ALGEBRA

Chapter 2

5th SAN MARCOS

Polinomios II

Teoria de grados

Prof.
Sneiter Bazán Reyes

SACO OLIVEROS

GRADO DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

$G.A. =$ *Grado Absoluto o Grado.*

$G.R. =$ *Grado Relativo con respecto a una variable.*

Sea el monomio: $\boldsymbol{M(x;y) = k.x^{a}.y^{b}}$ $*$ $\boldsymbol{M(x;y) = 5.x^{7}.y^{4}}$

$\boldsymbol{G.A.(M) = a + b}$ $\boldsymbol{G.R.(x) = a}$ $\boldsymbol{G.R.(y) = b}$

Sea el polinomio: $\boldsymbol{P(x;y) = 7x^{5}y^{6} + 9x^{7}y^{2} - 6x^{6}y^{4}}$

$\boldsymbol{G.A.(P) = 11}$ ***(el mayor grado de todos sus términos o monomios)***

$\boldsymbol{G.R.(x) = 7}$ ***(el mayor exponente de "x" en todos sus términos)***

$\boldsymbol{G.R.(y) = 6}$ ***(el mayor exponente de "y" en todos sus términos)***

Ejemplo ***Si el grado del polinomio:***

$$\begin{array}{cccc} m+n-1 & m+n+1 & m+n & m+n+4 \end{array}$$

$$P(x) = 2x^{m}y^{n-1} + 3x^{m+1}y^{n} + 7x^{m-2}y^{n+2} + 6x^{m+3}y^{n+1}$$

es 23. ***Halle $m+n$***

RESOLUCIÒN

$$G.A.(P) = m+n+4 \ (mayor\ suma\ de\ exp.)$$

$$por\ dato: \quad m+n+4 = 23$$

$$\boxed{m+n = 19}$$

POLINOMIOS ESPECIALES

$A)$ $\boldsymbol{POLINOMIO\ HOMOGÉNEO}.$ $Mínimo\ dos\ términos\ y\ dos\ variables,$ $donde\ sus\ términos\ tienen\ el\ mismo\ grado.$

$$\boldsymbol{P(x;y) = 7x^5y^6 + 9x^7y^4 - 6x^8y^3 + x^{11} \rightarrow Grado = 11}$$

$B)$ $\boldsymbol{POLINOMIO\ COMPLETO\ Y\ ORDENADO}.$ $Coeficientes\ no\ nulos, donde\ la\ variable\ tiene\ todos\ sus\ exponentes\ consecutivos\ desde\ o\ hasta\ cero$

$$\boldsymbol{P(x) = 7x^5 + 9x^4 - 6x^3 + x^2 - 8x + 4}$$

$Se\ cumple\ que:$ $\boldsymbol{\#\ términos = \#\ grado + 1}$

c) POLINOMIOS IDENTICOS .

Son aquellos en la que sus términos semejantes tienen igual coeficiente

Ejemplo

$$ax^7 + bx^2 + c \equiv mx^7 + nx^2 + p \quad \begin{cases} a = m \\ b = n \\ c = p \end{cases}$$

Sea: $\boxed{P(x) \equiv Q(x)}$

Si: $x = \alpha \ (constante) \rightarrow \quad P(\alpha) = Q(\alpha)$

E) POLINOMIO IDENTICAMENTE NULO . $\boxed{P(x) \equiv 0}$

Son aquellos cuyos coeficientes de sus términos son iguales a cero.

Ejemplo

$$ax^7 + bx^2 + c \equiv 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Tambièn se cumple que:

$$P(\alpha) = 0$$

PRACTICA PARA LA CLASE

1. El polinomio:

$$P(x)=7+x^{m^{2m}-15}+3x^{(m-1)m}+5x^{2m-1}+\ldots+Ax^{n^2-1}$$

es completo y ordenado y tiene $4m^m$ términos. Si el precio de cada agendita en soles es $\sqrt[n]{mn\sqrt[m]{n}}$. ¿Cuánto se pagará por 100 agenditas?

A) S/ 200 B) S/ 180

C) S/ 160 D) S/ 140

RESOLUCIÒN

$$P(x)=7+x^{m^{2m}-15}+3x^{(m-1)m}+5x^{2m-1}\ldots\ldots\ldots+Ax^{n^2-1}$$

1 2 3

Grado Absoluto

$7x^0$

$2m-1=3\rightarrow \boxed{m=2}$

Número de Términos = Grado Absoluto +1

$$4m^m = n^2-\cancel{1}+\cancel{1}$$

$$16 = n^2$$

$(n>0)$ $\boxed{4=n}$

$$\sqrt[n]{mn\sqrt[m]{n}}=\sqrt[4]{(2)(4)\sqrt[2]{4}}=2$$

$$100\ x\ S/2 = \boxed{S/200}$$

2. Sabiendo que:

$P(x;y) = (3n-6)x^{n-1}y^{n-1} - (1-n)x^n y$ es un polinomio homogéneo y el grado relativo respecto a la variable z del polinomio

$$Q(x;y;z) = x^2y^{n+2}z^{3n+5} + z^{2+3n^2} + 2xy^2 - z^{n^3}$$

representa la edad de Diego. Determine la suma de cifras de su edad.

A) 10 B) 11

C) 12 D) 15

RESOLUCIÒN

$$P(x;y) = (3n-6)\underbrace{x^{n-1}y^{n-1}} - (1-n).\underbrace{x^n y}$$

$$G^{\underline{o}} = n-1+n-1 \qquad G^{\underline{o}} = n+1$$

$$G^{\underline{o}} = 2n-2$$

$$2n-2 = n+1 \ \rightarrow \ \boxed{n=3}$$

reemplazando en Q

$$Q(x;y;z) = x^2y^5z^{14} + z^{29} + 2xy^2 - z^{27}$$

$$G.R.(Z) = 29 \ (edad\ de\ Diego) \qquad 2+9 = \boxed{11}$$

3. Un artículo es lanzado al mercado y x meses después de su lanzamiento el ingreso es $I(x)=x^4+7x^3+17x^2+mx+n$, el precio unitario de venta es $P(x)=x^2+ax+b$ y el número de unidades vendidas es $Q(x)=x^2+bx+a$. Halle $m+n$, sabiendo que el ingreso es el producto del precio unitario y la cantidad vendida.

A) 36 B) 46

C) 39 D) 49 E) 64

Efectuando la multiplicación polinómica:

$$x^2+ax+b \quad \text{por}$$
$$x^2+bx+a$$

$$x^4+ax^3+bx^2$$
$$bx^3+abx^2+b^2x$$
$$ax^2+a^2x+ab$$

$$x^4+\boxed{(a+b)x^3}+\boxed{(ab+a+b)x^2}+\boxed{(a^2+b^2)x}+\boxed{ab}$$

$$\textbf{Pero:}\quad x^4+\boxed{7x^3}+\boxed{17x^2}+\boxed{mx}+\boxed{n}$$

$$\text{Ingreso}=\left(\begin{matrix}\text{Precio de Venta}\\ \text{Unitario}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{Número de unidades}\\ \text{Vendidas}\end{matrix}\right)\Rightarrow\quad I(x)=[P(x)][Q(x)]$$

Igualando coeficientes tenemos:

$a+b=7$ | $ab+a+b=17$, $ab=10$ | resolvemos: $a=5$, $b=2$ | $a^2+b^2=m$, $m=29$ | $ab=n$, $n=10$

$$\boxed{m+n=39}$$

4. Sean $x_n=(-1)^n+1$; y $S_n=x_1+x_2+...+x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Halle $S_{101}-S_{100}$.

A) –1 B) 0

C) 1 D) –2 E) 2

Evaluando S_n:

$$n = 100$$

$$S_{100} = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{100}$$

$n = 101 \Rightarrow$ $S_{101} = \cancel{x_1} + \cancel{x_2} + \cancel{x_3} + \cdots + \cancel{x_{100}} + x_{101}$

S_{100} *por* $-1 \Rightarrow$ $-S_{100} = -\cancel{x_1} - \cancel{x_2} - \cancel{x_3} - \cdots - \cancel{x_{100}}$

$$S_{101} - S_{100} = x_{101}$$

$$= (-1)^{101} + 1$$

$$= -1 + 1$$

$$\boxed{S_{101} - S_{100} = 0}$$

5. Si el polinomio:

$P(x)=nx^{n+5}+(n+1)x^{n+6}+(n+2)x^{n+7}+\dots$ es ordenado y completo, calcular P(1) – P(–1).

A) –15
B) –12
C) 12
D) 5
E) 15

Es Ascendente

$$x^{n+5}=x^0 \quad \Rightarrow \quad n=-5$$

Reemplazando en el polinomio:

$$P(x)=-5x^0-4x^1-3x^2-2x^3-1x^4$$

$$P(x)=-5-4x-3x^2-2x^3-x^4$$

Los valores numéricos:

$$P(1)=-5-4(1)-3(1)^2-2(1)^3-(1)^4=-5-4-3-2-1 \quad \Rightarrow P(1)=-15$$

$$P(-1)=-5-4(-1)-3(-1)^2-2(-1)^3-(-1)^4=-5+4-3+2-1 \Rightarrow P(-1)=-3$$

$$\boxed{P(1)-P(-1)=-12}$$

6. En el polimonio

Determine el grado relativo respecto a y.

$P(x)= 2x^{m}y^{n-1} + 3x^{m+1}y^{n} + 7x^{m-2}y^{n+2} + 6x^{m+3}y^{n+1}$

A) 3 B) 5
C) 7 D) 9

GR(x)= 12 y el GA = 18

RESOLUCIÒN

$G.R.(y)$ $G.R.(x)$

$$P(x)= \underbrace{2x^{m}y^{n-1}}_{G^{o} = m+n-1} + \underbrace{3x^{m+1}y^{n}}_{G^{o} = m+1+n} + \underbrace{7x^{m-2}y^{n+2}}_{G^{o} = m+n} + \underbrace{6x^{m+3}y^{n+1}}_{G^{o} = m+n+4}$$

$(mayor)$

de los datos:

$G.R.(x) = 12$

$m+3 = 12$

$m = 9$

$G.A.(P) = 18$

$m+n+4 = 18$

$n = 14 - m$

$n = 5$

piden:

$G.R.(y) = n+2$

$G.R.(y) = 5+2$

$G.R.(y) = 7$

7. En los productos farmacéuticos se especifican las dosis que se recomiendan para adultos y para niños. Una de las reglas a utilizar es la regla de Cowling. $D_C(t) = \lambda\left(\frac{t+1}{24}\right)$; donde λ denota la dosis para adulto (en mg) y t indica la edad del niño en años. Si t_0 es la edad del niño, en la que su dosis corresponde a la octava parte de la dosis para adulto, y si se cumple que

$$a^{t_0+1} - abc + b^{t_0+1} - 2abc + c^{t_0+1} = abc,$$

simplifique la expresión,

$$\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ac} + \frac{c^2}{ab}$$

A) 12 B) 8
C) 6 D) 4 E) 9

Por dato:

$$D_C(t_0) = \frac{\lambda}{8}$$

$$\lambda\left(\frac{t_0+1}{24}\right) = \frac{\lambda}{8} \Rightarrow$$

$$t_0 = 2$$

Además, tenemos:

$$a^{2+1} - abc + b^{2+1} - 2abc + c^{2+1} = abc$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 4abc$$

Nos piden:

$$\frac{a^2a}{bca} + \frac{b^2b}{acb} + \frac{c^2c}{abc} = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

$$= \frac{4abc}{abc} = \boxed{4}$$

7. En los productos farmacéuticos se especifican las dosis que se recomiendan para adultos y para niños. Una de las reglas a utilizar es la regla de Cowling. $D_C(t) = \lambda\left(\frac{t+1}{24}\right)$; donde λ denota la dosis para adulto (en mg) y t indica la edad del niño en años. Si t_0 es la edad del niño, en la que su dosis corresponde a la octava parte de la dosis para adulto, simplifique la expresión,

$$\frac{a^{t_0+1} + abc + b^{t_0+1} + 2abc + c^{t_0+1}}{abc},$$

A) 12 B) 8

C) 6 D) 4 E) 9

Por dato: $D_C(t_0) = \frac{\lambda}{8}$

$$\lambda\left(\frac{t_0+1}{24}\right) = \frac{\lambda}{8}$$

Nos piden: $t_0 = 2$

$$\frac{a^{2+1} + abc + b^{2+1} + 2abc + c^{2+1}}{abc}$$

$$= \frac{a^{2+1} + abc + b^{2+1} + 2abc + c^{2+1}}{abc}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3abc}{abc}$$

8. Si el polinomio

$$P(x)= x^{n+1} + 2x^{p+3} + 3x^{m+2} + \ldots$$

tiene $2m$ términos es completo y ordenado decrecientemente. Calcule el valor de

$$T= m^2 + \frac{n}{2} + p^2$$

A) 46 B) 54

C) 66 D) 72

RESOLUCIÒN

$$P(x) = x^{\overset{m+4}{n+1}} + 2x^{\overset{m+3}{p+3}} + 3x^{\overset{m+2}{m+2}} + \cdots$$

$G.A. = m + 4$

$$\boxed{N^{\text{o}}\ T\grave{e}rminos = G.A. + 1}$$

$$2m = m + 4 + 1$$

$$m = 5$$

También:

$$m + 4 = n + 1 \Rightarrow n = 8$$

$$m + 3 = p + 3 \Rightarrow p = 5$$

$$piden: T = 5^2 + \frac{8}{2} + 5^2$$

$$T = 54$$

9. Si

$$a(x - by + a) + b(x - ay + b) \cong 2x + 4y + 8$$

para todo x; y. Determine el valor de

$$Q = a^{-1} + b^{-1} + \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} + \left(\frac{b}{a}\right)^{-1}$$

A) –2 B) –5
C) 4 D) 6

RESOLUCIÒN

$$\underline{ax} - aby + \underline{a^2} + \underline{bx} - aby + \underline{b^2} \cong 2x + 4y + 8$$

por polinomios idénticos:

$$(a+b)x - 2aby + a^2 + b^2 \cong 2x + 4y + 8$$

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = -2 \\ a^2 + b^2 = 8 \end{cases}$$

piden:

$$Q = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{b} = \frac{a + b + a^2 + b^2}{ab} = \frac{2+8}{-2}$$

$$\boxed{Q = -5}$$

10. Calcule el valor de: $m^5 - 15m$ si el polinomio:

$$P(x) = \underbrace{(m^3+n-p-10)}_{=0}x^{m^6} + \underbrace{(p-n+m)}_{=0}x^{m^9}$$

es idénticamente nulo.

A) 8 B) 6

C) 4 D) 2

RESOLUCIÒN

Como: $P(x) \equiv 0$

Se cumple que:

$$\begin{aligned} m^3 + \cancel{n} - \cancel{p} - 10 &= 0 \\ \cancel{p} - \cancel{n} + m &= 0 \end{aligned} \quad +$$

$$m^3 + m - 10 = 0$$

$$m^3 + m = 10$$

$$m^3 + m = 2^3 + 2$$

$$m = 2$$

$$m^5 - 15m = 2^5 - 30$$

$$m^5 - 15m = \boxed{2}$$