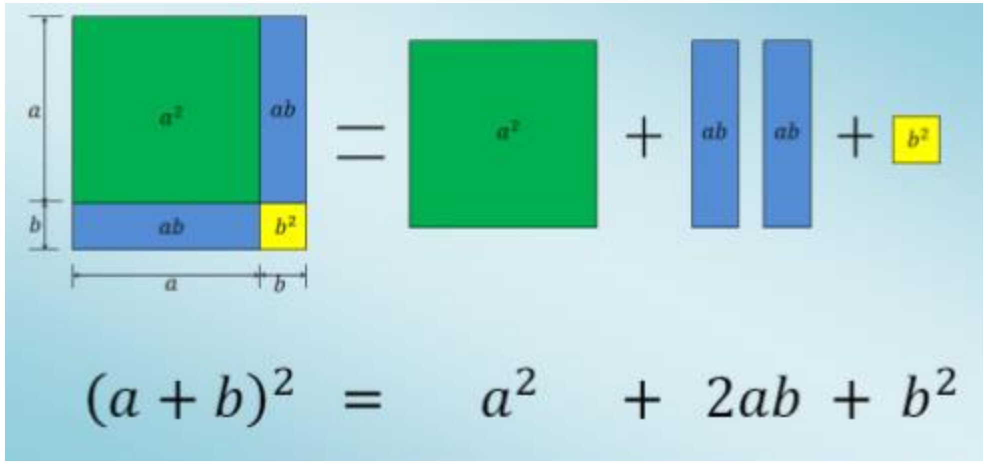
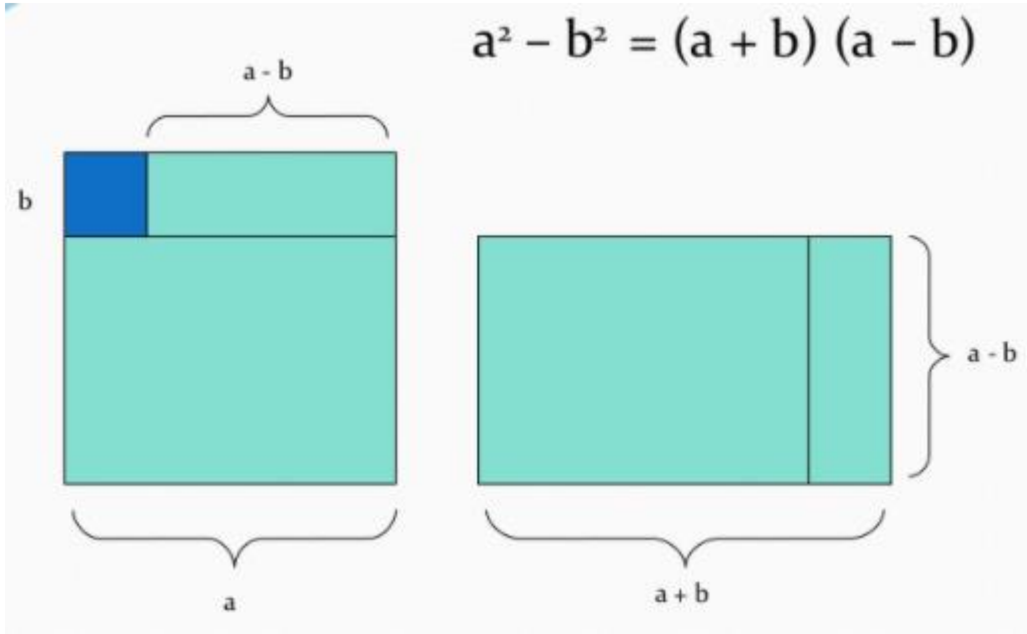
ALGEBRA

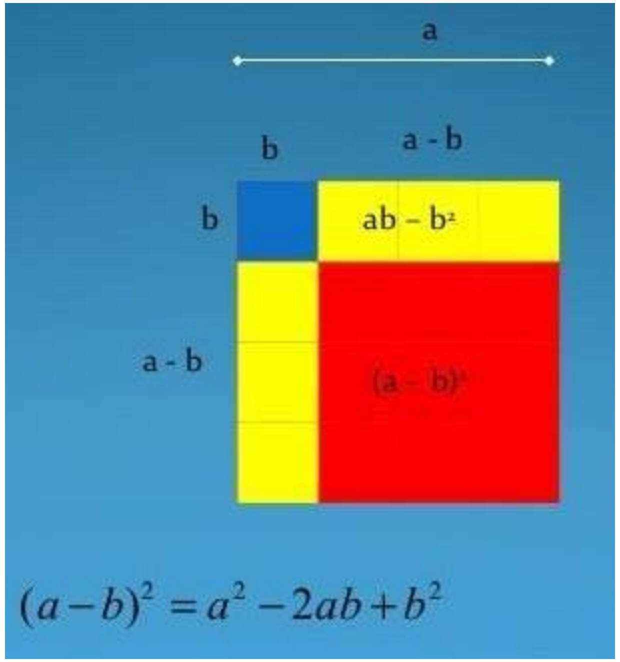
Chapter 3

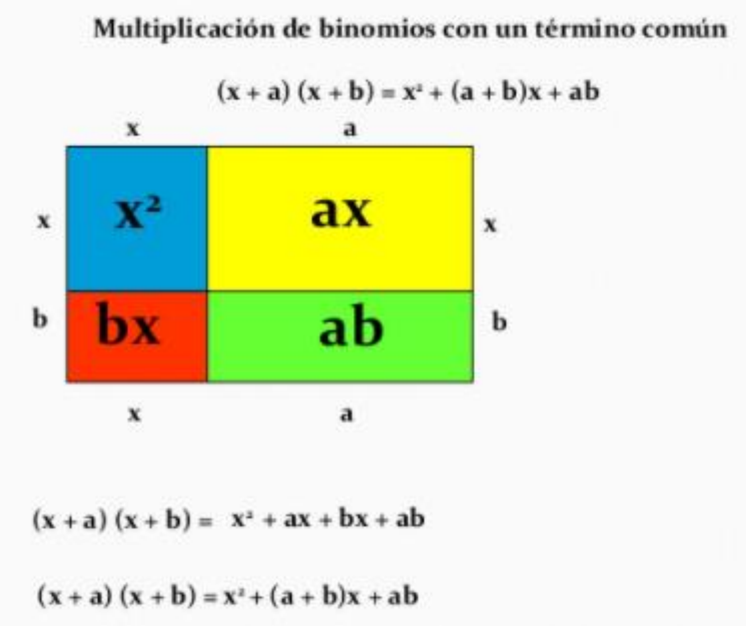
PRODUCTOS NOTABLES

5TO SAN MARCOS


a
b
a
b
a^2
ab
ab
b^2
=
a^2
+
ab
ab
+
b^2
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$


$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
a - b
b
a - b
a
a + b


a
b
a - b
b
$ab - b^2$
a - b
$(a-b)^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$


Multiplicación de binomios con un término común
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
x
a
x
x^2
ax
x
b
bx
ab
b
x
a
$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab$
$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

PRODUCTOS NOTABLE

PRINCIPALES PRODUCTOS NOTABLE

1. Trinomio cuadrado perfecto:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$= a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$= a^2 + b^2 - 2ab$$

2. Identidad de Legendre

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2+b^2)$$

3. Diferencia de cuadrados

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

4. Identidad de steven

$$(x+b)(x+a) = x^2 + (a+b)x + ab$$

5. Identidad de Cauchy

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

6. Identidad de Cauchy

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

7. Desarrollo de un Trinomio al cuadrado:

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)}$$

$$\boxed{(ab+ac+bc)^2 = (ab)^2+(ac)^2+(bc)^2+ 2abc(a+b+c)}$$

Teorema:

Sea x ; y números reales tal que

$$x^2+y^2=0$$

$$\Rightarrow \boxed{x=0} \quad \boxed{y=0}$$

Ejemplo:

Calcule el valor de m y n tal que

$$m^2+n^2-m-\frac{2n}{3}+\frac{13}{36}=0$$

m ; n son números reales

Resolución:

La idea es formar binomios al cuadrado a partir de la condición

$$\underbrace{m^2-m+\frac{1}{4}}+\underbrace{n^2-\frac{2n}{3}+\frac{1}{9}}=0$$

$$\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\left(n-\frac{1}{3}\right)^2=0$$

$$m-\frac{1}{2}=0 \qquad n-\frac{1}{3}=0$$

$$\boxed{m=\frac{1}{2}} \qquad \boxed{n=\frac{1}{3}}$$

1. Melany tiene $(a+b+c)$ soles; Vilma tiene el triple de lo que tiene Melany y Karina tiene la mitad de la suma de dinero que tiene Melany y Vilma. Si se cumple que

$$a^2+b^2+c^2+42=2(4a+5b+c)$$

determine ¿cuánto dinero tiene Karina después de comprar un yogurt de a soles?

Resolución:

Del otro dato:

$$a^2+b^2+c^2+42=2(4a+5b+c)$$

$$a^2+b^2+c^2+42=8a+10b+2c$$

$$\underbrace{a^2-8a+16}+\underbrace{b^2-10b+25}+\underbrace{c^2-2c+1}=0$$

$$\underbrace{(a-4)^2}_{0}+\underbrace{(b-5)^2}_{0}+\underbrace{(c-1)^2}_{0}=0$$

$\boxed{a=4}$ $\boxed{b=5}$ $\boxed{c=1}$

$$a+b+c=10$$

Melany tiene 10 soles

Vilma tiene 30 soles

Karina tiene 20 soles

$\boxed{\textbf{16 soles}}$

2. Se tiene que

$$\frac{(m+n)^4-(m-n)^4}{(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2}=4$$

y el valor de

$$H=\frac{10(m^2+mn+n^2)}{m^2-mn+n^2}$$

representa el número de cuotas que Jesús debe pagar a su hermano por un préstamo de dinero. Determine la cantidad de préstamo recibido por Jesús; si cada cuota es de S/ 200. (no se cobra intereses).

A) S/ 6000 B) S/ 4000
C) S/ 3500 D) S/ 4500

Resolución:

Partiendo de la condición:

- $(m+n)^4 - (m-n)^4 = 8mn(m^2+n^2)$
- $(m^2+n^2)^2 - (m^2-n^2)^2 = 4m^2n^2$

Reemplazando en la condición

$$\frac{8mn(m^2+n^2)}{4m^2n^2)} = 4$$

$$8\cancel{mn}(m^2+n^2) = 16\cancel{m^2}n^2$$

$$m^2+n^2 = 2mn$$

$$\boxed{m = n}$$

Luego $H = \dfrac{10(3.\cancel{m^2})}{\cancel{m^2}} = 30$

N° de cuotas 30

El Préstamo será 6000 soles

3. Daniela egresó de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UNMSM en el año $\overline{2(q-p+2)(p-4)(q+2)}$; donde p y q son tales que cumplen $(p-3)^2+(q-5)^2=4(p-q)$. Halle el año en que Daniela ingresó a dicha Facultad, sabiendo que realizó sus estudios de forma continua y que por motivos de trabajo no se matriculaba en todos los cursos correspondientes a su semestre académico, demorando así dos años más en culminar su carrera profesional de cinco años de estudios.

Resolución:

Del dato:

$$p^2-6p+9+q^2-10q+25=4p-4q$$

$$p^2-10p+25\;+\;q^2-6q+9=0$$

$$(p-5)^2+\;(q-3)^2\;=0$$

Luego: $p=5\;\wedge\;q=3$

Reemplazando:

$2015\quad (\textit{año que egresò})$

$2015-5-2\quad (\textit{año que ingresò})$

$2008\quad (\textit{año que ingresò})$

2008

4. Si $a+b+c=1$ y $a^3+b^3+c^3=4$, entonces el valor de

$$M=\frac{1}{a+bc}+\frac{1}{b+ac}+\frac{1}{c+ab} \text{ es:}$$

Resolución:

En la primera fracciòn: $\dfrac{1}{\underbrace{1-b-c}_{a}+bc}$

$$\frac{1}{(1-b)(1-c)}$$

Luego:

$$M=\frac{1}{(1-b)(1-c)}+\frac{1}{(1-a)(1-c)}+\frac{1}{(1-a)(1-b)}$$

efectuando:

$$M=\frac{1-a+1-b+1-c}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$$M=\frac{3-(a+b+c)}{1-(a+b+c)+(ab+ac+bc)-abc}$$

$$M=\frac{3-(1)}{1-(1)+(ab+ac+bc)-abc}$$

$$M=\frac{2}{(ab+ac+bc)-abc}\ \ldots\ldots\ldots(\alpha)$$

utilizando:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$$

$$(1)^3=4+3(1)(ab+ac+bc)-3abc$$

$$-1=(ab+ac+bc)-abc$$

en (α)

$$M=\frac{2}{-1}$$

$$\boxed{M=-2}$$

5. Sean a y b números reales positivos

Si $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=2$, calcule

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{a^3}+\ldots+\frac{a^{50}}{b^{50}}+\frac{b^{50}}{a^{50}}$$

Resolución:

$$Si:\ x+\frac{1}{x}=2 \rightarrow x=1$$

Del dato:

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}=2 \rightarrow \frac{a^2}{b^2}=1 \rightarrow \boldsymbol{a=b}$$

Luego piden:

$$M = \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{100\ tèrminos}$$

$$\boldsymbol{M = 100}$$

6. Sabiendo que

$$a + b = \sqrt{5} \quad \ldots \text{(I)}$$

$$ab = 3 \quad \ldots \text{(II)}$$

Determine $Q = a^6 + b^6$

Resolución:

Para obtener suma de sextas se debe elevar al cuadrado y luego cubo

➤ $(a + b)^2 = (\sqrt{5})^2$

$$a^2 + b^2 + 2ab = 5$$

$$a^2 + b^2 + 2(3) = 5$$

$$\boxed{a^2 + b^2 = -1}$$

➤ $(a^2 + b^2)^3 = (-1)^3$

$$a^6 + b^6 + 3 . a^2 b^2 (a^2 + b^2) = -1$$

$$a^6 + b^6 + 3(9)(-1) = -1$$

$$a^6 + b^6 - 27 = -1$$

$$\boxed{a^6 + b^6 = 26}$$

7. Si la diferencia de cuadrados de las edades de Mark y Alexie es de 17 y el cuadrado de la suma de las edades es 289; entonces, ¿cuántos años Mark es mayor que Alexie?

Resolución:

$Sea \ \ M \ \ la \, edad \, de \, Mark$

$Sea \ \ A \ \ la \, edad \, de \, Alexie$

Del enunciado:

$$M^2 - A^2 = 17$$

$$(M + A)(M - A) = 17 \ \ \ldots\ldots\ldots (\boldsymbol{\alpha})$$

Del otro dato:

$$(M + A)^2 = 289$$

$$M + A = 17$$

$\boldsymbol{en} \ (\boldsymbol{\alpha})$

$$M - A = 1$$

Luego: $\begin{cases} M = 9 \\ N = 8 \end{cases}$

$$\boldsymbol{M - A = 1}$$

8. Sea

$$x^2 - 5x + 1 = 0$$

Simplifique $E = x^4 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}$

Resolución:

Piden:

$$E = x^2 + \frac{1}{x^2} + x^4 + \frac{1}{x^4}$$

Dando forma de la condición:

$$x^2 + 1 = 5x$$

$$x + \frac{1}{x} = 5$$

Se eleva al cuadrado a ambos miembros

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 25$$

$$\boxed{x^2 + \frac{1}{x^2} = 23}$$

Se eleva al cuadrado a ambos miembros

$$x^4 + 2 + \frac{1}{x^4} = 529$$

$$\boxed{x^4 + \frac{1}{x^4} = 527}$$

Reemplazando: $E = 23 + 527$

$$\boxed{E = 550}$$

9. Si: $a^2+b^2+c^2=3$

Evalúe

$E=\boxed{(a+b+c)^2+(a+b-c)^2}+\boxed{(b+c-a)^2+(c+a-b)^2}$

A) 8 B) 12

C) 20 D) 36

Resolución:

$$E=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+c)^2+(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-c)^2+$$

$$+[\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}]^2+[\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]^2$$

Por Identidad de legendre:

$$E=2.[(a+b)^2+c^2]+2.[c^2+(b-a)^2]$$

Desarrollando los binomios:

$$E=2.[\underbrace{a^2+b^2+c^2}_{3}+2ab]+2.[\underbrace{c^2+b^2+a^2}_{3}-2ab]$$

Multiplicando:

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{6}+\cancel{\boldsymbol{4ab}}+\boldsymbol{6}-\cancel{\boldsymbol{4ab}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{12}}$$

10. El producto de tres números reales es 900 y la suma de sus inversos multiplicativos es 1/5. Determine la suma de los productos de dichos números tomados de dos en dos sin repetición.

Resolución:

$$abc = 900$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{5}$$

efectuando:

$$\frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{1}{5}$$

$$ab + ac + bc = \frac{900}{5}$$

$$\boldsymbol{ab + ac + bc = 180}$$