ALGEBRA

Chapter 7

Verano SM

Funciones

PROF. ARTURO CÓRDOVA C.

SACO OLIVEROS

Helicomotivación

¿*Por que debo estudiar las Funciones*?

Querido estudiante:

Muchas situaciones de la vida real estan en funciòn de otras, es decir se trata de una situaciòn independiente y otra dependiente.

Por ello el estudio de las relaciones y funcio – nes, ademàs de sus gràficas nos ayudan a entender su aplicaciòn en la ciencia.

Ejemplo: la funciòn cuadràtica o de 2do. grado cuya gràfica es una parabòla, tiene mucha aplicaciòn en edificaciones, diseños, trayectorias de cuerpos, etc.

La funciòn de primer grado tiene su apli – caciòn en la ecònomia, medicina, finanzas, marketing, etc.

Toda esta base, nos va a ayudar para afron – tar otros estudios superiores.

FUNCIONES

DEFINICIONES PREVIAS

I.- PAR ORDENADO

Es un conjunto de dos elementos considerados en un determinado orden , si los elementos del par ordenado son a y b al conjunto se le denota por (a;b) y se define de la manera siguiente : $(a;b)$

Donde :

a = Primera componente

b = Segunda componente

$* \ (x;y)$ $\quad * \ (9;4)$ $\quad * \ (-3;0)$

PROPIEDADES

$1.- (a;b) \neq (b;a);\ \forall\, a \neq b$

$2.- (a;b) = (c;d) \rightarrow a = c \ \wedge \ b = d$

II .- PRODUCTO CARTESIANO

$$(P = AxB)$$

Dado dos conjuntos no vacíos A y B , el producto cartesiano de A por B (en ese orden) se denota así A X B y se define de la manera siguiente :

$$A\,x\,B = \{(a;b)/a \in A \;\wedge\; b \in B\}$$

A = Conjunto de partida

B = Conjunto de llegada

Ejemplo

Dado los conjuntos $A = \{1;2;3\} \quad \wedge \quad B = \{-1;2\}$

Resolución

$$A\,x\,B = \{(1;-1),(1;2),(2;-1),(2;2),(3;-1),(3,2)\}$$

$$B\,x\,A = \{(-1;1),(2;1),(-1;2),(2;2),(-1;3),(2,3)\}$$

PROPIEDADES

$1.-A\,x\,B \neq B\,x\,A$

$2.-n(AxB) = n(BxA) = n(A).n(B)$

III .- RELACIONES

Son subconjuntos de un producto cartesiano.

Ejemplo

Sea el producto cartesiano :

$$\mathrm{P} = A\ x\ B = \{(1;-1),(1;2),(2;-1),(2;2),(3;-1),(3,2)\}$$

formamos las relaciones :

$$R_1 = \{(1;-1),(1;2),(2;-1)\}$$

$$R_2 = \{(1;-1),(2;2),(3;2)\}$$

$$R_3 = \{(2;-1),(3;-1),(3;2)\}$$

$$R_4 = \{(1;2),(2;-1),(3;-1)\}$$

FUNCIONES

Es un caso particular de una relación y se define como un conjunto de pares ordenados en donde dos de ellos diferentes no deben tener igual su primera componente y de ser asi seria una relación pero no función.

Ejemplo

Sean los conjuntos de pares ordenados:

$$G=\{(\underline{4;9}),(7;2),(\underline{4;3}),(5;8),(0;6)\}\ \rightarrow\ G\ no\ es\ una\ función$$

$$F=\{(2;9),(7;2),(4;3),(5;9),(0;6)\}\ \rightarrow\ F\ si\ es\ una\ función$$

$$H=\{(2;5),(7;4),(9;3),\cancel{(2;5)},\cancel{(7;4)}\}\ \rightarrow\ H\ si\ es\ una\ función$$

$$P=\{(8;5),(7;5),(9;5),(2;5),(0;5)\}\ \rightarrow\ P\ si\ es\ una\ función$$

Toda función es una relación, pero no toda relación es una funcion.

Dominio (Df) y Rango(Rf) de una Funciòn

Df: *es el conj. formado por las primeras componentes de los pares ordenados*

Rf: *es el conj. formado por las segundas componentes de los pares ordenados*

Ejemplo *sea la funciòn*:

$$f = \{(2;9),(7;2),(4;3),(5;9),(0;6)\}$$

$$Df = \{2;7;4;5;0\} \qquad Rf = \{9;2;3;6\}$$

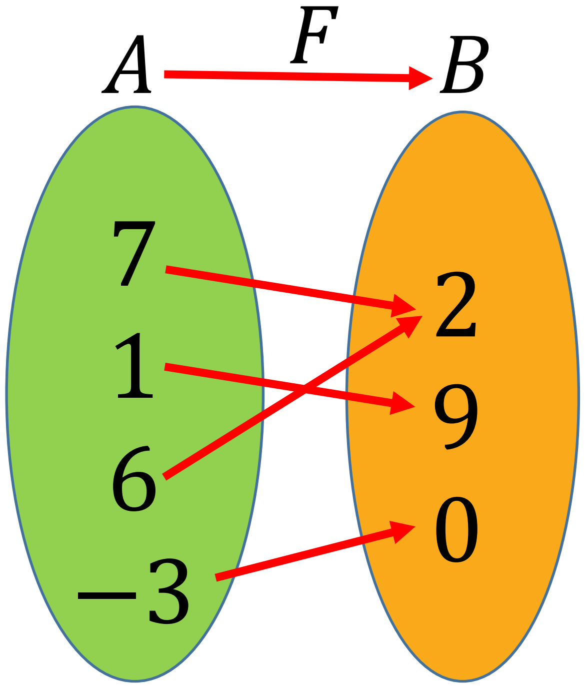
*Al dominio tambièn se le llama **pre – imagen** de la funciòn y al rango tambièn se le llama **imagen** de la funciòn*

DIAGRAMA SAGITAL PARA FUNCIONES

$Sea\ la\ función\ F: \quad A \rightarrow B \quad (Se\ lee\ función\ F\ de\ A\ en\ B)$

$Donde\ el\ conj.A\ es\ el\ dominio\ y\ el\ conj.B\ contiene\ al\ rango$

<u>***Ejemplo***</u> $Sea\ la\ función\ F: A \rightarrow B\ /\ F = \{(7;2),(1;9),(6;2),(-3;0)\}$



$$A = D_F = \{7;1;6;-3\}$$

<u>***Regla de Correspondencia***</u>

$$F_{(x)} = y$$

$$F_{(7)} = 2$$
$$F_{(1)} = 9$$
$$F_{(6)} = 2$$
$$F_{(-3)} = 0$$

TEOREMA

Para que el siguiente conjunto de pares ordenados: $F = \{(a, b); (a, c)\}$ *sea una función; se debe cumplir que*: $\boxed{b = c}$

Ejemplo

Halle el dominio y rango de la función:

$$F = \{(1; \underline{2m - 7}), (3; \underline{3n + 2}), (1; \underline{5}), (3; \underline{14}); (m^2; n^2)\}$$

por teoria:

$$2m - 7 = 5 \;\rightarrow\; m = 6$$

$$3n + 2 = 14 \;\rightarrow\; n = 4$$

Reemplazando: $F = \{(1; 5), (3; 14), \cancel{(1; 5)}, \cancel{(3; 14)}, (6^2; 4^2)\}$

$$F = \{(1; 5), (3; 14), (36\,; 16)\} \;\rightarrow\; \begin{cases} D_F = \{1; 3; 36\} \\ R_F = \{5; 14; 16\} \end{cases}$$

Funciònes Polinomiales

<u>Funciòn lineal</u>.- *es una funciòn de primer grado y cuya regla de correspondencia es*: $f(x) = ax + b$ $\forall\, a \neq 0 \;\wedge\; x \in \mathcal{R}$

<u>Funciòn cuadràtica</u>.- *es una funciòn de segundo grado y cuya regla de correspondencia es*:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall\, a \neq 0 \;\wedge\; x \in \mathcal{R}$$

<u>Funciòn cubica</u>.- *es una funciòn de tercer grado y cuya regla de correspondencia es*:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \forall\, a \neq 0 \;\wedge\; x \in \mathcal{R}$$

el dominio màximo de las funciones polinomiales son todos los reales.

Funciòn racional

$$F(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

para calcular el $D(F)$ se restringue: $h(x) \neq 0$

Ejemplo

Halle el $D(F)$ y $D(G)$

$$F(x) = \frac{3x+7}{2x-6}$$

$$2x - 6 \neq 0 \rightarrow x \neq 3$$

$$Dom(F) = \mathcal{R} - \{3\}$$

$$G(x) = \frac{3x+7}{x^2-9}$$

$$x^2 - 9 \neq 0 \rightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -3$$

$$Dom(G) = \mathcal{R} - \{3; -3\}$$

Si: $$F(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$Ran(F) = \mathcal{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$$

Funciòn Irracional

$$\boxed{F(x) = \sqrt[2n]{G(x)}} \quad ; n \in \mathbb{Z}^+$$

Se debe cumplir que:

$$G(x) \geq 0 \qquad ; x \in \mathcal{R}$$

Si el indice de la raìz es impar; no hay ninguna restricciòn.

Ejemplo   ***Halle el $D(F)$ y $D(G)$***

$$F(x) = \sqrt[4]{9 - x^2} + \sqrt[3]{x}$$

$$9 - x^2 \geq 0$$

$$x^2 - 9 \leq 0$$

$$(x+3)(x-3) \leq 0$$

$$Dom(F) = [-3; 3]$$

$$G(x) = x + \sqrt{x^2 + x - 6}$$

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

$$(x+3)(x-2) \leq 0$$

$$Dom(G) = < -\infty; -3 \cup \;] \cup [2; +\infty >$$

PRÁCTICA PARA LA CLASE

1. Si F es una función definida por

$$F=\{(\underline{4, m}), (2, 5m), (7, 2m^2+1), (\underline{4, 2m-1})\}$$

halle la suma de elementos de su rango

RESOLUCIÓN

Se cumple que:

$$(4, m) = (4, 2m-1)$$

igualando:

$$2m - 1 = m \quad \rightarrow \quad m = 1$$

reemplazando en F :

$$F = \{\cancel{(4, 1)}, (2, 5), (7, 3), (4, 1)\}$$

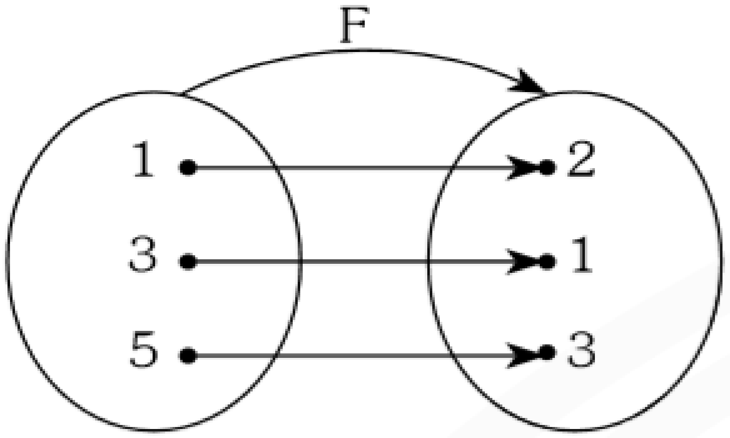
$$F = \{ (2, 5), (7, 3), (4, 1)\}$$

$$Ran(F) = \underbrace{\{5; 3; 1\}}$$

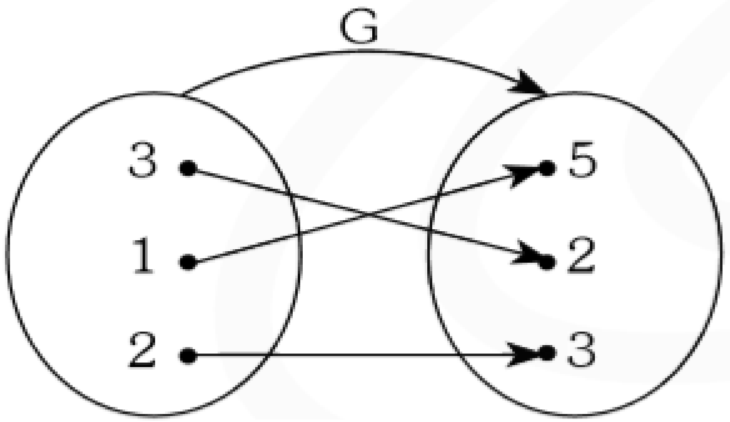
$$\sum = 5 + 3 + 1 = 9$$

$$\boxed{9 \qquad (c)}$$

2. Dadas las funciones F y G definidas en el *diagrama*



$$\begin{cases} F(1) = 2 \\ F(3) = 1 \\ F(5) = 3 \end{cases}$$



$$\begin{cases} G(3) = 2 \\ G(1) = 5 \\ G(2) = 3 \end{cases}$$

halle $K = \dfrac{F(1)+G(3)}{F(G(1))+F(G(2))}$.

RESOLUCIÓN

$$k = \frac{F(1) + G(3)}{F\big(G(1)\big) + F\big(G(2)\big)}$$

$$k = \frac{2 + 2}{F(5) + F(3)}$$

$$k = \frac{4}{3 + 1} \quad \rightarrow \quad k = 1$$

1 (B)

3. Dada la función

$$F(x) = \begin{cases} 2x+3; & x \in \langle -2; 3] \\ 3x-1; & x \in \langle 3; 6] \end{cases}$$

halle $E = \dfrac{F(1)-F(5)}{F(3)-F(4)}$.

RESOLUCIÓN

$$F(x) = \begin{cases} 2x+3\ ; & -2 < x \leq 3 \\ 3x-1\ ; & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

$$F(1) = 2(1)+3 = 5$$
$$F(3) = 2(3)+3 = 9$$

$$F(4) = 3(4)-1 = 11$$
$$F(5) = 3(5)-1 = 14$$

$$E = \frac{5-14}{9-11} = \frac{-9}{-2}$$

$$E = \frac{9}{2} \qquad (B)$$

4. Halle el dominio de la función f.

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}+\sqrt[3]{x^2-9}$$

RESOLUCIÓN

Recordar:

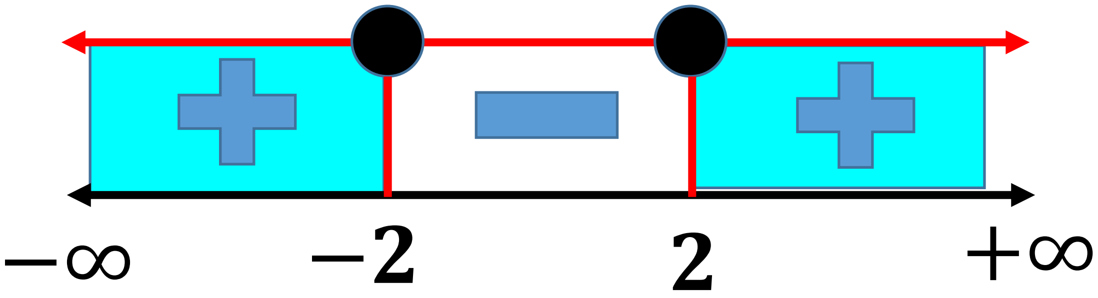
$$\sqrt[2n]{A}\ ;\ \forall\ n\in\mathbb{Z}^{+}$$

$$\rightarrow\ A\geq 0$$

entonces:

$$x^2-4\ \geq\ 0$$

$$(x+2).(x-2)\geq 0$$



$$D(f)=<-\infty;-2]\cup[2;+\infty>$$

5. Encuentre el número de elementos enteros del dominio de la función

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}+\sqrt[3]{x-2}$$

RESOLUCIÓN

$$\textit{Por existencia de raìz:}$$

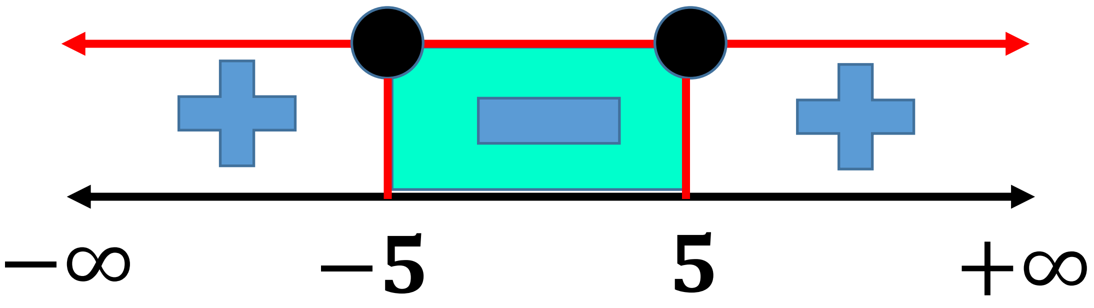
$$25-x^2 > 0$$

$$(\textit{el denominador es diferente de cero})$$

$$\textit{Mùltiplicamos por } -1:$$

$$x^2-25 < 0$$

$$(x+5).(x-5) < 0$$



$$D(f) = < -5; 5 >$$

$$\textit{Los elementos enteros del dominio son:}$$

$$-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$$

$$\textit{en total son: } 9 \textit{ valores.}$$

6. Sea f una función definida por $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$, halle la suma de elementos enteros que pertenecen al dominio de f.

RESOLUCIÓN

I) Por existencia de raìz:

$$4-x^2 \geq 0$$

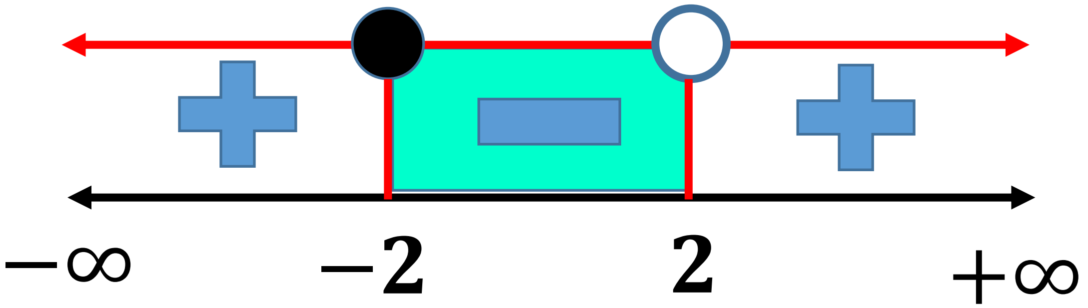
Mùltiplicamos por -1:

$$x^2-4 \leq 0$$

$$(x+2).(x-2) \leq 0$$

II) Por existencia de fracciòn:

$$x-2 \neq 0 \rightarrow x \neq 2$$



$$D(f) = [-2;2>$$

Los elementos enteros del dominio son:

$$-2;\ -1;\ 0;\ 1.$$

$$\sum = -2-1+0+1 = \boxed{-2}$$

7. Sea $f=\{(x;\ y)\ /\ y = 2x - 1\}$ y además $Dom(f)=\{-5; 2; 3; 4\}$, halle el rango de f.

RESOLUCIÓN

$$Dom(f) = \{-5\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$$

$$f = \{(-5; -11), (2; 3), (3; 5), (4; 7)\}$$

Utilizando la regla de corres – pondencia de la funciòn

$$y = 2x - 1$$

$$y = 2(-5) - 1 = -11$$

$$y = 2(2) - 1 = 3$$

$$y = 2(3) - 1 = 5$$

$$y = 2(4) - 1 = 7$$

$$Ran(f) = \{-11\ ;3\ ;5\ ;7\}$$

8. Determine el rango de la función:

$$F(x) = 2x + 5; \quad x \in [5; 8\rangle$$

RESOLUCIÓN

$$y = 2x + 5$$

$$5 \geq x > 8$$

$$x\,2 \rightarrow \quad 10 \geq 2x > 16$$

$$+5 \rightarrow \quad 15 \geq 2x + 5 > 21$$

$$15 \geq y > 21$$

$$y \in [15;21 >$$

$$Ran(F) = [15;21 >$$

9. Halle el rango de :

$$f(x)=\sqrt{4-|x|}+1$$

RESOLUCIÓN

Sabemos que:

$$|x| \geq 0$$

$$x\ -1 \ \rightarrow \qquad -|x| \leq 0$$

$$+4 \ \rightarrow \qquad 4-|x| \leq 4$$

$$\sqrt{\ } \ \rightarrow \qquad 0 \leq \sqrt{4-|x|} \leq 2$$

$$+1 \ \rightarrow \qquad 1 \leq \sqrt{4-|x|}+1 \leq 3$$

$$1 \leq f(x) \leq 3$$

$$1 \leq y \leq 3$$

$$Ran(f) = [1;3]$$

10. Dada la función

$$f(x)=\frac{2x+7}{x-2} \quad ; 3\le x\le 5$$

halle su rango.

RESOLUCIÓN

$$f(x)=\frac{2x+7}{x-2}-2\quad+\ 2$$

$$f(x)=\frac{\cancel{2x}+7-\cancel{2x}+4}{x-2}+2$$

$$y=\boxed{\frac{11}{x-2}+2}$$

-2

$$1\le x-2\le 3$$

invetimos $\quad 1\ge \frac{1}{x-2}\ge \frac{1}{3}$

$x11 \rightarrow \quad 11\ge \frac{11}{x-2}\ge \frac{11}{3}$

$+2 \rightarrow \quad 13\ge \underbrace{\boxed{\frac{11}{x-2}+2}}_{y}\ge \frac{17}{3}$

$$Ran(f)=\left[\frac{17}{3};13\right]$$