden:

C + A + N + A + D + A

3 + 3 . 24 + 100

∴ 175

$\boxed{\text{C) 175}}$

10. La suma, la diferencia y el producto de dos números están en la relación de 5; 3 y 16. Halle el menor de dichos números.

A) 1 B) 3

C) 7 ~~D)~~ 4

Resolución:

del dato tenemos:

$$\frac{a+b}{5}=\frac{a-b}{3}=\frac{a\,.\,b}{16}=k$$

Donde:

$$\left.\begin{aligned} a+b &= 5k \\ a-b &= 3k \end{aligned}\right\} (+)$$

$$2a = 8k \Rightarrow \begin{aligned} a &= 4k \\ b &= k \end{aligned}$$

además:

$$a\,.\,b = 16k$$

$$\Rightarrow 4k\,.\,\cancel{k} = 16\cancel{k}$$

$$\boxed{k = 4}$$

Piden:

el menor número

$$\therefore\ b = 4$$

$\boxed{\text{D) 4}}$