



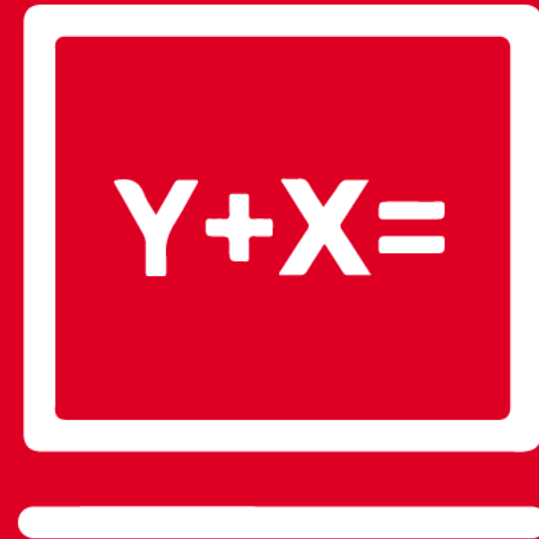
ARITHMETIC

Chapter 1

5°

San Marcos 2022

Razones y proporciones



 **SACO OLIVEROS**



Historia de las Razones y Proporciones

Es difícil saber si es que alguien realmente lo descubrió ya que ha estado con nosotros por mucho tiempo. Según D.E. Smith, la historia de la matemática comienza de una forma que es difícil en qué momento aparecieron las razones y proporciones.

La idea de que una tribu es el doble de grande que la otra y la idea de que la correa de cuero es solo la mitad de larga que la de otra persona hace uso de este tema. Estas son cosas que comenzaron desde hace mucho tiempo, del comienzo de nuestra historia. En este caso, según el ejemplo, uno se refiere a las razones aritméticas y otro a geométricas.



❑ RAZÓN

Es la comparación que se establece entre dos cantidades mediante las operaciones de sustracción o división.

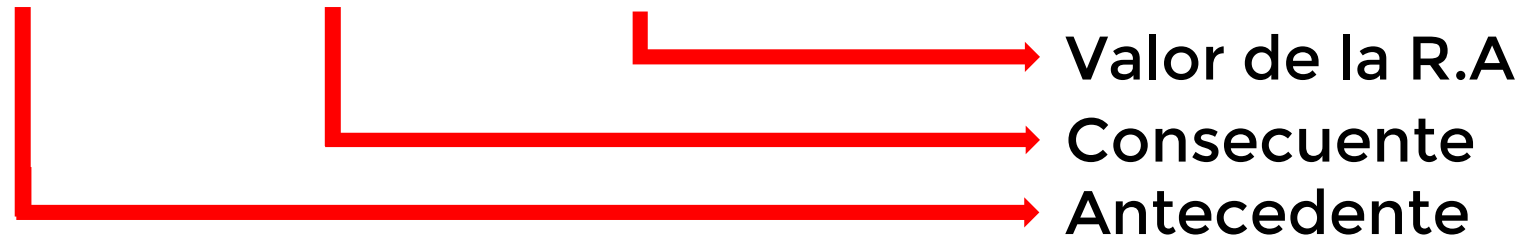
❑ RAZÓN ARITMÉTICA (R.A.)

Es la comparación de dos cantidades mediante la sustracción.

Ejem. La edad de Alvaro es 40 años y la edad de Beto es 28 años, entonces podemos comparar sus edades.

Razón Aritmética

$$40 \text{ años} - 28 \text{ años} = 12 \text{ años}$$



Interpretación:

- La edad de Alvaro excede a la edad de Beto en 12 años.
- Alvaro tiene 12 años más que Beto.



❑ RAZÓN GEOMÉTRICA (R.G.)

Es la comparación de dos cantidades mediante la división.

Ejemplo: En un tonel se tiene una mezcla de 40 L de Pisco y 28 litros de agua, entonces podemos comparar los volúmenes de Pisco y agua.

$$\begin{array}{lcl} \text{Antecedente} & \longleftarrow & 40 \\ \text{Consecuente} & \longleftarrow & 28 \end{array} = \frac{40}{28} = \frac{10}{7} \quad \left. \vphantom{\frac{40}{28}} \right\} \text{Valor de la R.G.}$$

Interpretación:

- La cantidades de Pisco y agua están en la razón de 10 a 7.
- La relación de Pisco y agua es de 10 a 7.
- Por cada 10 litros de Pisco hay 7 litros de agua



□ EN GENERAL

Razón Aritmética	Razón Geométrica
$a - b = r$	$\frac{a}{b} = k$

Donde:

a : antecedente

b : consecuente

r y k : valor de la razón



PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones que tengan el mismo valor.

Proporción Aritmética (P.A.)	Proporción Geométrica (P.G.)
$a - b = c - d$	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Observación:

En toda P.A. y P.G. se tiene que:

- a y c : antecedentes
- b y d : consecuentes
- a y d : términos extremos
- b y c : términos medios



P.A.	P.G.
<p><u>P.A. Discreta</u></p> $a - b = c - d$ <ul style="list-style-type: none"> Medios son diferentes $b \neq c$ d = 4ta diferencial 	<p><u>P.G. Discreta</u></p> $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ <ul style="list-style-type: none"> Medios son diferentes $b \neq c$ d = 4ta proporcional
<p><u>P.A. Continua</u></p> $a - b = b - c$ <ul style="list-style-type: none"> Medios son iguales $b = b$ b = media diferencial c : 3ra diferencial 	<p><u>P.G. Continua</u></p> $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ <ul style="list-style-type: none"> Medios son iguales $b = b$ b = media proporcional c : 3ra proporcional

1. Luchito le pregunta a su papá cuantos soles le dará de propina por navidad y el papa le responde tu propina será el valor de $(M+R+I+S)$, donde:

M: es la media diferencial de 24 y 34

R: es la media proporcional de 88 y 22

I: es la tercera proporcional de M+3 y R-4

S: es la cuarta proporcional de M+1: R-4 e I-5

¿Cuántos soles recibirá de propina Luchito?

- A) 210 ~~B) 183~~ C) 157
D) 145

Resolución:

Del dato tenemos:

M : media diferencial

$$24 - M = M - 34$$

$$2M = 58 \Rightarrow M = 29$$

R : media proporcional

$$\frac{88}{R} = \frac{R}{22}$$

$$R^2 = 1936 \Rightarrow R = 44$$

I : tercera proporcional

$$\frac{29 + 3}{44 - 4} = \frac{44 - 4}{I}$$

$$32 \cdot I = 1600 \Rightarrow I = 50$$

S : cuarta proporcional

$$\frac{29 + 1}{44 - 4} = \frac{50 - 5}{S}$$

$$30 \cdot S = 1800 \Rightarrow S = 60$$

Piden:

propina de Luchito

$$\Rightarrow 29 + 44 + 50 + 60$$

$$\therefore 183$$

B) 183

2. En una reunión se observó que: 2 de cada 60 personas tenían más de 60 años, por cada 4 mujeres habían 3 varones y solo habían 300 sillas, pero ninguna mujer se quedó parada. Si en total asistieron 14 personas mayores de 60 años, ¿cuántas de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. En total asistieron a la reunión 360 personas.

II. La razón entre varones sentados y el total de varones asistentes fue $1/3$.

III. Si no hubieran asistido 30 parejas, la relación entre el número de mujeres y varones hubiera sido $7/5$.

A) Ninguna ~~B) Dos~~ C) Tres E) Una

Resolución:

Del dato tenemos:

$$\frac{P_{\text{más}}}{\text{total}} = \frac{2}{60} k$$

$$P_{\text{más}} = 2k = 14$$

$$\Rightarrow k = 7$$

además:

$$\frac{m}{H} = \frac{4}{3} n$$

$$\text{total} = 60k = 7n$$

$$\Rightarrow n = 60$$

 total de sillas = 300

$$H_{\text{sent}} + 4n = 300$$

$$\Rightarrow H_{\text{sent}} = 60$$

piden:

I. total = $60k = 420$ F

II. $\frac{H_{\text{sent}}}{H} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$ V

III. $\frac{240 - 30}{180 - 30} = \frac{210}{150} = \frac{7}{5}$ V

\therefore B) 2 verdaderas



3. El producto de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es 4096; uno de los extremos es 16. Dé el otro extremo.

~~A) 4~~

B) 2

C) 8

D) 16

Resolución:

Sea la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad \boxed{a \cdot c = b^2}$$

Dato:

$$a \cdot b \cdot b \cdot c = 4096$$

$$\rightarrow \underbrace{b^2 \cdot b^2}_{\text{canceling } a \text{ and } c} = 4096$$

$$b^4 = 4096$$

$$b^4 = 8^4 \quad \boxed{b = 8}$$

Luego:

$$a \times c = b^2$$

$$\rightarrow 16 \times c = 8^2$$

$$16 \times c = 64$$

piden:

$$\therefore c = 4$$

A) 4



4. En una olimpiada participan 440 deportistas y cada uno lleva puesto un polo de un solo color, el cual puede ser amarillo, verde o rojo. Además, se observa que, por cada 2 deportistas que no llevan puesto un polo de color rojo hay 3 que no llevan puesto un polo de color amarillo, y por cada 4 que llevan puesto un polo de color verde hay 7 que no llevan puesto este color. ¿Cuántos deportistas llevan puesto un polo de color rojo?

A) 240 B) 210 ~~C) 200~~ D) 180

Resolución:

Del dato tenemos:

$$\frac{\text{no}_R}{\text{no}_A} = \frac{2}{3} \quad \frac{V}{\text{no}_V} = \frac{4}{7}$$

donde:

$$\text{no}_R = A + V = 2k \quad \dots(I)$$

$$\text{no}_A = R + V = 3k \quad \dots(II)$$

$$\text{no}_V = R + A = 7n$$

pero: $\underbrace{R + A}_{7n} + V = 440$

$$7n + 4n = 440$$



$$n = 40$$

en $\dots(I) + \dots(II)$

$$440 + V = 5k$$

$$440 + 4(40) = 5k$$

$$600 = 5k \quad k = 120$$

piden: en $\dots(II)$



$$R + V = 3k$$

$$R + 160 = 3(120)$$

$$\therefore R = 200$$

C) 200



5. La suma de los cuatro términos de una proporción geométrica continua es a la diferencia de sus extremos como 3 es a 1. ¿Cuál es la razón geométrica del extremo mayor y el extremo menor?

A) 3/1

B) 3/2

~~C) 4/1~~

D) 2/1

Resolución:

Sea la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = k \Rightarrow \frac{ck^2}{ck} = \frac{ck}{c} = k$$

Dato:

$$\frac{ck^2 + ck + ck + c}{ck^2 - c} = \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{ck^2 + 2ck + c}{ck^2 - c} = 3$$

$$\frac{\overbrace{c(k^2 + 2k + 1)}^{(k+1)^2}}{c(k^2 - 1)} = 3$$

$$\frac{\cancel{(k+1)}(k+1)}{\cancel{(k+1)}(k-1)} = 3$$

$$\begin{aligned} k + 1 &= 3k - 3 \\ 4 &= 2k \\ 2 &= k \end{aligned}$$

Piden:

$$\frac{a}{c} \Rightarrow \frac{\cancel{c}k^2}{\cancel{c}} = k^2$$

$$2^2 = 4$$

∴

C) 4/1



6. De las edades que tienen tres amigos, la razón entre la suma de los productos del número de años que tienen cada uno tomados de dos en dos y el producto del número de años que tienen los tres, es $19/72$. Además, el número de años de uno de ellos es la tercera proporcional de los otros dos. Si la suma de las edades de los tres es 38 años y el mayor tiene 10 años más que el menor. ¿Cuántos años tiene el mayor?

A) 18

B) 17

C) 16

Resolución:sean las edades: $a > b > c$ **Del dato tenemos:**

$$\frac{ab + ac + bc}{abc} = \frac{19}{72} \quad \dots(I)$$

además:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = ac$$

D) 15

en $\dots(I)$

$$\frac{ab + bc + ca}{b \cdot b^2} = \frac{19}{72}$$

$$\frac{a + b + c}{b^2} = \frac{19}{72}$$

dato:

$$a + b + c = 38 \quad \dots(II)$$

reemp:

$$\frac{38}{b^2} = \frac{19}{72} \Rightarrow b^2 = 144$$

$$b = 12$$

$$\begin{aligned} \text{en } \dots(II) \quad a + c &= 26 \\ \text{dato: } a - c &= 10 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a + c &= 26 \\ a - c &= 10 \end{aligned}} \right\} (+)$$

$$2a = 36 \quad \therefore a = 18$$

A) 18



7. En un corral, se observa que por cada 2 gallinas hay 3 patos y por cada 5 gansos hay 2 patos. Si se aumentaran 33 gallinas la cantidad de estas sería igual a la cantidad de gansos, calcule cuantos patos hay en el corral.

- A) 15 B) 13
C) 16 D) 18



Resolución:

Del dato tenemos:

$$\frac{Ga}{P} = \frac{2}{3} \quad \frac{Go}{P} = \frac{5}{2}$$

homogenizando:

$$\begin{aligned} \frac{Ga}{P} &= \frac{2 \times 2}{3 \times 2} & \Rightarrow & \frac{Ga}{P} = \frac{4k}{6k} \\ \frac{Go}{P} &= \frac{5 \times 3}{2 \times 3} & \Rightarrow & \frac{Go}{P} = \frac{15k}{6k} \end{aligned}$$

Dato:

$$4k + 33 = 15k$$

$$33 = 11k$$

$$\boxed{3 = k}$$

Piden:

$$P = 6k$$

$$P = 6(3)$$

$$\therefore P = 18$$

D) 18



8. La relación de las edades de 2 personas es $\frac{3}{5}$. si hace n años, la relación de sus edades era como 1 es a 2 y dentro de m años será como 8 es a 13. calcule en qué relación se encuentra n y m .

A) $\frac{2}{3}$

B) $\frac{5}{1}$

C) $\frac{7}{3}$

D) $\frac{1}{3}$

Resolución:

dato: $\frac{a}{b} = \frac{3k}{5k}$

Hace n años:

$\Rightarrow \frac{3k - n}{5k - n} = \frac{1}{2}$

$$6k - 2n = 5k - n$$

$$\boxed{k = n}$$

Dentro de m años

$\Rightarrow \frac{3k + m}{5k + m} = \frac{8}{13}$

$$39k + 13m = 40k + 8m$$

$$5m = k$$



$$5m = n$$

piden:

$$\therefore \frac{5}{1} = \frac{n}{m}$$

$$\boxed{B) \frac{5}{1}}$$



9. En una reunión social, se observó en un determinado momento que el número de varones y el número de mujeres estaban en la relación de 7 a 8, mientras los que bailaban y no bailaban fueron unos tantos como otros. Si hubo en ese momento 51 mujeres que no bailaban. ¿Cuántos varones no estaban bailando?

A) 45

B) 51

~~C) 39~~

D) 26

Resolución:**Del dato tenemos:**

$$\bullet \quad \frac{V}{M} = \frac{7}{8} = \frac{28k}{32k}$$

$\times 4$
 $\times 4$

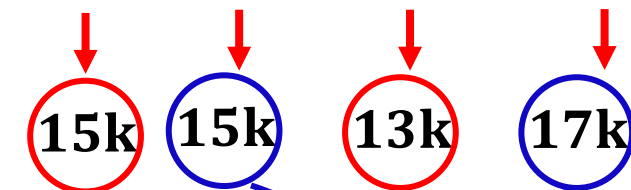
$$\bullet \quad T = 60k$$

$$\bullet \quad P_b = P_{nb}$$

Luego:

$$P_b = P_{nb} = 30k$$

$$V_b + M_b = V_{nb} + M_{nb}$$



$$M_{nb} = 17k = 51$$

$$k = 3$$

Piden:

$$V_{nb} = 13k$$

$$\therefore 13(3) = 39$$

C) 39



10. Entre los postulantes de la UNAC la relación de (cantidad) hombres y mujeres es como $\frac{2}{3}$, la relación de hombres menores de 20 años y hombres de 20 o más años es como $\frac{1}{3}$. ¿Cuál es la relación de los hombres que tienen menos de 20 años y el total de postulantes?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{10}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{2}{5}$

Resolución:

- $\frac{H}{M} = \frac{2k}{3k}$

- H menores de 20: a
- H de 20 a más: b

- $\frac{a}{b} = \frac{1P}{3P}$

$$\underbrace{a + b}_{H} = H$$

$$\cancel{2}P = \cancel{2}k$$



$$2P = k$$

Piden:

$$\frac{a}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{T} = \frac{P}{5k} = \frac{P}{10P} = \frac{1}{10}$$

\therefore

B) $\frac{1}{10}$