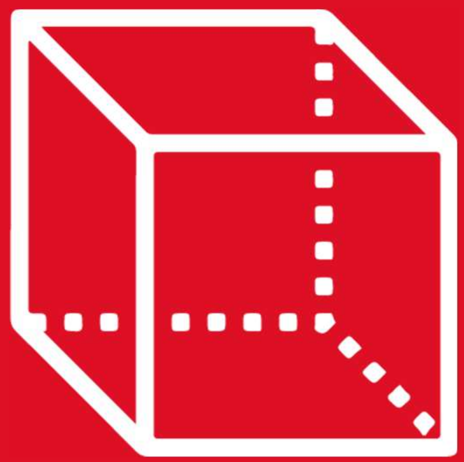
GEOMETRÍA

Capítulo 1



5th San Marcos

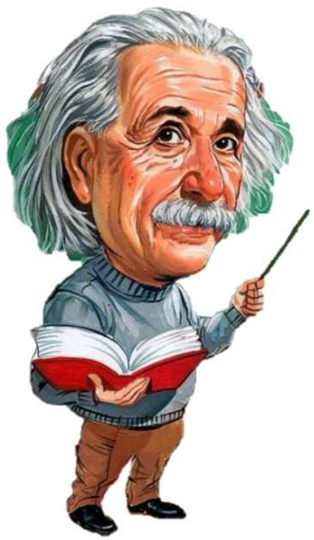
SECONDARY

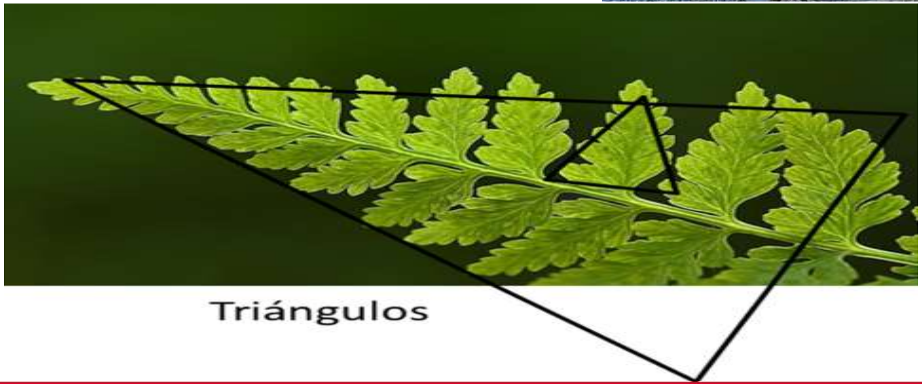
TRIÁNGULOS

SACO OLIVEROS

MOTIVATING | STRATEGY

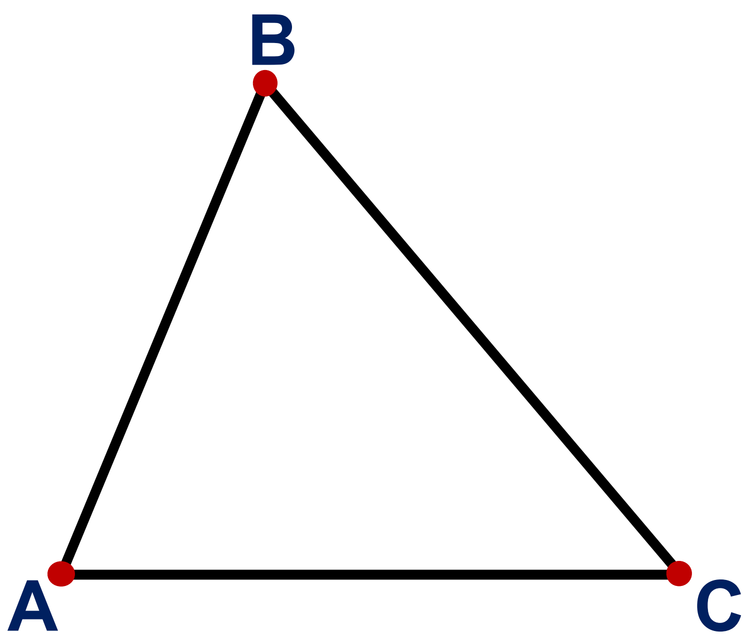
El triángulo es una de las figuras geométricas elementales, que nos permite comprender las demás figuras geométricas que estudiaremos posteriormente., aplicando los axiomas, postulados, lemas, teoremas y corolarios, estudiados en los capítulos anteriores, en nuestra vida cotidiana podemos encontrar muchos objetos de forma de triángulo como podemos observar en los siguientes gráficos.





TRIÁNGULO

Dado los puntos A, B y C no colineales, se denomina triángulo a la reunión de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



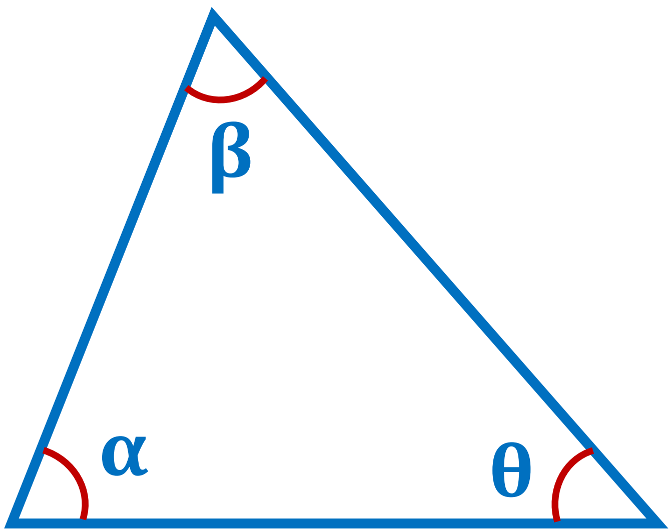
NOTACIÓN:

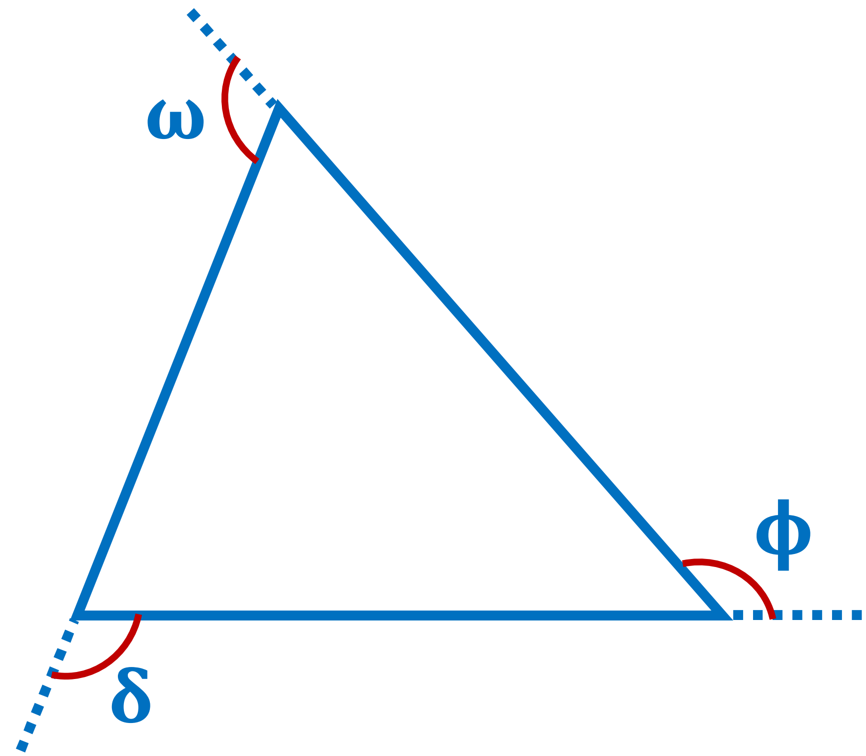
ΔABC: Se lee triángulo ABC

ELEMENTOS

- **VÉRTICES:** A, B y C
- **LADOS:** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$

ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO

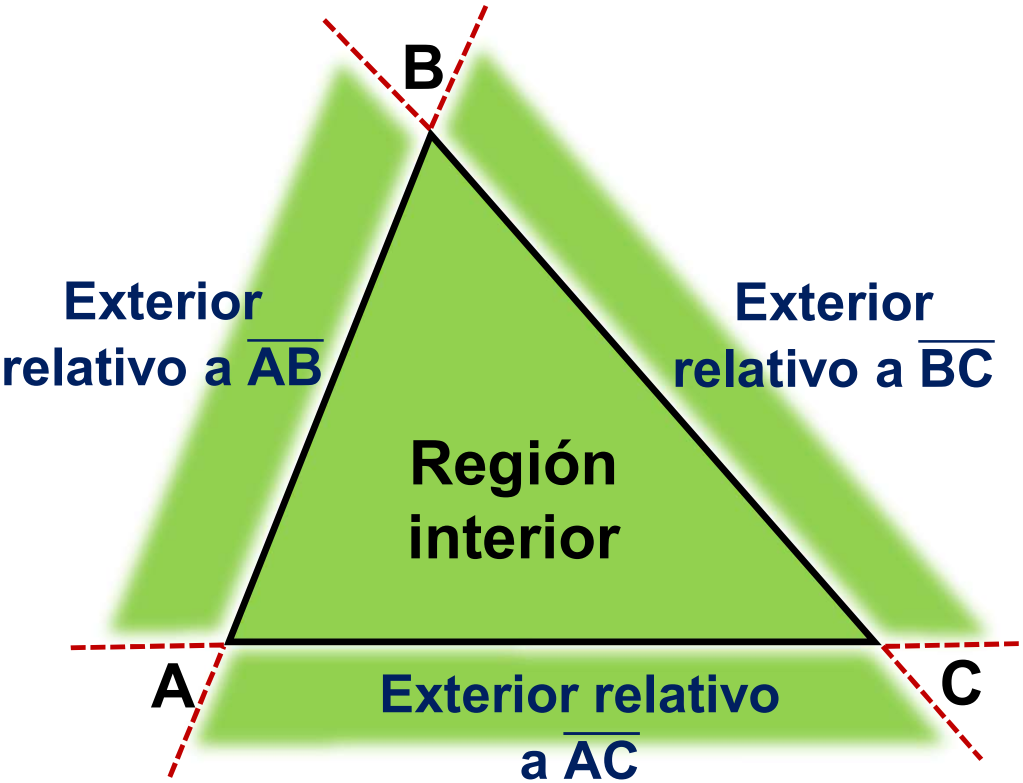




Medida de los ángulos:

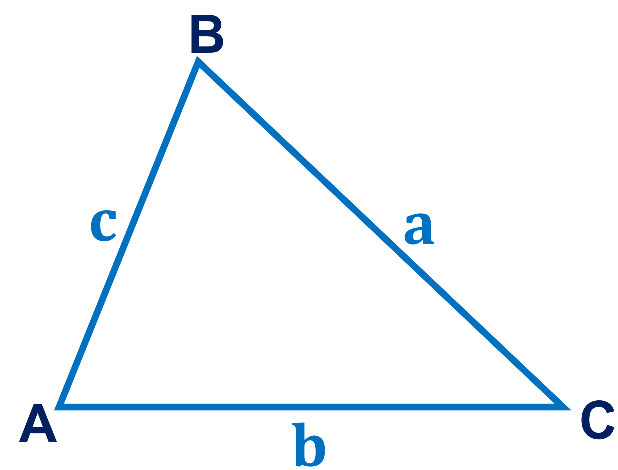
- **INTERNOS :** α, β y θ
- **EXTERNOS :** δ, ω y ϕ

INTERIOR Y EXTERIOR DE UN TRIÁNGULO



PERÍMETRO DE UN TRIÁNGULO

Es la suma de las longitudes de los lados del triángulo y se denota por 2p.



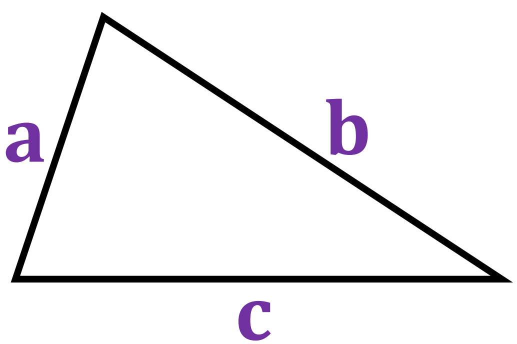
$$\boxed{2p_{(ABC)} = a + b + c}$$

CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

I. SEGÚN LA LONGITUD DE SUS LADOS

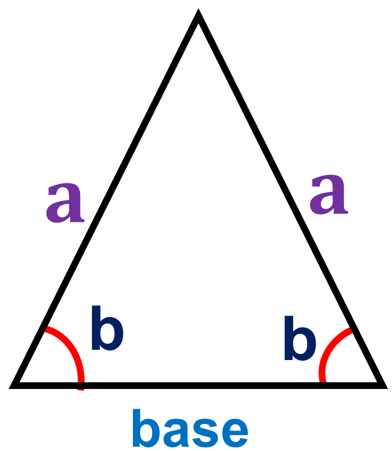
a) TRIÁNGULO ESCALENO

Tienen los tres lados de diferente longitud



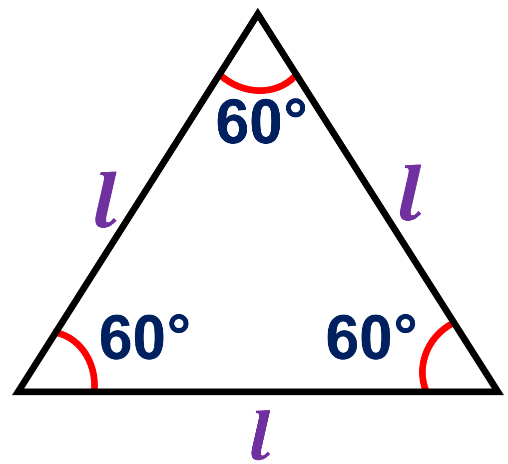
b) TRIÁNGULO ISÓSCELES

Tienen dos lados de igual longitud



c) TRIÁNGULO EQUILÁTERO

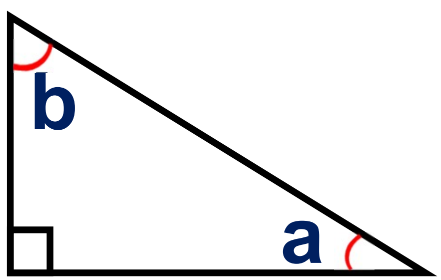
Tienen sus tres lados de igual longitud



II. SEGÚN LAS MEDIDAS DE SUS ÁNGULOS

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Tiene un ángulo interno que mide 90°



$\alpha + \beta = 90°$

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

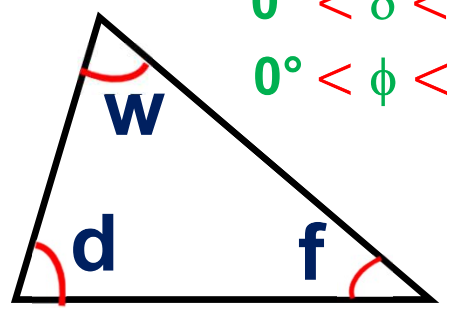
TRIÁNGULO ACUTÁNGULO

Los ángulos internos son agudos

$0° < \omega < 90°$

$0° < \delta < 90°$

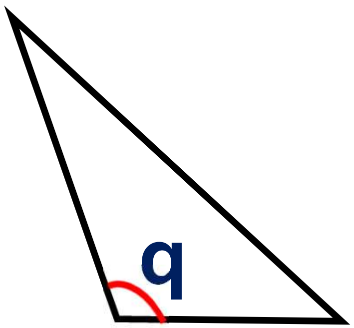
$0° < \phi < 90°$



TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO

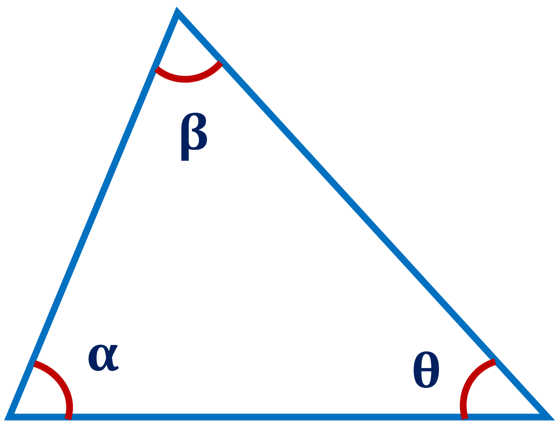
Un ángulo interno es obtuso

$90° < \theta < 180°$



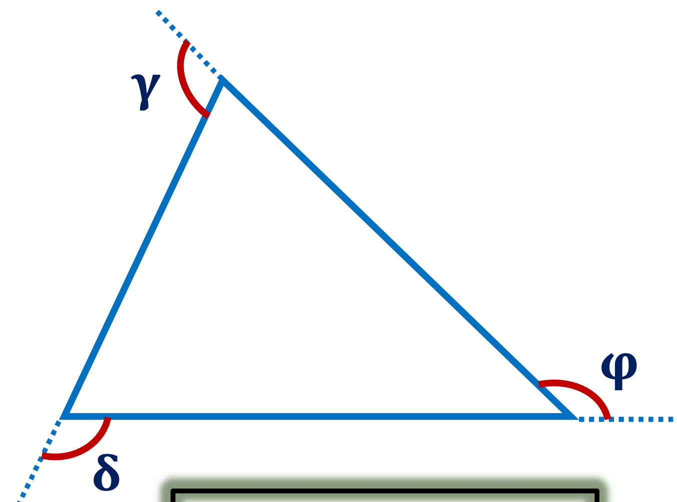
TEOREMAS FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

La suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.



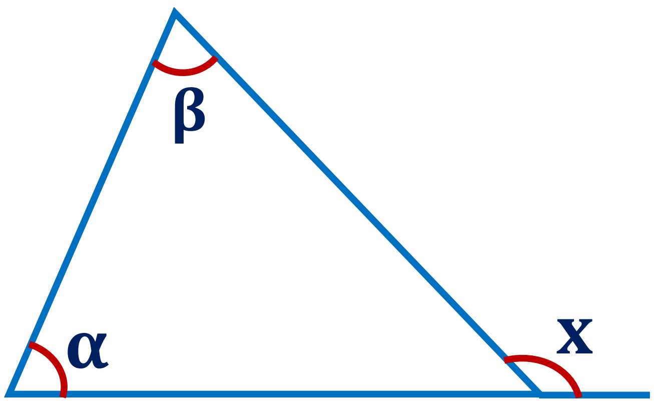
$$\alpha + \beta + \theta = 180°$$

En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos externos considerados uno por vértice es igual a 360º.



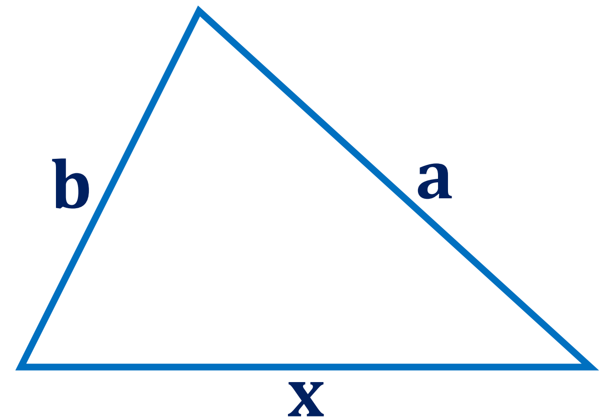
$$\gamma + \delta + \varphi = 360°$$

La medida de un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes al ángulo externo.



$$\boxed{x = \alpha + \beta}$$

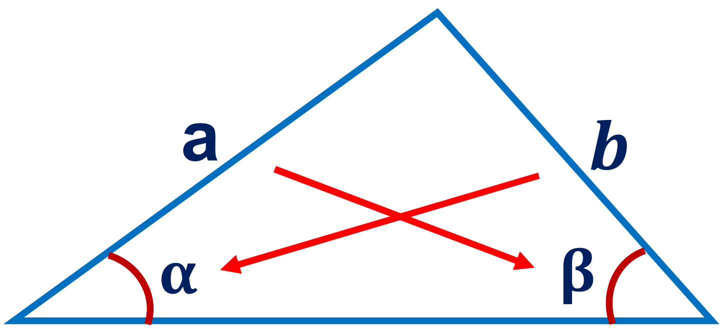
En todo triángulo, la longitud de un lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados.



Si: $a > b$

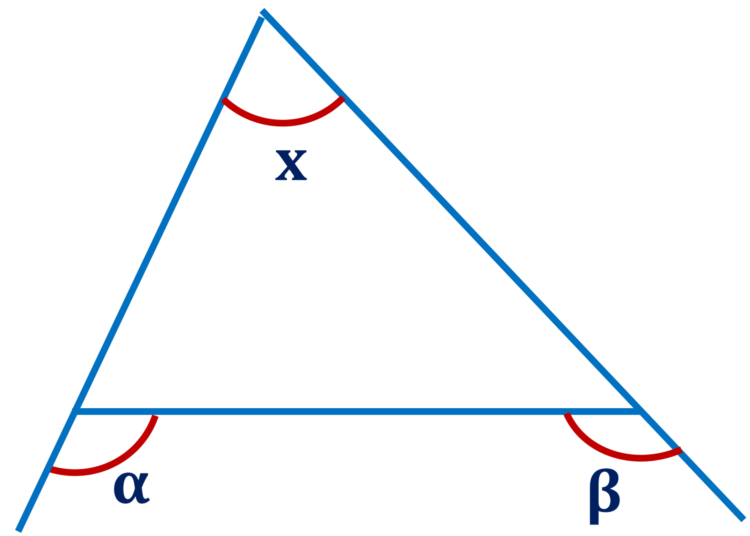
Entonces: $\boxed{a - b < x < a + b}$

Dado dos lados de un triángulo, al mayor lado se opone el mayor ángulo y viceversa.

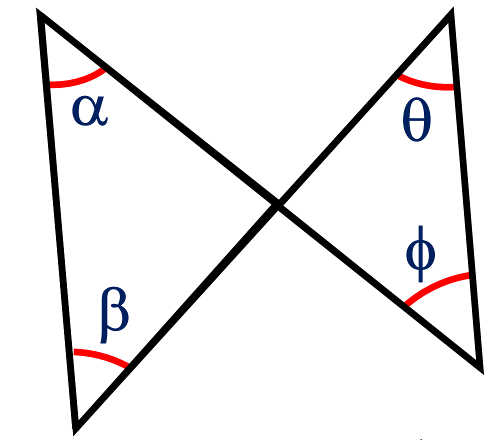


Si $a > b \Leftrightarrow \boxed{\beta > \alpha}$

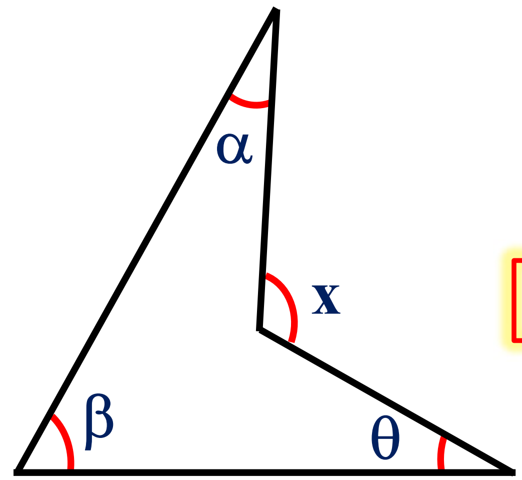
TEOREMAS ADICIONALES



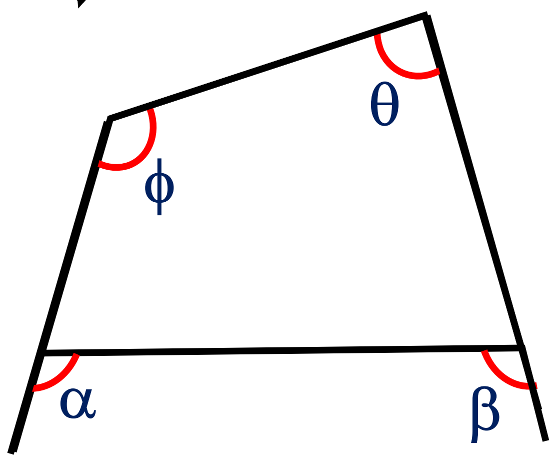
$$\boxed{\alpha + \beta = 180° + x}$$



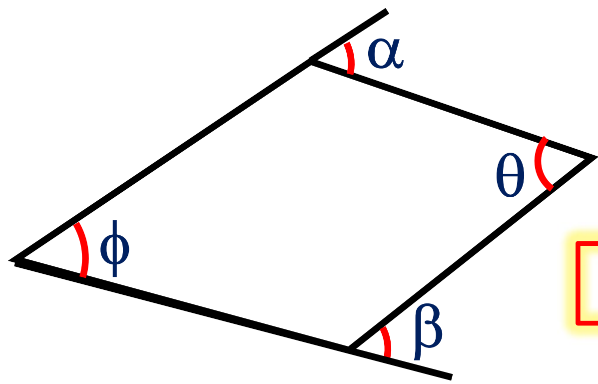
$$\alpha + \beta = \theta + \phi$$



$$x = \alpha + \beta + \theta$$

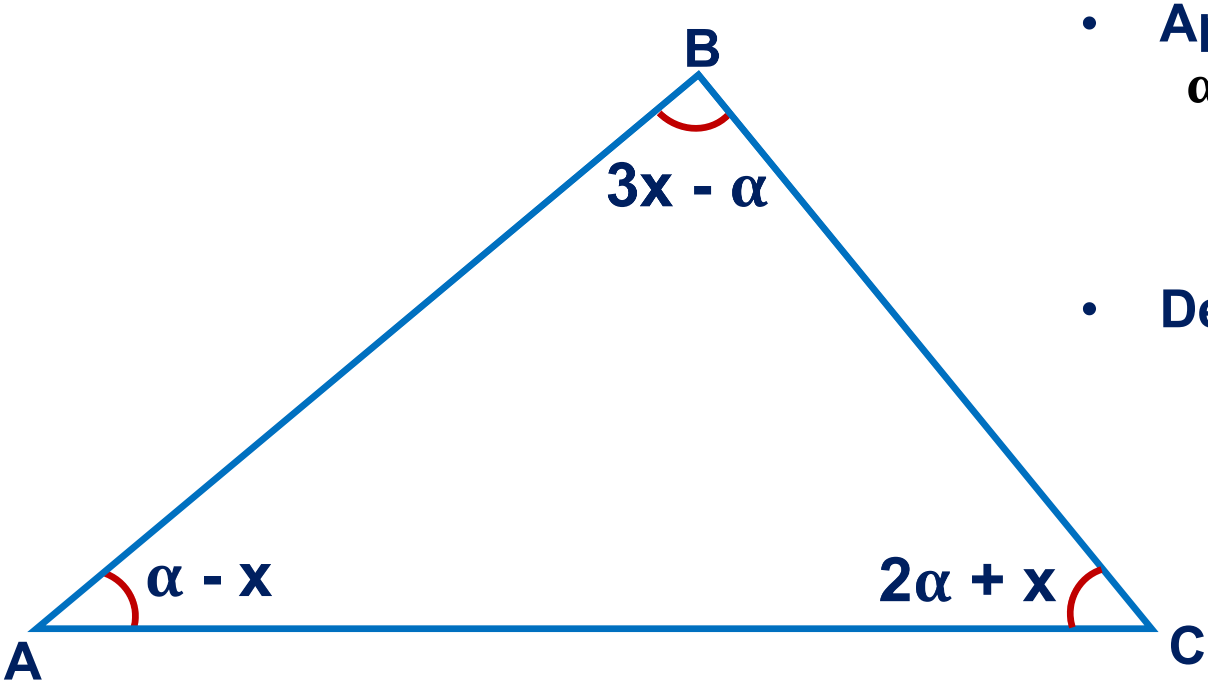


$$\phi + \theta = \alpha + \beta$$



$$\phi + \theta = \alpha + \beta$$

1. Los ángulos de un triángulo miden $\alpha - x$, $3x - \alpha$ y $2\alpha + x$. Calcule el mínimo valor entero de x. .



Resolución

- Piden: x_{min}
- Aplicando el teorema:

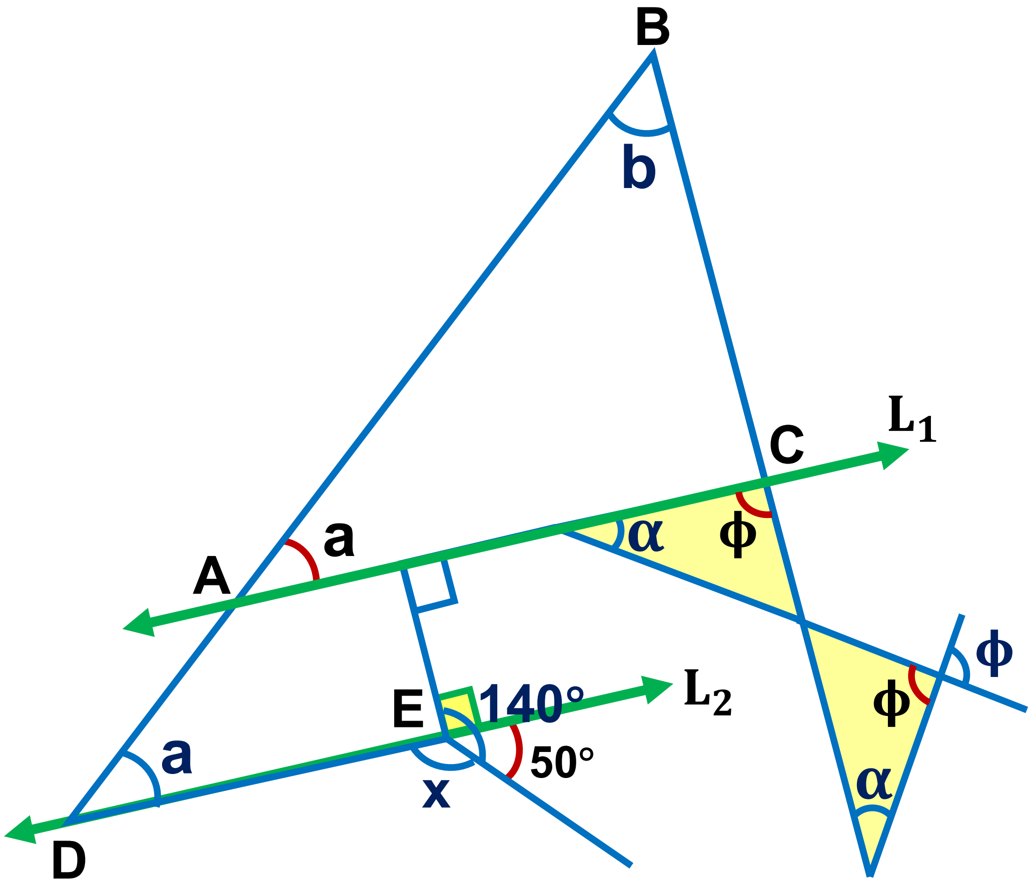
$$\alpha - x + 3x - \alpha + 2\alpha + x = 180°$$
$$2\alpha + 3x = 180°$$
$$\alpha = \frac{180° - 3x}{2}$$

- Del gráfico:

$$0° < 3x - \alpha$$
$$\alpha < 3x$$
$$\frac{180° - 3x}{2} < 3x$$
$$180° < 9x$$
$$20° < x$$

$$\boxed{x_{min} = 21°}$$

2. En la figura se cumple que a + b = ϕ. Calcule el valor de x. .



Resolución

- Piden: x
- Aplicando el teorema:
- ΔABC:

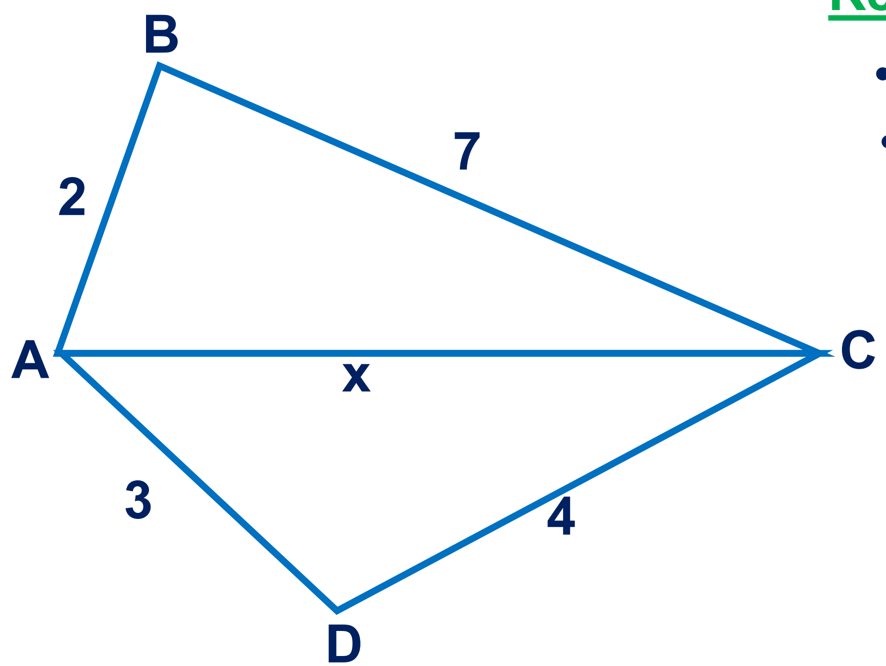
  $m\measuredangle BAC = a$
- Si: $m\measuredangle BAC = m\measuredangle ADE$

  $\Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$
- Aplicando el teorema de los ángulo conjugados:
- En el vértice E:

  $x + 50° = 180°$

  $\boxed{x = 130°}$

3. En la figura, halle el valor entero que puede tomar x.



Resolución

- Piden: El valor entero de x
- Aplicando el teorema de la existencia

ΔABC:

$$7 - 2 < x < 7 + 2$$

$$5 < x < 9$$

$$x = 6;\ 7 \text{ y } 8$$

ΔADC:

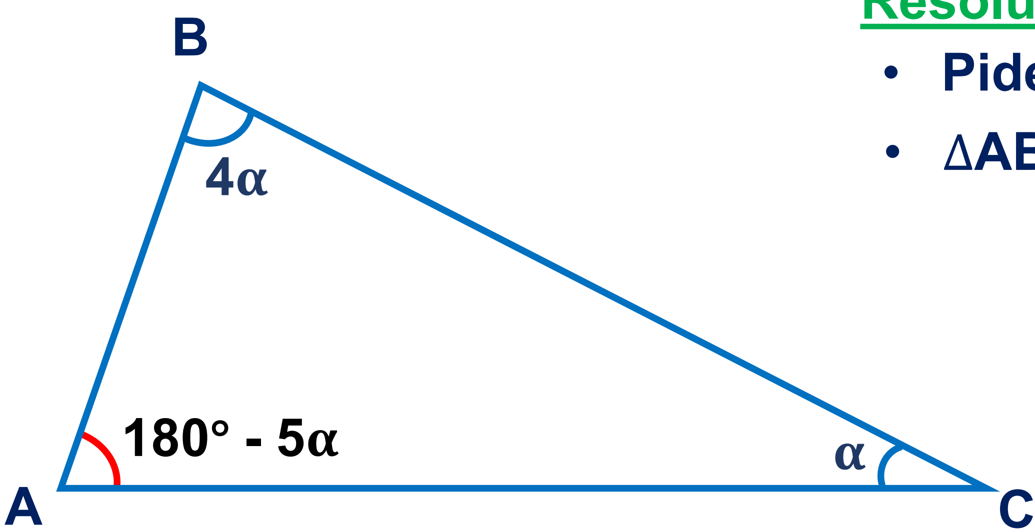
$$4 - 3 < x < 4 + 3$$

$$1 < x < 7$$

$$x = 2;\ 3;\ 4;\ 5 \text{ y } 6$$

$$\boxed{x = 6}$$

4. En un triángulo ABC, donde AB < BC, m∡ABC = 4(m∡BCA). Halle el mayor valor entero de la m∡BCA.



Resolución

- Piden: mayor valor entero de m∡BCA = $\alpha_{máx}$
- ΔABC: Teorema de correspondencia

Si: AB < BC

$\Rightarrow \quad \alpha < 180° - 5\alpha$

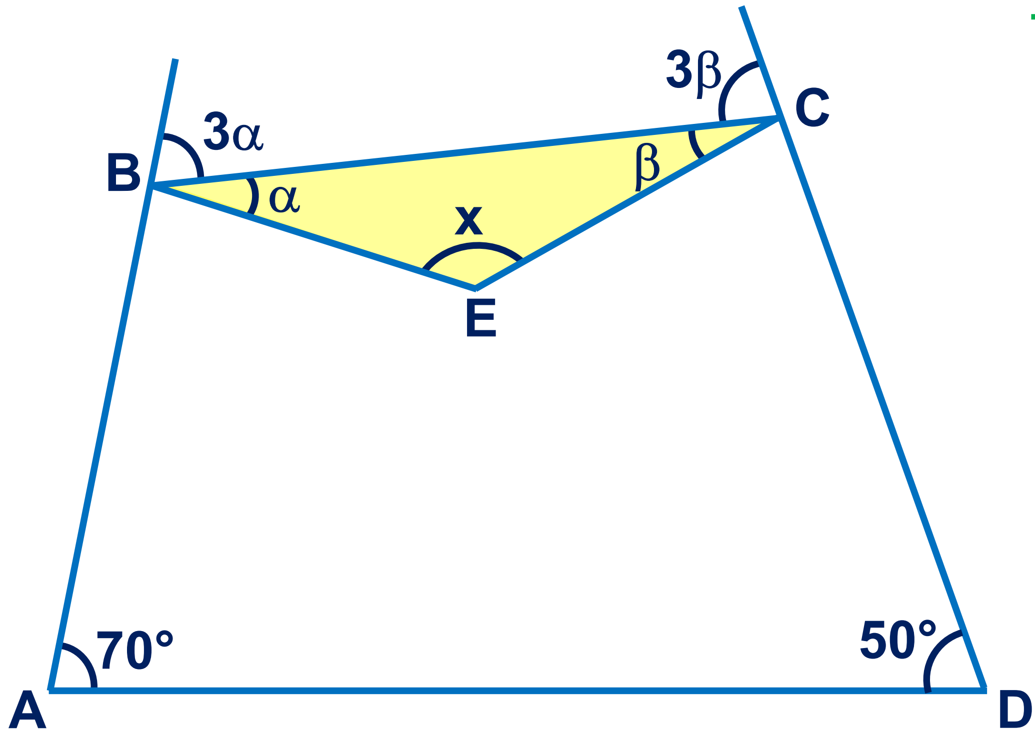
$6\alpha < 180°$

$\alpha < 30°$

$\alpha = 29°, 28°, 27°, \ldots$

$\boxed{\alpha_{máx} = 29°}$

5. En la figura, halle el valor de x



Resolución

- Piden x.
- ⏢ABCD:

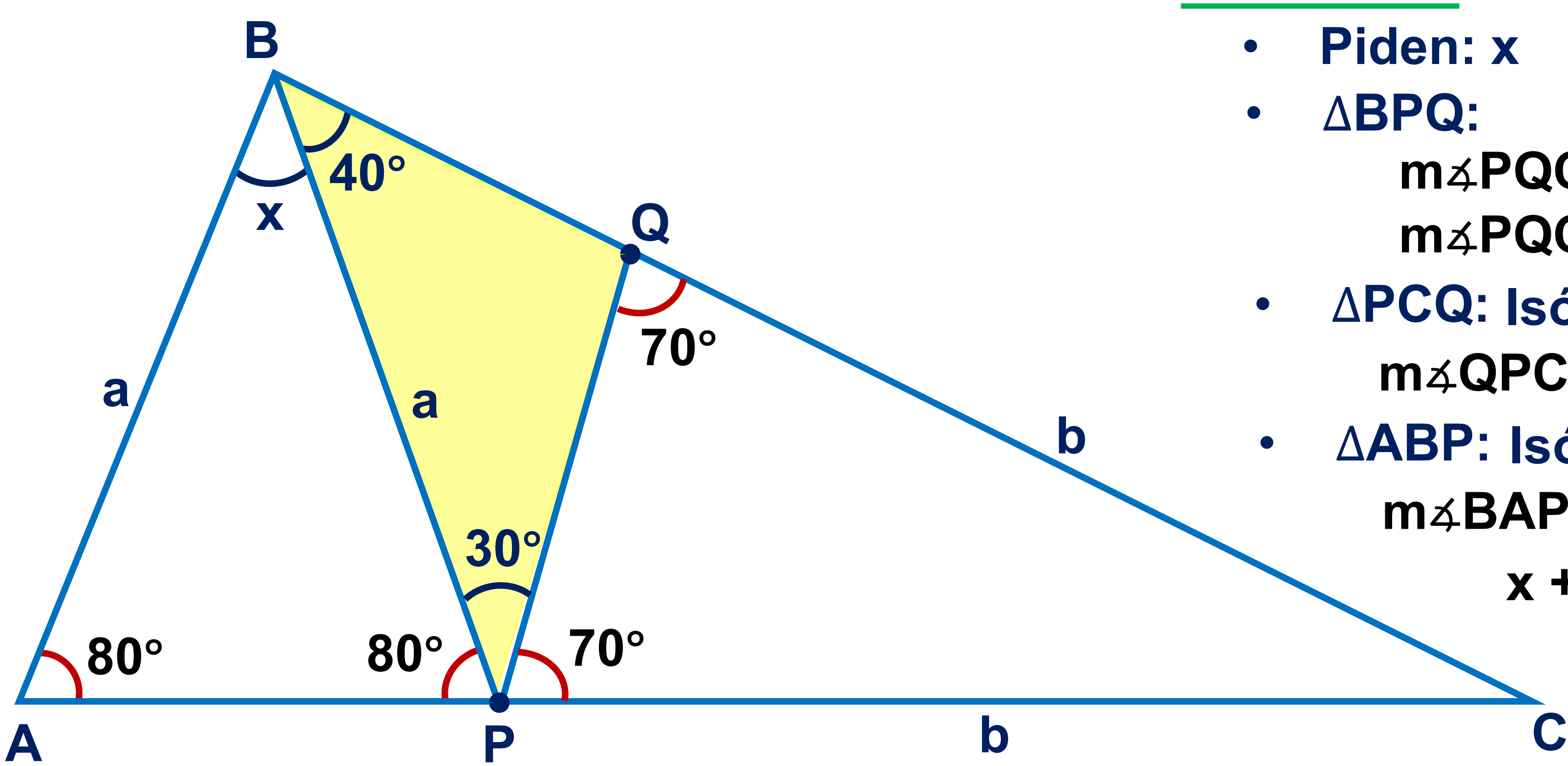
$$3\alpha + 3\beta = 70° + 50°$$
$$3\alpha + 3\beta = 120°$$
$$\alpha + \beta = 40°$$

- ΔECD:

$$\underbrace{\alpha + \beta}_{40°} + x = 180°$$
$$40° + x = 180°$$

$$\boxed{x = 140°}$$

6. En el triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubica el punto P y en $\overline{BC}$ el punto Q, tal que: AB = BP, QC = PC, m∡PBQ = 40º y m∡BPQ = 30º. Halle la m∡ABP.



Resolución

- Piden: x
- ΔBPQ:

  m∡PQC = 40° + 30°

  m∡PQC = 70°
- ΔPCQ: Isósceles

  m∡QPC = m∡PQC = 70°
- ΔABP: Isósceles

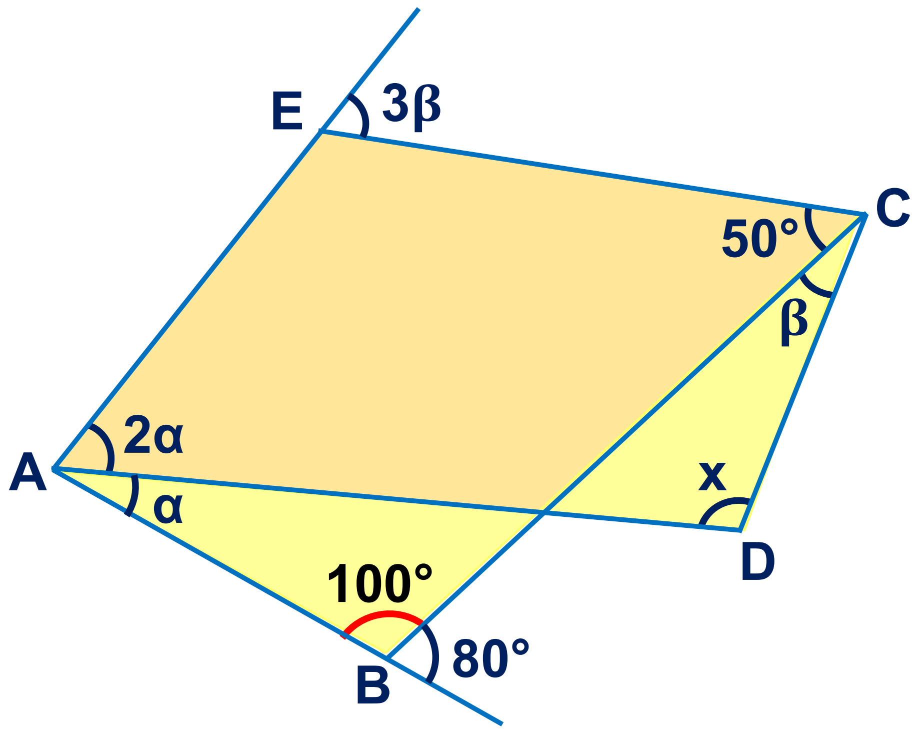
  m∡BAP = m∡BPA = 80°

  x + 80° + 80° = 180°

  x + 160° = 180°

  $\boxed{x = 20º}$

7. En la figura, halle el valor de x.



Resolución

- Piden: x
- En ⋈ ABCD

$$\alpha + 100° = x + \beta$$

$$\alpha - \beta = x - 100° \quad ...(1)$$

- En ABCE

$$3\alpha + 50° = 3\beta + 80°$$

$$3\alpha - 3\beta = 30°$$

$$\alpha - \beta = 10° \quad ...(2)$$

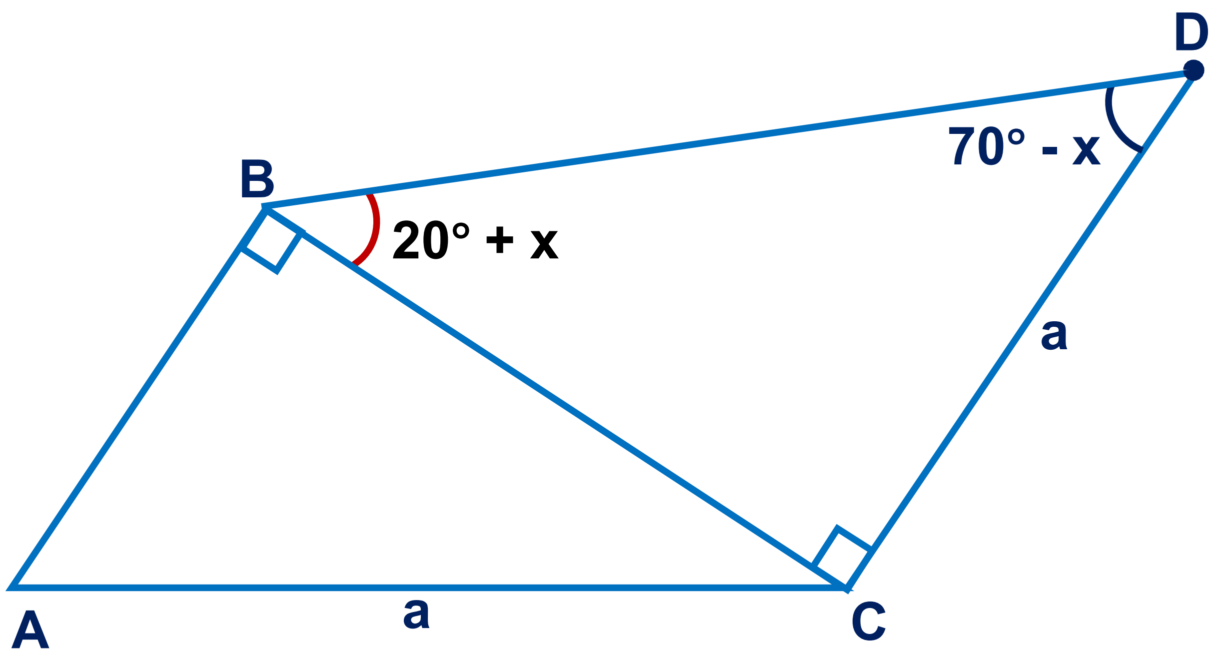
- Reemplazando 2 en 1.

$$\alpha - \beta = x - 100°$$

$$10° = x - 100°$$

$$\boxed{x = 110°}$$

8. En un triángulo ABC recto en B, se ubica un punto exterior D relativo al lado $\overline{BC}$, de modo que m∡BCD = 90°, m∡BDC = 70°–x, si AC = CD. Calcule el menor valor entero de x.



Resolución

- Piden: menor valor entero x
- Aplicando el teorema de la correspondencia

⊿ABC: BC < AC

⊿BCD: BC < CD

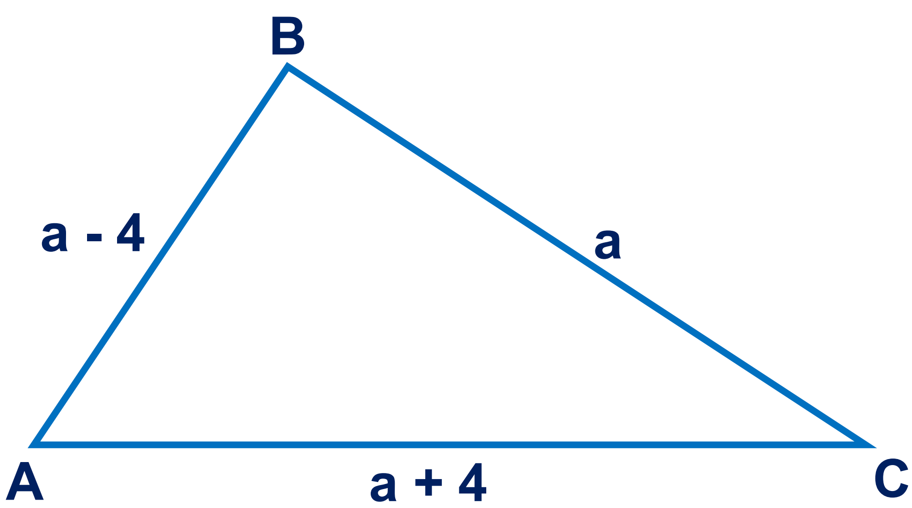
$$70° - x < 20° + x$$

$$50° < 2x$$

$$25° < x$$

$$\boxed{x_{min} = 26°}$$

9. Las medidas de los lados de un triángulo se encuentran en progresión aritmética de razón 4. Calcule el menor valor entero del perímetro.



Resolución

- **Piden: El menor valor entero del $2p_{(ABC)}$**

$$2p_{(ABC)} = a - \cancel{4} + a + a + \cancel{4}$$

$$2p_{(ABC)} = 3a$$

- **ΔABC: Teorema de la existencia**

$$(a + 4) - (a - 4) < a < (a + 4) + (a - 4)$$

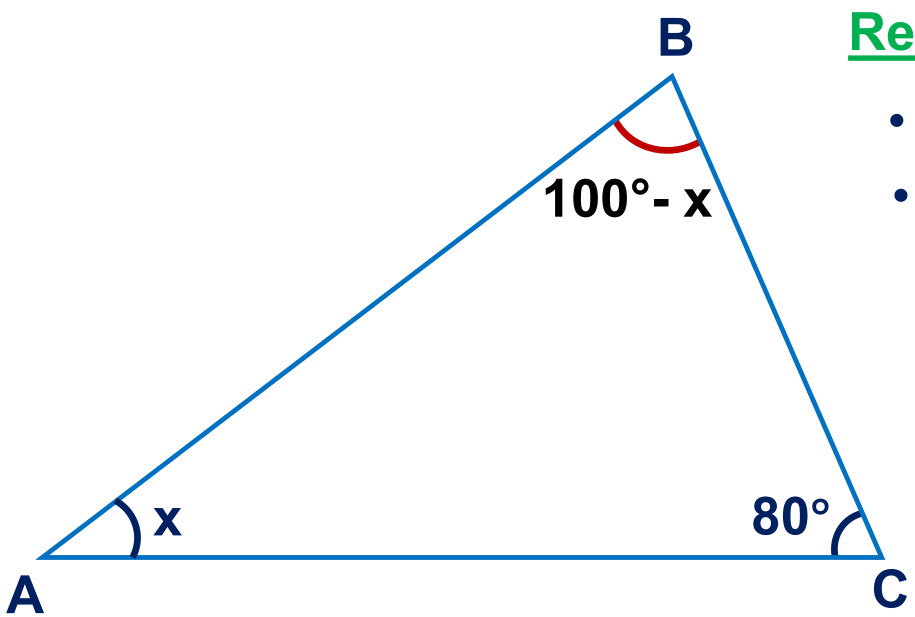
$$8 < a < 2a$$

$$24 < 3a < 6a$$

$$24 < 2p_{(ABC)}$$

$$\boxed{2p_{(ABC)} = 25 \text{ u}}$$

10. El director de un colegio evalúa a su mejor alumno y le da el siguiente problema. En la figura, halle el menor valor entero de x, si BC > AC. ¿Cuál fue la respuesta del alumno?



Resolución

- Piden: el menor valor entero de x
- Aplicando el teorema de la correspondencia

Si: $AC < BC$

$\rightarrow 100° - x < x$

$100° < 2x$

$50 < x$

$\boxed{x_{min} = 51°}$