



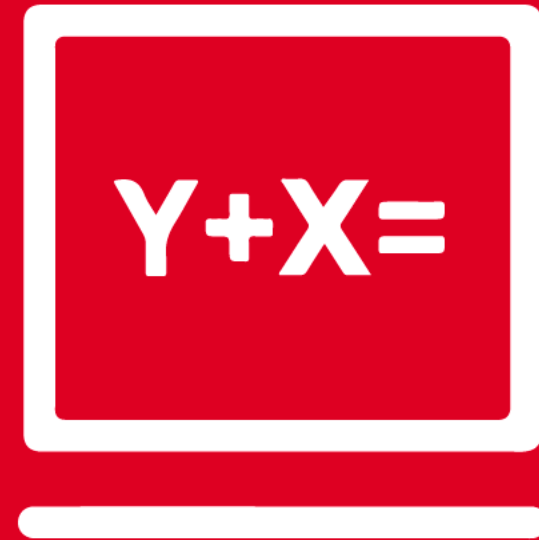
# ARITHMETIC

## Chapter 1

Summer

San Marcos 2021

Razones y proporciones



 **SACO OLIVEROS**



## Historia de las Razones y Proporciones

Es difícil saber si es que alguien realmente lo descubrió ya que ha estado con nosotros por mucho tiempo. Según D.E. Smith, la historia de la matemática comienza de una forma que es difícil en qué momento aparecieron las razones y proporciones.

La idea de que una tribu es el doble de grande que la otra y la idea de que la correa de cuero es solo la mitad de larga que la de otra persona hace uso de este tema. Estas son cosas que comenzaron desde hace mucho tiempo, del comienzo de nuestra historia. En este caso, según el ejemplo, uno se refiere a las razones aritméticas y otro a geométricas.

# RAZÓN

Es la comparación de las medidas de dos cantidades homogéneas, ya sea mediante la sustracción o división.

Razón Aritmética	Razón Geométrica
$a - b = r$	$\frac{a}{b} = k$

Donde

a: antecedente

b: consecuente

r: valor de la razón aritmética

k: valor de la razón geométrica

Observación:

Cuando en un problema sólo se indique razón o relación se entenderá que es la geométrica.



**Ejemplo:**

Las edades de Javier y Mayté son 20 años y 18 años respectivamente.

★ Comparando dichas edades mediante la sustracción:

$$\underbrace{20 \text{ años} - 18 \text{ años}}_{\text{Razón Aritmética}} = \underbrace{2 \text{ años}}_{\text{Valor de la Razón Aritmética}}$$

Se afirma:

- La edad de Javier excede a la edad de Mayté en 2 años.
- Javier tiene 2 años más que Mayté.
- La edad de Mayté es excedido por la edad de Javier en 2 años.

## ★ Comparando dichas edades mediante la división:

$$\underbrace{\frac{20 \text{ años}}{18 \text{ años}}}_{\text{Razón Geométrica}} = \frac{10}{9} \left\{ \begin{array}{l} \text{Valor de la} \\ \text{Razón} \\ \text{Geométrica} \end{array} \right.$$

Se afirma:

- La razón de edades de Javier y Mayté es 10/9.
- La relación entre la edad de Javier y Mayté es de 10 a 9.
- La edad de Javier es a la edad de Mayté como 10 a 9.
- Las edades de Javier y Mayté son entre sí como 10 a 9.



## PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones aritméticas o dos razones geométricas que tiene un mismo valor.

### ★ Proporción Aritmética:

$$a - b = c - d$$

### ★ Proporción Geométrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

En ambos casos:

a y c: Antecedentes

b y d: Consecuentes

a y d: Términos extremos

b y c: Términos medios

Clasificación:

	Proporción Aritmética	Proporción Geométrica
Discreta (Medios Diferentes)	<div><math>a - b = c - d</math></div> <div>"d" es la cuarta diferencial de a, b y c</div> <div><math>a + d = b + c</math></div>	<div><math>\frac{a}{b} = \frac{c}{d}</math></div> <div>"d" es la cuarta proporción de a, b y c</div> <div><math>a \times d = b \times c</math></div>
Continua (Medios Iguales)	<div><math>a - b = b - c</math></div> <div>"c" es la tercera diferencial de a y b</div> <div><math>b = \frac{a + c}{2}</math></div> <div>"b" es la media diferencial de a y c</div>	<div><math>\frac{a}{b} = \frac{b}{c}</math></div> <div>"c" es tercera proporcional de a y b</div> <div><math>b = \sqrt{a \times c}</math></div> <div>"b" es la media proporcional de a y c.</div>



SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES(SRGE)

Es la igualdad de tres o más razones geométricas que tiene un mismo valor.

1°

3°

5°

(n-1)°

$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \dots = \frac{a_n}{c_n} =$

k

2°

4°

6°

n°

... (★)

Donde:

a<sub>1</sub>; a<sub>2</sub>; a<sub>3</sub>; ...; a<sub>n</sub>: Antecedentes

c<sub>1</sub>; c<sub>2</sub>; c<sub>3</sub>; ...; c<sub>n</sub>: Consecuentes

k: Constante de Proporcionalidad

Propiedades: De (★)

$$1^\circ \quad \boxed{a_1 = c_1 \times k} \quad \boxed{a_2 = c_2 \times k} \quad \boxed{a_3 = c_3 \times k}$$

$$; \dots; \quad \boxed{a_n = c_n \times k}$$

$$2^\circ \quad \boxed{k = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n}}$$

$$3^\circ \quad \boxed{\frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n}{c_1 \times c_2 \times c_3 \times \dots \times c_n} = k^n}$$

Serie de Razones Geométricas Continuas Equivalentes:

$$\begin{array}{c} 4^\circ \quad 3^\circ \quad 2^\circ \quad 1^\circ \\ \boxed{\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = k} \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} d = e \times k^1 \\ c = e \times k^2 \\ b = e \times k^3 \\ a = e \times k^4 \end{array} \right.$$



Ejemplo:

Si se cumple:

$$\frac{256}{m} = \frac{m}{a} = \frac{a}{y} = \frac{y}{t} = \frac{t}{e} = \frac{e}{4}$$

Calcule:  $m + a + y + t + e$

Resolución:

$$\frac{256}{m} = \frac{m}{a} = \frac{a}{y} = \frac{y}{t} = \frac{t}{e} = \frac{e}{4} = k$$

Se observa que:

$$256 = 4k^6 \rightarrow 64 = k^6$$

$$\rightarrow k = 2$$

Luego:

$$\frac{256}{m} = \frac{m}{a} = \frac{a}{y} = \frac{y}{t} = \frac{t}{e} = \frac{e}{4} = 2 = \frac{2}{1}$$

∴

$$\boxed{m + a + y + t + e = 248}$$



1. Dos números son proporcionales a 3 y 7, el doble del segundo y el triple del primero difieren en 45. Halle el valor del menor número.

A) 18

~~B) 27~~

C) 21

D) 24

E) 33

## Resolución:

Los números son:  $3k$  y  $7k$

$$\rightarrow 2(7k) - 3(3k) = 45$$

$$14k - 9k = 45$$

$$5k = 45$$

$$k = 9$$

Luego:  $3(9)$  y  $7(9)$

 $\therefore$ 

# Menor = 27



2. ¿Dentro de cuántos años, la relación entre las edades de dos personas será igual a  $7/6$ ; si sus edades actualmente son 40 y 30 años?

A) 45

B) 40

C) 35

~~D) 30~~

E) 25

### Resolución:

Dentro de “n” años la relación de edades será:

$$\frac{40 + n}{30 + n}$$

Por dato dicha relación será:

$$\frac{40 + n}{30 + n} = \frac{7}{6}$$

$$\rightarrow 240 + 6n = 210 + 7n$$

$$30 = n$$

 $\therefore$ 

Dentro de 30 años





**3.** Lo que cobra y lo que gasta diariamente un individuo suma 600 soles; lo que gasta y lo que cobra está en la relación de 2 a 3. ¿En cuánto tiene que disminuir el gasto diario para que dicha relación sea de 3 a 5?

- ~~A) 24~~      B) 30      C) 34  
D) 42      E) 50

### Resolución:

**Dato:**  $\underbrace{\text{Cobra}}_{3k} + \underbrace{\text{Gasta}}_{2k} = 600$

$$3k + 2k = 600$$

$$k = 120$$

Sea “n” el gasto diario a disminuir, entonces gastará:  $2.120 - n$ ; luego:

$$\frac{2.120 - n}{3.120} = \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow 10.120 - 5n = 9.120$$

$$120 = 5n$$

$$n = 24$$

∴ **Debe disminuir en 24**



4. En una proporción geométrica continua, el producto de los 4 términos es 20736. Si uno de los extremos es  $1/9$  del otro, calcule la suma de los 4 términos de la proporción.

A) 48

B) 54

C) 60

~~D) 64~~

E) 68

### Resolución:

Sea la proporción geométrica continua:

$$\frac{9n}{b} = \frac{b}{n}$$

$$\rightarrow \underbrace{a \cdot b \cdot b \cdot c}_{= 20736}$$

$$b^4 = 3^4 \cdot 4^4 \rightarrow b = 12$$

Luego:

Prod. de extremos = Prod. de medios

$$\rightarrow \overset{1}{\cancel{9n}} \cdot \overset{4}{\cancel{n}} = \overset{4}{\cancel{12}} \cdot \overset{1}{\cancel{12}} \rightarrow n = 4$$

$$\rightarrow a + b + b + c = 9n + 12 + 12 + n$$

$\therefore$

Suma términos = 64



**5.** Las edades de Diana y Fabiola están en la relación de 2 a 5. Dentro de 5 años sus edades sumarán 59 años. Halle la edad de Margarita si hoy la relación de la edad de Diana y Margarita es de 7 a 10.

- A) 28      B) 32      ~~C) 20~~  
D) 15      E) 30

### Resolución:

**Dato:** Edad<sub>D</sub> = 2k,      Edad<sub>F</sub> = 5k

**Dentro de 5 años:**

$$(2k + 5) + (5k + 5) = 59$$

$$7k + 10 = 59$$

$$k = 7$$

**Luego:**

$$\frac{\text{Edad}_D}{\text{Edad}_M} = \frac{7}{10} \rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{2.7}}}{\text{Edad}_M} = \frac{\overset{1}{\cancel{7}}}{10}$$

∴

$$\text{Edad}_M = 20 \text{ años}$$



**6.** En una proporción geométrica continua, la suma de los extremos es 73 y la suma de los cuadrados de estos extremos es 4177. Determine la media proporcional.

A) 18

B) 21

C) 16

~~D) 24~~

E) 30

### Resolución:

Sea la proporción geométrica continua:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$$

$$\star \quad a + c = 73 \quad \dots (1)$$

$$\star \quad a^2 + c^2 = 4177 \quad \dots (2)$$

De (1), al cuadrado:

$$\underbrace{a^2 + c^2}_{4177} + \underbrace{2ac}_{2b^2} = 5329$$

$$4177 + 2b^2 = 5329$$

$$2b^2 = 1152$$

$$b^2 = 576$$

 $\therefore$ 

$$b = 24$$



**7.** De un grupo de alumnos de la academia se retiran 15 mujeres, quedando 2 hombres por cada mujer, después se retiran 45 hombres, quedando 5 mujeres por cada hombre. ¿Cuántas personas hubo inicialmente en el grupo?

A) 70

B) 75

~~C) 90~~

D) 85

E) 100

## Resolución:

★ Se retiran 15 mujeres, quedan:

$$H = 2k, \quad M = k$$

→ Al inicio habían:

$$H = 2k, \quad M = k + 15$$

★ Se retiran 45 hombres, quedan:

$$H = 2k - 45, \quad M = k$$

→ La nueva relación de mujeres a hombres es de 5 a 1:

$$\frac{k}{2k - 45} = \frac{5}{1} \quad \rightarrow k = 10k - 5.45$$

$$\rightarrow 5.\overset{5}{\cancel{45}} = \cancel{9}k \quad \rightarrow k = 25$$

∴

Al inicio habían = 90



8. En una reunión asistieron personas solteros y casados en relación de 13 a 5, la razón entre hombres casados y mujeres casadas es de  $\frac{3}{2}$ . Si asistieron 900 personas en total, ¿cuántas mujeres casadas asistieron a dicha reunión?

- A) 50      B) 150      ~~C) 100~~  
D) 650      E) 250

## Resolución:

Dato:

$$\text{Solteros} = 13k$$

$$\text{Casados} = 5k \begin{cases} H_C: 3k \\ M_C: 2k \end{cases}$$

$$\rightarrow 13k + 5k = 900$$

$$18k = 900$$

$$k = 50$$

$\therefore$

$$M_C = 100$$



9. En un acuario hay peces de colores azul, rojo y amarillo. Si el número de peces azules es al número de peces rojos como 6 a 5 y el número de peces amarillos es al número de peces azules como 5 es a 4, ¿cuántos peces azules hay en el acuario si la razón aritmética entre el número de peces amarillos y rojos es 15?

- A) 24      B) 48      ~~C) 36~~  
D) 30      E) 45

## Resolución:

Peces      Deben ser iguales

Azules:       $\boxed{6.2 \quad 4.3} \rightarrow 12k$

Rojos:       $5.2 \rightarrow 10k$

Amarillos:       $5.3 \rightarrow 15k$

$\rightarrow \text{mcm}(6; 4) = 12$

Dato:       $15k - 12k = 15$   
 $k = 3$

$\therefore$  **# Peces Azules = 36**



**10.** Cierta día en el comedor de la Universidad Nacional Mayor de San Marcos se observó que por cada 8 estudiantes que hacen cola solo 5 logran almorzar. Al día siguiente esta relación se alteró ya que por cada 9 estudiantes que hacen cola almorzarán solo 4. Si en ambos días la cantidad de alumnos que no almuerzan son iguales, determine la cantidad de alumnos que almorzaron en el segundo caso si en el primero almorzaron 500 estudiantes.

- A) 100      B) 180      C) 270  
D) 120      ~~E) 240~~

## Resolución:

	$E_a$	$E_{Na}$	
1er. día $E_c$	5.5.20	3.5.20	8.5.20
2do. día $E_c$	4.3.20	5.3.20	9.3.20

Deben ser iguales

→  $mcm(3; 5) = 15$

∴

2do. día  $E_a = 240$