ALGEBRA

Chapter 5

Ecuaciones

PROF. ARTURO CÓRDOVA C.

SACO OLIVEROS

ECUACIÓN

Se denomina **ecuación algebraica** o solo **ecuación** a aquella igualdad que presenta al menos una cantidad desconocida, denominada incógnita o variable.

EJEMPLOS:

$$x^3 = 3x + 2$$

$$4x - 5y = 20$$

$$x^2 + 4y^2 = z + 3$$

Para una sola variable, presenta la forma general: $F(x) = G(x)$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN

Se llama **solución** al valor de la incógnita o variable que, al reemplazarla en ambos miembros, verifica o satisface la igualdad.

EJEMPLO: Para la ecuación $x^3 = 3x + 2$, son sus soluciones: -1 y 2.

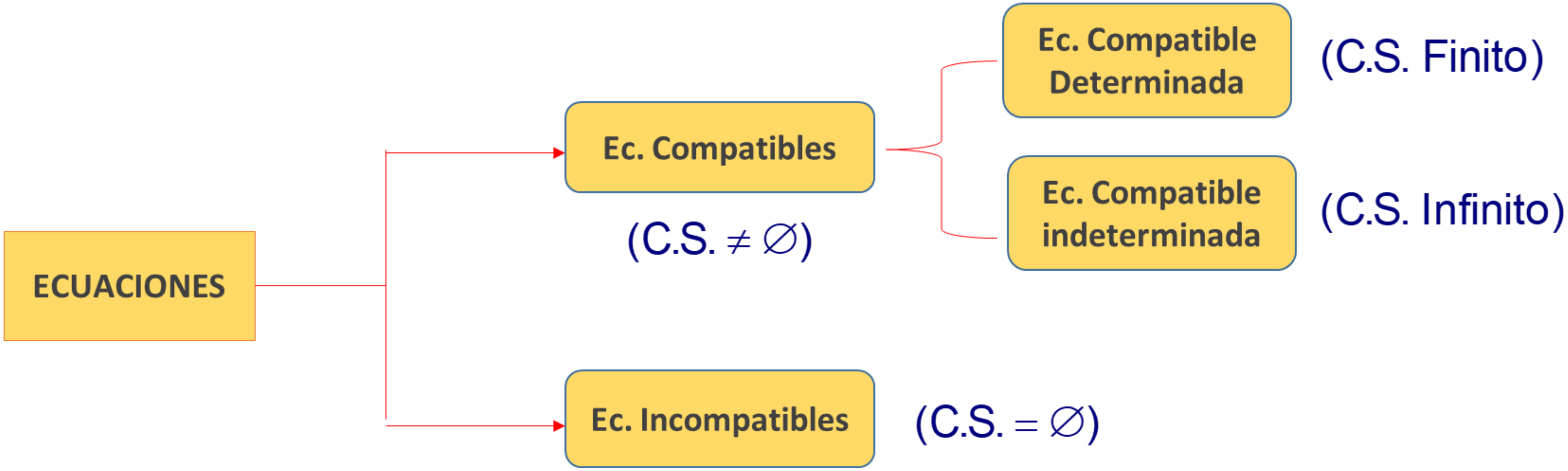
CONJUNTO SOLUCIÓN (C.S.)

Es aquel conjunto que reúne a todas las soluciones que admite una ecuación.

EJEMPLO: Para la ecuación $x^3 = 3x + 2$, su conjunto solución será C.S. = {-1; 2}

CLASIFICACIÓN DE LAS ECUACIONES

1) DE ACUERDO AL NÚMERO DE SUS SOLUCIONES:



$2)\ \boldsymbol{De\ acuerdo\ a\ su\ forma}$:

A) ECUACIÓN POLINOMIAL

$$x^4 - 4 = 2x^3 + x$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

B) ECUACIÓN FRACCIONARIA

$$\frac{x+5}{x+6} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+3}{x+4} + \frac{x+4}{x+5}$$

C) ECUACIÓN IRRACIONAL

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{3+2x} + \sqrt{3x-1} = \sqrt{3x-2}$$

$$\sqrt[3]{x+6} + x = 4$$

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Forma general :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Donde:

- ✓ x es la incognita o variable
- ✓ $\{a, b, c\} \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Resolución de la ecuación :

1.-Por factorización:

- Resolver la ecuación : $x^2 - x - 6 = 0$

$$(x-3)(x+2) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = 3 \lor x = -2$$

$$\therefore C.S. = \{-2; 3\}$$

- Resolver la ecuación :

$$\begin{array}{llll} 4x^2 & -11x & +6 & = 0 \\ 4x & & -3 & \\ x & & -2 & \end{array}$$

$$(4x-3)(x-2) = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{4} \quad \lor \quad x_2 = 2$$

$$CS = \left\{\frac{3}{4}; 2\right\}$$

2.- Por la fórmula de Carnot

Sea la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$
De raíces : $x_1 \wedge x_2$; se obtienen a partir de :

$$\boxed{x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

- Resolver la ecuación : $3x^2 - 2x - 4 = 0$

Observar que : $a = 3 ,\quad b = -2 ,\quad c = -4$

$$x_{1;2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-4)}}{2(3)}$$

$$x_{1;2} = \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$

$$x_{1;2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

$$\therefore C.S. = \left\{\frac{1 + \sqrt{13}}{3} \ ; \ \frac{1 - \sqrt{13}}{3}\right\}$$

DISCRIMINANTE (Δ)

Dada la ecuación cuadrática en x :

$$ax^2 + bx + c = 0 ; a \neq 0$$

Se define el discriminante :

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$$

NATURALEZA DE LAS RAICES

Sea la ecuación en "x":

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- **CASO I** : Si la ecuación tiene raíces reales y diferentes

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta > 0}$

- **CASO II** : Si la ecuación tiene raíces reales e iguales

$\boxed{\Delta=0}$ $\Rightarrow$ $b^2 - 4ac = 0$

- **CASO III** : Si la ecuación tiene raíces imaginarias y conjugadas

$\Rightarrow$ $\boxed{\Delta < 0}$

PROPIEDAD DE LAS RAICES DE LA ECUACION CUADRÁTICA

Si $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación cuadrática en "x" :

Se cumple: $ax^2 + bx + c = 0$

1.- Suma de Raíces

$$\boxed{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$$

2.- Producto de Raíces

$$\boxed{P = x_1 . x_2 = \frac{c}{a}}$$

3.- Diferencia de Raíces $(x_1 > x_2)$

$$\boxed{D = x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}} \quad (a > 0)$$

RAICES ESPECIALES

Sea la ecuación : $ax^2 + bx + c = 0$; de raíces $x_1 \wedge x_2$, si estas son :

1.- RAICES SIMÉTRICAS

Se cumple:

$$\boxed{b = 0} \qquad x_1 = -x_2$$

2.- RAICES RECÍPROCAS

Se cumple :

$$\boxed{a = c} \qquad x_1 = \frac{1}{x_2}$$

3.- RAICES IGUALES

Se cumple:

$$\Delta = 0$$

$$\boxed{b^2 = 4ac}$$

RECONSTRUCCIÓN DE LA ECUACION CUADRATICA EN x

Siendo : S y P , suma y producto de raíces respectivamente , entonces la ecuación será :

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

TEOREMA DE LAS ECUACIONES EQUIVALENTES

$(\textit{tienen el mismo conjunto soluciòn})$

Siendo :

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ; \quad mx^2 + nx + p = 0$$

Ecuaciones equivalentes , se cumple :

$$\boxed{\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}}$$

$\boldsymbol{Sea\ la\ ecuación\ cuadrática:}$

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0} \quad ; a \neq 0$$

$\boldsymbol{cuyas\ raíces\ son:}$ $x_1;\ x_2$, $\boldsymbol{se\ cumple\ que:}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$\boldsymbol{además:}$

$$\boxed{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}}$$

$$\boxed{x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}}$$

$$\boxed{x_1^3 + x_2^3 = \frac{3abc - b^3}{a^3}}$$

$$\boxed{(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4 . x_1 . x_2}$$

PRÁCTICA PARA LA CLASE

1. Con respecto a la ecuación en x

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta.

- Su discriminante es $b^2 - 4ac$. (V)
- $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \wedge x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$ (V)
- $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ (V)
- Si $x_1 = x_2 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 0$ (V)

A) VVVV B) VFVF

C) FVVV D) VVFV

RESOLUCIÓN

Recordando la teoria:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

VVVV

2. Halle la menor raíz aumentada en 2 de la ecuación : $6(x^2-2)=x$.

RESOLUCIÓN

$Efectuando:$

$$6x^2-12=x$$

$ordenando:$

$$6x^2-x-12=0$$

$factorizando:$

$$6x^2-x-12=0$$

$$\begin{array}{ll} 3x & +4 \\ 2x & -3 \end{array}$$

$$(3x+4).(2x-3)=0$$

$$3x+4=0 \vee 2x-3=0$$

$$x_1=-\frac{4}{3} \vee x_2=\frac{3}{2}$$

$piden:$

$$-\frac{4}{3}+2=\boxed{\frac{2}{3}\ (c)}$$

3. Halle mayor raíz de la ecuación

$$x^2 = 3(2x-1)$$

RESOLUCIÓN

Efectuando : $x^2 = 6x - 3$

ordenando: $x^2 - 6x + 3 = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$ $\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 3 \end{cases}$

aplicamos la fòrmula general:

$$x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1;2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(3)}}{2(1)}$$

$$x_{1;2} = \frac{6 \pm \sqrt{24}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$x_1 = 3 + \sqrt{6}$ (*mayor raìz*)

$x_2 = 3 - \sqrt{6}$ (c)

4. Si una raíz de la ecuación en x

$$ax^2 + bx + 11 = 0$$

es $\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$, efectúe $S = b^a - a^6 + 1$

RESOLUCIÓN

Se puede afirmar que:

$$x = \frac{5+\sqrt{3}}{2} \quad \textit{(por ser raìz)}$$

a partir de ello formaremos la ecuaciòn cuadràtica

$$2x = 5 + \sqrt{3}$$

$$2x - 5 = \sqrt{3}$$

$$4x^2 - 20x + 25 = 3$$

$$4x^2 - 20x + 22 = 0$$

$$2x^2 - 10x + 11 = 0$$

$$a = 2 \quad \wedge \quad b = -10$$

$$S = (-10)^2 - 2^6 + 1$$

$$S = 100 - 64 + 1$$

$$\boxed{S = 37 \quad (c)}$$

5. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación

$$\frac{3x+4}{2x-1}=\frac{2x-5}{x+3}$$

calcule: $E=x_1^2x_2+x_1x_2^2$.

RESOLUCIÓN

$\boldsymbol{Efectuando}$:

$$(2x-5)(2x-1)=(3x+4)(x+3)$$

$$4x^2-12x+5=3x^2+13x+12$$

$$4x^2-3x^2-12x-13x+5-12=0$$

$$1.x^2-25.x-7=0$$

a b c

$$\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}} \quad \boxed{x_1.x_2=\frac{c}{a}}$$

$$x_1+x_2=25 \qquad x_1.x_2=-7$$

$\boldsymbol{piden}$:

$$E=x_1.x_2.(x_1+x_2)$$

$$E=(-7).(25)$$

$$E=-175 \quad (B)$$

6. Calcule el discriminante de la siguiente ecuación:

$$(3x+5)^2-(2x-3)(2x+7)=2018^0$$

RESOLUCIÓN

Efectuando:

$$9x^2+30x+25-(4x^2+8x-21)=1$$

$$9x^2+30x+25-4x^2-8x+21=1$$

$$5x^2+22x+46=1$$

$$5.x^2+22.x+45=0$$

$$\underset{a}{5}.x^2+\underset{b}{22}.x+\underset{c}{45}=0$$

Discriminante

$$\boxed{\Delta = b^2-4ac}$$

$$\Delta=(22)^2-4(5)(45)$$

$$\Delta=484-900$$

$$\boxed{\Delta=-416 \quad (D)}$$

7. Si $\{a, b\}$ es el conjunto solución de la ecuación

$$x^2 - (k-3)x + 2k + 5 = 0$$

determine el valor de k para que sus raíces cumplan que

$$a^2 + 5ab + b^2 = 28$$

RESOLUCIÓN *del dato*:

$$\underline{a^2 + 2ab + b^2} + 3ab = 28$$

$$(a+b)^2 + 3ab = 28$$

Sea: $a = x_1 \quad \wedge \quad b = x_2$

$$(\underline{x_1 + x_2})^2 + 3.\underline{x_1 . x_2} = 28$$

por propiedad de raìces:

$$(k-3)^2 + 3(2k+5) = 28$$

$$k^2 - \cancel{6k} + 9 + \cancel{6k} + 15 = 28$$

$$k^2 - 4 = 0$$

$$(k+2).(k-2) = 0$$

$$k = 2 \quad \vee \quad k = -2$$

$$\boxed{k = \pm 2 \quad (B)}$$

8. Si una raíz de

$2x^2 - 4x + c^2 - 2c - 3 = 0$

es cero, halle el valor de c. $(c < 0)$

RESOLUCIÓN

$\textit{Se puede afirmar que:}$

$x = 0 \quad (\textit{por ser raìz})$

$\textit{reemplazando en la ec.:}$

$$\cancel{2(0)^2} - \cancel{4(0)} + c^2 - 2c - 3 = 0$$

$$c^2 - 2c - 3 = 0$$

$$\begin{array}{ll} c & -3 \\ c & +1 \end{array}$$

$$c - 3 = 0 \quad \vee \quad c + 1 = 0$$

$$c = 3 \quad \vee \quad c = -1$$

$\textit{como } c < 0$

$$\boxed{c = -1 \qquad (D)}$$

9. Las edades de dos hermanos son las raíces de la ecuación

$$x^2 - 58x + p = 0$$

Calcule la suma de las edades que presentarán dichos hermanos dentro de 12 años.

RESOLUCIÓN

$$Sean: \quad x_1 \ \wedge \ x_2$$

las edades actuales de los hermanos.

De la ecuaciòn cuadràtica:

$$x^2 - 58x + p = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{-58}{1}$$

$$x_1 + x_2 = 58$$

$$piden: \quad \begin{array}{r} x_1 + 12 \\ x_2 + 12 \\ \hline x_1 + x_2 + 24 \\ 58 + 24 \end{array}$$

$$82 \qquad (D)$$

10. La cantidad de canicas que tiene Jorge es una raíz de la ecuación

$$2x^2 - 13x - 45 = 0$$

¿Cuántas canicas necesita para completar una docena?

RESOLUCIÓN

Jorge tiene 9 canicas, para tener 12 canicas le falta:

$$12 - 9 = 3$$

$$2x^2 - 13x - 45 = 0$$

$$\begin{array}{lcr} 2x & & +5 \\ x & & -9 \end{array}$$

$$(2x + 5)(x - 9) = 0$$

$$2x + 5 = 0 \quad \vee \quad x - 9 = 0$$

$$x = -\frac{5}{2} \quad \vee \quad x = 9$$

$$3 \qquad (B)$$