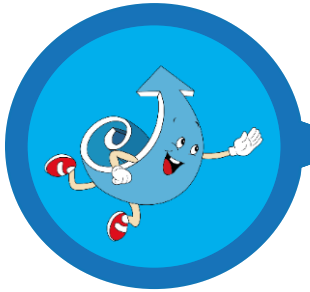
ALGEBRA

Chapter 4

5th SAN MARCOS

División Polinómica I



RECORDANDO:

¿Puedes completar y ordenar en forma decreciente los siguientes polinomios?

$P(x) = \underline{2x} + \underline{x^4} + \underline{1} \Rightarrow P(x) = x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 2x + 1$

$F(x) = \underline{2} - \underline{x^2} + \underline{x^5} \Rightarrow F(x) = x^5 + 0x^4 + 0x^3 - x^2 + 0x + 2$

DIVISIÓN POLINÓMICA

Sea la división de polinomios:

Dividendo → $D(x)$

divisor → $d(x)$

$$\frac{D(x)}{d(x)}$$

Genera →

- Cociente → $q(x)$
- Residuo → $R(x)$

IDENTIDAD FUNDAMENTAL:

$$\boxed{D(x) \equiv d(x).q(x) + R(x)}$$

PROPIEDADES:

I. $GA[D(x)] \geq GA[d(x)]$

II. $GA[q(x)] = GA[D(x)] - GA[d(x)]$

III. $GA[R(x)] \leq GA[d(x)] - 1$

III. $d(x) \not\equiv 0$

I MÉTODO DE HORNER :

Sea la división:

$$\frac{6x^5 + 17x^4 - 5x^3 + 10x - 5}{2x^3 + x^2 - 3}$$

Se completa y se ordena en forma decreciente el dividendo y el divisor.

$$\frac{6x^5 + 17x^4 - 5x^3 + 0x^2 + 10x - 5}{2x^3 + x^2 + 0x - 3}$$

ESQUEMA:

Coeficientes del dividendo

Coeficientes del divisor

		+	+	+	+	+
2	6	17	-5	0	10	-5
-1	÷	-3	0	9		
0		14	-7	0	21	
3		÷	-12	6	0	-18
			÷			
×	3	7	-6	15	31	-23

Coeficientes del cociente

Coeficientes del residuo

$$q(x) = 3x^2 + 7x - 6$$

$$R(x) = 15x^2 + 31x - 23$$

II REGLA DE RUFFINI :

1 °Caso: Divisor de la forma $x + b$

Sea la división:

$$\frac{3x^5 - 7x^4 + 4x^2 + 5x - 6}{x - 2}$$

Se completa y se ordena en forma decreciente el dividendo.

$$\frac{3x^5 - 7x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 5x - 6}{x - 2}$$

ESQUEMA:

Regla: $x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

Coeficientes del dividendo

	3	−7	0	4	5	−6
2	↓	6	−2	−4	0	10
×	3	−1	−2	0	5	4

Coeficientes del cociente

Residuo

$$\boxed{q(x) = 3x^4 - x^3 - 2x^2 + 5}$$

$$\boxed{R(x) = 4}$$

2°Caso:

Divisor de la forma $ax + b$

Sea la división:

$$\frac{6x^5 + 5x^4 - 7x + 4}{2x - 1}$$

Se completa y se ordena en forma decreciente el dividendo.

$$\frac{6x^5 + 5x^4 + 0x^3 + 0x^2 - 7x + 4}{2x - 1}$$

ESQUEMA:

Regla: $2x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

Coeficientes del dividendo

	6	5	0	0	−7	4
$\frac{1}{2}$		3	4	2	1	−3
×	6	8	4	2	−6	1
÷ 2						
	3	4	2	1	−3	

Residuo

Coeficientes del cociente

$$\boxed{q(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x - 3} \qquad \boxed{R(x) = 1}$$

CHAPTHE
R 4

HELICO

PRACTICE

SACO OLIVEROS

1. Al dividir $P(x) = 3x^7 - 27x^5 + 2x^2 - 1$ por $d(x) = (x+1)(x-3)$ se obtiene un residuo $r(x) = ax + b$; tal que $(a+b)$ representa la edad de Armando hace 10 años. ¿Cuál será la edad de Armando dentro de 10 años?

A) 28 B) 38
C) 31 D) 41

Resolución:

1	3	0	−27	0	0	2	0	−1
2	÷	6	9					
3		6	12	18				
			−6	−12	−18			
				6	12	18		
×					−6	−12	−18	
						8	16	24
	3	6	−6	6	−6	8	a	b

$0 + \ -18 + 16 = a$

$\boxed{-2 = a}$

$-1 + 24 = b$

$\boxed{23 = a}$

Reta: 41

2. Samir decide repartir cierta cantidad de dinero entre sus (x^4+2x^2+4) empleados, donde $x \in \mathbb{Z}^+_0$. Si la cantidad de dinero a repartir resulta de la venta de (x^4+x^2+1) artículos a $(x^8+x^4+x^2+1)$ soles cada uno, ¿cuál de los siguientes polinomios representa la cantidad de dinero, que le corresponde a cada empleado?

A) $x^8-x^6+6x^2-9$ B) $x^8-x^6-6x^2-9$
C) $x^8-2x^6+6x^2-9$ D) $x^8-3x^6-6x^2-9$
E) $x^8+x^6+6x^2-9$

Resolución:

Sea $D_{(x)}$ cantidad de dinero que tiene Samir

$$\rightarrow D_{(x)} = (x^4+x^2+1)(x^8+x^4+x^2+1)$$

$$D_{(x)} = x^{12}+x^{10}+2x^8+2x^6+3x^4+2x^2+1$$

La cantidad de dinero, que le toca a cada empleado estará representado por: $C_{(x)} = \dfrac{D_{(x)}}{Numero\ de\ empleados}$

Haciendo $m = x^2 \rightarrow \dfrac{m^6+m^5+2m^4+2m^3+3m^2+2m+1}{m^2+2m+4}$

Resolución:

1	1	1	2	2	3	2	1
−2		−2	−4				
−4		−1	2	4			
			0	0	0		
				6	−12	−24	
×					−9	18	36
	1	−1	0	6	−9	−4	37

Pol. Cociente: m^4-m^2+6m-9,

Pero $m = x^2$ $\boxed{\rightarrow C_{(x)} = x^8-x^6+6x^2-9}$

HELICO | PRACTICE

3. La edad de Arquímides en años es el quíntuplo del coeficiente principal del polinomio:

$$P(x)=(a+1)x^5+(b-1)x^4-5x^3-6x^2-2x+20$$

Si $P(x)$ es divisible por $d(x)=-3x^2+2x+5$. Determine la edad de Arquímides dentro de $(|b|+2)$ años.

A) 64 años B) 50 años
C) 58 años D) 54 años

Resolución:

Aplicamos el método de Horner invertido:

5	20	-2	-6	-5	$b-1$	$a+1$
-2		-8	12			
3		-10	4	-6		
			10	-4	6	
				-15	6	-9
	4	-2	2	-3	0	0

$$b-1+6+6=0$$

$$\boxed{b=-11}$$

$$a+1-9=0$$

$$\boxed{a=8}$$

La edad de Arquímedes: $5(8+1)=45$ años

$\boxed{\text{Rpta: } 45+13=58 \text{ años}}$

4. La suma de las cifras del número que se debe restar al polinomio

$$P(x) = 2x^5 - x^3 - 2x^2 + 1$$

para que sea divisible entre $x - 2$ es

A) 15 B) 13
C) 11 D) 16 E) 12

Resolución:

Sea M la cantidad que se debe restar

$$\frac{P_{(x)} - M}{x - 2}$$ **Es una división exacta**

$$x - 2 = 0 \longrightarrow \boxed{x = 2}$$

	2	0	-1	-2	0	$1 - M$
$x = 2$		4	8	14	24	48
$\times$	2	4	7	12	24	0

Residuo

$$1 - M + 48 = 0$$

$$\boxed{\therefore \quad M = 49}$$

$$\boxed{\sum de\ cifras\ (4\ y\ 9) = 13}$$

5. Dados los polinomios $P(x)=x^5+c$ y $Q(x)=x+1$, donde c es un número real, halle la suma de los coeficientes del polinomio cociente de $P(x)$ entre $Q(x)$.

A) c B) -1

C) 2 D) 1 E) $-c$

Resolución:

Sea la división

$$\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$$

$$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

	1	0	0	0	0	c
$x=-1$		-1	1	-1	1	
$\times$	1	-1	1	-1	1	

Residuo

$$\Rightarrow \boxed{\sum de\ cof\left(q_{(x)}\right)=1}$$

6. Si la división

$$\frac{2x^5 - 2x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + c}{2x^3 - 2 - x}$$

es exacta. Calcule el valor de $a + b - c$.

A) 3 B) 4
C) 5 D) 6

Resolución:

Ordenando y completando el divisor

$$\frac{2x^5 - 2x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + c}{2x^3 + 0x^2 - x - 2}$$

		+	+	+	+	+
2	2	−2	3	a	b	c
0		0	1	2		
1		−2	0	−1	−2	
2			4	0	2	4
×	1	−1	2	0	0	0
		$q(x)$			$R(x)$	

$a + 2 - 1 + 0 = 0$ $\boxed{a = -1}$

$b - 2 + 2 = 0$ $\boxed{b = 0}$

$c + 4 = 0$ $\boxed{c = -4}$

Rpta: $\boxed{-1 + 0 - -4 = 3}$

HELICO | PRACTICE

7. Al efectuar la división

$$\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{x-1}$$

el término independiente del cociente que resulta es

A) $-2n$ B) $-n$
C) 0 D) n E) $2n$

Resolución:

Recordemos:

Se completa y se ordena en forma decreciente el dividendo.

$$\frac{x^{n+1}+0x^{n}+0x^{n-1}+\cdots-(n+1)x+n}{x-1}$$

Resolución:

$x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

	1	0	0	0	……	0	0	$-(n+1)$	n
1		1	1	1	……	1	1	1	4
×	1	1	1	1	……	1	1	$-n$	9

Termino Independiente

$\boxed{Rpta: -n}$

8. Halle el valor de $p - q$ si la división

$$\frac{px^5 + qx^4 + 17x^3 - 8x^2 + 12x - 6}{5x^3 + 2x - 2}$$

es exacta.

A) 20 B) –10

C) –20 D) –5

Resolución:

Ordenando y completando el divisor

$$\frac{px^5 + qx^4 + 17x^3 - 8x^2 + 12x - 6}{5x^3 + 0x^2 + 2x - 2}$$

Aplicando Horner Invertido

		+	+	+	+	+
-2	-6	12	-8	17	q	p
-2	$\div$	-6	0	-15		
0		$\div$ 6	6	0	15	
-5			$\div$ -2	-2	0	-5
$\times$	3	-3	1	0	0	0
		$q(x)$			$R(x)$	

$q + 15 + 0 = 0$

$\boxed{q = -15}$

$p - 5 = 0$

$\boxed{p = 5}$

Rpta: $\boxed{5 - \ -15 = 20}$

9. Sean $P(x)=9-x^2$, $Q(x)=ax^3-2x+3$. Determine el valor de a para que $P(x)\cdot(Q(x)-1)$ sea divisible por $x-3$ y satisfaga que la suma de los coeficientes de los términos del cociente sea -12.

A) 1 B) 2
D) 3 E) 4 E) 5

Resolución:

$P_{(x)}.\left[Q_{(x)}-1\right]$ es divisible por $x-3$

Entonces:

$$\frac{P_{(x)}.\left[Q_{(x)}-1\right]}{x-3}$$ es exacta (R=0)

Además
Suma de coeficientes del cociente: $q_{(1)}=-12$

Por Identidad Fundamental de la División

$$D_{(x)} \equiv d_{(x)}.q_{(x)} + r_{(x)}$$

Reemplazando:

$$P_{(x)}.\left[Q_{(x)}-1\right] \equiv (x-3).q_{(x)} + 0$$

Evaluando para: $x=1$

$$(8).[a]=(-2).\underbrace{q_{(1)}}_{-12}$$

$$8a=24$$

$$\boxed{\therefore\ a=3}$$

10. A partir de la división

$$\frac{5x^{401}-2x^{400}+x^{399}+6x^2+5x+11}{x-1}$$

Determine la suma de coeficientes del cociente.

A) 1000 B) 2000
C) 1586 D) 1621'

Resolución:

Recordemos:

Se completa en forma decreciente el dividendo.

$$\frac{5x^{401}-2x^{400}+x^{399}+\cdots+6x^2+5x+11}{x-1}$$

Resolución: $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$

401 términos

	5	−2	1	0	… …	0	6	5	11
1		5	3	4	… …	4	4	10	
	5	3	4	4	… …	4	10	15	

397 términos

$$\sum \begin{matrix} de\ coeficientes \\ del\ cociente \end{matrix} = 5+3+4(396)+10+15 = 1621$$