VERANO 2021

ALGEBRA

TEMA 4:

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

SACO OLIVEROS

MOTIVACION

DIVISIÓN DE POLINOMIOS

DEFINICIÓN DE DIVISIÓN ALGEBRAICA

Es la operación cuya finalidad es obtener las expresiones algebraicas llamadas cociente y residuo; dadas otras dos expresiones denominadas dividendo y divisor.

$$\underbrace{D(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{d(x)}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{q(x)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Residuo}}$$

CLASES DE DIVISIÓN

1. División exacta

$$R(x) = 0$$

Entonces:

$$\boxed{D(x) = d(x) \cdot q(x)}$$

2. División inexacta

$$R(x) \neq 0$$

Entonces:

$$\boxed{D(x) = d(x) \cdot q(x) + R(x)}$$

TEORIA

DIVISIÓN POLINÓMICA

I) División Euclidiana

Condición Necesaria :

$$\boxed{Grado\ Dividendo \geq Grado\ divisor}$$

Sea la división de polinomios:

Pol. Dividendo → $\mathbf{D}_{(x)}$

Pol. divisor → $\mathbf{d}_{(x)}$

$$\frac{D_{(x)}}{d_{(x)}} \xrightarrow{\text{Genera}} \begin{cases} \text{Pol. Cociente: } q_{(x)} \\ \text{Pol. Residuo (Resto): } R_{(x)} \end{cases}$$

Identidad fundamental de la división, también Algoritmo de Euclides

$\boldsymbol{Dividendo}: \boldsymbol{D(x)}$

Divisor: d(x)

Resido: R(x)

Cociente: q(x)

$$\boldsymbol{D(x) \equiv d(x).q(x) + R(x)}$$

Por ejemplo con números

$$\begin{array}{r|l} 129 & 6 \\ \hline 3 & 21 \end{array}$$

Propiedades de grados:

a) $$(q)^{\circ} = (D)^{\circ} - (d)^{\circ}$$

b) $$(R)^{\circ}_{Max} = (d)^{\circ} - 1$$

Ejemplo:

$$\frac{3x^{15} + 7x^{5} + 2}{8x^{10} - 5x + 1}$$

$$(q)^{\circ} = (D)^{\circ} - (d)^{\circ}$$

$$(q)^{\circ} = 15 - 10$$

$$(q)^{\circ} = 5$$

Ejemplo:

$$\frac{ax^{5} + bx + c}{2x^{3} + 5}$$

$$(R)^{\circ}_{Max} = (d)^{\circ} - 1$$

$$(R)^{\circ}_{Max} = 3 - 1$$

$$(R)^{\circ}_{Max} = 2$$

A) MÉTODO DE HORNER

Para éste método los polinomios a dividir deben estar completos y ordenados en forma descendente; además, si faltase un término se le asumirá ceros.

<u>Esquema :</u>

Coeficientes del Dividendo

Coefic. signo cambiado (desde el 2do)

Coefic. del divisor

Según el grado del divisor

Cociente $\underbrace{\quad}_{q_{(x)}}$

Residuo $\underbrace{\quad}_{R_{(x)}}$

Ejemplo:

Calcule el cociente y residuo de dividir

$$\frac{4x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 2x - 7}{2x^2 + 3x - 1}$$

q(x)= $2x^2 + 3x - 1$

r(x)= $4x - 8$

		6	-2		
÷ 2	4	12	5	-2	-7
-3		-6	2		
			-9	3	
x 1				3	-1
	2	3	-1	**4**	**-8**

B) REGLA DE RUFFINI

Se utiliza para calcular divisiones de la forma: $\frac{P(x)}{ax+b}$

$ax+b=0$	Coeficientes del Dividendo	
$\boxed{x=-\frac{b}{a}}$		
	Cociente	**Residuo**

1er Caso: (a=1)

Calcule cociente y residuo

$$\frac{5x^3 - 7x^2 + 2x - 1}{x - 2}$$

$x - 2 = 0$	5	-7	2	-1
$x = 2$		10	6	16
x	5	3	8	15

q(x)= $5x^2 + 3x + 8$

r(x)= 15

2do Caso: (a≠1)

Calcule el cociente de dividir:

$$\frac{6x^3 - x^2 + 7x + 3}{2x - 1}$$

$2x - 1 = 0$	6	-1	7	3
$x = \frac{1}{2}$		3	1	4
x	6	2	8	7
÷2	3	1	4	

q(x)= $3x^2 + x + 4$

c) TEOREMA DEL RESTO

$$\boxed{\frac{D_{(x)}}{ax+b} \Rightarrow Resto: R = D_{\left(-\frac{b}{a}\right)}}$$

<u>Forma práctica</u>

1. El divisor se igual a cero $(ax + b = 0)$

2. Se despeja la variable $\left(x = -\frac{b}{a}\right)$

3. Se reemplaza en el dividendo
   Obteniendo el resto $\left(R = D_{\left(-\frac{b}{a}\right)}\right)$

EJEMPLO

Calcule el resto de la siguiente división:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 2x + 6}{x - 2}$$

Resolución

1) $x - 2 = 0$

2) $\boxed{x = 2}$

3) Reemplazando en el numerador

$$R = (2)^4 - 2(2)^3 + 2(2) + 6$$

$$\boxed{R = 10}$$

Calcule el residuo: $\dfrac{(3x+7)^5+(2x+5)^3+9x^2+2}{x+3}$

<u>Resolución</u>

Por teorema del RESTO

$$x+3=0 \qquad \boxed{x=-3}$$

$$R(x)=[3(-3)+7]^5+[2(-3)+5]^3+9(-3)^2+2$$

$$R(x)=(-2)^5+(-1)^3+9(9)+2$$

$$R(x)=-32-1+81+2=50$$

Halle el resto de dividir: $\dfrac{x^{102} - x^{51} - x^4 + 2}{x^2 - x + 1}$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(x^3)^{34} - (x^3)^{17} - x^3 . x + 2$$

Por teorema del resto

$$x^2 - x + 1 = 0$$

$$\underbrace{(x^2 - x + 1)(x+1)} = 0(x+1)$$

$$x^3 + 1 = 0$$

$$\boxed{x^3 = -1}$$

$$RESTO = (-1)^{34} - (-1)^{17} - (-1)^3 . x + 2$$

$$RESTO = 1 + 1 + x + 2$$

$$\boxed{RESTO = x + 4}$$

Obtenga el residuo de:

$$\frac{(x+3)(x+4)(x+2)(x+5)+1}{x^2+7x-8}$$

Resolución

$$\frac{(x^2+7x+12)(x^2+7x+10)+1}{x^2+7x-8}$$

$$x^2+7x-8=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+7x=8$$

$$(8+12)(8+10)+1$$

$$(20)(18)+1$$

$$360+1$$

$$\boxed{R(x)=361}$$

PRACTICA DE CLASE

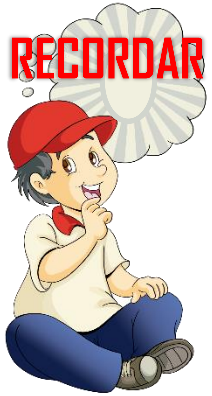
PROBLEMA $\boxed{1}$

Halle el resto en

$$\frac{4x^3 - 9x^2 + 20x - 35}{x - 2}$$

A) 1 B) 2

C) –1 D) –2



Resolución:

Usamos el Teorema del Resto:

$$x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Reemplazamos:

$$4(\,2)^3 - 9(\,2)^2 + 20(2\,) - 35$$

$$R(x) = \quad 32 \quad -36 \quad +40 \quad -35$$

$$-4 \qquad +5$$

$$\boldsymbol{R(x) = 1}$$

PROBLEMA 2

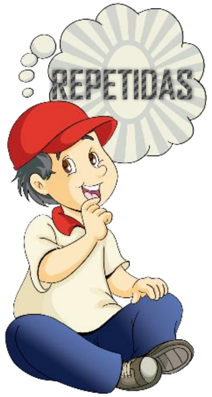
Halle el valor de m para que la siguiente división:

$$\frac{x^4-5x^2+4x-m}{x+1}$$

sea exacta.

A) –8 B) –4

C) 1 D) 9



Cuando la división es exacta el residuo es nulo

Resolución:

Usamos el Teorema del Resto:

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

Reemplazamos:

$$(-1)^4-5(-1)^2+4(-1)-m$$

$$\boldsymbol{R(x)} = \quad 1 \quad \mathbf{-5} \quad \mathbf{-4} \quad \boldsymbol{-m}$$

$$\boldsymbol{R(x)=-m-8}$$

$$\boldsymbol{-m-8=0}$$

$$\boxed{\boldsymbol{m=-8}}$$

PROBLEMA 3

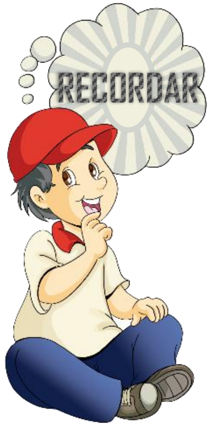
La siguiente división:

$$\frac{2x^4+7x^3+16x^2+Ax+B}{2x^2+3x+4}$$

deja como resto $13x+3$. Calcule A/B.

A) 1 B) 2

C) 3 D) 1/2



Resolución:

Usamos Horner:

		4	6		
2	2	7	16	A	B
-3		-3	-4		
-4			-6	-8	
				-9	-12
	1	2	3	$A-17$	$B-12$

$$R(x) = (A-17)x + (B-12)$$

$A - 17 = 13$ $B - 12 = 3$

$A = 30$ $B = 15$

$$\frac{A}{B} = 2$$

PROBLEMA $\boxed{4}$

Divida

$$\frac{12x^4-14x^3+15x^2-6x+4}{4x^2-2x+1}$$

y halle el residuo.

A) $x+2$ B) $x-1$

C) $2x-1$ D) 2

Resolución:

Usamos Horner:

		-8	$\mathbf{8}$		
4	12	-14	15	-6	4
2		$\mathbf{6}$	$\mathbf{-3}$		
-1			-4	2	
				4	-2
	3	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{2}$	0	2

$$R(x) = 0x + 2$$

$$\boldsymbol{R(x) = 2}$$

PROBLEMA $\boxed{5}$

Al efectuar la siguiente división:

$$\frac{4x^4+13x^3+28x^2+25x+12}{4x^2+5x+6}$$

indique su cociente.

A) x^2+2x-3 B) x^2-2x+3

C) x^2+2x+3 D) x^2+3x+2

Resolución:

Usamos Horner:

		8	**12**		
4	4	13	28	25	12
-5		$\mathbf{-5}$	$\mathbf{-6}$		
-6			-10	-12	
				-15	-18
	1	**2**	**3**	-2	-6

el cociente es:

$$\boldsymbol{q(x) = x^2 + 2x + 3}$$

PROBLEMA 6

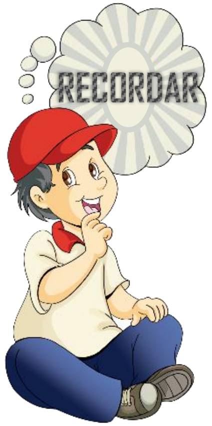
Calcule a+b+c si la división

$$\frac{4x^4+3x^3+ax^2+bx+c}{x^3-x+2x^2+1}$$

es exacta.

A) 0   B) 5

C) 10   D) –10



cuando es exacta, el residuo es nulo

Resolución:

Usamos Horner:

-5

1	$\mathbf{4}$	$\mathbf{3}$	$\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{c}$
-2		-8	4	-4	
1			10	-5	5
-1					
	4	-5	$a+14$	$b-9$	$c+5$

$a+14=\mathbf{0}$ $b-9=\mathbf{0}$ $c+5=\mathbf{0}$

$a=-14$ $b=9$ $c=-5$

$$\boldsymbol{a+b+c=-10}$$

PROBLEMA 7

Escriba verdadero (V) o falso (F) según corresponda, luego marque la alternativa correcta, respecto a la división

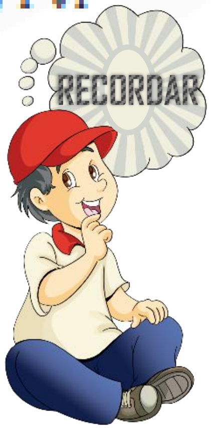
$$\frac{12x^4+9x^3-41x^2+84x-59}{4x^2-5x+7}$$

- La suma de coeficientes del resto es 1. (***F***)
- El término lineal del cociente es 6x. (***V***)
- La suma del cociente y resto es $3x^2+8x-5$ (***F***)

A) VVV B) FVV

C) FVF D) VFV

Entonces:



Usamos Horner: **Resolución:**

		24	−32		
4	12	9	− 41	84	− 59
5		15	− 21		
−7			30	− 42	
				−40	56
	3	$\boxed{6}$	−8	2	− 3

$Término\ Lineal = 6x$

$\sum Coeficientes = -1$

$$q(x) = 3x^2 + 6x - 8$$
$$R(x) = 2x - 3$$

$$q(x) + R(x) = 3x^2 + 8x - 11$$

FVF

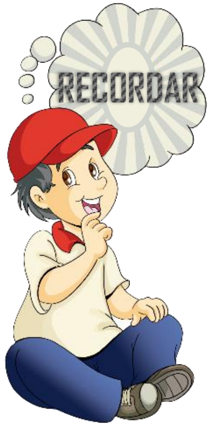
PROBLEMA $\boxed{8}$

Determine el resto de la siguiente división:

$$\frac{x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 1}$$

A) $3(7x-3)$ B) $3(7x+3)$

C) $3(3-7x)$ D) $-21+9x$



Resolución:

Usamos Horner:

		-3	8		
1	1	-1	1	-2	1
-2		-2	1		
1			6	-3	
				-16	8
	1	-3	8	-21	9

$$\boldsymbol{R(x) = 9 - 21x}$$

$$= 3.3 - 3.7x$$

$$\boxed{\boldsymbol{R(x) = 3(3 - 7x)}}$$

PROBLEMA 9

Mario y Jorge tienen M y J soles, en ese orden. Si la división

$$\frac{x^4+x^3-5x^2+Mx+J}{x^2-2x+2}$$

deja como resto 4, ¿cuántos soles debe darle Mario a Jorge para que ambos tengan la misma cantidad?

A) 1 B) 2

C) 3 D) 4

Resolución:

Usamos Horner:

$$\begin{array}{r|rrr:rr}
 & & 3 & -1 & & \\
1 & 1 & 1 & -5 & M & J \\
\hline
2 & & 2 & -2 & & \\
-2 & & & 6 & -6 & \\
 & & & & -2 & 2 \\
\hline
 & 1 & 3 & -1 & M-8 & J+2
\end{array}$$

$R(x) = (M-8)x + (J+2)$

$R(x) = \quad 0x \quad + 4$

$M-8=0$ | $J+2=4$

$M=8$ | $J=2$

	Tienen	*Si Mario le entrega x soles a Jorge*
Mario	$M=8$	$8-x$
Jorge	$J=2$	$2+x$

$8-x=2+x \quad \Rightarrow \quad x=3$

Deberá de darle 3 soles

PROBLEMA 10

Actualmente, Luis tiene L años. ¿Dentro de cuántos años Luis cumplirá 18 años si se sabe que la división

$$\frac{6x^3-3x^2-x-L}{2x-3}$$

es exacta?

A) 12 B) 9

C) 6 D) 3

Resolución:

Usamos el Teorema del Resto:

$$2x-3=0$$

$$x=\frac{3}{2}$$

Reemplazando:

$$6\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)-L$$

$$6\left(\frac{27}{8}\right)-3\left(\frac{9}{4}\right)-\frac{3}{2}-L$$

$$\frac{81}{4}-\frac{27}{4}-\frac{6}{4}-L$$

$$R(x)=12-L$$

$$12-L=0$$

$$L=12$$

Luís tiene actualmente 12 años

Cumplirá 18 años,

Dentro de 6 años