MV011 Statistika I – cvičení 2

Klasická a geometrická pravděpodobnost

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

jaro 2016

Klasická pravděpodobnost

Klasická pravděpodobnost na pstním prostoru $(\Omega, \mathcal{A} = 2^\Omega, P)$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad \text{kde } |A| = \text{ počet elementárních jevů příznivých jevu } A.$$

Funkce knihovny `prob` pro výpočty s klasickou pravděpodobností v *R*:

- `tosscoin` – mince,
- `rolldie` – kostky,
- `urnsamples` – výběr předmětů z přihrádek
- `probspace` – reprezentace pravděpodobnostního prostoru
- `iidspace` – opakované nezávislé náhodné pokusy
- `isin` – patří prvek do množiny? . . . . $\omega \in A$?
- `subset` – výběr podmnožiny . . . . $A \subseteq B$, $A \subseteq \Omega$
- `union` – množinové sjednocení . . . . $A \cup B$
- `intersect` – množinový průnik . . . . $A \cap B$
- `setdiff` – množinový rozdíl . . . . $B \setminus A$
- `Prob` – výpočet klasické a podmíněné pravděpodobnosti . . . . . . $P(A)$, $P(A|B)$

Příklad 1

Házeme n krát mincí. Spočítejte pravděpodobnosti jevů: A = padnou samé líce, B_k = právě k krát padne líc ($k = 0, 1, \ldots, n$).
(Samostatně v R dále spočítejte pravděpodobnosti jevů:
C_k = padne alespoň k líců; D_k = padne nejvýše k líců.)

Příklad 2

Dítě si hraje s 10 kartičkami, které náhodně skládá do řady. Na každé kartičce je jedno písmeno: A, A, A, E, I, K, M, M, T, T. S jakou pravděpodobností se mu povede poskládat slovo MATEMATIKA?

Příklad 3

Náhodně vybereme 3 osoby. S jakou pravděpodobností mají tito lidé narozeniny ve 3 různých dnech v roce? (Uvažujte nepřestupný rok.)

Příklad 4

V dodávce 100 LCD monitorů je průměrně 5 monitorů s vadnými pixely. Při namátkové kontrole dodávky jsou náhodně vybrány 4 monitory a ty jsou otestovány. Určete pravděpodobnosti jevů: $A =$ právě jeden z testovaných monitorů má vadné pixely, $B =$ alespoň jeden z testovaných monitorů má vadné pixely, $C =$ nejvýše jeden z testovaných monitorů má vadné pixely.

Příklad 5

Pravděpodobnost, že hasicí systém továrny selže, je 20 %; že selže poplachové zařízení, je 10 %; a že selže obojí současně, je 4 %. Spočítejte pravděpodobnosti jevů: $C_1 =$ alespoň jeden mechanizmus selže, $C_2 =$ oba mechanizmy budou fungovat, $C_3 =$ alespoň jeden mechanizmus bude fungovat.

Příklad 6

Házeme dvěma kostkami. Určete pravděpodobnosti jednotlivých součtů padlých čísel. Je větší šance hodit součet 6, anebo součet 7?

Příklad 7

Házeme třemi kostkami. (A) Je větší šance hodit součet 11, anebo součet 12?
(B) Určete pravděpodobnosti jednotlivých součtů padlých čísel.
(C) S jakou pravděpodobností padnou právě 3 "6"?
(D) S jakou pravděpodobností padnou alespoň 2 "6"?
(E) S jakou pravděpodobností padnou samá sudá čísla?
(F) S jakou pravděpodobností padne postupka "1"–"2"–"3"?
(G) S jakou pravděpodobností bude součin padlých čísel dělitelný 3?

Příklad 8

Z balíčku 32 hracích karet vybíráme dvakrát za sebou po jedné kartě. (A) Jaká je pravděpodobnost, že obě karty jsou stejné barvy, jestliže jsme první vytaženou kartu vrátili zpět? (B) Jaká je pravděpodobnost, že obě karty jsou esa, jestliže jsme první vytaženou kartu nevrátili zpět?

Příklad 9

Házíme šesti kostkami. Spočítejte pravděpodobnosti následujících jevů:
A = *padnou samé šestky,* B = *padnou právě čtyři šestky,* C = *padnou alespoň čtyři šestky,* D = *padnou samá sudá čísla,* E = *padna postupka.*

Geometrická pravděpodobnost

Geometrická pravděpodobnost jevu A:

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)},$$

kde $\mu(A)$ značí *míru* množiny elementárních jevů příznivých jevu A.
V euklidovském prostoru se jedná o *vícerozměrný objem*, tzn. o délku při 1D, o obsah při 2D, resp. o objem při 3D reprezentaci náhodného pokusu.

V příkladech si kromě výpočtu pravděpodobnosti vyzkoušejte i simulace náhodných pokusů, pomocí nichž pravděpodobnost $P(A)$ aproximujte **relativní četností** $f_n(A)$ sledovaného jevu A v po sloupnosti n nezávislých pokusů:

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n} \longrightarrow P(A), \qquad (n \to \infty).$$

n_A je přitom počet těch pokusů , při nichž jev A nastal.
Sledujte chování $f_n(A)$, když zvyšujete počet opakování n.

Příklad 10

Eva s Honzou jdou na schůzku. Nedomluvili si přesný čas, jen to, že oba přijdou do kavárny někdy mezi 18.00 a 19.00 hod. Eva na příchod Honzy počká 20 minut, Honza na Evu počká 10 minut. S jakou pravděpodobností se v kavárně setkají?

Příklad 11

K nákladní rampě skladu distribuční společnosti přijíždí každý den jeden kamion společnosti A a druhý společnosti B, každý v náhodném čase právě jednou za den. Kamion A stojí u rampy 60 minut, kamion B 120 minut. Jaká je pravděpodobnost, že se oba kamiony u rampy potkají a jeden z nich tak bude muset čekat?

Příklad 12

Hráč háže míček o poloměru $r = 2$ *cm proti velké síti s oky tvaru čtverce o straně* $a = 10$ *cm. S jakou pravděpodobností míček proletí některým okem sítě? (Poté modifikujte řešení pro případ sítě s oky tvaru obdélníka o stranách* a, b.)

Příklad 13

Tyč délky 10 cm je dvěma náhodně zvolenými řezy rozdělena na 3 části. Spočítejte pravděpodobnost, že z těchto tří částí bude možné sestavit trojúhelník.

Výsledky

2. $6{,}61 \cdot 10^{-6}$
3. $0{,}9918$
4. $0{,}1765$; $0{,}1881$; $0{,}9884$
5. $0{,}26$; $0{,}74$; $0{,}96$
8. $0{,}25$; $0{,}012$
9. $2{,}1 \cdot 10^{-5}$; $8{,}04 \cdot 10^{-3}$; $8{,}7 \cdot 10^{-3}$; $1{,}56 \cdot 10^{-2}$; $1{,}54 \cdot 10^{-2}$
10. $0{,}431$
11. $0{,}125$
12. $0{,}36$
13. $0{,}25$