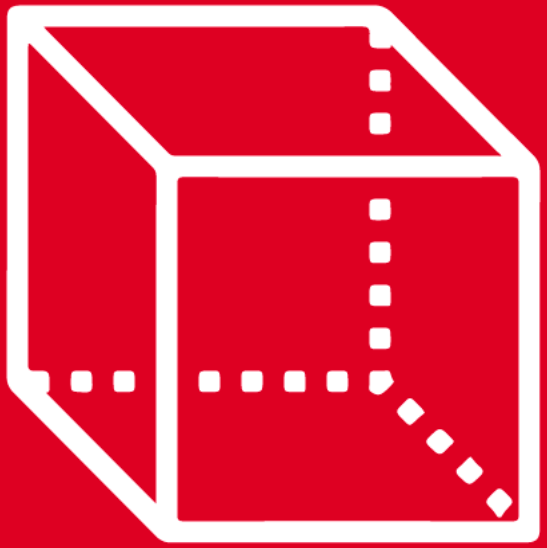
GEOMETRY

Chapter 8



VERANO SAN MARCOS

GEOMETRIA DEL ESPACIO

SACO OLIVEROS

SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

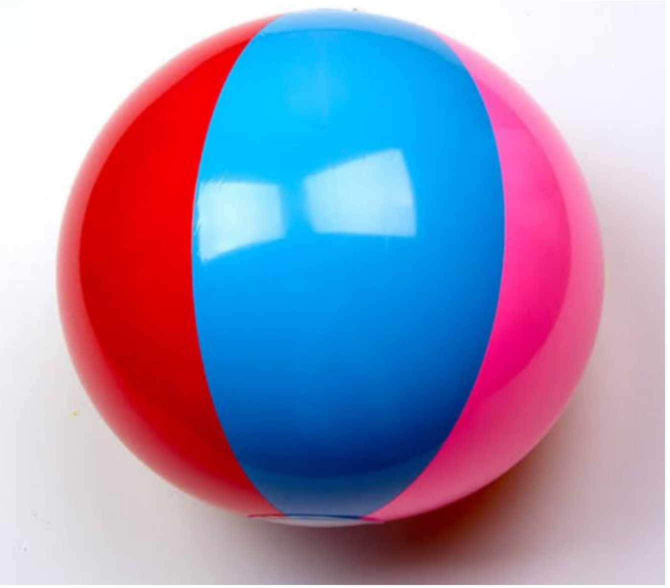
PRISMA RECTO

HEXAEDRO REGULAR

CILINDRO CIRCULAR RECTO

CONO CIRCULAR RECTO

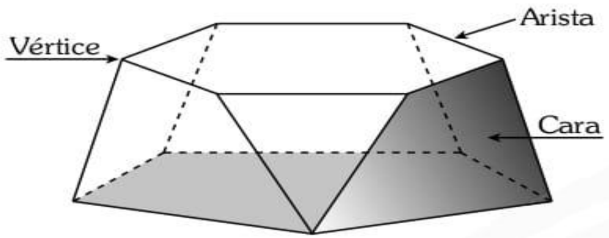
PIRÁMIDE REGULAR



ESFERA

MARCO TEÓRICO

Poliedro



El gráfico mostrado, es un poliedro.

- Las regiones poligonales se denominan *caras*.
- Los lados de cada polígono se denominan *aristas*.
- Los vértices de los polígonos, son vértices del poliedro.

Teorema de Euler

1. En un poliedro convexo, la suma de caras (C) y vértices (V) es igual al número de aristas (A) aumentado en 2.

$$\boxed{C + V = A + 2}$$

2. En un poliedro convexo, la suma de las medidas de los ángulos internos de sus caras es 360°(V–2).

$$\boxed{\sum m\measuredangle_{i(\text{caras})} = 360°(V - 2)}$$

3. Número total de diagonales de un poliedro

$$\boxed{ND(P) = C_2^V - A - \sum\left(\begin{array}{c}\text{Número de diagonales}\\ \text{de las caras}\end{array}\right)}$$

4. Número de aristas (A)

$$\boxed{A = \frac{n(3) + m(4) + k(5) + \ldots}{2}}$$

n: número de caras triangulares
m: número de caras cuadrangulares
k: número de caras pentagonales

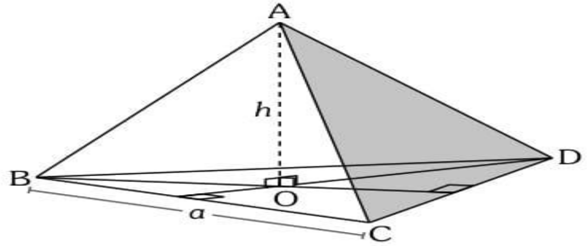
Poliedros regulares

Definición. Se denomina poliedro regular, a todo poliedro convexo, en el cual sus respectivas caras son regiones poligonales regulares congruentes entre sí y en cada vértice concurren igual número de aristas.

Se demuestra la existencia de cinco clases de poliedros regulares

- *Tetraedro regular*. Tiene cuatro caras triangulares regulares.
- *Hexaedro regular*. Tiene seis caras los cuales son regiones cuadradas (cuadrados).
- *Octaedro regular*. Tiene ocho caras triangulares regulares (triángulo equilátero).
- *Dodecaedro regular*. Tiene doce caras pentagonales regulares.
- *Icosaedro regular*. Tiene 20 caras triangulares regulares (triángulo equilátero).

Tetraedro regular



A-BCD: tetraedro regular
Sea a la longitud de sus aristas.

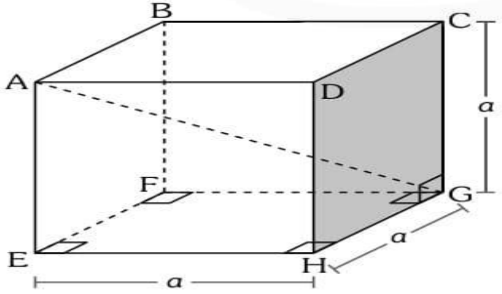
- $\overline{AO}$ es altura. $\overline{AO} \perp$ Cara(BCD)
- O es centro de la base.

$$\boxed{AO = h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

$$\boxed{\text{Área(sup. tot.)} = a^2\sqrt{3}}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$$

Hexaedro regular



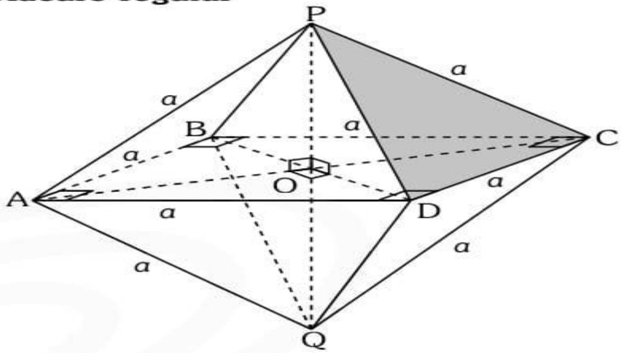
ABCD-EFGH: hexaedro regular

Diagonal: $\boxed{AG = a\sqrt{3}}$

$$\boxed{\text{Área(sup. tot.)} = 6a^2}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = a^3}$$

Octaedro regular



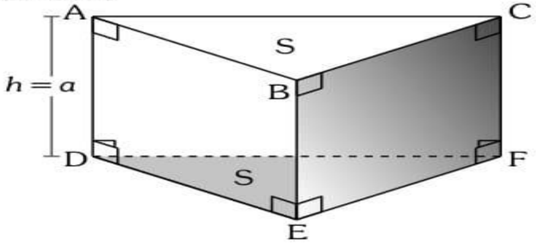
P-ABCD-Q: octaedro regular
Sea a la longitud de sus aristas.

Diagonal: $\boxed{AC = BD = PQ = a\sqrt{2}}$

$$\boxed{\text{Área(sup. tot.)} = 2a^2\sqrt{3}}$$

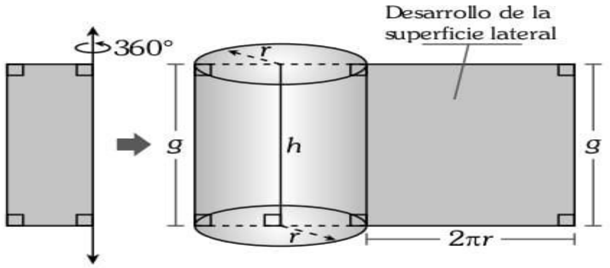
$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}}$$

Prisma recto



ABC-DEF: prisma recto triangular

Cilindro circular recto o cilindro de revolución



$$\boxed{\text{Área(sup. lat.)} = 2\pi rg}$$

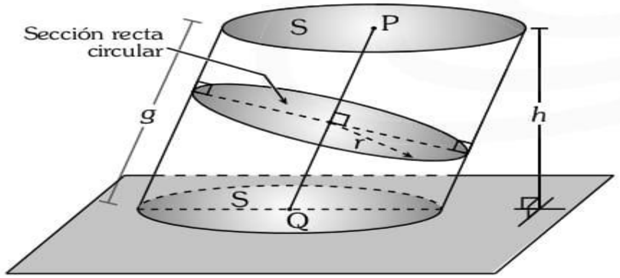
$$\boxed{\text{Área(sup. tot.)} = 2\pi rg + 2\pi r^2}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = \pi r^2 h}$$

g: longitud de la generatriz

h: longitud de la altura

Cilindro oblicuo de sección recta circular



$\overline{PQ}$ es el eje del cilindro oblicuo.

h es la longitud de su altura.

g es la longitud de su generatriz.

$$\boxed{\text{Área(sup. lat.)} = 2\pi rg}$$

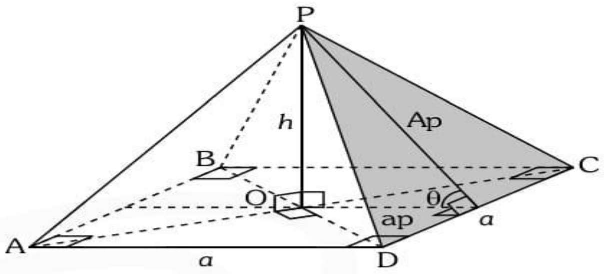
$$\boxed{\text{Área(sup. tot.)} = 2\pi rg + 2S}$$

S: área de la base

$$\boxed{\text{Volumen} = \pi r^2(\text{longitud del eje})}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = Sh}$$

Pirámide regular



P-ABCD: pirámide cuadrangular regular

Ap: apotema de la pirámide

ap: apotema de la base

O: es centro de la base

$$\boxed{h^2 + (\text{ap})^2 = (\text{Ap})^2}$$

$$\boxed{\text{Área(sup. lat.)} = (p_{\text{base}})(\text{Ap})}$$

p_{base}: semiperímetro de la base

$$\boxed{\text{Área(sup. tot.)} = (p_{\text{base}})(\text{Ap}) + \text{A}_{\text{base}}}$$

A_{base}: área de la base

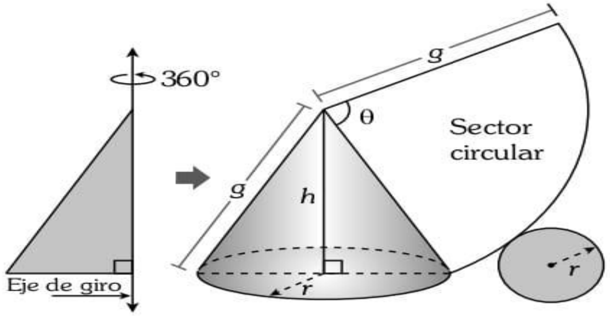
$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{(\text{A}_{\text{base}})(h)}{3}}$$

h: medida de la altura

ap: apotema de la base

Ap: apotema de la pirámide

Cono circular recto o cono de revolución



g: longitud de la generatriz

h: longitud de la altura

$$\boxed{\text{Área(sup. lat.)} = \pi r g}$$

$$\boxed{\text{Área(sup. tot.)} = \pi r g + \pi r^2}$$

$$\boxed{\text{Volumen} = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

➢ Área(sector circular) = Área(sup. lat.)

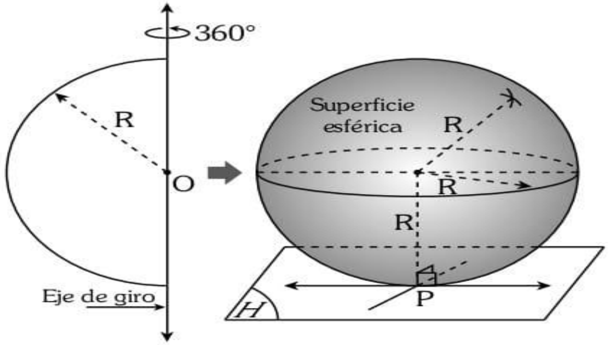
$$\frac{\theta \pi g^2}{360°} = \pi r g$$

$$\boxed{\theta = \left(\frac{r}{g}\right) 360°}$$

θ es la medida del ángulo central del sector circular, el cual es el desarrollo de la superficie lateral del cono circular recto.

$$\boxed{h^2 + r^2 = g^2}$$

Superficie esférica



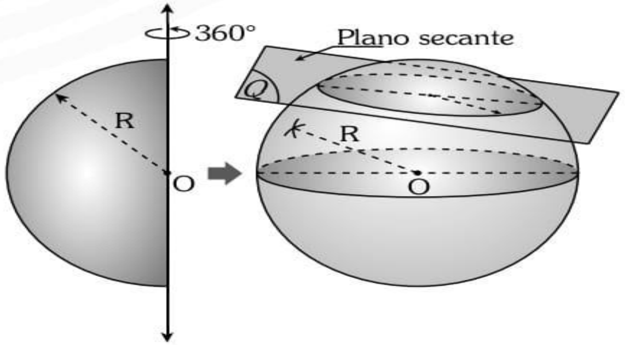
O es centro de la superficie esférica.

H es plano tangente a la superficie esférica en P.

$\overline{OP} \perp$ Plano H

$$\boxed{\text{Área(sup. esf.)} = 4\pi R^2}$$

Esfera

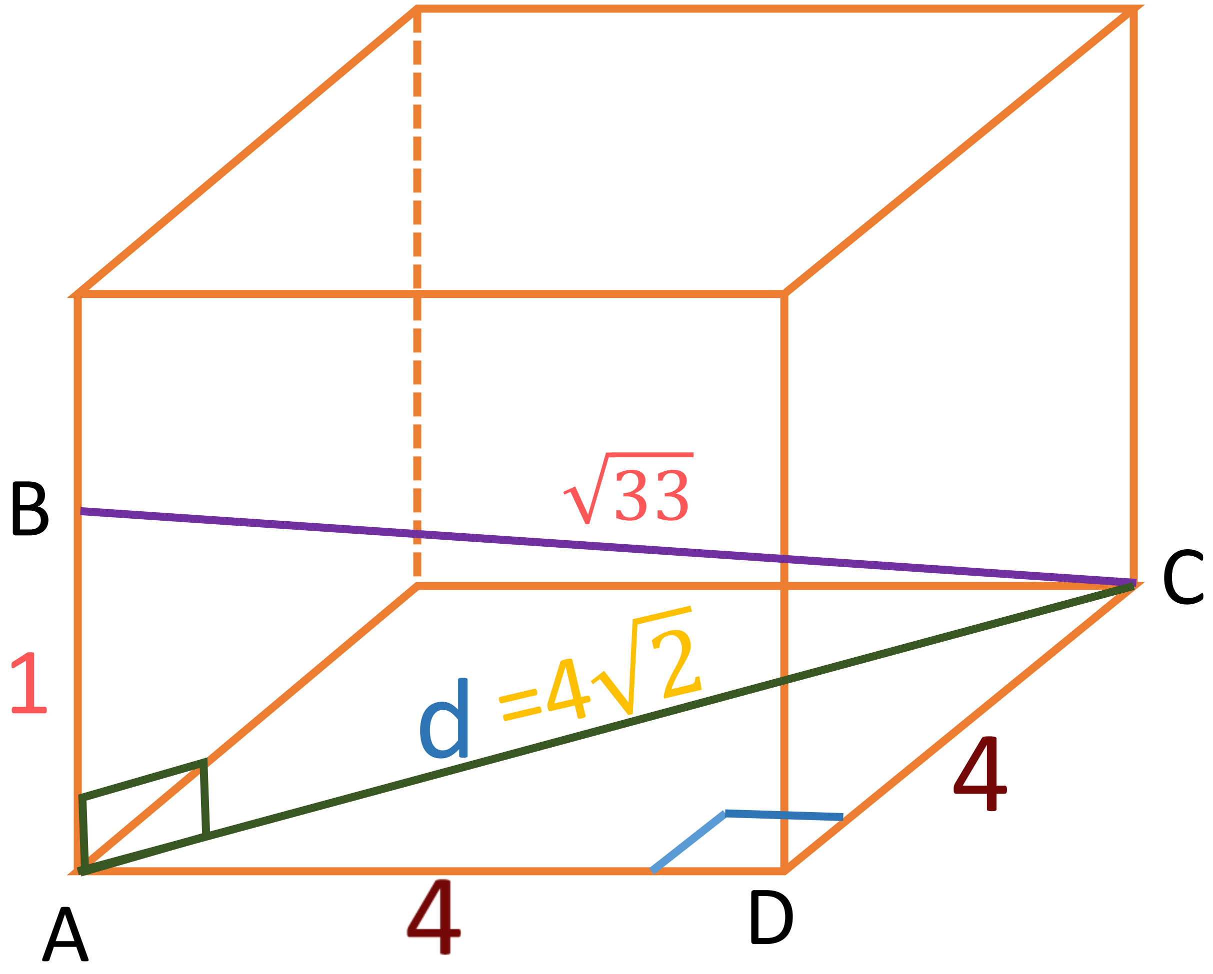


O es centro de la esfera también es centro del círculo máximo.

Q es plano secante a la esfera.

$$\boxed{\text{V(esfera)} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

1) Calcule el volumen del cubo mostrado , AB= 1 ,BC=$\sqrt{33}$.



RESOLUCIÓN

Piden el volumen del cubo= V x

Por teorema de Pitágoras en $\triangle$ BAC:

$$d^2 = (\sqrt{33})^2 - (1)^2$$

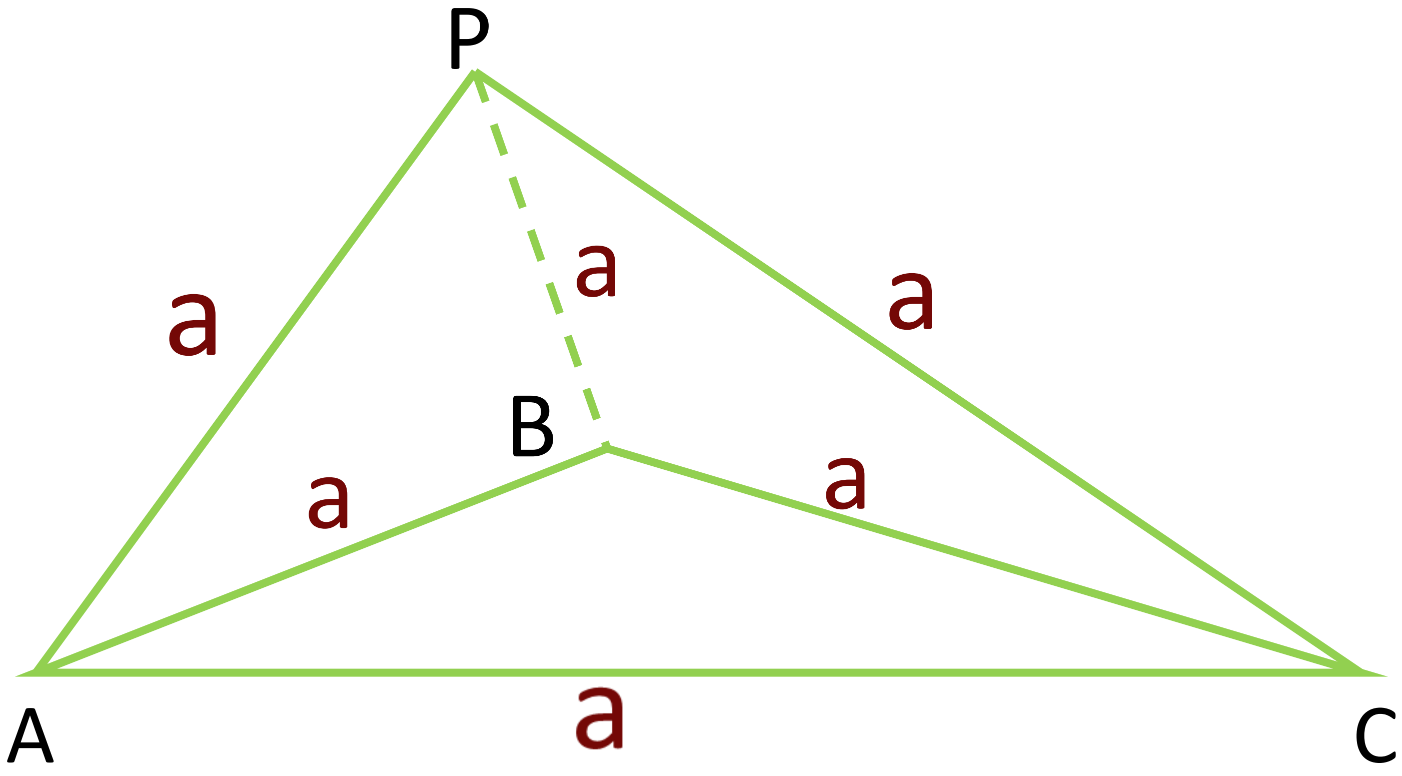
$$d^2 = 33 - 1$$

$$d^2 = 32 \rightarrow d = 4\sqrt{2}$$

Ahora: $V = (4)^3$

$$V = 64\ u^3$$

2) Calcule el área de la superficie total de un tetraedro regular si la suma de las longitudes de sus aristas es 30 u



RESOLUCIÓN

Piden : área de la superficie total= Ast

Por dato: 6a=30

a= 5

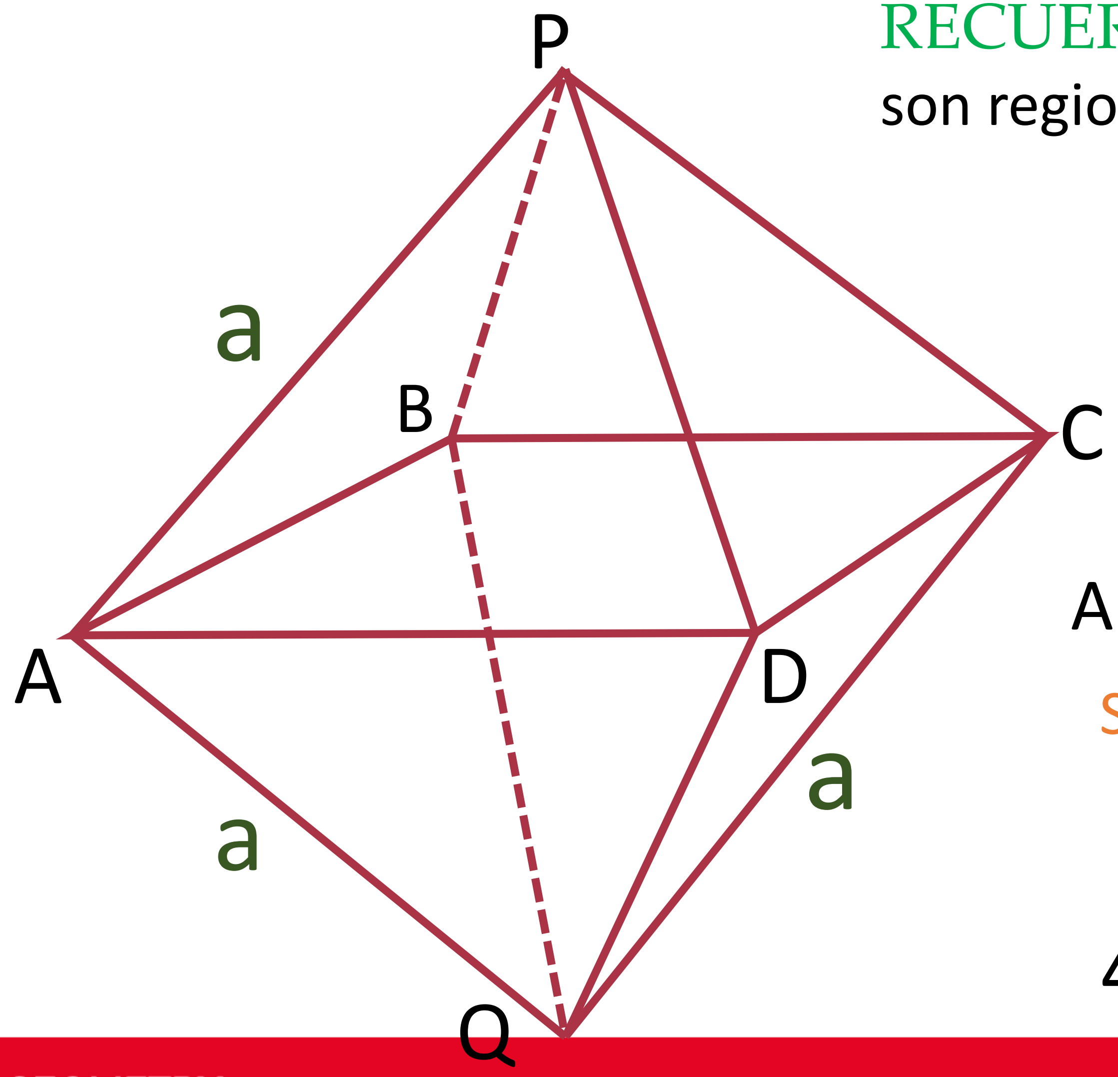
AHORA:

Ast= $a^2\sqrt{3}$

$Ast = (5)^2\sqrt{3}$

Ast= $25\sqrt{3}\ u^2$

3) En un octaedro regular ,el área de una cara es$\sqrt{3}$. Calcule la suma de las longitudes de sus aristas



RECUERDA QUE: Las caras de un octaedro regular son regiones triangulares equilaterás

RESOLUCIÓN

Piden la suma de las longitudes de sus aristas :X

Por dato: S(cara) = $\sqrt{3}$

Ahora:

S cara = $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$

$\cancel{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}a^2\cancel{\sqrt{3}}$

$4 = a^2 \quad \rightarrow \quad 2 = a$

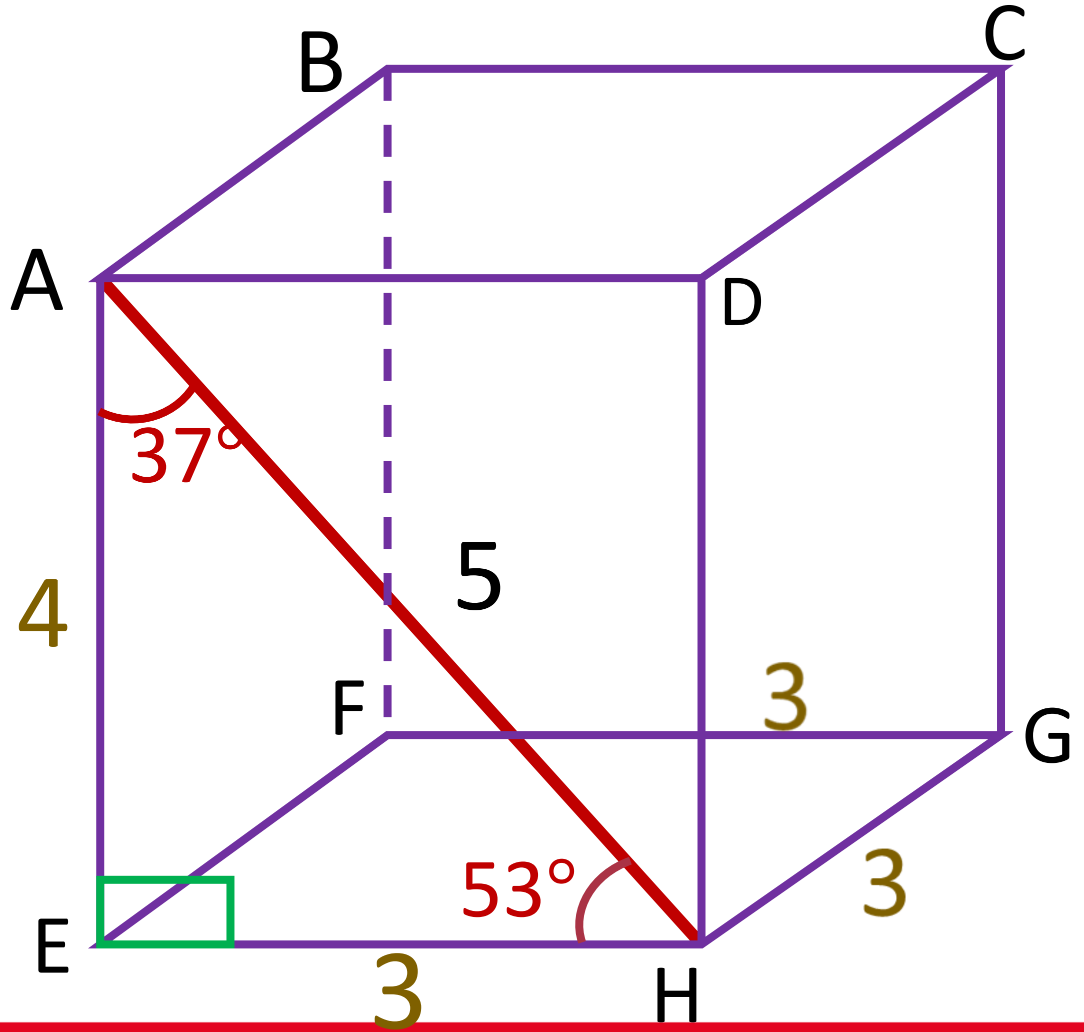
Luego:

X = 12a

X= 12(2)

X = 24 u

4) Calcule el área de la superficie lateral del prisma regular mostrado



RESOLUCIÓN

Piden el área de la superficie lateral : Asl

El triángulo ABC : Notable de 37° y 53°

→ AB= 4 , BC=3

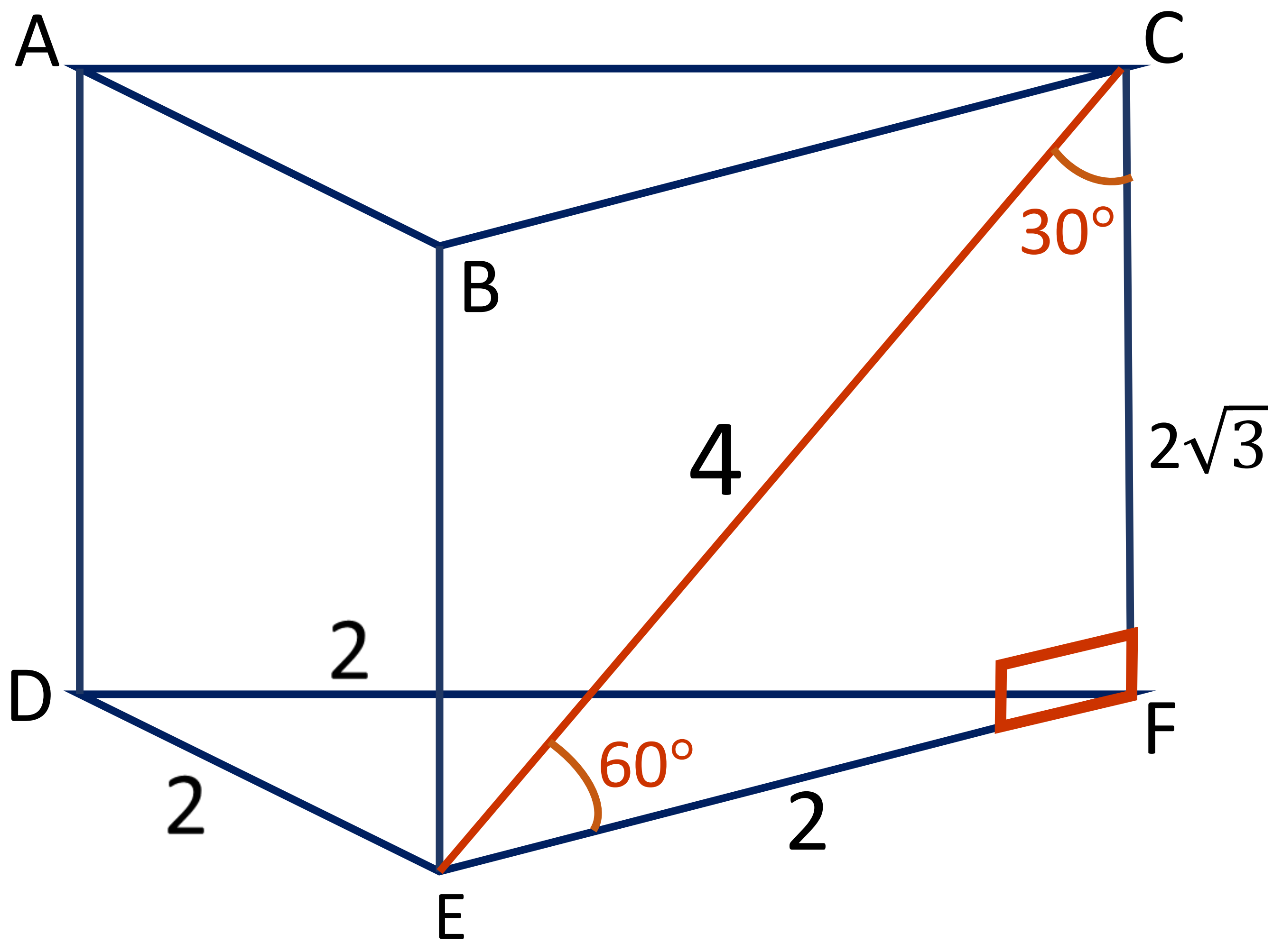
AHORA: Asl = 2p (base) x h

Asl = 4(3) x 4

Asl = 12 x 4

$\text{Asl}= 48\ u^2$

5) Calcule el volumen del prisma regular mostrado



RESOLUCIÓN

PIDEN : VOLUMEN DEL PRISMA : V

El triángulo CFE es notable de $30°\ y\ 60°$

$\rightarrow$ CF= $2\sqrt{3}$, EF= 2

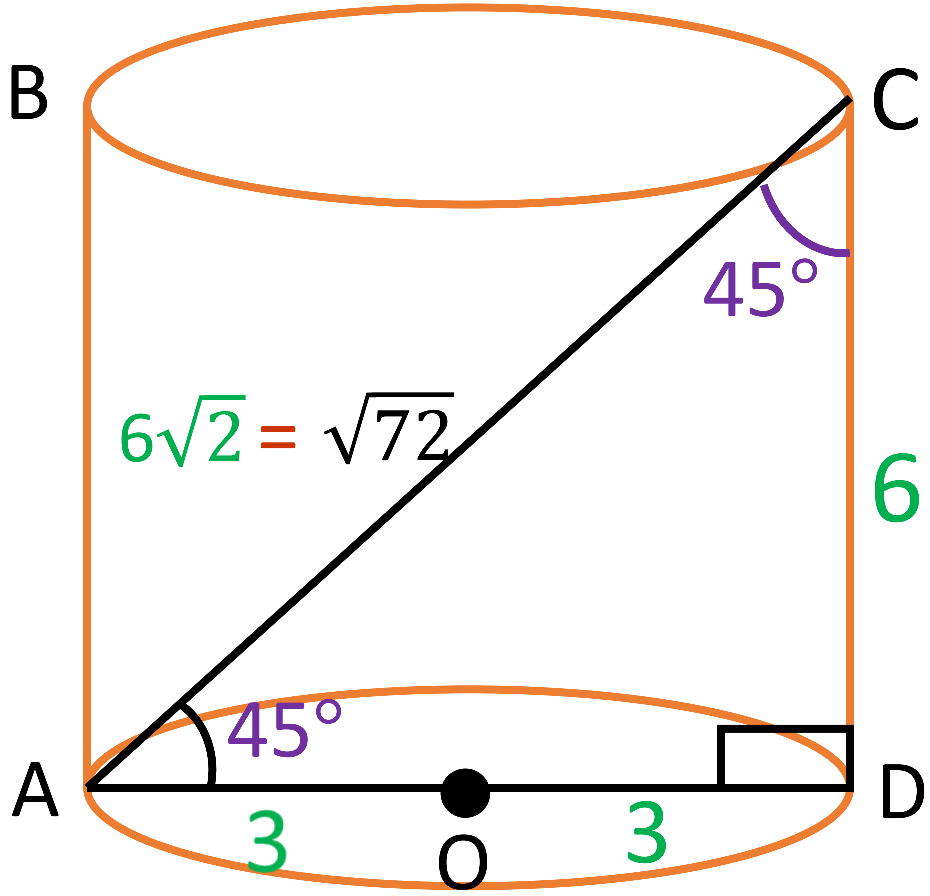
AHORA:

V =S (base) x h

$V = \cancel{\frac{1}{4}} \cancel{(2)}^2 \sqrt{3} \, .2\sqrt{3}$

$V = 6u^2$

6) Calcule el área de la superficie lateral del cilindro circular recto



RESOLUCIÓN

PIDEN EL ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL= Asl

El triángulo CDA es notable de 45°

$\rightarrow$ AD= 6 Y CD= 6

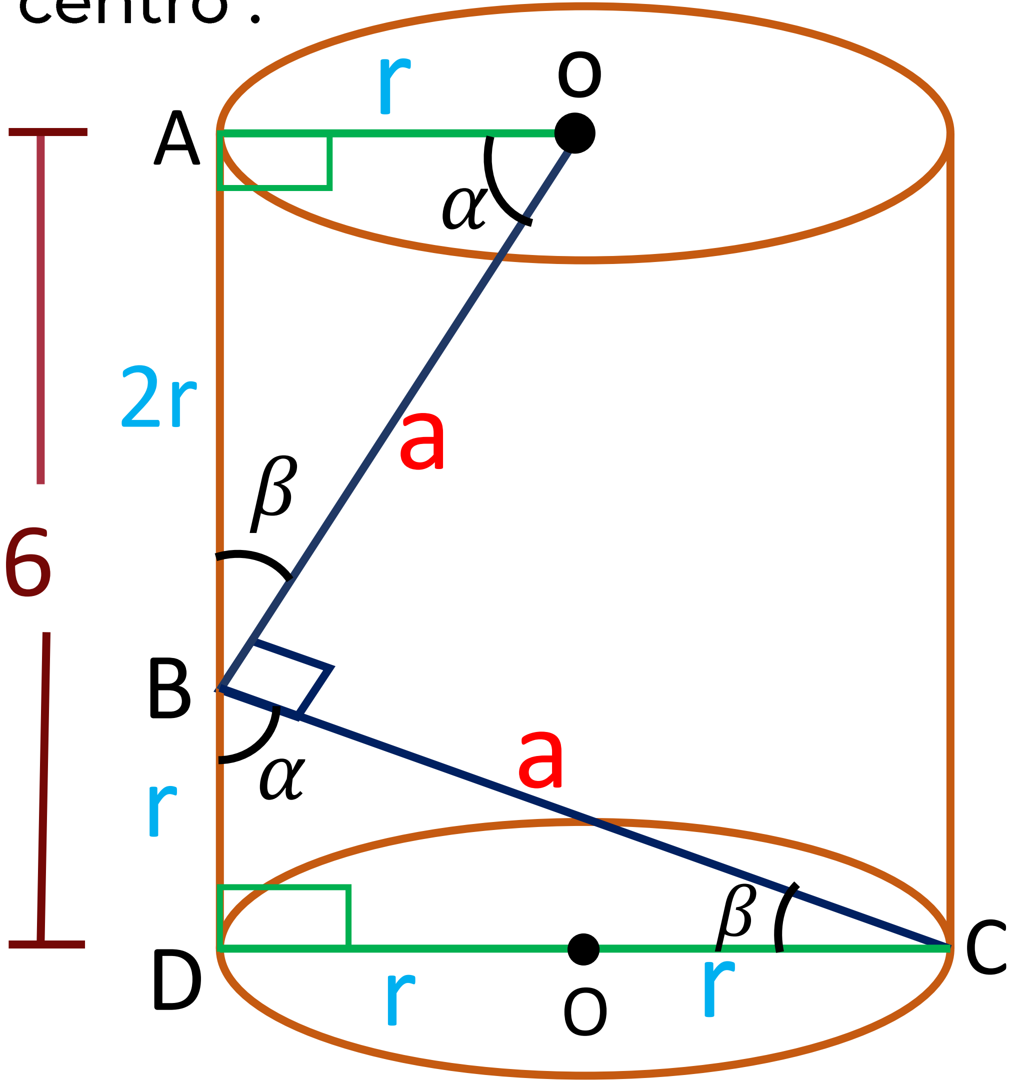
LUEGO:

Asl= $2\pi rh$

Asl = $2\pi(3)6$

Asl= $36\pi\ u^2$

7) Calcule el volumen del cilindro circular recto mostrado , O es centro .



RESOLUCIÓN

PIDEN : EL VOLUMEN DEL CILINDRO: V

$\Delta OAB \cong \Delta BDC$ (ALA)

$\rightarrow$ AO= BD = r , AB= DC= 2r

Observamos que : $2r + r = 6$

$3r = 6$

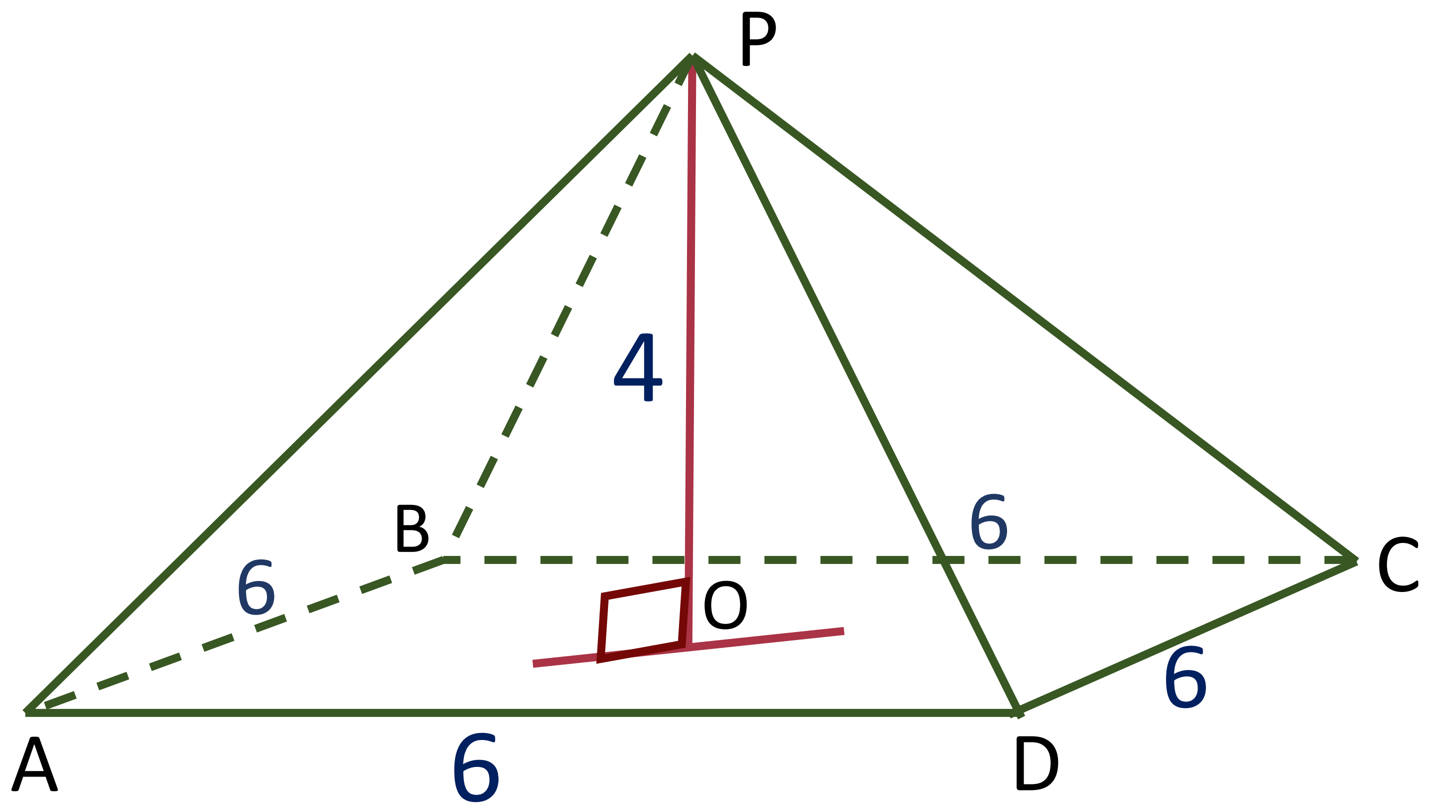
$r = 2$

Ahora:

$V = \pi r^2 h$

$V = \pi(2)^2 6$ $\rightarrow$ $V = 24\pi$

8)Calcule el área de la superficie lateral de una pirámide regular de altura 4u y arista básica 6u



RESOLUCIÓN

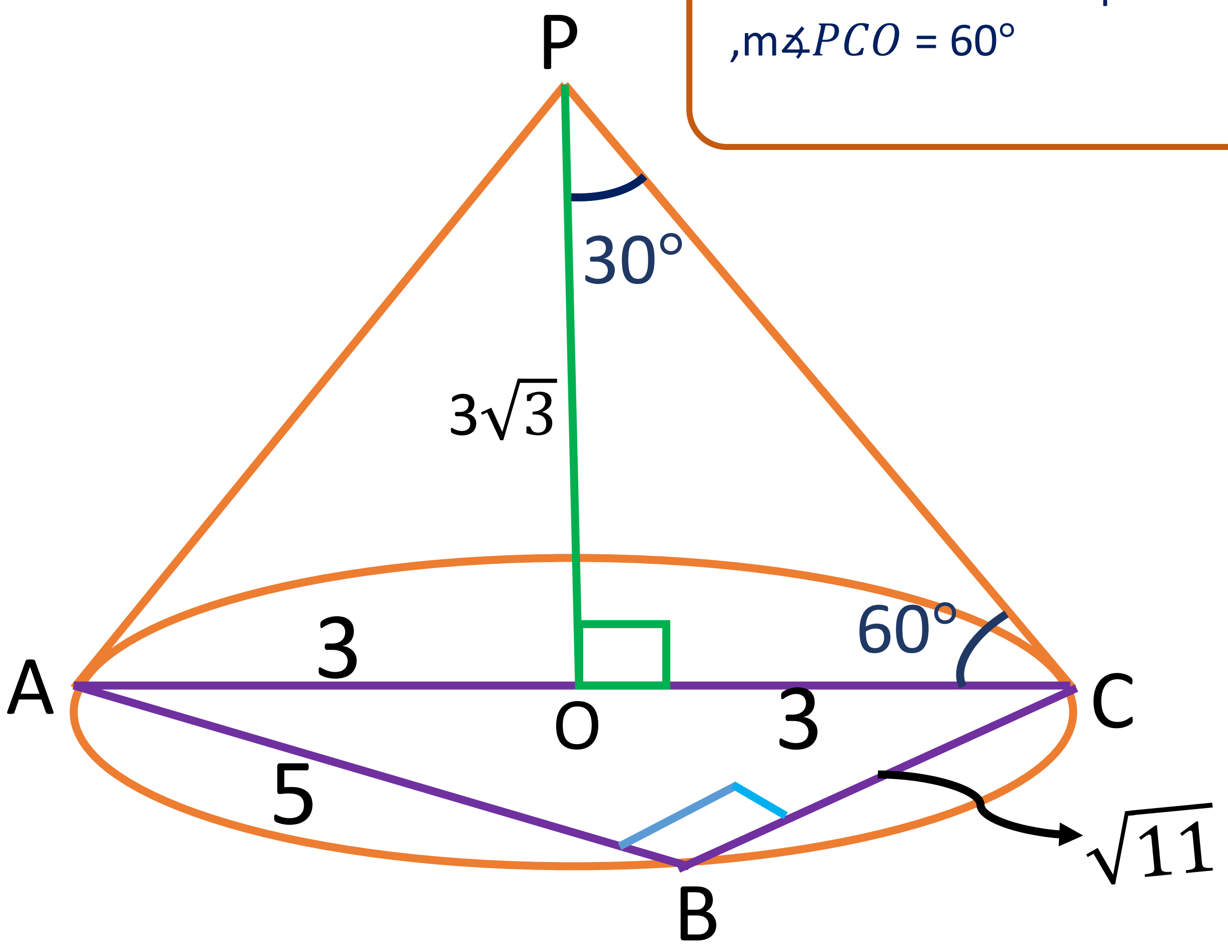
PIDEN EL ÁREA DE LA SUPERFICIE LATERAL = Asl

Asl = p(base) .h

$$Asl = \frac{4(6)}{\cancel{2}} . \cancel{4}^{2}$$

$$Asl = 48\ u^2$$

9) Calcule el volumen del cono equilátero mostrado ,si : AB = 5 , BC= $\sqrt{11}$



Como el cono es equilátero ,
,m$\measuredangle PCO$ = 60°

RESOLUCIÓN

PIDEN EL VOLUMEN DEL CONO EQUILÁTERO= V

En ΔABC : $Teorema\ de\ Pitágoras$

AC^2 =$(5)^2 + (\sqrt{11})^2$

AC^2 = 25 +11

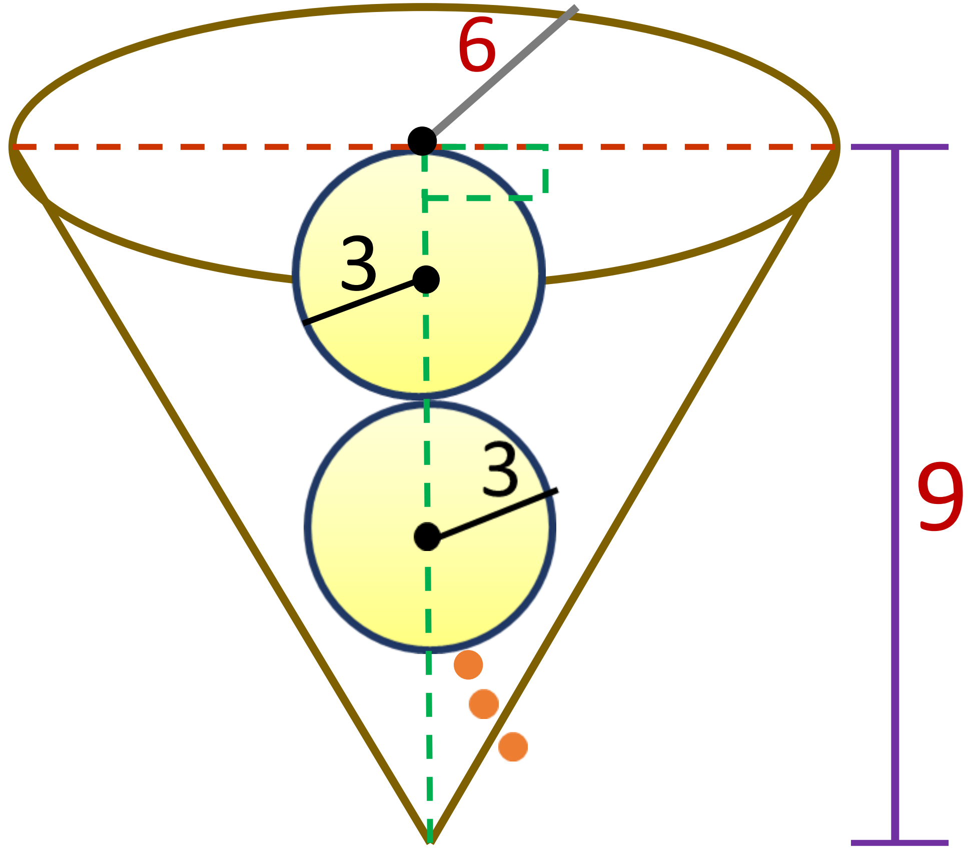
AC^2= 36 → $AC = 6$

AHORA:

V= $\frac{1}{\cancel{3}}\pi(3)^2\ \cancel{3}\sqrt{3}$

V= $9\sqrt{3}\ \pi$

10) ¿ Con cuántas esferas de helado de radio 3cm se puede llenar un barquillo cónico de 6cm de radio y 9cm de altura?



RESOLUCIÓN

PIDEN EL NÚMERO DE ESFERAS

En el cono :

$$V = \frac{1}{\cancel{3}}\pi(6)^2 \cdot \cancel{9}\ 3$$

$$V = 108\pi$$

En la esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3$$

$$V = 36\pi$$

AHORA:

$$N° \text{ de esferas} = \frac{108\pi}{36\pi}$$

N° de esferas= 3