# ALGEBRA

## Chapter 1

# 5th SAN MARCOS

## Polinomios

## Expresiones Algebraicas


SACO OLIVEROS

Queridos Estudiantes:

Álgebra es un curso importante de las Matemáticas, pues abarca una infinidad de escenarios no solo dentro de las matemáticas, sino también aplicadas en la ingeniería, en la arquitectura, en las finanzas, en la logística, en las física, en la química, etc.

El dominio del presente capitulo que trata sobre los polinomios y las expresiones algebraicas debe darse con total claridad ya que se aplicara en varios capítulos posteriores (ecuaciones; funciones; logaritmos; series etc ) .

En los cursos de Física y Química su utilidad se hace necesaria sobre todo para las interpretaciòn de movimiento de los cuerpos y los microorganismos, etc.

Debido a esta útil herramienta la ciencia ha hecho adelantos sorprendentes en las fìsica y actualmente en la medicina y la biologia.

# EL POLINOMIO

## *Definición previa*

**Monomio**: *es una expresión alg. racional entera* (E. A. R. E.); es decir los exponentes de su o sus variables deben ser numeros enteros positivos (incluido el cero).

**Ejemplo**

*Sea el monomio*: $M(x; y; z) = 9 \,.\, x^4y^3z$

*Coeficiente*    *Parte literal*

**Polinomio**: *es una expresión formada por uno o más monomios*

**Ejemplo**

*Sea el polinomio*: $P(x; y) = 9x^4y^3 - 5xy^2 + 7x^5 - 6y$

## *Ejemplo*

*Si la sgte. expresión:* $P(x;y) = 9\,x^{12-n}y^3 - 5x\,y^{n-4} + 7x^{\frac{n}{3}}$

*es un polinomio. Halle la suma de valores que puede tomar "n"*

## *Resolución*

*Se debe cumplir quelos exp. de las variables deben ser* $\mathbb{Z}_0^+$:

$$\left.\begin{array}{l} 12 - n \geq 0 \quad \rightarrow \quad n - 12 \leq 0 \quad \rightarrow \quad n \leq 12 \\ \qquad\qquad\qquad\quad n - 4 \geq 0 \quad \rightarrow \quad n \geq 4 \end{array}\right\} \quad 4 \leq n \leq 12$$

*también:* $\frac{n}{3} \in \mathbb{Z}^+$; *por todo ello* $n = 6; 9; 12$

*piden:* $\sum$ *valores de "n"* $= 6 + 9 + 12 = \boxed{27}$

# POLINOMIO DE UNA SOLA VARIABLE

*Sea P un polinomio de variable "x"*

$$P(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

"$n$" : *grado del polinomio* $(n \in \mathbb{Z}^+)$

$a_o$ : *coeficiente principal o primer coeficiente* $(a_o \neq 0)$

$a_n$ : *término independiente o término constante.*

$a_o$ ; $a_1$; $a_2$; $a_3$; ... $a_{n-1}$; $a_n$ : *coeficientes de P.*

*Ejemplo* $$P(x) = 8x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 6x + 9$$

$$\sum coef.(P) = 8 - 5 + 7 - 6 + 9 = 13$$

# POLINOMIO MÓNICO

*Es aquel cuyo coeficiente principal (C. P.) es la unidad.*

**Ejemplo**

$$P(x) = x^2 + 7x - 3$$

$$F(y) = y^5 - 7y^2 + 3y + 2$$

**Ejemplo** *Si el polinomio:*

$$P(x) = \cancel{(m-5)x^3} + (\overset{1}{\boxed{n-7}})x^2 - 3mx + 2n$$

*es cuadrático y mónico. Halle* $P(20)$

**Resolución**

*Se cumple que:* $m - 5 = 0 \rightarrow m = 5$

*además:* $n - 7 = 1 \rightarrow n = 8$

$$\boxed{P(x) = x^2 - 15x + 16}$$

$$P(20) = 20^2 - 15(20) + 16$$

$$P(20) = 400 - 300 + 16$$

$$P(20) = 116$$

# *Suma de coeficientes y término independiente de un polinomio*

***Dado un polinomio*** $P(x)$ ***se cumple que:***

$$\sum coef.(P) = P(1)$$

$$T.I.(P) = P(0)$$

***Ejemplo***

***Halle la suma de coeficientes y el término independiente de*** $P$.

$$P(x) = x^5 - 2(x-3)^3 + 7(2x+3)(3x-1) - 5$$

***Resolución***

***tenemos que hallar*** $P(1)$ ***y*** $P(0)$

$$P(1) = 1^5 - 2(1-3)^3 + 7(2+3)(3-1) - 5$$

$$P(1) = 1 - 2(-2)^3 + 7(5)(2) - 5 \longrightarrow \sum coef.(P) = P(1) = 82$$

$$P(0) = 0^5 - 2(-3)^3 + 7(+3)(-1) - 5$$

$$P(0) = -2(-27) + 7(-3) - 5 \longrightarrow T.I.(P) = P(0) = 28$$

# *Valor Numerico de un polinomio*

***es cuando se le asigna un valor numerico al al variable***

**Ejemplo**

$$\boldsymbol{Sea:}\quad P(x) = x^4 - 2x^3 + 7$$

$$P(-2) = 39$$

**Ejemplo**

$$\boldsymbol{Sea:}\quad F(x) = x^2 - x + 2$$

$$F(F(F(0))) = 14$$

**Ejemplo**

$$\boldsymbol{Sea:}\quad F(x-5) = x^2 + x + 1$$

$$F(3) = 73$$

**Ejemplo**

$$\boldsymbol{Sea:}\quad F(x+3) = F(x+1) + x^2$$

$$\boldsymbol{halle:}\quad F(7)\,;\qquad si\ \ F(5) = 10$$

$$F(7) = 26$$

**Ejemplo**

$$\boldsymbol{Sea:}\quad P(x-2) = 3x + 8$$

$$F(x+3) = -x + 2$$

$$\boldsymbol{halle:}\quad F(P(1))$$

$$F(P(1)) = -12$$

# CAMBIO DE VARIABLE

**Ejemplo**

Sea : $P(x) = 3x - 1$

halle : $P(4x - 3)$

**Resolución**

cambiamos "x" por $4x - 3$

$$P(4x - 3) = 3(4x - 3) - 1$$

$$P(4x - 3) = 12x - 9 - 1$$

$$P(4x - 3) = 12x - 10$$

**Ejemplo**

Sea : $P(x - 4) = 5x + 2$

halle : $P(x)$

**Resolución**

cambiamos "x" por $x + 4$

$$P(x + 4 - 4) = 5(x + 4) + 2$$

$$P(x) = 5x + 20 + 2$$

$$P(x) = 5x + 22$$

**Ejemplo**

Sea : $P(x + 2) = 7x - 1$

halle : $P(x - 5)$

**Resolución**

cambiamos "x" por $x - 7$

$$P(x - 7 + 2) = 7(x - 7) - 1$$

$$P(x - 5) = 7x - 49 - 1 = 7x - 50$$

***Sea el polinomio lineal***: $P(x) = ax + b$

***Se tiene que***: $P(P(x)) = a^2x + (ab + b)$

***también***: $P(P(P((x))) = a^3x + (a^2b + ab + b)$

***Ejemplo*** ***Sea***: $P(P(P((x))) = 27x + 52$ ***halle*** $P(x)$

***Igualando***: $a^3x + (\underbrace{a^2b + ab + b}_{13b}) \equiv 27x + 52$

$a = 3$
$b = 4$

$P(x) = 3x + 4$

# PRACTICA PARA LA CLASE

1. Irene compra en la bodega de su barrio una botella de aceite cuyo costo es de T soles, que se obtiene al resolver el siguiente ejercicio:

Dada la expresión algebraica racional entera de tres términos

$$P(x,y)=x^{\frac{12}{n+1}}y^{n-1}+7x^{n+1}y^{10-n}+(n-3)x^{n-3}y^{\frac{30}{n}}$$

$n \neq 3$

Evalúe $T=\sqrt{n^{2n-8}}$

¿Cuánto pagará Irene por una docena de botellas de aceite.

**Resoluciòn**

*Para que P sea un polinomio (E. A. R. E), los exponentes de sus variables deben ser numeros enteros positivos o cero.*

*Analizamos todos los exponentes*

$$\frac{12}{n+1};\ n-1;\ 10-n;\ n-3;\ \frac{30}{n}.$$

$n-3>0 \rightarrow \boxed{n>3}$

$10-n \geq 0 \rightarrow n-10 \leq 0 \rightarrow \boxed{n \leq 10}$

$\frac{30}{n} \in \mathbb{Z}^+ \qquad \frac{12}{n+1} \in \mathbb{Z}^+$

*analizando todas estas restriccio – nes; se deduce que:*

*solo se cumple para* $n=5$

$T = S/5$ (*costo de 1 bot. de aceite*)

*luego:* $12.T = S/60$

**2.** Dado que

$$3f(x) = x + 4 + \frac{f(x)}{2}$$

calcule el valor de $f\big(f(-4)\big)$

A) – 4   B) 8/5   C) 4   D) 0   E) – 8/5

## Resolución

* **Dato:**

$$3f(x) = x + 4 + \frac{f(x)}{2} \quad \ldots \times 2$$

* $6f(x) = 2x + 8 + f(x)$

$$\rightarrow \boxed{f(x) = \frac{2x+8}{5}}$$

* **Piden** $\boxed{L = f\big(f(-4)\big)}$

$$f(-4) = \frac{2(-4)+8}{5} = 0$$

$$f(0) = \frac{2(0)+8}{5}$$

$$\therefore \boxed{L = \frac{8}{5}}$$

**3.** En un salón de clase del colegio Saco Oliveros de 36 alumnos se tomó examen de Álgebra. Si el número de alumnos aprobados está dado por P(8) donde

$$P(x+2)=P(x)+2x$$

Determine la cantidad de alumnos desaprobados si P(2) = 6.

**Resoluciòn**

$$\boxed{P(x+2)=P(x)+2x}$$

*damos valores numericos*:

$$x=6\rightarrow \quad P(8)=\cancel{P(6)}+12$$

$$x=4\rightarrow \quad \cancel{P(6)}=\cancel{P(4)}+8$$

$$x=2\rightarrow \quad \cancel{P(4)}=P(2)+4$$

*Sumando tenemos*:

$$P(8)=P(2)+24$$

$$P(8)=6+24=30$$

*aprobaron* 30 *alumnos*

*desaprobaron*: $36-30=$ **6**

**4.** **Si** $P(x) = (ax+b)(a^2x+b)(a^3x+b)_{\dots}(a^nx+b)$

**Halle el equivalente**

$$\frac{P(ax)}{P(x)}$$

A) $\dfrac{a^{n-1}x+b}{a^nx+b}$ B) $\dfrac{a^{n-1}x+b}{ax+b}$ C) $\dfrac{a^{n+1}x+b}{a^nx+b}$ D) $\dfrac{a^nx+b}{a^{n-1}x+b}$ E) $\dfrac{a^{n+1}x+b}{ax+b}$

## Resolución

* **Dato** $P(x) = (ax+b)(a^2x+b)(a^3x+b)_{\dots}(a^{n-1}x+b)(a^nx+b)$ ... $(\alpha)$
* **Hallando** $P(ax)$: $P(ax) = (a^2x+b)(a^3x+b)(a^4x+b)\dots(a^nx+b)(a^{n+1}x+b)$ ... $(\beta)$
* **Dividimos** $\beta \div \alpha$

$$\frac{P(ax)}{P(x)} = \frac{\cancel{(a^2x+b)}\cancel{(a^3x+b)}\cancel{(a^4x+b)}\dots\cancel{(a^nx+b)}(a^{n+1}x+b)}{(ax+b)\cancel{(a^2x+b)}\cancel{(a^3x+b)}\dots\cancel{(a^{n-1}x+b)}\cancel{(a^nx+b)}} = \boxed{\frac{a^{n+1}x+b}{ax+b}}$$

5. Dados

$$\begin{cases} P(x+5) = 2x - 1 & \dots (I) \\ P[Q(x)+1] = 4x + 3 & \dots (II) \end{cases}$$

Calcule el valor de Q(–3).

**Resoluciòn**

$\boldsymbol{Del\ primer\ dato}$:

$$P(x+5) = 2x - 1$$

$$Cambiamos\ \ x\ \ por\ \ \ x-5$$

$$P(x-\cancel{5}+\cancel{5}) = 2(x-5) - 1$$

$$P(x) = 2x - 11$$

$$Cambiamos\ \ x\ \ por\ \ \ Q(x)+1$$

$$P\,[Q(x)+1] = 2[Q(x)+1] - 11$$

$$4x + 3 \ = \ 2.Q(x) - 9$$

$$\cancel{4}x + \cancel{12} \ = \ \cancel{2}.Q(x)$$

$$\boxed{Q(x) = 2x + 6}$$

$$Q(-3) = 2(-3) + 6 = \boxed{0}$$

**6.** Si se tiene que $P(x+1) = P(x) + x$ Calcule el valor de $P(20) - P(1)$.

**Resoluciòn**

$$\left.\begin{array}{lrcl}
x = 19 \rightarrow & P(20) & = & \cancel{P(19)} + 19 \\
x = 18 \rightarrow & \cancel{P(19)} & = & \cancel{P(18)} + 18 \\
x = 17 \rightarrow & \cancel{P(18)} & = & \cancel{P(17)} + 17 \\
 & \vdots & & \vdots \qquad \vdots \\
x = 3 \rightarrow & \cancel{P(4)} & = & \cancel{P(3)} + 3 \\
x = 2 \rightarrow & \cancel{P(3)} & = & \cancel{P(2)} + 2 \\
x = 1 \rightarrow & \cancel{P(2)} & = & P(1) + 1
\end{array}\right\} +$$

$$P(20) = P(1) + 1 + 2 + 3 + \cdots + 19$$

$$P(20) - P(1) = \frac{19(20)}{2}$$

$$P(20) - P(1) = 190$$

$$\boxed{190}$$

**7.** Si $f(x-1)=x^2+2x$ y $f(a)-f(b)=b-a\neq 0$ ,
¿Cuál es el valor de $a+b+5$ ?

A) 0 B) 5 C) $-1$ D) 1 E) $-2$

**Resolución**

* **Dato:** $f(x-1)=x(x+2) \rightarrow f(x-1)=(x-1+1)(x-1+3)$

$$\boxed{f(m)=(m+1)(m+3)}$$

* **Dato:** $\underbrace{f(a)}-\underbrace{f(b)}=b-a \qquad (a\neq b)$

$$(a+1)(a+3)-(b+1)(b+3)=b-a$$

$$a^2+4a+3-(b^2+4b+3)=b-a$$

$$a^2+4a\cancel{+3}-b^2-4b\cancel{-3}=b-a$$

**Agrupando convenientemente**

$$a^2-b^2+4a-4b=b-a$$

$$(a+b)\cancel{(a-b)}+4\cancel{(a-b)}=-\cancel{(a-b)}$$

$$a+b+4=-1$$

$$\therefore \quad \boxed{a+b+5=0}$$

**8.** Calcule el valor del polinomio

$$P(x) = x^4 - x^2 - x$$

para: $x = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \ldots}}}$

**Resoluciòn**

*Sea*:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \ldots}}}_{a}}$$

*piden*: $P(a)$

$$P(a) = a^4 - a^2 - a$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} + a}$$

*al cuadrado*:

$$a^2 = \frac{1}{2} + a$$

*al cuadrado*:

$$a^4 = \frac{1}{4} + a^2 + a$$

$$a^4 - a^2 - a = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{P(a) = \frac{1}{4}}$$

**9.** **El polinomio**

$$P(x)=\left(7x^2-3\right)^{n-3}(2x-1)^{n+1}+\left(n^2x^3-9\right)^7(2x+3)^{n-17}+(5x-7n)(5x-1)^{2n-17}$$

**tiene como término independiente 112, entonces, halle el valor de $n$.**

A) 13 B) 18 C) 16 D) 20 E) 12

**Resolución**

* **Recordar:** $\boxed{\textbf{Término Independiente} = P(0)}$

$$P(0)=(0-3)^{n-3}(0-1)^{n+1}+(0-9)^7(0+3)^{n-17}+(0-7n)(0-1)^{2n-17}$$

$$P(0)=\underbrace{(-3)^{n-3}(-1)^{n+1}}+\underbrace{\left(-3^2\right)^7(3)^{n-17}}+\underbrace{(-7n)(-1)^{2n-17}}$$

$$P(0)=\cancel{3^{n-3}}-\cancel{3^{n-3}}+7n$$

$$P(0)=7n \rightarrow 7n=112$$

$\therefore$ $\boxed{n=16}$

**10.** Sabiendo que

$$P[P[P(x)]] = 8x + 7$$

Determine el valor de P(7).

**Resolución**

*Recordar*:

$Si: \ P(x) = ax + b \quad entonces:$

$$P\Big(P\big(P(x)\big)\Big) = a^3.x + a^2b + ab + b$$

$$P\Big(P\big(P(x)\big)\Big) = 8.x + 7$$

*igualando coeficientes*:

$a^3 = 8 \ \rightarrow \ a = 2$

$a^2b + ab + b = 7$

$4b + 2b + b = 7$

$7b = 7 \rightarrow b = 1$

$$\boxed{P(x) = 2x + 1}$$

$$P(7) = 2(7) + 1$$

$$\boxed{P(7) = 15}$$