ARITHMETIC

Chapter 8

Summer
San Marcos 2021

Números Primos

SACO OLIVEROS

HISTORIA DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Los números primos han sido estudiados desde la antigüedad hasta nuestros días, donde numerosos investigadores y matemáticos manifestaron que estos se producirían al "azar" puesto que no obedecen a una lógica o secuencia, lo cual encierra un misterio.

En la actualidad, los matemáticos del siglo XXI, han desarrollado sofisticados y complicados algoritmos de primalidad, capaces de evaluar un número de muchos dígitos, en un tiempo considerablemente corto; pero para ello requieren ordenadores de última generación que puedan realizar funciones matemáticas complejas.

Con todos los logros investigativos, sigue sin esclarecerse, el origen y el comportamiento en la aparición de los números primos.

NÚMEROS PRIMOS

También conocidos como primos absolutos, son aquellos números que aceptan dos divisores la unidad y al mismo número.

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; ...

NÚMEROS COMPUESTOS:

Son aquellos números que aceptan más de dos divisores.

4; 6; 8; 9; 10; 12; ...

Observación:

El uno es el único número que posee un solo divisor, también se le conoce como divisor universal.

Números Primos Entre Sí (PESI)

Dos o más números enteros son P.E.S.I. cuando su único divisor común es la unidad.

Ejemplo: ¿8 y 15 son PESI?

Divisores

8: 1; 2; 4; 8

15: 1; 3; 5; 15

→ 8 y 15 sí son PESI

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA (Descomposición Canónica)

Todo número entero positivo mayor a uno, es posible expresarlo como un producto de potencias de sus divisores primos diferentes. Dicha representación es única.

Ejemplo:

$$24 = \underbrace{2^3 \times 3^1}_{}$$

(Descomposición Canónica)

Sea: $\boxed{N = a^x.b^y.c^z}$

Un número descompuesto canónicamente donde a, b y c son primos x, y, z son enteros positivos:

Cantidad de Divisores $(CD_{(N)})$

$$\boxed{CD_{(N)} = (x+1)(y+1)(z+1)}$$

Observación 1:

$$24 = \overbrace{\overbrace{1;\ \underbrace{2;\ 3}_{\text{Divisores Primos}}}^{\text{Divisores Simples}};\ \underbrace{4;\ 6;\ 8;\ 12;\ 24}_{\text{Divisores Compuestos}}}^{\text{Divisores Propios}}$$

Observación 2:

$$\boxed{CD_{(N)} = CD_{(Compuestos)} + \underbrace{CD_{(Primos)} + 1}_{}}$$

$$\boxed{CD_{(N)} = CD_{(Compuestos)} + CD_{(Simples)}}$$

1. ¿Cuántos divisores tiene 46400?

A) 40 B) 56 C) 63
~~D~~) 42 E) 48

Resolución:

Pasando a la forma canónica:

46400	$2^2 \times 5^2$
464	2^2
116	2^2
29	29
1	

→ $46400 = 2^6 \times 5^2 \times 29$ … (DC)

→ $CD_{(46400)} = (6+1)(2+1)(1+1)$

→ $CD_{(46400)} = (7)(3)(2)$

$\therefore$ $\boxed{CD_{(46400)} = 42}$

2. ¿Cuántos divisores compuestos tiene 6000?

A) 40 B) 39 C) 38
D) 37 ~~E)~~ 36

Resolución:

Pasando a la forma canónica:

6000	$2^3 \times 5^3$
6	2×3
1	

→ $6000 = 2^4 \times 3 \times 5^3$ ... (DC)

→ $CD_{C(6000)} = CD_{(6000)} - CD_P - 1$

→ $CD_{C(6000)} = (4+1)(1+1)(3+1) - 3 - 1$

→ $CD_{C(6000)} = (5)(2)(4) - 4$

$\therefore$ $\boxed{CD_{C(6000)} = 36}$

3. Halle el valor de n si el número $A=12^n\times21^n$ tiene 196 divisores.

A) 1 B) 2 ~~C)~~ 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Pasando a la forma canónica:

$$A=(2^2\times3)^n x(3\times7)^n$$

$$\rightarrow \quad A=2^{2n}\times3^{2n}\times7^n \quad \dots \text{ (DC)}$$

Dato: $CD_{(A)}=196$

$$\rightarrow \quad (2n+1)(2n+1)(n+1)=196$$

$$\rightarrow \quad (2n+1)^2(n+1)=7^2\times4$$

$$\rightarrow \quad n+1=4$$

$$\therefore \quad \boxed{n=3}$$

4. ¿Cuántos ceros se deben colocar a la derecha de 9 para que el resultado tenga 239 divisores compuestos?

A) 6 ~~B)~~ 8 C) 9
D) 5 E) 4

Resolución:

Sea: $M = 9\underbrace{000\ldots0}_{\text{"n" ceros}}$ → $M = 9 \times 10^n$

Pasando a la forma canónica:

$$M = 3^2 \times 2^n \times 5^n \ \ldots \ (DC)$$

Dato: $CD_{C(M)} = 239$

$$\rightarrow \quad \underbrace{CD_{(M)} - CD_P - 1}_{CD_{C(M)}} = 239$$

$$\rightarrow \quad (3)(n+1)(n+1) - 3 - 1 = 239$$

$$(3)(n+1)^2 = 243$$

$$(n+1)^2 = 81 = 9^2$$

$\therefore$ $\boxed{\#ceros = 8}$

5. Si $6^n \times 15$ tiene 84 divisores halle el valor de n.

A) 4 ~~B)~~ 5 C) 6
D) 7 E) 8

Resolución:

Pasando a la forma canónica:

$$J = (2\times3)^n x (3\times5)$$

$$J = 2^n \times 3^{n+1} \times 5 \quad \text{... (DC)}$$

Dato: $CD_{(J)} = 84$

$$\rightarrow \quad (n+1)(n+2)(2) = 84$$

$$\rightarrow \quad (n+1)(n+2) = 42 = 6\times7$$

$$\therefore \quad \boxed{n = 5}$$

6. Halle el valor de n si el número de divisores de $P=3\times21^n$, es 2/3 del número de divisores de $Q=98^n$.

A) 3 ~~B)~~ 4 C) 5
D) 6 E) 7

Resolución:

Pasando P y Q a la forma canónica:

★ $P = 3\times(3\times7)^n \rightarrow P = 3^{n+1}\times7^n$ ... (DC)

★ $Q = (2\times7^2)^n \rightarrow Q = 2^n\times7^{2n}$ ... (DC)

Dato: $\underbrace{CD_{(P)}} = \frac{2}{3}\underbrace{CD_{(P)}}$

$\rightarrow (n+2)\cancel{(n+1)} = \frac{2}{3}\cancel{(n+1)}(2n+1)$

$\rightarrow 3n+6 = 4n+2$

$\therefore \boxed{n = 4}$

7. Halle el valor de n si 3072^n, tiene 907 divisores compuestos.

A) 7 ~~B)~~ 9 C) 8
D) 10 E) 5

Resolución:

Pasando a la forma canónica:

3072	2×3
512	$8^3=(2^3)^3$
1	

$\rightarrow\ M=(2^{10}\times3)^n \rightarrow\ M=2^{10n}\times3^n$ ... (DC)

Dato: $CD_{C(M)}=907$

$\rightarrow\ \underbrace{CD_{(M)}-CD_P-1}=907$

$\rightarrow\ (10n+1)(n+1)-2-1=907$

$\rightarrow\ (10n+1)(n+1)=910=91\times10$

$\therefore\ \boxed{n=9}$

8. Si $E = \underbrace{108\times108\times108\times\ldots\times108}_{\text{n factores}}$

tiene 114 divisores compuestos, halle n.

A) 3 ~~B)~~ 4 C) 6
D) 5 E) 9

Resolución:

Pasando a la forma canónica:

$$E = 108^n = (27\times4)^n = (3^3\times2^2)^n$$

$$\rightarrow \quad E = 3^{3n}\times2^{2n} \quad \ldots \text{ (DC)}$$

Dato: $CD_{C(E)} = 114$

$$\rightarrow \quad \underbrace{CD_{(E)} - CD_P - 1}_{CD_{C(E)}} = 114$$

$$\rightarrow \quad (3n+1)(2n+1) - 2 - 1 = 114$$

$$\rightarrow \quad (3n+1)(2n+1) = 117 = 13\times9$$

$$\therefore \quad \boxed{n = 4}$$

9. Halle el menor número que tenga 15 divisores. Dé como respuesta la cifra de las decenas del número.

~~A)~~ 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

Resolución:

Sea N el menor #:

$$CD_{(N)} = 15 = 3\times5 = (2+1)(4+1)$$

$$\rightarrow \quad N = a^2\times b^4 \quad \ldots \text{(DC)}$$

Como N es el menor #, entonces:

$$a = 3 \quad y \quad b = 2$$

Luego:

$$N = 3^2\times2^4 = 144$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{Cifra Decenas} = 4}$$

10. Las cifras del numeral $\overline{abcabc}$ son todas diferentes de cero. Si el número es el menor posible y tiene 16 divisores, ¿cuál es la suma de cifras?

A) 20 B) 18 C) 14

D) 12 ~~E)~~ 10

Resolución:

Pasando a la forma canónica:

$$M = \overline{abcabc} = \overline{abc} \times 10^3 + \overline{abc}$$

$$\rightarrow M = 1001 \times \overline{abc}$$

$$\begin{array}{r|l} 1001 & 11 \\ 91 & 7 \times 13 \\ 1 & \end{array}$$

$\rightarrow M = 7 \times 11 \times 13 \times \overline{abc}$ ... (DC)

$$CD_{(M)} = 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = (1+1)(1+1)(1+1)(1+1)$$

$\rightarrow$ $\overline{abc}$ es un primo absoluto y lo menor posible $\rightarrow$ $\overline{abc} = 113$

Luego: $\overline{abcabc} = 113113$

$\therefore$ $\boxed{\sum \text{cifras} = 10}$